

République du Niger

Ministre de l'Education Nationale

Direction Régionale de l'éducation Nationale de Dosso

Direction Départementale de l'Education Nationale de Tibiri

UP : Mathématique Terminale D

Nouveau Programme 2018

THEME N°1 : ORGANISATION DES CALCULS ; CALCULS NUMERIQUE

CHAPITRE 1 : NOMBRES COMPLEXES

Objectifs : A la fin de ce chapitre, l'élève doit :

- ✓ Définir le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes
- ✓ Donner les différentes formes d'écriture d'un nombre complexe
- ✓ Représenter graphiquement un nombre complexe
- ✓ Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe
- ✓ Interpréter le module et l'argument de $z_B - z_A$ et de $\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}$, dans les problèmes de distance et d'angle (alignement, cocyclicité)
- ✓ Reconnaître et utiliser les formules de Moivre et d'Euler
- ✓ Linéariser un polynôme trigonométrique
- ✓ Déterminer et interpréter géométriquement la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe
- ✓ Résoudre des équations du second degré dans $\mathbb{C}$
- ✓ Résoudre une équation du 3^{ème} degré connaissant une racine

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

I. Différentes formes d'un nombre complexe

Activité N°1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $(E_1): 2x^2 - 3x - 2 = 0$; $(E_2): x^2 + 1 = 0$

1. Définition

Soit a et b deux nombres réels

Il existe un nombre imaginaire i , vérifiant : $i^2 = -1$. Le nombre $z = a + ib$ est appelé nombre complexe ; a est appelé la partie réelle de z et est noté $\text{Re}(z)$ et b est appelé la partie imaginaire de z et est noté $\text{Im}(z)$. Si $b = 0$, alors $z = a$ est un réel ; Si $a = 0$, alors $z = ib$ est imaginaire ; Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $z = ib$ est appelé imaginaire pur.

L'ensemble des nombres : Imaginaires est noté $i\mathbb{R}$; Imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}^*$; Complexes est noté : $\mathbb{C}$

NB : On a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2. Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes.

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}; \quad z = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \text{Im}(z) = 0$$

3. Forme algébrique d'un nombre complexe : Application aux calculs dans $\mathbb{C}$

i. Définition

L'écriture $a + ib$ est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z .

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$.

- On appelle **somme** de z et z' , le nombre complexe noté $z + z'$ et définit par :

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = a + a' + i(b + b')$$

- On appelle **produit** de z et z' , le nombre complexe noté zz' et définit par :

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$$

- En posant $z \neq 0$, on appelle **inverse** de z et on note $\frac{1}{z}$, le nombre complexe défini par :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

- Puissance entière d'un nombre complexe. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$z^0 = 1; \quad 0^n = 0; \quad z^{n+1} = z^n \times z; \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

- Puissances entières de i . Soit $n \in \mathbb{N}$. $i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$

ii. Propriétés (produit nul)

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$

$$zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z' = 0$$

Pour tout nombre complexe non nuls u et v , pour tout nombre entier naturel n plus grand que 1, on a :

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^k$$

C'est la formule du binôme de Newton.

NB : les C_n^k peuvent être déterminés à l'aide du triangle de Pascal.

C_n^k		k									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	0	1									
	1	1	1								
	2	1	2	1							
	3	1	3	3	1						
	4	1	4	6	4	1					
	5	1	5	10	10	5	1				
	6	1	6	15	20	15	6	1			
	7	1	7	21	35	35	21	7	1		
	8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
	9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

iii. **Exercice d'application** On donne : $z = 1 + 2i$; $z' = 3 - 2i$

- Calculer : $z + z'$; $z - z'$; $z \times z'$; $\frac{z}{z'}$
- En appliquant le triangle de Pascal, déterminer : z^4 et z'^5

4. Conjugué d'un nombre complexe

1. **Définition** :

On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$, le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que :

$$\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z) \text{ et } \operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$$

C'est-à-dire : $\bar{z} = a - ib$

2. **Propriétés** :

Pour tous nombres complexes z et z' ,

$$\begin{aligned} \bar{\bar{z}} &= z; & z + \bar{z} &= 2\operatorname{Re}(z); & z - \bar{z} &= 2i\operatorname{Im}(z); \\ z\bar{z} &= [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2; & z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \bar{z} = z; \\ z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \bar{z} = -z; & \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z}'; \\ \overline{zz'} &= \bar{z} \times \bar{z}'; & -\bar{z} &= \overline{-z}; & \overline{z^n} &= (\bar{z})^n; \\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \frac{1}{\bar{z}} \quad (z \neq 0); & \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0) \end{aligned}$$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

3. **Exemple :** On donne : $z = 1 + i$ et $z' = 2 - 3i$

Comparer : $\bar{z}$ et z ; $\bar{z}^3$ et $(\bar{z})^3$; $\overline{z + z'}$ et $\bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{zz'}$ et $\bar{z} \times \bar{z'}$

5. Représentation géométrique : Affixe d'un point, d'un vecteur

Activité N°2 :

- Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les points A et B images respectives des nombres complexes $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = -4 + 3i$
- Représenter les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ images respectives des nombres complexes

$$z_3 = 2 - i \text{ et } z_4 = 3 + i$$

Retenons : le plan $(\mathcal{P})$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs de $(\mathcal{P})$.

- L'application $f: \mathbb{C} \rightarrow (\mathcal{P})$
 $z = x + iy \mapsto M\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ est une bijection. $M\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ est appelé point image de $z = x + iy$ et z est appelé affixe du point $M\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ on le note: z_M
- L'application $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{V}$
 $z = x + iy \mapsto \vec{u}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ est une bijection. $\vec{u}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ est appelé vecteur image de $z = x + iy$ et z est appelé affixe du vecteur $\vec{u}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ on le note: $z_{\vec{u}}$
- Le plan $(\mathcal{P})$ muni du repère orthonormé direct est appelé plan complexe
- Les droites de repère $(O; \vec{u})$ et $(O; \vec{v})$ sont respectivement appelé axe réel et axe imaginaire

6. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1. Module d'un nombre complexe

a. Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

On appelle module de z , et on note $|z|$, le nombre réel défini par :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

b. Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes et n un entier relatif

$$\begin{array}{lll} |\bar{z}| = |z|; & |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0; & |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|; \\ |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|; & |z + z'| \leq |z| + |z'|; & |z^n| = |z|^n \\ |z \times z'| = |z| \times |z'|; & \left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|} \quad (z' \neq 0); & \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0). \end{array}$$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

c. Interprétation géométrique du module

- ✓ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé d'origine O. pour tous points M et M' d'affixes respectives z et z' , on a :

$$OM = |z| \text{ et } MM' = |z' - z|$$

- ✓ Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
- ✓ A, B, C et D étant quatre points distincts du plan, alors $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$
- ✓ ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$
- ✓ ABC est un triangle isocèle en A si et seulement si $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$
- ✓ ABC est un triangle rectangle isocèle en A si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$
- ✓ ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

2. Argument d'un nombre complexe

Activité N°3 : Soit $z_M = 3 + 3i$.

- Placer le point M dans le repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$
- Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \widehat{OM})$. On notera θ cette mesure

a. Définition

On appelle argument de z , toute mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \widehat{OM})$. On le note : $\arg(z)$

Si θ est un argument de z , alors on écrit $\arg(z) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b. Propriétés

Soit $z \in \mathbb{C}^*, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \quad \arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) . Soit A et B deux points du plan.

$$\arg(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

A, B, C et D sont quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$

$$\arg(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

a. Définition

On appelle forme trigonométrique de z l'écriture $|z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $|z|$ est le module de z et θ un argument de z .

b. Propriétés

Si $z \in \mathbb{C}^*$ et θ un argument de z , alors :
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = |z|\cos\theta \\ \operatorname{Im}(z) = |z|\sin\theta \end{cases}$$

$a > 0$ et $b > 0$	$a > 0$ et $b < 0$	$a < 0$ et $b > 0$	$a < 0$ et $b < 0$
$\cos\theta > 0$ et $\sin\theta > 0$	$\cos\theta > 0$ et $\sin\theta < 0$	$\cos\theta < 0$ et $\sin\theta > 0$	$\cos\theta < 0$ et $\sin\theta < 0$
$\theta = \alpha$	$\theta = -\alpha$	$\theta = \pi - \alpha$	$\theta = \pi + \alpha$

Avec :
$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{|\operatorname{Re}(z)|}{|z|} \\ \sin\alpha = \frac{|\operatorname{Im}(z)|}{|z|} \end{cases}$$

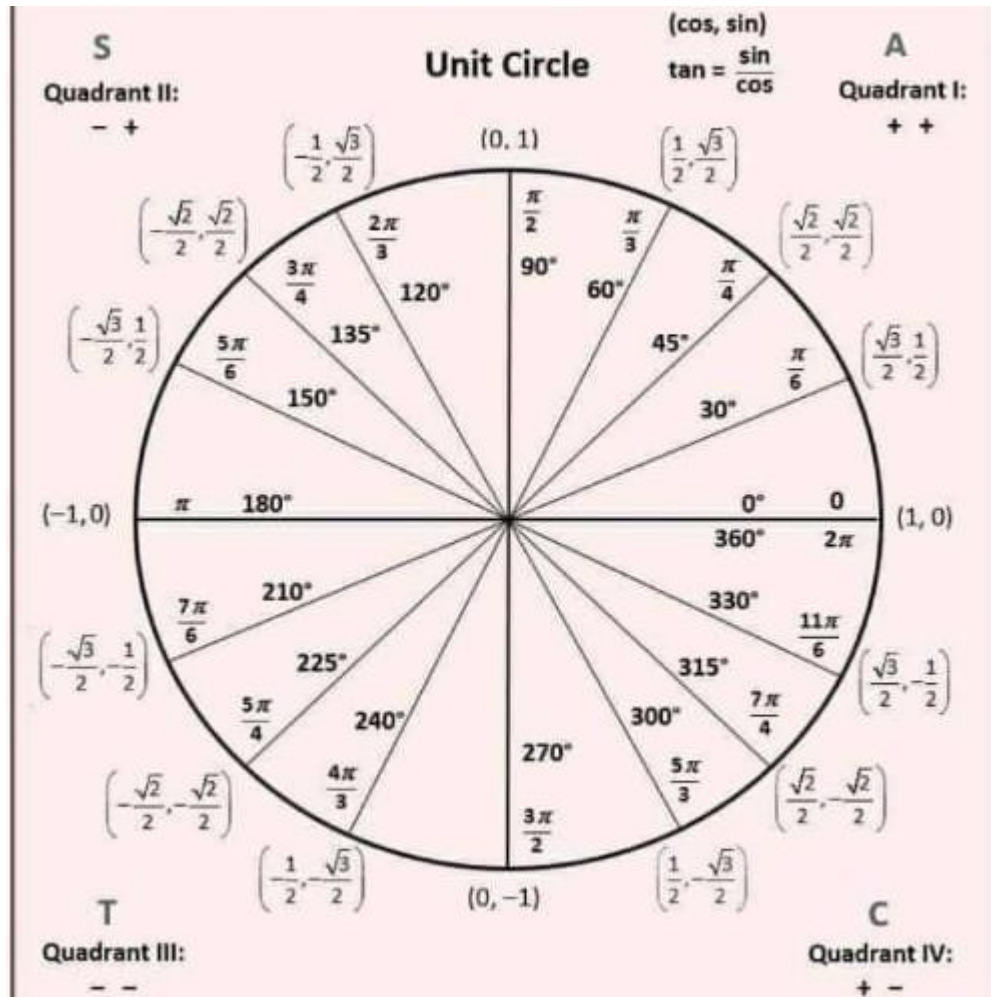
c. Formules trigonométriques

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	$\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$
$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$	$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1$ $= 1 - 2 \sin^2(x)$	$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$
$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$	$\sin(x \pm y) = \cos(x) \sin(y) \pm \sin(x) \cos(y)$



7. Notation $z = re^{i\theta}$

a. Définition

On appelle forme exponentielle de z , l'écriture : $z = re^{i\theta}$ où r est le module de z et θ un argument de z .

b. Propriétés

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $z' \in \mathbb{C}^*$ tels que : $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$; avec $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ et $r' > 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$

$$zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}; \quad -z = re^{i(\pi+\theta)}; \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}; \quad \bar{z} = re^{-i\theta}; \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}; \quad z^n = r^n e^{in\theta}$$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

Exercice d'application

1. Ecris sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle les nombres complexes :

$$z = 2 + 2i \quad \text{et} \quad z' = 3 - i\sqrt{3}$$

2.

a. Ecris $\frac{z}{z'}$ sous forme trigonométrique et sous forme algébrique

b. Déduis en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

II. Application de la forme trigonométrique

1. Formule de Moivre application

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, on

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

2. Formule d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Remarque : $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ et $2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$; $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

3. Linéarisation :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

- Linéariser une expression de la forme $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$, consiste à l'écrire en fonction des expressions de la forme $\sin(kx)$ ou $\cos(kx)$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 < k \leq n$. Pour cela on utilise la formule d'Euler.
- Pour écrire une expression de la forme $\sin(nx)$ ou $\cos(nx)$, on se sert de la formule de Moivre et de la formule du binôme de Newton

Exemple :

- a. Ecris $\cos(3x)$ et $\sin(3x)\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$
- b. Linéariser $\sin^3(x)$

4. Racines $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe

a. Définition

Soit Z un nombre complexe non nul et n un entier

On appelle racine $n^{\text{ème}}$ de Z tout nombre complexe z tel que : $Z = z^n$

Exemple : z est une racine carrée de Z si : $Z = z^2$.

Remarque : Pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe non nul z tel que $z = \delta^2$, on pose $\delta = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On obtient ainsi cette équivalence.

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

$$z = \delta^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |z| \\ x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(z) \\ 2xy = \operatorname{Im}(z) \end{cases}$$

Ce système permet ainsi de déterminer x et y puis trouver l'expression de δ .

b. Propriété

Soit $re^{i\theta}$, $r > 0$ un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$re^{i\theta}$ admet n racines $n^{\text{ième}}$ z_k telles que

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}; k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$$

c. Interprétation graphique

Pour $n \geq 3$, les points images de ces racines $n^{\text{ième}}$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscriptible dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$. O étant l'origine du repère choisi dans la plan complexe.

d. Cas particulier : racines cubiques de l'unité

Les racines cubiques de l'unité sont : $z_0 = 1$, $z_1 = j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

NB

- La somme des racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul est nulle.
- Les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe s'obtiennent en multipliant l'une quelconque d'entre elles par les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité

Exercice d'application :

1. Déterminer les racines $4^{\text{ième}}$ de $z = 8 + 8i\sqrt{3}$ et les racines carrées de $z' = 3 - 4i$
2. Représenter dans le plan complexe les racines quatrièmes de $z = 1 + i$. Donner la nature de la figure ainsi obtenue.

III. Equations dans l'ensemble $\mathbb{C}$

1. Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

On appelle équation du second degré dans $\mathbb{C}$ toute équation de la forme

$$az^2 + bz + c = 0; \quad \text{où } (a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \text{ et } z \text{ l'inconnue.}$$

a. Exemples

$$z^2 - iz - 1 + i = 0; \quad (1 - i)z^2 - (6 - 4i)z + 9 - 7i = 0; \quad 2z^2 - 2z + 3 = 0$$

b. Résolutions

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré, d'inconnue z , de la forme $az^2 + bz + c = 0$

où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ puis on détermine une racine

carrée δ de Δ . Les solutions de l'équation sont de la forme : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$; $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

2. Autre forme d'équations dans $\mathbb{C}$

Soit $P(z)$ un polynôme de degré n , ($n \geq 3$) et z_0 une racine de $P(z)$. il existe alors un polynôme $Q(z)$ de degré $n - 1$ tel que : $P(z) = (z - z_0)Q(z)$

Exercice d'application

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $z^2 - iz - 1 + i = 0$; $(1 - i)z^2 - (6 - 4i)z + 9 - 7i = 0$; $2z^2 - 2z + 3 = 0$
2. Soit $P(z) = z^3 - 2\sqrt{3}z^2 - 2(3 + i\sqrt{3})z - 4(\sqrt{3} + 5i)$.
 - a. Montrer que $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure.
 - b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$
3. Soit $Q(z) = z^3 + (7 - 4i)z^2 + (9 - 16i)z - 9 - 12i$.
 - a. Démontrer que $Q(z) = 0$ admet une racine réelle z_0 que l'on déterminera.
 - b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q(z) = 0$
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - (1 + i\sqrt{5})z^3 + (2 + i\sqrt{5})z^2 - (1 + i\sqrt{5})z + 1 = 0$. On pourra poser $Z = z + \frac{1}{z}$

THEME N°2 : APPLICATION AFFINE DU PLAN

CHAPITRE : SIMILITUDE PLANE DIRECTE

Objectifs :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit savoir :

- ✓ Déterminer l'application affine associée à l'application complexe $z \mapsto az + b$, $(a, b) \in \mathbb{C}$;
- ✓ Déterminer les éléments caractéristiques et l'expression analytique d'une similitude plane directe ;
- ✓ Déterminer la forme complexe d'une similitude plane directe à partir de ses éléments caractéristiques ;
- ✓ Déterminer l'image des figures simples (droites, cercles) par une similitude plane directe.

1. Définition et exemples

Soit k un nombre réel strictement positif.

On appelle similitude plane directe de rapport k , toute transformation du plan qui conserve les angles orientés et qui est telle que : pour tous points M et N d'images respectives M' et N' , on a :

$$M'N' = kMN$$

L'écriture complexe d'une similitude plane directe est de la forme $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $|a| = k$.

COURS DE MATHÉMATIQUE TERMINALE D

Exemples : les transformations planes définies par :

$$M(z) \mapsto M'(z' = iz + 1 - i); M(z) \mapsto M'(z' = -\frac{2}{3}z + 2i); M(z) \mapsto M'(z' = (1 - i)z - 2 + i),$$

sont des similitudes planes directes.

2. Eléments caractéristiques, cas particuliers

Les éléments caractéristiques d'une similitude plane directe sont :

$$\text{le centre } \Omega \text{ d'affixe } z_{\Omega} = \frac{b}{1-a}; \quad \text{le rapport } k = |a| \quad \text{et} \quad \text{d'angle } \theta = \arg(a)$$

3. Forme analytique

Soit f une similitude plane directe d'expression complexe $z' = az + b$.

Posons :

$$z = x + iy, \quad z' = x' + iy', \quad a = \alpha + i\beta \quad \text{et} \quad b = m + in, \quad \text{avec } x, y, x', y', \alpha, \beta, m \text{ et } n \in \mathbb{R}$$

$$z' = az + b \Leftrightarrow x' + iy' = (\alpha + i\beta)(x + iy) + m + in$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = \alpha x - \beta y + m + i(\alpha y + \beta x + n)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \alpha x - \beta y + m \\ y' = \alpha y + \beta x + n \end{cases}$$

Le système ainsi obtenu est l'expression analytique de la similitude plane directe f .

Exemple : Déterminer l'expression analytique de la similitude directe S définie par :

$$z' = (1 - 2i)z - 3 + i$$

Réponse : $\begin{cases} x' = x + 2y - 3 \\ y' = -2x + y + 1 \end{cases}$

4. Propriétés

➤ Toutes application f du plan dans lui-même d'écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$ est une similitude plane directe.

- Si $a = 1$, alors f est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b
- Si $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, alors f est l'homothétie de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport $k = a$
- Si $a = -1$, alors f est une symétrie centrale de centre I d'affixe $\frac{b}{2}$
- Si $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ et $|a| = 1$, alors f est la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle un argument de a .
- Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$, alors f peut se décomposer sous la forme $f = h \circ r$ ou $f = r \circ h$ où r est la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ d'angle un argument de a et de l'homothétie de même centre Ω de rapport $k = |a|$.

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

- Soient f et g deux similitudes planes directes de rapports respectifs k et k' et d'angles de mesures respectifs α et α'
 - Les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des similitudes planes directes de rapport kk' et d'angle de mesure $\alpha + \alpha'$
 - La réciproque de f est la similitude directe plane de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle de mesure $-\alpha$.
- Soit f une application du plan dans lui-même, k un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel. f est une similitude plane directe de rapport k et d'angle de mesure θ si et seulement si pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f , on a :

$$\begin{cases} M'N' = kMN \\ \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = \theta + 2p\pi, \quad p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- Toute similitude plane directe de rapport k conserve :

L'alignement des points ; le parallélisme de droites ; l'orthogonalité de droites ; les angles orientés ; les barycentres ; le contact.

- Toute similitude plane directe de rapport k transforme :

Les droites en droites ; les demi-droites en demi-droites ; les segments en segments ; Les cercles en cercles

- Toute similitude plane directe de rapport k multiplie :

Les longueurs par $|k|$; les aires par k^2

- Soit S la similitude plane directe de centre Ω , de rapport k ($k > 0$) et d'angle de mesure θ

Pour tous points M et M' du plan distincts de Ω , on a :

$$M' = S(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta + 2p\pi, \quad p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- Soit Ω, A et A' trois points du plan tels que $A \neq \Omega$ et $A' \neq \Omega$. Il existe une unique similitude plane directe de centre Ω qui transforme A en A'
- Soit k un nombre réel strictement positif, θ un nombre réel, A et A' deux points du plan. Il existe une unique similitude plane directe de rapport k et d'angle de mesure θ , qui transforme A en A'
- Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Il existe une unique similitude plane directe qui transforme A en A' et B en B' .

Exercice d'application :

1. Soit S la similitude plane directe définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 1 \\ y' = -2x + 2y + 1 \end{cases}$
 - a. Exprimer x et y en fonction de x' et y'

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

- Déterminer l'image par S : Du point $A(1, -1)$; De la droite (D) d'équation : $4x - 8y - 3 = 0$
Du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$
2. Reprend la question 1.b en utilisant l'écriture complexe de S.
 3. Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la similitude plane directe S définie par :
 - a. $z' = z + 4 - i$
 - b. $z' = -z + 1 + i$
 - c. $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z + i$
 4. Soit S la similitude plane directe définie par : $z' = 2(1 + i)z + 3 - 2i$. Démontrer que S est la composée d'une homothétie et d'une rotation en précisant les éléments caractéristiques.

THEME N°3 : ORGANISATION DES DONNEES

CHAPITRE N°1 : CALCULS DES PROBABILITES

Objectifs : A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable :

- ✓ De définir une probabilité
- ✓ De reconnaître le vocabulaire relatif
- ✓ De déterminer la probabilité d'un événement
- ✓ De savoir utiliser les propriétés sur les probabilités
- ✓ D'utiliser la formule $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(B) \neq 0$
- ✓ De reconnaître et utiliser la formule de la probabilité totale
- ✓ De reconnaître les événements indépendants
- ✓ De définir le produit de n espaces probabilisés finis

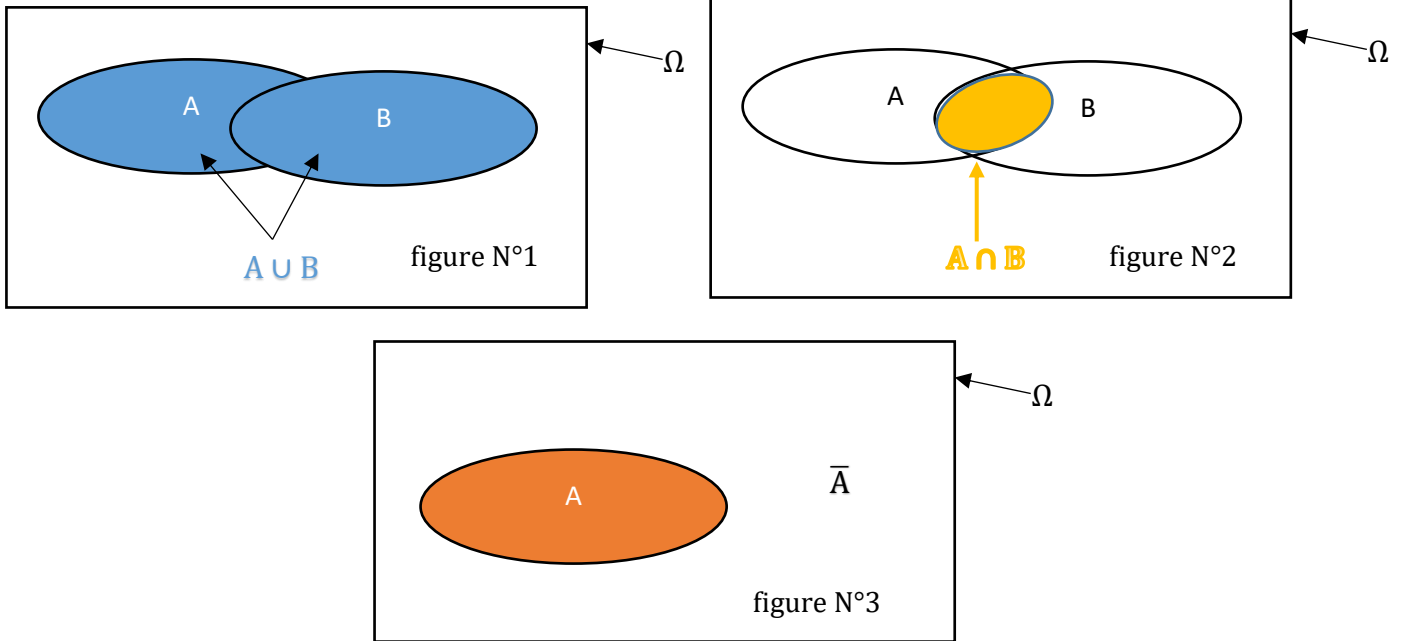
I. Rappel sur les dénombrements

1. Réunion Intersection Complémentaire

Soient A et B deux parties d'un ensemble fini Ω

- La réunion de A et B, notée $A \cup B$ est la partie de Ω constituée des éléments qui sont dans A ou dans B. (figure N°1)
- L'intersection de A et B, notée $A \cap B$ est la partie de Ω formée des éléments qui sont à la fois dans A et B. (figure N°2)
- Le complémentaire de A dans Ω , notée $\bar{A}$ est la partie de Ω composée des éléments de Ω qui ne sont pas dans A. (figure N°3)

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D



2. Propriété des cardinaux

Soient A et B des parties d'un ensemble fini Ω

- $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$
- $\text{card } A = \text{card } \Omega - \text{card } \bar{A}$
- $\text{card } A^n = (\text{card } A)^n, n \in \mathbb{N}^*$
- $\text{card}(A \times B) = \text{card } A \times \text{card } B$
- Si A et B sont disjoints, alors : $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$

3. Les P-listes (définition et propriétés)

- Une p-liste ou p-uplet d'un ensemble fini Ω est une suite ordonnée de p éléments de Ω , chaque élément pouvant être répété.
- Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est notée : n^p

4. Les arrangements

Soit Ω un ensemble fini ayant n éléments.

- Un arrangement de p éléments de Ω ($p \leq n$) ou p-arrangement est une p-liste d'éléments de Ω , distincts deux à deux.
- Le nombre d'arrangement de p éléments noté A_n^p
- $A_n^p = \underbrace{n(n-1) \dots (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

5. Les permutations

Soit Ω un ensemble fini ayant n éléments

- Une permutation de Ω est un arrangement des n éléments de Ω
- Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est noté : $n!$
- $n! = n(n-1) \dots \times 3 \times 2 \times 1$
- Par convention, $0! = 1$ et $1! = 1$

6. Les combinaisons

Soit Ω un ensemble fini ayant n éléments

- Une combinaison de p éléments de Ω ($p \leq n$) est une partie de Ω ayant p éléments d'un ensemble à n éléments est noté : C_n^p

7. Propriétés

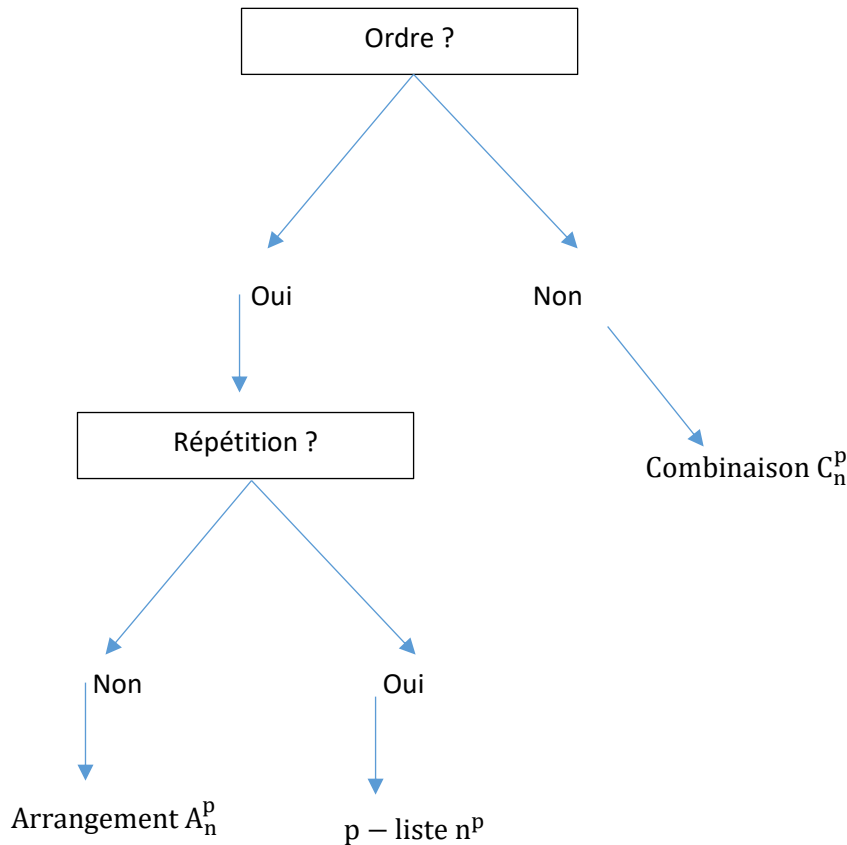
$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad A_n^0 = 1 \quad A_n^1 = n \quad A_n^n = n! \quad C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

$$C_n^0 = 1 \quad C_n^1 = n \quad C_n^n = 1 \quad C_n^p = C_n^{n-p} \quad C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

8. Différence entre une p-liste, un arrangement et une combinaison

Dans un exercice de dénombrement, le choix du modèle mathématique que l'on doit utiliser dépend en général des réponses aux questions suivantes : **l'ordre intervient – il ? a-t-on répétition des éléments ?** Le schéma de raisonnement est généralement le suivant :

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D



9. Les tirages

- ✚ Si le tirage est successif avec remise, alors on utilise les p-listes
- ✚ Si le tirage est successif sans remise, alors on utilise les arrangements
- ✚ Si le tirage est simultané, alors on utilise la combinaison

10. Comprendre la différence entre : « au moins » ; « moins de » ; « au plus » et « plus de »

- « **au moins** » correspond à l'inégalité " $\geq$ " ; sa négation est : « **moins de** » et correspond à l'inégalité " $<$ "
- « **au plus** » correspond à l'inégalité " $\leq$ " et sa négation est « **plus de** » et correspond à l'inégalité " $>$ "

II. Notion de probabilité

Activité : On dispose d'un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6

1. Déterminer deux résultats possibles du lacer de dé
2. Déterminer l'ensemble Ω de tous les résultats possibles du lancer de dé
3. On pose : $A = \{1, 3, 5\}$; $B = \{2, 4, 6\}$; $C = \{2, 6\}$ et $D = \{4\}$
 - a. Déterminer : $A \cap B$ et $A \cup B$, puis compare $A \cup B$ et Ω
 - b. Déterminer : $A \cup C \cup D$, puis compare $A \cup C \cup D$ et Ω

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

4. Calculer après un lancer, la fréquence P_1 d'apparition du numéro 3 et la fréquence P_2 d'apparition d'un numéro pair

1. Vocabulaire

❖ **Expérience aléatoire**

Une expérience aléatoire est une expérience dont l'issue est due au hasard et pour laquelle on connaît tous les résultats possibles.

❖ **Eventualité**

Tout résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé éventualité

❖ **Univers**

On appelle univers des éventualités, l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience

❖ **Evénements**

- Tout sous ensemble de l'univers est appelé événement
- Tout singleton de l'univers est appelé événement élémentaire
- L'événement impossible est la partie vide de l'univers on le note : ϕ
- L'événement certain est l'univers lui-même.

2. Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Une probabilité sur Ω est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers l'intervalle $[0, 1]$ qui à toute partie A de Ω , associe le nombre réel $P(A)$ appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :

- $P(\Omega) = 1$
- Si A et B sont deux événements incompatibles, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3. Propriétés

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω ; A et B deux événements de Ω .

- $P(\phi) = 0$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) sont n événements de Ω deux à deux incompatibles, alors on a :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \equiv P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

III. Calculs de probabilités

1. Définition

Deux événements d'un univers sont dits équiprobables lorsqu'ils ont la même probabilité

2. Propriété

Soit P une probabilité définie sur un univers fini non vide Ω . Si tous les événements élémentaires de Ω sont équiprobables, alors pour tout événement A de Ω , on a :

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

3. Exercice d'application

Un sac contient 3 boules rouges, 4 boules noires et 5 boules vertes indiscernable au toucher. On tire du sac trois boules. On désigne Ω l'univers lié à l'expérience, P une probabilité sur Ω et les événements :

A : « tirage de trois boules noires »

B : « tirage de deux boules vertes »

C : « tirage des boules tricolores »

D : « tirage d'au moins deux boules vertes »

E : « tirage d'au plus une boule rouge »

1. Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$ et $P(E)$ lorsque le tirage est simultané
2. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ lorsque le tirage est successif sans remise.
3. Déterminer $P(A)$ et $P(B)$ lorsque le tirage est successif avec remise.

IV. Probabilité conditionnelle

1. Définition

- ✓ Soit P une probabilité définie sur un univers Ω et B un événement de Ω tel que $P(B) \neq 0$.

L'application :

$$P_B: \begin{matrix} \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0;1] \\ A \mapsto P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{matrix}$$

Est une probabilité, sur Ω . Elle est appelée probabilité conditionnelle sachant que B est réalisé

NB : $P_B(A)$ encore noté $P(A/B)$ se lit probabilité de A sachant B

- ✓ Deux événements A et B de Ω sont dits indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

2. Propriétés

Soit P une probabilité définie sur un univers.

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

- Si A et B sont deux événements de Ω tel que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

- $B_1, B_2, \dots, B_n$ forment un système complet d'événements de Ω . Pour tout événement A de Ω , on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) \\ &= P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \dots + P(B_n \cap A) \\ &= \left(P(B_1) \times P_{B_1}(A) \right) + \left(P(B_2) \times P_{B_2}(A) \right) + \dots + \left(P(B_n) \times P_{B_n}(A) \right) \end{aligned}$$

Formule de la probabilité totale.

- A et B sont deux événements de Ω tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Les propositions suivantes sont équivalentes.
 - A et B sont indépendants
 - $P_B(A) = P(A)$ lorsque $P(B) \neq 0$
 - $P_A(B) = P(B)$ lorsque $P(A) \neq 0$
- Si les événements A et B sont indépendants alors il en est de même pour :

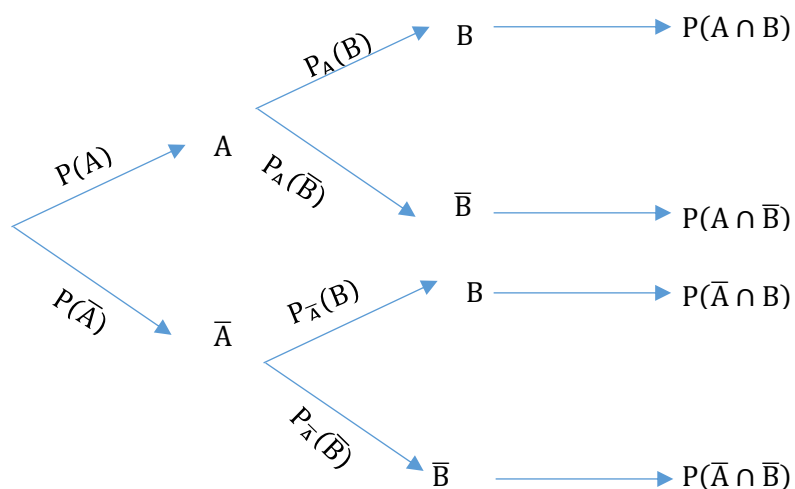
A et $\bar{B}$;

$\bar{A}$ et B;

$\bar{A}$ et $\bar{B}$

3. Arbre pondéré

On considère une expérience aléatoire et deux événements A et B quelconques de probabilités non nulles. L'événement A est réalisé puis l'événement B. on peut visualiser la situation en utilisant un arbre pondéré.



COURS DE MATHÉMATIQUE TERMINALE D

4. Produit de n espaces probabilisés finis

On appelle espace probabilisable fini, l'ensemble $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); P)$

Soient $(\Omega_1; \mathcal{P}(\Omega_1); P_1)$, $(\Omega_2; \mathcal{P}(\Omega_2); P_2)$, ..., $(\Omega_n; \mathcal{P}(\Omega_n); P_n)$, n espaces probabilisés finis auquel on associe respectivement n épreuves indépendantes $E_1, E_2, \dots, E_n$. on appelle espace probabilisé produit de ces n espaces probabilisés finis, l'espace probabilisé fini $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); P)$ défini par :

- $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$
- $\forall (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \Omega$, on a :

$$P(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = P(\omega_1) \times P(\omega_2) \times \dots \times P(\omega_n) = \prod_{i=1}^n P(\omega_i)$$

Exercice d'application

1. Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte. Soit les événements :

A : « tirage d'un cœur » ; B : « tirage d'une dame ». Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$. P étant une probabilité sur l'univers lié à l'expérience

2. Au CSP COSPEBA, 40% des élèves aiment les mathématiques, 25% aiment la physique et 10% aiment à la fois les mathématiques et la physique. On prend un élève au hasard.

Quelle est la probabilité pour qu'il aime la physique, sachant qu'il aime les mathématiques ?

Réponse :

1. Soit Ω l'univers liés à l'expérience

$$\text{On a : } \text{card } \Omega = C_{32}^1 = \frac{32!}{1!(32-1)!} = 32$$

$$P(A) = \frac{C_8^1}{32} = \frac{8}{32}; P(B) = \frac{C_4^1}{32} = \frac{4}{32}; P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{8}{32}} = \frac{1}{8}; P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{4}{32}} = \frac{1}{4}$$

2. Soit

A : « l'élève aime les mathématiques »

B : « l'élève aime la physique »

$$\text{On a : } P(A) = \frac{40}{100}; P(B) = \frac{25}{100} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{10}{100} \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{1}{4}$$

CHAPITRE N°2 : VARIABLES ALEATOIRES

Objectifs :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- ✓ Définir une variable aléatoire réelle
- ✓ Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle.
- ✓ Déterminer l'espérance mathématique, la variance, l'écart type d'une variable aléatoire.
- ✓ Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.
- ✓ Définir et utiliser la loi binomiale

1. Notion de variable aléatoire : définition

Activité : Moussa lance deux fois de suite un dé cubique puis il se préoccupe des probabilités correspondant à la somme des numéros apparus.

On désigne par f l'application qui à chaque « deux lancés » associe la somme des numéros obtenus.

- a. Déterminer les différentes valeurs de f
- b. Calcule la probabilité correspondante à chaque valeur de f

Définition : Soit p une probabilité définie sur un univers Ω . On appelle variable aléatoire réelle X sur Ω , toute application de Ω vers $\mathbb{R}$

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ w \mapsto X(w) = x$$

- $X(\Omega)$ désigne l'ensemble des valeurs prises par X
- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ est appelé univers image de Ω par la variable aléatoire réelle.
- $(X = x)$ est un événement. C'est l'ensemble des éléments de Ω ayant pour image x par l'application X ; $(X = x) = \{w, w \in \Omega / X(w) = x\}$.

De la même façon on définit les événements : $(X < x)$, $(X \leq x)$; $(X > x)$; $(X \geq x)$;

Par exemple : $(X \leq x) = \{w, w \in \Omega / X(w) \leq x\}$.

2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition : Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers fini Ω et soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X . On appelle loi de probabilité associée à X la fonction f de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0 ; 1]$ qui à chaque x_i associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$

$$f: \begin{matrix} X(\Omega) \rightarrow [0 ; 1] \\ x_i \mapsto \mathcal{P}[(X = x_i)] \end{matrix}$$

- Autre notation : $\mathcal{P}[(X = x_i)] = \mathcal{P}(X = x_i) = \mathcal{P}_i$
- f est aussi appelée distribution de probabilité de X ou loi de probabilité de X

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

- Dans tous les cas, les événements $(X = x_1); \dots; (X = x_n)$ sont incompatibles et : $(X = x_1) \cup (X = x_2) \cup \dots \cup (X = x_n) = \Omega$. Donc

$$\sum_{i=1}^n P_i = P[(X = x_1) \cup \dots \cup (X = x_n)] = P(\Omega) = 1$$

Exemple N°1 Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. On tire simultanément deux boules de l'urne. Les tirages sont supposés équiprobables. Soit X la variable aléatoire réelle qui à tirage associe le nombre de boules blanche obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X .

Rép : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

$$P(X = 0) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}; \quad P(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}; \quad P(X = 2) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{10}{28}$$

$$\sum_{i=0}^2 P_i = \frac{3}{28} + \frac{15}{28} + \frac{10}{28} = \frac{28}{28} = 1$$

3. Caractéristiques d'une variable aléatoire

a. L'Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers Ω et soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. on appelle espérance mathématique de X , le réel $E(X)$ tel que :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n P_i \times x_i$$

Exemple : avec les données de l'exemple N°1, on a :

$$E(X) = (0 \times \frac{3}{28}) + (1 \times \frac{15}{28}) + (2 \times \frac{10}{28}) = \frac{35}{28} = 1,25$$

b. La Variance

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω et soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. on appelle variance de X , le nombre réel positif $V(X)$ et défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 P(X = x_i) - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Exemple : avec les données de l'exemple N°1, on a :

$$V(X) = \left[\left(0 \times \frac{3}{28}\right) + \left(1 \times \frac{15}{28}\right) + \left(4 \times \frac{10}{28}\right) \right] - \left(\frac{35}{28}\right)^2 \approx 0,402$$

c. L'Ecart type

On appelle écart type de la variable aléatoire X , le réel positif noté $\sigma(X)$ et définie par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple : avec les données de l'exemple N°1, on a : $\sigma(X) = \sqrt{0,402} \approx 0,634$

4. Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers fini Ω et soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_n\}$. on appelle fonction de répartition de X , la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $[0 ; 1]$ qui à chaque x réel associe la probabilité de l'événement $(X \leq x)$

$$F : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow [0 ; 1] \\ x \mapsto P(X \leq x) \end{array} \text{ et } F(x) = P(X \leq x)$$

Exemple : en considérant les données de l'exemple N°1, on a :

$$\begin{array}{ll} \text{si } x \in] - \infty ; 0[, & F(x) = 0 ; \\ \text{si } x \in [0 ; 1[, & F(x) = \frac{3}{28} \\ \text{si } x \in [1 ; 2[, & F(x) = \frac{18}{28} ; \\ \text{si } x \in [2 ; +\infty[, & F(x) = 1 \end{array}$$

Ainsi la représentation graphique de F est :



5. Loi binomiale

a. Epreuve et schéma de Bernoulli

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

- ✓ On appelle épreuve de Bernoulli, toute épreuve aléatoire ne conduisant qu'à deux éventualités appelées succès noté S et échec noté E ou $\bar{S}$. La probabilité p du succès est appelée paramètre de l'épreuve de Bernoulli.
- ✓ Un schéma de Bernoulli est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois ($n \geq 2$) de façon indépendante une épreuve de Bernoulli.

b. Propriétés

Soit une succession de n épreuves de Bernoulli dans lesquelles la probabilité de succès est p. La probabilité d'obtenir exactement k succès, $k \leq n$ est :

$$P_k = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

c. Définition (loi Binomiale)

Soit X la variable aléatoire réelle associée à un schéma de Bernoulli telle que à chaque éventualité associe le nombre k de succès. Désignons p la probabilité de succès pour chaque épreuve et n le nombre de fois que l'épreuve a été répétée.

La loi de probabilité de X, dans ce cas est appelée loi binomiale de paramètre n et p.

On a : $E(X) = np$ et $V(x) = np(1 - p)$

Exemple N°2 Une pièce de monnaie est truquée de sorte que la probabilité d'apparition de « face » est le double de celle de « pile ».

1. Calculer la probabilité p d'obtenir « face » après un lancer
2. Cette pièce de monnaie est lancée 5 fois et de façons indépendante
 - a. Déterminer la probabilité d'obtenir « face » exactement 4 fois
 - b. On désigne par X la variable aléatoire réelle qui à 5 lancers associe le nombre de « face » obtenu. Justifier que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.
 - c. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

Rép : 1. Soit q la probabilité d'obtenir « pile » on a $p = 2q$ et $p + q = 1$ donc $p = \frac{2}{3}$ et $q = \frac{1}{3}$

2.a) $P_4 = C_5^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{5-4} = \frac{80}{243}$. b) Justification : désignons par p le succès d'apparition de « face » sur un lancer. X est tel que à chaque éventualité, on associe le nombre de succès. Donc X suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = \frac{2}{3}$. $E(X) = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ et $V(X) = \frac{10}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{9}$

CHAPITRE N°3 PROPRIETES DES FONCTIONS CONTINUES ET DERIVABLES SUR UN INTERVALLE

Objectifs :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- ✓ Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue
- ✓ Reconnaître et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires
- ✓ Utiliser la continuité et la stricte monotonie pour montrer qu'une application f est une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$
- ✓ Déterminer et utiliser les fonctions dérivées d'une fonction composée ou de la réciproque d'une fonction si elle existe.

1. Limites

Activité : Dans le but de retrouver quelques propriétés sur les limites et d'autres notions au programme en classe de la terminale D, Inayatou se donne les fonctions f, g, h, i et j de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2} ; g(x) = \sqrt{\frac{4x^2}{x^2-1}} ; h(x) = 2x - \sin x ; i(x) = -\frac{1}{x} + 2 \text{ et } j(x) = \frac{2}{x+1} - 3$$

- a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{+\infty} (f-h)$
- b. Démontrer que i est croissante et majorée sur $]0 ; +\infty[$ calculer ensuite $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} i(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x)$
- c. Démontrer que j est décroissante et minorée sur $] -1 ; +\infty[$. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} j(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} j(x)$

Rép : a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{+\infty} (f-h) = -\infty$

b) Démontrons que i est croissante et majorée sur $]0 ; +\infty[$ $D_i =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ soit $x \in]0 ; +\infty[$ et $y \in]0 ; +\infty[$ tel que $x < y$. $x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Rightarrow -\frac{1}{x} < -\frac{1}{y} \Rightarrow -\frac{1}{x} + 2 < -\frac{1}{y} + 2 \Rightarrow i(x) < i(y)$ donc i est croissante sur $]0 ; +\infty[$. $\forall x \in]0 ; +\infty[$,

on a : $0 < x \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} \Rightarrow -\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{x} + 2 < 2 \Rightarrow i(x) < 2$,

donc i est majorée sur $]0 ; +\infty[$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} i(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = 2$

c) Démontrons que j est décroissante et minorée sur $] -1 ; +\infty[$ même démarche que pour i $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} j(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} j(x) = -3$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

Propriété 1 Soient f et g deux fonctions numériques l et $l' \in \mathbb{R}$ a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$

<i>si f a pour limite en a</i>	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
<i>et si g a pour limite en a</i>	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
<i>alors $f + g$ a pour limite en a</i>	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<i>on ne peut pas conclure</i>

<i>si f a pour limite en a</i>	l	l, l > 0	l, l < 0	l, l > 0	l, l < 0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
<i>et si g a pour limite en a</i>	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
<i>alors $f \times g$ a pour limite en a</i>	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	<i>on ne peut pas conclure</i>

<i>si g a pour limite en a</i>	l', l' $\neq 0$	0 <i>g étant positive sur I</i>	0 <i>g étant négative sur I</i>	$-\infty$ ou $+\infty$
<i>alors $\frac{1}{g}$ a pour limite en a</i>	$\frac{1}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	0

I est un intervalle contenu dans le domaine de définition de g

<i>si f a pour limite en a</i>	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
<i>et si g a pour limite en a</i>	l', l' $\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	l', l' > 0	l', l' < 0	l', l' < 0	l', l' > 0	0	$\pm\infty$
<i>alors $\frac{f}{g}$ a pour limite en a</i>	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	<i>on ne peut pas conclure</i>	

NB : $+\infty - \infty$; $0 \times \pm\infty$; $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$ sont appelées des formes indéterminées. Pour élever ces indéterminations, on peut utiliser les méthodes suivantes :

La factorisation ; Le taux de variation ; L'expression conjuguée ; Le théorème des gendarmes ; Le théorème de comparaison ; La règle de l'Hôpital ; ...

- ✓ $g \circ f$ étant la composée d'une fonction f par une fonction g , a un élément ou une borne d'un intervalle sur lequel $g \circ f$ est définie. Si $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = l$, alors $\lim_a g \circ f = l$; a et l sont des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$
- ✓ soit f une fonction, a un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$, l un nombre réel positif ou nul l' un nombre réel.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

COURS DE MATHÉMATIQUE TERMINALE D

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = +\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l'$, alors $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |l'|$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$
- Si $f \geq g$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- Si $f \geq g$, et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$
- Si $f \leq g$, et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
- Si $g \leq f \leq h$, et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Propriétés 2 Soit f une fonction croissante sur $]a ; b[$ ($a, b \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$)

- ✓ Si f est majorée sur $]a ; b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b
- ✓ Si f est non majorée sur $]a ; b[$, alors f a pour limite $+\infty$ à gauche en b
- ✓ Si f est minorée sur $]a ; b[$, alors f admet une limite finie à droite en a
- ✓ Si f est non minorée sur $]a ; b[$, alors f a pour limite $-\infty$ à droite en a

2. Fonctions continues

Activité : On considère les fonctions f, g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ et } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- a. Déterminer l'ensemble de définition D_f et D_g de f et g
- b. Justifier que $1 \notin D_f$ et calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- c. Démontrer que g est continue en 1

Rép :

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $D_g = \mathbb{R}$ $1 \notin D_f$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$ et $g(1) = 2$ donc g est continue en 1

Définition : (Prolongement par continuité)

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f .

Soit a un nombre réel tel que $a \notin D_f$ et $\lim_{x \rightarrow a} f = l, l \in \mathbb{R}$, alors la fonction g définie

par : $\begin{cases} g(x) = f(x), \forall x \in D_f \\ g(a) = l \end{cases}$ est continue en a . elle est appelée prolongement par continuité de f en a

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

Propriétés 1

- ✓ Soit f et g deux fonctions numériques continues sur un intervalle I , alors les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont continue sur I si de plus $\forall x \in I, g(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I .
- ✓ Soit f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle contenant $f(I)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I

Propriétés 2

- ✓ Si f est une fonction continue sur un intervalle K , alors $f(K)$ est un intervalle
- ✓ Si f est continue sur $[a ; b]$, ($a \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$), alors il existe deux nombres réels m et M ($m < M$) tels que $f([a ; b]) = [m ; M]$
- ✓ **Théorème des valeurs intermédiaires** : Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K . tout nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent par f compris entre a et b .

Propriété 3 (Image d'un intervalle par une fonction continue)

Soit f une fonction continue sur un intervalle K

- ✓ S'il existe deux éléments a et b ($a < b$) de K tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signe contraire, alors l'équation $f(x) = 0$ dans K admet au moins une solution appartenant à $]a ; b[$
- ✓ Si f ne s'annule pas sur K , alors f garde un signe constant sur K
- ✓ Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. si f est continue sur $[a ; b]$, alors le sens de variation de f sur $[a ; b]$ est celui de f sur $]a ; b[$
- ✓ Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$ tels que $a < b$, f est une fonction admettant une limite à droite en a et une limite à gauche en b
 - Si f est continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur $[a ; b]$, alors $f([a ; b]) = [f(a) ; f(b)]$ (resp $f([a ; b]) = [f(b) ; f(a)]$)
 - Si f est continue et strictement croissant (respectivement décroissante) sur $]a ; b[$, alors $f(]a ; b[) =]\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) ; \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x)[$; (resp $f(]a ; b[) =]\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) ; \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)[$

Propriétés 4

a et b sont des nombres réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a ; b]$

- ✓ Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a ; b[$
- ✓ Si de plus f est strictement monotone sur $[a ; b]$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a ; b[$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

Propriétés 5 K est un intervalle non vide, f une fonction numérique définie sur K , g une fonction définie dans $f(K)$ telle que pour tout x élément de K , $g(x) = f(x)$. Si f est continue et strictement monotone sur K , alors g est une bijection et sa réciproque g^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(K)$ et g^{-1} varie dans le même sens que g .

NB Dans ce cas, on dit aussi que f réalise une bijection de K dans $f(K)$

3. Fonction racine $n^{\text{ème}}$, $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$

Définition 1 Soit n un entier naturel et supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$). La fonction racine $n^{\text{ème}}$ est la bijection réciproque de la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

✓ L'image de tout nombre réel positif par la fonction racine $n^{\text{ème}}$ est notée : $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$ pour $n > 2$;
 $\sqrt{x}$ ou $x^{\frac{1}{2}}$ pour $n = 2$.

✓ On a : $\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+ \\ y = \sqrt[n]{x} \end{cases} \equiv \begin{cases} y \in \mathbb{R}_+ \\ x = y^n \end{cases}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$

Définition 2 Soit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle puissance d'exposant $\frac{p}{q}$ de x et on note : $x^{\frac{p}{q}}$, le nombre défini par : $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

Propriétés (Racine $n^{\text{ème}}$)

Soit r et r' deux nombres rationnels non nuls, x et y deux nombres réels strictement positifs

$$\checkmark \quad x^r \times y^r = (xy)^r ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r} ; \quad (x^r)^{r'} = x^{rr'} ; \quad x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$$

$$\checkmark \quad \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y} \quad ; \quad \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad ; \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x} \quad ; \quad (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

4. Dérivées

a. Dérivabilité en x_0

f est une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- i. La fonction $h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie l en 0
- ii. Il existe un nombre réel l et une fonction φ définie sur un intervalle I contenant 0, tels que $f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + h\varphi(h)$ avec $x_0 + h \in I$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$

Lorsque l'une des deux propriétés est réalisée, on dit que la fonction f est dérivable en x_0 ; le nombre réel l est appelé le nombre dérivé de f en x_0 et se note $f'(x_0)$.

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \text{ou encore} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

b. Dérivabilité sur un intervalle I

f est une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0

➤ **Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite**

- On dit que f est dérivable à gauche en x_0 lorsque $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Cette limite est appelée le nombre dérivé à gauche en x_0 de f : on le note $f'_g(x_0)$
- On dit que f est dérivable à droite en x_0 lorsque $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Cette limite est appelée le nombre dérivé à droite en x_0 de f : on le note $f'_d(x_0)$
- $(\mathcal{C})$ est la courbe représentative la fonction f. M_0 le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse x_0 . M_0 est un point anguleux lorsque $(\mathcal{C})$ admet en M_0 deux demi – tangentes de supports distincts.

Propriétés

- f est une fonction définie sur un intervalle K contenant x_0 , dérivable à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$
- Si f est dérivable en x_0 , alors la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de f admet une tangente au point $M_0(x_0 ; f(x_0))$. Une équation de cette tangente est :
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
- f est une fonction définie sur un intervalle K contenant x_0 , lorsque la limite à gauche en x_0 ou la limite à droite en x_0 de la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est infinie, alors la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de f admet une demi – tangente verticale au point $M(x_0 ; f(x_0))$

Retenons $(\mathcal{C})$ est la courbe d'une fonction f définie et continue sur un intervalle contenant x_0 ; (T) ; (T_g) et (T_d) désignent respectivement la tangente, la demi – tangente à gauche, et la demi – tangente à droite éventuellement en $M_0(x_0 ; f(x_0))$ à $(\mathcal{C})$. On pose : $T(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} T(x) = -\infty$ alors, $(\mathcal{C})$ admet en M_0 une demi – tangente à gauche définie par : $(T_g): \begin{cases} x = x_0 \\ y \geq f(x_0) \end{cases}$
- si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} T(x) = +\infty$ alors, $(\mathcal{C})$ admet en M_0 une demi – tangente à gauche définie par : $(T_g): \begin{cases} x = x_0 \\ y \leq f(x_0) \end{cases}$

COURS DE MATHÉMATIQUE TERMINALE D

- si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} T(x) = -\infty$ alors, (C) admet en M_0 une demi – tangente à droite définie par : $(T_d): \begin{cases} x = x_0 \\ y \leq f(x_0) \end{cases}$
- si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} T(x) = +\infty$ alors, (C) admet en M_0 une demi – tangente à droite définie par : $(T_d): \begin{cases} x = x_0 \\ y \geq f(x_0) \end{cases}$
- si f est dérivable à gauche en x_0 , alors, (C) admet en M_0 une demi – tangente à gauche d'équation : $(T_g): \begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$
- si f est dérivable à droite en x_0 , alors, (C) admet en M_0 une demi – tangente à gauche d'équation : $(T_d): \begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$
- si f est dérivable en x_0 , alors, (C) admet en M_0 une tangente d'équation :
$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
- f est une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$
 - On dit que f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ lorsque f est dérivable en tout élément de $]a, b[$
 - f est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, on dit que f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a, b]$ lorsque f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, est dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b

5. Fonctions dérivées

Définition f est une fonction dérivable sur un intervalle K si f' est dérivable sur K , sa dérivée est appelée dérivée seconde de f notée f'' ou $f^{(2)}$ f' est aussi appelée dérivée première de f , on le note $f^{(1)}$. Par itération, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f est la dérivée de la dérivée $(n - 1)^{\text{ième}}$ de f . on note : $f^{(1)} = f'$; $f^{(2)} = f''$; ... ; $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. Attention : $f^n \neq f^{(n)}$

Propriété

- (C) est la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle K contenant x_0 . Le point $M_0(x_0 ; f(x_0))$ est un point d'inflexion pour (C) lorsque la dérivée seconde de f s'annule en x_0 en changeant de signe.
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur un intervalle contenant $f(K)$. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur K et on a :

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

- Soit f une fonction numérique dérivable et strictement monotone sur un intervalle K , telle que $\forall x \in K, f'(x) \neq 0$. Soit φ l'application définie de K dans $f(K)$ par $\varphi(x) = f(x)$. φ est bijective et sa réciproque φ^{-1} est dérivable sur $f(K)$ et

$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$$

- Lorsque f est dérivable sur K , l'ensemble de dérivabilité de φ^{-1} est :

$$f(K) \setminus \{f(x), f'(x) = 0\}$$

➤ **Inégalité des accroissements finies et la conséquence**

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K ; a et b deux éléments de K ($a < b$). S'il existe deux nombres réels m et M ($m < M$) tels que pour tout x élément de $[a ; b]$, $m \leq f'(x) \leq M$ alors

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K , a et b deux éléments de K ($a < b$). S'il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de $[a ; b]$, $|f'(x)| \leq M$ alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

➤ **Tableau des dérivées**

- Dérivée des fonctions élémentaires

Fonction f	Dérivée f'	f est dérivable sur l'intervalle
$x \mapsto a, (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax, (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, (n \in \mathbb{Q}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, (n \in \mathbb{Q}^*)$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$] -\frac{\pi}{2} + k; \frac{\pi}{2} + k[(k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto \cotan x$	$x \mapsto -\frac{1}{\sin^2 x}$	$] -\pi + k\pi; \pi + k\pi[(k \in \mathbb{Z})$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

• Opérations

Fonction	Dérivée sur K	Conditions
$f + g$	$f' + g'$	
af	af'	$a \in \mathbb{R}$
$f \times g$	$f'g + g'f$	
$\frac{1}{g}$	$-\frac{g'}{g^2}$	$g(x) \neq 0$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$	$g(x) \neq 0$

• Composition

Fonctions	Dérivée sur K	Conditions
$f \circ g$	$f' \times g' \circ f$	
f^n	$nf'f^{n-1}$	$n \in \mathbb{Q}^*$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$f(x) > 0$
$\cos[f(x)]$	$-f'(x) \sin[f(x)]$	
$\sin[f(x)]$	$f'(x) \cos[f(x)]$	

➤ **Développement limité**

Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle contenant 0. On appelle développement limité d'ordre n de f au voisinage de 0, l'écriture :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

CHAPITRE N°4 : ETUDE DE FONCTIONS NUMERIQUES

Objectifs :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- ✓ Utiliser la représentation graphique pour résoudre une équation, une inéquation
- ✓ Rechercher les directions asymptotiques, les asymptotes
- ✓ Déterminer la position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point donné
- ✓ Etudier des exemples de fonctions rationnelles, irrationnelles, trigonométriques, logarithmique et exponentielle avec ou sans paramètre.

COURS DE MATHÉMATIQUE TERMINALE D

1. Quelques généralités sur les fonctions

a. Eléments de symétrie

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa courbe dans un repère. Soient a, b, x_0 et T quatre nombres réels tels que $T \neq 0$

- ✓ f est dite paire si et seulement si $\forall x \in D_f ; (-x) \in D_f ; \text{et } f(-x) = f(x)$
- ✓ f est dite impaire si et seulement si $\forall x \in D_f ; (-x) \in D_f ; \text{et } f(-x) = -f(x)$
- ✓ le point $A(a ; b)$ est un centre de symétrie pour (C_f) , si et seulement si

$$\forall x \in D_f ; (2a - x) \in D_f ; \text{et } f(2a - x) + f(x) = 2b \text{ ou}$$

$$\forall x \in D_f, (a - x) \in D_f ; (a + x) \in D_f \text{ et } f(a - x) + f(a + x) = 2b$$

Dans ce cas le domaine d'étude est réduit à $D_f \cap [a ; +\infty[$

- ✓ Si f' s'annule en x_0 sans changer de signe, alors le point $I(x_0 ; f(x_0))$ est un point d'inflexion.
- ✓ Si f'' s'annule en x_0 , en changeant de signe, alors le point $I(x_0 ; f(x_0))$ est un point d'inflexion.
- ✓ La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f) si et seulement si

$$\forall x \in D_f ; (2a - x) \in D_f ; \text{et } f(2a - x) = f(x) \text{ ou}$$

$$\forall x \in D_f, (a - x) \in D_f ; (a + x) \in D_f \text{ et } f(a - x) = f(a + x)$$

- ✓ f est dite périodique de période T si et seulement si

$$\forall x \in D_f ; (T + x) \in D_f ; \text{et } f(T + x) = f(x)$$

b. Asymptotes et branches infinies

Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative dans un repère.

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f = \infty$ où $x_0 \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à (C_f)
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f = c, c \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = c$ est asymptote à (C_f) au voisinage de ∞ .
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, où $(a ; b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C_f) au voisinage de ∞
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, on calcule: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de ∞
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de ∞
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a (a \neq 0)$, alors on calcule : $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C_f) au voisinage de ∞
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \infty$, alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$

2. Exemples d'études de fonction numériques

a. Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction, il faut :

Déterminer son domaine de définition ; La limite aux bornes du domaine de définition ; Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction sur son domaine ; Déterminer la dérivée de la fonction ; Etudier le signe de la dérivée ; Donner le sens de variation de la fonction ; Déterminer les points et droites remarquables (asymptotes et tangente) ; axe de symétrie ; centre de symétrie ; branches paraboliques ; ... ; Tracer la courbe, les points et droites remarquables dans le repère

b. Propriétés (sens de variation)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- ✚ Si $f'(x) = 0$ sur I , alors f est constante sur I
- ✚ Si $f'(x) \geq 0$ sur I , alors f est croissante sur I
- ✚ Si $f'(x) \leq 0$ sur I , alors f est décroissante sur I
- ✚ Si $f'(x) > 0$ sur I , alors f est strictement croissante sur I
- ✚ Si $f'(x) < 0$ sur I , alors f est strictement décroissante sur I

c. Position relative entre une droite et une courbe

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f de (D) la droite d'équation $y = ax + b$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour étudier les positions relatives de (C_f) par rapport à (D) , on peut procéder comme suit : Calculer $f(x) - (ax + b)$

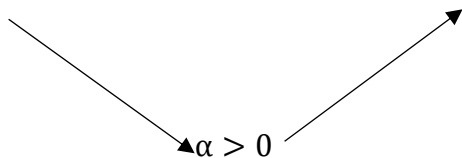
- ✚ Si $[f(x) - (ax + b)] > 0$, alors (C_f) est au-dessus de (D) sur I
- ✚ Si $[f(x) - (ax + b)] < 0$, alors (C_f) est en dessous de (D) sur I
- ✚ Si $[f(x) - (ax + b)] = 0$, alors (C_f) et (D) se coupent en un point d'abscisse x_0

d. Signe d'une fonction sur un intervalle I

- ✚ Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

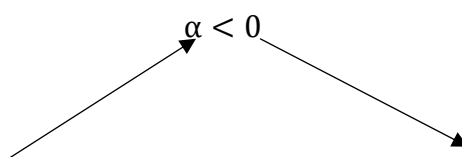
- Le minimum absolu est positif

x	a		
$f'(x)$	-	0	+
f			

$f(x) < 0$ avant a

$f(x) > 0$ après a

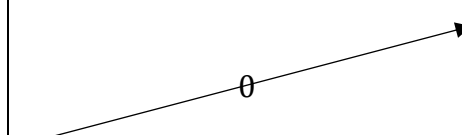
- Le maximum absolu est négatif

x	a		
$f'(x)$	+	0	-
f			

$f(x) > 0$ avant a

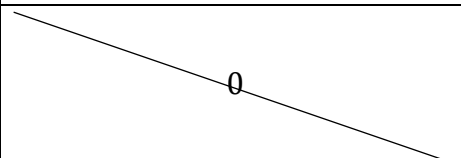
$f(x) < 0$ après a

- f croissante d'une valeur négative à une valeur positive

x	a		
$f'(x)$	+		
f			

$f(x) > 0, \forall x \in I$

- f décroissante d'une valeur positive à une valeur négative

x	a		
$f'(x)$	-		
f			

Utilisation de la factorisation

Factoriser $f(x)$ au maximum ; résoudre l'inéquation $f(x) > 0$ et déterminer l'intervalle sur lequel $f(x) > 0$ et l'intervalle sur lequel $f(x) < 0$ en tenant compte du domaine de résolution.

sur lequel $f(x) < 0$ en tenant compte du domaine de résolution.

CHAPITRE N°5 FONCTIONS LOGARITHMES

Objectifs :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- ✓ Définir la fonction logarithme népérienne et exponentielle
- ✓ Utiliser les propriétés de la fonction logarithme népérien et exponentielle lors de la résolution des problèmes
- ✓ Utiliser les limites usuelles
- ✓ Représenter graphiquement la fonction logarithme népérien et exponentielle
- ✓ Etudier et représenter la fonction logarithme de base a et la fonction exponentielle de base a

I. Fonction logarithme népérien

1. Définition

On appelle fonction logarithme népérien et on note $\ln$, l'unique primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1

2. Conséquences

$\ln 1 = 0$, l'ensemble de définition de la fonction $\ln$ est : $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

3. Propriétés

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$, on a :

$$\text{✚ } x < y \Leftrightarrow \ln x < \ln y \quad \text{et} \quad x = y \Leftrightarrow \ln x = \ln y$$

$$\text{✚ } \ln(xy) = \ln x + \ln y ; \quad \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y ; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y ;$$

$$\text{✚ } \ln(x^r) = r \ln x ; \quad \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\text{✚ } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\text{✚ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0 \quad (r \in \mathbb{Q}_+); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \quad (r \in \mathbb{Q}_+^*)$$

✚ Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I , alors la

$$\text{fonction } (\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

✚ Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I sur lequel elle ne s'annule pas,

$$\text{alors } (\ln \circ |u|)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

✚ Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I sur lequel elle ne s'annule pas, alors la

$$\text{fonction } \ln \circ |u| = \frac{u'}{u}$$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

4. Exemple d'étude de la fonction ln

Domaine de définition : $D =]0 ; +\infty[$

Limites aux bornes de D : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

La fonction ln est dérivable sur D et $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} > 0 \forall x \in]0 ; +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

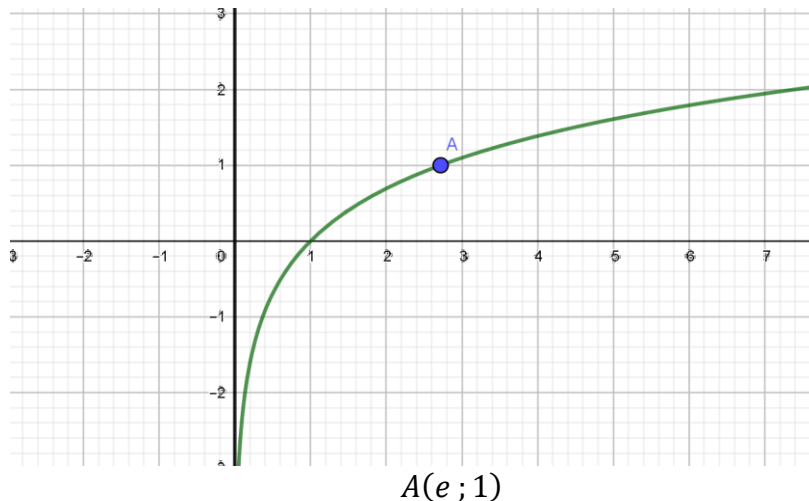
Tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe (C) de ln .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Donc la courbe admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

NB : l'unique antécédent de 1 par la fonction ln est noté $e \approx 2,718$



$A(e ; 1)$

5. Fonction logarithme de base a

a. Définition

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \neq 1$. On appelle fonction logarithme de base a et on note $\log_a$, la fonction

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \log_a(x)$$

Telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

b. Propriété

$$\forall x \text{ et } y \in]0 ; +\infty[, \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y ; \quad \log_a \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_a x ;$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y ; \quad \log_a (x^n) = n \log_a x ; \quad \log_a a = 1$$

c. Exemple d'étude de la fonction $\log_a$

Soit $f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

f est défini, continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$

$$\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \left(\frac{1}{\ln a} \times \ln x \right)' = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x}$$

$\forall x \in]0 ; +\infty[, \frac{1}{x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend de $\ln a$

On a : $a \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

Si $a \in]0 ; 1[, \ln a < 0$ donc $f'(x) < 0$ d'où f est strictement décroissante sur $]0 ; 1[$

Si $a \in]1 ; +\infty[, \ln a > 0$ donc $f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln a} = \begin{cases} -\infty, & \text{si } a \in]1 ; +\infty[\\ +\infty, & \text{si } a \in]0 ; 1[\end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln a} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a \in]1 ; +\infty[\\ -\infty, & \text{si } a \in]0 ; 1[\end{cases}$$

Pour $0 < 1 < 1$

Pour $a > 1$

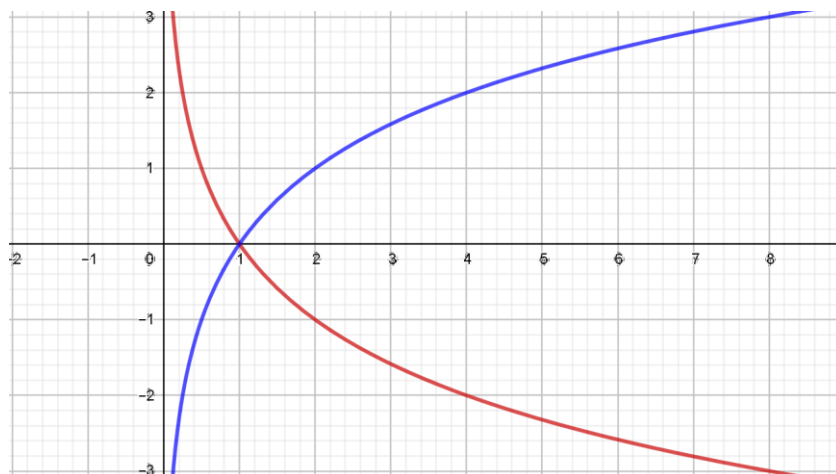
x		0	$+\infty$
$f'(x)$			+
f		$+\infty$	$-\infty$

x		0	$+\infty$
$f'(x)$			+
f		$-\infty$	$+\infty$

Traçons les courbes $(C_{\frac{1}{2}})$ et (C_2)

x	1/4	1/2	1	2	4
$f_{\frac{1}{2}}(x)$	2	1	0	-1	-2

x	1/4	1/2	1	2	4
$f_2(x)$	-2	-1	0	1	2



6. Equations et Inéquations

a. Equation de type $\ln[u(x)] = \ln[v(x)]$

Pour résoudre ce type d'équation, il faut d'abord chercher le domaine de validité ensuite résoudre l'équation $u(x) = v(x)$. En fin on vérifie si les résultats obtenus appartiennent au domaine de validité

- Si oui, alors la (ou les) solution(s) de $\ln[u(x)] = \ln[v(x)]$ est les résultats obtenus
- Sinon, pas de solution pour l'équation

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $(E_1): \ln(-2x + 1) = \ln(x + 4)$; $(E_2): \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$

Rép : $(E_1): D_v =] - 4 ; \frac{1}{2}[$ et $S_{\mathbb{R}} = \{-1\}$; $(E_2): D_v =] - \infty ; -1[\cup] 1 ; +\infty[$ et $S_{\mathbb{R}} = \frac{e+1}{e-1}$

b. Inéquation de type $\ln[u(x)] < \ln[v(x)]$

Même méthode

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $(I_1): \ln(-x + 2) > \ln(x + 3)$; $(I_2): \ln(-x + 3) \leq 1$

Rép : $(I_1): D_v =] - 3 ; 2[$ et $S_{\mathbb{R}} =] - 3 ; -\frac{1}{2}[$; $(I_2): D_v =] - \infty ; 3[$ et $S_{\mathbb{R}} = [-e + 3 ; 3[$

II. Fonction exponentielle

Activité : Après la découverte de la fonction logarithme népérien, Tchimi affirme que c'est une bijection. Tari son ami s'interroge sur la véracité de cette affirmation ; puis désire aussi connaître quelques propriétés de cette réciproque.

- Justifie que la fonction $\ln$ admet une réciproque notée g

COURS DE MATHÉMATIQUE TERMINALE D

- Déterminer l'ensemble de définition de g , puis calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

Rép : justification : la fonction $\ln$ étant continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $\ln(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$; donc elle est bijective. D'où $\ln$ admet une réciproque g .

g étant la bijection réciproque de $\ln$, donc elle est définies de $\mathbb{R}$ vers $]0; +\infty[$. D'où $D_g = \mathbb{R}$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; posons : $y = \ln x$, $y \in \mathbb{R}$.

$y = \ln x \Leftrightarrow x = g(y)$. Par suite, si $x \rightarrow 0^+$, $y \rightarrow -\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

1. Définition

On appelle fonction exponentielle népérienne et on note $\exp$, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien $\ln$

2. Propriétés

Par extension à $\mathbb{R}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$

- ❖ $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^{\ln x} = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$
- ❖ La fonction $\exp$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- ❖ $\forall r \in \mathbb{Q}, \ln e^r = r$
- ❖ $\forall a$ et $b \in \mathbb{R}$ et $\forall r \in \mathbb{Q}, a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$; $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$
- ❖ $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $e^{ar} = (e^a)^r$; $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$
- ❖ La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) = e^x$
- ❖ Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K , alors la fonction $\exp \circ u$ est dérivable sur K et on a : $\forall x \in K, (\exp \circ u)'(x) = u'(x) \times (\exp \circ u)(x)$
- ❖ Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K , alors la fonction $\exp \circ u$ est une primitive sur K de la fonction $u' \times \exp \circ u$
- ❖ Limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$$

3. Représentation graphique

Domaine de définition : $\mathbb{R}$; limites aux bornes $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Dérivabilité et dérivée : la fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$

Signe de la dérivée et sens de variation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) > 0$ car $\exp(x) > 0$ donc $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

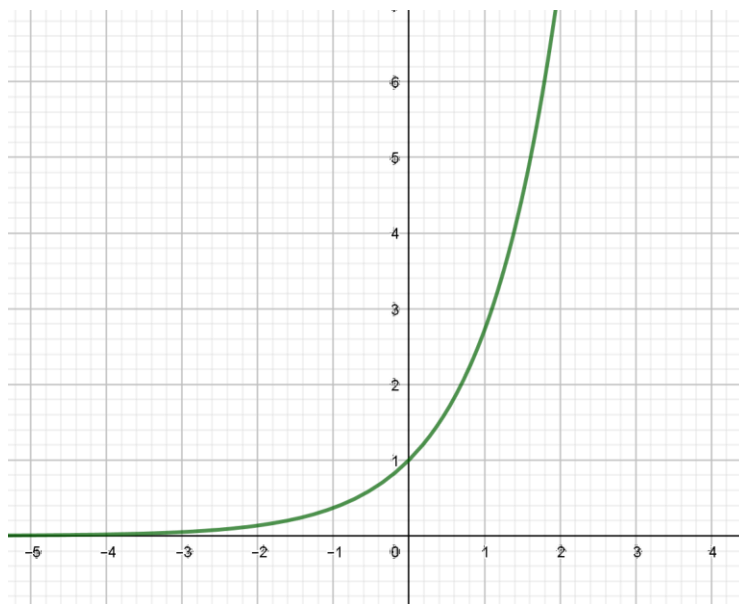
Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	
$\exp$	0	$+\infty$

Branches infinies : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$, on calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$, alors $(\mathcal{C})$ admet

une branche parabolique de direction celle des axes des ordonnées au voisinage de $+\infty$

On a : $\exp(0) = 1$



4. Fonction exponentielle de base a

Activité : Après la découverte de la fonction exponentielle ainsi que ses propriétés Iya ami de Tchimi et élève en classe de la TleD, affirme que la fonction $\exp$ est une fonction puissance. Tchimi s'interroge et désire savoir s'il y a d'autres fonctions exponentielles.

- Comparer 3^2 et $e^{2 \ln 3}$ puis $8^{\frac{1}{3}}$ et $e^{\frac{1}{3} \ln 8}$
- Comparer 2 et 3 puis $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^3$
- Comparer -3 et -2 puis $(\sqrt{2})^{-3}$ et $(\sqrt{2})^{-2}$

Rép :

$$3^2 = e^{2 \ln 3} \text{ et } 8^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \ln 8} ; \quad 2 < 3 \text{ et } \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 ; \quad -3 < -2 \text{ et } (\sqrt{2})^{-3} < (\sqrt{2})^{-2}$$

a. Définition

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

- Soit a un nombre réel strictement positif et α un nombre réel. On appelle puissance de a d'exposant α , le nombre réel noté a^α définie par : $a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$
- Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction exponentielle de base a , l'application notée $\exp_a$ et telle que :

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto a^x \\ \forall x \in \mathbb{R}, \exp_a x = a^x = e^{x \ln a}$$

b. Propriétés

- ✓ a étant un nombre réel strictement positif différent de 1, la fonction $\exp_a$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$; elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}$
 - ✚ Si $0 < a < 1$, alors la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
 - ✚ Si $a > 1$, alors la fonction $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ✓ a étant un nombre réel strictement positif différent de 1, α et β deux réels
 - ✚ $(a^\alpha = a^\beta) \Leftrightarrow (\alpha = \beta)$
 - ✚ Si $0 < a < 1$, alors $[(a^\alpha < a^\beta) \Leftrightarrow (\alpha > \beta)]$
 - ✚ Si $a > 1$, alors $[(a^\alpha < a^\beta) \Leftrightarrow (\alpha < \beta)]$

c. Définition (fonction puissance)

α étant un nombre réel, on appelle fonction puissance d'exposant α , l'application

$$f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto x^\alpha \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

d. Propriétés

- ✓ Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction puissance d'exposant α noté f_α est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$; elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$
 - ✚ Si $\alpha < 0$, alors f_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$
 - ✚ Si $\alpha > 0$, alors f_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
- ✓ Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
- ✓ Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$: si g est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K , alors la fonction g^α est dérivable sur K , on a : $\forall x \in K, (g^\alpha)'(x) = \alpha g'(x) g^{\alpha-1}(x)$
- ✓ α étant un nombre réel différent de 0 et -1 . Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$

COURS DE MATHÉMATIQUE TERMINALE D

- ✓ Si g est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K , alors une primitive sur K de la fonction $g'g^\alpha$ est la fonction $\frac{1}{\alpha+1}g^{\alpha+1}$

- ✓ Limites remarquables

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Si $\alpha > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$

Si $\alpha < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \text{ si } \alpha > 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x \text{ si } \alpha > 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$$

e. Exemple d'étude de fonctions exponentielle de base a et de fonctions puissances.

i. Fonction exponentielle de base a

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.

On considère l'application : $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$
 $x \mapsto a^x$

- ✓ Calcule suivant les valeurs de a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a x$
- ✓ Justifie que $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis détermine pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp_a'$
- ✓ Etablir suivant les valeurs de a , le tableau de variation de $\exp_a$
- ✓ On désigne par (C_a) la courbe représentative de $\exp_a$, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Etudie suivant les valeurs de a , les branches infinies de (C_a) puis tracer $(C_{\frac{1}{2}})$ et (C_2)

Rép : 1^{er} cas : $0 < a < 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln a = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln a = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

2^e cas : $a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln a = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln a = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

Justification : la fonction $x \mapsto x \ln a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction monôme donc la fonction $x \mapsto e^{x \ln a}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'_a(x) = (\ln a)e^{x \ln a}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x \ln a} > 0$ donc $\exp_a$ a le signe de $\ln a$

1^{er} cas : $0 < a < 1$

Dans ce cas on a : $\ln a < 0$ donc $\exp'_a(x) < 0$ alors la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

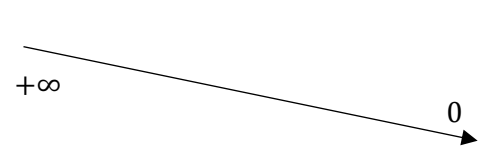
2^e cas : $a > 1$

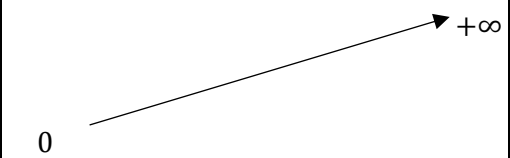
Dans ce cas, $\ln a > 0$ donc $\exp'_a(x) > 0$ alors la fonction $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

✓ Tableau de variation

1^{er} cas : $0 < a < 1$

2^e cas : $a > 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'_a(x)$	-	
$\exp_a$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'_a(x)$	+	
$\exp_a$		

1^{er} cas, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe

$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x \ln a}}{x} \times \ln a = -\infty$ car : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x \ln a}}{x \ln a} = +\infty \\ \ln a < 0 \end{cases}$; donc la courbe admet

une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

2^e cas, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe

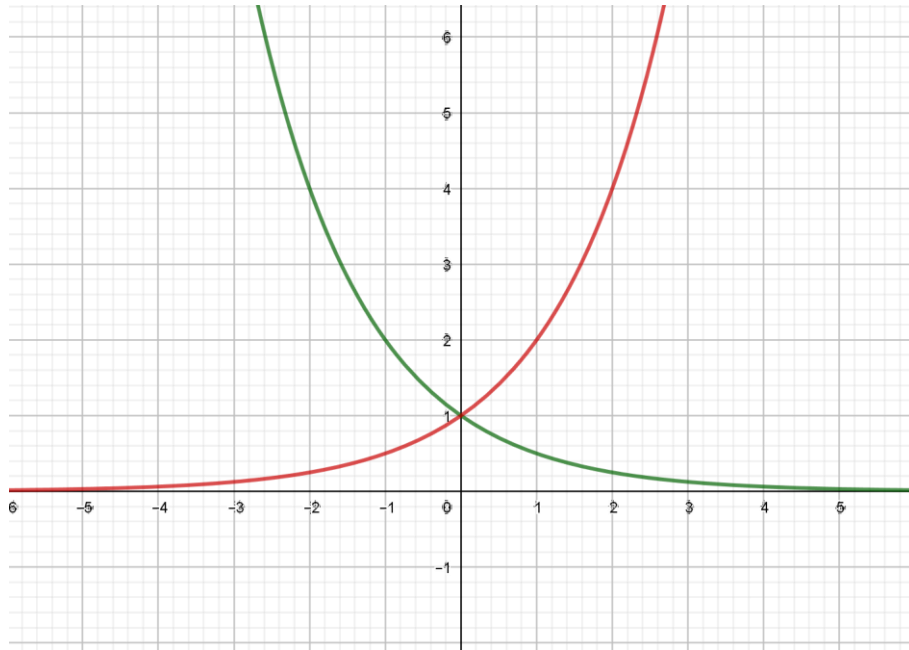
$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln a}}{x} \times \ln a = +\infty$ car : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln a}}{x \ln a} = +\infty \\ \ln a > 0 \end{cases}$; donc la courbe admet

une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

✓ Traçons les courbes $(C_{\frac{1}{2}})$ et (C_2)

x	-2	-1	0	1	2
$\exp_{\frac{1}{2}}(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\exp_2(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D



ii. Fonction puissance

- a. Etudier les variations de la fonction $f_\alpha: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$
 $x \mapsto x^\alpha$
- b. Tracer les courbes $(C_{-\sqrt{3}})$ et $(C_{\sqrt{3}})$
5. Equations et inéquations
 - a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $e^{x-3} = 4$; $S_{\mathbb{R}} = \{3 + \ln 4\}$; $e^{x+6} = -2$, $S_{\mathbb{R}} = \{\}$
 - b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $e^{x-3} < 4$, $S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; 3 + \ln 4[$; $e^{x+6} < -2$, $S_{\mathbb{R}} = \{\}$; $e^{x+6} > -2$, $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

CHAPITRE N°6 : CALCULS INTEGRAL

Objectifs :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- ✓ Définir l'intégral d'une fonction
- ✓ Utiliser les propriétés de l'intégrale dans la résolution des problèmes
- ✓ Utiliser les techniques de calcul intégral (formule des primitives usuelles, intégration par parties, changement de variables affines) pour calculer des intégrales.
- ✓ Déterminer une valeur approchée d'une intégrale
- ✓ Calculer l'aire d'un domaine plan
- ✓ Calculer des volumes (pyramide, cône et boule)

I. Primitives

1. Définition

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle K .

On appelle primitive de f sur K , toute fonction F dérivable sur K , telle que

$$F'(x) = f(x) \text{ on note aussi : } \int f(x)dx = F'(x)$$

2. Propriétés

- ✓ Toute fonction continue sur un intervalle K , admet une primitive sur K
- ✓ Soit f une fonction admettant une primitive particulière F sur un intervalle K . alors pour toute constante réelle c , la fonction $x \mapsto F(x) + c$ est une primitive de f sur K .
- ✓ f est une fonction continue sur un intervalle K ; x_0 un nombre réel de K et y_0 un nombre réel. Il existe une et une seule primitive de f sur K prenant la valeur y_0 en x_0
- ✓ Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle K , alors pour tous nombres réel a et b , la fonction $aF + bG$ est une primitive sur K de la fonction $af + bg$

3. Primitives des fonctions usuelles

<i>fonction f</i>	<i>primitives de f</i>	<i>intervalle K</i>
$x \mapsto a, (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, (n \in \mathbb{Q})$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$] -\infty ; 0[\text{ ou }]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{Q} \setminus \{1\})$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$] -\infty ; 0[\text{ ou }]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x} + c$	$]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$x \mapsto \tan x + c$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \sin(ax + b), a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax + b), a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

4. Autres primitives

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle K .

Fonctions	Primitives de f
$u' \times u \ (n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^n} \ (n \in \mathbb{Q} \setminus \{1\})$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$u' \cos u$	$\sin u$
$u' \sin u$	$-\cos u$
$u'v + v'u$	$u \times v$
$u' + v'$	$u + v$

✓ Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K , f' sa dérivée, g une fonction dérivable sur un intervalle contenant $f(K)$. La fonction $g \circ f$ est une primitive sur K de la fonction $f' \times (g' \circ f)$

II. Intégration d'une fonction continue sur un intervalle

1. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K . on appelle intégral de a à b de f , le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur K . on note :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2. Propriétés : relation de Chasles, linéarité, positivité, inégalité de la moyenne, valeur moyenne d'une fonction

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I

✓ $\forall a \in I \text{ et } \forall b \in I$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \text{ et } \int_a^a f(x)dx = 0$$

✓ $\forall a \in I, \forall b \in I \text{ et } \forall c \in I,$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ (Relation de Chasles)}$$

✓ $\forall a \in I, \forall b \in I \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx ; \int_a^b (\alpha f(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

- ✓ Si f est positive sur I , alors on a : $\forall a \in I, \forall b \in I, a \leq b$

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

- ✓ Si $f \geq g$ sur I , alors, on a : $\forall a \in I, \forall b \in I, a \leq b$

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

- ✓ $\forall a \in I, \forall b \in I, a \leq b$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

- ✓ S'il existe un nombre réel M tel que $\forall x \in [a ; b], (a \in I, b \in I, a < b)$

$$|f(x)| \leq M \text{ alors, } \int_a^b |f(x)| \leq M|b - a|$$

- ✓ Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b], a < b$ et m et M des nombres réels.

Si $\forall x \in [a ; b], m \leq f(x) \leq M$ alors $(b - a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$. (Inégalité de la moyenne)

Il existe au moins un nombre réel c de $[a ; b]$ tel que $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Le nombre $f(c)$ est appelé valeur moyenne de f sur $[a ; b]$

- ✓ Si f est une fonction paire et continue sur un intervalle contenant les nombres réels 0 et a , alors

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx \text{ et } \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

- ✓ Si f est une fonction impaire et continue sur un intervalle contenant les nombres 0 et a , alors

$$\int_{-a}^a f(x)dx = - \int_0^a f(x)dx \text{ et } \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

- ✓ Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T , alors on a : $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

III. Techniques de calcul intégral

1. Intégration par primitive

Cette méthode est utilisée seulement si on peut trouver une primitive F de la fonction f .

2. Intégration par changement de variable

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . soit $\varphi: [\alpha; \beta]$ alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

En pratique, pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, on pose :

$$x = \varphi(t); \text{ donc } dx = \varphi'(t)dt; \quad a = \varphi(\alpha) \text{ et } b = \varphi(\beta)$$

3. Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$, $a < b$

Si les fonctions dérivées f' et g' sont continue sur $[a; b]$, alors

$$\int_a^b (f'(x) \times g(x))dx = [f(x) \times g(x)]_a^b - \int_a^b (g'(x) \times f(x))dx$$

4. Fonction définie à l'aide d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a . la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Est l'unique primitive sur I de la fonction f qui prend la valeur 0 en a .

IV. Application de l'intégration

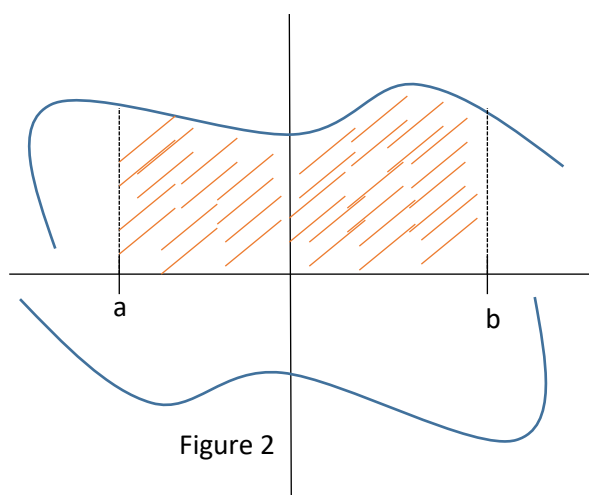
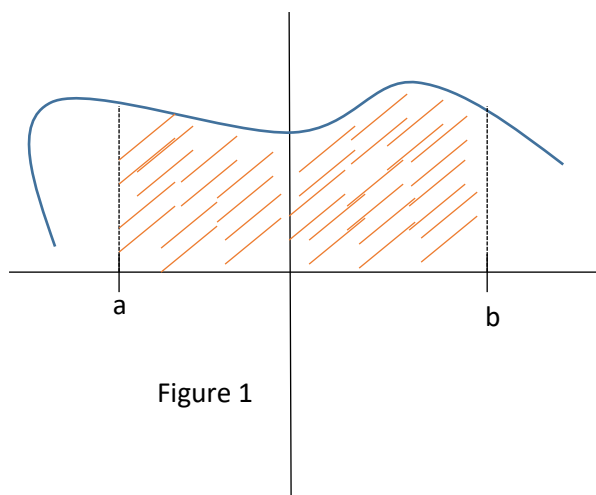
1. Calcul d'aires

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; I, J)$ f étant une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, de représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$.

$\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_f)$, (OI) , les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

- ✓ Calcul de l'aire d'une partie du plan limité par l'axe des abscisses et une courbe

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D



- Si f est continue et positive (figure 1), alors :

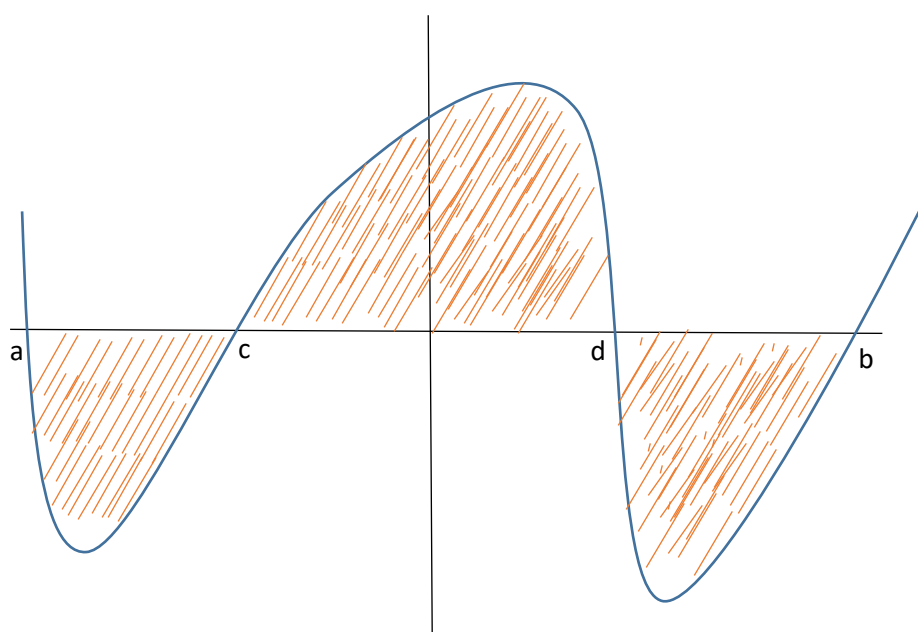
$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx \text{ u. } a$$

- Si f est continue et négative (figure 2), alors :

$$\mathcal{A} = - \int_a^b f(x)dx \text{ u. } a$$

- Si f est continue et quelconque, alors :

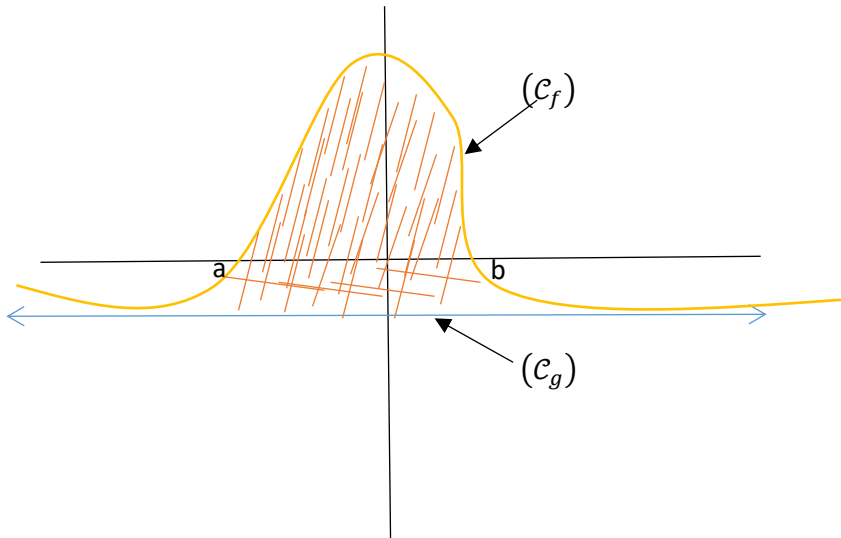
$$\mathcal{A} = \left(- \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx - \int_d^b f(x)dx \right) \text{ u. } a$$



COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

✓ Calcul de l'aire d'une partie du plan limitée par deux courbes

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$) telles que $\forall x \in [a; b]$, avec $f(x) \geq g(x)$.



L'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \text{ u. a}$$

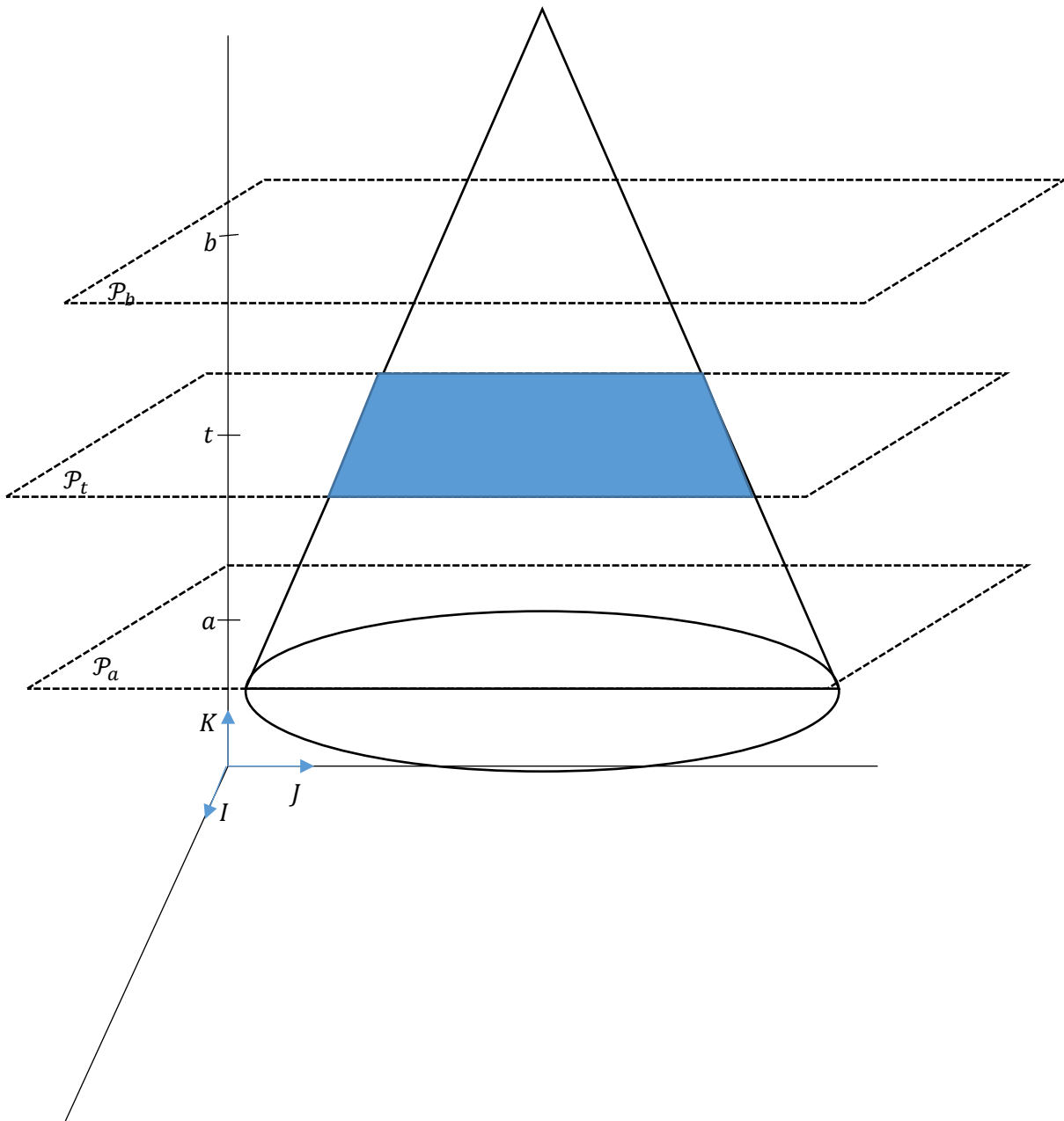
2. Calcul de volumes

Le volume de la partie d'un solide limité par les plans $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_b$ d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ avec $a < b$ est déterminé par :

$$V = \int_a^b S(t) dt \text{ u. } v$$

$S(t)$ étant l'aire de la section du solide par le plan $(\mathcal{P}_t)$ d'équation $x = t$ avec $(a < b \leq t)$ et la fonction $t \mapsto S(t)$ est continue sur $[a; b]$

COURS DE MATHÉMATIQUE TERMINALE D



3. Méthode des rectangles

Soit f une fonction positive et continue sur un intervalle $[a; b]$, avec $a < b$; pour déterminer une valeur approchée de :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx$$

On subdivise l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles dont les bases sont : $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$. Posons :

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) ; S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \text{ et } T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right)$$

- ✓ $R_n; S_n$ et $\frac{R_n + S_n}{2}$ sont appelés valeurs approchées de $\mathcal{A}$ par la méthode des rectangles.
- ✓ T_n est appelé valeur approchée de $\mathcal{A}$ par la méthode des trapèzes.

CHAPITRE N°7 : EQUATIONS DIFFERENTIELLE LINEAIRES HOMOGENES DU 1^{ER} ET DU 2^{EME} ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS

Objectifs :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- ✓ Définir les équations différentielles linéaire homogène du 1^{er} et du 2nd ordre à coefficient constant
- ✓ Résoudre les équations différentielle linéaires homogène du 1^{er} et du 2nd ordre à coefficient constant

1. Définition

- ✓ On appelle **équation différentielle**, toute équation ayant pour inconnue une fonction et dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.
- ✓ Une équation différentielle est dite **linéaire** lorsque l'expression de la fonction inconnue et de ses dérivées successives dans l'équation est soit 0 ou 1.
- ✓ On appelle **ordre** d'une équation différentielle, l'ordre le plus élevé des dérivées successives intervenant dans l'équation.
- ✓ Une équation différentielle est dite **sans second membre** lorsque l'un de ses membres est nul.
- ✓ Toute fonction vérifiant une équation différentielle sur un intervalle K est solution sur K de cette équation différentielle.

2. Equations différentielle du type $ay' + by = 0 ; a \in \mathbb{R}^* ; b \in \mathbb{R}$

Ces genres d'équations sont appelées : équations différentielles du premier ordre à coefficient constant sans second membre.

Les seules solutions de cette équation sont les fonctions

$$f_k(x) = ke^{-\frac{b}{a}} ; k \in \mathbb{R}$$

3. Equations différentielle du type $ay'' + by' + cy = 0 ; a \in \mathbb{R}^* ; b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}$

Ces genres d'équations, sont des équations différentielles du second ordre à coefficient constant sans second membre.

a. Equations caractéristiques

On appelle **équation caractéristique** d'une équation différentielle du type $ay'' + by' + cy = 0 ; a \in \mathbb{R}^* ; b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}$, l'équation d'inconnue r suivante : $(E_c): ar^2 + br + c = 0$.

b. Résolution des équations différentielles du type (E): $ay'' + by' + cy = 0 ; a \in \mathbb{R}^* ; b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}$

Pour résoudre ce type d'équation, on détermine d'abord l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle ; ensuite, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

COURS DE MATHÉMATIQUE TERMINALE D

- ✓ Si $\Delta > 0$, alors (E_c) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 . Par suite les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions :

$$f_{AB}(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x} ; A, B \in \mathbb{R}$$

- ✓ Si $\Delta = 0$, alors (E_c) admet une unique solution réelle r_0 et dans ce cas, (E) a pour solutions, les fonctions :

$$f_{AB}(x) = (Ax + B)e^{r_0x} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

- ✓ Si $\Delta < 0$, alors (E_c) admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ et dans ce cas, (E) a pour solutions, les fonctions :

$$f_{AB}(x) = [A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)]e^{\alpha x} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

4. Exercice d'application N°1

- a. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

$$(E_1): y' - y = 0 ; (E_2): 5y' - 3y = 0 ; (E_3): y' - \ln 2 y = 0 ; (E_4): 3y' + 2y = 0$$

- b. Déterminer la solution f de (E_4) telle que $f(0) = -2$

- c. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$$(E_1): 2y - 3y' + y = 0 (E_2): 4y - 4y' + y = 0 ; (E_3): y - 4y' + 5y = 0$$

- d. Déterminer la solution g de (E_2) telle que : $g(0) = -2$ et $g'(0) = 0$

5. Exercice d'application N°2

On considère les équations différentielles ci – après : $(E): y' + 2y = e^{-2x}$ et $(E'): y' + 2y = 0$

1. Vérifie que la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = (x + 1)e^{-2x}$ est une solution de (E)
2. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E')
3. Déduis les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E)

CHAPITRE N°8 : SUITE NUMÉRIQUES

Objectifs :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- ✓ Utiliser le raisonnement par récurrence pour établir certaines propriétés.
- ✓ Démontrer qu'une suite est convergente
- ✓ Utiliser la propriété : toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) est convergente
- ✓ Utiliser la propriété : si $U_{n+1} = f(U_n)$, (U_n) convergente de limite l et f continue en l alors $f(l) = l$
- ✓ Utiliser les théorèmes de comparaison lors de la résolution des problèmes

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

1. Définitions :

- On appelle **suite numérique**, toute fonction définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$
- L'ensemble de définition d'une suite est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à un entier naturel donné.

2. Notion et vocabulaire

Soit la suite $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto u(n)$ et (E) son ensemble de définition

- Cette suite est notée $(U_n)_{n \in E}$ ou simplement (U_n)
- L'image de n par u , $u(n)$ est notée U_n elle est appelée terme d'indice n (ou terme de rang n lorsque $E = \mathbb{N}^*$).
- Lorsque U_n est fonction de n , on l'appelle terme général de la suite.

3. Mode de définition d'une suite

- ✓ On peut définir une suite numérique $(U_n)_{n \in E}$ par la donnée d'une formule qui détermine U_n en fonction de n . une telle suite est dite définie par une formule explicite.
- ✓ On peut aussi définir une suite par la donnée :
 - De son premier terme ou d'un terme défini par sa valeur numérique et son indice
 - D'une formule de récurrence qui explicite le calcul de U_{n+1} en fonction de U_n . Une telle suite est dite suite définie par récurrence.

4. Suite majorée, minorée et bornée

Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite numérique

- $(U_n)_{n \in E}$ est dite **majorée** si et seulement si il existe un nombre réel M tel que $\forall n \in E, U_n \leq M$
- $(U_n)_{n \in E}$ est dite **minorée** si et seulement si il existe un nombre réel m tel que $\forall n \in E, U_n \geq m$
- $(U_n)_{n \in E}$ est dite **bornée** si et seulement si elle est à la fois **majorée** et **minorée**.

5. Sens de variation d'une suite

Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite numérique

- ✚ Si $\forall n \in E, U_n \leq U_{n+1}$, alors $(U_n)_{n \in E}$ est **croissante**
- ✚ Si $\forall n \in E, U_n < U_{n+1}$, alors $(U_n)_{n \in E}$ est **strictement croissante**
- ✚ Si $\forall n \in E, U_n \geq U_{n+1}$, alors $(U_n)_{n \in E}$ est **décroissante**
- ✚ Si $\forall n \in E, U_n > U_{n+1}$, alors $(U_n)_{n \in E}$ est **strictement décroissante**
- ✚ Si $\forall n \in E, U_n = U_{n+1}$, alors $(U_n)_{n \in E}$ est **Constante**

Remarque : on dit que Si $(U_n)_{n \in E}$ est **monotone** si elle est soit **croissante**, soit **décroissante**

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

6. Convergence

a. Définition

- ❖ Une suite numérique est dite **convergente** si elle admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$: c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l ; l \in \mathbb{R}$$

- ❖ Une suite numérique est dite **divergente** si elle n'est pas **convergente**.

b. Propriétés (limites et comparaison).

Soient (U_n) ; (V_n) et (W_n) trois suites numériques.

- ❖ S'il existe un entier naturel noté n_0 tel que l'on ait pour tout entier $n \geq n_0$, $U_n < V_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l'$, alors $l \leq l'$
- ❖ S'il existe un entier naturel n_0 tel que l'on ait pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $V_n \leq U_n \leq W_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$
- ❖ S'il existe un nombre réel l et un entier naturel n_0 tel que l'on ait pour tout entier $n \geq n_0$, $|U_n - l| \leq V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$; alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$
- ❖ Toute suite **croissante** et **majorée** est **convergente**.
- ❖ Toute suite **décroissante** et **minorée** est **convergente**.
- ❖ Toute suite **croissante** et **non majorée** est **divergente**
- ❖ Toute suite **décroissante** et **non minorée** est **divergente**
- ❖ Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . Si (U_n) est une suite, à valeur dans I , qui converge vers un nombre réel a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(U_n) = b$
- ❖ Soit g une fonction continue sur un intervalle K ; soit (u_n) une suite à valeur dans K définie par la formule de récurrence $U_{n+1} = g(U_n)$. Si (U_n) converge vers α , alors α est une solution de l'équation $g(x) = x$ dans K .
- ❖ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ et si à partir d'un certain rang $U_n \geq V_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$
- ❖ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$ et si à partir d'un certain rang $U_n \leq V_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$
- ❖ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$

Si $a > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$

Si $0 < a < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = 0$

7. Raisonnement par récurrence. Pour démontrer une propriété par récurrence :

Pour démontrer une propriété par récurrence,

- ✓ On la vérifie au premier ordre (pour la première valeur prise par n)
- ✓ On la suppose vraie pour un n supérieur ou égal au premier ordre

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

- ✓ On le démontre à l'ordre $n + 1$. Puis on conclut que la propriété est vraie pour tout n .

8. Suite arithmétique, suite géométrique

1. Suites arithmétiques

a. Définition

Une suite $(U_n)_{n \in E}$ est dite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que : $\forall n \in E, U_{n+1} - U_n = r$.
 r est appelé raison de la suite.

b. Propriétés

Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite arithmétique de raison r et U_k un terme de (U_n)

- ✓ $\forall n \in E, U_n = U_k + (n - k)r$
- ✓ La somme S de p termes consécutif $U_k, U_{k+1}, \dots, U_{k+p-1}$ de la suite (U_n) est donnée par la formule :

$$S_n = U_k + U_{k+1} + \dots + U_{k+p-1} = \frac{(U_k + U_{k+p-1}) \times p}{2}$$

- ✓ a, b et c sont dans cet ordre, des termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $b = \frac{a+c}{2}$

2. Suites géométriques

a. Définition

Une suite $(U_n)_{n \in E}$ est dite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que $\forall n \in E, U_{n+1} = qU_n$, q étant la raison de la suite

b. Propriétés

Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite géométrique de raison q et U_k un terme de (U_n)

- ✓ $\forall n \in n, U_n = q^{n-k}U_k$
- ✓ La somme S de p termes consécutif $U_k, U_{k+1}, \dots, U_{k+p-1}$, de la suite (U_n) est donnée par la formule

$$S = \frac{U_k(1 - q^p)}{1 - q}$$

- ✓ a, b et c sont dans cet ordre des termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2 = a \times c$

CHAPITRE N°9 : SERIES STATISTIQUES A DEUX VARIABLES (DOUBLES)

Objectifs :

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- ✓ Représenter un nuage de point
- ✓ Déterminer le point moyen
- ✓ Déterminer les équations des droites de régression et tracer ces droites
- ✓ Calculer et interpréter le coefficient de corrélation

1. Nuage de points, point moyen d'un nuage

i. Définitions

$\mathcal{P}$ est une population d'effectif N , sur laquelle sont définis deux caractères X et Y .

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, l'ensemble des modalités du caractère X , noté M_X ;

$\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, l'ensemble des modalités du caractère Y , noté M_Y ;

φ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(\alpha) = (X(\alpha) ; Y(\alpha))$

x_i et y_j deux modalités respectives de X et Y .

$\mathcal{F}$ la représentation graphique de $M_X \times M_Y$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.

- ✓ On appelle effectif du couple $(x_i ; y_j)$ le nombre d'antécédents de ce couple par l'application φ ; cet effectif est noté : n_{ij}
- ✓ On appelle **série statistique double** de caractère $(X ; Y)$ l'ensemble des triplets $(x_i ; y_j ; n_{ij})$
- ✓ On appelle nuage de points associé à la série statistique double de caractère $(X ; Y)$ la partie de $\mathcal{F}$ dont tous les points ont un couple de coordonnées $(x_i ; y_j)$ d'effectif non nul.

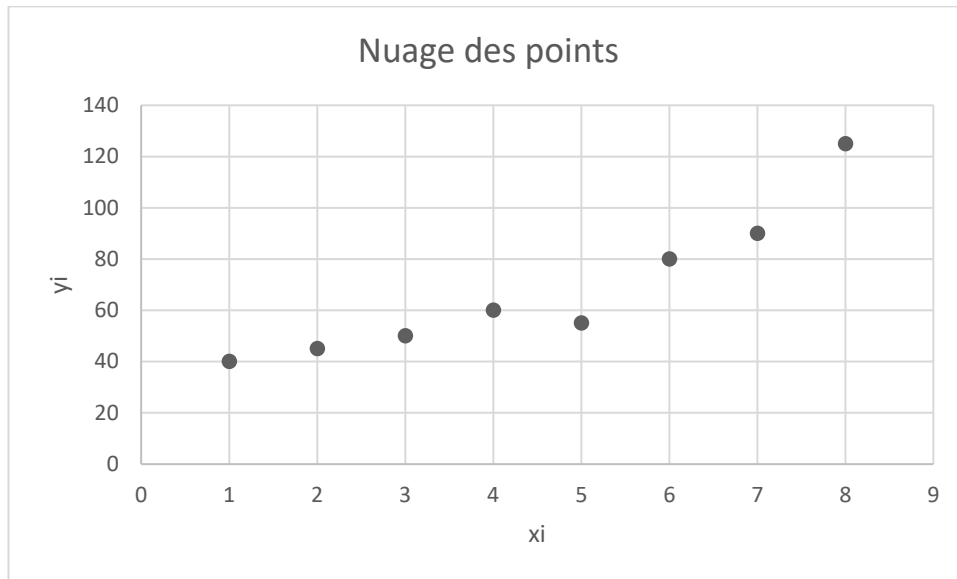
NB : lorsque les $n_{ij} = 1$, on a une série statistique double linéaire.

$$N = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij}$$

ii. Représentation du nuage de points par un diagramme cartésien.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_j	40	45	50	60	55	80	90	125

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D



iii. Point moyen

On appelle point moyen d'un nuage de n points M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$ telles que :

$$x_G = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p x_i \quad \text{et} \quad y_G = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p y_i$$

2. Ajustement linéaire

Suivant la forme du nuage de point $M_{ij} (x_i ; y_j)$. On peut essayer de trouver une fonction qui modélise le lien entre les deux caractères X et Y , de telle façon que la courbe d'équation $y = f(x)$ passe « le plus très possible » du nuage de points.

i. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés

On démontre et nous admettons que pour un nuage de meilleur ajustement au sens des moindres carrés ordinaires. Ces droites s'appellent **droites de régression**. L'une appelée droite de régression de y en x et a pour équation : $y = ax + b$. L'autre appelée droite de régression de x en y et a pour équation : $x = a'y + b'$.

$$a = \frac{Cov(X; Y)}{V(X)}; b = \bar{y} - a\bar{x}; a' = \frac{Cov(X; Y)}{V(Y)} \text{ et } b' = \bar{x} - a'\bar{y}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p} \text{ et } \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^p n_j y_j = \frac{n_1 y_1 + n_2 y_2 + \dots + n_p y_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^p n_i} = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2 \text{ et } V(Y) = \frac{\sum_{j=1}^p n_j (y_j - \bar{y})^2}{\sum_{j=1}^p n_j} = \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^p n_j y_j^2 \right) - \bar{y}^2$$

$V(X)$ est la variance de la série $(x_i ; n_i)$ et $V(Y)$ est la variance de la série $(y_j ; n_j)$

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

La détermination de la covariance notée $Cov(X ; Y)$ peut se faire suivant la forme du tableau statistique que l'on utilise. Par exemple :

➤ Pour les tableaux simples de la forme ci-dessous

x_i	x_1	x_2	...	x_p
y_i	y_1	y_2	...	y_p

$$Cov(X ; Y) = \frac{1}{N} \sum_i^p x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$$

➤ Pour les tableaux à double entrée de la forme ci-dessous

$y_j \backslash x_i$	x_1	x_2		x_p	<i>Total</i>
y_1	n_{11}	n_{21}		n_{p1}	N'_1
y_2	n_{12}	n_{22}		n_{p2}	N'_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_q	n_{1q}	n_{2q}		n_{pq}	N'_q
<i>Total</i>	N_1	N_2		N_p	N

$$Cov(X ; Y) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} x_i y_j \right) - (\bar{x} \bar{y})$$

ii. Ajustement linéaire par la méthode de Mayer

La méthode de Mayer consiste à partager la série double en deux sous séries d'effectifs égaux (à une unité près, car le nombre de valeurs peut être impair).

On calcul les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 de chaque sous série. La droite passant par les points G_1 et G_2 est une droite d'ajustement du nuage passant par le point $G(\bar{x} ; \bar{y})$ appelée droite de Mayer du nuage.

3. Qualité de l'ajustement linéaire

La qualité de l'ajustement linéaire se mesure par le coefficient de corrélation linéaire noté r et défini par :

$$r = \frac{Cov(X ; Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} = \frac{Cov(X ; Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

$\sigma(X)$; $\sigma(Y)$ sont respectivement les écart types de X et Y.

Remarque :

✓ r a le même signe que la covariance

COURS DE MATHEMATIQUE TERMINALE D

✓ $-1 \leq r \leq 1$

✓ Interprétation

- Si $|r| = 1$, alors on dit que l'ajustement est **parfait**. Dans ce cas, les résultats sont fiables
- Si $0,87 \leq r < 1$, alors on dit qu'il y a une forte corrélation entre les variables. Dans ce cas les résultats sont encore fiables.
 - Si $r < 0,87$, alors on dit que la liaison entre les deux variables est lâche. Dans ce cas, les résultats ne sont pas fiables
 - Si $|r|$ est voisin de 0, on dit qu'il y a indépendance linéaire statistique.

FIN DU PROGRAMME