Limite d'une fonction

Établissement : Lycée technique Taza
Année scolaire : 2021 – 2022

Classe : 2 BAC STM 1
Professeur : S.BASSY

Limites usuelles

Propriété 1

Soit n un nombre entier naturel non nul

- $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Les opérations sur les imites

Soit f et g deux fonctions et a est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et l et l' deux nombres réel, ces opérations restent vraies à droite et à gauche

Limite et somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	FI

Limite et produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} (f\times g)(x)$	$\ell\times\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Limite et inverse

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell'\neq 0$	∞	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{1}{g}\right)(x)$	$\dfrac{1}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Limite et quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $\ell>0$	$-\infty$ ou $\ell<0$	$+\infty$ ou $\ell>0$	$-\infty$ ou $\ell<0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell'\neq 0$	∞	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$\ell>0$	0^+	0^+	0^-	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Remarque

Les opérations qui mènent à des « formes indéterminées » (indiquées par F.I.), c'est-à-dire qu'elles conduisent à plusieurs résultats possibles, donc qui ne sont pas parfaitement déterminées. Il faudra alors user de différentes méthodes et techniques pour transformer l'écriture de la fonction et « lever l'indétermination ». Notamment, factoriser une somme, développer un produit, séparer une fraction en plusieurs parties, ou multiplier le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée.

Limite des fonctions polynômes et rationnelles

Propriété 2

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes tels que $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ avec m et n de $\mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$ et soit x_0 un nombre réel, On a

- $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$
- Si $Q(x_0) \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$

Limite des fonctions irrationnelles

Propriété 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[\alpha; +\infty[$ tel que $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in [\alpha; +\infty[; f(x) \geq 0$

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \geq 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

Remarque

Cette propriété reste vraie si x tend vers a ou en a à gauche et à droite ou en $-\infty$

Théorème

Théorème

Une fonction f admet une limite en un point a si et seulement si elle a la même limite à droite et à gauche en a. C'est à dire : $\lim\limits_{a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{a^+} f(x) = \lim\limits_{a^-} f(x) = \ell$

Limites des fonctions trigonométriques

Propriété 4

Soit a un nombre réel

- $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$
- $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$
- Si $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$ alors $\lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

Limites et ordre

Propriété 5

Soient f, u et v des fonctions numériques définie sur un intervalle $I = [a; +\infty[$ tel que $a \in \mathbb{R}$ et soit $l \in \mathbb{R}$ On a

- si $\begin{cases} \forall x \in I; u(x) \leq f(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- si $\begin{cases} \forall x \in I; f(x) \leq u(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- si $\begin{cases} \forall x \in I; |f(x) - \ell| \leq u(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$
- si $\begin{cases} \forall x \in I; u(x) \leq f(x) \leq v(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = \ell \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Remarque

Cette propriété reste vraie si x tend vers a ou en a à gauche et à droite ou en $-\infty$

Identités remarquables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$
- $a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1\right)$