

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN (Ln)

1- Définition :

On appelle une fonction logarithme népérien toute expression ayant pour forme $\ln(u(x))$ avec $u(x)$ étant une fonction (polynôme ou rationnelle ou irrationnelle ou exponentielle ou ln ou circulaire).

NB : $u(x)$ représente toute écriture ou expression se trouvant après la fonction ln tout en sachant qu'elle est toujours attachée avec cette fonction.

Exemples :

- $f(x) = \ln\sqrt{2x+1}$ avec $u(x) = \sqrt{2x+1}$
- $f(x) = \ln x^2 + 2x$ avec $u(x) = x^2$
- $g(x) = 2x \ln x$ avec $u(x) = x$

2- Ensemble de définition d'une fonction logarithme népérien (ln) :

L'ensemble de définition d'une fonction ln dépend de la forme qu'elle dispose :

- **1^{er} cas** : $f(x) = \ln(u(x))$

$f(x)$ existe ssi $u(x) > 0$

Exemple : $f(x) = \ln(2x+1)$ avec $u(x) = 2x+1$

$f(x)$ existe ssi $2x+1 > 0 \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$ alors $E_f =]-\frac{1}{2}; +\infty[$

- **2^e cas** : $f(x) = \ln\sqrt{u(x)}$

$f(x)$ existe ssi $u(x) > 0$

Exemple : $f(x) = \ln\sqrt{x-1}$ avec $u(x) = x-1$

$f(x)$ existe ssi $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$ alors $E_f =]1; +\infty[$

- **3^e cas** : $f(x) = \ln|u(x)|$

$f(x)$ existe ssi $u(x) \neq 0$

Exemple : $f(x) = \ln|-x+1|$ avec $u(x) = -x+1$

$f(x)$ existe ssi $-x+1 \neq 0 \Rightarrow -x \neq -1 \Rightarrow x \neq 1$ alors $E_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

- **4^e cas** : $f(x) = \ln[u(x)]^n$

Lorsqu'on a ce genre de cas, l'ensemble de définition va dépendre de la nature de l'entier n (pair ou impair) :

$$\begin{cases} \text{si } n \text{ est pair alors } u(x) \neq 0 \\ \text{si } n \text{ est impair alors } u(x) > 0 \end{cases}$$

* **Exemple 1** : $f(x) = x + x \ln x^2$ avec $u(x) = x$ et $n = 2$ (n est pair)

$f(x)$ existe ssi $x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ alors $E_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

* **Exemple 2** : $f(x) = x + 1 + \ln(x - 2)^3$ avec $u(x) = x - 2$ et $n = 3$ (n est impair)

$f(x)$ existe ssi $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ alors $E_f =]2; +\infty[$

3- Notion des limites classiques d'une fonction logarithme népérien (ln)

Les limites classiques ont pour but de faciliter la résolution d'une limite.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^n \ln x \text{ ou } x \ln x) = 0$ (avec $n > 1$)

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x} = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n \ln x \text{ ou } x \ln x) = +\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \text{ ou } \frac{\ln x}{x^n} \right) = 0$ (avec $n > 1$)

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x} \text{ ou } \frac{x^n}{\ln x} \right) = +\infty$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \text{ ou } \frac{\ln(ax+1)}{ax} \right) = 1$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

NB : La limite quand x tend vers moins l'infini d'une fonction \ln ($\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x$) n'existe pas. A moins qu'il y ait la présence d'une valeur absolue.

4- Propriétés :

Elle dispose de plusieurs propriétés qui ont pour rôle de faciliter la résolution des équations ou à débloquent des expressions difficilement manipulables.

a) $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

b) $\frac{\ln a}{\ln b} = \ln a - \ln b$

c) $\ln(a)^n = n \ln a$

d) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

e) $\ln a = \ln b \Rightarrow a = b$

f) $\ln e^u = u$ (Exemples : $\ln e^x = x$; $\ln e^2 = 2$)

Remarques :

R₁ : $\ln 0$ n'existe pas (impossible)

R₂ : $\ln 1 = 0$

R₃ : $\ln(-2)$ impossible car la fonction \ln ne possède pas de valeur négative à moins qu'il y ait la présence d'une valeur absolue.

NB : Que le nom de fonction logarithme népérien ne t'intimide pas car au sein des propriétés, elle possède les mêmes réalités que celui des logarithmes (\log) que t'as eu à étudier en classe de 4^e et 3^e.

5- La dérivée d'une fonction ln :

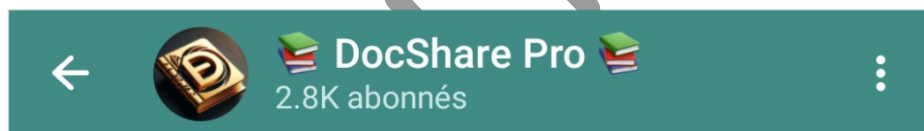
Soit une fonction f , définie par $f(x) = \ln u(x)$. Elle possède pour fonction dérivée f' ayant pour forme : $(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Exemples :

$$f(x) = \ln(2x + 1). \text{ forme : } \ln u = \frac{w}{u} \text{ avec } \begin{cases} u = 2x + 1 \\ \text{et} \\ u' = 2 \end{cases} \text{ d'où } f'(x) = \frac{2}{2x+1}$$

$$g(x) = \ln x. \text{ forme : } \ln u = \frac{w}{u} \text{ avec } \begin{cases} u = x \\ \text{et} \\ u' = 1 \end{cases} \text{ d'où } g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \ln(2x^2 + x). \text{ forme : } \ln u = \frac{w}{u} \text{ avec } \begin{cases} u = 2x^2 + x \\ \text{et} \\ u' = 2(2x) + 1 = 4x + 1 \end{cases} \text{ d'où } g'(x) = \frac{4x+1}{2x^2+x}$$



FONCTION EXPONENTIELLE (Exp)

1- Définition :

On appelle une fonction exponentielle toute expression ayant pour forme $e^{u(x)}$ avec $u(x)$ étant une fonction (polynôme ou rationnelle ou irrationnelle ou circulaire).

NB : $u(x)$ représente toute écriture ou expression se trouvant en haut (sous forme de degré) de la fonction exponentielle.

Exemples :

- $f(x) = e^{-x}$ avec $u(x) = -x$
- $f(x) = e^{\cos x}$ avec $u(x) = \cos x$
- $g(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$ avec $u(x) = \frac{x+1}{x}$

2- Ensemble de définition d'une fonction exponentielle (exp) :

L'ensemble de définition d'une fonction expo dépend de la nature que possède la fonction $u(x)$:

- **1^{er} cas** : $f(x) = e^{ax+b}$ avec $u(x) = ax + b$ (fonction polynôme)

$f(x)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$

Exemple : $f(x) = e^{2x+1}$ avec $u(x) = 2x + 1$

$f(x)$ existe ssi $\forall x \in \mathbb{R}$ alors $E_f =]-\infty ; +\infty[$

- **2^e cas** : $f(x) = e^{\frac{ax+b}{cx+d}}$ avec $u(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (fonction rationnelle)

$f(x)$ existe ssi $cx + d \neq 0$

Exemple : $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$ avec $u(x) = x - 1$

$f(x)$ existe ssi $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ alors $E_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

- **3^e cas** : $f(x) = e^{\sqrt{ax+b}}$ avec $u(x) = \sqrt{ax+b}$ (fonction irrationnelle)

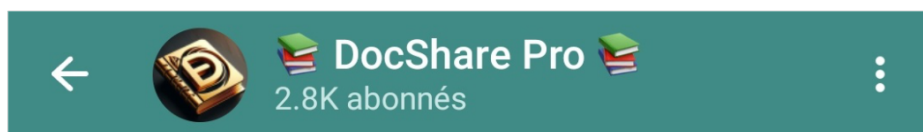
$f(x)$ existe ssi $ax + b \geq 0$

Exemple : $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$ avec $u(x) = \sqrt{2x+1}$

$f(x)$ existe ssi $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ alors $E_f = \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

- **4^e cas** : $f(x) = e^{|ax+b|}$ avec $u(x) = |ax+b|$ (fonction valeur absolue)

$f(x)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$



Exemple : $f(x) = e^{|x|}$ avec $u(x) = |x|$

$f(x)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$ alors $E_f =]-\infty ; +\infty[$

3- Notion des limites classiques d'une fonction exponentielle (exp)

Les limites classiques ont pour but de faciliter la résolution d'une limite.

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n e^x \text{ ou } x e^x) = 0$ (avec $n > 1$)
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} \text{ ou } \frac{e^x}{x^n}\right) = 0$ (avec $n > 1$) d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}-1}{ax} = a$ mais si $a = 1$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n e^x \text{ ou } x e^x) = +\infty$ avec ($n > 1$)
- g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \text{ ou } \frac{e^x}{x^n}\right) = +\infty$ (avec $n > 1$) h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \text{ ou } \frac{x^n}{e^x}\right) = 0$

4- Propriétés :

Elle dispose de plusieurs propriétés qui ont pour rôle de faciliter la résolution des équations ou à débloquent des expressions difficilement manipulables.

- a) $e^a \times e^b = e^{a+b}$ b) $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- c) $(e^a)^n = e^{na}$ d) $\left(\frac{1}{e^a}\right) = e^{-a}$
- e) $e^a = e^b \Rightarrow a = b$ f) $e^{\ln u} = u$ (Exemples : $e^{\ln x} = x$; $e^{\ln 2} = 2$)

Remarques :

R₁ : $e^{-\infty}$ n'existe pas (impossible) à moins s'il s'agit d'une limite.

R₂ : $e^0 = 1$

NB : Que le nom de fonction exponentielle ne t'intimide pas car au sein des propriétés, elle possède les mêmes réalités que celle des puissances de base a que t'as eu à étudier en classe de 5^e ; 4^e et 3^e.

5- La dérivée d'une fonction exponentielle :

Soit une fonction f , définie par $f(x) = e^{u(x)}$. Elle possède pour fonction dérivée f' ayant pour forme : $(e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$

Exemples :

$$f(x) = e^{2x+1}. \text{ forme : } e^u = u' \times e^u \text{ avec } \begin{cases} u = 2x + 1 \\ \text{et} \\ u' = 2 \end{cases} \text{ d'où } f'(x) = 2e^{2x+1}$$

$$g(x) = e^x. \text{ forme : } e^u = u' \times e^u \text{ avec } \begin{cases} u = x \\ \text{et} \\ u' = 1 \end{cases} \text{ d'où } g'(x) = e^x$$

$$g(x) = e^{2x^2+x}. \text{ forme : } e^u = u' \times e^u \text{ avec } \begin{cases} u = 2x^2 + x \\ \text{et} \\ u' = 4x + 1 \end{cases} \text{ d'où } g'(x) = (4x + 1)e^{2x^2+x}$$