NOMBRES COMPLEXES(Partie 2)

I) LA FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE NON NUL.

1) Notation et conséquence :

Définition : Soit θ un réel

on pose : $cos\theta + i\ sin\theta = e^{i\theta}$

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul, on a :

$z = r(cos\theta + i\ sin\theta) = re^{i\theta}$

Cette écriture s'appelle la forme exponentielle du complexe non nul z

Exemple : $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$|z| = 2$ et $\arg z \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

Conséquence de la notation :
Tous les résultats qu'on a vus au paravent concernant les modules et les arguments des nombres complexes non nuls
On peut les rapporter en utilisant la notation exponentielle.

Propriété : Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

1) $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ 2) $z^n = r^n e^{in\theta}$

3) $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$ 4) $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

5) $\overline{z} = re^{-i\theta}$ 6) $-z = re^{i(\pi+\theta)}$

Exemples : donner la forme exponentielle des complexes suivants :

1) $z_1 = 2+2i$ 2) $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ 3) $z_1 \times z_2$

4) $\frac{z_1}{z_2}$ 5) $(z_2)^{12}$

Solution :1) $z_1 = 2+2i$ $|z_1| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Donc : $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ $|z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$$1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Donc : $z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Donc : $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3) $z_1 \times z_2$

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}-\left(-i\frac{\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

5) $(z_2)^{12} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{12} = 2e^{-i12\frac{\pi}{3}} = 2e^{-4i\pi}$

2) Formule de Moivre

Propriété : Pour tout réel θ on a :

$(re^{i\theta})^n = (r)^n re^{in\theta}$

d'où : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Applications : en utilisant la Formule de Moivre

1)montrer que : $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

Et que : $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \forall\theta\in\mathbb{R}$

2)montrer que : $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

Et que : $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \quad \forall\theta\in\mathbb{R}$

3)montrer que : $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

Solutions :1)d'après Moivre on a :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

Et on a : $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta$

Donc : $\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

Donc : $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$

2) d'après Moivre on a :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3(\cos\theta)^2 i\sin\theta + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$

Donc :

$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

Donc : $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

Et : $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1 - \cos^2\theta)$

Donc :

$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

Et $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3(1 - \sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

3)montrons que : $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$?

3) d'après Moivre on a :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos^4\theta + 4(\cos\theta)^3 i\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta$

$-4i\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta$

Donc : $\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$

Et $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

Donc :

$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta(1 - \cos^2\theta) + (1 - \cos^2\theta)^2$

Finalement en a donc :

$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

3) Formule d'Euler :Soit $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul et son conjugué $\overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$ en faisant la somme membre à membre on obtient : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

puis en faisant la différence membre à membre on obtient : $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Propriété : Pour tout réel θ on a :

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Applications :

Exemple1: Linéariser : $\cos^4 x$

On a :

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 6ab^3 + b^4$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
triangle de Pascal

Donc : $\cos^4\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4$

$= \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \left(e^{4i\theta} + 3e^{3i\theta}e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta}e^{-2i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$

$= \dfrac{1}{16}\left(e^{4i\theta} + 3e^{2i\theta} + 6 + 3e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$

$= \dfrac{1}{16}\left(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 3\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}\right) + 6\right)$

$= \frac{1}{16}\left(2\cos 4\theta + 3\times 2\cos 2\theta + 6\right)$

Car $e^{ni\theta} + e^{-ni\theta} = 2\cos n\theta$

Donc : $\cos^4\theta = = \frac{1}{8}\left(\cos 4\theta + 3\cos 2\theta + 3\right)$

Donc : $\cos^4\theta = = \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{3}{8}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$

Exemple2:

1)Montrer que $(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}\right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

2)on pose : $u = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $v = 3e^{i\frac{\pi}{7}}$ et $u_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$

Et $u_2 = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$

Déterminer le module et l'argument du nombre complexes : $u+v$; u_1 et u_2

Solution :1) à vérifier

2)a) $u + v = 3e^{i\frac{\pi}{5}} + 3e^{i\frac{\pi}{7}} = 3\left(e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{\pi}{7}}\right)$

$$u + v = 3e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{14}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{14}\right)}\right)$$

$$u + v = 3e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{35}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{35}\right)}\right)$$

$u + v = 6\cos\left(\frac{\pi}{35}\right)e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)}$ et puisque

$6\cos\left(\frac{\pi}{35}\right) > 0$ alors : $|u+v| = 6\cos\left(\frac{\pi}{35}\right)$

Et $\arg(u+v) \equiv \frac{6\pi}{35}[2\pi]$

b) $u_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} + \left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)^2$

$$u_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6}\times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Car : d'après Euler $e^{ni\theta} + e^{-ni\theta} = 2\cos n\theta$

alors : $u_1 = \sqrt{3}\times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ $|u_1| = \sqrt{3}$

Et $\arg(u_1) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

c) $u_2 = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} - \left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)^2$

$$u_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} - e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) = -2i\sin\frac{\pi}{6}\times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Car : d'après Euler $e^{ni\theta} - e^{-ni\theta} = 2i\,\mathrm{sins}\, n\theta$

alors : $u_2 = -i\times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ $|u_2| = 1$

Et $\arg(u_2) \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc : $\arg(u_2) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Et $\arg(u_2) \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc : $\arg(u_2) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Exercice1 :1) en utilisant la formule d'Euler

Montrer que : $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ $\theta \in \mathbb{R}$

2) Montrer que : $\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$

3) Montrer que : $\sin^3\theta = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$ $\theta \in \mathbb{R}$

4) Montrer que : $\sin^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$

5) Linéariser : a) $\sin^5\theta$ b) $\cos^2\theta\sin^3\theta$

Solution :1)On a : $\cos^2 x = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2\right) = \frac{1}{4}\left(2\cos 2\theta + 2\right) = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$

2) $\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$?

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3 + 3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2 + \left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{8}\left(e^{i\theta 3}+3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta}+e^{-i3\theta}\right)$$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta 3}+e^{-i3\theta}\right)+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)$$

On a : $e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta)$ donc :

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos 3\theta+3\times 2\cos\theta\right)=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$$

3) $\sin^3\theta=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$?

On a : $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Donc :

$$\sin^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3=-\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3-3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2-\left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$\sin^3\theta=-\frac{1}{8i}\left(e^{i\theta 3}-3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta}-e^{-i3\theta}\right)$$

$$\sin^3\theta=-\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta 3}-e^{-i3\theta}\right)-3\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$$

Et on a : $2i\sin n\theta=e^{in\theta}-e^{-in\theta}$ donc :

$$=-\frac{1}{8i}\left(2i\sin 3\theta-3\times 2i\sin\theta\right)=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$$

4) $\sin^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$?

On a : $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ et $\theta\in\mathbb{R}$

$$\sin^4\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(\left(e^{i\theta}\right)^4-4\left(e^{i\theta}\right)^3\cdot e^{-i\theta}+6\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2-4\left(e^{i\theta}\right)^1\left(e^{-i\theta}\right)^3+\left(e^{-i\theta}\right)^4\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}-4e^{3i\theta}\cdot e^{-i\theta}+6e^{2i\theta}\cdot e^{-2i\theta}-4e^{i\theta}\cdot e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta}\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}-4e^{2i\theta}+6-4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(-4\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)+6+\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}\right)\right)$$

On a : $e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta)$ donc :

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(-4\times 2\cos 2\theta+6+2\cos 4\theta\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{8}\left(-4\cos 2\theta+3+\cos 4\theta\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$$

5)a)On a :

$$(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-106a^2b^3+5ab^4-b^5$$

Donc : $\sin^5\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^5$

$$=\left(\frac{1}{2i}\right)^5\left(e^{5i\theta}-5e^{4i\theta}e^{-i\theta}+10e^{3i\theta}e^{-2i\theta}-10e^{2i\theta}e^{-3i\theta}+5e^{i\theta}e^{-4i\theta}-e^{-5i\theta}\right)$$

$$=-\frac{1}{32i}\left(e^{5i\theta}-5e^{3i\theta}+10e^{i\theta}-10e^{-i\theta}+5e^{-3i\theta}-e^{-5i\theta}\right)$$

$$=-\frac{1}{32i}\left(e^{5i\theta}-e^{-5i\theta}-5\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}\right)+10\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{16}\left(\sin 5\theta-5\sin 3\theta+10\sin\theta\right)$$

Car $e^{ni\theta}-e^{-ni\theta}=2i\sin n\theta$

Donc : $\sin^5 x==-\frac{1}{16}\sin 5\theta+\frac{5}{16}\sin 3\theta-\frac{5}{8}\sin\theta$

5)b) $\cos^2\theta\sin^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2\times\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$

$$=\frac{1}{-32i}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2\times\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3$$

$$=\frac{1}{-32i}\left(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}\right)^2\times\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{-32i}\left(e^{4i\theta}-2+e^{-4i\theta}\right)\times\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{-32i}\left(e^{5i\theta}-e^{-5i\theta}-\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}\right)-2\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{-32i}\left(2i\sin 5\theta-2i\sin 3\theta-2\times 2i\sin\theta\right)$$

$$=-\frac{1}{16}\left(\sin 5\theta-\sin 3\theta-2\sin\theta\right)$$

II) LES EQUATION DU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{C}$:

1)Les racines carrées d'un complexe :

Définition : On appelle racine carrée d'un complexe Δ tout complexe δ qui vérifie : $\delta^2=\Delta$.

Activité :Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :1) $z_1=5$

2) $z_2=-4$ 3) $z_3=-3+4i$ 4) $z_4=-5-12i$

Solution : 1) $z_1=5=\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(-\sqrt{5}\right)^2$

Donc : les racines carrées de $z_1=5$ sont :

$\delta_1 = \sqrt{5}$ et $\delta_2 = -\sqrt{5}$

2) $z_2 = -4 = (2i)^2 = (-2i)^2$

Donc **:** les racines carrées de $z_2 = -4$ sont :

$\delta_1 = 2i$ et $\delta_2 = -2i$

3) $z_3 = -3+4i$

Soit δ les racine carrée de z_3 donc : $\delta^2 = z_3$

On pose : $\delta = x+iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Donc : $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = z_3$ et $|\delta|^2 = |z_3|$

par suite : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ 2y^2 = 8 \Leftrightarrow y = \pm 2 \text{ et puisque } xy = 2 \succ 0 \\ xy = 2 \end{cases}$

donc : $\delta_1 = 1+2i$ et $\delta_2 = -1-2i$

4) $z_4 = -5-12i$

Soit δ les racine carrée de z_3 donc : $\delta^2 = z_3$

On pose : $\delta = x+iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Donc : $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = z_3$ et $|\delta|^2 = |z_3|$

par suite : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ 2y^2 = 8 \Leftrightarrow y = \pm 2 \text{ et puisque } xy = 2 \succ 0 \\ xy = 2 \end{cases}$

donc : $\delta_1 = 1+2i$ et $\delta_2 = -1-2i$

Propriété : Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposés.

Remarque : Dans certain cas on peut déterminer les racines carrées du complexe Δ sans passer par la procédure précédente :

1) Si $\Delta = re^{i\theta}$ alors les racines carrées de Δ sont

$\delta_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\delta_2 = -\delta_1$(on utilise la forme trigonométrique)

2) Si on remarque une identité remarquable par exemple $\Delta = -8 + 6i$

On a $6i = 2 \times 1 \times 3i$ et $1^2 + (3i)^2 = -8$

Donc $\Delta = -8 + 6i = 1^2 + 2.1.3i + (3i)^2 = (1 + 3i)^2$

Donc les racines carrées de Δ sont : $\delta_1 = 1 + 3i$ et $\delta_2 = -\delta_1$

2) Les équations de second degré

Considérons l'équation $P(z) = az^2 + bz + c \quad E)$

Où a, b et c sont des complexes avec $a \neq 0$

On a :

$$P(z) = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z\right) + c = a\left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$$P(z) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$

1) Si $\Delta = 0$ l'équation (E) admet racine double :

$z = -\dfrac{b}{2a}$

2) Si $\Delta \neq 0$; soit δ l'un des deux racines carrées de Δ, on aura : $P(z) = a\left(\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\delta^2}{4a^2}\right)$

$$P(z) = a\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)$$

$$P(z) = a\left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right)$$

On pose : $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ on a :

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - z_1)(z - z_2) = 0$$

$\Leftrightarrow z = z_1$ ou $z = z_2$

Propriété : Considérons dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c =$ (E) où a, b et c sont des complexes avec $a \neq 0$ et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant on a :

Si Δ = 0 alors l'équation (E) admet comme solution le complexe $z = -\frac{b}{2a}$

Si Δ ≠ 0 l'équation (E) admet comme solution les complexes $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ où δ une racine carrées de Δ

Remarque : Si les coefficients a, b et c sont des réels et $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c =$ admet deux racines complexes conjugué $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exemple: Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1) $(E) : z^2 - z + 2 = 0$

2) $(E) : z^2 - z - 2 = 0$

3) $(E) : z^2 - 2z + 1 = 0$

4) $(1+i)z^2 - (1+7i)z + 14 + 12i = 0$

Solution : 1) $(E) : z^2 - z + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2) = -7 = \left(i\sqrt{7}\right)^2$

Donc les solutions sont : $z_1 = \frac{1+i\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$

Et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$

Donc : $S = \left\{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$

2) $(E) : z^2 - z - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-2) = 9 = (3)^2$

Donc les solutions sont : $z_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ e

$z_2 = \frac{1+3}{2} = 2$

Donc : $S = \{-1; 2\}$

3) $(E) : z^2 - 2z + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 = 0$

L'équation (E) admet comme solution le complexe $z = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$ donc : $S = \{1\}$

4) $(1+i)z^2 - (1+7i)z + 14 + 12i = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-(1+7i)\right)^2 - 4(1+i)(14+12i) = 0$

$\Delta = -56 - 90i$

On va Déterminer les racines carrées de Δ

Soit δ une racine carrée de Δ donc : $\delta^2 = \Delta$

On pose : $\delta = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Donc : $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = z_3$ et $|\delta|^2 = |\Delta|$

par suite : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -55 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-56)^2 + (-90)^2} = 106 \\ 2xy = -90 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \pm 5 \\ y^2 = 81 \Leftrightarrow y = \pm 9 \\ xy = -45 \end{cases}$ et puisque $xy = -45 \prec 0$

donc : $\delta_1 = 5 - 9i$ et $\delta_2 = -5 + 9i$

donc : $\delta = 5 - 9i$ est une racine carrées de Δ

Donc les solutions sont :

$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{1 + 7i + 5 - 9i}{2(1+i)}$

et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{1 + 7i - 5 + 9i}{2(1+i)}$

donc : $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = 3 + 5i$

donc : $S = \{1 - 2i; 3 + 5i\}$

Propriété : Si l'équation (E) admet deux racines distinctes z_1 et z_2 alors $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ et $z_1\times z_2=\frac{c}{a}$

Exemple: soit $z\in\mathbb{C}$ on pose : $P(z)=z^2-2z+2$

1)calculer : $P(1-i)$

2)en déduire dans $\mathbb{C}$ la résolution de l'équations $P(z)=0$

Solution :1)

$P(1-i)=(1-i)^2-2(1-i)+2=-2i-2+2i+2=0$

Donc $z_1=1-i$ est une racine de de l'équations $P(z)=0$ et on a : $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ donc :

$1-i+z_2=-\frac{-2}{1}$ donc $z_2=2+i-1=1+i$

Par suite : $S=\{1-i;1+i\}$

Exercice2 :Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1) $(z^2+9)(z^2-4)=0$

2) $z^2-6z+13=0$

3) $(4\cos\theta)z^2-2(\cos2\theta)z+i\sin\theta=0$ avec : $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

Solution :

1) $(z^2+9)(z^2-4)=0$ ssi $z^2-4=0$ ou $z^2+9=0$

Ssi $z^2=4$ ou $z^2=-9$

Ssi $z=\sqrt{4}$ ou $z=-\sqrt{4}$ ou $z=\sqrt{9}i$ ou $z=-\sqrt{9}i$

Ssi : $z=2$ ou $z=-2$ ou $z=3i$ ou $z=-3i$

Donc : $S=\{-3i;3i;-2;2\}$

2) $z^2-6z+13=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4(13)=36-52=(4i)^2$

Donc les solutions sont : $z_1=\frac{6+4i}{2}=3+2i$

Et $z_2=\overline{z_1}=3-2i$ donc : $S=\{3-2i;3+2i\}$

3) $(4\cos\theta)z^2-2(\cos2\theta)z+i\sin\theta=0$

$\Delta=(2(\cos2\theta))^2-4(4\cos\theta)(\sin\theta)i$

$\Delta=4\cos^2 2\theta-16i\cos\theta\sin\theta$

$\Delta=4\left(\cos^2 2\theta-4i\cos\theta\sin\theta\right)$

On a : $2\cos\theta\sin\theta=\sin2\theta$ et $\cos^2 2\theta=1-\sin^2 2\theta$

Donc : $\Delta=4\left(1^2+i^2\times\sin^2 2\theta-2i\sin2\theta\right)$

Donc : $\Delta=\left(2(1-i\sin2\theta)\right)^2$

les solutions sont : $z_1=\frac{2(\cos2\theta)+2(1-i\sin2\theta)}{2(4\cos\theta)}$

et : $z_2=\frac{2(\cos2\theta)-2(1-i\sin2\theta)}{2(4\cos\theta)}$

les solutions sont : $z_1=\frac{\cos2\theta+1-i\sin2\theta}{4\cos\theta}$

et : $z_2=\frac{\cos2\theta-1+i\sin2\theta}{4\cos\theta}$

et on a : $\cos2\theta-1=-2\sin^2\theta$ et $\cos2\theta+1=2\cos^2\theta$

donc : $z_1=\frac{2\cos^2\theta-i2\sin\theta\cos\theta}{4\cos\theta}=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{2}$

et $z_2=\frac{-\sin^2\theta+i\sin\theta\cos\theta}{2\cos\theta}$

Exercice3 :Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1) $z^2+2z+5=0$ 2) $2z^2+3iz+(1-i)=0$

3) $3iz^2+(1-2i)z+5i+1=0$

Exercice4 :1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$\boldsymbol{z}^2-8\boldsymbol{z}+17=0$

2) Soit $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{z}^3+(-8+\boldsymbol{i})\boldsymbol{z}^2+(17-8\boldsymbol{i})\boldsymbol{z}+17\boldsymbol{i}$

a) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet un imaginaire pur unique comme solution.

b)déterminer les réels $\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c}$ tels que :

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{i})(\boldsymbol{a}\boldsymbol{z}^2+\boldsymbol{b}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{c})$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})=0$

Solution :1) $\boldsymbol{z}^2-8\boldsymbol{z}+17=0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(17) = 64 - 68 = (2i)^2$

les solutions sont : $z_1 = \frac{8+2i}{2} = 4+i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 4-i$

donc : $S = \{4-i; 4+i\}$

2)a)soit $z_0 = bi$ une solution imaginaire pur de l'équation $P(z) = 0$ donc :

$$z_0^3 + (-8+i)z_0^2 + (17-8i)z_0 + 17i = 0$$

Donc : $(bi)^3 + (-8+i)(bi)^2 + (17-8i)(bi) + 17i = 0$

Donc : $-ib^3 - (-8+i)b^2 + 17bi + 8b + 17i = 0$

Donc : $-ib^3 + 8b^2 - ib^2 + 17bi + 8b + 17i = 0$

Donc : $8b^2 + 8b + i(-b^3 - b^2 + 17b + 17) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8b^2 + 8b = 0 \\ -b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b(b+1) = 0 \\ -b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ ou } b = -1 \\ -b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0 \end{cases}$$

$b = 0$ ne vérifies pas $-b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0$

Car $-0^3 - 0^2 + 170 + 17 \neq 0$

$b = -1$ vérifies $-b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0$ car :

$-(-1)^3 - (-1)^2 + 17(-1) + 17 = 0$

Donc : $b = -1$ donc : $z_0 = (-1)i = -i$ est l'unique solution imaginaire pur de l'équation $P(z) = 0$

2)b) $(z+i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz + aiz^2 + biz + ci$

$$P(z) = az^3 + (b+ai)z^2 + (c+bi)z + ci$$

Et on a : $P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$

Donc : $\begin{cases} a = 1 \\ b + ai = -8 + i \\ c + bi = 17 - 8i \\ ci = 17i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c - 8i = 17 - 8i \\ c = 17 \end{cases}$

donc : $a = 1$ et $b = -8$ et $c = 17$

Donc : $P(z) = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$

2)c) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+i)(z^2 - 8z + 17) = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - 8z + 17 = 0$ ou $z + i = 0$

$\Leftrightarrow z_1 = 4 + i$ ou $z_2 = 4 - i$ ou $z_0 = -i$

Donc : $S = \{4-i; 4+i; -i\}$

Exercice5 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2Z^2 - 2Z + 5 = 0$ 2) $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$

Solutions :1) $2Z^2 - 2Z + 5 = 0$ $\Delta = -36$

Donc : $z_1 = \frac{2 - i\sqrt{36}}{4}$; $z_2 = \frac{2 + i\sqrt{36}}{4}$

Donc : $\boxed{S = \left\{ \frac{1-3i}{2} ; \frac{1+3i}{2} \right\}}$

2) $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$

On remarque que 2 est solution

donc : $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2$ est divisible par : $z - 1$

La division euclidienne de $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2$ par :

$z - 1$ nous donne : $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = (Z-1)(3Z^2 + 2)$

$3Z^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow Z^2 = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow Z = i\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $Z = i\sqrt{\frac{2}{3}}$

Donc les solutions de : $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$

sont : $Z = 1$ ou $Z = i\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $Z = -i\sqrt{\frac{2}{3}}$

Donc : $\boxed{S = \left\{ 1; i\sqrt{\frac{2}{3}}; -i\sqrt{\frac{2}{3}} \right\}}$

Exercice6 : soit : $z = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$

1)Donner la forme exponentielle et la forme algébrique du nombre complexes z

2)en déduire : $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

Solution :1) $z = e^{-i\pi}\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\pi} = e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

$z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = -\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{4} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$

$\boxed{z = \frac{-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}+i\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}}$

2) $\sin\frac{-11\pi}{12} = \frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}$ et $\cos\frac{-11\pi}{12} = -\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}$

Donc : $\boxed{\cos\frac{11\pi}{12} = -\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}}$ et $\boxed{\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}}$

Exercice7 : Soit

$P(z) = (i-1)z^3-(5i-11)z^2-(43+i)z+9+37i$

1) Montrer que l'équation (E) : $P(z)$ = 0 admet un imaginaire pur z_0 unique comme solution

2)déterminer les nombres complexes $a;b;c$ tels que : $P(z) = (z-z_0)(az^2+bz+c)$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Solution :1) soit $z_0 = \lambda i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ une solution imaginaire pur de l'équation $P(z)$ = 0 donc :

$(i-1)z_0{}^3-(5i-11)z_0{}^2-(43+i)z_0+9+37i = 0$

$(i-1)(\lambda i)^3-(5i-11)(\lambda i)^2-\lambda i(43+i)+9+37i = 0$

Donc :

$\left(\lambda^3-11\lambda^2+\lambda+9\right)+i\left(\lambda^3+5\lambda^2-43\lambda+37\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^3-11\lambda^2+\lambda+9 = 0 \\ \lambda^3+5\lambda^2-43\lambda+37 = 0 \end{cases}$$

On remarque que 1 est l'unique solution du système donc : $z_0 = i$ est la solution imaginaire pur de l'équation $P(z)$ = 0

2) $z_0 = i$ est une racine de $P(z)$ donc $P(z)$

Est divisible par $z-i$

en faisant la division euclidienne de $P(z)$ par $z-i$

on trouve :

$P(z) = (z-i)\left((i-1)z^2+(10-6i)z-37+9i\right)$

Donc : $a = i-1$ et $b = 10-6i$ et $c = -37+9i$

3)

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-i)\left((i-1)z^2+(10-6i)z-37+9i\right) = 0$

$\Leftrightarrow (i-1)z^2+(10-6i)z-37+9i = 0$ ou $z-i = 0$

On va résoudre l'équation :

$(i-1)z^2+(10-6i)z-37+9i = 0\ (F)$

$\Delta' = (5-3i)^2-(i-1)(-37+9i) = -12+16i$

$\Delta' = -12+2\times4\times2i = (4i)^2+2\times2\times4i+(2)^2 = (2+4i)^2$

Donc : une racine carrée de Δ' est : $2+4i$

Donc : les solutions de (F) sont :

$z_1 = 5-2i$ ou $z_2 = 3+4i$

Donc les solutions de (E). sont :

$S = \{5-2i;3+4i;i\}$

Exercice8: Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E)\ 2z^3-(1+2i)z^2+(25i-1)z+13i = 0$

1) Montrer que l'équation (E): $P(z)$ = 0 admet une solution réelle z_0 à déterminer

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Solution :1) soit $z_0 = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ une solution réelle de l'équation (E).donc :

$2\lambda^3-(1+2i)\lambda^2+(25i-1)\lambda+13i = 0$

Donc : $\left(2\lambda^3-\lambda^2-\lambda\right)+i\left(-2\lambda^2+25\lambda+13\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda=0 \\ -2\lambda^2+25\lambda+13=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=0 \, ou \, \lambda=-\frac{1}{2} \, ou \, \lambda=1 \\ -2\lambda^2+25\lambda+13=0 \end{cases}$$

On remarque que $\lambda=-\frac{1}{2}$ le seul vérifiant

$-2\lambda^2+25\lambda+13=0$ donc solution du système

donc : $z_0=-\frac{1}{2}$ est la solution réelle de

L'équation (E)

2)on pose :

$$P(z)=2z^3-(1+2i)z^2+(25i-1)z+13i$$

$z_0=-\frac{1}{2}$ est une racine de $P(z)$

donc $P(z)$ est divisible par $z+\frac{1}{2}$

en faisant la division euclidienne de $P(z)$ par

$z+\frac{1}{2}$ on trouve :

$$P(z)=2\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z^2-(1+i)z+13i\right)$$

$$P(z)=0 \Leftrightarrow 2\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z^2-(1+i)z+13i\right)=0$$

On va résoudre l'équation :

$z^2-(1+i)z+13i=0 \ (F)$

$$\Delta=(1+i)^2-52i=-50i=\left(5(1-i)\right)^2$$

Donc : une racine carrée de Δ est : $5(1-i)$

Donc : les solutions de (F) sont :

$z_1=-2+3i$ ou $z_2=3-2i$ Donc les solutions de

(E). sont : $S=\left\{-2+3i;3-2i;-\frac{1}{2}\right\}$

III) LES RACINES N-EME D'UN COMPLEXE NON NUL

1) Les racines n-ième de l'unité :

Définition : On appelle racine n-ième de l'unité tout complexe u qui vérifie : $u^n=1$

Autrement dit ; les racines n-ième de l'unité sont les solutions de l'équation $u^n-1=0$

Exemples :

1) Les racines carrées de l'unité sont 1 et −1

2) Les racines cubique de l'unité sont : 1 , j et j^2

$j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ = [1,2π/3]

Preuve (d'une propriété)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons l'équation : $u^n=1$

$u = 0$ n'est pas une racine de l'équation précédente. On pose : $u=e^{\alpha i}$

(à remarquer que si u est une racine ; $|u| = 1$)

On a donc : $u^n=1 \Leftrightarrow [1, \alpha]^n = [1,0]$

$\Leftrightarrow n\alpha = 0 \ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \alpha=\frac{2k\pi}{n}$ (où $k \in \mathbb{Z}$)

Donc les racines n-ième de l'unité sont les complexes : $u_k=e^{\frac{2k\pi}{n}i}$

où $k \in \{0,1,2, \dots, (n-1)\}$

Propriété : L'unité admet n racines n-ème qui s'écrivent de la forme : $u_k=e^{\frac{2k\pi}{n}i}$

Où $k \in \{0,1,2, \dots, (n-1)\}$

Exemple : Les racines 4éme de l'unité sont :

$u_k=e^{\frac{k\pi}{2}i}$ Où $k \in \{0,1,2,3\}$

1) $u_0=e^{\frac{0\pi}{2}i}=e^0=1$ 2) $u_1=e^{\frac{\pi}{2}i}=i$

3) $u_2=e^{\pi i}=-1$ 4) $u_3=e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i$

2) Les racines n-ème d'un nombre complexe non nul.

Soit $a = re^{\theta i}$ un complexe non nul ($r > 0$) et

considérons l'équation (E): $z^n = a$

$z = \rho e^{\alpha i}$ Est une solution de l'équation (E)

alors : $\rho^n e^{\alpha i n} = re^{\theta i}$

ssi $\rho^n = r$ et $n\alpha = \theta + 2k\pi$

ssi $\rho = \sqrt[n]{r}$ et $\alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

Où $k \in \{0,1,2, \dots, (n-1)\}$

Propriété : Le nombre complexe non nul $a = re^{\theta i}$ admet n racines n − $ème$ ($n \in \mathbb{N}*$) differentes qui sont : $u_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n} i}$

où $k \in \{0,1,2, \dots, (n-1)\}$

Exemple : Soit le nombre complexe

$$z = \frac{-\sqrt{2}}{16}(1+i)$$

1) Déterminer le Module et Argument de z

2) Déterminer les racines 3-ième du nombre complexe z sous forme exponentielle

Solution: 1) $|z| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{16}(1+i)\right| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{16}\right| |1+i|$

$$|z| = \frac{\sqrt{2}}{16} \times \sqrt{2} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Donc: $\arg z = \arg \frac{-\sqrt{2}}{16} + \arg(1+i) [2\pi]$

$\arg z = \pi + \frac{\pi}{4} [2\pi]$ Donc : $\arg z = \frac{5\pi}{4} [2\pi]$

2) les racines cubiques de z sont :

$u_k = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} e^{\frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{3} i}$ où $k \in \{0,1,2\}$

$u_0 = \frac{1}{2} e^{\frac{\frac{5\pi}{4}}{3} i} = \frac{1}{2} e^{\frac{5\pi}{12} i}$ **et** $u_1 = \frac{1}{2} e^{\frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi}{3} i} = \frac{1}{2} e^{\frac{13\pi}{12} i}$

$u_2 = \frac{1}{2} e^{\frac{\frac{5\pi}{4} + 4\pi}{3} i} = \frac{1}{2} e^{\frac{21\pi}{12} i}$

IV) LES TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN COMPLEXE.

1) La translation :

1.1 Définition géométrique.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$; on appelle translation la transformation dans le plan qui associe à tout point M du plan le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

1.2 Ecriture complexe d'une translation.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$ tel que : $aff(\vec{u}) = a$

et $t_{\vec{u}}$ la translation de $\vec{u}$. La translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow aff(\overrightarrow{MM'}) = aff(\vec{u})$$

$$\Leftrightarrow aff(M') - aff(M) = aff(\vec{u})$$

$$\Leftrightarrow z' - z = a \Leftrightarrow z' = z + a$$

Propriété : Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$ tel que :

$aff(\vec{u}) = a$; la Translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$ si et seulement si : $z' = z + a$

Cette égalité s'appelle l'écriture complexe de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ tel que $\boldsymbol{aff(\vec{u}) = a}$

Exemple: Dans le plan complexe $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points : A ;B ;C d'affixe respectivement $z_A = 3+5i$; $z_B = 3-5i$; $z_C = 7+3i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la translation $t_{\vec{u}}$ tel que $aff(\vec{u}) = 4-2i$

1)montrer que : $z' = z+4-2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$)

2) verifier que le Point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3) déterminer $z_{B'}$ l'affixe de B' l'image de B par la translation $t_{\vec{u}}$

Solution:1) $T(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$\Leftrightarrow z_{M'} - z_M = z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z_{M'} = z_M + z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}}$

$\Leftrightarrow z' = z + 4 - 2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$)

2)on a : $z_A = 3+5i$

Donc : $z' = 3+5i+4-2i$

Donc : $z' = 7+3i = z_C$

Donc: le point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3)on a : $z_B = 3-5i$ Donc : $z' = 3-5i+4-2i$

$\Leftrightarrow z' = 7-7i = z_{B'}$

Donc l'affixe de B' l'image de B par la translation $t_{\vec{u}}$ est $z_{B'} = 7-7i$

2) L'homothétie

2.1 Définition géométrique.

Définition : Soient $\Omega(\omega)$ un point dans le plan et k un réel non nul ; on appelle l'homothétie de centre $\boldsymbol{\Omega}$ et de rapport $\boldsymbol{k}$,la transformation dans le plan qui associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ et se note $h(\Omega,k)$

• Si $k = 1$ alors la transformation $h(\Omega,1)$ est l'identité de $(\mathcal{P})$ et tous les points du plan seront invariants

• Si $k \neq 1$ alors le seul point invariant par $h(\Omega,k)$ est le point Ω le centre de la transformation $h(\Omega,k)$

2.2 Ecriture complexe d'une homothétie.

$\Omega(\omega)$ un point dans le plan complexe et k un réel non nul et different de 1

et $h(\Omega,k)$ l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de Rapport k, qui transforme le point $M(z)$en $M'(z')$

$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z_{M'} - z_\Omega = k(z_M - z_\Omega) \Leftrightarrow z' - \omega = k(z-\omega) \Leftrightarrow$

$z' = kz + \omega(1-k)$ (l'écriture complexe de l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de Rapport k**)**

Propriété: l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de Rapport k, admet une écriture complexe de la forme: $z' = kz + \omega(1-k)$

Exemple: : Dans le plan complexe $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le points : A d'affixe $z_A = 3+5i$ et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par l'homothétie de centre $\Omega(3;-2)$) et de Rapport $k = 4$

1)montrer que : $z' = 4z-9+6i$ (l'écriture complexe de l'homothétie $h(\Omega,k)$**)**

2) déterminer $z_{A'}$ l'affixe de A' l'image de A par l'homothétie $h(\Omega,k)$

Solution:1) $h_{(\Omega;k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z_{M'} = kz_M + z_\Omega(1-k)$

$\Leftrightarrow z' = 4z + z_\Omega(1-4) \Leftrightarrow z' = 4z - 3(3-2i)$

$\Leftrightarrow z' = 4z - 9 + 6i$

2) on a : $z_A = 3+5i$ et $z' = 4z-9+6i$

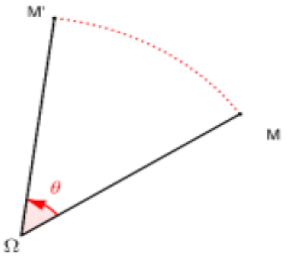
Donc : $z' = 4(3+5i) - 9 + 6i$

Donc $z_{A'} = 3 + 26i$

3) La rotation :

3.1 Définition géométrique :

Definition: Soit Ω un point dans le plan et θ un nombre réel, la Rotation de centre **Ω** et



d'angle $\boldsymbol{\theta}$ est l'application qui transforme tout point M en M' tel que:

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

On la note par : R (Ω, θ)

Remarque :

- Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ alors la rotation d'angle nul est l'identité de ($\mathcal{P}$) et tous les points du plan seront invariants.
- Si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ alors le seul point invariant par $R(\Omega,\theta)$ est le point Ω le centre de la rotation (Ω,θ)

3.2 L'écriture complexe d'une rotation.

Soient Ω(ω) un point dans le plan complexe et θ un réel non nul. la rotation de centre Ω(ω) et d'angle θ, transforme le point $M(z)$ en $M'(z')$

tel que : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_M - z_\Omega| = |z_{M'} - z_\Omega| \\ \arg\left(\dfrac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega} = e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z' = (z-\omega)e^{\theta i} + \omega$$

Propriété : La rotation de centre Ω(ω) et d'angle θ, admet une écriture complexe de la forme :

$$z' = (z-\omega)e^{\theta i} + \omega$$

Exemple: Dans le plan complexe direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points : A ;B d'affixe respectivement $z_A = 7+2i$; $z_B = 4+8i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la rotation r de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

1)montrer que : $z' = iz + 4i + 12$ (l'écriture complexe de la rotation r **)**

2) montrer que l'affixe du point C l'image de A par la rotation r est $z_C = 10+11i$

Solution : $r(M) = M' \Leftrightarrow z_{M'} = e^{i\alpha}(z_M - z_B) + z_B$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 4 - 8i) + 4 + 8i$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z - 4 - 8i) + z$$

$$\Leftrightarrow z' = i(z - 4 - 8i) + 4 + 8i$$

$$\Leftrightarrow z' = iz - 4i + 8 + 4 + 8i$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + 4i + 12$$

2)on a : $z_A = 7+2i$

Donc : $z' = i(7+2i) + 4i + 12$

Donc : $z' = 7i - 2 + 4i + 12 = 11i + 10$ cqfd

Exercice9 :Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω (1+i) et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$

Solution : $r(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\alpha}(z - z_\Omega) + z_\Omega$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{3\pi}{4}}(z - 1 - i) + 1 + i$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)(z - 1 - i) + 1 + i$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z - 1 - i) + 1 + i$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)z + \sqrt{2} + 1 + i$$

Exercice10 : Soit la rotation r de centre **Ω** (i) et transforme O en $O'\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$

Déterminer L'angle de cette rotation

Solution : $r(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\alpha}(z - z_\Omega) + z_\Omega$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - i) + i$$

Et puisque : $r(O) = O'$ alors : $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i\theta}(0 - i) + i$

$$\Leftrightarrow e^{i\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{0 - i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Donc : $\theta \equiv \frac{-\pi}{3}[2\pi]$

L'angle de cette rotation est $-\frac{\pi}{3}$

4) Etude de la transformation qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que: $z' = az + b$:

1er cas: $a = 0$

La transformation f est une constante, elle lie chaque point $M(z)$ au point fixe $B(b)$

2eme cas: $a = 1$

f est la transformation qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que $z' = z + b$

Donc $z' - z = b$ ce qui se traduit par $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

où $aff(\vec{u}) = b$ (constant)

Dans ce cas la transformation f est une translation de vecteur $\vec{u}$ tel que : $aff(\vec{u}) = b$

Propriété : La transformation plane f qui associe à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que $z' = z + b$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ tel que $aff(\vec{u}) = b$

3éme cas : $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

Soit f une Transformation plane qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que : $z' = az + b$

où $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$

On a : $f(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' = az + b$

Soit : $\omega = \frac{b}{1-a}$ on a :Le point $\Omega(\omega)$ est un point invariant par f car : $\omega' = a\frac{b}{1-a} + b = \frac{b}{1-a} = \omega$

D'où: $\begin{cases} z' = az + b \\ \omega = a\omega + b \end{cases}$ en faisant la différence on obtient : $z' - \omega = a(z - \omega)$ qui se traduit par $\overrightarrow{\Omega M'} = a\overrightarrow{\Omega M}$ donc : f est l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport a où $\omega = \frac{b}{1-a}$

4éme cas : $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$

Soit f une transformation plane qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$; $b \in \mathbb{C}$

On a : $f(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' = az + b$ soit : $\omega = \frac{b}{1-a}$

(ω est la solution de l'équation : $z = az + b$)

on a :$\Omega(\omega)$ est un point invariant par f.

On pose $a = e^{\alpha i}$ où $\alpha \neq 2k\pi$ (car $a \neq 1$)

D'où: $\begin{cases} z' = az + b \\ \omega = a\omega + b \end{cases}$ en faisant la différence on obtient : $z' - \omega = a(z - \omega)$

on en déduit : $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = a$ et par suite :

$$\left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = |a| = 1$$

par suite $|z - \omega| = |z' - \omega|$ ce que se traduit par

$\Omega M' = \Omega M$ et $\arg\frac{z' - \omega}{z - \omega} \equiv \arg a[2\pi] \equiv \alpha[2\pi]$

Ce qui se traduit : $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \alpha[2\pi]$

et finalement : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$

donc la transformation f est la rotation de centre

$\Omega(\omega = \frac{b}{1-a})$ et d'angle α.

Propriété : La transformation plane f qui associe à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que $z' = az + b$ où a est un complexe tel que $|a| = 1$ est la rotation d'angle $\alpha \equiv arg(a)\ [2\pi]$ et de centre $\Omega(\omega)$

tel que $\Omega(\omega = \frac{b}{1-a})$

5me cas : $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

Soit f une transformation plane qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que : $z' = az + b$ où $\in \mathbb{C}$

on pose $a = re^{\alpha i}$ On a : $f(M(z)) = M'(z')$

$\Leftrightarrow z' = az + b \Leftrightarrow z' = re^{\alpha i}z + b \Leftrightarrow z' = r\left(e^{\alpha i}z + \frac{b}{r}\right)$

D'après le 4éme cas ; la transformation plane qui transforme $M(z)$ en $M_1(z_1)$ tel que :

$z_1 = e^{\alpha i}z + \frac{b}{r}$ est la rotation R de d'angle α et de

centre le point $\Omega(\omega)$ tel que : $\omega = e^{\alpha i}w + \frac{b}{r}$

($\Omega(\omega)$ est le point fixe par R). (**)

Donc : $f(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' = rz_1$ où $z_1 = e^{\alpha i}z + \frac{b}{r}$

D'après le 3éme cas ; la transformation plane qui

transforme $M_1(z_1)$ en $M'(z')$ tel que : $z' = rz_1$

est l'homothétie h de rapport r de centre le point $O(0)$ ($O(0)$ est le point fixe par h).

Donc : $f(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' = az + b \Leftrightarrow z' = r(R(z))$

$\Leftrightarrow z' = h(R(z)) \Leftrightarrow z' = (hoR)(z)$

Finalement f est la composition de la rotation R d'angle $\alpha \equiv arg(a)\ [2\pi]$ et de centre $\Omega(\omega)$

tel que $\omega = \frac{b}{r\left(1-e^{\alpha i}\right)} = \frac{b}{|a|-a}$; et de l'homothétie

h de rapport $r = |a|$ et de centre $O(0)$

Théorème : Soit a un complexe ($a \notin \mathbb{R}$). La transformation plane f qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que : $z' = az + b$ est la composition de la rotation R et de l'homothétie h ; $f = hoR$ où :

1) R est la rotation d'angle $\alpha \equiv arg(a)\ [2\pi]$ et de centre $\Omega(\omega)$ où $\omega = \frac{b}{|a|-a}$

2) h est l'homothétie rapport $r = |a|$ et de centre $O(0)$

Exercice 11: Soit f une transformation plane qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que

$z' = -2z + 3 - 3i$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques

Solution : Soit : $\omega = \frac{b}{1-a}$ on a : Le point $\Omega(\omega)$ est

un point invariant par f : $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3-3i}{3} = 1-i$

D'où: $\begin{cases} z' = -2z + 3 - 3i \\ \omega = -2\omega + 3 - 3i \end{cases}$ en faisant la différence on

obtient : $z' - \omega = -2(z - \omega)$ qui se traduit par

$\overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M}$ Donc : f est l'homothétie de centre $\Omega(\omega = 1-i)$ et de Rapport -2

5) le composé de certaines transformations

5-1) le composé de deux rotations

Exemple: Dans le plan complexe direct $(O;\vec{i},\vec{j})$,

on considère le point : A (i) et la rotation R_0 de

centre O (0) et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et soit R_1 la rotation de

centre A (i) et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Déterminer la nature de la transformation $R_1 \circ R_0$

et ses éléments caractéristiques

Solution : soit un point M (z)

On pose : $R_0(M) = M'(z')$ **et** $R_1(M') = M''(z'')$

$R_0(M) = M'(z') \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - z_O) + z_O$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z \text{ Car } z_O = 0$$

Et on a : $R_1(M') = M''(z'') \Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z' - z_A) + z_A$

$$\Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}z - i\right) + i \Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}z + i\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{2}}z + i\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \Leftrightarrow z'' = iz + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On sait que la composée de deux rotation est une rotation ($\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \neq 2k\pi$)

Déterminons le centre de la rotation : $R_1 \circ R_0$ **?**

Le centre de la rotation est le point invariant :

$$\omega = i\omega + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \omega(1-i) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Donc : $\omega = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

On a **:** $\arg i = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

L'angle de la rotation est : $\frac{\pi}{2}$

5-2) le composé d'une rotation et une translation

Exemple: soit ABC un triangle isocèle et rectangle on A tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

et soit R **l**a rotation de centre A et qui transforme B en C et soit la translation $T = t_{\overrightarrow{AB}}$

Déterminer : $F_1 = R \circ T$ **et** $F_2 = T \circ R$

Solution :on considère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ comme repére normé donc : L'angle de la rotation R est : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

donc : R **l**a rotation de centre A (0) et d'angle $\frac{\pi}{2}$

donc : $R(M) = M'(z') \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A$

Donc l'écriture complexe de la rotation R est .

$R(M) = M'(z') \Leftrightarrow z' = iz$

l'écriture complexe de la translation translation $T = t_{\overrightarrow{AB}}$ est: $z'' = z + 1$

soit un point M (z) : on pose : $F_1(M) = M_1(z_1)$ et $F_2(M) = M_2(z_2)$

on a donc : $z_1 = i(z+1)$ et $z_2 = iz + 1$

on a : pour F_1 **:** $z = i(z+1) \Leftrightarrow (1-i)z = i$

$$z = \frac{i}{1-i} = \frac{-1+i}{2}$$

pour F_1 le seul point invariant est $\Omega_1\left(\omega_1 = \frac{-1+i}{2}\right)$ et on a :

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i}z + \omega_1\left(1 - e^{\frac{\pi}{2}i}\right)$$

donc F_1 est la rotation de centre $\Omega_1\left(\omega_1 = \frac{-1+i}{2}\right)$

et d'angle : $\frac{\pi}{2}$

De même : pour F_2 le seul point invariant est

$\Omega_2\left(\omega_2 = \frac{1+i}{2}\right)$ et on a : $z_2 = e^{\frac{\pi}{2}i}z + \omega_2\left(1 - e^{\frac{\pi}{2}i}\right)$

donc F_2 est la rotation de centre : $\Omega_2\left(\omega_2 = \frac{1+i}{2}\right)$

et d'angle : $\frac{\pi}{2}$

5-3) le composé d'une homothétie et une translation

Soit $k \in \mathbb{R} - \{0;1\}$

et H(Ω,k) l'homothétie de centre Ω(ω) et de

Rapport k et Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$ tel que :

$\vec{u}\ (b\ )\ \ b \in \mathbb{C}$ et Soit la Translation $T = t_{\vec{u}}$

On Pose: $F = H \circ T$ et $G = T \circ H$

l'écriture complexe de l'homothétie H(Ω,k) est :

$z_1 = kz + \omega(1-k)$

l'écriture complexe de la Translation $T = t_{\vec{u}}$ est :

$z_2 = z + b$

Determinons l'écriture complexe de F et G ?

soit un point M (z) : on pose : $F(M) = M'(z')$ **et**

$G(M) = M''(z'')$

a)On a : $F(M) = M'(z')$ donc :

$z' = k(z+b) + \omega(1-k) = kz + kb + (1-k)\omega$

Donc l'écriture complexe de F est:

$z' = kz + kb + (1-k)\omega$

On vérifie que : $A\left(\frac{k}{1-k}b + \omega\right)$ est le seul point

invariant par F

Donc : F est l'homothétie de centre $A\left(\frac{k}{1-k}b + \omega\right)$

et de Rapport k

b)soit un point M (z) : on pose : $M'' = T(M_1(z_1))$

et $M_1 = H(M)$ et $G(M) = M''(z'')$

donc : $z'' = z_1 + b$ et $z'' = kz + b + (1-k)\omega$

Donc l'écriture complexe de G est:

$z'' = kz + b + (1-k)\omega$. on vérifie que : $B\left(\frac{b}{1-k} + \omega\right)$

est le seul point invariant par G

Donc : G est l'homothétie de centre $B\left(\frac{b}{1-k} + \omega\right)$

et de Rapport k

5-4) le composé d'une homothétie et une rotation

Activité : Dans le plan complexe direct $(O;\vec{i},\vec{j})$,

on considère le point : A (2) et soit φ une

transformation qui transforme $M(z)$ en M_2 (z_2) tel

que $z_2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et soit H l'homothétie

de centre A (2) et de Rapport $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Et soit : $f = \varphi \circ H$

On a : $A = \varphi(A)$ à verifier(A est le seul point

invariant par φ)donc :l'écriture complexe de

l'homothétie H est : $z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}(z-2) + 2$

Pour tout point $M(z)$ soit $f(M) = M'$ et $M'(z')$

On a : $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z_1 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et on peut l'écrire

sous forme: $z' - 2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}(z_1 - 2)$

et puisque: $z_1 - 2 = \frac{2}{\sqrt{3}}(z-2)$

alors : $z' - 2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}\,\frac{2}{\sqrt{3}}(z-2)$

Donc: $z' - 2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}(z-2)$ et puisque: $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{\frac{\pi}{6}i}$

alors : $z' - 2 = e^{\frac{\pi}{6}i}(z-2)$

donc : f est une rotation de centre A (2) d'angle $\frac{\pi}{6}$

et puisque: $\boldsymbol{f}=\varphi\circ\boldsymbol{H}$ alors: $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{H}^{-1}=(\varphi\circ\boldsymbol{H})\circ\boldsymbol{H}^{-1}$

cad $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{H}^{-1}=\varphi\circ\left(\boldsymbol{H}\circ\boldsymbol{H}^{-1}\right)$ et et puisque:

$\boldsymbol{H}\circ\boldsymbol{H}^{-1}=\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{P}}$ alors: $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{H}^{-1}=\varphi$

finalement φ est la composée de la rotation de

centre A (2) et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et l'homothétie $\boldsymbol{H}$ de

centre A (2) et de Rapport $k=\frac{2}{\sqrt{3}}$

Exercice 12:soit z un nombre complexe non nul

Montrer que : $|z-1|\le\big||z|-1\big|+|z||\arg z|$

Solution : soit $z\in\mathbb{C}^*$ on a :

$|z-1|=\Big|z-|z|+\big(|z|-1\big)\Big|\le\big|z-|z|\big|+\big||z|-1\big|$

On pose : $z=\mathrm{R}e^{i\theta}$ avec $\mathrm{R}\succ 0$

On a : $\big|z-|z|\big|=\left|\mathrm{R}e^{i\theta}-R\right|=\mathrm{R}\left|e^{i\theta}-1\right|$

$=\mathrm{R}\left|\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2-e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}}\right|=\mathrm{R}\left|e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\right|$

Donc : $\big|z-|z|\big|=2\,\mathrm{R}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$

Or on sait que : $|\sin x|\le|x| \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $\big|z-|z|\big|\le|z||\theta|=|z||\arg z|$

Donc : $|z-1|\le\big||z|-1\big|+|z||\arg z|$

Exercice13 : soit a et b et c des nombres complexes tels que :

$|a|=|b|=|c|=1$ et $a\neq c$ et $b\neq c$

1)Montrer que : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$

2)en déduire que : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)\equiv\frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$

Solution : $\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}}=\left(\frac{\bar{c}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{a}}\right)^2\times\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$

On a si : $|z|=1$ alors : $\bar{z}=\frac{1}{z}$ donc :

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}}=\left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2\times\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}=\left(\frac{\frac{b-c}{bc}}{\frac{a-c}{ac}}\right)^2\times\frac{b}{a}$$

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}}=\left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2\times\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}=\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{b}{a}$$

Donc : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$

2)puisque : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$ alors :

$\arg\left(\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}\right)\equiv 0[\pi]$

Donc : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2+\arg\left(\frac{a}{b}\right)\equiv 0[\pi]$

Donc : $2\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)\equiv-\arg\left(\frac{a}{b}\right)[\pi]$

$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)\equiv\frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice14 :soit le nombre complexe $z=e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose : $S=z+z^2+z^4$ et $T=z^3+z^5+z^6$

1)Montrer que les nombres S et T sont conjugués

2) Montrer que : $\mathrm{Im}(S)\succ 0$

3)calculer $S+T$ et $S\times T$

4)en déduire les nombres S et T

Solution : on a : $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ donc $z^7 = 1$

1) $\overline{S} = \overline{z} + \overline{z}^2 + \overline{z}^4$

On a si : $|z| = 1$ alors : $\overline{z} = \frac{1}{z}$ donc :

$\overline{S} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4}$ et on a $z^7 = 1$

Donc : $z^6 = \frac{1}{z}$ et $z^5 = \frac{1}{z^2}$ et $z^3 = \frac{1}{z^4}$

Donc : $\overline{S} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} = z^3 + z^5 + z^6 = T$

Donc : les nombres S et T sont conjugués

2) Montrons que : $\operatorname{Im}(S) \succ 0$?

On a : $S = z + z^2 + z^4$ et $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

Donc $\operatorname{Im}(S) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$

$\operatorname{Im}(S) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)$

$\operatorname{Im}(S) = \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7}$ puisque : $\frac{\pi}{7} \prec \frac{2\pi}{7} \prec \frac{\pi}{2}$

Donc : $\sin\frac{\pi}{7} \prec \sin\frac{2\pi}{7}$ et on a $\sin\frac{4\pi}{7} \succ 0$

Donc : $\operatorname{Im}(S) \succ 0$

3)calculons $S + T$ et $S \times T$?

$S + T = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$

$S + T = \left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6\right) - 1$

$S + T = \frac{1 - z^7}{1 - z} - 1 = -1$ car $z^7 = 1$

$S \times T = \left(z + z^2 + z^4\right)\left(z^3 + z^5 + z^6\right)$

$S \times T = z^4 + z^6 + z^7 + z^5 + z^7 + z^8 + z^7 + z^9 + z^{10}$

$S \times T = z^4 + z^5 + z^6 + 3z^7 + z^8 + z^9 + z^{10}$

On a $z^7 = 1$ donc : $z^8 = z$ et $z^9 = z^2$ et $z^{10} = z^3$

donc : $S \times T = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + 2$

$S \times T = \frac{1 - z^7}{1 - z} + 2 = 2$ car : $z^7 = 1$

4)on a $S + T = -1$ et $S \times T = 2$ donc S et T sont

les solutions de l'équation : $x^2 + 1x + 2 = 0$

$\Delta = -7 = \left(\sqrt{7}i\right)^2$

En résolvant l'équation on trouve :

$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$ et $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$ et on a $\operatorname{Im}(S) \succ 0$

Donc : $S = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$ et $T = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien