

Chapitre 5

Primitives

" Nous appellerons la fonction $f(x)$, fonction primitive, par rapport aux fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, &c. qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci, fonctions dérivées, par rapport à celle-là"

(Lagrange, 1797)

(Cité dans E. Haier et al, L'analyse
au fil de l'histoire, 2000)

Primitives

I. Définition

Activité 1

Soit les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$ et $F(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$.

Vérifier que $F' = f$.

Déterminer une fonction G dérivable sur $\mathbb{R}$ et distincte de F telle que $G' = f$.

Définition

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I . On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$, pour tout x de I .

Activité 2

Dans chacun des cas ci-dessous, vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I .

1. $F(x) = \frac{1}{x}$; $f(x) = -\frac{1}{x^2}$; $I = [1, +\infty[$.

2. $F(x) = x^2$; $f(x) = 2x$; $I = \mathbb{R}$.

3. $F(x) = \tan x$; $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Théorème (admis)

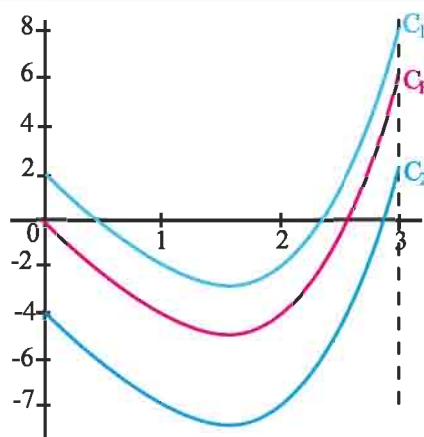
Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I .

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté la courbe C_F de la fonction F définie sur $[0, 3]$ par

$$F(x) = x^3 - x^2 - 4x.$$

Les courbes C_1, C_2 sont les images respectives de C_F par des translations de vecteurs colinéaires à $\vec{j}$.



On désigne par G_1, G_2 les fonctions de courbes respectives C_1, C_2 .

1. Déterminer la dérivée f de F . Que représente F pour f ?
2. Déterminer G_1, G_2 .
3. Soit H une primitive de f sur $[0, 3]$. Justifier que la courbe de H est l'image de celle de F par une translation.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Si F et G sont deux primitives de f sur I , alors la fonction $F - G$ est constante sur I .

Démonstration

Les fonctions F et G étant des primitives de f sur I , il en résulte que $F'(x) - G'(x) = 0$, pour tout x de I . Ce qui implique que $F - G$ est constante sur I .

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit x_0 un réel de I et y_0 un réel. Alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

L'unicité découle du théorème précédent.

D'autre part, soit G une primitive de f sur I .

La fonction F définie sur I par $F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$ est la primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0 .

Activité 4

On considère les fonctions f, g et h définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{(x+2)^2}; \quad g: x \mapsto \sin x + \cos x; \quad h: x \mapsto \sin x - \cos x.$$

Identifier parmi les fonctions suivantes celles qui sont des primitives sur $]0, +\infty[$ de l'une des fonctions précédentes.

$$F_1: x \mapsto 2\sqrt{x} - \frac{2}{x+2} - 4; \quad F_2: x \mapsto \pi - \sin x - \cos x; \quad F_3: x \mapsto -\sin x - \cos x - 1;$$

$$F_4: x \mapsto \sin x - \cos x + \pi; \quad F_5: x \mapsto \sin x - \cos x.$$

Activité 5

Soit F et f les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2$ et $f(x) = \sqrt{x} - x$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la primitive G de f sur $]0, +\infty[$ telle que $G(1) = 2$.

II. Primitives des fonctions usuelles et opérations

Dans le tableau ci-dessous F désigne une primitive de la fonction f sur l'intervalle I et a, c, ω et φ des réels avec $\omega \neq 0$.

f	I	F
$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	$]0, +\infty[$ (ou $]-\infty, 0[$)	$x \mapsto \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x + c$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos x + c$
$x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\omega} \sin(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\frac{1}{\omega} \cos(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$x \mapsto \tan x + c$

Le théorème ci-dessous découle des opérations sur les fonctions dérivables.

Théorème

Soit F et G deux primitives respectives de deux fonctions f et g sur un intervalle I .

- La fonction $F + G$ est une primitive sur I de $f + g$.
- Soit λ un réel. La fonction λF est une primitive sur I de λf .

Activité 1

Déterminer, dans chaque cas, une primitive de f sur l'intervalle I .

1. $f : x \mapsto -2x^2 + 3x, \quad I = \mathbb{R}.$
2. $f : x \mapsto -\frac{3}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad I =]0, +\infty[.$
3. $f : x \mapsto -2\cos x + 5\sin x, \quad I = \mathbb{R}.$
4. $f : x \mapsto \cos(-2x) + \sin(5x), \quad I = \mathbb{R}.$

$$5. f : x \mapsto \tan^2(x), \quad I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

$$6. f : x \mapsto \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}, \quad I = [-3, -1].$$

Activité 2

La quantité d'une substance chimique produite au cours des dix premières secondes d'une expérience a été de 12g. Au bout de t secondes du début de l'expérience, le taux de

production instantané (en g/s) de cette substance a été de $Q'(t) = \frac{40}{t^2} + \frac{200}{t^3}$, $t \geq 10$.

1. Déterminer la fonction Q qui à tout $t \geq 10$ associe la quantité $Q(t)$ produite au bout de t secondes.
2. Tracer dans un repère la courbe de la fonction Q .
3. Peut-on avoir 20 g de quantité produite ? Pourquoi ?

III. Calcul de primitives

Dans le tableau suivant F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I et u et v désignent deux fonctions dérivables sur I .

f	Condition	F
$u'u^n$, n entier naturel non nul		$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$u'v + v'u$		$u.v$
$\frac{u'}{u^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	u ne s'annule pas sur I	$\frac{u^{-n+1}}{-n+1}$
$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I	$\frac{u}{v}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	u strictement positive sur I	$2\sqrt{u}$
$u' \sqrt{u}$	u positive sur I	$\frac{2}{3} u \sqrt{u}$
$u' \sqrt[n]{u^{1-n}}$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	u est strictement positive sur I	$n \sqrt[n]{u}$
$u' (w' \circ u)$	w une fonction dérivable sur $u(I)$	$w \circ u$

Activité 1

Vérifier dans chaque cas que la fonction f possède des primitives sur l'intervalle I et déterminer sa primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.

$$1. f : x \mapsto (2x-1)(x^2-x+3), \quad I = \mathbb{R}, \quad x_0 = 1 \text{ et } y_0 = 2.$$

$$2. f : x \mapsto \frac{6x-1}{(3x^2-x)^2}, \quad I =]1, +\infty[, \quad x_0 = 2 \text{ et } y_0 = 0.$$

$$3. f : x \mapsto \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}, \quad I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad x_0 = -\frac{\pi}{4} \text{ et } y_0 = -1.$$

$$4. f : x \mapsto 2x\sqrt{x} + \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}, \quad I =]0, +\infty[, \quad x_0 = 1 \text{ et } y_0 = -1.$$

$$5. f : x \mapsto \sqrt{2-x}, \quad I =]-\infty, 2], \quad x_0 = 1 \text{ et } y_0 = 0.$$

Activité 2

Un physicien étudie le mouvement d'une particule.

La vitesse initiale de la particule est de 3m/s et t secondes après le début de l'expérience, son accélération (en cm/s^2) est de $a(t) = 1 - \frac{1}{2(\sqrt{t}+1)^3}$.

1. Déterminer la vitesse de la particule t secondes après le début de l'expérience.
2. Déterminer la distance parcourue par la particule t secondes après le début de l'expérience.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^3 - 11x^2 + 20x - 10}{(x-2)^2}$.

1. Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]2, +\infty[$.

Activité 4

1. Soit f la fonction telle que $f(x) = \sin^2 x$.

Utiliser l'égalité $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ pour déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin^3 x$.

Utiliser l'égalité $\sin^3 x = \sin x (1 - \cos^2 x)$ pour déterminer une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos^2 x$.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos^3 x$.

Exercice résolu

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x+x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Etudier f et tracer C_f .

b. En déduire que pour tout réel t de $[0, +\infty[$, $\frac{2}{3} \leq f(t) \leq 1$.

2. Soit F la primitive de f sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en 0.

a. Montrer que pour tout réel x de $[0, +\infty[$ on a $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.

b. En déduire la limite de F en $+\infty$.

c. Dresser le tableau de variation de F .

3. Soit G la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $G(x) = F(x^2)$.

a. Montrer que G est dérivable à droite en 0.

b. Etudier les variations de G sur $[0, +\infty[$.

c. Donner l'allure de la courbe de G dans un autre orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Solution

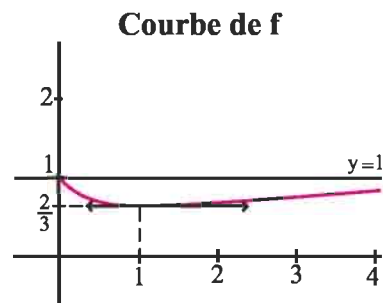
1. a. La fonction f est une fonction rationnelle et $1+x+x^2 \neq 0$ pour tout réel x , donc f est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$.

Le calcul donne $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(1+x+x^2)^2}$, $x \geq 0$.

Tableau de variations de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	1	$\frac{2}{3}$	1





b. D'après le tableau de variation de f , $\frac{2}{3} \leq f(t) \leq 1$, $t \in [0, +\infty[$.

2. a. La fonction F est une primitive de f sur $[0, +\infty[$, elle est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $F'(t) = f(t)$, $t \geq 0$.

De la question 1. b on déduit que $\frac{2}{3} \leq F'(t) \leq 1$, $t \geq 0$.

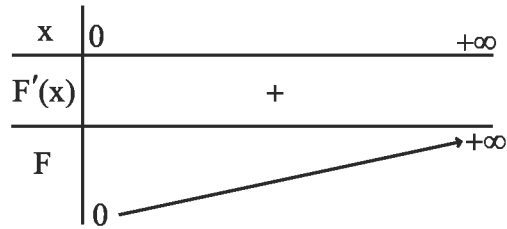
On applique le théorème des inégalités des accroissements finis sur $[0, x]$, $x \geq 0$.

Le résultat en découle.

b. Pour tout réel x de $[0, +\infty[$,

$$\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x. \text{ De plus, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}x = +\infty.$$

Il en résulte que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.



3. a. Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $\frac{G(x)}{x} = \frac{F(x^2)}{x}$. De plus, $\frac{2}{3}x^2 \leq F(x^2) \leq x^2$.

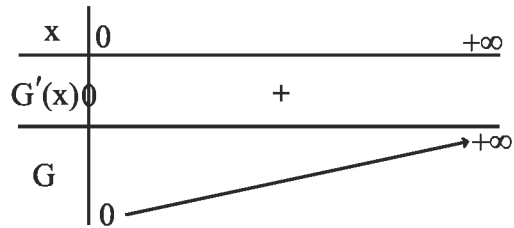
Il en résulte que $\frac{2}{3}x \leq \frac{F(x^2)}{x} \leq x$, $x \in]0, +\infty[$ et par suite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x^2)}{x} = 0$.

On conclut que G est dérivable à droite en 0 et $G'_d(0) = 0$.

b. La fonction $G = F \circ u$ avec $u : x \mapsto x^2$.

Les fonctions F et u sont dérivables sur $[0, +\infty[$ et $u([0, +\infty[) = [0, +\infty[$.

Il en résulte que la fonction G est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $G'(x) = f(x^2) \cdot 2x$.

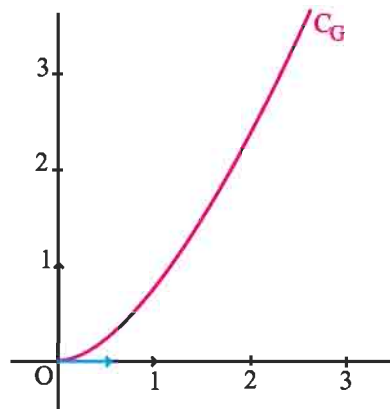


c. Etude de la branche infinie en $+\infty$.

$$\frac{2}{3}x \leq \frac{G(x)}{x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty.$$

La courbe de G admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$.



QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La fonction $x \mapsto \tan x$ est la primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qui s'annule en 0 de la fonction

☐ $x \mapsto 1 + \tan^2 x.$

☐ $x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}.$

☐ $x \mapsto \sin^2 x.$

2. La primitive de la fonction $x \mapsto \sin x$ sur $\mathbb{R}$, qui s'annule en 0 est la fonction

☐ $x \mapsto 1 - \cos x.$

☐ $x \mapsto -\cos x.$

☐ $x \mapsto \cos x - 1.$

3. La primitive qui s'annule en 0 de la fonction $x \mapsto 1 + \cos x$ sur $\mathbb{R}$ est

☐ paire.

☐ impaire.

☐ ni paire ni impaire.

4. La primitive sur $] -1, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^3}$, qui s'annule en 0 est

☐ $x \mapsto \frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{2}.$

☐ $x \mapsto \frac{1}{4(1-x)^4} - \frac{1}{4}.$

☐ $x \mapsto \frac{-1}{2(1-x)^2} + \frac{1}{2}.$

5. La primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x \cos x$, qui prend la valeur 1 en 0 est

☐ $x \mapsto \frac{x^2}{2} \sin x + 1.$

☐ $x \mapsto x \sin x + \cos x.$

☐ $x \mapsto \cos x - x \sin x.$

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction continue est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$x \mapsto \begin{cases} -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

3. Si F est une primitive d'une fonction f sur $\mathbb{R}$ et G est une primitive d'une fonction g sur $\mathbb{R}$ alors $F.G$ est une primitive de $f.g$ sur $\mathbb{R}$.

4. Si F est une primitive d'une fonction f sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $x \mapsto F(2x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto f(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

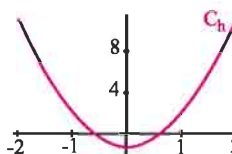
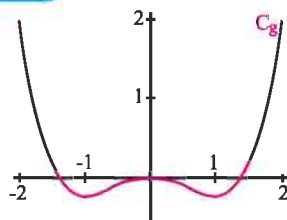
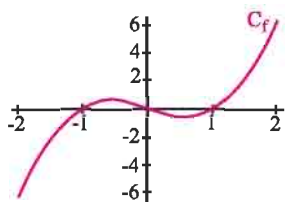
5. Si deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I coïncident en un réel x_0 de I alors elles sont égales.

Exercices et problèmes

1 Déterminer les primitives F sur I de chacune des fonctions f ci-dessous.

1. $f : x \mapsto -5x^4 + 2x - 3$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto x + 2 - \frac{3}{x^2}$, $I =]-\infty, 0[$.
3. $f : x \mapsto \frac{3x}{(3x^2 + 2)^2}$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f : x \mapsto (-x + 3)^6$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f : x \mapsto (x - 1)(x^2 - 2x + 7)^4$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{-4x + 3}}$, $I =]-\infty, \frac{3}{4}[$.
7. $f : x \mapsto \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$, $I =]0, +\infty[$.
8. $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x)^5}$, $I =]-\infty, -\sqrt{3}[$.
9. $f : x \mapsto \sin(2x + 1)\cos^4(2x + 1)$, $I = \mathbb{R}$.
10. $f : x \mapsto x^2 \sin(x^3 + 1)$, $I = \mathbb{R}$.
11. $f : x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x + 1)^3}$, $I =]-\pi, \pi[$.
12. $f : x \mapsto \frac{3x^2 + 4x - 2}{x^4}$, $I =]-\infty, 0[$.
13. $f : x \mapsto \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x}}$, $I =]1, +\infty[$.
14. $f : x \mapsto \tan^2 x$, $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2 On a représenté ci-dessous les courbes de trois fonctions g , f et h , définies et dérivables sur $[-2, 2]$.



1. On sait que f admet une primitive parmi les fonctions g et h sur $[-2, 2]$. Laquelle ? Justifier la réponse.
2. On sait que h admet une primitive parmi les fonctions f et g sur $[-2, 2]$. Laquelle ? Justifier la réponse.

3 Déterminer une primitive sur I de chacune des fonctions ci-dessous.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x + 1}$, $I = \mathbb{R}_+^*$.
2. $f : x \mapsto x\sqrt{x^2 + 1}$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto (x - 3)\sqrt{x^2 - 6x}$, $I = [6, +\infty[$.
4. $f : x \mapsto \frac{x + 1}{\sqrt{x - 1}}$, $I =]1, +\infty[$.

(On pourra écrire $f(x)$ sous la forme

$$a\sqrt{x - 1} + \frac{b}{\sqrt{x - 1}}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}.)$$

$$5. f : x \mapsto (x^2 + x)^7 \left(x + \frac{1}{2}\right), \quad I = \mathbb{R}.$$

$$6. f : x \mapsto \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{3 + x}{2x}}, \quad I = \mathbb{R}_+^*.$$

$$7. f : x \mapsto x(x + 1)^{2008}, \quad I = \mathbb{R}.$$

(On pourra vérifier que

$$f(x) = (x + 1)^{2009} - (x + 1)^{2008}.)$$

4 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f possède des primitives sur l'intervalle I et déterminer sa primitive F vérifiant $F(x_0) = y_0$.

$$1. f(x) = \tan x + \tan^3 x, \quad I = [0, \frac{\pi}{2}[, \quad F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Exercices et problèmes

2. $f(x) = \cos x - \cos^3 x$, $I = \mathbb{R}$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

3. $f(x) = \sin x - \sin^3 x$, $I = \mathbb{R}$, $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2$.

4. $f(x) = \frac{1 + \tan x}{\cos^2 x}$, $I = [0, \frac{\pi}{2}[$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

5 1. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos x \cdot \cos(3x) \text{ et } g(x) = \sin x \cdot \sin(3x).$$

a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions $f + g$ et $f - g$.

b. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g .

2. Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en π de la fonction h définie par

$$h(x) = (1 + \cos x) \sin(4x).$$

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x \sin x.$$

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x , $f(x) = 2 \cos x - f''(x)$.

2. En déduire la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en π .

7 Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{(x+1)^4}.$$

On se propose de déterminer des réels a , b , c et d tels que pour tout x de $]-1, +\infty[$,

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{d}{(x+1)^4}.$$

1. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1)^4 f(x)$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) f(x).$$

b. En déduire que $d = 3$ et $a = 0$.

2. a. Vérifier que pour tout réel x de $]-1, +\infty[$,

$$\frac{x-1-c}{(x+1)^3} = \frac{b}{(x+1)^2}.$$

b. En déduire les valeurs des réels b et c .

3. Déterminer la primitive de f sur $]-1, +\infty[$ égale 2 en 0.

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x-2)^3}.$$

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout x de

$$\mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x-2)^3}.$$

2. En déduire une primitive de f sur $]-\infty, 2[$.

9 On considère la fonction f définie sur $]-1, 1[$

$$\text{par } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \text{ Soit } F \text{ la primitive de } f \text{ sur}$$

$]-1, 1[$ qui s'annule en 0, et g la fonction définie sur

$$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ par } g(x) = F(\sin x).$$

1. Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et déterminer sa fonction dérivée.

2. En déduire que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $g(x) = x$.

3. Calculer $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{2}\right)$ et $F\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

10 On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$

$$\text{par } f(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Soit F la primitive de f sur $[0, 1]$ qui s'annule en 0, et

g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = F(\cos x)$.

1. Montrer que g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et

déterminer sa fonction dérivée.

2. En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{\pi}{4}.$$

3. Calculer $F(1)$ et $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

11 Déterminer toutes les fonctions deux fois

dérivable sur I telles que :

1. $f'''(x) = 0$, $I = \mathbb{R}$.

2. $f'''(x) = \sin x$, $I = \mathbb{R}$.

Primitives

12 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = |x|.$$

- a. Montrer que f admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}$.
 b. Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 4.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = |x| + |x-1|.$$

- a. Montrer que g admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}$.
 b. Déterminer une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sin^3(x) + \sin^5(x).$$

Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

14 Un mobile sur un axe subit une accélération

$a(t)$ dépendant du temps t (en secondes) tel que

$$a(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^2}, \quad t \in [0, 10].$$

À l'instant $t = 0$, le mobile est placé à l'origine de l'axe avec une vitesse nulle.

1. Déterminer l'expression de sa vitesse instantanée $v(t)$.
 2. Déterminer sa vitesse et sa position pour $t = 10$.

15 Soit f la fonction définie sur $[-2, 2]$ par

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}.$$

1. a. Montrer que f admet au moins une primitive sur $[-2, 2]$.

b. Soit F la primitive de f sur $[-2, 2]$ qui s'annule en 0. Étudier la parité de F .

2. Soit G la fonction définie sur $[0, \pi]$, par

$$G(x) = F(2 \cos x) \text{ et } C \text{ sa courbe représentative}$$

dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de C .

b. Calculer $G'(x)$. En déduire que pour tout x de $[0, \pi]$, $G(x) = \pi - 2x + \sin(2x)$.

c. Calculer alors $F(1)$, $F(2)$ et $F(\sqrt{2})$.

16 Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

1. Exprimer $\sqrt{x^2 + 1}$ à l'aide de $u(x)$ et $u'(x)$.

2. Déterminer des primitives pour chacune des fonctions ci-dessous.

$$f : x \mapsto \frac{1}{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$g : x \mapsto \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^2}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

17 Soit les fonctions $f : x \mapsto x \cos x$

et $g : x \mapsto x \sin x$.

1. En calculant $f'(x) + g(x)$, trouver une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.
 2. En procédant de même, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

18 Pour tout entier naturel n supérieur à 2, on

considère la fonction P_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}.$$

1. Déterminer la primitive F_n de P_n sur $\mathbb{R}$ égale à 1 en 0.
 2. Dédire une autre expression de $P_n(x)$.

19 1. Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$g(x) = x \sin x + \cos x - 1.$$

- a. Étudier les variations de g sur $[0, \pi]$.
 b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α appartenant à $\left] \frac{2\pi}{3}, \pi \right[$.

Préciser le signe de $g(x)$.

2 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x \in]0, \pi], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
 b. Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.

c. Vérifier que $f(\alpha) = \sin \alpha$.

3. On donne $\alpha \approx 2,34$ et $f(\alpha) \approx 0,72$.

Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. Dédire de ce qui précède que la restriction de f à $[\alpha, \pi]$ est une bijection de $[\alpha, \pi]$ sur un intervalle I que l'on précisera.

5. On pose $h(x) = g(x) - 2\cos x$, $x \in [0, \pi]$.

Montrer que h admet des primitives sur $[0, \pi]$.

Donner la primitive H de h sur $[0, \pi]$ qui prend la valeur 1 en 0.

20 Pour tout réel x , on pose $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et on désigne par G la primitive de φ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

1. Montrer que G est une fonction impaire.

2. a. On pose pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$\psi(x) = G(x) + G\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que ψ est constante sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$.

En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 2G(1)$.

b. On pose $u(t) = G(\tan t)$, $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Calculer $u'(t)$ et en déduire $u(t)$.

3. Déterminer $G(1)$ et en déduire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x).$$

4. Construire la courbe représentative de G dans un repère orthonormé.

21 Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = \sqrt{1 + \cos x}.$$

1. a. Montrer que f est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[0, \sqrt{2}]$.

b. Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $]0, \sqrt{2}[$ et expliciter $(f^{-1})'(x)$.

2. Soit g la fonction définie sur $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ par

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}.$$

On note G la primitive de g sur $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ telle que $G(0) = 0$.

a. Calculer la dérivée de la fonction

$x \mapsto G(x) + G(-x)$. En déduire que G est impaire.

b. Montrer que pour tout x de $[0, \sqrt{2}[$,

$$G(x) = \pi - f^{-1}(x). \text{ En déduire } G(1).$$

22 Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et

dérivable sur $]0, 1[$. On suppose que

$$f(0) = 1, f(1) = 0 \text{ et } f'(x) = \frac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, x \in]0, 1[.$$

1. Montrer que f est une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.

2. a. Montrer que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$f(\cos x) = \frac{2}{\pi}x.$$

b. En déduire $f^{-1}(x)$ pour tout x de $[0, 1]$.

3. On pose pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$h(x) = f(\cos x) + f(\sin x).$$

a. Montrer que h est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $h'(x)$.

b. En déduire que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $h(x) = 1$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose

$$\varphi_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^n, x \in [0, 1].$$

a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $a_n \in]0, 1[$ tel que $\varphi_n(a_n) = 0$.

b. Montrer que pour tout x de $]0, 1[$, si $n > p$ alors $\varphi_n(x) > \varphi_p(x)$.

c. En déduire que la suite (a_n) est strictement croissante et convergente.