

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

Monsieur THIAM Serigne Mor, Lycée de Pikine

8 mai 2025

Table des matières

1	Equation différentielle linéaire du premier ordre	2
1.1	Equation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre	2
1.2	Equation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre	3
2	Equation différentielle linéaire du second ordre	5
2.1	Equation sans second membre	5
2.2	Famille de solutions	5
2.3	Equation avec second membre	6

Introduction

Activité

1. Soit la fonction donnée par : $f(x) = e^{3x}$.
Montrer que $f'(x) - 3f(x) = 0$.
2. $g(x)$ est la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \sin(3x)$.
Établir une relation liant la fonction g et ses dérivées (première et seconde).

Définition 1

Une équation différentielle est une équation

- dont l'inconnue est une fonction (généralement notée $y(x)$ ou simplement y)
- dans laquelle figure au moins l'une des dérivées successives de la fonction inconnue.

Exemple 1

$y' - 3y = 0$ et $y'' + y' + 9y = 3 \cos(3x)$ sont des équations différentielles.

1 Equation différentielle linéaire du premier ordre

1.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre

Définition 2

On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre*, toute équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme $y' + ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}^*$).

$$(E) : y' + ay = 0$$

- 1 et a sont des constantes, (E) est dite **à coefficients constants**.
- L'exposant de y et y' est 1, (E) est dite **linéaire**.
- le second membre de (E) est nul, (E) est dite **sans second membre**.

Exemple 2

$y' - 5y = 0$; $2y' + 3y = 0$; $5y' - y = 0$.

Théorème 1 (Solution Générale)

(E) est l'équation différentielle donnée par : $y' + ay = 0$; ($a \in \mathbb{R}^*$).

Les solutions de (E) sont les fonctions y_k de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par :

$$y_k(x) = ke^{-ax} ; [k \in \mathbb{R}]$$

Démonstration

Soit à résoudre l'équation $y' + ay = 0$. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, e^{ax} \neq 0$.

De $y' + ay = 0$, on obtient $y'e^{ax} + aye^{ax} = 0 \iff y'e^{ax} + (e^{ax})'y = 0 \iff (ye^{ax})' = 0$.

Par conséquent la fonction $x \mapsto ye^{ax}$ est constante, il existe alors un nombre réel k tel que $ye^{ax} = k \implies y = ke^{-ax}$.

Les solutions de (E) sont ainsi les fonctions y_k donnée par : $y_k(x) = ke^{-ax}, (k \in \mathbb{R}) \quad \square$

Exercice d'application

Donner la solution générale de chacune des équations citées dans l'exemple 2.

Solution

1. $y' - 5y = 0$; $a = -5$ on a alors $y_k = ke^{5x}, [k \in \mathbb{R}]$ qui est solution générale de l'équation.

2. $2y' + 3y = 0 \iff y' + \frac{3}{2}y = 0$; $a = \frac{3}{2}$ par la suite $y_k = ke^{-\frac{3}{2}x}, [k \in \mathbb{R}]$ est la solution générale de l'équation.
3. $5y' - y = 0$, (à terminer)

Théorème 2 (Solution Particulière)

x_0 et y_0 étant deux nombres réels, l'équation différentielle $y' + ay = 0, (a \in \mathbb{R})$ admet une solution unique ϕ telle que : $\phi(x_0) = y_0$. Cette fonction est donnée par :

$$\phi(x) = y_0 e^{-a(x-x_0)}$$

Démonstration (à faire).

Exemple 3

1. Donne la solution générale de l'équation (E) : $-2y' + y = 0$.
2. En déduire la fonction g , la solution de (E) telle que $g(1) = -3$.

Solution

1. On a $-2y' + y = 0 \iff -2\left(y' - \frac{1}{2}y\right) = 0 \Rightarrow y' - \frac{1}{2}y = 0$. Par la suite la solution

générale de (E) est l'ensemble des fonctions données par : $y = ke^{\frac{1}{2}x}, [k \in \mathbb{R}]$.

2. Puisque g est une solution de (E), elle s'écrit alors $g(x) = ke^{\frac{1}{2}x}, [k \in \mathbb{R}]$
 $g(1) = -3 \Rightarrow ke^{\frac{1}{2}} = -3 \Rightarrow k = -3e^{-\frac{1}{2}}$. Par la suite $g(x) = -3e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = -3e^{\frac{1}{2}(x-1)}$

$$g(x) = -3e^{\frac{1}{2}(x-1)}$$

1.2 Équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

Définition 3

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre**, toute équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme $y' + ay = \varphi(x)$ où $a \in \mathbb{R}$ et φ une fonction numérique à variable réelle non nulle.

$$y' + ay = \varphi(x)$$

Théorème 3

Les solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre donnée par $y' + ay = \varphi(x)$ sont les fonctions du type $y_k(x) = ke^{-ax} + \mu(x)$ avec $k \in \mathbb{R}$ et μ une solution particulière de (E).

Exemple 4 Soit à résoudre l'équation différentielle (E) : $3y' - 2y = 2x^2 - 2x$.

1. Détermine un polynôme p de degré 2 solution de (E).
2. Montrer que une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de (E') : $3y' - 2y = 0$.
3. Résoudre (E') puis en déduire l'ensemble des solutions de (E).

4. Trouve la solution h de (E) qui prend la valeur -2 en 3 .

Solution

1. Le polynôme p solution particulière de (E) .

p étant un polynôme du second degré, posons $p(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des nombres réels.

Si p est solution de (E) , on a nécessairement $3p'(x) - 2p(x) = 2x^2 - 2x$.

Or $p'(x) = 2ax + b \Rightarrow 3p'(x) = 6ax + 3b$. Par ailleurs $2p(x) = 2ax^2 + 2bx + 2c$.

Il s'ensuit que $3p'(x) - 2p(x) = -2ax^2 + (6a - 2b)x + 3b - 2c$.

Par la suite $3p'(x) - 2p(x) = 2x^2 - 2x \iff -2ax^2 + (6a - 2b)x + 3b - 2c = 2x^2 - 2x$.

Nous identifions $a = -1$; $b = -2$ et $c = -3$ d'où $\boxed{p(x) = -x^2 - 2x - 3}$.

2. Montrons que f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de (E') .

\Rightarrow Soit f une solution de (E) , on a :

$3f' - 2f = 2x^2 - 2x$, on a de même $3p' - 2p = 2x^2 - 2x$ car p est aussi solution de (E) .

Ce qui implique que $3f' - 2f = 3p' - 2p$; $3(f' - p') - 2(f - p) = 0$; $3(f - p)' - 2(f - p) = 0$.

Par conséquent $f - p$ est solution de (E') : $3y' - 2y = 0$.

\Leftarrow Supposons que la fonction $f - p$ est solution de (E') , on a :

$3(f - p)' - 2(f - p) = 0$; $3(f' - p') - 2(f - p) = 0$; $3f' - 2f = 3p' - 2p$ d'autre part

$3p' - 2p = 2x^2 - 2x$ car p est solution de (E) .

Vient alors l'égalité $3f' - 2f = 2x^2 - 2x$ d'où f est solution de (E) .

3. Résolution de (E') .

(E') ; $3y' - 2y = 0 \iff y' - \frac{2}{3}y = 0$ est une équation différentielle sans second membre.

Ses solutions sont alors les fonctions du type $y_k(x) = ke^{\frac{2}{3}x}$; [$k \in \mathbb{R}$]. (Théorème 1)
Les solutions de (E) .

Soit f une solution de (E) . On a montré plus haut que f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de (E') . La fonction $f - p$ est alors sous la forme

$$y_k(x) = ke^{\frac{2}{3}x}; [k \in \mathbb{R}] \Rightarrow f - p = y_k(x) = ke^{\frac{2}{3}x}; f = p + ke^{\frac{2}{3}x} \Rightarrow f(x) = -x^2 - 2x - 3 + ke^{\frac{2}{3}x}.$$

Les solutions de (E) sont alors les fonctions du type $f_k(x) = -x^2 - 2x - 3 + ke^{\frac{2}{3}x}$.

$$\boxed{f_k(x) = -x^2 - 2x - 3 + ke^{\frac{2}{3}x}, [k \in \mathbb{R}]}$$

4. La solution h de (E) .

On a $h(x) = f_k(x)$ tel que $f_k(3) = -2$.

$$f_k(3) = -2 \iff -9 - 6 - 3 + ke^{\frac{2}{3} \cdot 3} = -2; -18 + ke^2 = -2; k = 16e^{-2}.$$

Par la suite $h(x) = 16e^{\frac{2}{3}x} \times e^{-2} - x^2 - 2x - 3$.

$$\boxed{h(x) = 16e^{\frac{2}{3}(x-3)} - x^2 - 2x - 3}$$

Remarque

L'équation (E) : $3y' - 2y = 2x^2 - 2x$ peut s'écrire (E) : $y' - \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}(2x^2 - 2x)$.

On peut voir que $a = -\frac{2}{3}$ et vu que $p(x) = -x^2 - 2x - 3$ est une solution particulière de (E) . On a d'après le **Théorème 3** les fonctions $x \mapsto ke^{\frac{2}{3}x} - x^2 - 2x - 3, [k \in \mathbb{R}]$ qui constituent la famille de solutions de (E) .

2 Équation différentielle linéaire du second ordre

2.1 Équation sans second membre

Définition 4

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre*, toute équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme $y'' + ay' + by = 0$; $[(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$

$$y'' + ay' + by = 0; [(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$$

Définition 5

On appelle *équation caractéristique* de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$, l'équation du second degré d'inconnue $r \in \mathbb{C}$ donnée par : $r^2 + ar + b = 0$.

Exemple 5

L'équation différentielle $y'' - 3y' + 5y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 - 3r + 5 = 0$.
 L'équation différentielle $-2y'' + y' + y = 0$ a pour équation caractéristique $-2r^2 + r + 1 = 0$.
 L'équation différentielle $y'' - 9y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 - 9 = 0$.

2.2 Famille de solutions

Théorème 4

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = 0$; $[(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$.

Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ de (E) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 , alors les solutions de (E) sont les fonctions du type

$$y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}; [(A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$$

Exemple 6 Trouvons l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (D) : $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Solution

L'équation caractéristique de (D) est : $r^2 - 4r + 3 = 0$. $\Delta' = (-2)^2 - (1) \times 3 = 1$.

Par la suite $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$. Les solutions de (D) sont alors les fonctions

$$y(x) = Ae^x + Be^{3x}; [(A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$$

Théorème 5

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = 0$; $[(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$.

Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ de (E) admet une solution(double) réelle r_0 , alors les solutions de (E) sont les fonctions du type

$$y(x) = (Ax + B)e^{r_0x}; [(A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}].$$

Exemple 7 Trouvons l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (S) : $25y'' + 60y' + 36y = 0$.

Solution

L'équation caractéristique de (S) est : $25r^2 + 60r + 36 = 0$.

$\Delta' = (30)^2 - (25) \times 36 = 900 - 900 = 0$.

Par la suite $r = \frac{-30}{25} = -\frac{6}{5}$. Les solutions de (S) sont alors les fonctions

$$y(x) = (Ax + B)e^{-\frac{6}{5}x}; [(A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}].$$

Théorème 6

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = 0$; $[(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$.

Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ de (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$, alors les solutions de (E) sont les fonctions du type

$$y(x) = [A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)] e^{\alpha x}; [(A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$$

Exemple 8 Trouvons l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (F) : $y'' + 25y = 0$.

Solution

L'équation caractéristique de (F) est : $r^2 + 25 = 0 \iff (r - 5i)(r + 5i) = 0$.

Par la suite $r = 5i$ ou $r = -5i$ et donc $\alpha = 0$ et $\beta = 5$ Les solutions de (F) sont alors les fonctions $y(x) = [A \sin(5x) + B \cos(5x)] e^{0x} = A \sin(5x) + B \cos(5x)$; $[(A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$.

$$y(x) = A \sin(5x) + B \cos(5x); [(A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}].$$

Tableau Récapitulatif

Équation différentielle du type : $y'' + ay' + by = 0$; $[(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$	
Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ admet :	alors la solution générale est la fonction donnée par :
deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2	$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$; $[(A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$
admet une solution(double) réelle r_0	$y(x) = (Ax + B) e^{r_0 x}$; $[(A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$
deux solutions complexes conjuguées $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$	$y(x) = [A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)] e^{\alpha x}$; $[(A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$

Théorème 7 (Solution particulière)

x_0, y_0 et z_0 étant trois nombres réels données, l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$; $[(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$ admet une unique solution ϕ telle que : $\phi(x_0) = y_0$ et $\phi'(x_0) = z_0$.

Exercice d'application

Soit l'équation différentielle donnée par : $y'' + 4y' + 5y = 0$

Détermine la solution f de cette équation vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

2.3 Équation avec second membre

Définition 6

On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre**, toute équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme $y'' + ay' + by = \varphi(x)$; $[(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$ et φ une fonction numérique à variable réelle non nulle.

Exemple 9 $y'' - 3y' + y = \sin(2x)$; $2y'' + y' = e^{2x} - x^2$

Théorème 8

Soit $(E) : y'' + ay' + by = \varphi(x)$ une équation différentielle du second ordre avec second membre. La solution générale de (E) est $y = y_1 + y_2$ où y_1 est la solution générale de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ et y_2 une solution particulière de l'équation $y'' + ay' + by = \varphi(x)$.

Exercice d'application

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = 0$.
2. Soit (E') l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = x + 3$. Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x) = ax + b$ soit solution de (E') .
3.
 - a. Démontrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - h$ est solution de (E) .
 - b. Résoudre alors (E') .
 - c. Déterminer la solution f de (E) telle que : $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.