CHAPITRE 5 : PROBABILITES

Matériels et supports didactiques :
• Professeur : Tableau, craies, éponge, matériels de géométrie
• Elèves : cahiers de leçon et d'exercices, stylos, matériels de géométrie

Sources documentaires :
• Programme de mathématiques du second cycle - Terminale S2 - Année 2006
• Livre de Mathématiques TS2, TS2A, TS4, TS5 et le Prof virtuel de S.Touba Gueye ,
•Maths Access Algèbre et Géométrie Terminale S2 de Malèye Guèye
•Visa du BAC
•Internet

Pré-requis
Dénombrement : p-liste ; p-arrangement ; p-combinaison et permutation

Objectifs spécifiques (OS) :
· Connaitre le vocabulaire probabiliste.
· Calculer la probabilité d'un événement.
· Connaitre et utiliser les formules des probabilités au programme.
· Calculer la probabilité conditionnelle d'un événement.
· Montrer que deux événements sont indépendants.
· Utiliser la formule des probabilités totales pour résoudre des problèmes.
· Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
· Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire.
· Déterminer et représenter la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
· Connaitre la formule de la loi binomiale et l'utiliser pour résoudre des problèmes.

PLAN

Leçon 1 : Notion de probabilité 1.Vocabulaire

1.Vocabulaire
2.Probabilité d'un événement
  2.1.Définition
  2.2.Cas de l'équiprobabilité
3.Probabilité de l'événement contraire.
  3.1.Propriété
  3.2.Exemples
4.Probabilité de la réunion de deux événements incompatibles ou non.
  4.1.Définition
  4.2.Propriétés :

Leçon 2 : Probabilité conditionnelle
Evénements indépendants et Formule des probabilités totales

1.Probabilité conditionnelle
  1.1.Définition,
  1.2.Propriété :
  1.3.Méthode pour Calculer une probabilité conditionnelle à l'aide de la formule
  1.4.Probabilités conditionnelles et tableaux
  1.5.Probabilités conditionnelles et arbre pondéré
2.Evénements indépendants.
  2..1.Définition

2..2.Propriétés
2..3.Succession de deux épreuves indépendantes

3.Formule des probabilités totales.
3..1.Définition
3..2.Exemple
3.3.Théorème (Formule des probabilités totales)
3.4.Arbre pondéré et probabilités totales

Leçon 3 : Notion de variable aléatoire ;
Fonction de répartition et Espérance, variance, écart type

1.Notion de variable aléatoire
1.1.Exemple :
1.2.Définition :
1.3.Calculer une probabilité à l'aide d'une variable aléatoire
1.4.Loi de probabilité
1.4.1.Définition :
1.4.2.Déterminer une loi de probabilité d'une variable aléatoire

2.Fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$
2.1.Exemple
2.2.Définition
2.3.Propriété
2.4.Représentation graphique d'une fonction de répartition

3.Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire
3.1.Définitions :
3.2.Exercice d'application
3.3.Propriétés de linéarité

Leçon 4 : Loi binomiale

1.Epreuve de Bernoulli

2.Loi binomiale
2.1.Présentation de la loi binomiale
2.2.Exemples
2.3.Arbre de probabilité et loi binomiale

Commentaires

Les probabilités constituent un chapitre important dont les applications pratiques sont nombreuses (en médecine, économie, pharmacie). En conséquence, on veillera à rendre ce cours attrayant par le choix judicieux d'activités préparatoires et d'exercices. On veillera à faire ressortir le lien naturel entre les statistiques et les probabilités. Seul figure au programme le cas où l'ensemble des événements élémentaires est fini.
Les acquis de Première sur le dénombrement seront consolidés sous forme d'exercices variés tirés de situations réelles.

· Le vocabulaire probabiliste (univers, événement, événement élémentaire, ...) sera introduit à partir d'épreuves aléatoires simples.
· On pourra traiter des problèmes tirés de la médecine (tests médicaux).
· Les variables aléatoires seront introduites à partir d'exemples.
· Exemple de schéma de Bernoulli.
· On introduira la loi binomiale sur un exemple d'épreuves répétées indépendantes

DEROULEMENT POSSIBLE

CHAPITRE 5 : PROBABILITES

Leçon 1 : Notion de probabilité

1.Vocabulaire

Une **épreuve** est dite **aléatoire** si on connaît les résultats possibles, mais on ne sait pas lequel va se produire avant l'expérience réalisée.
Les résultats possibles d'une épreuve aléatoire sont des **issues** ou des **éventualités**.
L'ensemble Ω des éventualités est appelé **univers :** Ω.
Toute partie de l'univers est appelée **événement**.
L'univers est aussi appelé ***événement certain***.
Le nombre d'éléments d'un événement A est appelé **cardinal** de A, noté **card** A.
Un **événement élémentaire** a une seule issue possible.
L'événement impossible noté { }ou $\emptyset$ n'a aucune issue possible : **card** $\emptyset = \mathbf{0}$.
L'intersection de deux **événements A et B noté** $\boldsymbol{A \cap B}$ peut être vide ou être constitué d'un ou plusieurs **éléments communs** aux deux événements.
L'union de deux **événements A et B noté A** $\cup$ B est l'ensemble des issues qui réalisent les **événements A** $ou\ B$: soit les éléments sont dans **A**, soit ils sont dans **B** ou à la fois dans **A** $\boldsymbol{et}$ B.
Deux **événements sont contraires** lorsque leur réunion est l'univers et leur intersection est vide (si l'un se réalise alors l'autre ne se réalise pas).
Si A est un événement alors son événement contraire est noté $\bar{A}$.
NB : $A \cup \bar{A} = \boldsymbol{\Omega}.\ et\ A \cap \bar{A} = \emptyset$.
Deux **événements A et B sont incompatibles** lorsque leur intersection est vide ($A \cap B = \emptyset$) : ils ne possèdent aucune issue commune.
Par exemple deux événements contraires sont aussi incompatibles.
L'événement contraire de $A \cup B$ est l'événement ni A et ni B : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Activité :

On lance un dé cubique non pipé (dé équilibré) à six faces.
a)Quelles sont les différentes issues de cette épreuve aléatoire ?
b)En déduire l'**univers** $\boldsymbol{\Omega}$ de cette épreuve aléatoire et son cardinal.
c)Donne les issues des événements suivants et leur cardinal.

- N **"**obtenir 4**"**
- Q **"**obtenir **8"**
- A ''obtenir un nombre inférieur ou égal à 3''
- B ''obtenir un nombre supérieur ou égal à 3''
- C ''obtenir un nombre strictement inférieur à 5''
- D ''obtenir un nombre pair ''.
- E ''obtenir un nombre impair ''.
- F ''obtenir un nombre **à la fois pair et impair** ''
- G ''obtenir un nombre pair ou impair ''

<u>**Exercice**</u>

On pioche au hasard une boule dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 8.
Reliez les événements contraires dans cette liste

Obtenir un nombre	
strictement inférieur à 5	Impair
pair	inférieur ou égal à 6
Supérieur ou égal à 7	Supérieur ou égal à 5

2.Probabilité d'un événement

2.1.Définition

- La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- 0 est la probabilité de l'événement impossible, et 1 est la probabilité de l'événement certain : $\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$ **et** $\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$.
- Plus la probabilité d'un événement est proche de 1, plus l'événement a des "chances" de se réaliser.

NB : Une probabilité peut s'exprimer sous diverses formes (décimale, fractionnaire, pourcentage).

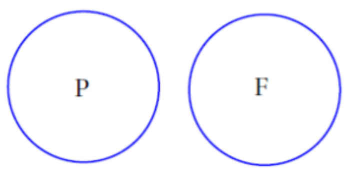
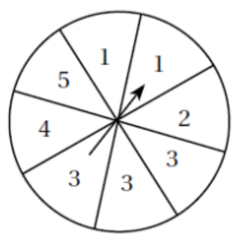
2.2.Cas de l'équiprobabilité

Lorsque chaque **événement élémentaire** a la même probabilité de se réaliser on dit que les événements élémentaires sont équiprobables. Dans ce cas, la **probabilité d'un événement** est égale au **quotient du nombre d'issues favorables** (issues dans lesquelles on obtient le résultat) par **le nombre total d'issues possibles.**

$$\boldsymbol{P}(\text{événement}) = \frac{\textbf{nombre d'issues favorables}}{\textbf{nombre total d'issues possibles}} = \frac{\textbf{card}(\text{A})}{\textbf{card}(\boldsymbol{\Omega})}$$

NB : La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
La somme des probabilités des issues d'une expérience aléatoire est égale à 1.

<u>**Exemples**</u> **:**

Lancer une pièce "équilibrée"	Tirage d'une boule dans une urne	Tirage avec une roue de loterie
		

Dans le cas de la pièce équilibrée lancée, soit A l'**événement** « tirer Pile » et soit B l'**événement** « tirer Face ».

On a 1 chance sur 2 de tirer « Pile » et aussi 1 chance sur 2 de tirer « Face ». On dira alors que la **probabilité** de tirer « Pile » est égale à 1 sur 2. Il y a 50 % de chance d'obtenir pile. La **probabilité** de tirer « Face » est égale à 1 sur 2. Il y a 50 % de chance d'obtenir face.

Donc : $P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5 \;\; ou \; P(A) = 50\ \% = \frac{50}{100} = 0{,}5$

Et $P(B) = \frac{1}{2} = 0{,}5 \;\; ou \; P(B) = 50\ \% = \frac{50}{100} = 0{,}5$

Dans le deuxième exemple, soit B l'**événement** « tirer une boule rouge ».
La probabilité de tirer une boule rouge est de 3 sur 5. Il y a 60 % de chance d'obtenir une boule rouge.

Donc : $P(B) = \frac{3}{5} = 0{,}6 \;\; ou \; P(B) = 60\ \% = \frac{60}{100} = 0{,}6$

Dans le troisième exemple soit C l'**événement** « tomber sur une case comportant le chiffre 1 » et D l'**événement** « obtenir un nombre impair ».
La probabilité de tomber sur une case comportant le chiffre 1 est 2 sur 8 et la probabilité d'obtenir un nombre impair est de 6 sur 8.

Donc : $P(C) = \frac{Z}{8} = 0{,}25 \;\; et \; P(D) = \frac{6}{8} = 0{,}75$

Autre exemple
On peut aussi estimer qu'il y a une chance sur deux d'avoir une fille quand on attend un enfant. Dans ce cas, on a défini une probabilité sur l'univers de sorte que les événements élémentaires soient équiprobables : $\mathrm{p(F)} = \mathrm{p(G)} = \frac{1}{2}$.

NB : Le lancer d'un dé non pipé est associé à six événements élémentaires équiprobables : $\mathrm{p}(1) = \mathrm{p}(2) = \mathrm{p}(3) = \mathrm{p}(4) = \mathrm{p}(5) = \mathrm{p}(6) = \frac{1}{6}$

3.Probabilité de l'événement contraire.

3.1.Propriété

La somme des probabilités de 2 événements contraires est égale à 1.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

NB : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. De même : $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

3.2.Exemples

Exemple 1 : Piocher des boules de couleur
On pioche au hasard une boule dans une urne contenant des boules rouges, bleues et jaunes. La probabilité d'obtenir une boule bleue est de 0,4.
Soit B l'événement '' obtenir une boule bleue''
Calculer la probabilité d'obtenir une boule jaune ou rouge.

Exemple 2 : Lancer un dé
Lorsqu'on lance un dé équilibré, la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 est de 1/3.
Soit D l'événement '' obtenir un nombre inférieur ou égal à 2''
Calculer la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3.

Exercice d'application :

Les statistiques effectuées sur les naissances permettent d'estimer qu'il naît 100 filles pour 205 naissances, soit environ 48.8% de naissances de filles. On peut définir une probabilité sur l'univers lié aux deux événements F : "l'enfant à naître est une fille" et G : "l'enfant à naître est un garçon".

1)Comment sont ces deux événements ?

2)En utilisant ces statistiques, montrer que $P(F) = 0{,}488$ et en déduire P(G).

4.Probabilité de la réunion de deux événements incompatibles ou non.

4.1.Définition

Soient A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire. Alors la probabilité que l'une de ces deux événements se réalise est :

$$\mathbf{P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

4.2.Propriétés :

Si A et B sont deux **événements incompatibles** ($A \cap B = \emptyset$) alors :

$$\mathbf{P(AUB) = P(A) + P(B)}$$

Exercices d'application

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

Calculer la probabilité des événements suivants :

a) A:'La carte tirée est une dame',

b) B:'La carte tirée est un cœur',

c) C:'La carte tirée est la dame de cœur',

d) D:'La carte tirée est un cœur ou une dame',

e) E:'La carte tirée n'est ni une dame, ni un cœur',

f) F:'La carte tirée est une carte marquée deux',

Leçon 2 : Probabilité conditionnelle
Evénements indépendants et Formule des probabilités totales.

1.Probabilité conditionnelle

1.1.Définition,

On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. On la note : $P_A(B)$.

Remarque :

On rappelle que, comme pour les probabilités simples, on a :

$$0 \leq P_A(B) \leq 1$$
$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$$

1.2.Propriété :

A et B étant deux événements tels que p(A)≠0, la **probabilité de B sachant A** est le nombre réel : $P_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

De même si P(B)≠0, la **probabilité de A sachant B** est : $P_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Remarques

- On note parfois P(B/A) au lieu de $P_A(B)$.
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
- **Rappel** : Le signe ∩ (intersection) correspond à **"et"**.

NB : Attention à ne pas confondre :

- p(A∩B) qui est la probabilité que A **et** B soient réalisés alors qu'on ne possède **aucune indication** sur la réalisation de A ou de B
- p_A(B) qui est la probabilité que B soit réalisé alors qu'**on sait déjà** que A est réalisé.

1.3.Méthode pour Calculer une probabilité conditionnelle à l'aide de la formule

Exemple :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit A l'événement : « Le résultat est un pique ».

Soit B l'événement : « Le résultat est un roi ».

Calculer $P_A(B)$, la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique.

Correction de l'exemple

$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$.

Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{32} : \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Remarque :

On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, parmi les piques, on a 1 chance sur 8 d'obtenir le roi.

1.4.Probabilités conditionnelles et tableaux

Exemple :

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur **800 patients** atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

1) On choisit au hasard un patient et on considère les évènements suivants :
A : « Le patient a pris le médicament A. »
G : « Le patient est guéri. »
Calculer : a) $P(A)$ b) $P(G)$ c) $P(G \cap A)$ d) $P(\bar{G} \cap A)$
2) a) On choisit maintenant au hasard un patient guéri.
Calculer la probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu**'il est guéri.
b) On choisit maintenant au hasard un patient traité par le médicament B.
Calculer la probabilité que le patient soit guéri **sachant qu**'il a pris le médicament B.

Correction de l'exemple

1) a) La probabilité qu'un patient soit traité avec le médicament A est égale à :
$P(A) = \dfrac{455}{800} \approx 0{,}57 = 57\ \%$.
b) La probabilité qu'un patient soit guéri est égale à : $P(G) = \frac{674}{800} \approx 0{,}84 = 84\ \%$.
c) La probabilité qu'un patient soit guéri et qu'il soit traité par le médicament A est égale à $P(G \cap A) = \frac{383}{800} \approx 0{,}48 = 48\ \%$.
d) La probabilité qu'un patient ne soit pas guéri et qu'il soit traité par le médicament A est égale à : $P(\bar{G} \cap A) = \frac{72}{800} = 0{,}09 = 9\ \%$.

2) a)

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

La probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu**'il est guéri se note $P_G(A)$ et est égale à $P_G(A) = \frac{383}{674} \approx 0{,}57 = 57\ \%$. On regarde uniquement la ligne des patients guéris.

b)

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

La probabilité que le patient soit guéri **sachant qu**'il a pris le médicament B se note $P_{\bar{A}}(G)$ et est égale à $P_{\bar{A}}(G) = \frac{291}{345} \approx 0{,}84 = 84\ \%$. On regarde uniquement la colonne du médicament B.

1.5.Probabilités conditionnelles et arbre pondéré

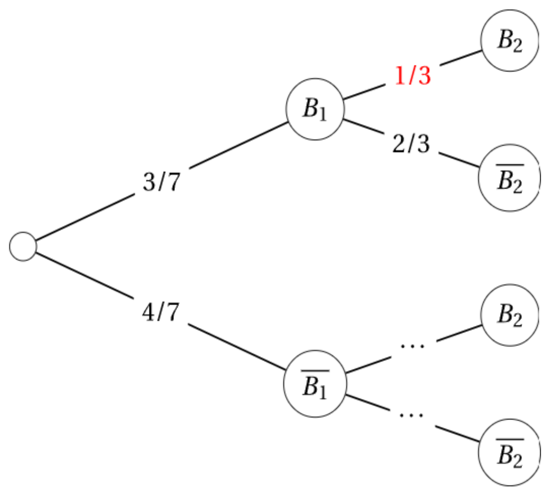
Exemple :

Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher.
On tire successivement 2 boules **sans remise** On note :

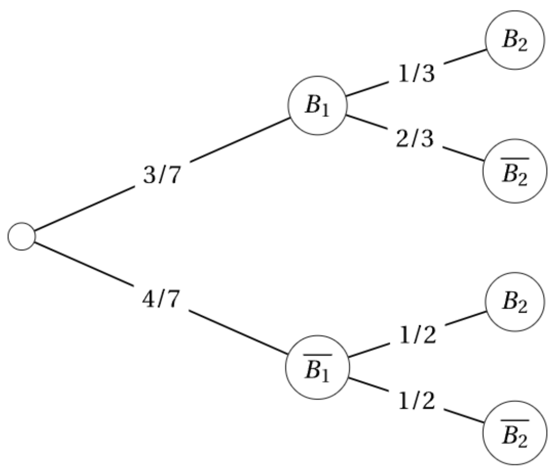
- B_1 l'événement *"la première boule tirée est blanche"*
- B_2 l'événement *"la seconde boule tirée est blanche"*

la probabilité $p_{B_1}(B_2)$ est la probabilité que la seconde boule soit blanche sachant que la première était blanche.

Pour la calculer, on se place dans la situation où l'on se trouve après avoir obtenu une boule blanche au premier tirage.
Puisque l'urne contient au départ 3 boules blanches et 4 boules rouges, il restera alors 6 boules dans l'urne ; 2 sont blanches et 4 sont rouges. Ainsi, la probabilité de tirer une boule blanche au second tirage est donc : $p_{B1}(B2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
Cette probabilité se place sur l'arbre de la façon suivante :



On peut calculer de même $p_{\overline{B_1}}(B_2)$
En effet $p_{\overline{B_1}}((B_2)$ est la probabilité que la seconde boule soit blanche sachant que la première était rouge. Il reste alors 3 boules blanches et 3 boules rouges après le premier tirage donc :
$p_{\overline{B_1}}((B_2) = 3/6 = 1/2$ et on peut compléter l'arbre :



La probabilité de tirer 2 boules blanches est $p(B_1 \cap B_2)$ *(il faut que la première boule soit blanche **et** que la seconde boule soit blanche)*. D'après la formule précédente :

$$p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$$

2.Evénements indépendants.

2.1.Définition

On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** lorsque :

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B).}$$

Dans le langage courant, on dit que deux événements sont indépendants quand la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre.

Attention !

« Incompatibles » est différent de « indépendants ». En effet, si A et B sont deux évènements incompatibles de probabilités non nulles, on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0 \text{ avec } \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}) \neq 0.$$

2..2.Propriétés

- Si A et B sont deux évènements indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.
- On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** lorsque :

$$\boldsymbol{P_A(B) = P(B) \text{ ou } P_B(A) = P(A)}$$

- Si deux évènements A et B sont indépendants de probabilités non nulles, alors la probabilité de B ne dépend pas de la réalisation ou non de A :

$$\boldsymbol{P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = P(B)}$$

Exemples

Exemple 1 : Méthode pour démontrer l'indépendance de deux évènements

a) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit R l'événement : « On tire un roi ».

Soit T l'événement : « On tire un trèfle ».

Les événements R et T sont-ils indépendants ?

b) On reprend l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.

Les événements R et T sont-ils indépendants ?

Correction de l'exemple 1

a) On a : $P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(R \cap T) = \frac{1}{32}$.

Donc $P(R) \times P(T) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$

Et donc $P(R) \times P(T) = P(R \cap T)$

Les événements R et T sont donc indépendants.

b) On a : $P(R) = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$, $P(T) = \frac{8}{34} = \frac{4}{17}$ et $P(R \cap T) = \frac{1}{34}$

Donc $P(R) \times P(T) = \frac{2}{17} \times \frac{4}{17} = \frac{8}{289}$

Et donc $P(R) \times P(T) \neq P(R \cap T)$

Les événements R et T ne sont donc pas indépendants.

Exemple 2 : **Utiliser l'indépendance de deux évènements**
Dans une population, un individu est atteint par la maladie *m* avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie *n* avec une probabilité égale à 0,01.
On choisit au hasard un individu de cette population.
Soit M l'événement : « L'individu a la maladie *m* ».
Soit N l'événement : « L'individu a la maladie *n* ».
On suppose que les événements M et N sont indépendants.
Calculer la probabilité de l'événement E : « L'individu a au moins une des deux maladies ».

Correction de l'exemple 2

$P(E) = P(M \cup N)$
$= P(M) + P(N) - P(M \cap N)$,
$= P(M) + P(N) - P(M) \times P(N)$, car les événements M et N sont indépendants.
$= 0{,}005 + 0{,}01 - 0{,}005 \times 0{,}01$
$= 0{,}01495$
La probabilité qu'un individu choisi au hasard ait au moins une des deux maladies est égale à 1,495 %.

Exemple 3 : **Utiliser l'indépendance de deux évènements**
Lors d'un week-end prolongé, *Bison futé* annonce qu'il y a 42 % de risque de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A6 et 63 % sur l'autoroute A7.
Soit A l'événement : « On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A6 ».
Soit B l'événement : « On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A7 ».
On suppose que les événements A et B sont indépendants.
Calculer la probabilité de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A7 mais pas sur l'autoroute A6.

Correction de l'exemple 3

On a : $P(A) = 0{,}42$ et $P(B) = 0{,}63$
La probabilité de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A7 mais pas sur l'autoroute A6 se note $P(\bar{A} \cap B)$.
Les événements A et B sont indépendants donc les événements $\bar{A}$ et B sont également indépendants et on a :
$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B) = (1 - 0{,}42) \times 0{,}63 = 0{,}3654$
La probabilité de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A7 mais pas sur l'autoroute A6 est égale à 36,54 %.

2..3.Succession de deux épreuves indépendantes

Exemple :

a) On lance un dé et on note le résultat. Puis on lance une pièce de monnaie et on note le résultat. Ces deux épreuves sont indépendantes.

b) Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète cette épreuve 2 fois de suite.
Ces deux épreuves sont identiques et indépendantes.

<u>Exemple</u> : méthode de Calculer une probabilité sur une répétition d'expériences

On considère l'expérience suivante :
Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.

2) Déterminer les probabilités des évènements suivants :

a) Obtenir deux boules blanches.

b) Obtenir une boule blanche et une boule rouge.

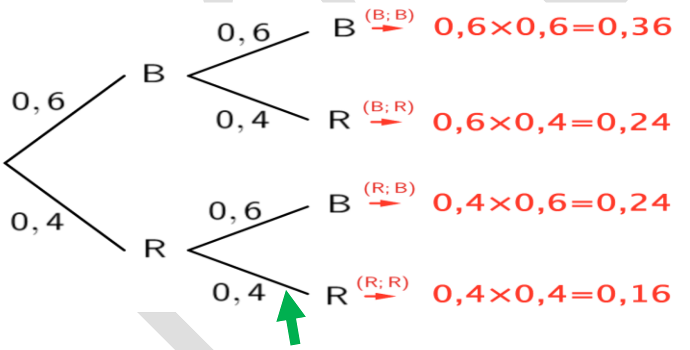
c) Obtenir au moins une boule blanche.

Correction de l'exemple

1) On note B l'évènement « On tire une boule blanche » et R l'évènement « On tire une boule rouge ».

$P(B) = \frac{3}{5} = 0{,}6$ et $P(R) = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

On résume les issues de l'expérience dans un arbre pondéré.



Comme R et B sont indépendants, on utilise la formule :
$P(R \cap B) = P(R) \times P(B)$

Attention Dans ce contexte, au 2e niveau de l'arbre, il ne s'agit pas de probabilité conditionnelle.

2) a) Obtenir deux boules blanches correspond à l'issue (B ; B). D'après l'arbre, on a :
$P_1 = 0{,}36$.

b) Obtenir une boule blanche et une boule rouge correspond aux issues (B ; R) et (R ; B).
$P_2 = 0{,}24 + 0{,}24 = 0{,}48$.

c) Obtenir au moins une boule blanche correspond aux issues (B ; R), (B ; B) et (R ; B).
$P_3 = 0{,}24 + 0{,}36 + 0{,}24 = 0{,}84$.

3.Formule des probabilités totales.

3.1.Définition

On dit que les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une **partition** de l'univers Ω si chaque élément de Ω appartient à un et un seul des A_i.

Remarque

A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers, quel que soit l'événement A. En effet, toute éventualité appartient soit à un événement, soit à son contraire et ne peut appartenir au deux en même temps.

3..2.Exemple

On lance un dé à 6 faces. On peut modéliser cette expérience l'univers par
$\Omega=\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
Les événements :

- $A_1=\{1;2\}$ *(le résultat est inférieur à 3)*
- $A_2=\{3\}$ *(le résultat est égal à 3)*
- $A_3=\{4;5;6\}$ *(le résultat est supérieur à 3)*

forment une partition de Ω.
En effet, chacune des six éventualités 1, 2, 3, 4, 5, 6 appartient à et à un seul des A_i.

3.3.Théorème (Formule des probabilités totales)

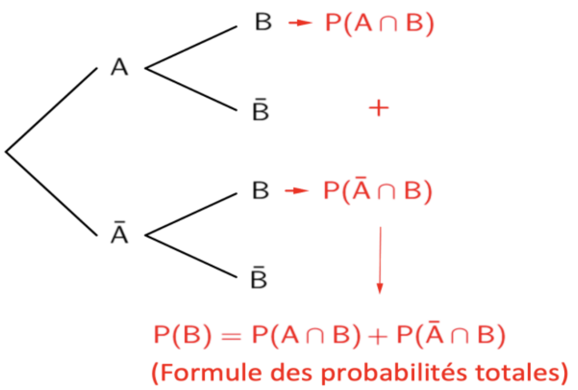
Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ une **partition** de l'univers Ω. Pour tout événement B :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B) \quad \text{ou encore}$$

$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$$

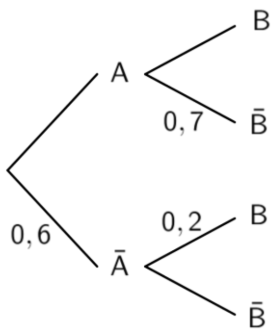
3.4.Arbre pondéré et probabilités totales

Propriété :

Comme A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers : $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$ Ou tout simplement $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$	

<u>Exercice :</u> Méthode pour Construire un arbre pondéré

On donne l'arbre pondéré ci-contre.
a) Traduire les données de l'arbre sous forme de probabilités
b) À l'aide de l'arbre, calculer $P(A)$, $P_{\bar{A}}(\bar{B})$ et $P(A \cap \bar{B})$.

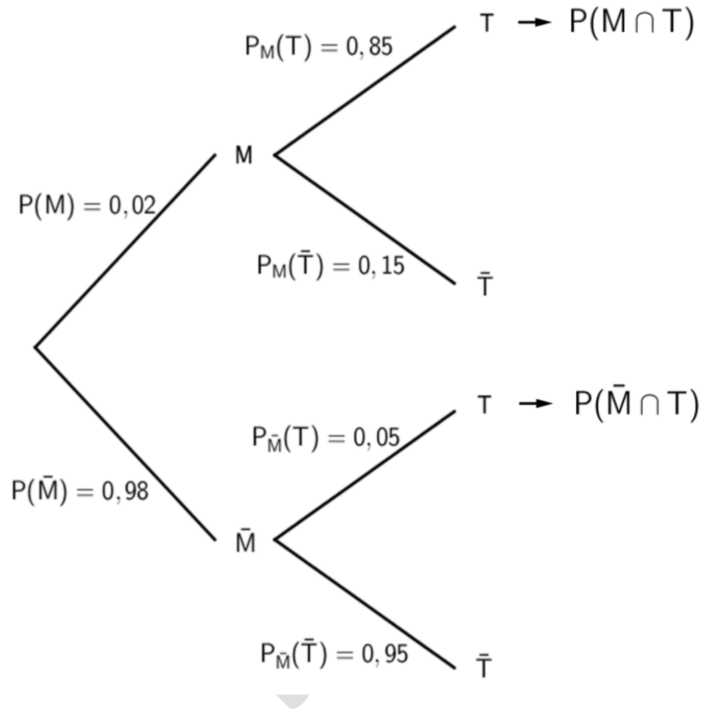


<u>Exercice :</u> Appliquer la formule des probabilités totales

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :
– si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
– si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».
a) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
b) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

Correction de l'exercice

a)On construit et on complète un arbre pondéré :



D'après la formule des probabilités totales :
$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$
$= 0,02 \times 0,85 + 0,98 \times 0,05$
$= 0,066.$
La probabilité que le test soit positif est égale à 6,6 %.
b) $P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)}$
$= \frac{0,02 \times 0,85}{0,066} \approx 0,26.$
La probabilité que le bovin soit malade sachant que le test est positif est d'environ 26 %.

Leçon 3 : Notion de variable aléatoire ; Fonction de répartition et Espérance, variance, écart type

1.Notion de variable aléatoire

1.1.Exemple :

Soit l'expérience aléatoire : ≪ On lance un dé à six faces et on regarde le résultat. ≫
L'ensemble de toutes les issues E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} s'appelle l'univers des possibles.
On considère le jeu suivant :
• Si le résultat est 5 ou 6, on gagne 2 €.
• Sinon, on perd 1 €.
On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} qui donne le gain et qui peut prendre les valeurs 2 ou –1.
Pour les issues 5 et 6, on a : $X = 2$
Pour les issues 1, 2, 3 et 4, on a : $X = –1$.

1.2.Définition :

Une variable aléatoire X associe un nombre réel à chaque issue de l'univers des possibles.

1.3.Calculer une probabilité à l'aide d'une variable aléatoire

Exemple :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
- Si cette carte est un cœur, on gagne 5 €.
- Si cette carte est un carreau, on gagne 2 €.
- Dans les autres cas, on perd 1 €.

Soit X la variable aléatoire qui associe le gain du jeu.
Calculer : $P(X = 5)$, $P(X = -1)$ et $P(X = 2)$

Correction de l'exemple

$P(X = 5)$ est la probabilité de gagner 5 €. On gagne 5 € lorsqu'on tire un cœur.
Soit : $P(X = 5)$ =8/32=1/4
$P(X = -1)$ est la probabilité de perdre 1 €. On perd 1 € lorsqu'on ne tire ni un cœur, ni un carreau. Soit : $P(X = -1)$ =16/32=1/2
$P(X =2)$ est la probabilité de gagner 2 €. On gagne 2 € lorsqu'on tire un carreau.
Soit : $P(X = 2)$ =8/32=1/4

1.4.Loi de probabilité

1.4.1.Définition :

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
La **loi de probabilité** de X est donnée par toutes les probabilités $P(X = x_i)$ sous forme d'un tableau le plus souvent.

1.4.2.Déterminer une loi de probabilité d'une variable aléatoire

Exemple

On lance simultanément deux des a 6 faces et on note les valeurs obtenues.
Soit X la variable aléatoire égale à la plus grande des deux valeurs.
Etablir la loi de probabilité de X.

Correction de l'exemple

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
Par exemple, si on obtient la combinaison (2 ; 5), la plus grande valeur est 5 et on a : $X = 5$.
La plus grande des deux valeurs est 1, si on obtient la combinaison : (1 ; 1).
$P(X = 1)$ =1/36
La plus grande des deux valeurs est 2, si on obtient les combinaisons : (1 ; 2), (2 ; 1) ou (2 ; 2). $P(X = 2)$ =3/36=1/12
La plus grande des deux valeurs est 3, si on obtient les combinaisons : (1 ; 3), (3 ; 1), (2 ; 3),(3 ; 2) ou (3 ; 3). $P(X = 3)$ =5/36
La plus grande des deux valeurs est 4, si on obtient les combinaisons : (1 ; 4), (4 ; 1) (2 ; 4),(4 ; 2), (3 ; 4), (4 ; 3) ou (4 ; 4). $P(X = 4)$ =7/36
La plus grande des deux valeurs est 5, si on obtient les combinaisons : (1 ; 5), (5 ; 1) (2 ; 5),(5 ; 2), (3 ; 5), (5 ; 3), (4 ; 5), (5 ; 4) ou (5 ; 5). $P(X = 5)$ =9/36=1/4
La plus grande des deux valeurs est 6, si on obtient les combinaisons : (1 ; 6), (6 ; 1) (2 ; 6),(6 ; 2), (3 ; 6), (6 ; 3), (4 ; 6), (6 ; 4), (5 ; 6), (6 ; 5) ou (6 ; 6). $P(X = 6)$ =11/36
On peut résumer les résultats dans le tableau de la loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

Remarque :
On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1 :

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{12} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36} + \frac{1}{4} + \frac{11}{36} = 1$$

2.Fonction de répartition $\mathbf{F(x) = P(X \leq x)}$

2.1.Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
- Si cette carte est un cœur, on gagne 5 €.
- Si cette carte est un carreau, on gagne 2 €.
- Dans les autres cas, on perd 1 €.

Soit X la variable aléatoire qui associe le gain du jeu.
Calculer : $P(X \leq 2)$.

Correction de l'exemple

$P(X \leq 2)$ est la probabilité de gagner 2 € ou moins.
$P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = -1)$ =1/4+1/2=3/4

2.2.Définition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X est la fonction F qui, à tout réel x, associe la probabilité que X prenne une valeur inférieure ou égale à x :

$$\mathbf{F(x) = P(X \leq x)}$$

Elle indique, pour la valeur donnée prise par une variable aléatoire, un cumul de probabilités (penser aux calculs des **effectifs cumulés croissants** étudiés en statistiques).

2.3.Propriété

Soit $\boldsymbol{p_i}$ la probabilité que X prenne la valeur $\boldsymbol{x_i}$. La propriété des probabilités totales entraine :

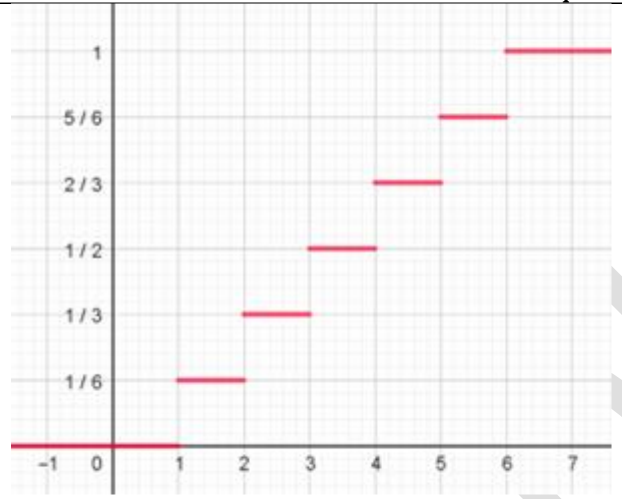
$$\mathbf{F(x) = P(X \leq x)} = \sum_{x_i \leq x} \boldsymbol{p_i}$$

2.4.Représentation graphique d'une fonction de répartition

Si la variable aléatoire est discrète, il s'agit d'une fonction en escaliers.

Exemple :

- ❖ Ci-dessous figure la représentation graphique d'une fonction de répartition associée à un lancer de dé non truqué ; X prenant les valeurs 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.



$> Si\ x \in\ ]-\infty\ ; 1[\ alors : F(x) = 0$;

$> Si\ x \in\ [\,1\ ; 2[\ alors : F(x) = p_1 = \dfrac{1}{6}$;

$> Si\ x \in\ [\,2\ ; 3[\ alors : F(x) = p_1 + p_2 = \dfrac{2}{6}$

$> Si\ x \in\ [\,3\ ; 4[\ alors$:

$$F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{3}{6}$$

$> Si\ x \in\ [\,4\ ; 5[\ alors$:

$$F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{4}{6}$$

$> Si\ x \in\ [\,4\ ; 6[\ alors$:

$$F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = \frac{5}{6}$$

$> Si\ x \in\ [\,6\ ; +\infty[\ alors$:

$$F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

3.Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire

3.1.Définitions :

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La loi de probabilité de X associe a toute valeur x_i la probabilité $p_i = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$.

- L'**espérance** de X est : $\boldsymbol{E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n}$

- La **variance** de X est :

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{p_1}\big(\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{E(X)}\big)^2 + \boldsymbol{p_2}\big(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{E(X)}\big)^2 + \cdots + \boldsymbol{p_n}\big(\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{E(X)}\big)^2$$

- L'**écart-type** de X est : $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}) = \sqrt{\mathbf{V(X)}}$

3.2.Exercice d'application

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal a 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.

L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.

On considère la variable aléatoire X qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.

La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.

Exercice corrigé

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
- Si on tire un roi on gagne 5 €.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

X est la variable aléatoire donnant le gain du jeu.

1)Calculer l'espérance de X.

2) Donner une interprétation du résultat.

3) Calculer la variance et l'écart-type de X.

Solution

1) On commence par établir la loi de probabilité de X :

X peut prendre les valeurs -1 €, 2 €, 5 € mais aussi 7 €.

En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 2 € (comme un cœur) + 5 € (comme un roi).

Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), $X = 2$ et $P(X = 2)$ =7/32

Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), $X = 5$ et $P(X = 5)$ =3/32

Si la carte tirée est le roi de cœur, $X = 7$ et $P(X = 7)$ =1/32

Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, $X = -1$ et $P(X = -1)$ =21/32

La loi de probabilité de X est :

x_i	-1	2	5	7
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$E(X) = \frac{21}{32} \times (-1) + \frac{7}{32} \times 2 + \frac{3}{32} \times 5 + \frac{1}{32} \times 7 = \frac{15}{36} \approx 0{,}47$$

2)Si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois, on peut espérer gagner, en moyenne, environ 0,47 € par tirage.

Si l'organisateur du jeu veut espérer faire un bénéfice, il pourra demander par exemple aux joueurs une participation de 0,50 € par tirage. Il gagnera en moyenne environ 0,03 € par tirage.

3)Variance :

$$V(X) = \frac{21}{32} \times \left(-1 - \frac{15}{36}\right)^2 + \frac{7}{32} \times \left(2 - \frac{15}{36}\right)^2 + \frac{3}{32} \times \left(5 - \frac{15}{36}\right)^2 + \frac{1}{32} \times \left(7 - \frac{15}{36}\right)^2 \approx 5{,}1865$$

Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{5{,}1865} \approx 2{,}28$

3.3.Propriétés de linéarité

Soit une variable aléatoire X. Soit a et b deux nombres réels. On a :

$E(aX + b) = aE(X) + b$

$V(aX + b) = a^2V(X)$

Leçon 4 : Loi binomiale

1.Epreuve de Bernoulli

Par exemple, lors d'un lancer de pile ou face, on peut considérer qu'obtenir face est un **succès** et obtenir pile est un **échec**.
Dans ce modèle, la probabilité de succès est une valeur fixe, c'est-à-dire qui reste constante à chaque renouvellement de l'expérience aléatoire.
Cette probabilité de succès est notée p. Nous pouvons noter sa loi de probabilité :

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k} \ \ avec\ k \in \{0\,;1\}$$

ou de manière équivalente :

$$X \sim \mathcal{B}(p) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(X=k)=\begin{cases} p & \text{si } k=1, \\ 1-p & \text{si } k=0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une telle expérience s'appelle une épreuve de Bernoulli.
Une loi de Bernoulli décrit le comportement d'une expérience aléatoire qui possède deux résultats possibles traditionnellement appelés succès et échec.

Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si les seules valeurs prises par X sont 0 ou 1, avec p la probabilité que X prenne pour valeur 1, et $q = 1 - p$, la probabilité qu'elle prenne pour valeur 0 (avec p et q non nuls).
Une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli est appelée variable de Bernoulli.

2.Loi binomiale

2.1.Présentation de la loi binomiale

Pour chaque expérience appelée épreuve de Bernoulli, on utilise une **variable aléatoire** qui prend la valeur 1 lors d'un succès et la valeur 0 sinon.
La **variable aléatoire, somme de toutes ces variables aléatoires**, compte le nombre de succès et suit une loi binomiale. Il est alors possible d'obtenir la probabilité de k succès dans une répétition de n expériences :

$$\boldsymbol{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{1-k} \ = C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \ \ k \in \{0\,;\dots;n\}.}$$

Les n (n expériences) **et p (probabilité d'un succès) sont les paramètre loi binomiale.**
Une loi binomiale modélise donc la fréquence du nombre de succès obtenus lors de la réalisation de plusieurs expériences aléatoires identiques et indépendantes. Elle décrit le nombre de fois où le *succès* apparaît sur les n expériences effectuées.

2.2.Exemples

Exemple : Pile ou face

Considérons 3 lancers successifs d'une pièce de monnaie. Alors le nombre de fois où la pièce apparaît du côté pile suit la loi binomiale où le nombre d'expériences réalisées est 3 et où la probabilité de succès est p =1/2

$$P(X=k)=\binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-k}\quad=C_n^k\,p^k(1-p)^{3-k}\ \ k\in\{0\,;\dots;3\}$$

$$pas\ de\ succes:P(X=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-0}\quad=C_3^0\ \left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-0}$$

$$1\ succes:P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-1}\quad=C_3^1\ \left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-1}$$

$$2\ succes:P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-2}\quad=C_3^2\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-2}$$

$$3\ succes:P(X=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-3}\quad=C_3^3\ \left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-3}$$

Exemple : Lancer de dé

Considérons 2 lancers successifs d'un dé à 6 faces. Alors le nombre de fois où l'on obtient un 1, suit la loi binomiale où le nombre d'expériences réalisées est 2 et où la probabilité de succès est p= 1/6.

$$P(X=k)=\binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2-k}\quad=C_n^k\,p^k(1-p)^{2-k}\ \ k\in\{0\,;\dots;2\}$$

$$pas\ de\ succes:P(X=0)=\binom{2}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{2-0}\quad=C_2^0\ \left(\frac{1}{6}\right)^{0}(1-p)^{2-0}$$

$$1\ succes:P(X=1)=\binom{2}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{2-1}\quad=C_2^1\ \left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{2-1}$$

$$2\ succes:P(X=2)=\binom{2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{2-2}\quad=C_2^2\ \left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{2-2}$$

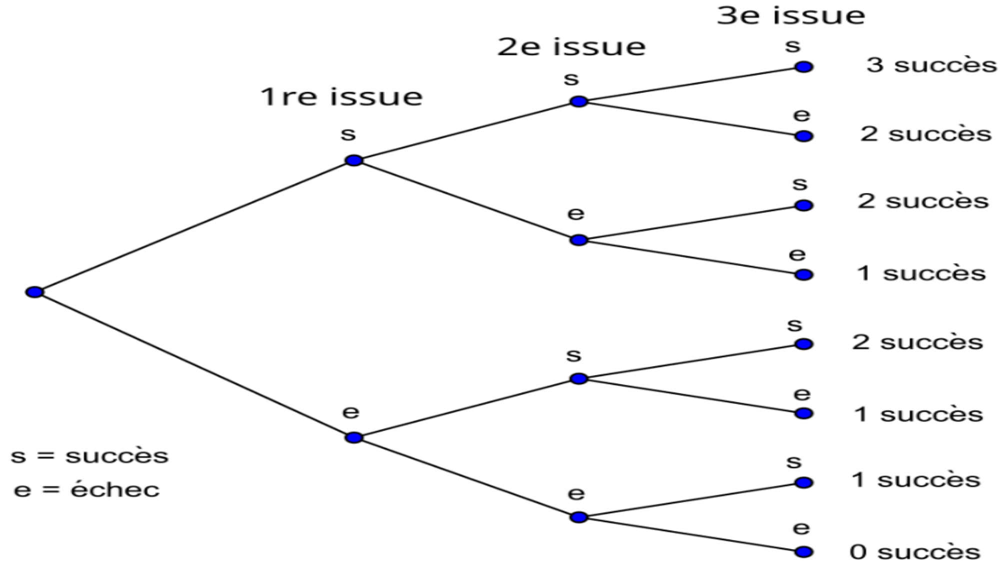
On admet les résultats suivants sur l'espérance, la variance et l'écart type d'une loi binomiale de paramètres n et p :

$$\boldsymbol{E(X)\ =\ np\ \ ;\ \ V(X)\ =\ npq}\ \ \textbf{et}\ \boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{npq}}\ \textbf{avec}\ \mathbf{q=1-p}$$

2.3.Arbre de probabilité et loi binomiale

Une manière visuelle de représenter une suite d'expériences est d'utiliser un arbre de probabilité. Chaque épreuve est représentée par deux branches : l'une pour le succès, l'autre l'échec. À chaque extrémité, on rajoute deux branches (succès et échec) pour l'épreuve suivante. On recommence jusqu'au nombre total d'épreuves.
À chaque extrémité finale, on peut compter le nombre de succès obtenus.

Par exemple, on lance 3 fois de suite un dé équilibré à six faces et on s'intéresse au nombre de fois que le 1 apparaît. Il apparaît 0, 1, 2 ou 3 fois.



<u>**Arbre de probabilité pour une loi binomiale associée à 3 épreuves de Bernoulli**</u>

Chaque lancer est indépendant des autres et la probabilité d'obtenir le 1 est de 1/6 sur chacun d'entre eux, autrement dit la probabilité qu'il n'apparaisse pas est de 5/6 à chaque lancer. Ainsi, pour chaque lancer, on considère une loi de Bernoulli de paramètre 1/6. Il y a trois configurations pour obtenir une seule fois le 1 : il apparaît au premier lancer ou au deuxième ou au troisième. Chacune de ces issues a la même probabilité d'apparaître : $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$.

La probabilité pour avoir une fois le 1 est alors : $3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$.

On retrouve bien $P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1}$ pour une loi binomiale $b\,(3, 1/6)$.

Il est possible de retrouver les autres probabilités de la même façon.

Activité :

a)Calculer à l'aide de l'arbre pondéré ci-dessus les probabilités suivantes :

$$P(X = 0)\ ;\ P(X = 2) \text{ et } P(X = 3).$$

b)Calculer à l'aide de la formule de la loi binomiale $b\,(3, 1/6)$ les probabilités suivantes :

$$P(X = 0)\ ;\ P(X = 2) \text{ et } P(X = 3).$$

c) Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de cette loi binomiale.