

**RESUME DE COURS SUR LE CALCUL INTEGRAL
EN TERMINALE L**

Prénom : Nom : Classe :

I- Notion de primitive

1- Définition-notation

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$; la fonction F est une de f si :

- F est et sur I ;
- $F'(x) = \dots\dots\dots$ pour tout x de I .

Exemple : Montrer que F est une primitive de f dans chacun des cas ci-dessous :

a) $f(x) = x^3 + x$ et $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2$.

$F'(x) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ donc $F'(x) = \dots\dots\dots$

b) $f(x) = \frac{e^x}{e^{x+2}}$ et $F(x) = \ln(e^x + 2)$.

$F'(x) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ donc $F'(x) = \dots\dots\dots$

2- Propriété (existence d'une primitive)

Toute fonction sur un intervalle I admet des sur I .

3- Primitives de fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Une primitive de $f(x)$ est :
$f(x) = 0$	$F(x) = \dots\dots\dots$
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = \dots\dots\dots$

$f(x) = ax^n, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = \dots\dots\dots, a \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{a}{x}, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = \dots\dots\dots, a \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{a}{x^2}, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}, a \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{a}{\sqrt{x}}, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = \dots\dots\dots, a \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^{ax}, a \neq 0$	$F(x) = \dots\dots\dots, a \neq 0$

Exemple : Déterminer les primitives des fonctions dans chacun des cas suivants :

$f(x) = 3x^3 - 2x + 1; h(x) = e^{-3x}; g(x) = \ln(x - 4); k(x) = \ln(e^x + 1); l(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 3}$.

Solution:

$f(x) = 3x^3 - 2x + 1$ une primitive de f est : $F(x) = \dots\dots\dots$

$h(x) = e^{-3x}$ une primitive de h est : $H(x) = \dots\dots\dots$

$g(x) = \ln(x - 4)$ une primitive de g est : $G(x) = \dots\dots\dots$

$k(x) = \ln(e^x + 1)$ une primitive de k est : $K(x) = \dots\dots\dots$

$l(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 3}$ une primitive de l est $L(x) = \dots\dots\dots$

II- Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ **1- Définition-notation**

Soit F une primitive de la fonction f sur un intervalle $[a, b]$; on appelle **intégrale de a à b de la fonction f le nombre réel**

On note $\int_a^b f(x) dx = \dots\dots\dots$

L'écriture $\int_a^b f(x) dx$ se lit « **somme ou intégrale de a à b de $f(x) dx$** » et les nombres réels a et b sont appelés les **bornes de l'intégrale**.

Exemple : Soit $f(x) = -x^2 + 2x$ et $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$. Montrer que F est une primitive de f puis calculer $\int_0^1 f(x) dx$.

Solution :

$$F'(x) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Calculons $\int_0^1 f(x) dx$.

$$\int_0^1 f(x) dx = \dots\dots\dots = (\dots\dots\dots) - (\dots\dots\dots) = \dots$$

Application : Soit $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ et $G(x) = \ln(x^2 + 1)$. Montrer que G est une primitive de g puis calculer $\int_1^2 g(x) dx$.

2- Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ et p et q deux réels. On a :

$$\int_a^b (pf(x) + qg(x)) dx = \dots \int_a^b f(x) dx + \dots \int_a^b g(x) dx$$

III- Calculs d'aire**1- Définition-notation**

Soit f une fonction définie continue et positive sur un intervalle $I = [a, b]$.

L'aire du domaine délimité par la **courbe (C_f) de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$** est :

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_a^b f(x) dx \times \mu_a$$

Avec $\mu_a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \text{cm}^2$ l'unité d'aire du rectangle construit avec O , $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Exemple : Soit $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ et $G(x) = \ln(x^2 + 1)$ et (C_g) la coube de g dans un repère orthonormé.

- Montrer que G est une primitive de g .
- Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe de g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

Solution

- On a : $G'(x) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots$ donc $\dots\dots$ est une $\dots\dots\dots$ de $\dots\dots\dots$
- Calculons l'aire.

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

2- Application :

Soit $f(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x+1}$ et $F(x) = x + \ln(e^x + 1)$ et (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé.

- Monter que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ puis montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- Calculer l'aire en cm^2 du domaine compris entre l'axe des abscisses, (C_f) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.