TABLE DES MATIERES

LIMITES ET CONTUNUITE......2

DERIVEES – PRIMITIVES 15

GENERALITE SUR LES ETUDES DE FONCTIONS......27

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN......31

FONCTION EXPONENTIELLLE......46

INTEGRALE – CALCUL D'AIRES......53

SUITES NUMERIQUES......56

PROBABILITE......64

NOMBRES COMPLEXES......80

STATISTIQUES......100

EQUATIONS DIFERENTIELLES......111

LIMITES ET CONTUNUITE

1. Rappel de quelques limites de références

a et c étant des nombres réels et n un nombre entier naturel non nul, on a :

- $\lim\limits_{x \to a} c = c$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} c = c$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} c = c$
- $\lim\limits_{x \to a} |x| = |a|$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} |x| = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} |x| = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$
- Pour tout a positif, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

2. Limite à gauche - Limite à droite

Proprieté

a et ℓ sont des nombres réels, f une fonction définie sur n intervalle ouvert centrée en a, sauf éventuellement en a.

- Si f n'est pas définie en a, alors

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell$.

- Si f est définie en a, alors

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$

Exercice 4.1 résolu

Dans chaque cas, étudier la limite de la fonction au point 1 :

a) f est définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty ; 1], f(x) = x^2 - x + 3 \\ \text{pour } x \in]1 ; +\infty[, f(x) = -5x + 3 \end{cases}$

b) f est définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty ; 1[, f(x) = -2x^2 - x + 1 \\ \text{pour } x \in]1 ; +\infty[, f(x) = -5x + 3 \end{cases}$

Résolution

a) f est définie en a et $f(1) = 1^2 - 1 + 3 = 3 = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -5 \times 1 + 3 = -2$

f n'admet pas de limite en 1 car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$.

a) f n'est pas définie en a et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -2 \times 1^2 - 1 + 1 = -2$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -5 \times 1 + 3 = -2$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) \Rightarrow f$ *admet une limite en 1 et* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$.

3. Limite à l'infinie de fonctions polynômes et fonctions rationnelles

Proprieté

• La limite en $+\infty$ (resp $-\infty$) d'une fonction polynôme est égale à la limite en $+\infty$ (resp $-\infty$) de son monôme de plus haut degré.

• La limite en $+\infty$ (resp $-\infty$) d'une fonction rationnelle est égale à la limite en $+\infty$ (resp $-\infty$) du quotient des monômes de plus haut degrés du numérateur et du dénominateur.

4. Limite d'une fonction composée

Proprieté

f et g sont des fonctions, a, ℓ et ℓ' des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = \ell'$ alors $\lim\limits_{x \to a} fog(x) = \ell'$

Exercice 4.2 résolu

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x+1}{2x}}$

Résolution

Considérons $\sqrt{\dfrac{x+1}{2x}} = fog(x)$ *avec* $g(x) = \dfrac{x+1}{2x}$ *et* $f(x) = \sqrt{x}$

Comme $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ *alors* $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x+1}{2x}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

Autre rédaction

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{2x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad car \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{2x}=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{X\to\frac{1}{2}}\sqrt{X}=\sqrt{\dfrac{1}{2}} \quad =\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Autre rédaction

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{2x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad car \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{2x}=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{X\to\frac{1}{2}}\sqrt{X}=\sqrt{\dfrac{1}{2}} \quad =\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Exercice 4.3

Sachant que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, calculer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{x}$.

5. Operations sur les limites

f et g sont deux fonctions.

- Les résultats sont libellés avec la notation dénudée : lim f, lim g. il va de soit qu'il s'agit de la limite de f et celle de g « au même endroit » : soit en a ($a \in \mathbb{R}$), soit en $-\infty$ ou en $+\infty$. Chaque tableau énonce donc en fait trois propriétés correspondant à chacun de ces cas ci-dessus cités.
- Les cases (☠): ce sont les cases où à priori, on ne sait pas conclure de façon immédiate, plusieurs possibilités de résultats sont envisageables. On dit alors qu'il y a indétermination.
- ℓ et ℓ□ sont des nombres réels puis la notation ∞ signifie ou $-\infty$ ou $+\infty$.

a) Limites et somme :
Les fonctions f et g ont une limite (finie ou infinie), la fonction f + g admet une limite dans chaque cas décrit par le tableau ci-contre :

lim g \ lim f	ℓ	$-\infty$	$+\infty$
ℓ	$\ell+\ell$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	☠
$+\infty$	$+\infty$	☠	$+\infty$

b) Limites et produit :
Les fonctions f et g ont une limite (finie ou infinie), la fonction f × g admet une limite dans chaque cas décrit par le tableau ci-contre :

lim g \ lim f	$\ell \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\ell \neq 0$	$\ell \times \ell$	∞	∞	0
$-\infty$	∞	$+\infty$	$-\infty$	☠
$+\infty$	∞	$-\infty$	$+\infty$	☠
0	0	☠	☠	0

c) Limites et inverse :
La fonction f a une limite (finie ou infinie), la fonction 1/f admet une limite dans chaque cas décrit par le tableau ci-contre :

lim f	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	0 et $f<0$	0 et $f>0$
lim1/f	$1/\ell$	0	0	$-\infty$	$+\infty$

d) Limites et quotient :
Les fonctions f et g ont une limite (finie ou infinie), la fonction f/g admet une limite dans chaque cas décrit par le tableau ci-contre :

lim g \ lim f	$\ell \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\ell \neq 0$	ℓ/ℓ	∞	∞	0
$-\infty$	0	☠	☠	0
$+\infty$	0	☠	☠	0
0	∞	∞	∞	☠

e) Limites et valeur absolue :
La fonction f a une limite (finie ou infinie), la fonction |f| admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau

lim f	ℓ	$-\infty$	$+\infty$
lim|f|	$\|\ell\|$	$+\infty$	$+\infty$

f) Limites et racine carrée :
La fonction positive f a une limite (finie ou infinie), la fonction $\sqrt{f}$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le

lim f	ℓ	$+\infty$
$\lim\sqrt{f}$	$\sqrt{\ell}$	$+\infty$

Remarque : Il y'a quatre forme indéterminées $(+\infty)+(-\infty)$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $0\times\infty$.
Pour lever l'indétermination, on utilise d'autres moyens tels que l'expression conjuguée ; le changement de variable ; la factorisation ; le taux de variation ou une combinaison de ces moyens ci-dessus cités

6. Limites et interprétations graphiques : Asymptotes – Branches paraboliques

a. Asymptote verticale- Asymptote horizontale –Asymptote oblique

Propriété 1

a est un nombre réel. La droite d'équation x = a est une asymptote verticale à (Cf) si l'une des conditions présentées dans le tableau suivant est satisfaite :

Conditions (limites)	Interprétations graphiques
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	La droite d'équation x = a est une asymptote verticale à (Cf) *Ou bien* La courbe (Cf) admet une aymptote verticale d'équation x = a
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = -\infty$	
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = +\infty$	
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = -\infty$	
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = +\infty$	

Proprieté 2

b est un nombre réel.

- La droite (D) d'équation y = b est asymptote horizontale à (Cf) en - ∞ ⇔ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$
- La droite (D) d'équation y = b est asymptote horizontale à (Cf) en + ∞ ⇔ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$

b. Branches paraboliques

Propriété

f est une fonction de représentation graphique (Cf). Si (Cf) admet une branche parabolique dans chacun des cas présentés dans le tableau ci desssous.

Limites	Interprétations graphiques
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	Si (Cf) admet une branche parabolique de direction (OI) en - ∞.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	Si (Cf) admet une branche parabolique de direction (OI) en + ∞.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$	Si (Cf) admet une branche parabolique de direction (OJ) en - ∞.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$	Si (Cf) admet une branche parabolique de direction (OJ) en + ∞.

7. Exemples de calculs de limites et levée de formes indéterminées

a) Forme réel / réel non nul

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to2} \frac{x+3}{x-3}$$

Résolution

On recherche : $\lim_{x\to2} x+3=5$; $\lim_{x\to2} x-3=-1$ *on a* $\frac{5}{-1}=-5$ ***(cette recherche se fait au brouillon)***

On obtient la forme $\left(\frac{réel}{réel\ \ non\ \ nul}\right)$

On rédige :

$$\lim_{x\to2} \frac{x+3}{x-3} = -5 \quad car \begin{cases} \lim_{x\to2}(x+3)=5 \\ \lim_{x\to2}(x-2)=-1 \end{cases}$$

b) Forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ »

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to-2} \frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}$ 2. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}\ \ -2}{x-1}$ 3. $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$

Résolution

1. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

On recherche : $\lim\limits_{x \to -2}(x^2 + x - 2) = 0$; $\lim\limits_{x \to -2}(x^2 + 3x + 2) = 0$. *On a «* $\dfrac{0}{0}$ *» on ne peut conclure*

La forme « $\dfrac{0}{0}$ ***» est appelée forme indéterminée.***

Comment lever la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ ***?***

Pour lever la forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ *», on peut procéder comme suit :*

1^er^ cas

Lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ donne « $\dfrac{0}{0}$ », on peut mettre (x - a) en facteur au numérateur et au dénominateur, puis simplifier.

Ainsi :

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \to -2} \frac{x-1}{x+1} = 3 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2}(x-1) = -3 \\ \lim\limits_{x \to -2}(x+1) = -1 \end{cases}$$

$$\text{donc } \boxed{\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2} = 3}$$

2^eme^ cas

Lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ donne « $\dfrac{0}{0}$ », on peut utiliser l'expression conjuguée si éventuellement la fonction f contient une « racine carrée ».

Ainsi :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}\ -2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}\ -2)(\sqrt{x+3}\ +2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}\ +2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}\ +2)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}\ +2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x+3}\ +2)}=\frac{1}{4}\qquad car\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to 1} 1=1\\ \lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x+3}\ +2)=4\end{cases}$$

donc $$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}\ -2}{x-1}=\frac{1}{4}}$$

3^{eme} cas :*/Lorsque* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *donne «* $\frac{0}{0}$ *», on peut utiliser la définition du nombre dérivé ; donc la forme* $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ *où g(x) sera identifiée. Dans ce cas précis, si g est dérivable en a, alors*

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g\ '(a).$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi}$ *avec g(x) = sin x*

Comme g est dérivable en π*, alors*

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi}=g'(\pi)=\cos\pi=-1$$

donc $$\boxed{\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=-1}$$

Rappel : l'expression $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ est appelée taux de variation de la fonction g en a.

Exercice 4.10

Justifier que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ puis calculer $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x-1}{x-\pi}$.

c) Forme « réel non nul sur 0 » : réel / 0

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{x-4}{(x-3)^3}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{x-4}{(x-3)^3}$

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{1}{2-\sqrt{x}}$

Résolution

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{x-4}{(x-3)^3}$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{x-4}{(x-3)^3}$

On recherche : $\lim\limits_{x \to 3}(x-4) = -1$; $\lim\limits_{x \to 3}(x-3)^3 = 0$. *On a la forme* « $\left(\frac{\text{réel non nul}}{0}\right)$ »

On transforme le quotient en produit de la façon suivante : $\frac{x-4}{(x-3)^3} = (x-4) \times \frac{1}{(x-3)^3}$

Comme $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{1}{(x-3)^3} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{1}{(x-3)^3} = +\infty \end{cases}$ *(limites de référence)*

Alors on rédige :

$$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{x-4}{(x-3)^3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} (x-4)\frac{1}{(x-3)^3} = -\infty \quad car \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3} x-4 = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{1}{(x-3)^3} = +\infty \end{cases}$$

$$et \quad \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{x-4}{(x-3)^3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} (x-4)\frac{1}{(x-3)^3} = +\infty \quad car \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3} x-4 = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{1}{(x-3)^3} = -\infty \end{cases}$$

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{1}{2-\sqrt{x}}$

On a $\lim\limits_{x \to 4}(2-\sqrt{x}) = 0$.

On cherche ensuite à déterminer le signe de $(2-\sqrt{x})$ *pour les valeurs de x supérieures à 4 et proches de 4.*

On a : $x > 4 \Rightarrow \sqrt{x} > 2$. *Par conséquent* $(2-\sqrt{x}) < 0$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{1}{2-\sqrt{x}} = -\infty$ *car* $(2-\sqrt{x}) < 0$ *pour* $x > 4$.

d) Forme indéterminée « $0 \times \infty$ »

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}(-x^3 + 3x + 2)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3}(x^2 + 3x + 2)$

Résolution

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}(-x^3 + 3x + 2)$

On recherche : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty}(-x^2 + 3x + 2) = -\infty$ *on a « $0 \times \infty$ » on ne peut conclure.*

La forme « $0 \times \infty$ » est appelée forme indéterminée

Comment lever la forme indéterminée « $0 \times \infty$ » ?

Pour lever la forme indéterminée « $0 \times \infty$ » on peut procéder comme suit :

Lorsque lim f(x) donne « $0 \times \infty$ », on peut transformer l'expression de f(x) en utilisant soit l'expression conjuguée, soit le développement, soit la levée du radical ou la factorisation.

Ainsi : a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}(-x^3 + 3x + 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x}(-x^3 + 3x + 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\sqrt{x} \times \frac{-x^3 + 3x + 2}{x} = -\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x^3 + 3x + 2}{x} = -\infty \end{cases}$

d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}(-x^3 + 3x + 2) = -\infty}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3}(x^2 + 3x + 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$

d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3}(x^2 + 3x + 2) = 0}$

e) Forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}\ -2}$

Résolution

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

On recherche : $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1) = -\infty$, *on a* « $\frac{+\infty}{-\infty}$ » *on ne peut conclure.*

La forme « $\frac{\infty}{\infty}$ » est appelée forme indéterminée.

Comment lever la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ » ?

Pour lever la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ » on peut procéder comme suit :

1^er^ cas

Lorsque lim f(x) donne « $\frac{\infty}{\infty}$ », on peut utiliser la mise en facteur du terme dominant.

$$\text{Ainsi,} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \times \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x| \times \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x-1} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x \ \times \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{(1-\frac{1}{x})} = -1 \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 1-\frac{1}{x} = 1 \end{cases}$$

D'où $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = -1}$$

2ème cas :

Lorsque limf(x) donne « $\frac{\infty}{\infty}$ », on peut utiliser l'expression conjuguée.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}+2) = +\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2} = +\infty.$

D'où, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = +\infty.}$

f) Forme indéterminée « $-\infty+\infty$ »

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x}-3x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+2})$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3+\sqrt{x^2+3x+1})$.

Résolution

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x}-3x$

On recherche : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x} = +\infty$ *;* $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty$ *. On a « + ∞ -∞ » on ne peut conclure.*

La forme « + ∞ -∞ » est appelée forme indéterminée.

Comment lever la forme indéterminée « + ∞ -∞ » ?

Pour lever la forme indéterminée « + ∞ -∞ » on peut procéder comme suit :

1er cas

Lorsque limf(x) donne « + ∞ -∞ », on peut utiliser la factorisation.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x}-3x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2(1-\frac{3}{x})}-3x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2}\times\sqrt{1-\frac{3}{x}}-3x) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(|x|\times\sqrt{1-\frac{3}{x}}-3x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x\times\sqrt{1-\frac{3}{x}}-3x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}}-3\right) = -\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{3}{x}}-3 = -2 \end{cases}$

D'où, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x}-3x) = -\infty$

2ème cas :

Lorsque lim f(x) donne «− ∞ + ∞ » ,on peut utiliser l'expression conjuguée.

$$Ainsi,\ \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+2})=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+2})(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+2}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+3)-(x^2+2)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+2}}=0$$

$$car\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}1=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+2}=+\infty\end{cases}$$

$$D'où\ \boxed{\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+2})=0}$$

3ème cas

Lorsque limf(x) donne « + ∞ -∞ », on peut utiliser l'expression conjuguée et la factorisation.

$$Ainsi,\ \lim_{x\to-\infty}(x+3+\sqrt{x^2+3x+1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+3+\sqrt{x^2+3x+1})(x+3-\sqrt{x^2+3x+1})}{x+3-\sqrt{x^2+3x+1}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+3)^2-(x^2+3x+1)}{x+3-\sqrt{x^2+3x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+8}{x+3-\sqrt{x^2+3x+1}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x(3+\frac{8}{x})}{x+3-\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(3+\frac{8}{x})}{x+3-|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(3+\frac{8}{x})}{x+3+x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x(3+\frac{8}{x})}{x(1+\frac{3}{x}+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(3+\frac{8}{x})}{(1+\frac{3}{x}+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}})}=\frac{3}{2}$$

$$car\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}3+\frac{8}{x}=3\\ \lim\limits_{x\to-\infty}1+\frac{3}{x}+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=2\end{cases}$$

$$d'où\ \boxed{\lim_{x\to-\infty}(x+3+\sqrt{x^2+3x+1})=\frac{3}{2}}$$

DERIVEES – PRIMITIVES

I- DERIVATION

1) Dérivabilité en x_o

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_o.et (Cf) la courbe représentative.

On appelle taux de variation de f en x_o la fonction T_o définie sur $I\backslash\{x_o\}$ par $T_o(x) = \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$.

Si T_o admet une limite finie ℓ en x_o, on dit que f est dérivable en x_o. ℓ est appelé nombre dérivé de f en x_o et on note $f'(x_o) = \ell$.

La droite d'équation $\mathbf{y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)}$ est tangente à (Cf) en son point d'abscisse x_o.

Exercice 5.1 résolu

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x+1}$

On note (Cf) la courbe représentative de f dans un repère (O ; I ; J).

1. Montrer que, en utilisant la définition, que f est dérivable en 2 puis préciser f'(2).
2. Donner une équation de la tangente à (Cf) en 2.

Résolution

$$1.\ \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)\quad f(2)}{x\quad 2}$ existe et est finie donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

2. Soit (T) la tangente à (Cf) en 2.

$(T) : y = f'(2)(x-2) + f(2)$

lim

$$y = \frac{\sqrt{3}}{6}(x-2) + \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2) Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite en x_0

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle K contenant x_0.

- f est dérivable à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est finie. Cette limite est notée $f'_g(x_0)$

- f est dérivable à droite en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est finie. Cette limite est notée $f'_d(x_0)$

- f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow$ f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exercice 5.2 résolu

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x^2 + x - 2|$$

Etudier la dérivabilité de g en -2 et interpréter graphiquement le résultat.

Résolution

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x^2 + x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert x^2 + x - 2\rvert$		$x^2 + x - 2$	0	$-x^2 - x + 2$	0	$x^2 + x - 2$	

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{g(x)-g(-2)}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{x^2+x-2}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} (x-1) = -3$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{g(x)-g(-2)}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{-x^2-x+2}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{-(x-1)(x+2)}{(x+2)} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} -(x-1) = 3$$

$g'_g(-2) = -3$ *et* $g'_d(-2) = 3$ *g n'est pas dérivable en -2 car* $g'_g(-2) \neq g'_d(-2)$

(Cg) (la courbe représentative de g) admet une demi tangente à gauche en -2 d'équation y = - 3x - 6 et une demi tangente à droite en -2 d'équation y = 3x + 6.

3) Tangente verticale
Propriété

f est une fonction définie sur un intervalle K contenant x_0.

Lorsque la limite à droite ou la limite à gauche de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est infinie, la représentation graphique de f admet une tangente verticale au point $M_0(x_0 ; f(x_0))$.

Exercice 5.3 résolu

On donne la fonction g sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x-2}$.
Etudier la dérivabilité de g en 2 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Résolution

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{(x-2)}{(x-2)\sqrt{x-2}} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$$

La fonction g n'est pas dérivable en 2 et (Cg) une demi tangente verticale à droite au point d'abscisse 2.

3) FONCTIONS DERIVEES

a) Dérivées successives

Définition

f est une fonction dérivable sur un intervalle K.

- Sa dérivée f' est aussi appelée dérivée première de f et notée f(1) ou $\frac{df}{dx}$
- Si f' est dérivable sur K, sa dérivée est appelée dérivée seconde de f et notée f'' ou f(2) ou $\frac{d^2f}{dx^2}$
- Par itération, la dérivée n^e de f est la dérivée de la dérivée $(n-1)^e$ de f.

Exercice 5.4 résolu

Soit le polynôme f définie par $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 1$.
Déterminons les deux premières dérivées de f.

Solution

Il s'agit éventuellement de déterminer f' et f''.

f étant un polynôme, donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 15x^2 + 8x - 7$.

f' étant également un polynôme, on a : pour tout x de $\mathbb{R}$, $f''(x) = (f')'(x) = 30x + 8$.

Exercice 5.5

Déterminer les dérivées successives d'ordre 1, 2 et 3 de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = \cos x$ et $g(x) = \frac{x}{x+2}$

b) Dérivée d'une fonction composée

Définition

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur f(K), alors la fonction gof est dérivable sur K et pour tout x de K, $(gof)'(x) = f'(x)\times g'of(x)$

Exercice 5.6 résolu

$$f :]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{\cos x}$$

On admet que f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, déterminer $f'(x)$.

Résolution

Considérons $f(x) = goh(x)$ *avec* $g(x) = \sqrt{x}$ *et* $h(x) = \cos x$

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[, f'(x) = (goh)'(x) = h'(x) \times g'(h(x))$

D'où : $f'(x) = -\sin x \times \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

Conséquences

Si u est une fonction dérivable sur K et $n \in \mathbb{N}$, alors les fonctions sinu, cosu et u^n sont dérivables sur K et on a :

$(\sin u)' = u'\cos u$

$(\cos u)' = -u'\sin u$

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$

Si de plus u est strictement positive sur K, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur K et on a :

$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exercice 5.7 Résolu

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I

Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de f sur I.

1. $f(x) = \sin(x^2 + 2)$ $\quad I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = (-3x^2 - 4x + 2)^4$ $\quad I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ $\quad I =]0 ; \frac{\pi}{2}[$

Résolution

1. $f(x) = \sin(x^2 + 2)$ *(formule utilisée: (sinu)'= u'cosu)*

$f'(x) = 2x\cos(x^2 + 2)$

2. $f(x) = (-3x^2 - 4x + 2)^4$ *(formule utilisée:* $(u^n)' = nu'u^{n-1}$*)*

$f'(x) = 4(-6x - 4)(-3x^2 - 4x + 2)^3$

3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ *(formule utilisée :* $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$*)*

$f'(x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}$

c) Tableau récapitulatif de dérivées
Dérivée de fonctions élémentaires

Fonction f	Dérivée f' de f	f est dérivable sur l'intervalle
$x \mapsto c$ [$c \in \mathbb{R}$]	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^r$ [$r \in \mathbb{Q}^*$]	$x \mapsto rx^{r-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$

$x \mapsto \frac{1}{x^r}$ [$r \in \mathbb{Q}^*$]	$x \mapsto \frac{-r}{x^{r+1}}$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[$, [$k \in \mathbb{Z}$]

Dérivées et opérations

Fonctions	Dérivée sur K	Conditions
$f + g$	$f' + g'$	$a \in \mathbb{R}$
af	af'	
fg	$f'g + fg'$	
$\frac{1}{g}$	$-\frac{g}{g^2}$	$g(x) \neq 0$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$	$g(x) \neq 0$
gof	$f' \times g' of$	
f^r	$rf'f^{r-1}$	$r \in \mathbb{Q}^*$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$f(x) > 0$
$\cos f$	$-f'\sin f$	
$\sin f$	$f'\cos f$	

d) Nombre dérivé d'une bijection réciproque en un point
Propriété

Soit f une bijection et f^{1} sa réciproque telle que f(x) = y. Si f est dérivable au point x et que f'(x) $\neq 0$ alors f^{1} est dérivable au point α et $(f^{1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Point méthode

Soit f^{1} la réciproque d'une bijection f
Pour éventuellement calculer le nombre dérivé de f^{1} au point α, on peut procéder comme suit :

- On résout l'équation $f(x) = \alpha$ pour en déterminer l'unique solution β.
- Si $f'(\beta) \neq 0$, alors f^{1} est dérivable en α et $(f^{1})'(\alpha) = \frac{1}{f'(\beta)}$.

Exercice 5.8 résolu

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = x^3 + 1$.
1. Montrer que f est bijective.
2. f^{1} est la bijection réciproque de f
   a) Démontrer que f^{1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{1})'(2)$.
   b) f^{1} est-elle dérivable en 1 ? Justifier votre réponse.

Résolution

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2.a) $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 2$
$\Leftrightarrow x^3 = 1$
$\Leftrightarrow x = 1$

$f'(1) = 3 \neq 0$ *donc* f^{-1} *est dérivable en 2 et* $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}$

2.b) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$

$f'(0) = 0$ *donc* f^{-1} *n'est pas dérivable en 0.*

II / PRIMITIVES

1) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle K.
On appelle primitive de f sur K, toute fonction F dérivable sur K telle que : $\forall x \in K, F'(x) = f(x)$

Exercice 5.14

Soit f et F dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par respectivement :
$f(x) = 2x + \cos x$ et $F(x) = x^2 + \sin x + 2$. Prouver que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Solution

On a : pour tout x de $\mathbb{R}$, $F'(x) = 2x + \cos x = f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) Propriétés

1. Si f est une fonction continue sur un intervalle K, alors f admet une primitive sur K.
2. Si F est une primitive de f sur K, alors pour tout réel c, F + c est une primitive de f sur K
3. x_0 et y_0 sont des nombres réels. Si f admet des primitives sur K, il existe une unique primitive G de f sur K vérifiant $G(x_0) = y_0$.

Exercice 5.15

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :
$f(x) = 2x + \cos x$. Déterminer sur la primitive F de f qui prend la valeur 2 en 0.

Solution

Les primitives sur $\mathbb{R}$ de f sont de la forme : $F(x) = x^2 + \sin x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.
On a : $F(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$
Donc la primitive recherchée est la fonction de f est définie par $F(x) = x^2 + \sin x + 2$.

3) Primitives de fonctions élémentaires

Fonction f	Primitives de f	Sur l'intervalle
$x \mapsto a \quad [a \in \mathbb{R}]$	$x \mapsto ax + c \quad [c \in \mathbb{R}]$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \quad [n \in \mathbb{N}]$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad [c \in \mathbb{R}]$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} \quad [n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}]$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c \quad [c \in \mathbb{R}]$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c \quad [c \in \mathbb{R}]$	$]0 ; +\infty[$
$x \mapsto x^r \quad [r \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\}]$	$x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \quad [c \in \mathbb{R}]$	$[0 ; +\infty[$ si $r \geq 0$ $]0 ; +\infty[$ si $r < 0$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c \quad [c \in \mathbb{R}]$	$\mathbb{R}$
Fonction f	Primitives de f	Sur l'intervalle
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c \quad [c \in \mathbb{R}]$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + c \quad [c \in \mathbb{R}]$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $[k \in \mathbb{Z}]$

4) Formules des primitives

Fonction f	Une primitive de f	Commentaire
$u'u^n$ $[n \in \mathbb{N}]$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	Sur un intervalle I où u est dérivable
$\frac{u'}{u^r}$ $[r \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}]$	$\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$	Sur un intervalle I où u est dérivable et ne s'annule pas
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Sur tout intervalle I où u est dérivable et strictement positive
$u'u^r$ $[r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}]$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	Sur un intervalle I où u est dérivable et positive (strictement positive si $r < 0$)
u'sinu	-cosu	Sur un intervalle I où u est dérivable
u'cosu	sinu	Sur un intervalle I où u est dérivable

Exercice 5.16 résolu

Dans chacun des cas suivants, F et f sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Démontrer que F est une primitive sur l'intervalle K de f.

1. $F(x) = -x^7 + 3x^5 - 6x - 20$ $\quad K = \mathbb{R}$

   $f(x) = -7x^6 + 15x^4 - 6$

2. $F(x) = \frac{-2}{\sqrt{\sin x}} - 2010$ $\quad K =]0 ; \pi[$

   $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}$

3. $F(x) = x^2\sin x + \cos x$ $\quad K = \mathbb{R}$

   $f(x) = (2x-1)\sin x + x^2\cos x$

Résolution

1. $F'(x) = -7x^6 + 15x^4 - 6 = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
On peut procéder de la même manière pour les autres cas.

Exercice 5.17 résolu

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur l'intervalle K de la fonction f.

1. $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 5$ $\qquad K = \mathbb{R}$

2. $f(x) = \cos x - \sin x$ $\qquad K = \mathbb{R}$

3. $f(x) = 3(2x - 4)^{14}$ $\qquad K = \mathbb{R}$

4. $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{2x-3}}$ $\qquad K =]\dfrac{3}{2};+\infty[$

5. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos^5 x}}$ $\qquad K =]0;\dfrac{\pi}{2}[$

6. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x^4}$ $\qquad K = \mathbb{R}_+^*$

7. $f(x) = \sin 2x$ $\qquad K = \mathbb{R}$

8. $f(x) = -\sin x$ $\qquad K = \mathbb{R}$

Résolution

1. Les primitives de $x \mapsto x^r$ *sont de la forme* $x \mapsto \dfrac{1}{r+1}x^{r+1} + c$ $(c \in \mathbb{R})$.

$F(x) = -\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3 + 5x + c \qquad (c \in \mathbb{R})$

2. $F(x) = -\sin x - \cos x + c$

3. Selon l'expression de f, la formule sollicitée est $u'u^r$ *qui a pour primitive* $\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$ $(r \neq -1)$

avec $u(x) = 2x - 4.$

$f(x) = 3(2x - 4)^{14} = \dfrac{3}{2}[2(2x - 4)^{14}]$

$F(x) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{(2x-4)^{15}}{15} + c = \dfrac{1}{10}(2x - 4)^{15} + c$

4. Selon l'expression de f, la formule sollicitée est $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ *qui a pour primitive* $2\sqrt{u}$

avec $u(x) = 2x - 3.$

$f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{2x-3}} = \dfrac{-1}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{2x-3}}$

$F(x) = \dfrac{-1}{2} \times 2\sqrt{2x-3} + c = -\sqrt{2x-3} + c$

5. Selon l'expression de f, la formule sollicitée est $\frac{u'}{u^r}$ *qui a pour primitive* $\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$ $(r \neq 1)$

avec $u(x) = \cos x$.

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^5 x}} = \frac{\sin x}{\cos^{\frac{5}{2}} x} = -\frac{-\sin x}{\cos^{\frac{5}{2}} x}$$

$$F(x) = -\frac{-1}{\frac{3}{2}\cos^{\frac{3}{2}} x} + c = \frac{2}{3} \times \frac{1}{\cos^{\frac{3}{2}} x} + c$$

$$6.\ f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x^4} = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x^3} + \frac{1}{2x^4}$$

$$F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{4x^2} - \frac{1}{6x^3} + c$$

7. Selon l'expression de f, la formule sollicitée est $u'\sin u$ *qui a pour primitive* $-\cos u$ *avec* $u(x) = 2x$.

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

Exercice 5.18 résolu

Déterminer sur K, la primitive F de la fonction f prenant la valeur y_0 en x_0.

$f(x) = x^2 + 3x - 1$ $\quad x_0 = 0$ et $y_0 = 2$ $\quad K = \mathbb{R}$.

Résolution

Les primitives de f sont de la forme : $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - x + c$ *avec* $c \in \mathbb{R}$.

$F(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$.

Donc la primitive recherchée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - x + 2$

EXERCICES

Exercice 5.19

Dans chacun des cas suivants, prouver que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

1. $f(x) = \tan^2 x$; $F(x) = \tan x - x$; $I =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$
2. $f(x) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}$; $F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$; $I =]0 ; +\infty[$

Exercice 5.20

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué :

1. $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 3$; $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3}$; $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{-1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 1$; $I =]0 ; +\infty[$
4. $f(x) = \sqrt{x-1}$; $I = [1 ; +\infty[$
5. $f(x) = (2x + 1)(x^2 + x - 2)^3$; $I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$; $I =]1 ; +\infty[$
7. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{(x^2 - x + 3)^2}$; $I = \mathbb{R}$
8. $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$; $I = \mathbb{R}$
9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}(3 + \dfrac{4}{x})^4$; $I =]0 ; +\infty[$.

Exercice 5.21

Soit la fonction rationnelle f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{1-x^5}{1-x}$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f de deux façons différentes.
2. En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = \frac{1 - 5x^4 + 4x^5}{(1-x)^2}$$

Exercice 5.22

Déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I vérifiant la condition indiquée :

1. $f : x \mapsto 4x^2 - 3x + 2$; $I = \mathbb{R}$ et $F(-1) = 0$
2. $f : x \mapsto 3x + 1 + \dfrac{1}{x^2}$; $I =]-\infty ; 0[$ et $F(-2) = 1$.

Exercice 5.23

Soit la fonction rationnelle f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$ par : $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}$

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour x distinct de -2 et de 2. on ait :

$$f(x) = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x+2)^2}$$

2. En déduire une primitive de f sur]-2 ; 2[.

Exercice 5.23

On considère les fonctions f, g et h dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies par $f(x) = 3x^3 - 4 - \dfrac{3x}{(1 + 2x^2)^3}$;

$h(x) = \dfrac{3x}{(1+2x^2)^3}$ et $g(x) = \dfrac{3(1-10x^2)}{(1+2x^2)^4}$.

Déterminer sur $\mathbb{R}$ une primitive H de h. En déduire sur $\mathbb{R}$ une primitive F de f.
Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = g(x)$. En déduire sur $\mathbb{R}$ la primitive G de g qui prend la valeur 0 en 1.

Exercice 5.23

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I =]-2 ; + ∞[.

a) Déterminer les nombres réels a et b tels que $f(x) = f(x) = a + \dfrac{b}{(x+2)^2}$

b) Déterminer la primitive de f sur l'intervalle I qui prend la valeur 3 en 1.

Exercice

1. Déterminer une primitive sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

2. On considère le fonction g définie sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ par $g(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

   Montrer que & $x \in$, $g'(x) = \dfrac{3}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}$.

3. En déduire une primitive sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos^4 x}$.

Exercice

f est une fonction et F une primitive de f sur K.
la fonction $x \mapsto F(2x)$ est-elle une primitive de la fonction $x \mapsto f(x)$.

GENERALITE SUR LES ETUDES DE FONCTIONS

1. Parité d'une fonction

Définition :

f est une fonction d'ensemble de définition Df
f est paire si et seulement si $x \in Df$, $-x \in Df$ et $f(-x) = f(x)$.
f est impaire si et seulement si $x \in Df$, $-x \in Df$ et $f(-x) = -f(x)$.

Exercice d'application :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{-3}{x^2+1}$ $\qquad$ $x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2-1}$

Etudier la parité de f et de g.

Résolution :

Parité de f

On a $Df = \mathbb{R} \Rightarrow x \in Df$, $-x \in Df$ *et* $f(-x) = \dfrac{-3}{(-x)^2+1} = \dfrac{-3}{x^2+1} = f(x)$. *Donc f est paire.*

Parité de g

On a $Dg = \mathbb{R}\backslash\{-1\ ;\ 1\} \Rightarrow x \in Df$, $-x \in Df$ *et* $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x^3}{x^2+1} = -f(x)$. *Donc f est impaire.*

Remarque

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). f est une fonction de représentation graphique (Cf)
Une fonction f est paire si et seulement si l'axe (OJ) est un axe de symétrie de (Cf).
Une fonction f est impaire si et seulement si l'origine O du repère est centre de symétrie de (Cf).

2. Éléments de symétrie d'une représentation graphique

a) Centre de symétrie

Propriété 1

f est une fonction et (Cf) sa représentation graphique dans un repère (O, I, J). A(a ; b) est centre de symétrie de (Cf) si et seulement si :
$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $(a - x) \in Df \Leftrightarrow (a + x) \in Df$ et $f(a - x) + f(a + x) = 2b$.

Propriété 2

f est une fonction et (Cf) sa représentation graphique dans un repère (O, I, J). A(a ; b) est centre de symétrie de (Cf) si et seulement si la fonction g définie par : $g(x) = f(x + a) - b$ est impaire.

Exercice d'application :

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J).
Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{5}{3} + \frac{31}{3(3x-2)}$$

On note (Cf) la courbe représentative de f.

Démontrer que le point $A(\frac{2}{3};\frac{5}{3})$ est centre de symétrie de (Cf).

Résolution :

• *En utilisant la propriété 1*

$Df =]-\infty ; \frac{2}{3} [\cup] \frac{2}{3} ;+\infty[$

Soit $x \in \mathbb{R}$; $\frac{2}{3} - x \in Df \Leftrightarrow \frac{2}{3} - x \neq \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \neq \frac{2}{3} + x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} + x \neq \frac{2}{3}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{2}{3} - x \in Df \Leftrightarrow \frac{2}{3} + x \in Df$

Soit $x \in \mathbb{R}$, *tel que* $\frac{2}{3} - x \in Df$

$f(\frac{2}{3} - x) = \frac{5}{3} - \frac{31}{9x}$ *et* $f(\frac{2}{3} + x) = \frac{5}{3} + \frac{31}{9x}$

$$f(\frac{2}{3} - x) + f(\frac{2}{3} + x) = \frac{10}{3}$$

D'où le point $A(\frac{2}{3};\frac{5}{3})$ *est centre de symétrie à (Cf).*

• *En utilisant la propriété 2*

Soit la fonction g définie par $g(x) = f(x + \frac{2}{3}) - \frac{5}{3} = \frac{31}{3\left(3(x+\frac{2}{3})-2\right)} = \frac{31}{9x}$

On a $Dg = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \} \Rightarrow x \in Dg$, $-x \in Dg$ *et* $g(-x) = \frac{31}{9(-x)} = -\frac{31}{9(x)} = -g(x)$. *Donc g est impaire.*

D'où le point $A(\frac{2}{3};\frac{5}{3})$ *est centre de symétrie à (Cf).*

b) Axe de symétrie

Propriété 1

f est une fonction et (Cf) sa représentation graphique dans un repère (O, I, J). La droite (D) d'équation y = a est axe de symétrie de (Cf) si et seulement si :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(a - x) \in Df \Leftrightarrow (a + x) \in Df$ et $f(a - x) = f(a + x)$.

Propriété 2

f est une fonction et (Cf) sa représentation graphique dans un repère (O, I, J). La droite (D) d'équation y = a est axe de symétrie de (Cf) si et seulement si la fonction g définie par : $g(x) = f(x + a)$ est paire.

<u>Exercice d'application :</u>

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2}{x^2 - 2x}$$

On note (Cf) la courbe représentative de f.

Démontrer que la droite (D) d'équation x = 1 est un axe de symétrie à (Cf).

<u>Résolution :</u>

• *En utilisant la propriété 1*

Df = $\mathbb{R} \setminus \{0 ; 2\}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $1 - x \in Df \Leftrightarrow 1 - x \neq 0$ *et* $1 - x \neq 2$

$\Leftrightarrow x \neq 1$ *et* $1 \neq 2 + x$

$\Leftrightarrow x + 1 \neq 2$ *et* $0 \neq 1 + x$

$\Leftrightarrow 1 + x \in Df$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - x \in Df \Leftrightarrow 1 + x \in Df$

Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, *tel que* $1 - x \in Df$,

$$f(1 - x) = \frac{2}{(1-x)^2 - 2(1-x)} = \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$f(1 + x) = \frac{2}{(1+x)^2 - 2(1+x)} = \frac{2}{x^2 - 1}$$

$f(1 - x) = f(1 + x)$, *la droite (D) est donc un axe de symétrie à (Cf).*

• *En utilisant la propriété 2*

Soit la fonction g définie par $g(x) = f(x+1) = \dfrac{2}{(x+1)^2 - 2x} = \dfrac{2}{x^2+1}$

On a $Dg = \mathbb{R} \Rightarrow x \in Dg$, $-x \in Dg$ *et* $g(-x) = \dfrac{2}{(-x)^2+1} = \dfrac{2}{x^2+1} = g(x)$. *Donc g est paire.*

La droite (D) est donc un axe de symétrie à (Cf).

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

I/ DEFINITION-PROPRIETES.

1) Définition et notation.

On appelle fonction logarithme népérien, la primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction inverse qui prend la valeur 0 en 1. On la note : ln.
& $x > 0$, $\ln(x)$ sera souvent écrit $\ln x$.

2) Propriétés immédiates

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0 ; +\infty[$.
- la fonction ln est dérivable et $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- la fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
- $\ln 1 = 0$.
- $\forall x \in]0 ; 1[$, $\ln x < 0$ et $\forall x \in]1 ; +\infty[$, $\ln x > 0$. (Signe de la fonction ln)

3) Ensemble de définition de fonction composée avec ln.

a) Fonction lnou

$x \in D_{\ln \circ u} \Leftrightarrow x \in Du$ et $u(x) > 0$

b) Fonction lno|u|

$x \in D_{\ln \circ |u|} \Leftrightarrow x \in Du$ et $u(x) \neq 0$

Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

1. $f(x) = \ln(-2x + 3)$
2. $f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{2x+3}\right|$
3. $f(x) = \ln(2 - x) + \ln(x)$

Résolution

Méthode utilisée :

- $x \in D_{\ln \circ u} \Leftrightarrow x \in Du$ *et* $u(x) > 0$
- $x \in D_{\ln \circ |u|} \Leftrightarrow x \in Du$ *et* $u(x) \neq 0$

1. $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $-2x+3 > 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x < \frac{3}{2}$

$D_f =]-\infty ; \frac{3}{2}[$

2. $x \in D_f \Leftrightarrow 2x + 3 \neq 0$ et $\frac{x-1}{2x+3} \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -\frac{3}{2}$ et $x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -\frac{3}{2}$ et $x \neq 1$

$D_f = \mathbb{R} | \{-\frac{3}{2} ; 1\}$

3. $x \in D_f \Leftrightarrow 2 - x > 0$ et $x > 0$.

$\Leftrightarrow x < 2$ et $x > 0$.

$D_f =]0; 2[$

Exercice 7.2

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto \ln(x-2)$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto \ln(x-2) + \ln(9-2x)$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto \ln|x-2|$
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto \ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|$

4) Propriétés algébriques de ln

Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs et pour tout r élément de $\mathbb{Q}$

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
- $\ln(a^r) = r\ln a$
- $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

• $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

• $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ • $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

Exercice 7.3

.. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de ln3 et ln5 :

$\ln 15$; $\ln 45$; $\ln\frac{25}{3}$; $\ln 75\sqrt{5}$.

2. Démontrer que $\ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3}) = 0$.

3. Dans chacun des cas suivants, comparer sans utiliser la calculatrice les nombres x et y :

   a) $x = \ln 5$ et $y = \ln 2 + \ln 3$

   b) $x = 2\ln 3$ et $y = 3\ln 2$

4. Simplifier les écritures suivantes :

   $a = \ln 567 - \ln 72 - \ln\frac{7}{8} + \ln\frac{1}{27}$

   $b = \ln\sqrt{135} + \ln\sqrt{75} - \ln\sqrt{15} - \ln\sqrt{27}$

5) Le nombre réel e

La fonction ln étant une bijection de $]0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique nombre réel noté e tel que $\ln e = 1$. e est le nombre de Neper.

On a $e \approx 2,718$ et & $x \in \mathbb{R}$, $\ln e^x = x$.

6) Equations – Inéquations

a) Equations

Pour résoudre une équation (E) de type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$, on peut procéder comme suit :

- On détermine l'ensemble de validité E_v de (E)
  Sur E_v, (E) est équivalent à l'équation (E') : $u(x) = v(x)$.
- Les solutions de (E) sont donc les solutions de (E') sur E_v.

Exercice 7.4 résolu

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1. $\ln(4 - x) = \ln(x - 3)$
2. $\ln|2x + 1| = 0$
3. $\ln(x - 4) = 2$
4. $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln(5 + x)$
5. $\ln^2 x + \ln x - 6 = 0$

Résolution

1. Ensemble de validité

$E_v = \{x \in \mathbb{R} / 4 - x > 0 \text{ et } x - 3 > 0\},$
$= \{x \in \mathbb{R} / 4 > x \text{ et } x > 3\}$
$=]3 ; 4[.$

Pour tout x de E_v, $\ln(4 - x) = \ln(x - 3) \Leftrightarrow 4 - x = x - 3$
$\Leftrightarrow x = 7/2$

Comme $7/2 \in E_v$, alors $S_{\mathbb{R}} = \{7/2\}$.

2. Ensemble de validité

$E_v = \{x \in \mathbb{R} / 2x + 1 \neq 0\},$
$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1/2\},$
$= \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}.$

Pour tout x de E_v, $\ln|2x + 1| = 0 \Leftrightarrow \ln|2x + 1| = \ln 1$
$\Leftrightarrow |2x + 1| = 1$

$\Leftrightarrow 2x + 1 = -1 \text{ ou } 2x + 1 = 1$
$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 0$

Comme $-2 \in E_v$ et $0 \in E_v$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{-2 ; 0\}$.

3. Ensemble de validité

$E_v = \{x \in \mathbb{R} / x - 4 > 0\},$
$= \{x \in \mathbb{R} / x > 4\},$
$=]4 ; +\infty[.$

Pour tout x de E_v, $\ln(x - 4) = -2 \Leftrightarrow x - 4 = e^{-2}$
$\Leftrightarrow x = 4 + e^{-2}$

Comme $4 + e^{-2} \in E_v$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{4 + e^{-2}\}$.

4. Ensemble de validité

$E_v = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 > 0 \text{ et } x + 1 > 0 \text{ et } 5 + x > 0\},$
$= \{x \in \mathbb{R} / x > 1 \text{ et } x > -1 \text{ et } x > -5\},$
$=]1 ; +\infty[.$

Pour tout x de E_v, $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln(5 + x) \Leftrightarrow \ln[(x - 1)(x + 1)] = \ln(5 + x)^2$
$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 5 + x$
$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$
$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -2$

Comme $-2 \notin E_v$ et $3 \in E_v$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{3\}$.

5. Ensemble de validité

$E_v = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\},$
$=]0 ; +\infty[.$

Pour tout x de E_v, *en posant* $X = \ln x$, $\ln^2 x + \ln x - 6 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow X = -3 \text{ ou } X = 2$$
$$\Leftrightarrow \ln x = -3 \text{ ou } \ln x = 2$$
$$\Leftrightarrow x = e^{-3} \text{ ou } x = e^2.$$

Comme $e^2 \in E_v$ *et* $e^{-3} \in E_v$ *alors* $S_{\mathbb{R}} = \{e^2 ; e^{-3}\}$.

b) Systèmes d'équations

Exercice 7.5 résolu

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2\ln x - 2\ln y = -2 \\ 3\ln x + \ln y = 5 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + y = 7 \\ \ln x + \ln y = 12 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = 11 \\ \ln(xy) = 12 \end{cases}$

Résolution

1. Ensemble de validité

$Ev = \{(x ; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } y > 0\}$

$=]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$

Pour tout $(x ; y) \in]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$, *en posant* $X = \ln x$ *et* $Y = \ln y$, *alors*

$$\begin{cases} 2\ln x - 2\ln y = -2 \\ 3\ln x + \ln y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X - 2Y = -2 \\ 3X + Y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ Y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \\ \ln y = 2 \end{cases} \begin{cases} x = e \\ y = e^2 \end{cases}$$

$e \in]0 ; +\infty[$ *et* $e^2 \in]0 ; +\infty[$ *alors* $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(e ; e^2)\}$.

2. Ensemble de validité

$Ev = \{(x ; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } y > 0\}$

$=]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$

$$\forall (x ; y) \in]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[, \begin{cases} x + y = 7 \\ \ln x + \ln y = \ln 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ \ln xy = \ln 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

x et y sont les solutions de l'équation : $X^2 - 7X + 12 = 0$

$\Delta = 1 \Rightarrow X = 3$ *ou* $X = 4$ *(3 et 4 sont des éléments de* $]0 ; +\infty[$*)*

Les couples solutions sont $(4 ; 3)$ *et* $(3 ; 4)$

$S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(4 ; 3) ; (3 ; 4)\}$.

3. Ensemble de validité

$Ev = \{(x ; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } xy > 0\}$

$=]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$

$$\forall (x ; y) \in]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[, \begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -11 \\ \ln(xy) = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -11 \\ \ln x + \ln y = -12 \end{cases}$$

lnx et lny sont les solutions de l'équation : $X^2 + 12X - 11 = 0$

$\Delta = 100 \Rightarrow X = -1$ *ou* $X = -11$

Donc $\ln x = -1$ *et* $\ln y = -11$ *ou* $\ln x = -11$ *et* $\ln y = -1$.

D'où $x = e^{-1}$ *et* $y = e^{-11}$ *ou* $x = e^{-11}$ *et* $y = e^{-1}$

Les couples solutions sont $(e^{-1} ; e^{-11})$ *et* $(e^{-11} ; e^{-1})$

$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(e^{-1} ; e^{-11}) ; (e^{-11} ; e^{-1})\}$.

b) Inéquations

Pour résoudre une équation (I) de type $\ln(u(x)) \leq \ln(v(x))$, on peut procéder comme suit :

- On détermine l'ensemble de validité E_v de (I)
  Sur E_v, (I) est équivalent à l'équation (I') : $u(x) = v(x)$.
- Les solutions de (I) sont donc les solutions de (I') sur E_v.

Exercice 7.6 résolu

Résoudre dans IR chacune des inéquations suivantes :

1. $\ln(4 - x) \leq \ln(x - 3)$
2. $\ln|2x + 1| < 0$
3. $\ln^2 x + \ln x - 6 > 0$

Résolution

1. Ensemble de validité

$E_v = \{\in x\mathbb{R} / 4 - x > 0 \text{ et } x - 3 > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / 4 > x \text{ et } x > 3\}$

$=]3 ; 4[$

Pour tout x de E_v, $\ln(4 - x) \leq \ln(x - 3) \Leftrightarrow 4 - x \leq x - 3$

$\Leftrightarrow x \leq 7/2$

Alors $S_{\mathbb{R}} =]3 ; 7/2]$.

2. Ensemble de validité

$E_v = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 1 \neq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1/2\}$

$= \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$

Pour tout x de E_v, $\ln|2x + 1| < 0 \Leftrightarrow \ln|2x + 1| < \ln 1$

$\Leftrightarrow |2x + 1| < 1$

$\Leftrightarrow -1 < 2x + 1 < 1$

$\Leftrightarrow -2 < x < 0$

Alors $S_{\mathbb{R}} =]-2 ; -1/2[\cup]-1/2 ; 0[$

5. Ensemble de validité

$E_v = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

$=]0 ; +\infty[$.

Pour tout x de E_v, *en posant* $X = \ln x$, $\ln^2 x + \ln x - 6 > 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 6 > 0$

$\Leftrightarrow X < -3$ *ou* $X > 2$

$\Leftrightarrow \ln x < -3$ *ou* $\ln x > 2$

$\Leftrightarrow x < e^{-3}$ *ou* $x > e^2$.

Alors $S_{\mathbb{R}} =]0 ; e^{-3} [\cup] e^2 ; +\infty[$.

II/ DERIVEES – PRIMITIVES – LIMITES

1. Dérivées

Propriété

- Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle K, alors lnou est dérivable sur K et : (lnou)'= $\frac{u'}{u}$.
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, sur lequel elle ne s'annule pas, alors lno|u| est dérivable sur K et : (lno|u|)'= $\frac{u'}{u}$.

Exercice 7.7 résolu

Déterminer sur l'intervalle I, la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(3x^2 + 4x - 2)$; $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \ln|5x^2 + 2x - 3|$; $I =]-\infty ; -1[$
3. $f(x) = \ln\left(\frac{7-x}{3x+4}\right)$; $I =]-\frac{4}{3} ; 7[$
4. $f(x) = \ln\sqrt{2x^2 - 1}$; $I =]-\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty[$

Résolution

1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{(3x^2+4x-2)'}{3x^2+4x-2} = \frac{6x+4}{3x^2+4x-2}$

2. Pour tout x de $]-\infty ; -1[$, $f'(x) = \frac{(5x^2+2x-3)'}{5x^2+2x-3} = \frac{10x+2}{5x^2+2x-3}$

3. Pour tout x de $]-\frac{4}{3} ; 7[$, $f'(x) = \frac{\left(\frac{7-x}{3x+4}\right)'}{\left(\frac{7-x}{3x+4}\right)} = \frac{\frac{-25}{(3x+4)^2}}{\left(\frac{7-x}{3x+4}\right)} = \frac{-25}{(3x+4)^2} \times \frac{3x+4}{7-x} = \frac{-25}{(3x+4)(7-x)}$

4. Pour tout x de $]-\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{(\sqrt{2x^2-1})'}{\sqrt{2x^2-1}} = \frac{\frac{4x}{2\sqrt{2x^2-1}}}{\sqrt{2x^2-1}} = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2-1}} \times \frac{1}{\sqrt{2x^2-1}} = \frac{2x}{(2x^2-1)}$.

Exercice 7.8

Dans chacun des cas suivants on admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I ; Calculer la fonction dérivée f'de f.

1. $f(x) = \ln(1 + x^2)$; $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$; $I =]1 ; +\infty[$
3. $f(x) = \ln(x - 1) - \ln x$; $I =]1 ; +\infty[$
4. $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; $I =]0 ; +\infty[$
5. $f(x) = \ln(\ln x)$; $I =]e ; +\infty[$

...

2) Primitives

Propriété

On admet la propriété suivante :

u étant une fonction dérivable sur un intervalle K, sur lequel elle ne s'annule pas, $\frac{u'}{u}$ admet pour primitive lno|u|.

Exercice 7.9

Déterminer sur l'intervalle K, les primitives de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -\frac{1}{x}$ K =]-∞ ; 0[
2. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ K =]$\frac{\pi}{2}$; 0[
3. $f(x) = \frac{3}{4-x}$ K =]-∞ ; 4[

Résolution

1. $f(x) = -\frac{1}{x}$ *K =]-∞ ; 0[*

$f(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}$ *avec* $u(x) = x$.

D'où& $x < 0$, $F(x) = -ln|x| + c = -ln(-x) + c$, $c \in IR$.

2. $f(x) = \frac{cosx}{sinx}$ *K =]* $\frac{\pi}{2}$ *; 0[*

$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ *avec* $u(x) = sinx$.

D'où& $x \in]\frac{\pi}{2}\ ; 0[$, $F(x) = ln|sinx| = ln(sinx) + c$, $c \in IR$.

3. $f(x) = \frac{3}{4-x}$ *K =]- ∞ ; 4[*

$f(x) = \frac{-3\times(-1)}{4-x} = \frac{-3u(x)}{u(x)}$ *avec* $u(x) = 4 - x$.

D'où& $x < 4$, $F(x) = -3ln|4 - x| + c = -3ln(4 - x) + c$, $c \in IR$.

Exercice 7.10

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$; $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \tan x$; $I =]-\frac{\pi}{2}\ ; \frac{\pi}{2}[$

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$; $I = \mathbb{R}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$; $I =]1 ; +\infty [$

8) Limites

Limites de référence

Propriétés

On admet les propriétés suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

Remarques

- La fonction ln définie une bijection de $]0 ; +\infty [$ vers $\mathbb{R}$.

En effet, ln est dérivable et strictement croissante sur $]0 ; +\infty [$ et

$\ln(]0 ; +\infty [) =]\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \; ; \; \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \; [=]-\infty ; +\infty [= \mathbb{R}$.

- La courbe de la fonction ln admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Exercice 7.11

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de f à l'endroit indiqué :

1. $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x}$; en 0
2. $f(x) = -x + \ln x$; en $+\infty$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$; en 0
4. $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$; en 0
5. $f(x) = x + x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$; en $+\infty$
6. $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$; en $+\infty$

Résolution

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{\ln x - 1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{x}(\ln x - 1) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\ln x - 1) = -\infty \end{cases}$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (-x + \ln x) = \lim\limits_{x\to +\infty} -x(1 - \dfrac{\ln x}{x}) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\dfrac{1}{x} - \ln x) = +\infty$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{x+1}(x\ln x) = 0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0.$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (x + x\ln(1 + \dfrac{1}{x})) = \lim\limits_{x\to +\infty} x(1 + \ln(1 + \dfrac{1}{x})) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x(1 + \dfrac{1}{x}) = 0$.

6. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim\limits_{x\to +\infty} 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim\limits_{X\to +\infty} 4\left(\dfrac{\ln X}{X}\right)^2 = 0$ avec $X = \sqrt{x}$.

Exercice 7.12

Dans chacun des cas suivants calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle I

1. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$; $I =]1; +\infty[$
2. $f(x) = x(1 - \ln x)$; $I =]0; +\infty[$
3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)$; $I =]-\infty ; -1[$
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln x}$; $I =]1; +\infty[$
5. $f(x) = x + \ln(x + 1) - \ln x$; $I =]0; +\infty[$

Problème 7.13 résolu

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 4x^2 - \ln x + 1$.

1. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. a) Montrer que $\forall\ x \in]0 ; +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{8x^2 - 1}{x}$.

   b) Etudier le signe de $g'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.
3. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que $\forall\ x \in]0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + 4x - 2$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) unité graphique : 2 cm.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.
   b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. a) Montrer que la droite (D) d'équation y = 4x – 2 est une asymptote oblique à (C) en +∞.
   b) Etudier la position relative de (C) et de (D).
3. a) Vérifier que $\forall$ x ∈]0 ; +∞ [, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b) En déduire les variations de f, puis dresser son tableau de variation.
4. a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α telle que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.
   b) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
5. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) en son point d'abscisse 1.
6. a) Démontrer que f détermine une bijection de l'intervalle]0 ; +∞ [dans un intervalle K que l'on précisera.
   b) On désigne par f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') sa courbe représentative.
   Déterminer le sens de variation de f^{-1} puis établir son tableau de variation.
7. a) Déterminer une primitive F de f sur]0 ; +∞ [.
   b) Calculer F(e) – F(1).
8. Construire (C), (C'), et (D).

Résolution

Partie A

1. limites de g aux bornes de]0 ; +∞ [

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = +\infty \text{ car } \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (4x^2+1) = 1 \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (-\ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(4x - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} 4x = +\infty$$

2. a) $\forall x \in]0 \,;\, +\infty[,\ g'(x) = (4x^2 - \ln x + 1)' = 8x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{8x^2-1}{x}$.

b) $\forall x \in]0 \,;\, +\infty[,\ g'(x) = \dfrac{8x^2-1}{x} = \dfrac{(\sqrt{8}x+1)(\sqrt{8}x-1)}{x} = \dfrac{(\sqrt{8}x+1)}{x}(\sqrt{8}x-1)$.

$\forall x \in]0 \,;\, +\infty[,\ \dfrac{(\sqrt{8}x+1)}{x} > 0$, *donc g'(x) a le même signe que* $(\sqrt{8}x-1)$ *sur* $]0 \,;\, +\infty[$.

Ainsi :

- $\forall x \in]0 \,;\, \dfrac{1}{\sqrt{8}}[,\ g'(x) < 0$.
- $\forall x \in]\dfrac{1}{\sqrt{8}} \,;\, +\infty[,\ g'(x) > 0$.
- $g'(\dfrac{1}{\sqrt{8}}) = 0$.

3. Sens de variation de g

- $\forall x \in]0 ; \frac{1}{\sqrt{8}} [$, $g'(x) < 0$; g est strictement décroissante sur $]0 ; \frac{1}{\sqrt{8}} [$.

- $\forall x \in]\frac{1}{\sqrt{8}} ; +\infty [$, $g'(x) > 0$; g est strictement croissante sur $]\frac{1}{\sqrt{8}} ; +\infty [$.

Tableau de variation de g

x	0		$\frac{1}{\sqrt{8}}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(\frac{1}{\sqrt{8}})$	↗	$+\infty$

4. $\forall x \in]0 ; +\infty [$, $g(x) \geq g(\frac{1}{\sqrt{8}}) = 4\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 - ln\frac{1}{\sqrt{8}} + 1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}ln8 > 0.$

Donc $\forall x \in]0 ; +\infty [$, $g(x) > 0$.

Partie B

1. a) Ensemble de définition de f

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in Df \Leftrightarrow x > 0$. Donc $Df =]0 ; +\infty [$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(\frac{1}{x} \times ln\, x + 4x - 2) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} ln\, x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(4x-2) = -2$

Interprétation graphique :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ la droite (OI) est une asymptote verticale à (C).

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{ln\, x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}(4x-2) = +\infty$

2. a)

$\forall x \in]0 ; +\infty [$, $f(x) - y = \frac{ln\, x}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{ln\, x}{x} = 0$

Donc la droite (D) est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b) Position relative de (C) et de (D).

on a que : $\forall x \in]0 ; +\infty [$, $f(x) - y = \frac{ln\, x}{x}$

et comme $x > 0$, alors $[f(x) - y]$ a le même signe que $\ln x$. Ainsi :
$\forall x \in]0\,;\,1[$, $[f(x) - y] < 0$ *donc (C) est au-dessous de (D) sur* $]0\,;\,1[$.
$\forall x \in]1\,;\,+\infty[$, $[f(x) - y] > 0$ *donc (C) est au-dessus de (D) sur* $]1\,;\,+\infty[$.
$x = 1$, $f(x) = y$ *donc (C) coupe (D) au point A(1 ; 2).*

3. a) $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x} + 4x - 2\right)' = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} + 4 = \dfrac{1 - \ln x + 4x^2}{x^2} = \dfrac{4x^2 - \ln x + 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b) *d'après la partie A,* $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$ *et comme* $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ *alors*
$\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$. *Donc f est strictement croissante sur* $]0\,;\,+\infty[$.

Tableau de variation de f.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4. a) *on a :*
- *f est dérivable et strictement croissante sur* $]0\,;\,+\infty[$
- $f(]0\,;\,+\infty[) = \mathbb{R}$
- $0 \in \mathbb{R}$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
$f(\frac{1}{2}) = -2\ln 2 < 0$ *et* $f(1) = 2 > 0$. *Donc on a :* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

b) *Utilisons la méthode de balayage*

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Signe de $f(x)$	-	-	+	+	+	+

On a alors : $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$

x	0,6	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69	0,7
Signe de $f(x)$	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+

En définitive, on a : $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$.

5. (T) : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.
Avec $f'(1) = 5$ *et* $f(1) = 2$, *on a :*
(T) : $y = 5(x - 1) + 2$
$= 5x - 3$.

6. a) on a :

• f est dérivable et strictement croissante sur

• $f(]0\,;+\infty[) = \mathbb{R}$

Donc f est une bijection de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$

b) f^{1} et f ont le même sens de variation. Donc f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

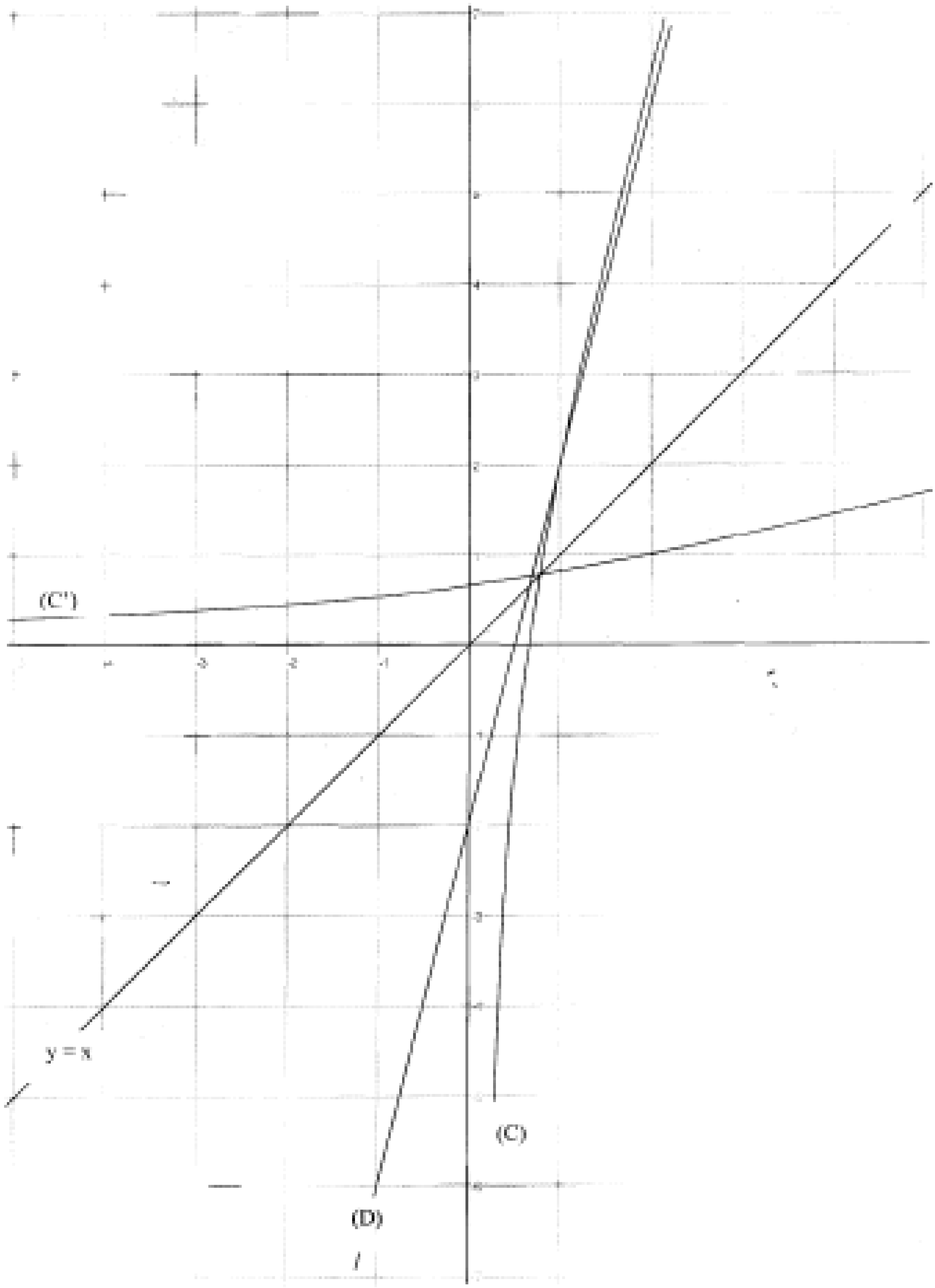
Tableau de variation de f^{-1}

x	$-\infty$	$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$	$+$	
$f^{-1}(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

7. a) $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ F(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2} + 2x^2 - 2x$

b) $F(e) - F(1) = \dfrac{1}{2} + 2e^2 - 2e$

8. Constructions (voir graphique)


(C')
y = x
(C)
(D)

FONCTION EXPONENTIELLLE

I/ DEFINITION - PROPRIETES ALGEBRIQUE.

1) Définition-notation

On appelle fonction exponentielle, l'application réciproque de la fonction logarithme népérien.
On la note exp.

2) Propriétés immédiates

- L'ensemble de définition de la fonction exp est $\mathbb{R}$.
- la fonction exp est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\exp(0) = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$. (Signe de la fonction exp)

3) Propriétés algébriques

Pour tous a et b éléments de $\mathbb{R}$,

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.

4) Equations – Inéquations

a) Equations

Exercice 8.1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1. $e^{2x-1} = 3$.
2. $e^{2x} + e^x - 6 = 0$.
3. $e^{3x+1} + \sqrt{e^{3x+1}} - 6 = 0$.

b) Systèmes d'équations

Exercice 8.2

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2e^x + e^y = 5 \\ e^x - 2e^y = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} e^x + e^y = 7 \\ e^{x+y} = 10 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 2 \\ e^x \times e^y = e^3 \end{cases}$

c) Inéquations

Exercice 8.3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{2x-1} < 8$.
2. $e^{2x} + e^{x} - 6 \geq 0$.
3. $e^{2x} - 4e^{x} + 3 > 0$.

II/ DERIVEE – PRIMITIVES – LIMITES.

1) Dérivée

Propriété

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle est égale à sa dérivée [$(e^{x})' = e^{x}$]
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors e^{u} est dérivable sur K et $(e^{u})' = u'e^{u}$

Exercice 8.4

Dans chacun des cas suivants, donner la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = e^{-4x+3}$
2. $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 2}{e^{x} + 1}$

2) Primitives

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors la fonction e^{u} est une primitive sur K de la fonction $u'e^{u}$.

Exercice 8.5

Déterminer sur K les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos x e^{\sin x}$; $K = \mathbb{R}$
2. $f(x) = e^{-3x+7}$; $K = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x} - 4}$; $K =]4 ; +\infty[$

3) Limites

Limites de référence

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ (4) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} - 1}{x} = 1$

4) Conséquences de la croissance comparée
Limites de référence
Pour tout réel α strictement positif, on a :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0$ (4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} x^\alpha \ln x = 0$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0$

Problème 8.13 résolu

On considère la fonction f de ℝ vers ℝ, définie par f(x) = $\dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

Partie A

1. a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.
   b) Montrer que la fonction g définie par g(x) = f(x) – 1 est impaire. En déduire un élément de symétrie pour la courbe (C).
2. a) Déterminer la limite de f en +∞ puis en -∞.
   b) Interpréter chacun des résultats obtenus.
3. a) Démontrer que : pour tout x de , f'(x) = $\dfrac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$.
   b) En déduire le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f.
4. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 0.
   b) On considère la fonction h définie par h(x) = f(x) – (x + 1). Démontrer que pour tout x de
   h'(x) = $-\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$. En déduire le sens de variation de h.
   c) Calculer h(0). Puis déterminer le signe de h.
   d) Déduire de ce qui précède, la position de (C) par rapport à (T).
5. Tracer la droite (T), la courbe (C) et ses asymptotes.

Partie B

1. Montrer que pour tout x de, f(x) = $\dfrac{4e^x}{e^x + 1} - 1$.
2. En déduire une primitive F de f sur ℝ.
3. Calculer F(1) – F(0)

Partie C

1. Montrer que f réalise une bijection de vers un intervalle J que l'on précisera.
2. f^{1} désigne la bijection réciproque de f.
   Déterminer le sens de variation de f. Puis dresser son tableau de variation.

3. a) Calculer f(ln3).

b) Justifier que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $f^{-1}(2)$.

4. (C') désigne la courbe de f^{-1} dans le repère (O, I, J). Construire (C').

Résolution

1. a) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0 \Rightarrow e^x + 1 > 1 > 0.$

Donc $Df = \mathbb{R}$

b) $g(x) = f(x) - 1 = \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1} - 1 = \dfrac{3e^x - 1 - e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{2e^x - 2}{e^x + 1} = 2\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}.$

On a $Dg = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$ *et* $g(-x) = 2\dfrac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = 2\dfrac{e^{-x}(1 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)} = 2\dfrac{(1 - e^x)}{(1 + e^x)} = -2\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = -g(x).$

g est donc impaire. Par conséquent la point A(0 ; 1) est un centre de symétrie de (C).

2. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1} = -1$ *car* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x(3 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3 - e^{-x})}{(1 + e^{-x})} = 3$ *car* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0.$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

3. a) dérivée de f

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \left(\frac{3e^x - 1}{e^x + 1}\right)'$$

$$= \left(\frac{3e^x - 1}{e^x + 1}\right)'$$

$$= \frac{(3e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x + 1)'(3e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{(3e^x)(e^x + 1) - (e^x)(3e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{3e^{2x} + 3e^x - 3e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

b) Sens de variation de f

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0 \Rightarrow 4e^x > 0$ *et* $(e^x + 1)^2 > 0.$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0.$

Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-1 \nearrow 3$

4. a) Equation de la tangente (T)
(T) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
Avec $f'(0) = 1$ et $f(0) = 1$ on a : (T) : $y = x + 1$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = f'(x) - 1$

$$= \frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2} - 1$$

$$= \frac{4e^x - \left(e^x+1\right)^2}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$= \frac{-(e^{2x} - 2e^x + 1)}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$= -\frac{\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$= -\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) \leq 0$ et $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. h est par conséquent strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
c) $h(0) = f(0) - 1$ or $f(0) = 1$ donc $h(0) = 0$.
Comme h est strictement croissante sur, on a :
$\forall x < 0$, alors $h(x) < h(0) = 0$
$\forall x > 0$, alors $h(x) > h(0) = 0$.
Donc $\forall x \in]-\infty ; 0[$, $h(x) < 0$ et $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $h(x) > 0$ et $h(0) = 0$.

d) $f(x) - y = h(x)$. Ainsi :
- $\forall x \in]-\infty ; 0[$, $h(x) < 0$, alors (C) est au dessous de (T) sur $]-\infty ; 0[$.
- $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $h(x) > 0$, alors (C) est au dessus de (T) sur $]0 ; +\infty[$.
- $h(0) = 0$, alors (C) et (T) se coupent au point $A(0 ; 1)$.

5. Construction (voir graphique)

Partie B

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{4e^x}{e^x+1} - 1 = \dfrac{4e^x - \left(e^x+1\right)}{e^x+1} = \dfrac{3e^x - 1}{e^x+1} = f(x)$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{4e^x}{e^x+1} - 1 = 4\dfrac{e^x}{e^x+1} - 1 = 4\dfrac{(e^x+1)'}{e^x+1} - 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 4ln(e^x+1) - x$

3. $F(1) - F(0) = [4ln(e+1) - 1] - 4ln2 = 4\,ln\left(\dfrac{e+1}{2}\right) - 1$

Partie C

1. *f est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) =]-1\,;\,3[$.*

2. *f et f^{1} ont le même sens de variation. Donc est strictement croissante sur $]-1\,;\,3[$.*
Tableau de variation de f^{1}.

x	-1		3
$(f^{1})'(x)$		$+$	
$f^{1}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

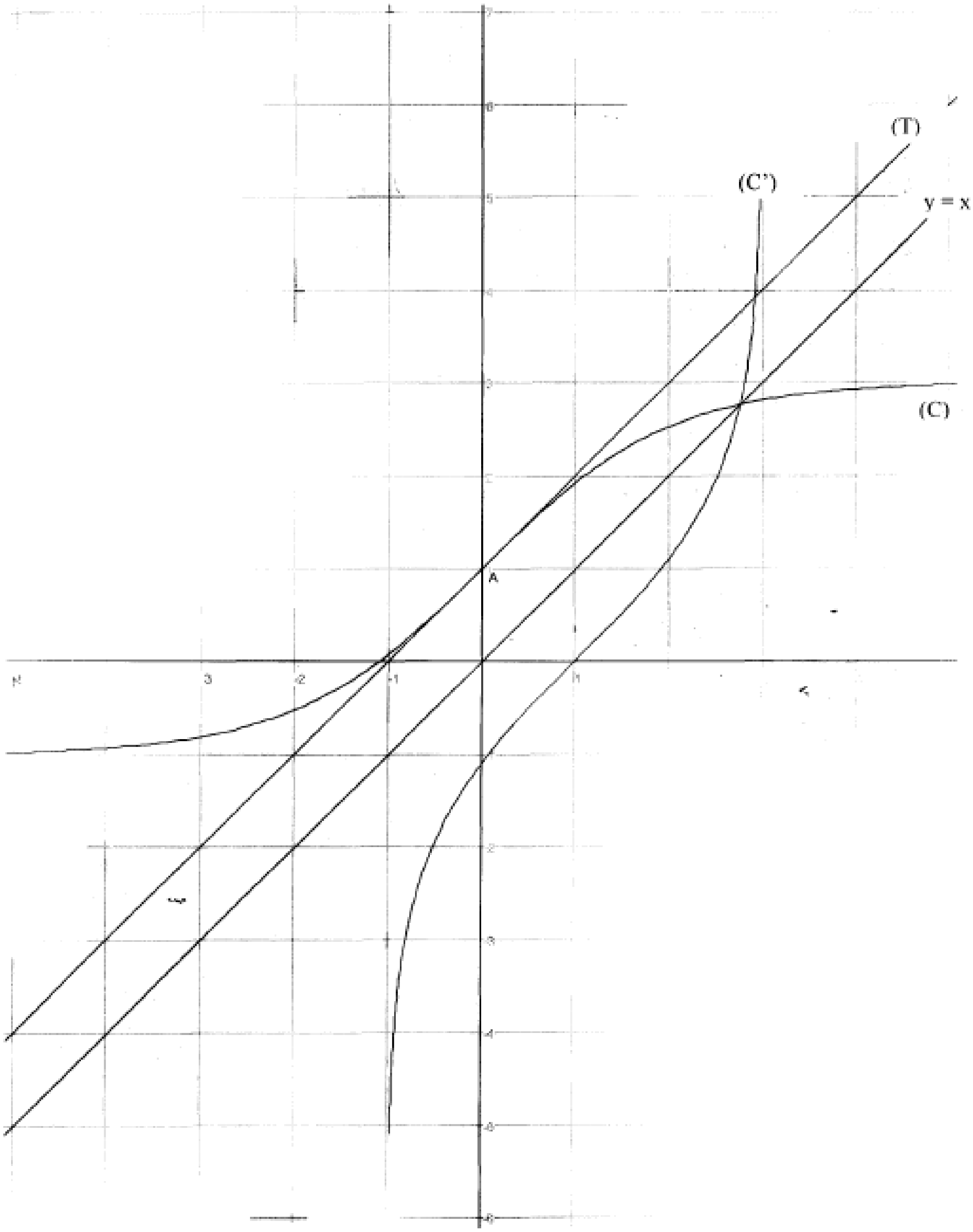
3. a) $f(ln3) = \dfrac{3e^{ln3} - 1}{e^{ln3}+1} = \dfrac{9-1}{3+1} = 2$

b) $f'(ln3) = \dfrac{4e^{ln3}}{(e^{ln3}+1)^2} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ est une bijection} \\ f'(ln3) \neq 0 \\ f(ln3) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}$ *est dérivable en 2*

et $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(ln3)} = \dfrac{4}{3}$

4. *Construction (voir graphique)*


(T)
(C')
y = x
(C)
A

INTEGRALE – CALCUL D'AIRES

I/ INTEGRAL D'UNE FONCTION CONTINUE

1) Définition – notation.

f est une fonction continue sur un intervalle K, F une primitive sur K de f, a et b des éléments de K.

Le nombre réel F(b) –F(a), est indépendant du choix de la primitive F ; il est appelé intégral de a à b de f.

On note : $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b f(x)dx$

Exercice 9.1

Calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)dx$.

2) Propriétés de l'intégrale

a) Egalité de Chasles

Propriété

f étant une fonction continue sur un intervalle K et a, b, c des éléments de K. On a :

$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Exercice 9.2

Calculer l'intégrale $J = \int_{-1}^{2} \left|x^2 + 2x - 3\right| dx$.

b) Linéarité

Propriété

f et g étant des fonctions continues sur un intervalle K, a et b des éléments de K, α un nombre réel quelconque,

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.

Exercice 9.3

1. Calculer les intégrales : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos x\, dx$ et $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{4}{x} dx$.
2. En déduire $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\cos x - \frac{4}{x}\right) dx$.

c) Inégalité et intégrale

Propriété

f et g étant des fonctions continues sur un intervalle [a ; b], Si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Si $f \geq g$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Exercice 9.4

1. Démontrer que l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^6}}$ est positive.

2. Démontrer que $\int_1^2 xe^x\,dx \geq \int_1^2 x^2e^x\,dx$.

3) Intégration par parties

Propriété

f et g étant deux fonctions dérivables sur un intervalle [a ; b].
Si les fonctions dérivées f ' et g' sont continues sur un intervalle [a ; b], alors :
$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)f(x)dx$.

Exercice 9.5

A l'aide d'une intégration par parties calculer chacune des intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 \ln x\,dx$ 2. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x\,dx$ 4. $\int_{-1}^1 (1+x)e^x\,dx$

II/ CALCULS D'AIRES

1) Calcul d'une aire d'une partie du plan délimitée par l'axe des abscisses et une courbe.

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).
f étant une fonction continue sur un intervalle [a ; b], de représentation graphique (C).
Nous nous proposons de calculer l'aire de la partie Δ du plan limitée par (C), (OI), les droites d'équations x = a et x = b.

- Si $f \geq 0$ sur [a ; b], alors : Aire de $\Delta = \int_a^b f(x)dx \times$ ua
- Si $f \leq 0$ sur [a ; b], alors : Aire de $\Delta = -\int_a^b f(x)dx \times$ ua

NB : ua est l'unité aire et 1ua = (unité de OI × unité de OJ)

Exercice 9.6

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) avec OI = 2 cm et OJ = 3 cm.

Soit $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ on note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J).

Déterminer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (C), (OI), les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

2) Calcul d'une aire d'une partie du plan délimitée par deux courbes.

Le plan est muni du repère orthogonal (O;I ;J).

f et g étant des fonctions continues sur un intervalle [a ; b], de représentation graphique respectives (Cf) et (Cg). On suppose que $f \geq g$ sur [a ; b].

On veut calculer l'aire de la partie Δ du plan délimitée par les courbes (Cf), (Cg) et les droites d'équations x =a et x = b.

Aire de $\Delta = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx \times ua$ $\qquad$ 1ua = (unité de OI × unité de OJ)

Exercice 9.7

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) ; unité graphique : 2 cm.

Soit $f(x) = x + 3 - xe^x$ et $g(x) = x + 3$. On note (Cf) et (Cg) respectivement les courbes représentatives de f et g dans le repère (O, I, J).

Déterminer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (Cf), (Cg), et les droites d'équations x= 0 et x = e.

Exercice 9.8

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$A = \int_0^1 2t(t^2+1)dt$; $B = \int_1^2 \dfrac{(t+1)}{(t^2+2t)^2}dt$; $C = \int_1^{\frac{1}{2}} \sin\left(\pi x + \dfrac{\pi}{2}\right)dt$

$D = \int_0^1 e^{-3x+4}dx$; $I = \int_1^e \dfrac{\ln x}{x}dx$; $J = \int_1^{e^2} \dfrac{1}{x\ln x}dx$

$K = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}}dx$; $L = \int_0^1 \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$.

Exercice 9.11

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties, ou au besoin, deux intégrations par parties :

$E = \int_0^{-1} (1-t)e^t dt$; $F = \int_1^2 (t+3t^2)\ln t\,dt$

$G = \int_1^2 t\sqrt{(1+t)}\,dt$; $H = \int_1^2 (\sin t)e^t dt$.

SUITES NUMERIQUES

I- Rappels et compléments

1) Définition

On appelle suite numérique, toute fonction u de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

L'image $u(n)$ de n par la fonction u est notée u_n et est appelée terme général de la suite u.

Si l'ensemble de définition de u est E, alors la suite u est notée $(u_n)_{n\in E}$. S'il n'y a pas d'ambigüité, on la note simplement (u_n).

Soit a le plus entier pour lequel la suite u est définie, u_a est appelé le premier terme de la suite u.

2) Modes de définition d'une suite

a) Suite définie par une formule explicite

C'est une suite définie par la donnée explicite du terme général u_n en fonction de n.

Exemple

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto 5n-2 \qquad \text{ou simplement} \qquad u_n = 5n-2$$

Exercice 10.1

Déterminer les six premiers termes de la suite $u_n = 5n - 2$.

b) Suite définie par une formule de récurrence

C'est une suite définie par la donnée d'au moins un terme et d'une formule qui permet de calculer de proche en proche les autres termes de la suite en utilisant certains des termes précédents.

Exemple

Soit la suite v définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = -v_n + 4 \end{cases}$

Exercice 10.2

Déterminer les six premiers termes de la suite v précédemment définie.

4) Principe de démonstration par récurrence

Soit $E = \{n_0, n_0+1, \dots\}$ une partie infinie de et p_n une proposition qui dépend de l'entier naturel n ($n \in E$).

Pour démontrer que p_n est vraie pour tout $n \in E$, on procède comme suit :

- On vérifie que la proposition est vraie pour n_0 c'est-à-dire que p_{n_0} est vraie (initialisation)
- On suppose que p_k vraie l'entier $k \geq n_0$ et on démontre que p_{k+1} est vraie. (hérédité)
- On conclut que la proposition p_n est vraie pour tout entier n de E.

Exercice 10.4 résolu

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 3 - 2^n$.

Résolution

1. $u_1 = 2u_0 - 3 = 2\times2 - 3 = 1$

$u_2 = 2u_1 - 3 = 2\times1 - 3 = -1$

$u_3 = 2u_2 - 3 = 2\times(-1) - 3 = -5$

$u_4 = 2u_3 - 3 = 2\times(-5) - 3 = -13$

$u_5 = 2u_4 - 3 = 2\times(-13) - 3 = -16$

2.

Vérifions que la proposition est vrai pour $n = 0$:

$3 - 2^0 = 3 - 1 = 2 = u_0$

Donc la proposition est vrai pour $n = 0$.

Supposons que la proposition est vraie pour $n = k$ c'est-à-dire $u_k = 3 - 2^k$

Démontrons qu'elle est vraie pour $n = k + 1$.

$u_{k+1} = 2u_k - 3 = 2(3 - 2^k) - 3 = 6 - 2^{k+1} - 3 = 3 - 2^{k+1}$.

Donc la proposition est vraie pour $k+1$.

Ainsi pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 3 - 2^n$.

II. Sens de variation d'une suite

1) Définitions

Soit (u_n) une suite définie sur E.

(u_n) est croissante $\Leftrightarrow$ pour tout $n \in E$, $u_n \leq u_{n+1}$.

(u_n) est décroissante $\Leftrightarrow$ pour tout $n \in E$, $u_n \geq u_{n+1}$.

(u_n) est constante $\Leftrightarrow$ pour tout $n \in E$, $u_n = u_{n+1}$.

(u_n) est dite monotone lorsqu'elle soit croissante soit décroissante.

2) Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite.

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on peut :

- Etudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
- Si les termes un sont strictement positifs, comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1
- Etudier le sens de variation de la fonction f si $u_n = f(n)$.
- Procéder par récurrence en s'aidant du sens de variation de la fonction f si $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 10.5 résolu

Etudier le sens de variation de chacune des suites numériques suivantes :

1. $u_n = \frac{n^2+1}{n}$
2. $u_n = \frac{2^{2n}}{3^{n+2}}$
3. $u_n : \begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2u_n} \end{cases}$

Résolution

1. On remarquera que la suite est définie pour n ≥ 1.

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^2+1}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(n+1)^2+1}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} = \frac{n^2+n-1}{n(n+1)}$$

$\forall n \geq 1,\ \dfrac{n^2+n-1}{n(n+1)} > 0$. *Donc la suite est strictement croissante.*

Méthode 2 : Etude du sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x}$.

$\forall x > 1, f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{x+1}{x^2}(x-1)$.

$\forall x > 1, f'(x) > 0$. *Donc f est strictement croissante sur]0 ; +∞ [. La suite est aussi strictement croissante.*

2. On remarquera que cette suite est à termes strictement positifs

$$u_{n+1} = \frac{2^{2(n+1)}}{3^{(n+1)+2}} = \frac{2^2 \times 2^{2n}}{3^1 \times 3^{n+2}} = \frac{2^2}{3^1} \times \frac{2^{2n}}{3^{n+2}} = \frac{4}{3}u_n$$

donc pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{4}{3} > 1$.

La suite est par conséquent par strictement croissante.

3. Procédons par récurrence

On a $u_1 = \dfrac{1+u_0^2}{2u_0} = \dfrac{65}{16} = 4{,}0625 < u_0$

$u_1 < u_0$

supposons que $u_{k+1} < u_k$. *montrons que* $u_{k+2} < u_{k+1}$

en effet :

On remarquera que $\forall n,\ u_n > 0$. *(on le démontrera plus tard)*

Considérons la fonction f : . On a :

$f(u_k) = u_{k+1}$

$f(u_{k+1}) = u_{k+2}$

f est strictement croissante sur]0 ; +∞ [.

Donc $u_{k+1} < u_k \Rightarrow f(u_{k+1}) < f(u_k) \Rightarrow u_{k+2} < u_{k+1}$

Donc la suite est strictement décroissante.

VI- Suites majorées – Suites minorées – Suites bornées

1) Définitions

Soit (u_n) une suite définie sur E.

- (u_n) est dite majorée il existe un réel M tel que, pour tout n de E, $u_n \leq M$.
- (u_n) est dite minorée il existe un réel m tel que, pour tout n de E, $u_n \geq M$.
- (u_n) est dite bornée (u_n) est à la fois majorée et minorée.

Exercice 10.6 résolu

1. u_n : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} \end{cases}$

Montrer que pour tout n, $u_n > 0$.

2. u : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que la suite est minorée par $\dfrac{3}{2}$ et majorée par 2.

Résolution

1. $u_0 = 8 > 0$.

Supposons que $u_n > 0$

Alors, $2u_n > 0$ et $1 + u_n^2 > 0 \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{u_n} > 0$.

Donc pour tout n, $u_n > 0$.

2. $u_0 = 2$. On a donc $\dfrac{3}{2} \leq u_0 \leq 2$

Supposons que $\dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 2$

Alors : $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{2}{3}$

$$1 + \frac{1}{2} \leq 1 + \frac{1}{u_n} \leq 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \leq 2$$

$$\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{3} \leq 2$$

Donc la suite est majorée par 2 et minorée $\dfrac{2}{3}$.

Exercice 10.7

Etudier le sens de variation des suites suivantes :

1. $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{2n-1}{3n-2}$

2. $u_n = e^{1-2n}$

3. $u_n = \dfrac{1}{2^n}$

4. $u_n = \dfrac{3}{(-2)^n}$

5. u : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^3 - 2 \end{cases}$

V- Convergence d'une suite numérique

1) Définition

Une suite (u_n) est dite convergente si (u_n) admet une limite finie ℓ en $+\infty$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ.
On dit qu'une suite est divergente lorsqu'elle n'est pas convergente (dans ce cas la suite soit admet une limite infinie soit elle n'admet pas de limite)

NB : lorsqu'on parle de limite d'une suite, il s'agit exclusivement de la cette suite lorsque n tend vers $+\infty$.

2) Propriété

La limite dune suite lorsqu'elle existe, elle est unique.

3) Limite d'une suite définie par une formule explicite.

a) Propriété

f est une fonction de vers, (u_n) la suite définie par la formule explicite $u_n = f(n)$.
si f admet une limite en $+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

b) Conséquence

Si f admet une limite finie ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ, sinon la suite (u_n) diverge.

4) Convergence d'une suite monotone

Propriété :

- Toute suite croissante et majorée est convergente
- Toute suite décroissante et minorée est convergente
- Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Exercice 10.9

Soit la suite u définie par u_n : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} \end{cases}$

Etudier la convergence de la suite u.

V- Suites arithmétiques – Suites géométriques

1) Définitions

- Une suite (u_n) est dite arithmétique lorsqu'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier n, on ait : $u_{n+1} = u_n + r$. r est appelé la raison de la suite arithmétique (u_n)
- Une suite (v_n) est dite géométrique lorsqu'il existe un nombre réel q tel que pour tout entier n, on ait : $v_{n+1} = v_n . q$ est appelé la raison de la suite géométrique (v_n).

2) Tableau récapitulatif

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Premier terme	u_a	v_a
Raison	r	q
Formule explicite	$u_n = u_a + (n - a)r$	$v_n = v_a.q^{n-a}$
Formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$v_{n+1} = q.v_n$
Somme S_n de n termes consécutifs d'indices de i à j	$S_n = \frac{n}{2}(u_i + u_j)$	$S_n = \begin{cases} v_i.\frac{1-q^n}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n.v_i & \text{si } q = 1 \end{cases}$

3) Convergence de suites arithmétiques – suites géométriques

a) Convergence de suites arithmétiques

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_a

- Si $r = 0$, alors (u_n) converge vers u_a (car dans ce cas la suite est constante et vaut u_a)
- Si $r > 0$, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si $r < 0$, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

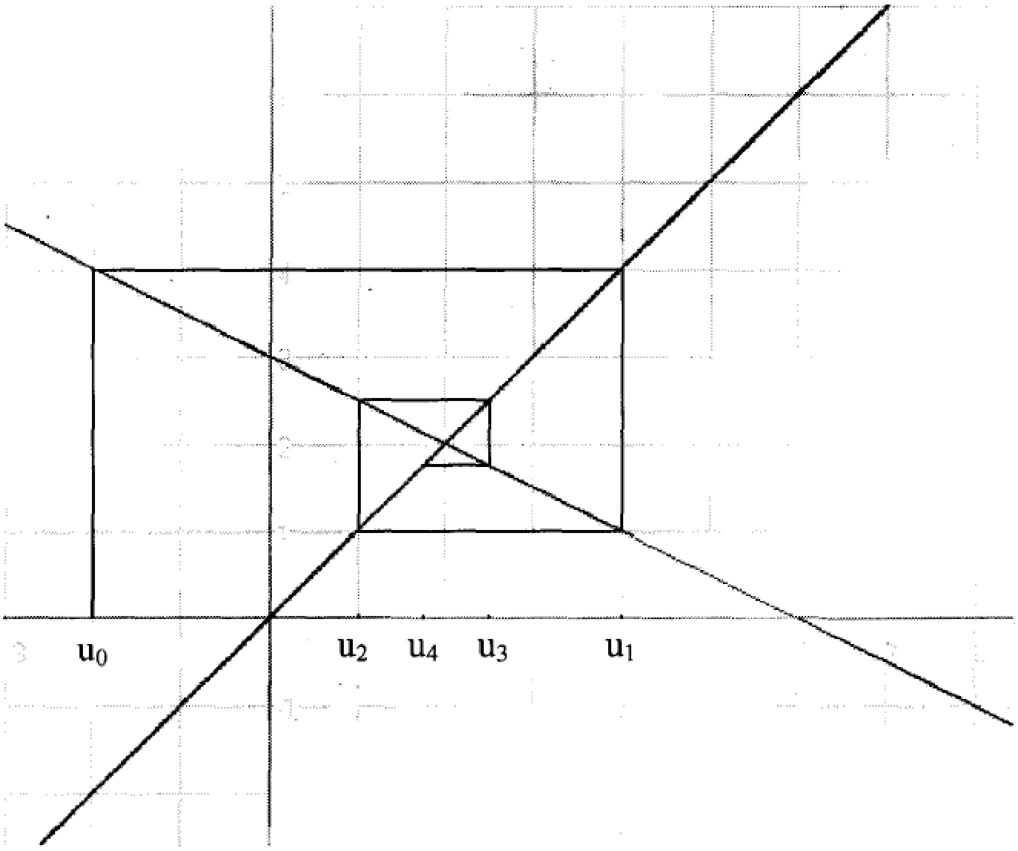
Exercice 10.12 résolu

Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = -2$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$.

1. a) Déterminer graphiquement les 5 premiers termes de (u_n).
   b) Conjecturer le sens variation et la limite de la suite (u_n).
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2$.
   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c) En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).
3. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
   a) Calculer S_1, S_2 et S_3.
   b) Démontrer que $S_n = -\frac{8}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] + 2n$
   c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Résolution

1.a)Représentation graphique de 5 premiers termes de la suite (un)



1. b)sens de varaition de la suite
la suite n'est ni croissante ni décroissante. Cependant elle semble converger vers 2.

2.a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -\frac{1}{2}u_n + 3 - 2 = -\frac{1}{2}u_n + 1 = -\frac{1}{2}(u_n - 2) = -\frac{1}{2}v_n$

donc la suite (v_n) *est une suite géométrique de raison* $-\frac{1}{2}$ *et de premier terme* $v_1 = u_1 - 2 = -4$.

b) $v_n = v_1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ *et* $u_n = v_n + 2 = v_1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2.$

Donc $v_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ *et* $u_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2.$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ *et donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2.$

3. a) on a : $u_1 = -2$; $u_2 = -\frac{1}{2}u_1 + 3 = 4$ *et* $u_3 = -\frac{1}{2}u_2 + 3 = 1$

$S_1 = u_1 = -2$
$S_2 = u_1 + u_2 = -2 + 4 = 2.$
$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = -2 + 4 + 1 = 3.$

b) S_n ***est la suite de n termes consécutifs :***

$$S_n = -4\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} + 2n = -4\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}} + 2n = -\frac{8}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] + 2n.$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{8}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = -\frac{8}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

$$\frac{Sn}{n} = -\frac{8}{3n}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] + 2.$$

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{8}{3n}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\times\lim_{n\to+\infty} -\frac{8}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n} = 2$.

b) Convergence suites géométriques

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme v_a

- Si $0 < |q| < 1$, alors (v_n) converge vers 0.
- Si q = 1, la suite converge vers v_a (car dans ce cas la suite est constante et vaut v_a)
- Si q > 1, alors (v_n) diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Si $q \leq -1$, alors (v_n) diverge (dans ce cas la suite n'admet pas de limite).

PROBABILITE

Partie 1 : RAPPELS DE DENOMBREMENT

1) Ensembles finis

Définition

A est un ensemble fini. Le nombre d'éléments que contient A est appelé cardinal de A. On le note cardA.

Propriété : soit A un ensemble fini, E et F deux sous ensembles de A. On a :

- $card(E \cup F) = card(E) + card(F) - card(E \cap F)$.
- Si $E \cap F = \emptyset$ alors $card(E \cup F) = card(E) + card(F)$.
- $\overline{E}$ désignant le complémentaire de E dans A, $card(\overline{E}) = card(A) - card(E)$.

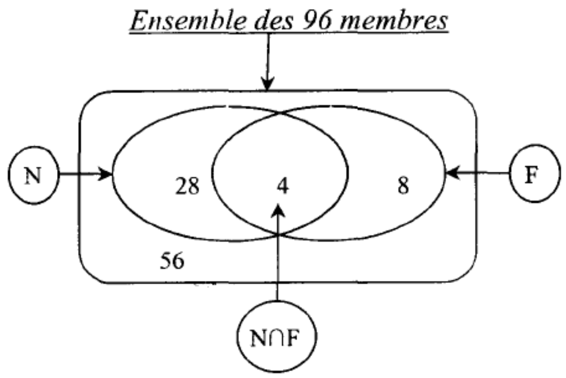
Exercice 1.1 résolu

Une association de 96 membres propose différentes activités sportives à ses membres dont la natation et le football. 12 membres s'inscrivent pour la natation et 32 pour le football dont 4 pour les deux.
On note N l'ensemble des membres inscrits pour la natation et F ceux inscrits pour le football.

1. Déterminer le nombre des adhérents inscrits pour la natation ou le football.
2. Déterminer le nombre des adhérents inscrits uniquement pour le football.
3. Déterminer le nombre des adhérents qui ne sont inscrits ni au football ni à la natation.

Résolution

Diagramme



1. L'ensemble des adhérents inscrits au football ou à la natation est $F \cup N$, et on a

$$card(F \cup N) = card(F) + card(N) - card(F \cap N).$$
$$= 32 + 12 - 4$$
$$= 30.$$

2. L'ensemble des adhérents inscrits uniquement au football est $F \setminus F \cap N$, et on a :

$$card(F \setminus F \cap N) = card(F) - card(F \cap N).$$
$$= 32 - 4$$
$$= 28.$$

3. Le nombre des adhérents qui ne sont inscrits au football ni en natation est :

$$96 - card(F \cup N) = 96 - 30$$
$$= 66$$

Exercice 1.2

une station radio émet la même publicité à 15 heures et 16 heures. A 15 heures, elle est écoutée par 10325 auditeurs et à 16 heures par 18633 auditeurs. Combien de personnes ont écouté cette publicité si :

a) ceux qui l'ont écouté à 15 heures ne l'ont plus écouté à 16 heures ?
b) 8479 personnes l'ont écouté à 15 heures puis à 16 heures ?

2) Produits cartésiens

Propriété : soit E et F deux ensembles finis. On a :

- $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$.
- $Card(E^n) = [Card(E)]^n$.

Exercice 1.3 résolu

La porte d'entrée d'un immeuble est commandée par un appareil à code.

1. Le code est composé de cinq chiffres.
   a) Combien y a-t-il de codes possibles ?
   b) Combien de codes commencent par le chiffre 0 ?
   c) Combien de codes sont multiples de le chiffre 5 ?
   d) Combien de codes contiennent exactement de deux fois le chiffre 4 ?
2. Le code est composé de trois chiffres suivis de deux lettres de l'alphabet français.
   a) Combien y a-t-il de codes possibles ?
   b) Combien de codes contiennent des lettres identiques ?
   c) Combien de codes se terminent par AB ?
   d) Combien y a-t-il de codes dont les lettres sont des voyelles ?

Résolution

Notons quelques exemples de codes : 02235 ; 25648 ; 33377.

1.a) Considérons l'ensemble E : {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}.

Un code de 5 chiffres est élément du produit cartésien $E\times E\times E\times E\times E = E^5$. *Il s'agit de d'une 5-liste d'éléments de E. Donc le nombre de codes possibles est* $card(E^5) = 10^5 = 100.000$

1.b) Exemples de codes commençant par 0 : 02235 ; 00110 ; 09840.

Soit A = {0}. Un code se terminant par 0 est un élément du produit cartésien $E\times E\times E\times E\times A = E^4\times A$

D'où que le nombre est $card(E^4\times A) = card(E^4)\times card(A) = 10^4\times 1 = 10.000$.

1.c) Un code multiple de 5 se termine par 0 ou par 5. Exemple : 02250 ; 54515.

Soit B = {0 ; 5}. Un tel code est un élément de $E\times E\times E\times E\times B = E^4\times B$

D'où que le nombre est $card(E^4\times B) = card(E^4)\times card(B) = 10^4\times 2 = 20.000$.

1.d) Exemple de codes contenant exactement 2 fois le chiffre 4 : 42534 ; 44295 ; 48140.

Un tel code est un élément de l'un des produits cartésiens suivants : $C\times C\times F\times F\times F$; $C\times F\times C\times F\times F$; $C\times F\times F\times C\times F$; $C\times F\times F\times F\times C$; $F\times C\times C\times F\times F$; $F\times C\times F\times C\times F$;$F\times C\times F\times F\times C$; $F\times F\times C\times C\times F$; $F\times F\times C\times F\times C$; $F\times F\times F\times C\times C$ *où C = {4} et F = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}.*

Pour chacun de ces produits cartésiens contient un nombre d'éléments égal à :
$card(E)^3\times card(C)^2 = 9^3\times 1^2 = 729$.

Comme il y a 10 produits cartésiens alors le nombre de code est $729\times 10 = 7.290$

Une autre manière de voir la question, est de considérer qu'un code est une suite de 5 caractères et chaque caractère étant un chiffre. Pour constituer un code comportant exactement 2 fois le chiffre 4, il faut choisir deux parmi les 5 caractères pour le chiffre 4 ($C_5^2 = 10$ *possibilités) puis chacun des trois autres caractères étant l'un des éléments de l'ensemble E (*$9^3 = 729$ *possibilités). Soit un total de* $729\times 10 = 7.290$ *codes.*

2. Notons quelques exemples de codes : 154LD ; 223AA ; 999BA ; 067UY.

2.a) Considérons l'ensemble G des 26 lettres de l'alphabet français.

Un code de 3 chiffres suivi de deux lettres est élément du produit cartésien $E\times E\times E\times G\times G = E^3\times G^2$. *Donc le nombre de codes possibles est* $card(E^3\times G^2) = card(E^3)\times card(G^2) = 10^3\times 26^2 = 676.000$

2.b) Remarquons qu'ici, il ya 26 couples constitués de lettres identiques : AA ; BB ; CC ; … ; ZZ.

En posant H = {AA ; BB ; … ; ZZ} alors un code se terminant par des lettres identiques est élément du produit cartésien $E\times E\times E\times H$. *D'où le nombre d'éléments est* $10^3\times 26 = 26.000$

2.c) Posons I = {AB}. Un code se terminant par AB est élément de $E\times E\times E\times I$. *Dons le nombre de codes est* $10^3\times 1 = 1.000$

2.d) Posons $J = \{A ; E ; I ; O ; U ; Y\}$. Un code qui se termine par deux voyelles est un élément du produit cartésien $E\times E\times E\times J\times J$. D'où le nombre de tels codes est $10^3\times 6^2 = 36.000$

3) Arrangements – Permutations

Propriété

E est un ensemble contenant n éléments.

Le nombre d'arrangements de p éléments de E choisis parmi n est :

$$A_n^p = \underbrace{n\times(n-1)\times...\times(n-p+1)}_{\text{p facteurs}} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Le nombre de permutations des n éléments de E est $n ! = n\times(n-1)\times \dots \times3\times2\times1$.

On a : $0 ! = 1$ et $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ avec $0 \leq p \leq n$.

Exercice 1.4 résolu

1. Chacune des huit lettres du prénom CAROLINE est inscrite sur un carton qui est placé dans une urne. On tire successivement et sans remise cinq cartons de l'urne pour former dans l'ordre du tirage un mot de cinq lettres ayant un sens ou non.
   a) Combien y a-t-il de mots possibles ?
   b) Combien de mots commencent par la lettre C ?
   c) Combien de mots commencent par la lettre C ou par la lettre L ?
   d) Combien de mots se terminent par une voyelle ?
   e) Combien y a-t-il de mots où les lettres C et E sont voisines dans cet ordre ?
   f) Combien y a-t-il de mots où les lettres C et E sont simplement voisines ?
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot CAROLINE ?
3. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot CLEMENTS ?

Résolution

1.a) Les 8 lettres du mot caroline sont deux à deux distinctes. Un tirage successif sans remise de 5 éléments parmi 8 est un arrangement de 5 parmi 8. Donc le nombre de tirages est :
$A_8^5 = 8\times7\times6\times5\times4 = 6.720$

1.b) Il s'agit de choisir pour première lettre du mot la lettre C, puis les quatre autres lettres sont un arrangement de 4 parmi les 7 autres {A, R, O, L, I, N, E}.
Le nombre de mots possible est : $A_1^1 \times A_7^4 = 1\times840 = 840$.

1.c) D'après 1.b), il y a $840\times2 = 1680$ mots commençant par la lettre C ou la lettre L.

1.d) Il s'agit de choisir une voyelle dans l'ensemble {A, O, I, E} pour la 5^e lettre du mot puis un arrangement de 4 parmi les 7 lettres qui resteront :
Le nombre de mots possible est : $A_4^1 \times A_7^4 = 4\times840 = 3.360$

1.e) Les lettres C et E sont voisines dans cet ordre signifie qu'on a l'une des configurations suivantes : CEXXX, XCEXX, XXCEX, XXXCE où XXX est un arrangement de 3 éléments de l'ensemble {A,, R, O, L, I, N}. Pour chacune de ces configurations on a : $A_1^1 \times A_1^1 \times A_6^3 = 1\times1\times120 = 120$ *mots.*
Et comme il y a quatre configurations, le nombre total de mots où les lettres C et E sont voisines dans cet ordre est : $4\times120 = 480$.

1.f) Les lettres C et E sont voisines soit dans l'ordre CE soit dans l'ordre EC. Dans l'ordre CE on a 480 mots possibles d'après 1.e). Dans un raisonnement analogue (en permutant les lettres C et E), on obtient que le nombre de mots dans l'ordre EC est 480. Soit un total 960 mots possibles si les lettres C et E sont simplement voisines.

2. Un anagramme du mot CAROLINE est une permutation des lettres de ce mot. Comme les lettres sont toutes distinctes alors le nombre de permutations est : $8\,! = 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 40.320$

3. Un anagramme du mot CLEMENTS est une permutation des lettres de ce mot. Ici la lettre E est itérée deux fois dans le mot. Donc le nombre de permutations distinctes est : $\frac{8\,!}{2\,!} = 20.160$

4) Combinaisons

Propriété :

E est un ensemble contenant n éléments.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E choisis parmi n est : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ avec $0 \le p \le n$.

Exercice 1.5 résolu

Le personnel d'une entreprise est composé de 12 hommes et 8 femmes. On désire former un comité de cinq personnes choisis parmi les membres de ce personnel.

1. Combien y a-t-il de comités possibles ?
2. Parmi ces comités, combien comprennent :
   a) Exactement trois hommes ?
   b) Aucun homme ?
   c) Au moins un homme ?
   d) Plus d'hommes que de femmes ?

Résolution

1. Un comité est une combinaison de 5 parmi 20. D'où le nombre de comités est : $C_{20}^5 = 15.504$

2.a) Il s'agit du choix de 3 hommes parmi 12 et de 2 femmes parmi 8. Le nombre de comités est alors :
$C_{12}^3\times C_8^2 = 220\times28 = 6.160$

2.b) Il s'agit du choix exclusif de 5 femmes parmi 8.
Le nombre de comités est alors : $C_8^5 = 56.$

2.c) On peut voir la question de deux manières :
Première manière :
Soit le comité comprend 1 homme exactement, le nombre de cas est : $C_{12}^1\times C_8^4 = 12\times70 = 840,$
Soit le comité comprend 2 hommes exactement, le nombre de cas est : $C_{12}^2\times C_8^3 = 66\times56 = 3.696,$
Soit le comité comprend 3 hommes exactement, le nombre de cas est : $C_{12}^3\times C_8^2 = 220\times28 = 6.160,$
Soit le comité comprend 4 hommes exactement, le nombre de cas est : $C_{12}^4\times C_8^1 = 495\times8 = 3.960,$
Soit le comité comprend 5 hommes exactement, le nombre de cas est : $C_{12}^5 = 792,$
Soit au total : $840 + 3.696 + 6.160 + 5.940 + 56 = 15.448.$

Deuxième manière :
Dans l'ensemble de tous les comités possibles, l'ensemble des comités contenant au moins un homme est le complémentaire de l'ensemble des comités ne contenant aucun homme.
D'où le nombre de comités contenant au moins un homme est : 15.504 – 56 = 15.448

2.d) Avoir plus d'hommes que de femmes, constitue l'un des cas suivants :
- 3 hommes et 2 femmes : nombre de cas = $C_{12}^{3} \times C_{8}^{2} = 220 \times 28 = 6.160$
- 4 hommes et 1 femme : nombre de cas = $C_{12}^{4} \times C_{8}^{1} = 495 \times 8 = 3.960$

- 5 hommes : nombre de cas = $C_{12}^{5} = 792$
Soit au total : 6.160 + 3.960 + 792 = 10.912

II / Probabilités

1. Probabilité d'un évènement

a) définition

$\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de Ω.
On appelle probabilité sur Ω, toute application p de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans [0 ; 1] vérifiant :

- $p(\emptyset) = 0$.
- $p(\Omega) = 1$.
- Pour tout évènement $A = \{a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n\}$ de Ω, on a $p(A) = p(a_1) + p(a_2) + \dots + p(a_n)$. On dit que la probabilité de A est égale à la somme des probabilités des évènements élémentaires qui constituent A.

b) Propriétés

Soient A et B deux évènements de l'univers Ω, On a :

- $0 \leq p(A) \leq 1$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

c) Equiprobabilité

Lors d'une expérience aléatoire, on dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisé.
Si A est un évènement de Ω, alors, en cas d'équiprobabilité on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

On dit aussi $p(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorable à A}}{\text{nombres de cas possibles}}$

Exercices d'applications

Exercice 1.6 résolu

Aminata dispose de deux dés A et B. les faces du dé A sont numérotées 3 ; 3 ; 3 ; 2 ; 2 ; 1 et celles du dé B, 3 ; 3 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1. On lance une fois chaque dé et on lit le chiffre inscrit sur la face supérieure. L'un des deux dés présente une situation d'équiprobabilité. Lequel ? Justifier votre réponse.

Résolution

Pour chaque dé, les évènements élémentaires sont : {3}, {2}, {1}.

Dans le cas du dé A :

$p(\{3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$p(\{2\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$p(\{1\}) = \frac{1}{6}$

Dans le cas du dé B :

$p(\{3\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$p(\{2\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$p(\{1\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

C'est le dé B qui présente une situation d'équiprobabilité car les évènements élémentaires issus du lancer ont la même probabilité ; ce qui n'est pas le même cas pour le dé A.

Exercice 1.7 résolu

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : 4 rouges, 2 bleues et 3 vertes. Une expérience aléatoire consiste à tirer deux boules de l'urne.

1. Les boules sont tirées simultanément. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   a) R : « les deux boules tirées sont rouges ».
   b) C : « les deux boules tirées sont de la même couleur ».
2. Reprendre les mêmes questions les boules sont tirées successivement avec remise.

Résolution

1. Un tirage de deux boules de façon simultanée parmi 9, est une combinaison de deux parmi 9.

Ω étant l'univers de cette expérience aléatoire. On a $card(\Omega) = C_9^2 = 36$.

a) Tirer deux boules rouges, c'est choisir deux parmi les quatre boules rouges donc :

$card(R) = C_4^2 = 6$.

Ainsi $p(R) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

b) Tirer deux boules de même couleur c'est :

soit tirer deux boules rouges (parmi les 4 boules), soit tirer les deux bleues soit deux boules vertes (parmi les 3 vertes), d'où :

$card(C) = C_4^2 + C_2^2 + C_3^2 = 6 + 1 + 3 = 9$

Donc $p(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

2. Un tirage de deux boules de façon successive et sans remise dans l'ensemble E des neuf boules est une 2-liste d'éléments de E.

Ω' étant l'univers de cette expérience aléatoire. On a $card(\Omega') = 9^2 = 81$.

a) Un tirage de deux rouges est une 2-liste de l'ensemble des 4 boules rouges.

$card(R) = 4^2 = 16$ *et* $p(R) = \frac{16}{81}$

b) Tirer deux boules de même couleur, c'est :

soit obtenir une 2-liste de boules rouges (parmi 4), soit obtenir une 2-liste de boules bleues (parmi 2) soit obtenir une 2-liste de boules vertes (parmi 3). D'où :

$card(C) = 4^2 + 2^2 + 3^2 = 29$ *et* $p(C) = \frac{29}{81}$

Exercice 1.8 résolu

Une boite contient douze gâteaux emballés séparément dans douze paquets identiques. Cinq de ces paquets sont parfumés à la vanille, quatre autres au chocolat et les trois autres à la banane.

1. Un enfant choisit simultanément trois gâteaux.
   a) Combien a-t-il de choix ?
   b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants
      A : « l'enfant mange un gâteau de chaque sorte »
      B : « l'enfant mange 3 gâteaux identiques »
      C : « l'enfant mange exactement deux variétés de gâteaux ».
2. L'enfant mange un gâteaux le matin, un à midi et un le soir.
   a) Combien a-t-il de choix possibles ?
   b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
      D : « l'enfant mange un gâteau à la vanille le matin, un à la banane le matin et un au chocolat le soir »
      E : « l'enfant un gâteau de chaque sorte »
      F : « l'enfant mange deux gâteaux à la banane et un au chocolat »

Résolution

1.a) Le nombre de choix possibles

Chaque choix de trois gâteaux est une combinaison de 3 parmi 12. Donc le nombre de choix (cardinal de l'univers Ω est : $C_{12}^3 = 220$.

b) Probabilité de l'évènement A

L'enfant choisit un gâteau à la vanille ***et*** *un gâteau au chocolat* ***et*** *un gâteau à la banane.*

$$Card(A) = C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ et } p(A) = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

Probabilité de l'évènement B

L'enfant choisit ***soit*** *3 gâteaux parmi les 5 à la vanille* ***soit*** *3 gâteaux parmi les 4 au chocolat* ***soit*** *les 3 gâteaux à la banane.*

$$Card(B) = C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 10 + 4 + 1 = 15 \text{ et } p(B) = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}.$$

Probabilité de l'évènement C

On peut voir la question par deux manières

la première manière : l'évènement C est le contraire $A \cup B$: $C = \overline{A \cup B}$

$$card(C) = 220 - (60 + 15) = 145 \text{ et } p(C) = \frac{145}{220} = \frac{29}{44}$$

la deuxième manière : l'enfant choisit :

soit *des gâteaux à la vanille et au chocolat (ou 2 à la vanille* ***et*** *1 au chocolat, ou 1 à la vanille* ***et*** *2 au chocolat)*
soit *des gâteaux à la vanille et à la banane (ou 2 à la vanille* ***et*** *1 à la banane, ou 1 à la vanille* ***et*** *2 à la banane)*
soit *des gâteaux au chocolat et à la banane (ou 2 au chocolat* ***et*** *1 à la banane, ou 1 au chocolat* ***et*** *2 à la banane)*

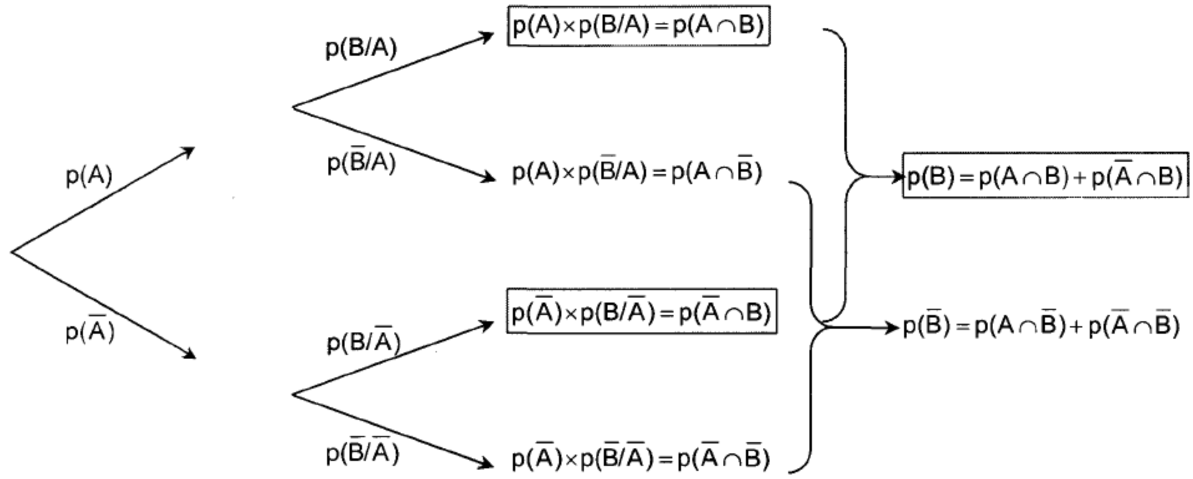
$$card(C) = (C_5^2 \times C_4^1 + C_5^1 C_4^2) + (C_5^2 \times C_3^1 + C_5^1 C_3^2) + (C_4^2 \times C_3^1 + C_4^1 C_3^2) = 70 + 45 + 30 = 145 \text{ et } p(C) = \frac{29}{44}$$

2. Probabilité conditionnelles

a) Définition

Soit A un évènement de l'univers Ω de probabilité non nulle pour tout évènement B de Ω, la probabilité de B sachant A est réalisé (ou simplement probabilité de B sachant A) est le nombre réel positif noté $p_A(B)$ ou $p(A/B)$ et défini par $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

b) Schématisation d'une probabilité conditionnelle à deux générations à l'aide d'un arbre pondéré :



b) Propriété

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles. On a :

$p(A \cap B) = p(A) \times p(B/A)$

$\qquad\quad = p(B) \times p(A/B)$.

NB : De façon générale, on a : $p(A/B) \neq p(B/A)$.

c) Evènements indépendants

Définition

Deux évènements A et B sont indépendants lorsque la probabilité de l'un n'est pas modifiée par la réalisation de l'autre. On a :

A et B sont indépendants $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

$\Leftrightarrow p(A/B) = p(A)$

$\Leftrightarrow p(B/A) = p(B)$.

Exercices d'application

Exercice 1.9 résolu

A la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :

65% de la population concernée est contre la construction du barrage et parmi ces opposants, 70% sont des écologistes.

Parmi les personnes non opposées à la construction, 20% sont des écologistes.

On interroge une personne au hasard.

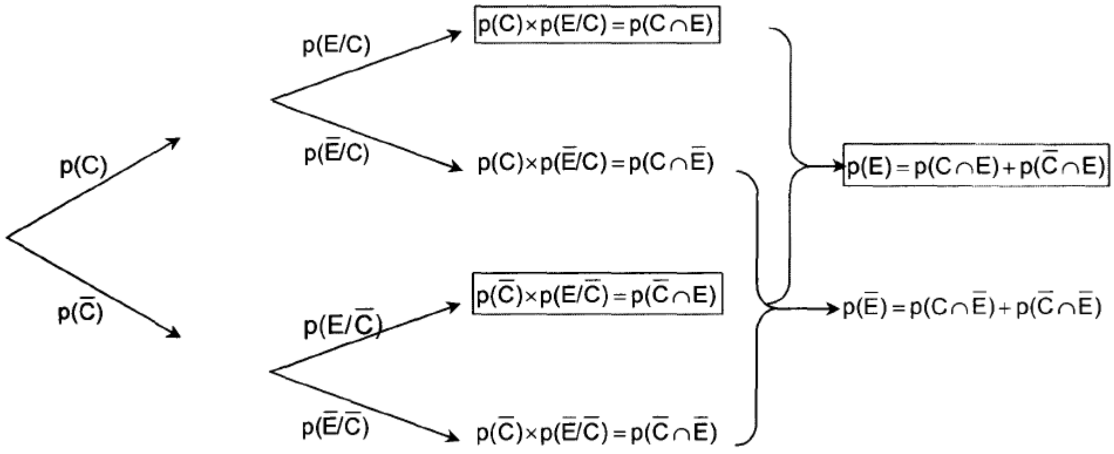
1. Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée à la construction du barrage et soit écologiste.
2. Calculer la probabilité qu'une personne interrogée ne soit pas opposée à la construction du barrage et soit écologiste.
3. En déduire la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.
4. Sachant qu'une personne interrogée n'est pas écologiste, quelle est la probabilité qu'elle soit contre la construction du barrage ?

NB : Pour faciliter les réponses aux différentes questions, on pourra noter les évènements :

C : « La personne interrogée est contre la construction du barrage » et $\overline{C}$ son évènement contraire.

E : « La personne interrogée est écologiste » et $\overline{E}$ son évènement contraire.

Résolution



D'après l'énoncé, on a :
$p(C) = 0,65 \Rightarrow p(\overline{C}) = 1 - 0,65 = 0,35.$

$p(E/C) = 0,70 \Rightarrow p(\overline{E}/C) = 1 - 0,70 = 0,30$
$p(E/\overline{C}) = 0,20 \Rightarrow p(E/\overline{C}) = 1 - 0,20 = 0,80.$

1. L'événement « une personne interrogée est opposée à la construction du barrage et est écologiste » est $C \cap E$. $p(C \cap E) = p(C) \times p(E/C) = 0,65 \times 0,30 = 0,195.$

2. L'événement « une personne interrogée est pour la construction du barrage et est écologiste » est $\overline{C} \cap E$. $p(\overline{C} \cap E) = p(\overline{C}) \times p(E/\overline{C}) = 0,35 \times 0,20 = 0,07.$

3. L'évènement « une personne interrogée est écologiste est E. $p(E) = p(C \cap E) + p(\overline{C} \cap E) = 0,265$
4. Il s'agit de l'évènement « une personne interrogée est contre la construction du barrage sachant qu'elle n'est pas écologiste » noté $C/\overline{E}$.

$$p(C/\overline{E}) = \frac{p(C \cap \overline{E})}{p(\overline{E})} \quad \text{avec } p(C \cap \overline{E}) = p(C) \times p(\overline{E}/C) = 0,70 \times 0,30 = 0,21$$

$$\text{et } p(E) = 1 - p(E) = 1 - 0,265 = 0,735.$$

$$p(C/\overline{E}) = \frac{0,21}{0,735} = 0,286.$$

Exercice 1.10 résolu

Une association de 96 membres propose différentes activités sportives à ses membres dont la natation et le football. 12 membres s'inscrivent pour la natation et 32 pour le football dont 4 pour les deux. On prend au hasard la fiche d'un adhérent.

On note N et F les évènements :
N : « L'adhérent est inscrit pour la natation ».
F : « L'adhérent est inscrit pour le football ».
1. Les évènements N et F sont-ils indépendants ?
2. En est-il de même pour N et $\overline{F}$? $\overline{N}$ et $\overline{F}$?

Résolution

1. On a $p(N) = \frac{12}{96}$; $p(F) = \frac{32}{96}$ *et* $p(F \cap N) = \frac{4}{96}$

$p(N) \times p(F) = \dfrac{12}{96} \times \dfrac{32}{96} = \dfrac{4\times 3}{96} \times \dfrac{32}{96} = \dfrac{4}{96} = p(F \cap N).$

Donc les évènements F et N sont indépendants.

2\. * $p(\overline{F}) = \dfrac{64}{96}$ et $p(\overline{F} \cap N) = \dfrac{8}{96}$.

$p(N) \times p(\overline{F}) = \dfrac{12}{96} \times \dfrac{64}{96} = \dfrac{4\times 3}{96} \times \dfrac{32\times 2}{96} = \dfrac{8}{96} = p(\overline{F} \cap N).$

Donc les évènements N et $\overline{F}$ sont indépendants.

* $p(\overline{N}) = \dfrac{74}{96}$ et $p(\overline{F} \cap \overline{N}) = \dfrac{56}{96}$.

$p(\overline{N}) \times p(\overline{F}) = \dfrac{74}{96} \times \dfrac{64}{96} = \dfrac{37\times 2}{96} \times \dfrac{32\times 2}{96} = \dfrac{148}{288} \neq p(\overline{F} \cap \overline{N}).$

Donc les évènements $\overline{N}$ et $\overline{F}$ sont dépendants.

3. variables aléatoires

a) définition

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On appelle variable aléatoire, toute application X de Ω dans ℝ. On a : $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$e_i \mapsto x_i$

On note X(Ω) l'ensemble des valeurs que X est susceptible de prendre.
L'évènement « X prend la valeur xi » est noté $(X = x_i)$.

b) loi probabilité

$X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n\}$ et p une probabilité définie sur Ω.
Définir la loi de probabilité de X, c'est donner pour chaque valeur x_i prise par X, la probabilité de l'évènement $(X = x_i)$ notée $p(X = x_i)$.
On vérifie que $p(X = x_1) + p(X = x_2) + \ldots + p(X = x_n) = 1$.

Exercice 1.11 résolu

Exercice 5 p 332 livre Ciam

Résolution

1. $p(A) = \dfrac{9}{500}$

$p(B) = \dfrac{50}{500} = \dfrac{1}{10}$

2. La somme total de vente des tickets est : 500×500 = 250.000
La somme totale de récompenses est : 62.000 + 9×7.000 + 50×500 = 150.000
Le bénéfice réalisé : 250.000 – 150.000 = 100.000

3. Soit Ω l'univers de cette expérience aléatoire :

a) $X(\Omega) = \{-500 ; 0 ; 6500 ; 61500\}$.

b) $p(-500) = \dfrac{440}{500} = \dfrac{44}{50}$; $p(0) = \dfrac{50}{500} = \dfrac{1}{10}$; $p(6500) = \dfrac{9}{500}$; $p(61500) = \dfrac{1}{500}$

X	*-500*	*0*	*6500*	*61500*
P(X)	$\frac{44}{50}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{500}$	$\frac{1}{500}$

c) $E(X) = (-500)\times\frac{44}{50} + 0\times\frac{1}{10} + 6500\times\frac{9}{500} + 61500\times\frac{1}{500}$

$= -200.$

c) Fonction de répartition

Définition

On appelle fonction de répartition de la variable X l'application $F : \mathbb{R} \to [0 ; 1]$ $x \mapsto p(X \leq x)$.

En supposant que $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ et posons $p_i = p(X = x_i)$. Alors :

$x \in]-\infty ; x_1[$, $F(x) = 0$,

$x \in [x_1 ; x_2[$, $F(x) = p_1$,

$x \in [x_2 ; x_3[$, $F(x) = p_1 + p_2$,

....

$x \in [x_i ; x_{i+1}[$, $F(x) = p_1 + p_2 + \ldots + p_i$,

$x \in [x_n ; +\infty[$, $F(x) = 1$.

F est une fonction croissante en escalier.

Exercice 1.12 résolu

Un dé tétraédrique pipé dont les faces numérotées de 1 à 4 est tel que : p(1) = p(3) = 0,3 et p(2) = p(4) = 0,2. On lance le dé deux fois de suite ; on note à chaque lancer le numéro de la face supérieure. On désigne par X la variable aléatoire qui donne la somme des deux chiffres obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X et construire son diagramme en bâtons.
2. Déterminer et représenter la fonction de représentation de X.

Résolution

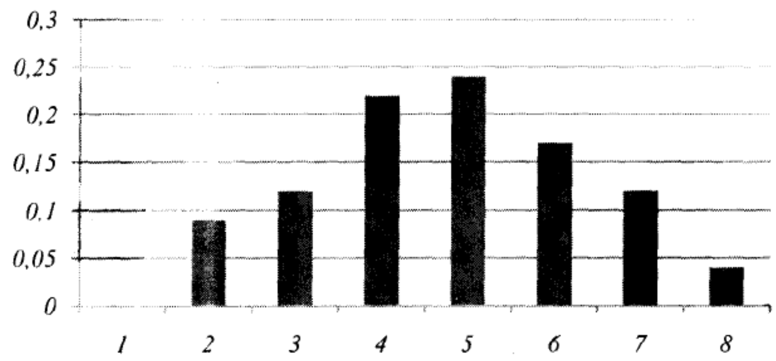
1. loi de probabilité de X

Ω est l'univers de cette expérience aléatoire. A l'aide d'un tableau à double entrée on obtient que

X(Ω) = {2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8}

X	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
P(X)	*0,09*	*0,12*	*0,22*	*0,24*	*0,17*	*0,12*	*0,04*

Diagramme en bâtons de X.

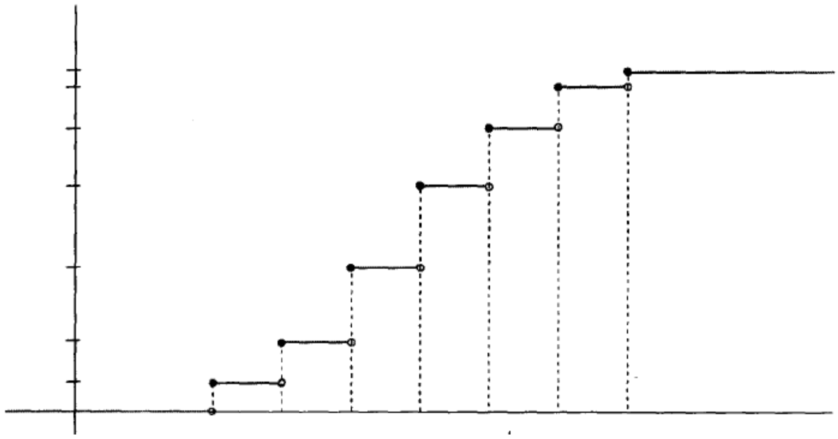


2. Fonction de répartition F de X

Nous allons utiliser un tableau pour déterminer simplement la fonction de répartition :

x	$-\infty$	*2*		*3*		*4*		*5*		*6*		*7*		*8*		$+\infty$
F(x)	*0*	$\boxed{0,09}$	*0,09*	$\boxed{0,21}$	*0,21*	$\boxed{0,43}$	*0,43*	$\boxed{0,67}$	*0,67*	$\boxed{0,84}$	*0,84*	$\boxed{0,96}$	*0,96*	$\boxed{1}$	*1*	

Représentation graphique de F



d) Paramètres d'une variables aléatoires

Espérance mathématique

L'espérance mathématique de X est le nombre réel noté E(x) et défini par :

$E(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$ où $p_i = p(X = x_i)$,

$= \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$.

Variance

La variance de X est le nombre réel positif noté V(X) et défini par :

$V(x) = (x_1 - m)^2p_1 + (x_2 - m)^2p_2 + \dots + (x_n - m)^2p_n$ où $p_i = p(X = x_i)$ et $m = E(x)$.

$= x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \dots + x_n^2p_n - (E(X)^2)$.

$= E(X^2) - (E(X)^2)$.

Ecart-type

L'écart-type de X est le nombre noté $\sigma(X)$ égal la racine carrée de la variance :

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exercice 1.13 résolu

A l'issue d'une expérience aléatoire, on définit une variable aléatoire X par le tableau ci-dessous :

X	-5	-3	2	4	7	8
p(X)	0,05	0,1	0,2	0,4	0,15	0,1

1. Calculer l'espérance mathématique de X.
2. Calculer la variance et l'écart-type de X.
3. Déterminer et représenter la fonction de répartition de X.

Résolution

1. Espérance mathématique de X

$E(X) = (-5)\times 0,05 + (-3)\times 0,1 + 2\times 0,2 + 4\times 0,4 + 7\times 0,15 + 8\times 0,1$

$= 3,3$

2. Variance de X

$$V(X) = (-5)^2\times 0{,}05 + (-3)^2\times 0{,}1 + 2^2\times 0{,}2 + 4^2\times 0{,}4 + 7^2\times 0{,}15 + 8^2\times 0{,}1 - (3{,}3)^2$$
$$= 12{,}21$$

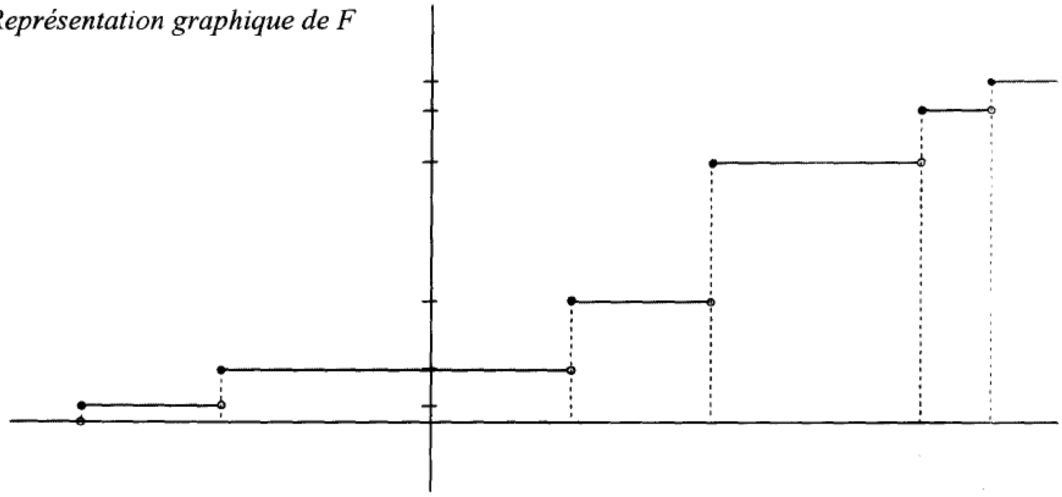
$$\sigma(X) = \sqrt{12{,}21}$$

3. Détermination et représentation de la fonction de répartition F

Détermination de F (simplement à l'aide d'un tableau)

x	$-\infty$	-5		-3		2		4		7		8	$+\infty$
$F(x)$	0	$\boxed{0{,}05}$	$0{,}05$	$\boxed{0{,}15}$	$0{,}15$	$\boxed{0{,}35}$	$0{,}35$	$\boxed{0{,}75}$	$0{,}75$	$\boxed{0{,}90}$	$0{,}90$	$\boxed{1}$	1

Représentation graphique de F



- 14 -

5. Schéma de Bernoulli

a) Définitions

- Une épreuve de Bernoulli est une expérience conduisant à deux éventualités, l'une appelée succès et notée S, l'autre appelée échec notée $\overline{S}$.
- Un schéma de Bernoulli est une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

b) Propriété

- Au cours d'un schéma de Bernoulli de n épreuves la probabilité p_k d'obtenir k succès est égale à $p_k = C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}$ où p est la probabilité de succès.
- Le nombre n de succès et la probabilité p de succès sont appelés paramètres du schéma de Bernoulli.

c) Loi binomiale

Définition

On dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale lorsque X est égale au nombre k de fois que se produit un évènement A dans un schéma de Bernoulli à n épreuves c'est-à-dire :

$$p(X = k) = C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k} \text{ où } p = p(A) \text{ et } k \in \{0 ; 1 ; \dots ; n\}.$$

Propriété

Si X suit la loi binomiale, on a E(X) = n.p et V(X) = n.p.(1 – p).

Exercice 1.14 résolu

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 5 oranges, 2 blanches et 3 vertes. Un jeu consiste à tirer au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Un joueur est gagnant s'il obtient dans son tirage au moins une boule blanche.

1. Un joueur joue une fois. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   E : « le joueur perd».
   F : « le joueur gagne».
2. Le joueur joue trois fois de suite. On considère la variable aléatoire X égale au nombre de fois que gagne le joueur.
   a) Déterminer X(Ω).
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Déterminer E(X) et V(X).

Résolution

1. Probabilités de E et F

Soit Ω l'univers de cette expérience aléatoire

$card(\Omega) = C_8^2 = 28$ *et* $card(E) = C_6^2 = 15$. *Donc* $p(E) = \frac{15}{28}$.

$p(F) = 1 - p(E) = \frac{13}{28}$.

2.a) les valeurs prises par X

$X(\Omega) = \{0 \,;\, 1 \,;\, 2 \,;\, 3\}$

2.b) Loi de probabilité de X

Il faut remarquer que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ *et* $p = \frac{13}{28}$.

X	0	1	2	3
p(X)	$\frac{3375}{21952}$	$\frac{8775}{21952}$	$\frac{7605}{21952}$	$\frac{2197}{21952}$

$$p(0) = C_3^0 \times \left(\frac{13}{28}\right)^0 \times \left(\frac{15}{28}\right)^3 = \frac{3375}{21952}$$

$$p(1) = C_3^1 \times \left(\frac{13}{28}\right)^1 \times \left(\frac{15}{28}\right)^2 = \frac{8775}{21952}$$

$$p(2) = C_3^2 \times \left(\frac{13}{28}\right)^2 \times \left(\frac{15}{28}\right)^1 = \frac{7605}{21952}$$

$$p(3) = C_3^3 \times \left(\frac{13}{28}\right)^3 \times \left(\frac{15}{28}\right)^0 = \frac{2197}{21952}$$

2.c) Espérance mathématique de X

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{3375}{21952} + 1 \times \frac{8775}{21952} + 2 \times \frac{7605}{21952} + 3 \times \frac{2197}{21952} \\ &= \frac{30576}{21952} \\ &= \frac{39 \times 784}{28 \times 784} \\ &= 3 \times \frac{13}{28}\,(n.p) \\ &= \frac{39}{28} \end{aligned}$$

Variance de X

$$V(X) = 0^2 \times \frac{3375}{21952} + 1^2 \times \frac{8775}{21952} + 2^2 \times \frac{7605}{21952} + 3^2 \times \frac{2197}{21952} - \left(\frac{39}{28}\right)^2$$

$$= \frac{16380}{21952}$$

$$= \frac{3 \times 13 \times 15 \times 28}{28 \times 28 \times 28}$$

$$= 3 \times \frac{13}{28} \times \frac{15}{28} (n.p.(1 - p))$$

$$= \frac{585}{784}$$

EXERCICES

Exercice 1.15

On effectue une enquête auprès de trois revues notées a, b, et c. On obtient les résultats suivants : sur 100 interrogées, 57 lisent a, 42 lisent b, 38 lisent c, 22 lisent a et b, 14 lisent b et c, 16 lisent a et c, 8 lisent a, b et c. Calculer le nombre de personnes :

1. qui ne lisent que a et b, que b et c, que a et c.
2. qui ne lisent que a, que b, que c.
3. qui ne lisent aucune des trois revues.

(On pourra faire un diagramme).

Exercice 1.16

1. Combien peut – on former d'anagrammes du mot «LAINE » ?
2. Combien de ces anagrammes commencent par une consonne ?
3. Reprendre les deux questions précédentes pour le mot « BALEINE »

NB : On appelle anagramme d'un mot, tout assemblage ordonné, formé de toutes les lettres du mot.

Exercice 1.22

Une urne contient 9 boules : 4 rouges , 2 bleues , 3 vertes.

1. On tire simultanément trois boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :

R : « Tirer deux boules rouges ».

C : « Tirer deux boules de la même couleur ».

2. Mêmes questions dans le cas de tirage successif de trois boules avec remise ».
3. On effectue un tirage successif de trois boules sans remise.

On considère l'évènement D : « Obtenir dans l'ordre une boule rouge, une boule rouge et une boule verte ». Calculer p(D).

Exercice 1.26

Deux individus A et B lancent des fléchettes en direction d'une cible. On admet que chacun des individus atteint ou non la cible indépendamment de l'autre.

La probabilité que l'individu A (respectivement B) atteigne la cible est de $\frac{5}{8}$ (respectivement $\frac{2}{3}$).

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

1. A : « Que les deux individus atteignent la cible ».
2. B : « Qu'aucun des deux individus n'atteigne la cible ».
3. C : « Qu'au moins un des deux individus atteigne la cible ».
4. D : « Qu'un individu et un seul atteigne la cible ».

Exercice 1.32

A et B sont deux événements tels que $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$.

Calculer $P_A(B)$, $P_B(A)$, $P(A \cup B)$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Exercice 1.37

Une roue de loterie se compose de trois secteurs rouges, quatre secteurs blancs et n secteurs verts. ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Ces secteurs sont de formes géométriques identiques, et, lorsqu'on fait tourner la roue, chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant un repère fixe.

Un joueur fait tourner la roue :

- Si le secteur repéré est rouge, il gagne 1600 F,
- S'il est blanc, il perd 1200 F,
- S'il est vert, le joueur fait tourner une deuxième fois la roue, cette deuxième épreuve étant indépendante de la première :

  - Si le secteur repéré est rouge, il gagne 800 F,
  - S'il est blanc, il perd 200 F,
  - S'il est vert, il ne gagne rien et ne perd rien.

1. Dans cette question on suppose $n = 5$.
   Soit X la variable aléatoire qui désigne le gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   b) Démontrer que l'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{500}{9}$.
2. Dans cette question n est quelconque. X_n est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X_n.

   b) Démonter que l'espérance mathématique de X_n notée $E(X_n)$ est égale à $\frac{1600n}{(n+7)^2}$.

   c) On considère la fonction numérique f définie sur $[0\,; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{(x+7)^2}$

   Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation (les limites ne sont pas demandées). En déduire la valeur de n pour laquelle $E(X_n)$ est maximale. Quelle est la valeur correspondante de $E(X_n)$?

Exercice 1.38

On dispose au hasard les lettres du mot « MATH » dans un damier 5×5 représenté ci – contre.

	M			H
			A	
		T		

1. Montrer que le nombre de dispositions possibles est 303 600.
2. Calculer la probabilité d'obtenir :
   a) Les quatre lettres sur une même ligne.
   b) Exactement trois lettres sur une même ligne.
   c) Exactement deux lettres sur une même ligne.
   d) Au plus une lettre par ligne.
3. Calculer la probabilité de lire le mot « MATH » sur une ligne ou une colonne.
   NB : La lecture se fait de gauche à droite sur une ligne et de haut en bas sur une colonne, y compris les cas où deux lettres sont séparées par une case vide.

NOMBRES COMPLEXES

PARTIE 1 : GENERALITES

I/ Ensemble des nombres complexes

1. Définition

On admet l'existence d'un nombre imaginaire noté i vérifiant $i^2 = -1$.
On appelle nombre complexe tout nombre qui s'écrit sous la forme a + ib, où a et b sont des réels.
L'ensemble des nombres complexes est noté %, et on a $\mathbb{R} \subset$ %.
L'addition et la multiplication dans % s'effectuent comme dans $\mathbb{R}$.

2. Forme algébrique d'un nombre complexe :

Propriété :

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ avec a et b sont des réels.
Cette écriture s'appelle forme algébrique de z.

3. Partie réelle – partie imaginaire

Dans la forme algébrique de $z = a + ib$:
a s'appelle partie réelle de z et notée $\mathcal{R}_e(z)$ et b s'appelle partie imaginaire de z et notée $\mathcal{I}_m(z)$.

4. Egalité de deux nombres complexes

Propriété

z et z' sont deux nombres complexes, on a :

- $z = z' \Leftrightarrow \mathcal{R}_e(z) = \mathcal{R}_e(z')$ et $\mathcal{I}_m(z) = \mathcal{I}_m(z')$.
- $z = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}_e(z) = 0$ et $\mathcal{I}_m(z) = 0$.

5. Nombres imaginaires purs

Définition

On appelle nombre imaginaire pur, tout nombre complexes qui s'écrit sous la forme ib avec $b \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Propriété

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}_e(z) = 0$.
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}_m(z) = 0$.

II/ Calcul dans %

1. Somme et produit

$z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes sous forme algébrique et k un réel, alors :

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $kz = ka + ikb$
- $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$.

2. Opposé d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique.
L'opposé de z est le nombre complexe $-z = -a - ib$.

3. Inverse d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = a + ib$, l'inverse de z est le nombre complexe :

$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$.

4. Nullité d'un produit

Propriété :

Pour tout nombres complexe z et z', on a $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

5. Puissance entière d'un nombre complexe

Définition

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0^n = 0$.
- $\forall z \in$%$\setminus\{0\}$, on a :
  - $z^0 = 0$
  - $z^{n+1} = z \times z^n$
  - $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

Cas particuliers : Puissances entières de i.

Pour tout entier naturel n, on a : $i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$.

6. Formule du binôme de newton :

Pour tous nombre complexe z et z' non nuls, et pour tout entier naturel non nul, on a :

$$(z+z') = \sum_{p=0}^{n} C_n^p z^p (z')^{n-p}$$

$$= C_n^0 (z')^{n-p} + C_n^1 z(z')^{n-1} + C_n^2 z^2(z')^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n^{n-1} z^{n-1} z' + C_n^n z^n$$

NB : On peut obtenir les coefficients C_n^p à l'aide du triangle de pascal ci-dessous

Le coefficient C_n^p se trouve à l'intersection de la ligne n et de la colonne p.

n \ P	0	1	2	3	4	5	…
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
…							

On a : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$. Exemple : $C_5^2 = C_4^1 + C_4^2$

EXERCICES

Exercice 2.1

Copier puis compléter le tableau suivant :

Forme algébrique de z	$\mathcal{R}_e(z)$	$\mathcal{I}_m(z)$
-2 + i		
	2	-1
-4		
	0	$2\sqrt{3}$
i		
0		

Exercice 2.2

Donner la forme algébrique de chacun des nombre complexes suivants :

$(1 - i)(2 + 3i)$; $i(1 + 2i)(-3 + 2i) - 3(2 - i\sqrt{2})$; $\dfrac{3+4i}{8-6i}$

Exercice 2.3

Donner l'opposé et l'inverse de chacun des nombres complexes suivants :

$3 + 2i$; $(2 - 2i\sqrt{3})$

Exercice 2.4

Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

i^6 ; i^{2009} ; $(5 + i)^3$; $(1 - 2i)^5$

Soit les nombres complexes $\alpha = \dfrac{3-i}{5+7i}$ et $\beta = \dfrac{3+i}{5-7i}$.

Sans les calculer sous forme algébrique, montrer que $\alpha + \beta$ est un nombrer réel et $\alpha - \beta$ est un nombre imaginaire pur.

7- Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

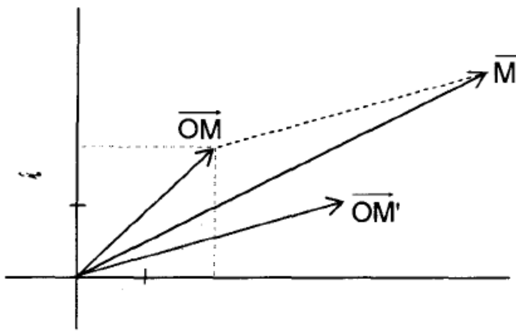
A tout nombre complexe z de forme algébrique a + ib, on associe le point M du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées (a, b).

M est le **point-image** de z et z **l'affixe** de M.

$\overrightarrow{OM}$ est le **vecteur-image** de z et z **l'affixe** de $\overrightarrow{OM}$.

Si M' est le point d'affixe z', alors z' – z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

L'axe (IO) des est appelé axe réel et l'axe (OJ) axe imaginaire.



III/ Conjugué et module d'un nombre complexe

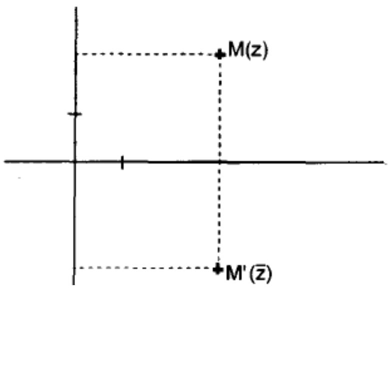
1. Conjugué d'un nombre complexe

a) Définition

Soit z un nombre complexe de forme algébrique z = a + ib.

On appelle conjugué de z, le nombre complexe noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} = a - ib$.

Interprétation géométrique : les points M(z) et M'($\bar{z}$) sont symétriques par à l'axe (IO).



b) Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes avec z de forme algébrique z = a + ib. On a :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z\overline{z} = a^2 + b^2$
- $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = a$ et $\dfrac{z-\overline{z}}{2} = b$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$.
- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- Si $z \neq 0$ alors : $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

2. Module d'un nombre complexe

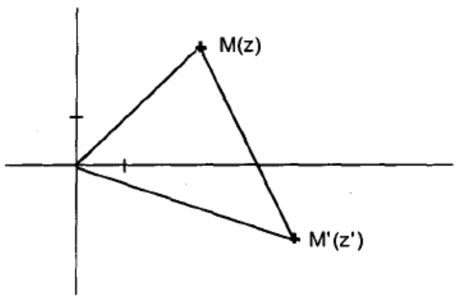
a) Définition

Soit z un nombre complexe de forme algébrique z = a + ib et M son point image dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

On appelle module de z, le nombre positif noté |z| défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Interprétation géométrique

Le module de z affixe du point M est égal à la distance OM



Si M' est le point d'affixe z', alors |z' – z| est la distance MM'.

b) Propriétés

Pour tout nombre complexe z et z', on a :

- $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
- $z\overline{z} = |z|^2$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $\mathrm{Re}(z') \leq |z|$ et $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$
- $|z.z'| = |z|.|z'|$
- Si $z \neq 0$ alors : $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.
- Si p est un entier, $|z^p| = |z|^p$.
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

IV- Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe

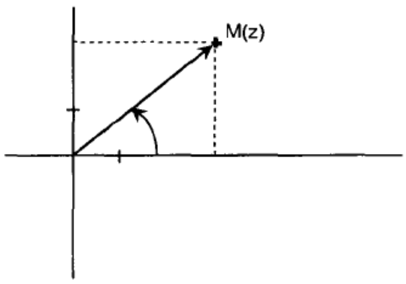
1. Arguments d'un nombre complexe non nul

a) définitions

Soit z un nombre complexe non nul et M son point image dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

On appelle argument principal de z, le nombre réel noté ARG(z) égal à la mesure principale de $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$.

Toute autre mesure de $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ est appelée simplement argument de z et notée arg(z) et on a :
$\arg(z) = \mathrm{ARG}(z) + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.



NB :
Le point image de tout nombre complexe est parfaitement déterminé par la donnée du module et d'un argument de ce nombre.
On n'attribue pas d'argument au nombre complexe 0.

b) Propriétés pour tout nombre complexe non nul z, on a :

- $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
- $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \mathrm{ARG}(z) = \frac{\pi}{2}$ ou $\mathrm{ARG}(z) = -\frac{\pi}{2}$.
- $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

a) Propriété – définition :

Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ peut s'écrire sous la forme :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Cette écriture est appelée forme trigonométrique de z.

b) Egalité de deux nombres complexes non nuls sous forme trigonométrique

Propriété : soit z et z' deux nombres complexes. On a :

$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et $\mathrm{ARG}(z) = \mathrm{ARG}(z')$

$\Leftrightarrow |z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z') + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

c) Passage forme trigonométrique – forme algébrique
z est un nombre complexe non nul.

Forme algébrique — Forme trigonométrique

$$z = a + ib \longrightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ avec } \begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

$$z = a + ib \text{ avec } \begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases} \longleftarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

(Voir table trigonométrique et cercle trigonométrique page 160)

3. Calcul avec les formes trigonométriques – opérations sur les arguments

a) Propriétés

Soient $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ deux nombres complexes écrits sous forme trigonométriques. On a :

- $z.z' = r.r'\,[\cos(\theta + \theta) + i\sin(\theta + \theta)]$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$
- $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{r'}{r}[\cos(\theta' - \theta) + i\sin(\theta' - \theta)]$
- $z^p = r^p[\cos(p\theta) + i\sin(p\theta)]$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

b) Propriétés

Pour tous nombres complexes non nuls z et z', on a :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- Si $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n \times \arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

EXERCICES

Exercice 2.5

Donner le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$1 - 7i$; $i(\sqrt{2} - 3i)$; $(4 + 3i) + (-5i - 1)$; $\dfrac{3-i}{4+i}$

Exercice 2.6

Donner le module de chacun des nombres complexes suivants:

$-2 + 6i$; $(3 - i)(3i - 2)$; $(2+i) + (8- i)$; $\dfrac{3-i}{4-i\sqrt{2}}$

Exercice 2.7

Le plan est muni du repère $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.
Placer les points-images de chacun des nombres complexes suivants :

$Z_A = -1 + i$; $Z_B = -i$; $Z_C = i - 2$; $Z_D = 2 - 2i\sqrt{3}$.

Exercice 2.8

Dans chacun des cas suivants, déterminer puis construire l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant: $|z + 2| = |z - i|$; $|iz - 3| = |z - 3 + i|$; $|2 + iz| = 3$; $|\bar{z} - i| = 2$

Exercice 2.9

1. Sans calcul, en utilisant simplement la définition, donner l'argument principal du nombre complexe proposé :

ARG(1) = ... ; ARG(-1) = ...

ARG(i) = ... ; ARG(-i) = ...

$a < 0$, ARG(a) = ... ; $a > 0$, ARG(a) = ...

$b < 0$, ARG(bi) = ... ; $b > 0$, ARG(bi) = ...

2. Déterminer un argument de chacun des nombres réels suivants :

$z_1 = 1 - i$; $z_2 = \sqrt{3} - i$; $z_3 = (1 + i\sqrt{3})(1 + i)$; $z_4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{-1-i}$; $z_5 = (1 - i)^6$

Exercice 2.10

Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = -\sqrt{3} + i$; $z_2 = 1 - i$; $z_3 = (1 - i)(-\sqrt{3} + i)$; $z_4 = (1 - i)^3(-\sqrt{3} + i)^2$; $z_5 = \dfrac{1-i}{-\sqrt{3}+i}$.

Exercice 2.11 résolu

Soit le nombre complexe $Z = (1 + i\sqrt{3})(1 - i)$.

1.a) Ecrire sous forme trigonométrique $(1 + i\sqrt{3})$ et $(1 - i)$.

b) En déduire la forme trigonométrique de Z.

2. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe Z.

3. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Résolution

1. On a : $(1 + i\sqrt{3}) = 2[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}]$ *et* $(1 - i) = \sqrt{2}\,[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})]$

Donc $|Z| = 2\sqrt{2}$ *et* $\arg(Z) = \frac{\pi}{3} + (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{12}$.

Ainsi $Z = 2\sqrt{2}\,[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}]$

2. $Z = (1 + i\sqrt{3})(1 - i) = (1 + \sqrt{3}) + i(-1 + \sqrt{3})$

3. D'après les questions précédentes, on a :

$$Z = 2\sqrt{2}\,[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}] = (1 + \sqrt{3}) + i(-1 + \sqrt{3})$$

Donc : $$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

4. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul :

a) Définition

En posant $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, alors tout nombre complexe z de module r et d'argument s'écrit $z = re^{i\theta}$. Cette écriture est appelée forme exponentielle de z.

b) Opérations sur les formes exponentielles

Propriétés

Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ sont deux nombres complexes écrits sous forme exponentielle, alors :

- $z.z' = r.r'e^{i(\theta + \theta')}$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
- $\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}\, e^{i(\theta - \theta')}$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$
- $\bar{z} = re^{-i\theta}$
- $-z = re^{i(\theta + \pi)}$

c) Formules de Moivre et d'Euler

Formules de Moivre

Pour tout entier n et pour tout réel θ, on a :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Formules d'Euler

Pour tout entier n et pour tout réel θ, on a :

- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- $\cos(n\theta) = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$ et $\sin(n\theta) = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$

EXERCICES

Exercice 2.12

Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 2i$; $z_3 = -5$; $z_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$; $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_5 = (1 + i\sqrt{3})^4$; $z_6 = \dfrac{1+i}{-\sqrt{3}-i}$.

Exercice 2.13

x étant un nombre réel, exprimer cos5x et sin5x en fonction de cosx et sinx.

Exercice 2.14

x étant un nombre réel, linéariser $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$.

V- Racines $n^{ième}$ d'un nombre complexe

1. Racines carrées d'un nombre complexe

a) Définition

Soit Z un nombre complexe. On appelle racine carrée de Z tout nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.

b) Propriété

- 0 est sa propre et unique racine carrée.
- Un nombre complexe non nul admet deux racines carrées complexes opposées.

Si Z = a + ib et z = x + iy avec a, b, x et y réels, on a :

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ \quad 2xy = b \end{cases}$$

c) Application : résolution d'équation du second degré dans %

Définition

L'équation (E) : z ∈ %, $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c des nombres complexes tels que a ≠ 0, est appelée équation du second degré dans %.

Résolution

- On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si Δ = 0 alors (E) admet une solution : $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si Δ ≠ 0 et δ une racine carrée de Δ, alors (E) admet deux solutions : $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.

Exercice 2.15 résolu

1. a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe 40 – 42i .
   b) Résoudre dans %, l'équation (E) : $z^2 - (1 + i)z - 10 + 11i = 0$.
2. Soit le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - z^2 + (-9 + 10i)z - 11 - 10i$.
   a) Calculer P(-i).
   b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que $P(z) = (z + i)(z^2 + az + b)$.
   c) Résoudre dans %, l'équation P(z) = 0.

Résolution

1.a) Soit $\delta = x + iy$ (x et y étant des nombres réels) tel que $\delta^2 = 40 - 42i$.

$$\text{On a alors : } \begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \\ \quad 2xy = -42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 98 \\ 2y^2 = 18 \\ \quad xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 49 \\ y^2 = 9 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \text{ ou } x = -7 \\ y = 3 \text{ ou } y = -3 \\ \quad xy < 0 \end{cases}$$

D'où δ = 7 - 3i ou δ = -7 + 3i

1.b) Calcul du discriminant

$\Delta = (1 + i)2 - 4 \times (-10 + 11i)$

$\quad = 40 - 42i$

Les racines de Δ sont 7 - 3i et -7 + 3i.

Donc les solutions de (E) sont :

$$z_1 = \frac{(1+i)+(7-3i)}{2} = 4 - i$$

$$z_2 = \frac{(1+i)-(7-3i)}{2} = -3 + 2i$$

2.a) $P(-i) = (-i)^3 - (-i)^2 + (-9 + 10i)(-i) - 11 - 10i$

$\quad = i + 1 + 9i + 10 - 11 - 10i$

$\quad = 0.$

b) $P(z) = (z + i)(z^2 + az + b)$

$\quad = z^3 + (a + i)\, z^2 + (b + ia)z + bi$

Par identification, on a : $a + i = -1$

$b + ai = -9 + 10i$

$bi = -11 - 10i$

soit $a = -1 - i$ et $b = -10 + 11i$

donc $P(z) = (z + i)[z^2 - (1 + i)z - 10 + 11i]$

2. c) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + i)[z^2 - (1 + i)z - 10 + 11i]$

$\Leftrightarrow (z + i) = 0$ ou $z^2 - (1 + i)z - 10 + 11i = 0$

$\Leftrightarrow (z = -i$ ou $z = 4 - i$ ou $z = -3 + 2i$.

D'où $S_{\mathbb{C}} = \{-i ; 4 - i ; -3 + 2i\}$

2. Cas général de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

a) Définition

Soit Z un nombre complexe et n un entier naturel non nul. On appelle racine $n^{\text{ième}}$ de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

b) Propriété

- 0 est sa propre et unique racine $n^{\text{ième}}$.
- Si $n \geq 2$ et que Z s'écrit sous la forme exponentielle $Z = re^{i\theta}$, alors Z admet exactement n racines $n^{\text{ième}}$ qui sont les valeurs de $\sqrt[n]{r}.e^{i(\frac{\theta + 2k\pi}{n})}$ où $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$.
- Les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité sont : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$.

c) Points images des racines $n^{\text{ième}}$

Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

- Si n = 2, les points-images des 2 racines carrées sont diamétralement opposés sur le cercle $\mathcal{C}(O ; \sqrt{r})$.
- Si n > 2, les points-images des n racines $n^{\text{ième}}$ sont les sommets d'un polynôme régulier à n côtés inscrit dans le cercle $\mathcal{C}(O ; \sqrt[n]{r})$.

Exercice 2.16 résolu

Déterminer les racines cubiques de -8i.

Résolution

On a : $-8i = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Soit $z = re^{i\alpha}$ tel que $z^3 = -8i$

Alors $z^3 = -8i \Leftrightarrow r^3 e^{i3\alpha} = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\alpha = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \text{ est un entier} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 2 \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}, k \text{ est un entier} \end{cases}$$

On obtient toutes les solutions pour $k \in \{0 ; 1 ; 2\}$.

Les solutions sont :

$z_0 = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$; $z_1 = 2e^{\pi i}$; $z_2 = 2e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

c'est-à-dire $z_0 = \sqrt{3} - i$; $z_1 = -2$; $z_2 = -\sqrt{3} - i$

EXERCICES

Exercice 2.17

1. Déterminer sous forme algébrique les solutions dans % de l'équation $z^4 = 1$.

2. En déduire les solutions dans % de l'équation $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1$.

Exercice 2.18

Résoudre dans % chacune des équations suivantes :

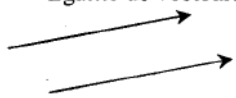
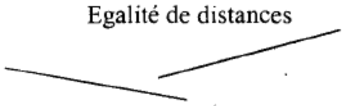
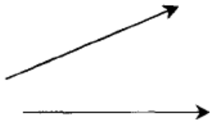
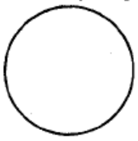
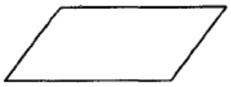
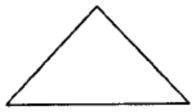
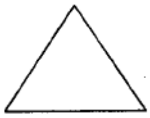
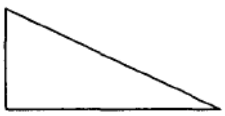
1. $(1 + i)z = 3 - i$
2. $2z + 1 - i = iz + 2$
3. $(2z + 1 - i)(iz + 3) = 0$
4. $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$
5. $2iz + \overline{z} - 3 = 0$ *(On pourra poser $z = x + iy$ où x et y sont des réels).*

Exercice 2.19

Résoudre dans % chacune des équations suivantes :

1. $z^2 + z - 2 = 0$
2. $z^2 - 10z + 25 = 0$
3. $z^2 + z + 3 = 0$
4. $z^2 + iz + 1 + 3i = 0$.

PARTIE 2 : NOMBRES COMPLEXES ET CONFIGURATIONS GEOMETRIQUES

Configurations	Caractérisations géométriques	Caractérisations complexes
Egalité de vecteurs 	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$	$Z_B - Z_A = Z_D - Z_C$
Egalité de distances 	AB = CD	$\lvert Z_B - Z_A \rvert = \lvert Z_D - Z_C \rvert$
Angles orientés de vecteurs 	$\text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})}$	$\text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})} = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$
Alignement de points 	• $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ où $k \in \mathbb{R}^*$ • mes $\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	• $\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \in \mathbb{R}^*$ • $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Points Cocycliques 	• A, B, C et D $\in \mathcal{C}(K, r)$ AK = BK = CK = DK = r • A, B, C et D $\in \mathcal{C}(O, r)$ OA = OB = OC = OD • A, B, C et D sont cocycliques	• $\lvert z_K - z_A\rvert = \lvert z_K - z_B\rvert = \lvert z_K - z_C\rvert = \lvert z_K - z_D\rvert$ • $\lvert z_A\rvert = \lvert z_B\rvert = \lvert z_C\rvert = \lvert z_D\rvert$ • $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \times \dfrac{z_C - z_D}{z_A - z_D} \in \mathbb{R}$
ABCD est un parallélogramme 	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$	$Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$
Triangle ABC isocèle en A 	AB = AC	• $\lvert z_C - z_A\rvert = \lvert z_B - z_A\rvert$ • $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $e^{-i\alpha}$ avec mes $\hat{A} = \alpha \neq k\pi$
Triangle ABC équilatéral 	• AB = AC = BC • AB = AC et mes $\hat{A} = \pm\dfrac{\pi}{3}$	• $\lvert z_B - z_A\rvert = \lvert z_C - z_A\rvert = \lvert z_C - z_B\rvert$ • $\lvert z_B - z_A\rvert = \lvert z_C - z_A\rvert$ et $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle en A 	$\text{mes}\,\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})} = \pm\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$

Exercice 2.20 résolu

On considère le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - 3iz^2 + (3 + i)z - 2 + 2i$.

1. a) Calculer P(-1).

   b) Résoudre dans % l'équation p(z) = 0.

2. Soit f : $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ tel que } z' = \frac{-iz-2}{z+1} \quad \forall z \neq -1.$$

A, B, C et E sont les points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives a = -1 ; b = 2i ; c = -i et e = 1 + i.

a) Placer les points A, B, C et E. Quelle est la nature du quadrilatère ABEC ? Justifier.

b) Soit C' = f(C). Donner l'affixe de C' sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

c) Soit G' le point d'affixe $\frac{1}{2}$. Calculer l'affixe du point G tel que f(G) = G'.

3. a) Calculer z' + i en fonction de z et en déduire que $|z' + i|\,|z + 1| = \sqrt{5}$

   b) M appartient au cercle de centre A et de rayon 2.

   Démontrer que M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4. a) Justifier que pour tout point M du plan distinct de A et B, on a : $OM' = \frac{BM}{AM}$.

   b) En déduire l'ensemble ($\mathcal{D}$) des points M du plan dont l'image M' soit sur le cercle trigonométrique.

5. a) Démontrer que pour tout point distinct de A et B, on a :

$$\arg(z') = \text{mes}\,(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

   b) En déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que z' soit un nombre réel strictement positif puis le construire.

Résolution

1. a) $P(-1) = (-1)^3 - 3i(-1)^2 + (3 + i)(-1) - 2 + 2i$
$= -1 - 3i + 3 + i - 2 + 2i$
$= 0.$

1. b) P(-1) = 0, il existe donc des nombres a, b et c tels que $P(z) = (z + 1)(az^2 + bz + c)$

Détermination de a, b et c par le tableau de Hörner

	1	*-3i*	*-3 - i*	*-2 + 2i*
-1		*-1*	*1 + 3i*	*2 - 2i*
	1	*-1 - 3i*	*-2 + 2i*	*0*

a = 1 ; b = -1 – 3i et c = - 2 + 2i

donc $P(z) = (z + 1)(z^2 - (1 + 3i)z - 2 + 2i)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z + 1 = 0$ *ou* $z^2 - (1 + 3i)z - 2 + 2i = 0.$

(1) : $z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -1.$

(2) : $z^2 - (1 + 3i)z - 2 + 2i = 0$

$\Delta = (1 + 3i)^2 - 4(-2 + 2i)$
$= 1 + 6i - 9 + 8 - 8i$
$= -2i$

Recherche des racines carrées de Δ.

Elles sont les solutions de l'équation z2 = -2i.

On pose z = x + iy et on a le système :

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2-y^2=0 \\ 2xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=2 \\ 2y^2=2 \\ xy<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ou } x=-1 \\ y=1 \text{ ou } y=-1 \\ xy<0 \end{cases}$$

Les racines carrées de Δ sont $\delta_1 = 1 - i$ et $\delta_2 = -1 + i$.
Les solutions de l'équation $z^2 - (1 + 3i)z - 2 + 2i = 0$, sont :

$$z_1 = \frac{1+3i+1-i}{2} = 1+i$$

$$z_2 = \frac{1+3i-1+i}{2} = 2i$$

$S_{\mathbb{C}} = \{-1 \,;\, 2i \,;\, 1 + i\}$

2. a) voir la figure pour la construction
Par conjecture ABEC est un parallélogramme.
En effet : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = b - a = 1 + 2i$

$z_{\overrightarrow{CE}} = z_E - z_C = e - c = 1 + 2i$

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CE}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$. *Donc le quadrilatère ABEC est un parallélogramme.*

2. b) $C' = f(C)$.
Donc $z_{C'} = \dfrac{-ic-2}{c+1} = \dfrac{-i(-i)-2}{(-i)+1} = \dfrac{-3}{1-i} = \dfrac{-3(1+i)}{2} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}i$

Forme trigonométrique de C'

$$|C'| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Soit θ un argument de C'. on a :

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = -\frac{3\pi}{4} \quad \text{donc } z_{C'} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

2. c) $z_{G'} = \dfrac{1}{2}$ *et $f(G) = G'$*

$$\begin{aligned} f(G) = G' &\Leftrightarrow z_{G'} = f(z_G) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{-iz_G - 2}{z_G + 1} \\ &\Leftrightarrow z_G\left(\frac{1}{2} + i\right) = -\frac{1}{2} - 2 \\ &\Leftrightarrow z_G = -1 + 2i \end{aligned}$$

3\. a) $z' + i = \dfrac{-iz-2}{z+1} + i = \dfrac{-iz-2+iz+i}{z+1} = \dfrac{-2+i}{z+1}$

$z' + i = \dfrac{-2+i}{z+1}$

En passant au module, on a :

$|z' + i| = \left|\dfrac{-2+i}{z+1}\right| = \dfrac{|-2+i|}{|z+1|} = \dfrac{\sqrt{5}}{|z+1|}$.

D'où $|z' + i||z + 1| = \sqrt{5}$.

3\. b) $M \in \mathcal{C}(A\,;\,2) \Leftrightarrow AM = 2$

$\Leftrightarrow |z + 1| = 2$

Or d'après la question 3.a) $|z' + i||z + 1| = \sqrt{5}$.

Donc $|z + 1| = 2 \Leftrightarrow |z' + i| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow CM' = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow M' \in \mathcal{C}(C\,;\,\dfrac{\sqrt{5}}{2})$.

4\. a) *pour tout point* $M \neq A$ *et* $M \neq B$, *on a :*

$z' = \dfrac{-iz-2}{z+1} = \dfrac{-i(z-2i)}{z+1}$.

Donc $|z'| = \left|\dfrac{-iz-2}{z+1}\right| = \dfrac{|-i(z-2i)|}{|z+1|} = \dfrac{|-i||(z-2i)|}{|z+1|} = \dfrac{|z_M - z_B|}{|z_M - z_A|}$.

Et comme $|z'| = OM'$; $|z_M - z_B| = BM$; $|z_M - z_A| = AM$ *alors* $OM' = \dfrac{BM}{AM}$.

4\. b) *M' est sur le cercle trigonométrique* $OM' = 1$

$OM' = 1 \Leftrightarrow \dfrac{BM}{AM} = 1$

$\Leftrightarrow BM = AM$

$\Leftrightarrow$ *M appartient à la médiatrice de [AB]*

(D) est donc la médiatrice de [AB].

5\. a) $z' = \dfrac{-iz-2}{z+1} = \dfrac{-i(z-2i)}{z+1}$.

$arg(z') = arg\left(\dfrac{-iz-2}{z+1}\right) = arg\left(\dfrac{-i(z-2i)}{z+1}\right)$

$= arg(-i(z-2i) - arg(z+1) + 2k\pi,\ k\mathbb{Z}$

$= arg(-i) + arg(z-2i) - arg(z+1) + 2k\pi,\ k\mathbb{Z}$

$= -\dfrac{\pi}{2} + mes\,(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

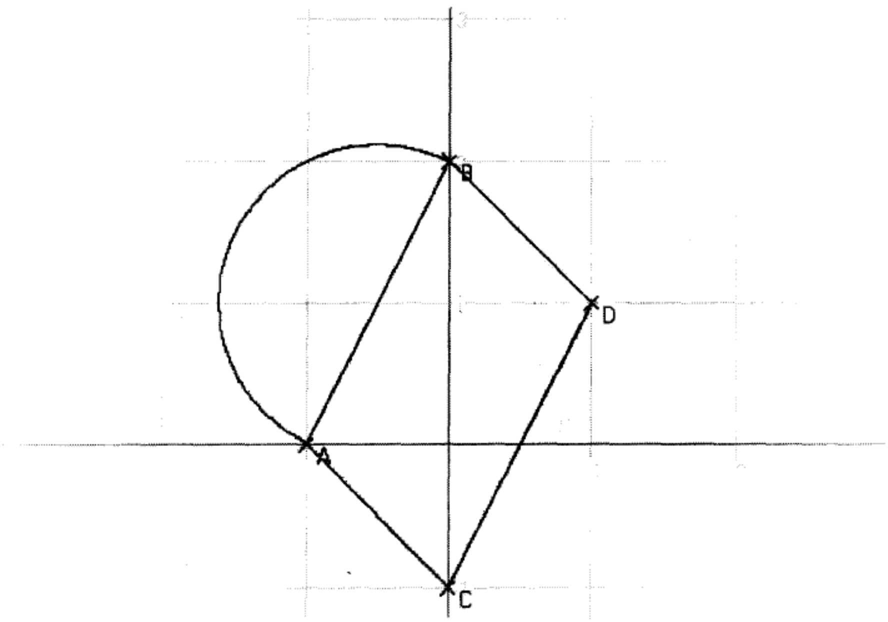
$arg(z') = mes\,(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

5. b) $z' \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow arg(z') = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow Mes\,(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) - \frac{\pi}{2} = 0$

$\Leftrightarrow Mes\,(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow$ M appartient au demi-cercle (Γ) de diamètre [AB] tel que l'arc $\overset{\frown}{BA}$ soit orienté dans le sens positif (voir construction).



EXERCICES

Exercice 2.21

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
Soit les points A , B , C et D du plan d'affixes respectives -1 ; $2i$; $-i$ et $1 + i$.
Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Exercice 2.22

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
On considère les points E , F et G d'affixes respectives $1 + 2i$; $3 - i$; et $-1 + 5i$.
Démontrer que le point E est le milieu du segment [GF].

Exercice 2.23

Soit les points A et B d'affixes respectives $-1 + i$ et $2 + 2i$.
1. Déterminer et construire l'ensemble (Γ_1) des points M du plan d'affixe z tels que : $|z + 1 - i| = 3$.
2. Déterminer et construire l'ensemble (Γ_2) des points M du plan d'affixe z tels que :

$|z + 1 - i| = |z - 2 - 2i|$.

2. Déterminer et construire l'ensemble (Γ_3) des points M du plan d'affixe z tels que :
$|i\bar{z} - 2i + 2| = 3$.

Exercice 2.24

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par $P(z) = z^4 - z^3 + z - 1$.

1.a) Montrer que P(z) se met sous la forme $P(z) = (z - 1)Q(z)$ où Q est un polynôme à déterminer.

b) Ecrire Q(z) sous la forme $Q(z) = (z + 1)R(z)$ où R est un polynôme que l'on déterminera.

2. Résoudre dans l'ensemble % des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

3. On appelle α la solution de partie imaginaire strictement positive. Calculer α^2 α^3 α^4 α^5 α^6 puis α^{2004}.

Exercice 2.25

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.
Soit A , B , C et D les points du plan d'affixes respectives :
$z_A = 2 - 2i$; $z_B = -1 + 7i$; $z_C = 4 + 2i$; $z_D = -4 - 2i$.

1. Placer ces points dans le repère.
2. On pose $Q_1 = \dfrac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$ et $Q_2 = \dfrac{Z_B - Z_D}{Z_A - Z_D}$.
   a) Calculer les nombres complexes Q_1 et Q_2 sous forme algébrique.
   b) En déduire que les points A , B , C et D sont cocycliques.
3. Soit Ω le point d'affixe $-1 + 2i$. Démontrer que Ω est le centre du cercle passant par les points A , B , C et D.

Exercice 2.26

On donne dans %, l'équation (E) : $z^4 - 2z^3 - 8iz + 16 = 0$.

1. Vérifier que $-2i$ est une solution de (E).
2. Démontrer que (E) admet une soltion réelle.
3. Déterminer les nombres complexes a, b et c pour que :
   $z^4 - 2z^3 - 8iz + 16 = (z - 2)(z + 2i)(az^2 + bz + c)$.
4. Résoudre l'equation (E).
5. Le plan est muni d'un repère orthnormé direct (O, I, J). Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -2i$; $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_C = -\sqrt{3} + i$.

a) Ecrire z_B et z_C sous forme trigonométrique.

a) Vériefier que z_A ; z_B et z_C sonr les racines cubiques de 8i.

c) Le triangle ABC est inscrit dans un cercle (C). Déterminer le centre et le rayon de ce (C), puis vérifier que le point D d'affixe 2 appartient à (C).

d) Calculer la mesure de chaque côté du triangle ABC.

Exercice 2.27

1. Résoudre dans % l'equation : $z^2 - 3z + 3 - i = 0$.
2. On pose $P(z) = z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i$.

a) Vérifier que $P(-1) = 0$.

b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z + 1)(az2 + bz + c)$.

c) Préciser tous les zéros de P.

3. Dans le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J), on donne A(0 ; 2) ; B(2 ; 1) ; C(1 ; – 1) et D(–1 ; 0).

a) Faire une figure (unité graphique : 1 cm).

b) Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

4.a) Calculer l'affixe du centre K de ABCD.

b) Déterminer l'affixe de E graphiquement puis par le calcul.

5. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe ztels que $|2i\bar{z} - 2 - 4i| = 2\sqrt{5}$.

Exercice 2.28

1. On considère dans % l'équation (E) : $z^3 - 7z^2 + (13 + 16i)z + 9 - 12i = 0$.

a) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure zo que l'on précisera.

b) Résoudre l'équation (E).

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), on considère les points A, B et C d'affixes respectives : i ; 1 + 2i et 6 – 3i.

a) Placer les points A, B et C puis démontrer que ABC est un triangle rectangle.

b) Démontrer que l'affixe du point D, image de B par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 4 est : 5 + 2i.

c) Démontrer que les points A, B, C et D appaartiennent à un même cercle (C) dont précisera le centre et le rayon.

Exercice 2.29

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e_1} ; \vec{e_2})$ d'unité graphique 2 cm. A est le point d'affixe -2 – i. On considère l'application f du plan $\mathcal{P}$ privé de A dans $\mathcal{P}$, qui à tout point M du plan distinct de A associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-i}{z+2+i}$.

On pose z = x + iy avec x et y des nombres réels.

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
2. En déduire que l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixe z tel que z' soit imaginaire pur, est le cercle de centre le point K(-1 ; 0), de rayon $\sqrt{2}$, privé du point A.
3. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z tels que z' soit un nombre réel.
4. Construire les ensembles (Γ) et (E) dans le repère$(O ; \vec{e_1} ; \vec{e_2})$.

PARTIE 3 : NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

I- Présentations

Dans cette partie on suppose le plan complexe muni d'un repère orthogonal direct (O, I, J).

1. Définition

On appelle transformations du plan toute application du plan dans lui-même.

2. Transformations usuelles

Translations, symétries centrales, symétries axiales, homothéties, les rotations et les similitudes directes

II- Symétries particulières

1. Symétrie par rapport à l'axe des abscisses - Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

Propriétés

L'écriture complexe de la symétrie par rapport à l'axe (OI) est :

$z' = \bar{z}$

L'écriture complexe de la symétrie par rapport à l'axe (OJ) est :

$z' = -\bar{z}$

2. Symétrie centrale

Propriétés

L'écriture complexe de la symétrie centrale par rapport au point Ω d'affixe ω est :

$z' = -z + 2\omega$.

En particuliers, l'écriture complexe de la symétrie centrale par rapport à l'origine O du repère est :

$z' = -z$

III- Similitudes planes directes

1. Définition

On appelle similitude directe du plan, toute transformation dont l'écriture complexe est de la forme :

$z' = az + b$ où a∈%* et b∈% .

2. Nature et éléments caractéristiques d'une similitude

Soit f une transformation du plan dont l'écriture complexes est : $z' = az + b$ avec a∈%* et b∈% .

Conditions sur a et b			Ecriture complexe	Nature et caractéristiques de la transformation f
$a \in \mathbb{R}^*$	$a = 1$	$b = 0$	$z' = z$	f est l'**identité** du plan.
		$b \neq 0$	$z' = z + b$	f est la **translation** de vecteur d'affixe b.
	$a \neq 1$	$b = 0$	$z' = az$	f est l'**homothétie** de centre O et rapport a.
		$b \neq 0$	$z' = az + b$	f est l'**homothétie** de centre le point d'affixe $b/(1-a)$ et rapport a.
$a \notin \mathbb{R}^*$	$\lvert a\rvert = 1$	$b = 0$	$z' = az$, $a = e^{i\alpha}$	f est la **rotation** de centre O et d'angle de mesure $\arg(a) = \alpha$.
		$b \neq 0$	$z' = az + b$, $a = e^{i\alpha}$	f est la **rotation** de centre le point d'affixe $b/(1-a)$ et d'angle de mesure $\arg(a) = \alpha$.
	$\lvert a\rvert \neq 1$	$b = 0$	$z' = az$	f est la **similitude directe** de centre O, de rapport $\lvert a\rvert$ et de d'angle de mesure arg(a).
		$b \neq 0$	$z' = az + b$	f est la **similitude directe** de centre le point d'affixe $b/(1-a)$, de rapport $\lvert a\rvert$ et de d'angle de mesure arg(a).

3. Propriétés des similitudes

a) Images de figures simples

L'image d'une figure simple par une similitude est une figure de même nature :

- l'image d'une droite est une droite
- l'image d'une demi-droite est une demi-droite
- l'image d'un segment est un segment
- l'image d'un cercle est un cercle
- l'image d'un angle est un angle

b) Conservation

Toute similitude directe conserve :

- le barycentre (en particuliers le milieu d'un segment)
- l'alignement
- l'orientation des angles

- le parallélisme
- l'orthogonalité
- le contact.

c) longueurs et aires

Toute similitude de rapport k multiplie les longueurs par k et les aires par k^2

EXERCICES

Exercice 2.30

Soit A et B les points du plan d'affixes respectives -2i et 1 + i

1. Déterminer l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Soit la droite (D) d'équation $y = x + 2$. Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par la translation t .

Exercice 2.31

Déterminer l'écriture complexe de la transformation f dans chacun des cas suivants :

1. f est la rotation de centre A(3 – i) et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
2. f est l'homothétie de centre Ω(-2 + 5i) et de rapport $-\frac{1}{2}$.
3. f est la symétrie centrale de centre B (1 + i)
4. f est la similitude directe de centre A(2i), de rapport $3\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

Exercice 2.32

Dans chacun des cas suivants, l'écriture complexe de la transformation f est donnée. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

1. $z' = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}z-\sqrt{3}+i$
2. $z' = -\frac{3}{2}z+5(1-i)$
3. $z' = -3iz + 4 - 2i$
4. $z' = z + \frac{1+i}{2}$
5. $z' + 1 - i = e^{i\frac{5\pi}{6}}(z + 1 - i)$
6. $z' - 4 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - 4)$
7. $z' + 3 - i = -5(z + 3 - i)$.

Exercice 2.33

Le plan complexe est muni du repère orthnormé direct (O, I, J) unité graphique : 2 cm.

1. On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 2(1 + i)z + 8(1 + i) = 0$.
 Vérifier que $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 2(1 + i)z + 8(1 + i) = (z + 2)[z^2 - 2(1 + i)z + 8(1 + i)]$.

2.a) Déterminer les raciness carrées du nombre complexe – 8 – 6i.
 b) Résoudre dans l'équation (E_1) : $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - 2(1 + i)z + 8(1 + i) = 0$.
 c) En déduire les solutions de (E).

3. Soient A, B et C les points d'affixes respectives – 2 ; 4i et 2 – 2i.
 a) Faire une figure.
 b) Soit K le milieu du segment [BC]. On considère la similitude directe S de centre A qui transforme B en K.
 Déterminer et construire l'image (C') du cercle (C) de diamètre [AB] par la similitude S.
 c) Déterminer l'écriture complexe de S.

d) Déterminer l'angle et le rapport de S.

STATISTIQUES

On considère une population de n individus sur laquelle on a relevé deux types de valeurs (poids, taille par exemple). On note :

- x_1 ; x_2 ; …… ; x_n les valeurs relevés pour le poids.
- y_1 ; y_2 ; …… ; y_n les valeurs relevés pour la taille.

On pose $X = \{ x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n\}$

$Y= \{ y_1 ; y_2 ; \ldots\ldots ; y_n\}$

$X\times Y = \{(x_1 ; y_1) ; (x_2 ; y_2) ; \ldots\ldots ; (x_n ; y_n)\}$

Les éléments de X×Y forment une série statistiques à deux variables ou simplement une série statistiques double.

On se propose d'étudier s'il existe un lien entre ces deux variables. Ce lien, s'il existe, est-il suffisamment fort pour permettre de faire des prévisions par le calcul ?

I- Présentation d'une série statistique double

1. Présentation linéaire

Lorsque la série statistique présente un faible effectif, on peut simplement utiliser un tableau linéaire pour la présenter.

Exemple :

Le tableau suivant donne l'évolution du prix d'une denrée pour ces six dernières années.

Années	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Prix	2050	2650	3300	3950	4100	4600

Visiblement le prix de la denrée semble dépendre du temps

2. Tableaux à double entrée – Séries marginales

Lorsque l'effectif de la population est élevé, on utilise un tableau à double entrée.

a) Séries non regroupées par classe

Exemple :

Deux examinateurs A et B ont, chacun, interrogé 100 candidats et attribué à chacun candidat une note dans l'ensemble {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}. Les résultats sont consignés dans le tableau à double entrée suivant où X désigne la variable « note attribuée par l'examinateur A » et Y la variable « note attribuée par l'examinateur B ».

Y \ X	0	1	2	3	4	5	**Total**
0	1	2	1	0	0	0	**4**
1	4	5	3	1	0	0	**13**
2	0	4	15	13	5	0	**37**
3	0	2	10	7	3	3	**25**
4	0	0	3	6	4	3	**16**
5	0	0	0	2	1	2	**5**
Total	**5**	**13**	**32**	**29**	**13**	**8**	**100**

Définition : On appelle série marginale, la série statistique associée à l'une des variables X ou Y.

Série statistique de X

X	0	1	2	3	4	5
Effectif	5	13	32	29	13	8

Série statistique de Y

Y	0	1	2	3	4	5
Effectif	4	13	37	25	16	5

a) Séries regroupées par classe

On regroupe une série par classe lorsque pour un effectif total élevé, on a de faibles effectifs pour la plupart des modalités.

Exemple :

Le tableau à double entrée suivant, donne la taille Y (cm) et le poids X (en kg) de 100 élèves de terminale.

Y \ X	[156 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[
[46 ; 50[	16	8	2	0
[50 ; 55[	3	18	6	1
[55 ; 60[	1	9	9	6
[60 ; 65[	0	3	8	15

On complète le tableau en y ajoutant le centre de chaque classe ; on obtient alors deux séries statistiques marginales comme suit :

Centres

		158	162,5	167,5	172,5
	Y \ X	[156 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[
48	[46 ; 50[	16	8	2	0
52,5	[50 ; 55[	3	18	6	1
57,5	[55 ; 60[	1	9	9	6
62,5	[60 ; 65[	0	3	8	15

Les séries marginales sont :

Série statistique de X

X	158	162,5	167,5	172,5
Effectif	26	28	25	21

Série statistique de Y

Y	48	52,5	57,5	62,5
Effectif	20	38	25	17

II- Etude de séries statistiques doubles

Nous allons baser notre étude sur l'exemple suivant :

<u>Exemple :</u>

Le tableau suivant, présente l'évolution du taux de chômage, en pourcentage de la population active dans un pays de 1950 à 1996.

Années	1950	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Rang des années x_i	0	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Taux y_i	1,1	0,8	1,6	1,2	1,3	2	2,6	2,4	3,1	3,4

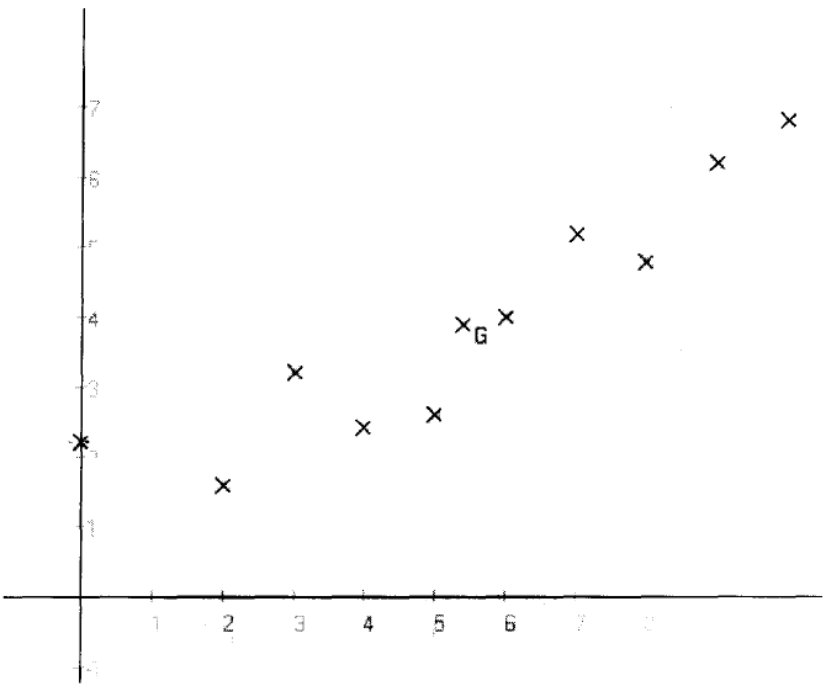
1. Nuage de point

a) Définition

Dans un repère orthogonal bien choisi, l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$, avec $1 \leq i \leq n$, est appelé le nuage de points associé à cette série statistiques à deux variables.

b) Représentation graphique

Représentons la série ci-dessus dans un repère orthogonal pour lequel :
1 cm représente 5 années sur l'axe des abscisses,
1 cm représente un taux de chômage de 0,5% sur l'axe des ordonnées.



c) Point moyen

Définition

Notons $\bar{x}$ la moyenne des valeurs x_i et $\bar{y}$ la moyenne des valeurs y_i. Avec les notations précédentes, on a :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \text{ et } \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$$

Le point G de coordonnées $(\bar{x}\ ;\ \bar{y})$ est appelé le point moyen du nuage de points associé à cette série statistique à deux variables.

Exemple :

Avec la série ci-dessus, on a :

$$\overline{x} = \frac{0+10+15+20+25+30+35+40+45+50}{10} = \frac{270}{10} = 27$$

$$\overline{y} = \frac{y_1+1{,}1+0{,}8+1{,}6+1{,}2+1{,}3+2+2{,}6+2{,}4+3{,}1+3{,}4}{10} = \frac{19{,}5}{10} = 1{,}95$$

Donc le point moyen G a pour coordonnées (27 ; 1,95). Il est indiqué sur le graphique précédent.

2. Ajustement du nuage de points par une droite

a) Le principe de l'ajustement

Lorsque le nuage de points associé à une série double a une forme approximativement rectiligne, on peut procéder à un ajustement affine en traçant une droite passant le plus près possible de ces points et qui donnera les meilleurs résultats.

Dans le repère choisi, cette droite passe par le point moyen G.

b) La méthode d'ajustement : la méthode des moindres carrés

Validité de l'ajustement

C'est attester que la droite d'ajustement linéaire peut ou non apporter les meilleurs résultats. Pour cela, on calcule le coefficient de corrélation linéaire r qui mesure la force du lien de dépendance entre les deux caractères.

- **Coefficient de corrélation linéaire**

  $r = \dfrac{\mathrm{cov}(X;Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$ où :

  - $\mathrm{cov}(X\,;Y) = \dfrac{1}{n}\sum x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}$
  - $V(X) = \dfrac{1}{n}\sum x_i^2 - \overline{x}^2$ et $V(Y) = \dfrac{1}{n}\sum y_i^2 - \overline{y}^2$

- **Propriétés**
  - On admet que : $-1 \leq r \leq 1$.
  - L'ajustement est considéré comme valide si $|r| > \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$.

- **Remarques**
  - r est positif dans le cas où les variables varient dans le même sens.
  - r est négatif dans le cas où les variables varient en sens contraires.

Exemple

Justifions que l'on peut ajuster le nuage à l'aide d'une droite par la méthode des moindres carrés.
Graphiquement le nuage est approximativement rectiligne, on peut donc envisager de l'ajuster par une droite.
Mais avant, il nous faut valider cette méthode en évaluant le coefficient de corrélation linéaire.

$$\mathrm{cov}(X;Y) = \frac{1}{10}(0\times1{,}1+10\times0{,}8+15\times1{,}6+20\times1{,}2+25\times1{,}3+30\times2+35\times2{,}6+40\times2{,}4+45\times3{,}1+50\times3{,}4)-27\times1{,}95$$
$$= 11{,}85$$

$$V(X) = \frac{1}{10}(0^2+10^2+15^2+20^2+25^2+30^2+35^2+40^2+45^2+50^2)-27^2$$
$$= 231.$$

$$V(Y) = \frac{1}{10}(1{,}1^2+0{,}8^2+1{,}6^2+1{,}2^2+1{,}3^2+2^2+2{,}6^2+2{,}4^2+3{,}1^2+3{,}4^2)-1{,}95^2$$
$$= 0{,}7205.$$

$$r = \frac{11,85}{\sqrt{231 \times 0,7205}} \approx 0,919$$

Lorsque $0,87 \leq |r| \leq 1$, la corrélation entre les deux variables est forte.

c) Droite d'ajustement

- La droite de régression de y en x, a pour équation :
  $y = \frac{cov(X;Y)}{V(X)}(x - \overline{x}) + \overline{y}$.
- La droite de régression de y en x, a pour équation :
  $x = \frac{cov(X;Y)}{V(Y)}(y - \overline{y}) + \overline{x}$.

Exemple

Déterminons une équation de chacune des droites de régression :

La droite de régression de y en x, a pour équation :

$$y = \frac{11,85}{231}(x - 27) + 1,95 = 0,05x - 11,55 \Rightarrow y = 0,05x - 11,55.$$

La droite de régression de y en x, a pour équation :

$$x = \frac{11,85}{0,7205}(y - 1,95) + 27 = 16,45y - 5,08 \Rightarrow x = 16,45y - 5,08.$$

NB : de façon générale, c'est la droite de régression de y en x qui utilisée.

d) Estimations – Erreur d'estimation

Exemple

En utilisant la droite de régression de y en x :

a) Donner une estimation de l'année à partir de laquelle taux de chômage dépassera les 5%.

b) donner une estimation du taux chômage en 2005.

c) En réalité en 2005, le taux de chômage fût de 3,41%. A quelle erreur l'estimation conduit-elle ? Exprimer cette erreur en pourcentage de la valeur réelle.

Solution

a) $y = 0,05x + 0,6 \geq 5 \Rightarrow x \geq 88$ donc l'année est l'an 2038 (1950 + 88)

b) En 2005, $x = 55$. Donc $y = 0,05 \times 55 + 0,6 = 3,35$. En 2005, le taux de chômage à prévoir est de 3,35%.

c) Notons e l'erreur d'estimation. On a :

$$e = \frac{|3,41 - 3,35|}{3,41} \times 100\% \approx 1,76\%$$

Donc l'estimation est acceptable.

Exercices résolus

Exercice 3.1

X_i	1,48	1,45	1,39	1,40	1,36	1,30	1,24	1,18
Y_i	101	104	105	107	108	110	114	115

Le tableau ci-dessus donne les valeurs de deux variables statistiques X et Y.
X représente le cours de la livre sterling par rapport au dollar américain sur une période de l'année 1984 et Y représente le prix, en livre sterling d'un produit.

1. a) Représenter le nuage de points de cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthogonal (1 cm pour 0,02 unités en abscisse et 1 cm pour 0,2 unités en ordonnée).
   On initialisera le repère en (1,1 ; 10).
   b) Placer le point moyen G.
2. Déterminer le coefficient de corrélation entre X et Y. Que peut-on déduire de ce résultat ?
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées. Construire cette droite sur le graphique.
4. Le cours de la livre étant à 1,16 par rapport au dollar, quel prix peut-on prévoir pour le produit étudié ? (On donnera la valeur à l'unité près)

Exercice 3.2

On donne le tableau à double entrée suivant relatif à l'étude de la série double suivante : 56 individus classés sous les deux caractères poids et taille. X désigne le poids en kg et Y la taille en cm.

Y \ X	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60]
[150 ; 155[	9	1	0
[155 ; 160[	18	4	1
[160 ; 165]	5	12	6

1. Déterminer les centres des classes de X et Y.
2. Déterminer la série marginale des centres de classes associée à X puis celle associée à Y.
3. Peut-on réaliser un ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés entre les variables X et Y ? Justifier votre réponse.

Résolution

Exercice 3.1

1. a) Nuage des points (voir graphique)

1. b) Point moyen G

$$\overline{X} = \frac{1,48+1,45+1,40+1,38+1,36+1,30+1,24+1,18+1,15}{8} = \frac{10,64}{8} = 1,33$$

$$\overline{Y} = \frac{101+104+105+107+108+114+115+118+}{8} = \frac{872}{8} = 109$$

Pour la position de G voir le graphique.

2. Calcul du coefficient de corrélation linéaire :

$$V(X) = \frac{1,48^2+1,45^2+1,40^2+1,38^2+1,36^2+1,24^2+1,18^2+1,15^2}{8} - \overline{X}^2$$

$$= \frac{14,2594}{8} - 1,33^2 = 0,013525$$

$$V(Y) = \frac{101^2 + 104^2 + 105^2 + 107^2 + 108^2 + 114^2 + 115^2 + 118^2 +}{8} - \overline{Y}^2$$

$$= \frac{95300}{8} - 109^2 \ = 31{,}5$$

$$Cov(X,\ Y) = \frac{1{,}48 \times 101 + 1{,}45 \times 104 + 1{,}4 \times 105 + 1{,}38 \times 107 + 1{,}36 \times 108 + 1{,}24 \times 114 + 1{,}18 \times 115 + 1{,}15 \times 118}{8} - \overline{X} \times \overline{Y}$$

$$= \frac{1154{,}58}{8} - 144{,}97 = -0{,}6475$$

Le coefficient de corrélation linéaire r

$$r = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{-0{,}6475}{\sqrt{0{,}013525 \times 31{,}5}} \approx 0{,}992$$

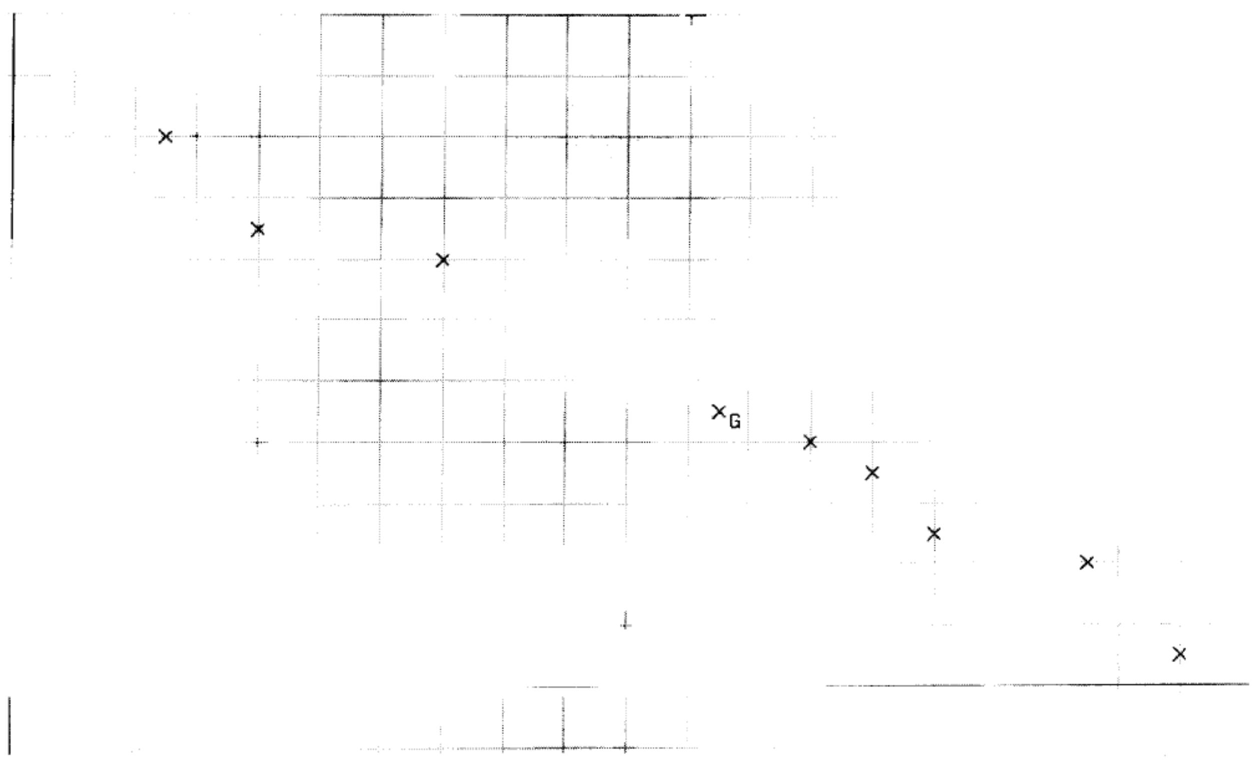
Ce résultat montre qu'il y a une forte corrélation entre X et Y. d'où qu'un ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés est envisageable.

3. $Y = \frac{cov(X,Y)}{V(X)}\ (X - \overline{X}) + \overline{Y}$.

$$= \frac{-0{,}6475}{0{,}013525}\ (X - 1{,}33) + 31{,}5$$

$$= -47{,}87X + 172{,}67$$

4. Selon l'ajustement, X = 1,16 implique que Y = 117,1
Le prix du produit à prévoir est donc117,1 livres sterling.



Exercice 3.2

1. Le tableau suivant donne les centres des classes et leurs effectifs respectifs :

			Centres des classes de X			
			47,5	***52,5***	***57,5***	
		X / Y	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60]	*Effectifs de Y*
Centres des classes de Y	***152,5***	[150 ; 155[	9	1	0	*10*
	157,5	[155 ; 160[	18	4	1	*23*
	162,5	[160 ; 165]	5	12	6	*23*
		Effectifs de X	*32*	*17*	*7*	

2. Séries marginales
Série marginale associée à X

Centres x_i	*47,5*	*52,5*	*57,5*
Effectifs n_i	*32*	*17*	*7*

Série marginale associée à Y

Centres y_j	*152,5*	*157,5*	*162,5*
Effectifs n_j	*10*	*23*	*23*

3. a) Calcul des moyennes, variances, covariance et coefficient de corrélation linéaire

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{32\times 47{,}5 + 17\times 52{,}5 + 7\times 57{,}5}{56} = \frac{2815}{56} \approx 50{,}27$$

$$V(X) = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \overline{X}^2 = \frac{32\times 47{,}5^2 + 17\times 52{,}5^2 + 7\times 57{,}5^2}{56} - \left(\frac{2815}{56}\right)^2 \approx 12{,}43$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum n_j x_j}{N} = \frac{10\times 152{,}7 + 23\times 157{,}5 + 23\times 162{,}5}{56} = \frac{8885}{56} \approx 158{,}66$$

$$V(Y) = \frac{\sum n_j y_j^2}{N} - \overline{Y}^2 = \frac{10\times 152{,}7^2 + 23\times 157{,}5^2 + 23\times 162{,}5^2}{56} - \left(\frac{8885}{56}\right)^2 \approx 13{,}39$$

Pour le calcul de la covariance utilisons le tableau suivant :

x_i	y_i	n_{ij}	$n_{ij}x_iy_i$
47,5	*152,5*	*9*	*65193,75*
47,5	*157,5*	*18*	*134662,5*
47,5	*162,5*	*5*	*38593,75*
52,5	*152,5*	*1*	*8006,25*

52,5	*157,5*	*4*	*33075*
52,5	*162,5*	*12*	*102375*
57,5	*152,5*	*0*	*0*
57,5	*157,5*	*1*	*9056,25*
57,5	*162,5*	*6*	*56062,5*
Total			***447025***

$$Cov(X,\ Y) = \frac{\sum n_{ij}x_i y_i}{N} - \overline{X} \times \overline{Y} = \frac{447025}{56} - \frac{2815}{56} \times \frac{8885}{56} \approx 7{,}06$$

Coefficient de corrélation linéaire :

$$r = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = 0{,}55.$$

Le lien entre les deux variables X et Y est faible. Tout ajustement linéaire pourrait conduire à des prévisions erronées.

EXERCICES

Exercice 3.3

A la fin de l'année, tous les déchets de la d'Abidjan devront être traités par des déchetteries. Pour cela une étude a été faite sur l'expérience de la ville de Pretoria en Afrique du Sud.
Le tableau ci-dessus donne l'évolution du nombre de déchetteries à Pretoria depuis l'année 2000.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année X_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de déchetteries Y_i	12	18	33	53	69	83	95

1. Représenter le nuage de points associé à cette série dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour 1 en abscisse puis 1 cm pour 5 en ordonnée.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen puis le placer sur le graphique.
3. On se propose d'évaluer le nombre de déchetteries à la fin de 2012.
   a) Un ajustement par la méthode des moindres carrés permet-il de faire des estimations fiables ? justifier votre réponse.
   b) Déterminer une équation de la droite de régression linéaire de Y en X.
   c) Donner une estimation du nombre de déchetteries en 2012.
   d) Les experts estiment qu'il faudrait 200 déchetteries pour traiter les déchets. En supposant que l'évolution se poursuit au même rythme, évaluer l'année au de laquelle ce nombre serait atteint.

Exercice 3.4

En Côte D'Ivoire, les factures de CIE (factures d'électricité) sont distribuées tous deux (2) mois.
Monsieur Kouadio a noté régulièrement l'évolution des taxes sur ses factures.
Le tableau suivant donne les taxes sur les années 2008 et 2009.

Dates	02-08	04-08	06-08	08-08	10-08	12-08	02-09	04-09	06-09	08-09	10-09	12-09
Rang X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Taxes Y	675	710	715	755	760	770	820	820	835	895	920	955

1. Représenter graphiquement cette série statistique dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 1 cm pour 1 en abscisse puis 1 cm pour 50 en ordonnée.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen puis le placer sur le graphique.
3. Justifier que l'on peut ajuster linéairement cette série par la méthode des moindres carrées.
4. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X puis construire cette droite sur le graphique.
5. A l'aide de la droite :
   a) Déterminer une estimation des taxes en juin 2010.
   b) Déterminer la date à laquelle ces taxes vont-elles dépasser 1500.

Exercice 3.5

Voici le tableau donnant l'évolution des surfaces cultivables (en milliers d'hectares) dans un pays.

Année	1985	1990	1995	2000	2005
Rang de l'année X	0	5	10	15	20
Superficie en milliers d'ha Y	805	629,7	534,3	431	218

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à cette série statistique dans un repère orthogonal d'unités graphiques : en abscisse 0,5 cm pour une unité puis 2 cm pour 100 milliers d'hectares en ordonnée.
2. a) Déterminer les coordonnées du point moyen puis le placer sur le graphique.
   b) Calculer la variance de X, la variance de Y et la covariance de X et Y.
   c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. en donner le résultat au millième.
   d) Un ajustement linéaire est-il justifié ?
   e) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés. Tracer cette droite sur le graphique.
3. Quelle estimation, en milliers d'hectares, de la surface cultivable en 2004 peut-on faire à partir de la droite de régression ? En donner l'arrondi au dixième.
4. En réalité, en 2004 les surfaces cultivables avaient une superficie de 266, 2 milliers d'hectares. A quelle erreur l'estimation conduit-elle ? Exprimer cette erreur en pourcentage de la valeur réelle.

EQUATIONS DIFERENTIELLES

I- Généralités : vocabulaire et notation

- Une relation entre une variable x, une fonction f de x et au moins l'une des dérivées successives f', f'', f''', … , est appelée équation différentielle.

Exemple :
$f'(x) + 3f(x) = 2x^2+1$
$f''(x) - 9f(x) = 0$.

- Une équation différentielle est dite d'ordre n lorsque le plus grand ordre des dérivées intervenant dans cette équation est n.

Exemple :
L'équation $f'(x) + 3f(x) = 2x^2+1$ est une équation différentielle d'ordre 1 (à cause de f').
L'équation $f''(x) + 9f'(x) - f(x) = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2 (à cause de f'').

- Toute fonction vérifiant une équation différentielle sur un intervalle ouvert K est appelée solution sur K de cette équation différentielle.

- Intégrer ou résoudre une équation différentielle sur un intervalle K, c'est déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sur K.

- la courbe représentative d'une solution d'une équation différentielle est appelée courbe intégrale de cette équation différentielle.

II- Résolution de quelques types d'équations différentielles

1. Tableau récapitulatif

Types d'équations différentielles	Solutions générales sur $\mathbb{R}$
$f' = af$, $a \in \mathbb{R}$	$f(x) = ke^{ax}$ $(k \in \mathbb{R})$
$f'' = 0$	$f(x) = Ax + B$ $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$
$f'' - \omega^2 f = 0$, $\omega \in \mathbb{R}^*$	$f(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$
$f'' + \omega^2 f = 0$, $\omega \in \mathbb{R}^*$	$f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

2. Propriétés

a) Soit (E) l'équation différentielle $y' = ay$ $(a \in \mathbb{R})$; x_0 et y_0 des nombres réels.
Il existe une unique solution f de telle que $f(x_0) = y_0$.

b) Soit (E) l'équation différentielle $y'' + ay = 0$ $(a \in \mathbb{R})$; x_0, y_0 et z_0 des nombres réels.
Il existe une unique solution f de (E) telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

Exercice 11.1 résolu

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle suivante : (E) : $y' = 2y$.
2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle suivante : (E') : $3y' + 6y = 0$.
   b) En déduire la solution de (E) vérifiant $f(0) = 2$.

Résolution

1) Les solutions sur $\mathbb{R}$ *de l'équation (E) sont les fonctions* $f : x \mapsto ke^{2x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

2.a) $(E') \Leftrightarrow y' = -2y$, *donc les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation (E') sont les fonctions* $f : x \mapsto ke^{-2x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

b) $f(0) = 2 \Leftrightarrow ke^{-2\times 0} = 2 \Leftrightarrow k = 2$. *Donc la solution est la fonction de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 2e^{-2x}$.

Exercice 11.2 résolu

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle suivante : (E) : $y'' = 4y$.
2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle suivante : (E') : $y'' + 25y = 0$.
   b) En déduire la solution de (E) vérifiant $f(0) = 2$ et $f'(0) = -10$.

Résolution

1. $(E) \Leftrightarrow y'' - 4y = 0 \Leftrightarrow y'' - 2^2y = 0$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ *de l'équation (E) sont les fonctions* $f : x \mapsto Ae^{2x} + Be^{-2x}$ $(A \in \mathbb{R}$ *et* $B \in \mathbb{R})$.

2. a) $(E') \Leftrightarrow y'' + 5^2y = 0$, *donc les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation (E') sont les fonctions* $f : x \mapsto A\cos 5x + B\sin 5$ *avec* $(A \in \mathbb{R}$ *et* $B \in \mathbb{R})$.

b) On a : $f'(x) = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x$.

$f(0) = 2$ *et* $f'(0) = 1 \Leftrightarrow A = 2$ *et* $B = -2$.

Donc la solution est la fonction de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 2\cos 5x - 2\sin 5x$

$$= 2\sqrt{2}\sin(5x - \frac{\pi}{4})$$

Exercice 11.3 résolu

On considère l'équation différentielle suivante : (E) : $f''(x) + 4f(x) = 12x$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction $g : x \mapsto ax + b$ soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. a) Démontrer qu'une fonction h est solution de (E)si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $f''(x) + 4f(x) = 0$.
   b) Résoudre (E')
   c) En déduire les solutions de (E).

Résolution

1. on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = a$ *et* $g''(x) = 0$.

Donc pour tout x, $g''(x) + 4g(x) = 0 + 4\times(ax + b) = 12x \Leftrightarrow 4ax + 4b = 12x$

$$\Leftrightarrow 4a = 12 \text{ et } 4b = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 3 \text{ et } b = 0.$$

g est donc la fonction définie par $g(x) = 3x$. ***(On dit que g est une solution particulière de (E)).***

2. a) On a que g est solution de (E) c'est-à-dire $g''(x) + 4g(x) = 12x$

Alors h est solution de (E) $\Leftrightarrow h''(x) + 4h(x) = 12x$

$$\Leftrightarrow h''(x) + 4h(x) = g''(x) + 4g(x)$$
$$\Leftrightarrow h''(x) - g''(x) + 4[h(x) + g(x)] = 0.$$
$$\Leftrightarrow (h - g)'' + 4(h + g) = 0.$$
$$\Leftrightarrow h - g \text{ est solution de } f''(x) + 4f(x) = 0.$$

b) $(E') : f''(x) + 4f(x) = 0$.

$(E') \Leftrightarrow y'' + 2^2y = 0$, *donc les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation (E') sont les fonctions* $f : x \mapsto A\cos 2x + B\sin 2x$, *avec* $(A \in \mathbb{R}$ *et* $B \in \mathbb{R})$.

c) les solutions de (E) sont les fonctions h de vers définies par :

$h(x) = f(x) + g(x)$

$= A\cos 2x + B\sin 2x + 2x$. ***(On dit que h est la solution générale de l'équation (E).***

EXERCICES

Exercice 11.4

Intégrer chacune des équations différentielles suivantes puis déduire celle qui vérifie la condition initiale indiquée.

1. $y' = 4y$; $y(1) = 2e$.
2. $y' + 3y = 0$; $y(-1) = e$.
3. $y'' = y$; $y(0) = 2$ et $y'(0) = 4$.
4. $y'' + 36y = 0$; $y(0) = \sqrt{3}$ et $y'(0) = 6$.
5. $y'' = 0$; $y(1) = 2$ et $y'(1) = 1$.

Exercice 11.5

On considère l'équation différentielle suivante : $y' - 2y = 2x + 1$

1. Vérifier que la fonction $g : x \mapsto -x - 1$ est une solution de (E).
2. a) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$.

   b) Résoudre (E')

   c) En déduire les solutions de (E). Puis la solution h de (E) qui vérifie $h(0) = 1$.

Exercice 11.6

On considère l'équation différentielle suivante : $y'' + 9y = x^2 + x + 1$.

1. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction $g : x \mapsto ax^2 + bx + c$ soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 9y = 0$.

   b) Résoudre (E')

   c) En déduire les solutions de (E). Puis la solution h de (E) qui vérifie $h(0) = \sqrt{3}$ et $h'(x) = 6$.