

Table des matières

| | | |
|----------|--|----------|
| I | ANALYSE | 5 |
| 1 | FONCTIONS NUMÉRIQUES | 6 |
| 1.1 | Fonctions Numériques à variable réelle | 6 |
| 1.1.1 | Définition | 6 |
| 1.1.2 | Ensemble de définition | 6 |
| 1.1.3 | Quelques conditions d'existences des fonctions numériques | 7 |
| 1.2 | Compléments sur les limites | 7 |
| 1.2.1 | Limites de référence | 7 |
| 1.2.2 | Limites en l'infini des fonctions usuelles | 8 |
| 1.2.3 | Formes indéterminées | 8 |
| 1.2.4 | Limites classiques des fonctions trigonométriques | 8 |
| 1.2.5 | Limites par comparaison | 9 |
| 1.3 | Étude des branches infinies | 10 |
| 1.3.1 | Asymptote verticale : droite parallèle à l'axe (Oy) | 10 |
| 1.3.2 | Asymptote horizontale : droite parallèle à l'axe (Ox) | 10 |
| 1.3.3 | Asymptote oblique | 11 |
| 1.3.4 | Direction asymptotique | 11 |
| 1.3.5 | Position de la courbe (\mathcal{C}) par rapport à la droite (\mathcal{D}) : $y = ax + b$ | 11 |
| 1.3.6 | Branches paraboliques | 11 |
| 1.4 | Continuité d'une fonction numérique | 12 |
| 1.4.1 | Continuité d'une fonction en un point x_0 | 12 |
| 1.4.2 | Continuité à gauche et continuité à droite d'une fonction | 12 |
| 1.4.3 | Continuité sur un intervalle | 13 |
| 1.4.4 | Prolongement par continuité | 13 |
| 1.4.5 | Image d'un intervalle par une fonction continue | 14 |
| 1.4.6 | Cas d'une fonction ni croissante, ni décroissante sur $I = [a; b]$ | 14 |
| 1.4.7 | Théorème des valeurs intermédiaires | 14 |
| 1.4.8 | Fonction continue et strictement monotone | 15 |
| 1.5 | Dérivabilité | 15 |
| 1.5.1 | Dérivabilité d'une fonction en un point x_0 | 15 |
| 1.5.2 | Équation de la tangente (T) | 16 |
| 1.5.3 | Tangentes particulières | 16 |
| 1.5.4 | Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite | 16 |
| 1.5.5 | Interprétation géométrique : Notion de demi-tangente à une courbe | 17 |
| 1.5.6 | Dérivabilité sur un intervalle | 17 |
| 1.5.7 | Fonction dérivée | 17 |
| 1.5.8 | Propriétés sur les fonctions dérivables | 17 |
| 1.5.9 | Tableau des dérivées des fonctions usuelles | 18 |
| 1.5.10 | Dérivées et opérations sur les fonctions | 18 |
| 1.5.11 | Dérivée de la réciproque de dérivation | 18 |
| 1.6 | Accroissements finis | 18 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1.6.1 | Théorème de Rolle | 18 |
| 1.6.2 | Théorème des accroissements finis | 19 |
| 1.6.3 | Théorème des inégalités des accroissements finis | 19 |
| 1.7 | Éléments de symétries | 19 |
| 1.7.1 | Fonction paire, fonction impaire | 19 |
| 1.7.2 | a) Fonction paire | 19 |
| 1.7.3 | Centre et Axe de symétrie d'une fonction | 21 |
| 1.7.4 | Périodicité | 22 |
| 1.7.5 | Familles des fonctions | 22 |
| 1.7.6 | Points d'intersection d'une courbe (\mathbb{C}) avec les axes du repère | 23 |
| 1.8 | Courbes des fonctions associées aux fonctions données | 23 |
| 1.8.1 | Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto -f(x)$ | 23 |
| 1.8.2 | Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto f(-x)$ | 23 |
| 1.8.3 | Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto -f(-x)$ | 23 |
| 1.8.4 | Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto f(x - a)$ | 23 |
| 1.8.5 | Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto f(x) + b$ | 23 |
| 1.8.6 | Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto f(x - a) + b$ | 24 |
| 1.8.7 | Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto f(x) $ | 24 |
| 1.8.8 | Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto f(x)$ | 24 |
| 1.8.9 | Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto kf\left(\frac{1}{k}x\right)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ | 24 |
| 2 | SUITES NUMÉRIQUES | 25 |
| 2.1 | Raisonnement par récurrence | 25 |
| 2.1.1 | Principe de récurrence | 25 |
| 2.1.2 | Application | 25 |
| 2.2 | Suite majorée, minorée, bornée | 26 |
| 2.3 | Suite périodique | 27 |
| 2.3.1 | Définition | 27 |
| 2.3.2 | Propriété | 27 |
| 2.4 | Sens de variation d'une suite numérique | 27 |
| 2.4.1 | Définition | 27 |
| 2.5 | Convergence d'une suite numérique | 28 |
| 2.5.1 | Définition | 28 |
| 2.5.2 | Théorèmes de convergence d'une suite numérique | 28 |
| 2.6 | Suite particulières | 28 |
| 2.6.1 | Suite arithmétique | 28 |
| 2.6.2 | Suite géométrique | 30 |
| 2.7 | Suite arithmético-géométrique | 31 |
| 2.8 | Suite adjacente | 32 |
| 2.8.1 | Définition | 32 |
| 2.8.2 | Théorème | 32 |
| 2.9 | Suites définies par certaines relation de récurrence | 33 |
| 2.10 | Suite récurrente linéaire d'ordre 2 | 34 |
| 3 | FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN | 35 |
| 3.1 | Définition | 35 |
| 3.2 | Propriétés | 35 |
| 3.3 | Nombre d'Euler | 35 |
| 3.4 | Existences | 36 |
| 3.5 | Dérivation | 36 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 3.6 | Limites classiques | 36 |
| 3.7 | Équations et Inéquations avec logarithme | 37 |
| 3.7.1 | Équations avec logarithme | 37 |
| 3.7.2 | Inéquations avec logarithme | 37 |
| 3.8 | Étude de la fonction $x \mapsto \ln x$ | 37 |
| 3.9 | Fonction logarithme de base a | 38 |
| 3.9.1 | Définition | 38 |
| 3.9.2 | Propriétés | 38 |
| 3.9.3 | Logarithme décimal | 38 |
| 4 | FONCTION EXPONENTIELLE | 40 |
| 4.1 | Fonction exponentielle de base e | 40 |
| 4.1.1 | Définition | 40 |
| 4.1.2 | Propriétés | 40 |
| 4.1.3 | Existence | 40 |
| 4.1.4 | Dérivation | 41 |
| 4.1.5 | Limites classiques | 41 |
| 4.1.6 | Résolution dans \mathbb{R} des équations, inéquations et systèmes | 41 |
| 4.1.7 | Étude de la fonction $x \mapsto e^x$ | 41 |
| 4.2 | Fonction exponentielle de base a | 42 |
| 4.2.1 | Définition | 42 |
| 4.2.2 | Propriétés | 42 |
| 4.2.3 | Variations | 43 |
| 4.3 | Fonction puissance | 43 |
| 4.3.1 | Définition | 43 |
| 4.3.2 | Propriétés | 43 |
| 4.3.3 | Variations | 43 |
| 4.4 | Croissances comparées | 43 |
| II | ALGÈBRE | 44 |
| 5 | NOMBRES COMPLEXES | 45 |
| 5.1 | Étude algébrique du nombre complexe | 45 |
| 5.1.1 | Définition d'un nombre complexe | 45 |
| 5.1.2 | Ensemble des nombres complexes | 45 |
| 5.1.3 | Forme algébrique du nombre complexe | 45 |
| 5.1.4 | Conjugué d'un nombre complexe | 45 |
| 5.1.5 | Calculs sur les nombres complexes | 46 |
| 5.2 | Le plan complexe | 46 |
| 5.2.1 | Affixe du point | 46 |
| 5.2.2 | Affixe du vecteur | 47 |
| 5.3 | Module d'un nombre complexe | 47 |
| 5.3.1 | Définition | 47 |
| 5.3.2 | Propriétés | 47 |
| 5.4 | Argument d'un nombre complexe | 48 |
| 5.4.1 | Définition | 48 |
| 5.4.2 | Propriétés | 48 |
| 5.4.3 | Rappel sur le cercle trigonométrique | 49 |
| 5.5 | Application des nombres complexes en trigonométries | 49 |
| 5.5.1 | Forme trigonométrique d'un nombre complexe | 49 |

| | | |
|--------|---|----|
| 5.5.2 | Forme exponentielle d'un nombre complexe | 49 |
| 5.5.3 | Relation entre forme exponentielle et forme trigonométrique | 50 |
| 5.5.4 | Forme polaire d'un nombre complexe | 50 |
| 5.5.5 | Formules de Moivre | 50 |
| 5.5.6 | Formules de Euler | 50 |
| 5.5.7 | Formule du binôme de Newton | 50 |
| 5.5.8 | Linéarisation | 50 |
| 5.5.9 | Factorisation de $e^{ia} + e^{ib}$ et $e^{ia} - e^{ib}$ | 50 |
| 5.6 | Racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe | 51 |
| 5.6.1 | Définition | 51 |
| 5.6.2 | Recherche des racines $n^{ième}$ d'un nombre complexe | 51 |
| 5.6.3 | Interprétation géométrique | 51 |
| 5.6.4 | Racines carrées d'un nombre complexe | 51 |
| 5.7 | Équations du second degré dans \mathbb{C} | 52 |
| 5.7.1 | Équations à coefficients réels | 52 |
| 5.7.2 | Équations à coefficient complexe | 52 |
| 5.8 | Équations complexe se ramenant au second degré | 53 |
| 5.8.1 | Équations complexe du troisième degré | 53 |
| 5.8.2 | Équations complexe du quatrième degré | 54 |
| 5.9 | Utilisation des nombres complexes en géométrie | 55 |
| 5.9.1 | Distance de deux points | 55 |
| 5.9.2 | Affixe du milieu d'un segment et du centre de gravité d'un triangle . . . | 55 |
| 5.9.3 | Affixe du barycentre de n points pondérés | 55 |
| 5.9.4 | Interprétation géométrique de l'argument | 55 |
| 5.9.5 | Interprétation géométrique du module | 56 |
| 5.9.6 | Configurations du plan et nombres complexes | 56 |
| 5.9.7 | Colinéarité et orthogonalité | 57 |
| 5.10 | Nombres complexes et transformations du plan | 57 |
| 5.10.1 | Translation | 57 |
| 5.10.2 | Homothétie | 58 |
| 5.10.3 | Rotation | 59 |
| 5.10.4 | Symétries particulières | 60 |
| 5.10.5 | Similitude plane directe | 61 |

Première partie

ANALYSE

FONCTIONS NUMÉRIQUES

1.1 Fonctions Numériques à variable réelle

1.1.1 Définition

On appelle fonction numérique de la variable réelle, toute fonction de \mathbb{R} ou d'une partie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1.1.2 Ensemble de définition

Définition

Soit f une fonction numérique.

On appelle ensemble de définition f notée E_f ou domaine de définition de f notée D_f l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe, c'est-à-dire l'ensemble des réels de l'ensemble de départ de f qui ont une image par f dans l'ensemble d'arrivée.

Remarque

Toute fonction polynôme est définie sur \mathbb{R} .

1.1.3 Quelques conditions d'existences des fonctions numériques

Soit p et q deux fonctions polynômes.

| Fonctions numériques f | Conditions d'existences de f ou E_f |
|---|---|
| $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 ; a_n \neq 0$ | f est définie sur \mathbb{R} |
| $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ | f existe si et seulement si $q(x) \neq 0$ |
| $f(x) = \sqrt{p(x)}$ | f existe si et seulement si $p(x) \geq 0$ |
| $f(x) = \sqrt{\frac{p(x)}{q(x)}}$ | f existe si et seulement si $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$ et $q(x) \neq 0$ |
| $f(x) = \frac{\sqrt{p(x)}}{\sqrt{q(x)}}$ | f existe si et seulement si $p(x) \geq 0$ et $q(x) > 0$ |
| $f(x) = \sqrt{p(x)} + \sqrt{q(x)}$ | f existe si et seulement si $p(x) \geq 0$ et $q(x) \geq 0$ |
| $f(x) = \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}}$ | f existe si et seulement si $q(x) > 0$ |
| $f(x) = \frac{\sqrt{p(x)}}{q(x)}$ | f existe si et seulement si $p(x) \geq 0$ et $q(x) \neq 0$ |
| $f(x) = p(x) + \sqrt{q(x)}$ | f existe si et seulement si $q(x) \geq 0$ |
| $f(x) = p(x) $ | f est définie sur \mathbb{R} |
| $f(x) = \sqrt{ p(x) }$ | f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ |
| $f(x) = \sqrt{ p(x) + l} ; l \in \mathbb{R}$ | si $l \geq 0$ f est définie sur \mathbb{R} |
| $f(x) = \sqrt{ p(x) + l} ; l \in \mathbb{R}$ | si $l < 0$, f existe si et seulement si $ p(x) + l \geq 0$ |
| $f(x) = \cos(ax + b)$ ou $f(x) = \sin(ax + b) ; a \neq 0$ | , f est définie sur \mathbb{R} |

Exercice

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes : $f(x) = 3x^4 + 2x + 6$;
 $g(x) = \sqrt{x+1}$; $h(x) = \sqrt{|x+2| - 2}$; $k(x) = \frac{x}{(x+3)(x-1)}$; $l(x) = x + 5 + \sqrt{2x+4}$;
 $m(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$; $p(x) = \frac{\sqrt{x}}{x(x+3)}$; $q(x) = \sqrt{|1+x^2|}$.

1.1.4 Cas d'une fonction raccordée

Exercice

Soit f une fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = -x + 4 - \frac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{3x-5}{x^2+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 Déterminer l'ensemble de définition de f .

1.2 Compléments sur les limites

1.2.1 Limites de référence

| | |
|--|---|
| $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0; n \in \mathbb{N}^*$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x} = 0 : k \in \mathbb{R}$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ | $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2n-1}} = -\infty; n \in \mathbb{N}^*$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2n-1}} = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty; n \in \mathbb{N}^*$ |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty; n \in \mathbb{N}^*$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty; n \in \mathbb{N}^*$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty; n \in \mathbb{N}^*$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n-1} = -\infty; n \in \mathbb{N}^*$ |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0; n \in \mathbb{N}^*$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0; n \in \mathbb{N}^*$ |

1.2.2 Limites en l'infini des fonctions usuelles

a) Cas d'une fonction polynôme

La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.

b) Cas d'une fonction rationnelle

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exercice

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + 7x + 4); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x}{x - 1}.$$

c) Cas d'une fonction irrationnelle

Exercice

Calculer les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 4}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x + 3}.$

1.2.3 Formes indéterminées

Dans certains cas les opérations algébriques ne permettent pas de trouver la limite cherchée.

On dit qu'il y a une forme indéterminée. Ces cas sont : $+\infty - \infty; 0 \times \infty; \frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

Pour lever l'indétermination, on utilise :

- ▷ La factorisation pour les fonctions polynômes.
- ▷ L'expression conjuguée pour les fonctions irrationnelles.

Exercice

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 1}; \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3 - x} - \sqrt{2 - x}); \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1});$
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + 3x - 10}$

1.2.4 Limites classiques des fonctions trigonométriques

Soit a un nombre réel non nul.

- ▷ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$.
- ▷ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = a$.
- ▷ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \frac{a^2}{2}$.
- ▷ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - 1}{x} = 0$.
- ▷ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$.

Exercice

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right)$

1.2.5 Limites par comparaison

Théorème 1

Soit f et g deux fonctions telles que pour tout réel x de l'intervalle $]a; +\infty[$ (respectivement intervalle $] -\infty, a[$) ; $f(x) \geq g(x)$.

- ▷ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- ▷ Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

Théorème 2

Soit f et g deux fonctions telles que pour tout réel x de l'intervalle $]a; +\infty[$ (respectivement intervalle $] -\infty, a[$) ; $f(x) \leq g(x)$.

- ▷ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- ▷ Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.

Théorème des gendarmes

Soit f une fonction définie sur E_f .

- ▷ S'il existe deux fonctions g et h telles que $g \leq f \leq h$ définies sur un intervalle $]a; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$
- ▷ S'il existe un nombre réel l , une fonction g et un intervalle $]a; +\infty[$ tels que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et $\forall x \in]a; +\infty[, |f(x) - l| \leq g(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Théorème Comparaison de limites

Soit f et g deux fonctions telles que $f \leq g$ sur un intervalle $]a; +\infty[$. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l'$, alors $l \leq l'$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x + \sin x}{x}$

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{x-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{x}$
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Solution 1

1. Montrons que $\forall x > 0; \frac{x-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{x}$

$\forall x \in]0; +\infty[; \text{On a :}$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ et } \frac{1}{x} > 0$$

$$x-1 \leq x + \sin x \leq x+1$$

$$\frac{x-1}{x} \leq \frac{x + \sin x}{x} \leq \frac{x+1}{x}$$

$$\text{D'où } \boxed{\frac{x-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{x}}$$

2. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} \implies 1 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 1.$$

D'après le Théorème de gendarme; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

$$\text{D'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x + 1 - 3\sin x$

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}; 2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 4$
2. Calculer la limite f en $-\infty$ et $+\infty$.

Solution

1. Montrons que $2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 4; \forall x \in \mathbb{R}$.

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-3 \leq -3\sin x \leq 3$$

$$3x + 1 - 3 \leq 2x + 1 - 3\sin x \leq 2x + 1 + 3$$

$$\text{D'où : } \boxed{2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 4}$$

2. Calculons la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$

$$f(x) \leq 2x + 4; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 4) = -\infty; \text{ alors } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$$

$$2x - 2 \leq f(x); \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2) = +\infty; \text{ alors } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

Limite de la composée de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions numériques, a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$; alors $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$

1.3 Étude des branches infinies

Soit f une fonction définie sur E_f . On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.3.1 Asymptote verticale : droite parallèle à l'axe (Oy)

Soit f une fonction non définie en x_0 .

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, alors la droite (\mathcal{D}) d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe (\mathcal{C}) de f .

1.3.2 Asymptote horizontale : droite parallèle à l'axe (Ox)

Soit a un nombre réel.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$, alors la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = a$ est une asymptote horizontale à la courbe (\mathcal{C}) de f .

1.3.3 Asymptote oblique

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \in \mathbb{R}^*) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b \quad (b \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

alors la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}) de f au voisinage de ∞ .

Remarques

▷ La droite (\mathcal{D}) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}) de f si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

▷ Si de plus $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ et que $\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0$, alors la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}) de f .

1.3.4 Direction asymptotique

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \in \mathbb{R}^*) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \infty \end{cases}$$

alors la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = ax$ est une direction asymptotique à la courbe (\mathcal{C}) de f .

1.3.5 Position de la courbe (\mathcal{C}) par rapport à la droite $(\mathcal{D}) : y = ax + b$

Pour étudier la position de la courbe (\mathcal{C}) par rapport à la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = ax + b$, on étudie le signe de $f(x) - y$. On distingue trois cas :

▷ Si $f(x) - y < 0$, alors la courbe (\mathcal{C}) de f est au dessous de la droite (\mathcal{D}) .

▷ Si $f(x) - y > 0$, alors la courbe (\mathcal{C}) de f est au dessus de la droite (\mathcal{D}) .

▷ Si $f(x) - y = 0$, alors la courbe (\mathcal{C}) de f et la droite (\mathcal{D}) sont confondues.

1.3.6 Branches paraboliques

a) Branche parabolique de direction (Ox)

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

alors la courbe (\mathcal{C}) f admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de ∞ .

b) Branche parabolique de direction (Oy)

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty \end{cases}$$

alors la courbe (\mathcal{C}) de f admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de ∞ .

1.4 Continuité d'une fonction numérique

1.4.1 Continuité d'une fonction en un point x_0

Définition

Soit f une fonction définie en x_0 ; x_0 un nombre réel.

On dit que f est continue en x_0 si et seulement si $\begin{cases} f(x) \text{ existe (} f \text{ est définie en } x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

1.4.2 Continuité à gauche et continuité à droite d'une fonction

Soit f une fonction définie en x_0 ; x_0 un nombre réel.

▷ On dit que f est continue à gauche de x_0 si et seulement si $\begin{cases} f(x) \text{ existe (} f \text{ est définie en } x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

▷ On dit que f est continue à droite de x_0 si et seulement si $\begin{cases} f(x) \text{ existe (} f \text{ est définie en } x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

Propriétés

▷ Une fonction f est continue en x_0 si elle est continue à gauche et à droite de x_0 .

Autrement dit f est continue en x_0 si et seulement si $\begin{cases} f(x) \text{ existe (} f \text{ est définie en } x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

▷ Soit f et g deux fonctions continues au point d'abscisse x_0 et α un réel.

• Les fonctions $f + g$; fg et αf sont continues en x_0 .

• Si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues au point x_0 .

▷ Si f est continue en x_0 , alors l'ensemble de continuité de f est son ensemble de définition, c'est-à-dire $E_C = E_f$.

Exercice

$$\text{Soit } f \text{ une fonction définie par : } \begin{cases} f(x) = -x + 4 - \frac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{3x-5}{x^2-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les branches infinies à la courbe (\mathcal{C}) de f .
4. Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
5. En déduire l'ensemble de continuité de la fonction f .

1.4.3 Continuité sur un intervalle**a) Définition**

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I .

b) Théorèmes

- ▷ Toute fonction polynôme est continue sur \mathbb{R} .
- ▷ Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.
- ▷ Toute fonction irrationnelle est continue sur son ensemble de définition.
- ▷ Toute fonction continue sur un intervalle est définie sur cet intervalle.

c) Propriétés

Soient f et g deux fonction continues sur un intervalle I de \mathbb{R} et α un nombre réel.

- ▷ Les fonctions $f + g$; αf ; $f \times g$ sont continues sur I .
- ▷ Si g ne s'annule pas sur I , alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .
- ▷ Si $f \geq 0$, alors la fonction \sqrt{f} est continue sur I .

1.4.4 Prolongement par continuité**Définition**

Soit f une fonction non définie en x_0 et l un réel tel que $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$.

On appelle prolongement par continuité en x_0 de la fonction f la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$$

On dit que g est le prolongement par continuité de f en x_0 .

Remarque

L'ensemble de définition de g est $E_g = E_f \cup \{x_0\}$.

Exercice 1

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Montrer qu'on peut prolonger par continuité la fonction f en $x_0 = -1$.

Exercice 2

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R}^* par $g(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$
 Montrer que g est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$.

Solution 2

Montrons que g est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$; on a :

$$-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq f(x) \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes; $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

D'où g est donc le prolongeable par continuité en $x_0 = 0$

Ce prolongement est défini par :

$$f(x) = \begin{cases} g(x); & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1.4.5 Image d'un intervalle par une fonction continue

l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

| I | Fonction croissant $f(I)$ | Fonction décroissante $f(I)$ |
|-----------------------|--|--|
| $[a; b]$ | $[f(a), f(b)]$ | $[f(b), f(a)]$ |
| $[a, b[$ | $[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$ | $[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$ |
| $]a; b]$ | $[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$ | $[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$ |
| $]a; b[$ | $[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$ | $[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$ |
| $[a; \infty[$ | $[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$ | $[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$ |
| $] -\infty; a]$ | $[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a)]$ | $[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$ |
| $] -\infty; +\infty[$ | $[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$ | $[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$ |

1.4.6 Cas d'une fonction ni croissante, ni décroissante sur $I = [a; b]$

Pour tout $x \in [a; b]$; il existe deux réels m et M tels que $m \leq f(x) \leq M$.

On a : $f([a; b]) = [m; M]$ où m désigne le minimum de f et M le maximum de f .

1.4.7 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiaires permet dans certains cas de démontrer l'existence de solutions d'une équation.

1.4.8 Fonction continue et strictement monotone

a) Théorème de la bijection réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

– f réalise une bijection de I vers $f(I)$

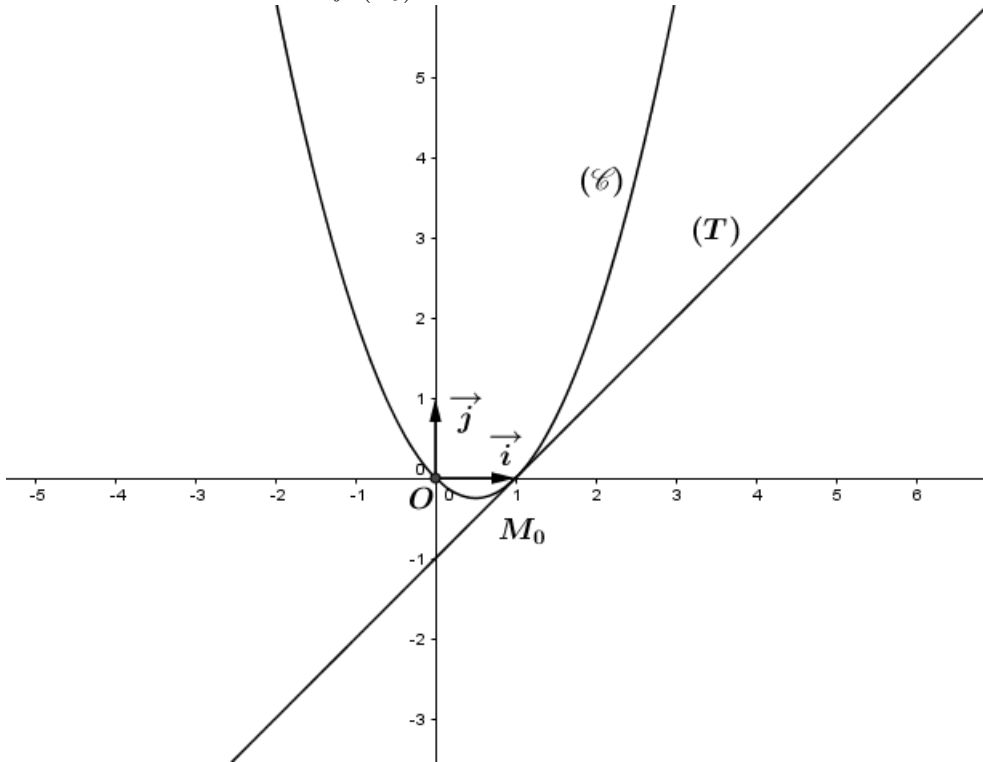
– La bijection réciproque notée f^{-1} ; est continue sur l'intervalle $f(I)$

f^{-1} est strictement monotone et a le mme sens de variation que f .

b) Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I ; a et b ($a < b$) deux éléments de I tels que $f(a).f(b) < 0$; alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a, b]$

coefficient directeur est $f'(x_0) = a$.



1.5.2 Équation de la tangente (T)

On a : (T) : $y = ax + b$

(T) passe par $M_0(x_0; y_0)$

$y_0 = ax_0 + b \implies b = y_0 - ax_0$ avec $y_0 = f(x_0)$

(T) : $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$

Donc (T) : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

1.5.3 Tangentes particulières

▷ Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, alors f est dérivable en x_0 . La courbe (C) de f admet une tangente (T) parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = f(x_0)$.

▷ Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$, alors f ne pas dérivable en x_0 . La courbe (C) de f admet une tangente (T) parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $x = x_0$.

1.5.4 Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite

a) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 .

▷ f est dérivable à gauche de x_0 si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1$; $a_1 \in \mathbb{R}$.

a_1 est appelée nombre dérivé à gauche de f en x_0 et on note $f'_g(x_0) = a_1$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 .

▷ f est dérivable à droite de x_0 si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_2$; $a_2 \in \mathbb{R}$.

a_2 est appelée nombre dérivé à droite de f en x_0 et on note $f'_d(x_0) = a_2$.

b) Propriété

Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si, elle est dérivable à gauche et à droite de x_0 et que le nombre dérivé à gauche et à droite sont égaux, c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \implies f'_g(x_0) = f'_d(x_0).$$

1.5.5 Interprétation géométrique : Notion de demi-tangente à une courbe

▷ Si f est dérivable à gauche et à droite de x_0 mais elle n'est pas dérivable en x_0 c'est-à-dire $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$, alors la courbe (\mathcal{C}) de f admet deux demi-tangentes oblique de coefficient $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ d'équations respectives (T) : $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ et (\bar{T}) : $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ au point $M_0(x_0; f(x_0))$. Ce point est appelé point anguleux.

$$\triangleright \text{ Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty \end{cases}$$

Alors f n'est pas dérivable en x_0 , la la courbe (\mathcal{C}) de f admet une demi-tangente verticale dirigées vers le haut ou vers le bas au point $M_0(x_0; f(x_0))$.

Ce point est appelé point de rebroussement.

$$\triangleright \text{ Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \end{cases}$$

Alors f n'est pas dérivable en x_0 , la la courbe (\mathcal{C}) de f admet deux demi-tangentes verticales une dirigée vers le haut et l'autre vers le bas ou une dirigée vers le bas et l'autre vers le haut au point $M_0(x_0; f(x_0))$. Ce point est appelé point d'inflexion.

1.5.6 Dérivabilité sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I .

1.5.7 Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle fonction dérivée ou simplement dérivée de la fonction f , l'application qui associée à tout élément x de I , son nombre dérivé $f'(x)$.

1.5.8 Propriétés sur les fonctions dérivables

- ▷ Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I .
- ▷ Toute fonction polynôme est dérivable sur \mathbb{R} .
- ▷ Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.
- ▷ Toute fonction irrationnelle n'est pas dérivable au point où elle s'annule.

1.5.9 Tableau des dérivées des fonctions usuelles

| Fonction : f | Fonction dérivée : f' |
|-----------------------------------|---|
| $f(x) = a ; a \in \mathbb{R}$ | $f'(x) = 0$ |
| $f(x) = ax + b$ | $f'(x) = a$ |
| $f(x) = x^n ; n \in \mathbb{N}^*$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ |
| $f(x) = \sin x$ | $f'(x) = \cos x$ |
| $f(x) = \cos x$ | $f'(x) = -\sin x$ |
| $f(x) = \tan x$ | $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ |

Exercice

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = 5x^5 + 6 ; g(x) = 2020^{2020} ; h(x) = 2\sqrt{x} \text{ et } p(x) = -\frac{2}{x}.$$

1.5.10 Dérivées et opérations sur les fonctions

| Fonction | Dérivée |
|-----------------------------------|-------------------------|
| $u + v$ | $u' + v'$ |
| αu | $\alpha u'$ |
| uv | $u'v + uv'$ |
| $\frac{1}{u}$ | $-\frac{u'}{u^2}$ |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| $u^n, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ | $nu'u^{n-1}$ |
| \sqrt{u} | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $u(ax + b)$ | $au'(ax + b)$ |
| $\sin u$ | $u' \cos u$ |
| $\cos u$ | $-u' \sin u$ |

1.5.11 Dérivée de la réciproque de dérivation

Soit f une fonction dérivable, strictement monotone sur un intervalle I .

(1) La fonction f réalise une bijection de I vers $f(I)$

(2) La bijection réciproque notée f^{-1} est dérivable sur $f(I)$; on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}$;

$\forall x \in f(I)$ avec f' une fonction non nulle.

1.6 Accroissements finis

1.6.1 Théorème de Rolle

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$; dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$; alors il existe au moins un nombre c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

1.6.2 Théorème des accroissements finis

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$; alors il existe au moins un nombre c de $]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

1.6.3 Théorème des inégalités des accroissements finis

Théorème 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I ($a < b$). S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout x éléments de $[a, b]$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

Théorème 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . S'il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de $[a, b]$; $|f'(x)| \leq M$; alors pour tous a et b éléments de I ; on a : $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Exercice

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

1. (a) Démontrer que $\forall x \in [1; 2]$ on a : $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq f'(x) \leq \sqrt{2}$.
 (b) En déduire que $\sqrt{2}(x - 2) \leq f(x) - \sqrt{5} \leq \frac{\sqrt{5}}{5}(x - 2)$
2. (a) Démontrer que $\forall x \in [1; 2]$; on a : $|f'(x)| \leq \sqrt{2}$
 (b) En déduire que $|f(x) - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2}|x - 1|$.

1.7 Éléments de symétries

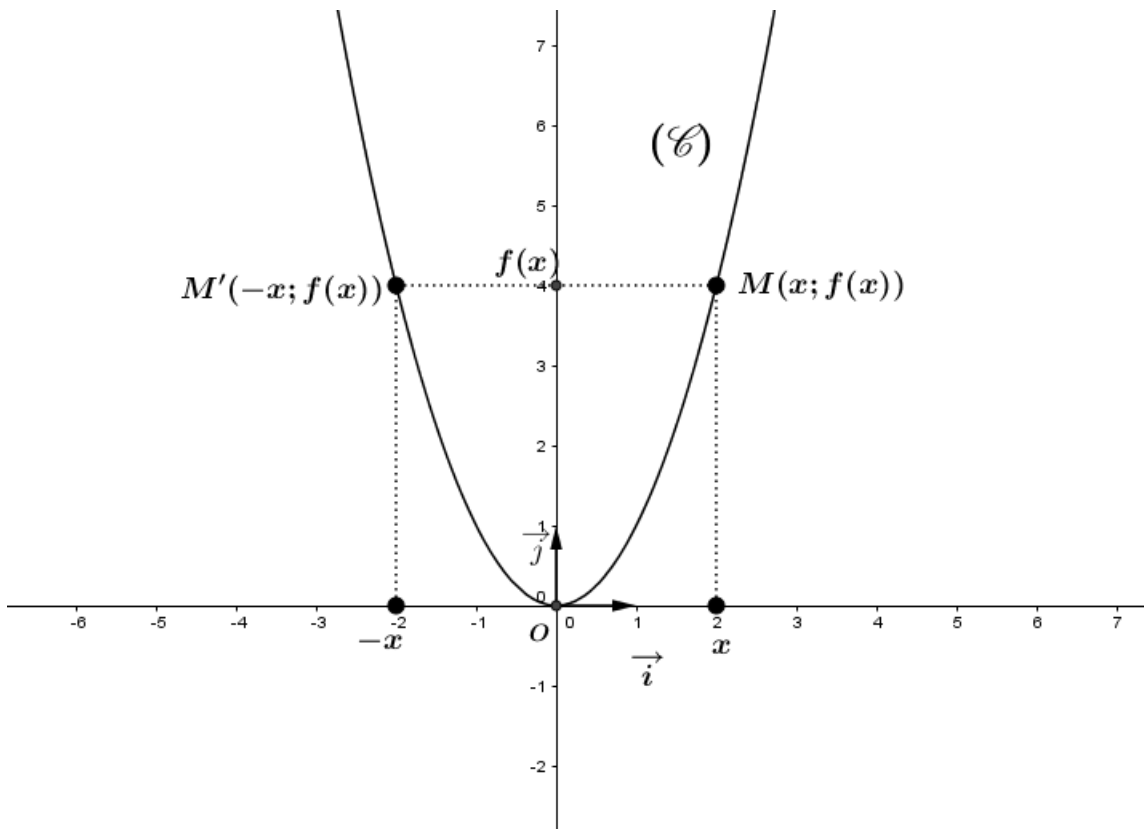
1.7.1 Fonction paire, fonction impaire

1.7.2 a) Fonction paire

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite paire si et seulement si pour tout $x \in I$, $-x \in I$; on a : $f(-x) = f(x)$.

Propriété

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

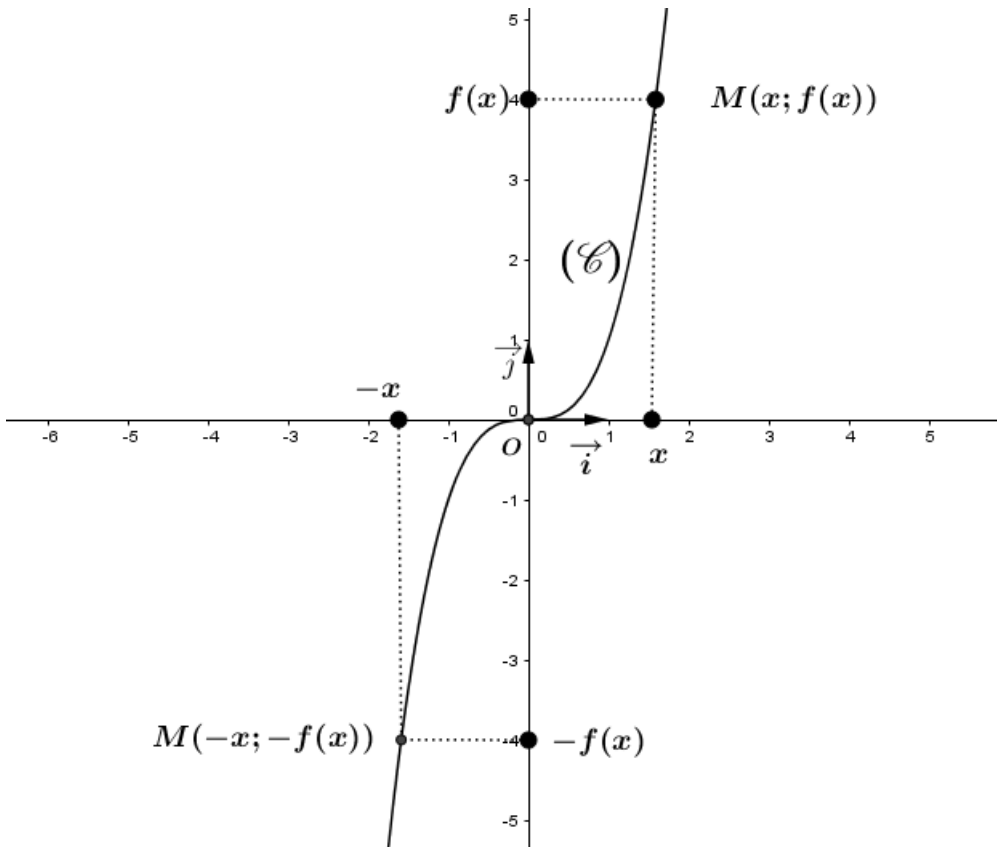


b) Fonction impaire

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite impaire si et seulement si pour tout $x \in I$, $-x \in I$; on a : $f(-x) = -f(x)$.

Propriété

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Exercice

Soit f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$ et $g(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g .
2. Étudier la parité des fonctions f et g .

1.7.3 Centre et Axe de symétrie d'une fonction

a) Centre de symétrie d'une fonction

Soit f une fonction numérique définie sur E_f et $\Omega(x_0; y_0)$ un point du plan. On désigne par (\mathcal{C}) la courbe de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On dit que $\Omega(x_0; y_0)$ est un centre de symétrie à la courbe (\mathcal{C}) de f si et seulement si pour tout $x \in E_f$, $2x_0 - x \in E_f$, on a : $f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$.

Exercice

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$. On désigne par (\mathcal{C}) la courbe de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer trois réels α , β et γ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma x}{x^2 + 1}$.
3. Montrer que le point $B(0; 3)$ est un centre de symétrie à la courbe (\mathcal{C}) la courbe de f .

b) Axe de symétrie d'une fonction

Soit f une fonction numérique définie sur E_f et (\mathcal{D}) une droite d'équation $x = a$ avec $a \in \mathbb{R}$. On désigne par (\mathcal{C}) la courbe de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i})$. On dit que (\mathcal{D}) est un axe de symétrie à la courbe (\mathcal{C}) de f si et seulement si pour tout $x \in E_f$, $2x_0 - x \in E_f$, on a : $f(2x_0 - x) - f(x) = 0$.

Exercice

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -2x^2 + 6x + 1$. On désigne par (\mathcal{C}) la courbe de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 Montrer que la droite (\mathcal{D}) une droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie à la courbe (\mathcal{C}) de f .

1.7.4 Périodicité

a) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et T un nombre réel strictement positif. f est dite périodique et de période T si et seulement si :
 pour tout $x \in I$, $x + T \in I$, $x - T \in I$ et on a : $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

Remarques

- ▷ $\cos x$ et $\sin x$ sont périodiques de période $T = 2\pi$
- ▷ $\cos(ax + b)$ et $\sin(ax + b)$ sont périodiques de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$
- ▷ $\tan x$ et $\cotan x$ sont périodiques de période $T = \pi$
- ▷ $\tan(ax + b)$ et $\cotan(ax + b)$ sont périodiques de période $T = \frac{\pi}{|a|}$
- ▷ Si f a pour période T_1 et g a pour période T_2 ; alors $f + g$; $f \cdot g$ et $\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) sont périodiques de période $T = PPCM(T_1; T_2)$

b) Intervalle d'étude

Lorsqu'une fonction est périodique de période T ; on peut l'étudier sur un intervalle I de longueur T . Sa courbe représentative sera complétée dans tout le plan par des translations successives de vecteurs $\vec{u} = T \vec{i}$ et $\vec{v} = -T \vec{i}$. Ainsi on a :

$$I = [0; T] \text{ ou } I = [-T; 0] \text{ ou } I = [x_0; x_0 + T] \text{ ou } I = \left[-\frac{b}{a}; -\frac{b}{a} + T \right] \text{ ou } I = \left[-\frac{b}{a} - \frac{T}{2}; -\frac{b}{a} + \frac{T}{2} \right].$$

1.7.5 Familles des fonctions

Soit f_m une famille des fonctions et on désigne par (\mathcal{C}_m) sa courbe représentative où m est un nombre réel.

a) Point fixe d'une courbe

Soit (\mathcal{C}_m) l'ensemble des courbes des fonctions f_m .
 Si toutes les courbes (\mathcal{C}_m) des fonctions f_m passent par un point $M_0(x_0, y_0)$; alors ce point est fixe.

b) Détermination du point fixe

Pour déterminer le point ou les points fixes, on résout l'équation : $f_{m+1}(x) - f_m(x) = 0$

1.7.6 Points d'intersection d'une courbe (C) avec les axes du repère

– Point d'intersection avec l'axe des abscisses on résout l'équation $f(x) = 0$

– Point d'intersection avec l'axe des ordonnées

On pose $x = 0$ et on calcule $f(0)$

1.8 Courbes des fonctions associées aux fonctions données**1.8.1 Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto -f(x)$**

Soit (\mathcal{C}) la courbe de la fonction f et (\mathcal{C}') la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les points $M(x; f(x))$ et $M'(x; -f(x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses avec $M \in (\mathcal{C})$ et $M' \in (\mathcal{C}')$. La courbe (\mathcal{C}') de g est le symétrique de la courbe (\mathcal{C}) de f par rapport à l'axe des abscisses (Ox) .

1.8.2 Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto f(-x)$

Soit (\mathcal{C}) la courbe de la fonction f et (\mathcal{C}') la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les points $M(x; f(x))$ et $M'(-x; f(x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées avec $M \in (\mathcal{C})$ et $M' \in (\mathcal{C}')$. La courbe (\mathcal{C}') de g est le symétrique de la courbe (\mathcal{C}) de f par rapport à l'axe des ordonnées (Oy) .

1.8.3 Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto -f(-x)$

Soit (\mathcal{C}) la courbe de la fonction f et (\mathcal{C}') la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les points $M(x; f(x))$ et $M'(-x; -f(x))$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère avec $M \in (\mathcal{C})$ et $M' \in (\mathcal{C}')$. La courbe (\mathcal{C}') de g est le symétrique de la courbe (\mathcal{C}) de f par rapport à l'origine O du repère.

1.8.4 Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto f(x - a)$

Soit (\mathcal{C}) la courbe de la fonction f et (\mathcal{C}') la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le point $M'(x - a; f(x))$ est l'image de $M(x; f(x))$ par la translation de vecteur $\vec{u} = a \vec{i}$ avec $M \in (\mathcal{C})$ et $M' \in (\mathcal{C}')$. La courbe (\mathcal{C}') de g est l'image de la courbe (\mathcal{C}) de f par la translation du vecteur $\vec{u} = a \vec{i}$.

1.8.5 Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto f(x) + b$

Soit (\mathcal{C}) la courbe de la fonction f et (\mathcal{C}') la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le point $M'(x; f(x) + b)$ est l'image de $M(x; f(x))$ par la translation de vecteur $\vec{v} = b \vec{j}$ avec

$M \in (\mathcal{C})$ et $M' \in (\mathcal{C}')$. La courbe (\mathcal{C}') de g est l'image de la courbe (\mathcal{C}) de f par la translation du vecteur $\vec{v} = b \vec{j}$.

1.8.6 Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto f(x - a) + b$

Soit (\mathcal{C}) la courbe de la fonction f et (\mathcal{C}') la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le point $M'(x-a; f(x)+b)$ est l'image de $M(x; f(x))$ par la translation de vecteur $\vec{w} = a \vec{i} + b \vec{j}$ avec $M \in (\mathcal{C})$ et $M' \in (\mathcal{C}')$. La courbe (\mathcal{C}') de g est l'image de la courbe (\mathcal{C}) de f par la translation du vecteur $\vec{w} = a \vec{i} + b \vec{j}$.

1.8.7 Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto |f(x)|$

Soit (\mathcal{C}) la courbe de la fonction f et (\mathcal{C}') la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout $x \in E_g$, on a :
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) = -f(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La courbe (\mathcal{C}') est la réunion des parties des courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$, situées au-dessus de (Ox) .

1.8.8 Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto f(|x|)$

Soit (\mathcal{C}) la courbe de la fonction f et (\mathcal{C}') la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout $x \in E_g$, on a :
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) = f(-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

La courbe (\mathcal{C}') de la fonction g est la réunion de la partie de la courbe (\mathcal{C}) d'abscisses positives ainsi que son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy) .

1.8.9 Courbes de $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto kf\left(\frac{1}{k}x\right)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$

Soit (\mathcal{C}) la courbe de la fonction f et (\mathcal{C}') la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe (\mathcal{C}') de la fonction g est l'image de la courbe (\mathcal{C}) de la fonction f par l'homothétie de centre O et de rapport k .

SUITES NUMÉRIQUES

2.1 Raisonnement par récurrence

2.1.1 Principe de récurrence

Soit $p(n)$ une propriété qui dépend de n .

Pour démontrer par récurrence que la propriété $p(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut :

- ▷ Vérifier que la propriété $p(n)$ est vraie au rang initial $n = n_0$;
- ▷ supposer qu'elle est vraie pour $n = k$, $\forall k \geq n_0$;
- ▷ Prouver qu'elle est vraie pour $n = k + 1$.
- ▷ conclure que : $\forall n \geq n_0$, $p(n)$ est vraie.

2.1.2 Application

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$.

1. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n+1} - 2$.

Exercice 2

Montrer par récurrence que $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Soit S_n une somme définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. En déduire les nombres suivants : $A = 1+2+3+4+5+\dots+2020$ et $B = 48+49+50+\dots+627$.

Solution 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$.

1. Calculons u_2 , u_3 et u_4 .
 $u_2 = 2 + 2^2 = 6$; $u_3 = 2 + 2^2 + 2^3 = 14$; $u_4 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$
2. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n+1} - 2$.
 - Pour $n = 1$, $u_1 = 2^2 - 2 = 2$ vraie ; Pour $n = 2$, $u_2 = 2^3 - 2 = 6$ vraie

- Supposons que vraie au rang k .
 - Prouvons qu'elle est vraie pour $k + 1$, c'est-à-dire $u_{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 2$.
- En effet,

$$\begin{aligned}
 u_{k+1} &= \underbrace{2 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k}_{u_k} + 2^{k+1} \\
 &= u_k + 2^{k+1} \\
 &= 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1} \\
 &= 2 \times 2^{k+1} - 2 \\
 &= 2^{(k+1)+1} - 2 \\
 u_{k+1} &= 2^{(k+1)+1} - 2
 \end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n+1} - 2$

2.2 Suite majorée, minorée, bornée

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

- ▷ La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite majorée s'il existe un nombre réel M tel que $u_n \leq M$ où M est le majorant.
- ▷ La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite minorée s'il existe un nombre réel m tel que $u_n \geq m$ où m est le minorant.
- ▷ La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite bornée si elle est à la fois minorée et majorée, c'est-à-dire pour tout nombres réels m et M , on a : $m \leq u_n \leq M$.

Remarque

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

- ▷ La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite positive, lorsque pour tout n , $u_n \geq 0$.
- ▷ La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite négative, lorsque pour tout n , $u_n \leq 0$.

Exercice

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique définie par : $u_n = \frac{2n}{n+1}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est minorée par 0.
2. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2.
3. En déduire que la suite (u_n) est bornée.

Solution

On donne $u_n = \frac{2n}{n+1}$.

1. Montrons que la suite (u_n) une suite est minorée par 0.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n}{n+1} \geq 0 \implies u_n \geq 0.$$

D'où la suite (u_n) est minorée par 0.

2. Montrons que la suite (u_n) est majorée par 2.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 2 = \frac{2n}{n+1} - 2 \implies u_n = \frac{-2}{n+1} < 0 \implies u_n < 2.$$

D'où la suite (u_n) est majorée par 2.

3. Déduisons-en que la suite (u_n) est bornée.

La suite (u_n) étant minorée et majorée, elle est donc bornée.

2.3 Suite périodique

2.3.1 Définition

On dira qu'une suite (u_n) est périodique s'il existe un entier naturel non nul p tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$$

Le plus petit entier $p \geq 0$ est appelé période de la suite u_n .

2.3.2 Propriété

Si (u_n) est périodique de période p , alors $\forall k \in \mathbb{N}, u_{n+kp} = u_n$.

Exercice

On donne : $u_n = (-1)^n$

1. Montrer que (u_n) est une suite périodique de période $p = 2$

2. Calculer u_0, u_1 et u_2 .

3. En déduire u_{3019} et u_{3020} .

Solution

$$u_n = (-1)^n$$

1. Montrons que (u_n) est une suite périodique de période $p = 2$

$$u_{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n \cdot (-1)^2 = (-1)^n = u_n \implies u_{n+2} = u_n.$$

Donc (u_n) est une suite de période $p = 2$.

2. Calculons u_0, u_1 et u_2 .

$$u_0 = (-1)^0 = 1, \quad u_1 = (-1)^1 = -1 \quad u_2 = (-1)^2 = 1$$

3. Déduisons u_{3019} et u_{3020} .

$$3019 = 2 \times 1509 + 1, \text{ donc } u_{3019} = u_{(1+2 \times 1509)} = u_1 \implies u_{3019} = -1$$

$$3020 = 1510 \times 2 + 0, \text{ donc } u_{3020} = u_{(0+2 \times 1510)} = u_0 \implies u_{3020} = 1$$

2.4 Sens de variation d'une suite numérique

2.4.1 Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

▷ La suite (u_n) est dite croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$.

▷ La suite (u_n) est dite décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$.

▷ La suite (u_n) est dite constante si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 0$.

Exercice

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Étudier le sens de variation de (u_n) .

2.5 Convergence d'une suite numérique**2.5.1 Définition**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

▷ La suite (u_n) est dite convergente si elle admet une limite finie, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ où } l \in \mathbb{R}.$$

▷ La suite (u_n) est dite divergente si elle n'admet pas une limite finie, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \infty.$$

2.5.2 Théorèmes de convergence d'une suite numérique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

▷ Toute suite croissante et majorée est convergente.

▷ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

▷ Toute suite croissante non majorée, décroissante non minorée est divergente.

Exercice

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2. En déduire sa limite.

2.6 Suite particulières**2.6.1 Suite arithmétique****a) Définition**

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite arithmétique lorsqu'il existe un nombre réel r tel que : $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n = r$.

Le réel r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple

La suite 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, ... est arithmétique de raison $r = 4$.

b) Terme général d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

On a :

$$u_{n+1} - u_n = r$$

$$u_1 - u_0 = r$$

$$u_2 - u_1 = r$$

$$u_3 - u_2 = r$$

$$u_4 - u_3 = r$$

$$u_5 - u_4 = r$$

$$u_6 - u_5 = r$$

⋮

$$u_{n-1} - u_{n-2} = r$$

$$u_n - u_{n-1} = r$$

En additionnant membre à membre les n égalités suivantes, on obtient : $u_n - u_0 = nr$

D'où $u_n = u_0 + nr$.

En général, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$;

on a : $u_n = u_p + (n - p)r$ où p est l'indice du premier terme.

Exemple

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

On donne $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$. Trouver la raison r et le premier terme u_0 .

c) Progression arithmétique

Trois termes a , b et c pris dans cet ordre sont en progression arithmétique si et seulement si, $a + c = 2b$.

d) Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ la somme des termes d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (1)$$

$$s_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_2 + u_1 + u_0 \quad (2)$$

En faisant (1) + (2), on a :

$$2s_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + \dots + (u_{n-2} + u_2) + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0)$$

$$\text{or } u_p + u_{n-p} = u_0 + pr + u_0 + (n-p)r$$

$$u_p + u_{n-p} = u_0 + pr + u_0 + nr - pr = u_0 + u_0 + nr$$

$$u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n.$$

Ainsi

$$2s_n = (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \dots + (u_0 + u_n)$$

$$2s_n = (n+1)(u_0 + u_n)$$

$$\text{D'où } s_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

D'une manière générale, $\forall p \in \mathbb{N}$ on a : $s_n = \frac{n-p+1}{2} (u_p + u_n)$ avec p indice du premier terme de la suite.

En posant $Nt = n - p + 1$; on a : $s_n = \frac{Nt(u_p + u_n)}{2}$ avec $Nt = id - ip + 1$ le nombre de terme et id est l'indice du dernier terme de la suite ; ip est l'indice du premier terme de la suite.

e) Variation d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

▷ Si $r \geq 0$, la suite (u_n) est croissante ;

▷ Si $r \leq 0$, la suite (u_n) est décroissante ;

▷ si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.

f) Convergence d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n = u_p + (n - p)r$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_p - pr + \lim_{n \rightarrow +\infty} (nr)$$

▷ si $r > 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$;

▷ si $r < 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Donc toute suite arithmétique est divergente.

2.6.2 Suite géométrique**a) Définition**

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite géométrique lorsqu'il existe un nombre réel q tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$;

$$u_{n+1} = qu_n \text{ ou } \frac{u_{n+1}}{u_n} = q.$$

Le réel q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $q \neq 0$.

Exemple

La suite $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.

b) Terme général d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .

On a :

$$u_{n+1} = qu_n$$

$$u_1 = qu_0$$

$$u_2 = qu_1$$

$$u_3 = qu_2$$

$$u_4 = qu_3$$

$$u_5 = qu_4$$

⋮

$$u_{n-2} = qu_{n-3}$$

$$u_{n-1} = qu_{n-2}$$

$$u_n = qu_{n-1}$$

En multipliant membre à membre les n égalités et en simplifiant, on obtient : $u_n = u_0 q^n$

D'où $u_n = u_0 q^n$

D'une manière générale, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = u_p q^{n-p}$.

c) Progression géométrique

Trois termes a, b et c pris dans cet ordre sont en progression géométrique si et seulement si, $a \times c = b^2$.

d) Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$.

On a :

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \quad (1) \text{ et } qs_n = qu_0 + qu_1 + qu_2 + qu_3 + \dots + qu_n \quad (2)$$

(1) - (2) $\implies s_n - qs_n = u_0 - qu_0 + u_1 - qu_1 + u_2 - qu_2 + u_3 - qu_3 + \dots + u_n - qu_n$
 or (u_n) est une suite géométrique, alors $u_1 = qu_0$; $u_2 = qu_1 \dots$
 on a : $s_n - qs_n = u_0 - qu_0 + qu_0 - qu_1 + qu_1 - qu_2 + qu_2 - qu_3 + \dots + qu_{n-1} - qu_n$
 $s_n - qs_n = u_0 - qu_n \implies s_n(1 - q) = u_0 - q \cdot q^n u_0$.

D'où $s_n = \frac{u_0(1 - q^{n+1})}{1 - q}$.

D'une manière générale, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $s_n = \frac{u_p(1 - q^{n-p+1})}{1 - q}$.

En posant $Nt = n - p + 1$; on a : $s_n = \frac{u_p(1 - q^{Nt})}{1 - q}$

e) Variation d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q strictement positif et de premier terme u_0 telle que : $u_n = u_0 q^n$.

- ▷ si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante;
- ▷ si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante;
- ▷ si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante;
- ▷ si $q < 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante;
- ▷ si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

Remarque

Si $q < 0$ et $u_0 \neq 0$, la suite (u_n) est dite alternée.

Exercice

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par ses termes : $u_1 = 2$ et $u_3 = 8$

1. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sachant que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique alternée.
2. Calculer u_2 et u_4 .

f) Convergence d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_p et de raison r définie par : $u_n = u_p q^{n-p}$ avec $p \in \mathbb{N}$.

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_p \lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n-p}$

- ▷ Si $q = 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$, alors (u_n) est convergente et elle converge vers u_p .
- ▷ Si $q > 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$, alors (u_n) est divergente.
- ▷ Si $|q| < 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, alors (u_n) est convergente et elle converge vers 0.
- ▷ Si $q \leq -1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ n'existe pas, alors (u_n) est divergente.

2.7 Suite arithmético-géométrique

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique lorsqu'il existe deux constantes α et β telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$.

Exemple

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique avec $\alpha = 3$ et $\beta = -2$.

Remarques

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique.

- ▷ Si $\alpha = 1$, on a : $u_{n+1} = u_n + \beta$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = \beta$.
- ▷ Si $\beta = 0$, on a : $u_{n+1} = \alpha u_n$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \alpha$.
- ▷ Si $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, on a : $u_{n+1} = u_n$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante.
- ▷ Pour trouver le terme général de la suite (u_n) , on introduit une suite auxiliaire (v_n) géométrique qui est en fonction de la suite (u_n) .

Exercice

Soit une suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$
 On pose la suite (v_n) telle que $v_n = u_n + 5$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

2.8 Suite adjacente

2.8.1 Définition

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} sont adjacentes si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées :

- ▷ (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;
- ▷ Pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n$;
- ▷ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

2.8.2 Théorème

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent vers une même limite.

Exercice

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n}{n+1} \text{ et } v_n = \frac{n+2}{n+1}.$$

1. Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n) .
2. Vérifier que $v_n - u_n > 0$.
3. Calculer la limite des (u_n) et (v_n) en $+\infty$.
4. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2.9 Suites définies par certaines relation de récurrence

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \lambda \\ u_{n+1} = \alpha u_n + \beta \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$ avec α et β des réels.

▷ **Nature de la suite (u_n) et expression de u_n en fonction de n**

Pour donner la nature de cette suite, on distingue trois cas :

• premier cas : si $\alpha \neq \pm 1$ et $\beta = 0$

On a : $u_{n+1} = \alpha u_n$, alors (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \alpha$ et de premier terme $u_0 = \lambda$.

On a : $u_n = \alpha^n \lambda$.

• deuxième cas : si $\alpha = 1$ et $\beta \neq 0$

$u_{n+1} = u_n + \beta$, alors (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = \lambda$ et de raison $r = \beta$.
 $u_n = u_0 + n\beta = \lambda + n\beta$.

On a : $u_n = \lambda + n\beta$

• troisième cas : $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ et $\beta \neq 0$.

$u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$.

Soit la fonction définie par $f(x) = \alpha x + \beta$, on a l'équation $f(x) = x$ entraîne $\alpha x + \beta = x \iff (\alpha - 1)x = -\beta \implies x = -\frac{\beta}{\alpha - 1} \implies x = \frac{\beta}{1 - \alpha}$.

Soit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \frac{\beta}{1 - \alpha}$.

Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{\beta}{1 - \alpha}$ or $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$

$v_{n+1} = \alpha u_n + \beta - \frac{\beta}{1 - \alpha} \implies v_{n+1} = \alpha u_n + \frac{\beta - \alpha\beta - \beta}{1 - \alpha} \implies v_{n+1} = \alpha u_n - \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha}$

$v_{n+1} = \alpha v_n + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha} - \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha} \implies v_{n+1} = \alpha v_n$ avec $q = \alpha$.

On a : $v_n = \alpha^n v_0 = \alpha^n v_0$.

$v_0 = u_0 - \frac{\beta}{1 - \alpha} = \lambda - \frac{\beta}{1 - \alpha} \implies v_n = \alpha^n \left(\lambda - \frac{\beta}{1 - \alpha} \right)$

Exprimer (u_n) en fonction de n .

On a : $u_n = v_n + \frac{\beta}{1 - \alpha} \implies u_n = \alpha^n \left(\lambda - \frac{\beta}{1 - \alpha} \right) + \frac{\beta}{1 - \alpha}$

Exercice

Soit la suite (u_n) définie par

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 5; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
2. Déterminer (u_n) en fonction de n .

2.10 Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Ce sont des suites définies par

$$\begin{cases} u_0 = a, u_1 = b \\ u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n, p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Étude de la suite (u_n)

On a : $u_{n+2} - pu_{n+1} - qu_n = 0$.

Équation caractéristique $r^2 - pr - q = 0$.

Discriminant $\Delta = p^2 + 4q$, on distingue trois cas :

▷ si $\Delta > 0$, alors il existe $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$,

on a $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$ avec $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$.

▷ si $\Delta = 0$, alors il existe $r_1 = r_2 = r_0$,

on a $u_n = (A + Bn)r_0^n$

▷ si $\Delta < 0$ alors il existe $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$,

on a $u_n = \varphi^n [A \cos \theta n + B \sin \theta n]$ avec

$$\begin{cases} \varphi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \cos \theta = \frac{\alpha}{\varphi} \\ \sin \theta = \frac{\beta}{\varphi} \end{cases} \quad A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}.$$

On détermine A et B en posant $u_0 = a$ et $u_1 = b$.

Exercice 1

$$\text{Soit } (u_n) : \begin{cases} u_0 = u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n. \end{cases}$$

- Déterminer u_2 , u_3 et u_4 .
- Déterminer (u_n) en fonction de n .

Exercice 2

$$\text{Soit } (u_n) : \begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n. \end{cases}$$

- Déterminer u_2 , u_3 et u_4 .
- Déterminer (u_n) en fonction de n .

Exercice 3

$$\text{Soit } (u_n) : \begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n. \end{cases}$$

- Déterminer u_2 , u_3 et u_4 .
- Déterminer (u_n) en fonction de n .

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

3.1 Définition

On appelle fonction logarithme népérien, la primitive sur \mathbb{R}_+^* de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule au point 1.

▷ La fonction logarithme népérien de x est notée $\ln x$.

▷ Pour tout $x > 0$, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$.

3.2 Propriétés

▷ **Conséquence de la définition**

- La fonction $x \mapsto \ln x$ est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
- La fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Par conséquent elle est bijective sur \mathbb{R}_+^* .

On a donc $\forall a > 0, \forall b > 0$;

$\ln a \geq \ln b \iff a \geq b$ (croissance)

$\ln a = \ln b \iff a = b$ (bijection).

▷ **Propriétés fondamentales**

Pour tout a et b dans \mathbb{R}_+^* ;

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.
- $\ln a^\alpha = \alpha \ln a$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

3.3 Nombre d'Euler

On appelle nombre d'Euler, le nombre noté e tel que $\ln e = 1$ avec $e = 2,718281828$.

3.4 Existences

Soit u et v deux fonctions numériques.

- ▷ $\ln u(x)$ existe $\iff u(x) > 0$.
- ▷ $\ln |u(x)|$ existe $\iff u(x) \neq 0$.
- ▷ $\ln \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)$ existe $\iff \frac{u(x)}{v(x)} > 0$.
- ▷ $\ln \left| \frac{u(x)}{v(x)} \right|$ existe $\iff \frac{u(x)}{v(x)} \neq 0 \implies u(x) \neq 0$ et $v(x) \neq 0$. ▷ $\ln (u(x))^2$ existe $\iff u(x) \neq 0$.

Exercice

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^3 + 2x + \ln x; \quad g(x) = x^2 \ln(-x); \quad h(x) = \left(\frac{x+1}{x} \right) \ln(2-x).$$

3.5 Dérivation

La fonction logarithme népérien est dérivable sur son ensemble de définition. On a :

- ▷ $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.
- ▷ $(\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
- ▷ $(\ln |u|)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Exercice

Calculer la dérivée des fonctions suivantes : $f(x) = x + \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$; $g(x) = |\cos x - \sin x|$;

$$h(x) = \ln \left(2 + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

3.6 Limites classiques

Les limites classiques de la fonction logarithme népérien sont :

- ▷ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.
- ▷ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.
- ▷ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
- ▷ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a$, $a \in \mathbb{R}^*$.
- ▷ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

Exercice

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x^2 + 1 + \ln x$. On désigne par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Calculer les limites de f à droite de 0 et en $+\infty$.
- Montrer que pour tout $x \in \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}$.

3.7 Équations et Inéquations avec logarithme

3.7.1 Équations avec logarithme

Exercice

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes : $\ln(x+3) = 0$; $\ln^2 x + \ln x = 0$; $\ln^2 x + 3\ln x - 4 = 0$

3.7.2 Inéquations avec logarithme

Exercice

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes : $\ln(2x - e) > 1$; $\ln(2 - 3x) \geq 0$; $\ln^2 x + 3\ln x - 4 \leq 0$

3.8 Étude de la fonction $x \mapsto \ln x$

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \ln x$. On désigne par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Étudier et représenter graphiquement cette fonction.

Exercice

Soit g une fonction définie par : $g(x) = x^2 - 1 + 2\ln x$.

- Déterminer l'ensemble de définition de g , puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
 - Calculer $g'(x)$. En déduire le sens de variation de g .
 - Dresser le tableau de variation de g .
 - Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$. On désigne par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - Calculer les limites de f à droite de 0 et en $+\infty$.
 - Montrer que la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}) puis préciser l'autre asymptote à la courbe (\mathcal{C}) .
 - Étudier la position de la courbe (\mathcal{C}) par rapport à la droite (\mathcal{D}) .
 - Déterminer l'équation de la tangente à (\mathcal{C}) au point d'abscisse 1.
 - Montrer que pour tout $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
 - Dresser le tableau de variation de f .
 - Tracer la (\mathcal{D}) et la courbe (\mathcal{C}) .

3.9 Fonction logarithme de base a

3.9.1 Définition

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction logarithme de base a , la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* , notée \log_a et définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$; $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

3.9.2 Propriétés

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.

▷ La fonction $x \mapsto \log_a x$ est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

▷ Pour tout $x > 0$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

• si $0 < x < 1$; $\ln a < 0$, donc \log_a est strictement décroissante.

• si $a > 1$, $\ln a > 0$, donc \log_a est strictement croissante.

▷ $\forall x > 0, \forall y > 0$ et $\forall k \in \mathbb{R}$

• $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

• $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

• $\log_a x^k = k \log_a x$.

▷ $\forall x > 0, \log_e x = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$. On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction logarithme de base e .

3.9.3 Logarithme décimal

Pour $a = 10$, le logarithme de base a est le logarithme décimal et on note \log .

On a : $\forall x > 0$; $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Exercice 1

Étudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \log_2 x$.

Exercice 2

Soit f une fonction définie par : $f(x) = 2 \ln(1+x)$.

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique $2cm$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
 (b) Calculer les limites de f à droite de -1 et en $+\infty$.
 (c) Préciser les branches infinies à la courbe (\mathcal{C}) de f .
2. (a) Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
 (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
 (c) Tracer la courbe (\mathcal{C}) .
3. (a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on dressera le tableau de variation.
 (b) Tracer la courbe (\mathcal{C}') de f^{-1} dans le même repère que (\mathcal{C}) .
 (c) Calculer $(f^{-1})'(4 \ln 2)$.

- (d) Expliciter $f^{-1}(x)$ puis vérifier le résultat de la question 3.(c).
4. Soit I un intervalle tel que $I = [2; 3]$.
- (a) Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.
 - (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in I$.
 - (c) Montrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.
5. Soit (u_n) une suite numérique telle que :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$
- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \in I$.
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$.
 - (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
 - (d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
 - (e) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$; $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

FONCTION EXPONENTIELLE

4.1 Fonction exponentielle de base e

4.1.1 Définition

On appelle fonction exponentielle de base e, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. On la note \exp .
 Pour tout réel x , $\exp(x) = e^x$.

4.1.2 Propriétés

▷ Conséquence de la définition

La fonction e^x est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur \mathbb{R} .

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}$

- $e^x \leq e^y \iff x \leq y$.
- $e^x = e^y \iff x = y$.
- $\begin{cases} x > 0 \\ y = \ln x \end{cases} \implies \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = e^y \end{cases}$
- $e^{\ln x} = \ln e^x = x$.

▷ Propriétés fondamentales

$\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}$.

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.
- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$; $e^{x-y} = e^x \cdot e^{-y} = \frac{e^x}{e^y}$.
- $e^{xy} = (e^x)^y$.
- $e^{r\alpha} = (e^\alpha)^r$; $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

4.1.3 Existence

$e^{u(x)}$ existe si et seulement si $u(x)$ existe.

Exercice

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes : $f(x) = e^{2x^2+3x+1}$; $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$;

$$h(x) = \frac{e^{-x} + 2}{e^x + 1}.$$

4.1.4 Dérivation

La fonction exponentielle est dérivable sur son ensemble de définition.

- ▷ Pour tout réel x , $(e^x)' = e^x$.
- ▷ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$.
- ▷ $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$.

Exercice

Calculer la dérivée des fonctions suivantes : $f(x) = e^{2x^2+3x+1}$; $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$; $h(x) = \frac{e^{-x} + 2}{e^x + 1}$.

4.1.5 Limites classiques

Soit a et α deux nombres réels tels que $a \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha > 0$.

- ▷ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- ▷ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$.
- ▷ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Remarque

$$\lim_{x \rightarrow x_0} e^{u(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)}.$$

4.1.6 Résolution dans \mathbb{R} des équations, inéquations et systèmes

Exercice 1

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes : $e^{x+2} = 3$; $e^{x^2} = e^{x+2}$; $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

Exercice 2

Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système suivant :
$$\begin{cases} 4e^x - 3e^y = 9 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases}$$

4.1.7 Étude de la fonction $x \mapsto e^x$

Soit g une fonction définie par : $g(x) = e^x$. On désigne par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Étudier et représenter graphiquement cette fonction.

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x + 1 - e^x$. On désigne par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- (b) Montrer que la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}) au voisinage de $-\infty$.

- (c) Préciser l'autre branche infinie.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f .
3. Dresser le tableau de variation de f .
4. Construire la droite (\mathcal{D}) et la courbe (\mathcal{C}).

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x-2)(2e^x - x)$. On désigne par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
(b) Étudier les branches infinies à la courbe (\mathcal{C}).
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2(x-1)(e^x - 1)$.
(b) En déduire le sens de variation de f .
(c) Dresser le tableau de variation de f .
3. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $e^x - x > 0$.
(b) En déduire que la courbe (\mathcal{C}) coupe l'axe des abscisses en un point unique A que l'on précisera les coordonnées.
4. Tracer la courbe (\mathcal{C}).
5. Soit g une fonction définie par : $g(x) = -f(x)$. On désigne par (\mathcal{C}') sa courbe.
(a) Par quel procédé peut-on tracer la courbe (\mathcal{C}').
(b) Tracer alors la courbe (\mathcal{C}').
(c) En déduire le tableau de variation de g .

4.2 Fonction exponentielle de base a

4.2.1 Définition

Soit a un nombre réel strictement positif. On appelle fonction exponentielle de base a , la fonction notée \exp_a définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}; \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$.

Exemple

$$3^x = e^{x \ln 3}.$$

4.2.2 Propriétés

Soit a un nombre réel strictement positif.

- ▷ La fonction \exp_a est la bijection réciproque de la fonction \log_a .
- ▷ Pour tout réel x , $\ln a^x = x \ln a$.
- ▷ $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$;
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$; $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
- ▷ $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.
- ▷ $\forall b > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $(ab)^x = a^x b^x$.
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} = a^x b^{-x}$.

4.2.3 Variations

La fonction a^x est dérivable sur \mathbb{R} et on a : $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a e^{x \ln a}$.

- ▷ si $0 < a < 1$, $\ln a < 0$ et la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante.
- ▷ si $a > 1$, $\ln a > 0$ et la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante.

4.3 Fonction puissance

4.3.1 Définition

Soit α un nombre réel. On appelle fonction puissance α , la fonction qui à tout réel positif x , associe le réel x^α .

4.3.2 Propriétés

Soit α et β deux nombres réels.

- ▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$; $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.
- ▷ $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$; $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$; $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$.
- $x^0 = 1$ et $x^1 = x$.

4.3.3 Variations

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et on a : $(x^\alpha)' = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x}$.

- ▷ si $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante.
- ▷ si $\alpha < 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement décroissante.

4.4 Croissances comparées

Pour le calcul de certaines limites sur les fonctions logarithmes, exponentielles et puissances, on utilise la propriété ci-dessous pour lever les indéterminations.

" La fonction exponentielle croit plus vite que la fonction puissance, elle croit plus vite que la fonction logarithme " Ainsi donc on a les résultats suivants :

- ▷ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$; $\alpha > 0$.
- ▷ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$; $\alpha < 0$.

Deuxième partie

ALGÈBRE

NOMBRES COMPLEXES

5.1 Étude algébrique du nombre complexe

5.1.1 Définition d'un nombre complexe

On appelle nombre complexe, toute expression de la forme $a + ib$ où a et b sont des réels, i est un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.

5.1.2 Ensemble des nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes est noté \mathbb{C} .

5.1.3 Forme algébrique du nombre complexe

On appelle forme algébrique ou cartésienne du nombre complexe z l'écriture $z = a + ib$.

Remarques

Soit z un nombre complexe défini par : $z = a + ib$.

▷ a est la partie réelle de z ; on note $Re(z) = a$, $z \in \mathbb{R}$.

▷ b est la partie imaginaire de z ; on note $Im(z) = b$; $z \in i\mathbb{R}$.

▷ Si $a = 0$, alors z est appelé imaginaire pur, on note $z = ib$.

▷ Si $b = 0$, alors z est un réel, on note $z = a$.

Exemples

$$z = 3 - i ; z = 15 + 3i ; z = 4 ; z = -9i.$$

5.1.4 Conjugué d'un nombre complexe

a) Définition

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$.

On appelle conjugué de z le nombre complexe noté \bar{z} défini par : $\bar{z} = a - ib$.

b) Propriétés

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$.

▷ $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.

▷ $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$.

▷ $z.\bar{z} = a^2 + b^2$.

- ▷ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; avec z' un nombre complexe.
- ▷ $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.
- ▷ $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$.
- ▷ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.
- ▷ $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) \implies \text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$.
- ▷ $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z) \implies \text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.
- ▷ $\overline{\bar{z}} = z$.
- ▷ Si $p(z)$ est un polynôme à coefficient réel, alors $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$.

5.1.5 Calculs sur les nombres complexes

Soit $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes.

Égalités de deux nombres complexes

$$z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2 \text{ et } b_1 = b_2.$$

Remarque

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe; z est nul si et seulement si $a = b = 0$

Sommes de deux nombres complexes

$$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Produits de deux nombres complexes

$$z_1 \times z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Quotients de deux nombres complexes

$$\frac{z}{z'} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

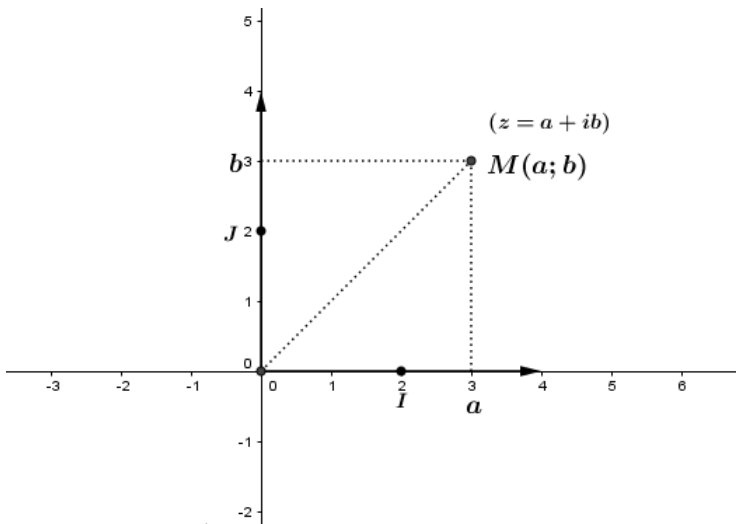
Exercice

Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique : $z_1 = \frac{-1}{2i}$; $z_2 = \frac{3-i}{4+3i}$.

5.2 Le plan complexe

5.2.1 Affixe du point

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
 A tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe un point $M(a; b)$ du plan et réciproquement.
 z est appelé affixe de M , on dit aussi que M est l'image de z dans le plan.



- ▷ L'axe $(O; \overrightarrow{OI})$ est appelé l'axe réel ;
- ▷ L'axe $(O; \overrightarrow{OJ})$ est appelé l'axe imaginaire.

5.2.2 Affixe du vecteur

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B . Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}}$ défini par : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

5.3 Module d'un nombre complexe

5.3.1 Définition

On appelle module du nombre complexe z , le nombre réel positif noté $|z|$ défini par :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Si $z = a + ib$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|z| = OM$$

5.3.2 Propriétés

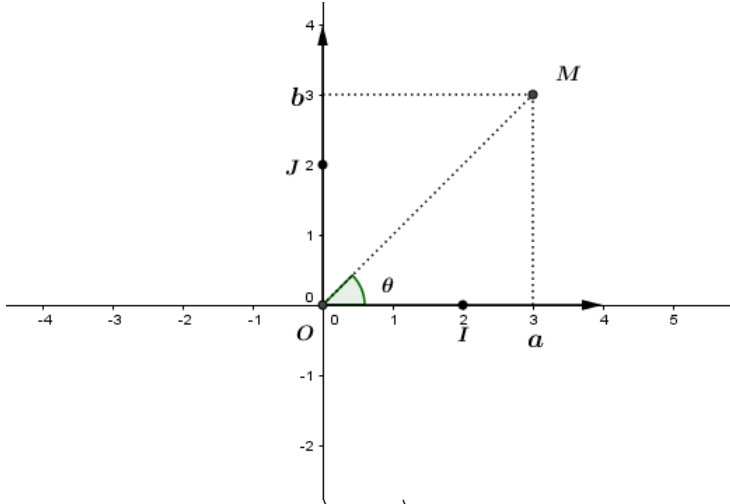
Soit z un nombre complexe non nul ; on a :

- ▷ $|\bar{z}| = |z|$.
- ▷ $|z| = 0 \iff z = 0$.
- ▷ $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.
- ▷ $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
- ▷ $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- ▷ $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
- ▷ $|z^n| = |z|^n ; n \in \mathbb{N}^*$
- ▷ $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

5.4 Argument d'un nombre complexe

5.4.1 Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Un argument de z , noté $\arg(z)$ est une mesure quelconque exprimée en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$ où M est l'image de z dans le plan complexe.



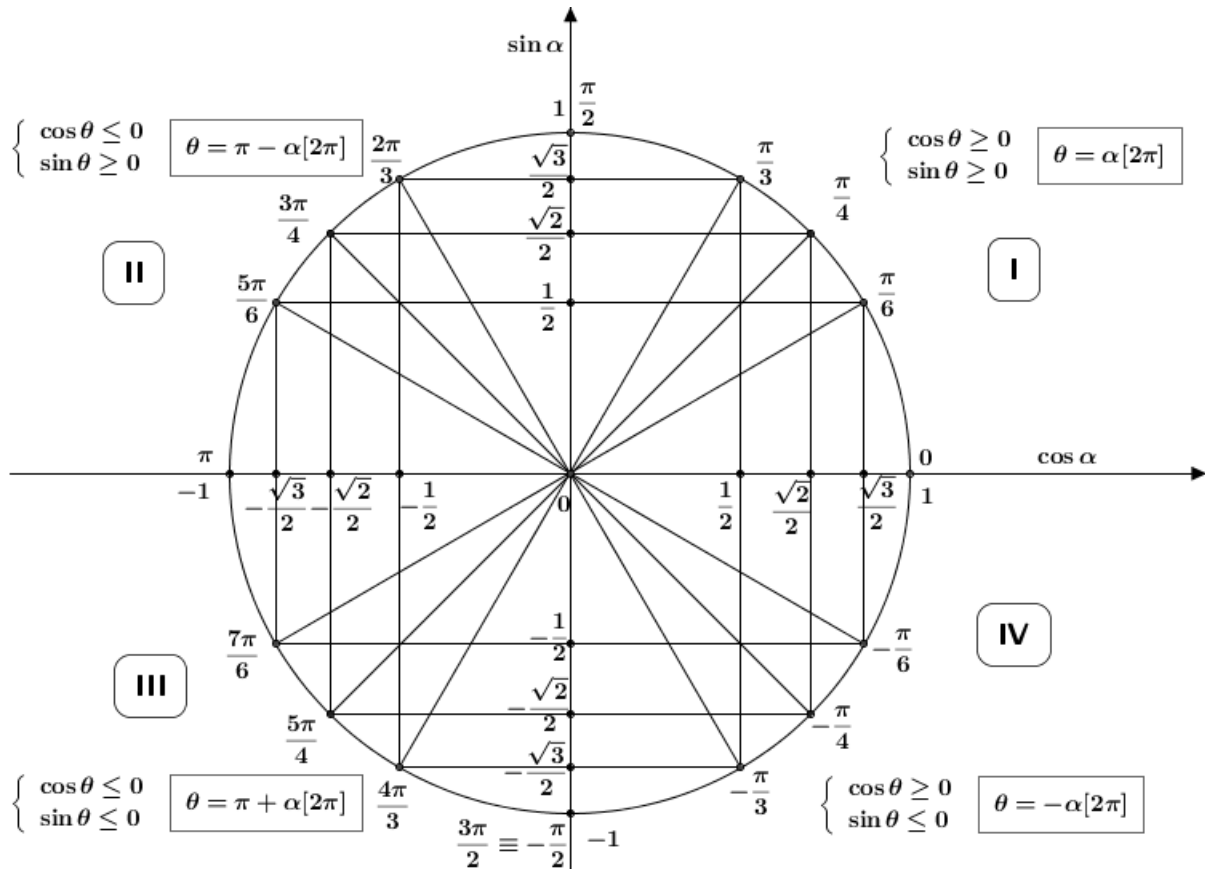
On a $\text{Arg}(z) = \theta = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})[2\pi]$
 $\cos \theta = \frac{a}{|z|}$ et $\sin \theta = \frac{b}{|z|}$

5.4.2 Propriétés

Soit z un nombre complexe non nul ; on a :

- ▷ $\arg \bar{z} = -\arg z + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.
- ▷ $\arg(-z) = \pi + \arg z + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.
- ▷ $\arg z = 0[2\pi] \iff z \in \mathbb{R}_+^*$.
- ▷ $\arg z = \pi[2\pi] \iff z \in \mathbb{R}_-^*$.
- ▷ $\arg z = \frac{\pi}{2}[2\pi] \iff z \in i\mathbb{R}_+^*$.
- ▷ $\arg z = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \iff z \in i\mathbb{R}_-^*$.
- ▷ $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 [2\pi]$.
- ▷ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 [2\pi]$.
- ▷ $\arg(z^n) = n \arg z [2\pi], n \in \mathbb{N}^*$.

5.4.3 Rappel sur le cercle trigonométrique



5.5 Application des nombres complexes en trigonométries

5.5.1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ .
On appelle forme trigonométrique du nombre complexe z l'écriture : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Remarque

La forme trigonométrique du nombre complexe conjugué de z est : $\bar{z} = r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$.

5.5.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ .
On appelle forme exponentielle du nombre complexe z l'écriture : $z = re^{i\theta}$.

Remarque

La forme exponentielle du nombre complexe conjugué de z est : $\bar{z} = re^{-i\theta}$.

5.5.3 Relation entre forme exponentielle et forme trigonométrique

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$; $re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

5.5.4 Forme polaire d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ .
On appelle forme polaire du nombre complexe z l'écriture : $z = [r; \theta]$.

5.5.5 Formules de Moivre

Soit θ un nombre réel et n un entier relatif, on a : $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \implies (\cos \theta + i \sin \theta)^n = e^{in\theta}$
On obtient la formule suivante, dite de Moivre : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

5.5.6 Formules de Euler

Soit z un nombre complexe tel que : $z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ et $\bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta}$
On a :
$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \\ \sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \end{array} \right.$$

5.5.7 Formule du binôme de Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

5.5.8 Linéarisation

Pour Linéariser $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$ ($n \in \mathbb{N}$) on peut utiliser le procédé, mettant en jeu les formules d'Euler et du binôme de Newton.

Exercice

Linéariser les expressions suivantes

1. Exprimer $\cos 3x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
2. Exprimer $\cos^3 \theta \sin^5 \theta$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ si possible.

5.5.9 Factorisation de $e^{ia} + e^{ib}$ et $e^{ia} - e^{ib}$

$$\begin{aligned} e^{ia} + e^{ib} &= e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)} \times e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)} \times e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)} \\ e^{ia} + e^{ib} &= e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)} \left[e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)} \right] \\ e^{ia} + e^{ib} &= 2 \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)} \end{aligned}$$

D'où
$$e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)} \times e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)} \times e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)} \left[e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)} \right]$$

$$e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

D'où $e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

5.6 Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

5.6.1 Définition

Soit n un nombre entier naturel non nul et Z un nombre complexe donné. On appelle racine $n^{\text{ième}}$ du nombre complexe Z , tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

5.6.2 Recherche des racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

Posons $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z = \varphi(\cos\phi + i\sin\phi)$ avec $\varphi = |z|$.
On sait que $z^n = Z$ et $z^n = \varphi^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$
 $z^n = Z \implies \varphi^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Par comparaison $\begin{cases} \varphi^n = r \\ n\phi = \theta + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \implies \begin{cases} \varphi = \sqrt[n]{r} \\ \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$z_k = \left[\sqrt[n]{r}; \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right] = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right], \quad \forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}$$

Remarques

- ▷ Si $Z = 1$, on parle des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité qui sont de la forme $z_k = e^{\frac{2k\pi}{n}}$.
- ▷ La somme de n racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe est nulle.

5.6.3 Interprétation géométrique

Les racines $n^{\text{ième}}$ du nombre complexe $Z = re^{i\theta}$ sont les affixes des sommets M_k d'un polygone régulier de côté n inscrit sur un cercle (\mathcal{C}) de centre O origine du repère et de rayon $\sqrt[n]{r}$ tels que : $(\overrightarrow{OM}_k; \overrightarrow{OM}_{k+1}) = \frac{2\pi}{n}[2\pi]$.

Exercice

1. Trouver les racines cubiques de l'unité.
2. Trouver les racines cubiques de $u = 1 + i$

5.6.4 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition

Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe non nul; on appelle racine carrée de Z , le nombre complexe $z = x + iy$ tel que $Z = z^2$.

$$z^2 = Z \iff (x + iy)^2 = a + ib \implies \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = |Z| \\ 2xy = b \end{cases} \quad (S)$$

La résolution du système (S) permet de trouver deux nombres complexes conjugués z_1 et z_2 ; racines carrées du nombre complexe Z .

5.7 Équations du second degré dans \mathbb{C}

5.7.1 Équations à coefficients réels

Ce sont les équations de la forme $az^2 + bz + c = 0$ où a ; b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Pour résoudre cette équation, on calcule le discriminant Δ .

On a : $\Delta = b^2 - 4ac$ et trois cas peuvent se présenter :

▷ si $\Delta > 0$; on a deux solutions réelles : $\begin{cases} z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

▷ si $\Delta < 0$; on a deux solutions complexes : $\begin{cases} z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \\ z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \end{cases}$

▷ si $\Delta = 0$; on a une solution double : $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

Exercice

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$(E_1) : z^2 + z + 1 = 0$; $(E_2) : z^2 - 6z + 9 = 0$; $(E_3) : z^2 - z - 2 = 0$

5.7.2 Équations à coefficient complexe

Ce sont les équations de la forme $az^2 + bz + c = 0$ où a ; b et c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$.

Pour résoudre cette équation, on calcule le discriminant Δ et deux cas peuvent se présenter :

▷ si $\Delta \in \mathbb{R}$, on se ramène au cas précédent.

▷ si $\Delta \in \mathbb{C}$, on cherche les racines carrées δ_1 et δ_2 du discriminant Δ .

L'équation admet deux solutions complexes telles que : $\begin{cases} z_1 = \frac{-b - \delta_1}{2a} \\ z_2 = \frac{-b + \delta_1}{2a} \end{cases}$ ou $\begin{cases} z_1 = \frac{-b - \delta_2}{2a} \\ z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a} \end{cases}$

Exercice 1

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$(E) : z^2 - 5iz - 6 = 0$; $(E') : (-2 + i)z^2 + (4 - 5i)z + 3 - i = 0$.

Exercice 2

Soient les nombres complexes suivants $z_1 = i$ et $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer $|z_1| \times |z_2|$.
2. (a) Calculer $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \times z_2}$.
- (b) Écrire Z sous la forme algébrique.

(c) Calculer $|Z|$.

3. Résoudre dans \mathbb{C}^2 le système
$$\begin{cases} iz - 3z' = 2 - 3i \\ (1+i)z + 2iz' = 5 - i \end{cases}$$

4. Déterminer les racines carrées δ_1 et δ_2 du nombre complexe $u = 3 + 4i$.

5. Résolvons dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$(E) : (1+i)z^2 + 2(2+i)z + 4 = 0$; $(E') : z^2 - (5-4i)z + 3(1-3i) = 0$.

Exercice 3

Résoudre dans \mathbb{C} chacune des équations suivantes : $z + 2\bar{z} - 1 + 2i = 0$; $z + 2\bar{z} = 4 + i$ et $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

5.8 Équations complexe se ramenant au second degré

5.8.1 Équations complexe du troisième degré

a) Forme générale

Une équations du troisième degré dans \mathbb{C} d'inconnue z est une équation de la forme : $(E) : az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ où a, b, c et d des nombres complexes avec $a \neq 0$.

b) Résolution

La résolution d'une équation du troisième degré dans \mathbb{C} nécessite la connaissance d'au moins une de ses racines appelée racine évidente souvent notée z_0 , ainsi l'équation peut s'écrire sous la forme : $(z - z_0)(az^2 + \alpha z + \beta) = 0$ où a, α et β sont des nombres complexes ($a \neq 0$)

On utilise l'une des trois méthodes suivantes pour déterminer a, α et β :

- ▷ Méthode de Hörner ;
- ▷ Méthode de la division euclidienne ;
- ▷ Méthode d'identification des coefficients.

▷ **Méthode de Hörner**

Si z_0 une solution de l'équation $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ et $a \neq 0$ alors l'équation peut s'écrire : $(z - z_0)(az^2 + \alpha z + \beta) = 0$ où $(a, \alpha, \beta) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$

| | | | | |
|----------|-----|---------------------|--------------------------|---------------------|
| | a | b | c | d |
| z_0 | ↓ | az_0 | αz_0 | βz_0 |
| \times | a | $\alpha = b + az_0$ | $\beta = c + \alpha z_0$ | $d + \beta z_0 = 0$ |

on a :
$$\begin{cases} z - z_0 = 0 & (1) \\ az^2 + \alpha z + \beta = 0 & (2) \end{cases}$$

Alors on résout l'équation du second degré $(az^2 + \alpha z + \beta) = 0$ (2).

Si l'équation (2) admet deux solutions z_1 et z_2 alors l'ensemble de solution de l'équation $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ est $S = \{z_0, z_1, z_2\}$

▷ **Méthode de division euclidienne**

Si z_0 une solution de l'équation $(E) : az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ et $a \neq 0$ alors (E) peut s'écrire sous la forme : $(z - z_0)(az^2 + \alpha z + \beta) = 0$ où $(a, \alpha, \beta) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$ On effectue la division euclidienne de (E) par $z - z_0$ pour déterminer a, α et β

$$\begin{array}{r|l}
 az^3 + bz^2 + cz + d & z - z_0 \\
 -az^3 + az_0z^2 & \hline
 \alpha z^2 + cz + d & az^2 + \alpha z + \beta \\
 -\alpha z^2 + \alpha z_0z & \\
 \hline
 \beta z + d & \\
 -\beta z + \beta z_0 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}
 \quad \text{avec} \quad
 \begin{cases}
 a = a \\
 \alpha = b + az_0 \\
 \beta = c + \alpha z_0
 \end{cases}$$

Alors (E) peut s'écrire sous la forme : $(z - z_0)(az^2 + \alpha z + \beta) = 0$

on a :
$$\begin{cases}
 z - z_0 = 0 & (1) \\
 az^2 + \alpha z + \beta = 0 & (2)
 \end{cases}$$

Si l'équation (2) admet solutions racines z_1 et z_2 alors l'ensemble de solution de l'équation $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ est $S = \{z_0, z_1, z_2\}$

▷ **Méthode de d'identification des coefficients**

Si z_0 une solution de l'équation (E) : $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ et $a \neq 0$ alors (E) peut s'écrire sous la forme : $(z - z_0)(az^2 + \alpha z + \beta) = 0$ où $(a, \alpha, \beta) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$

- On développe $(z - z_0)(az^2 + \alpha z + \beta) = 0$
- On identifie les coefficients pour déterminer a, α et β .

Exercice 1

Soit p un polynôme complexe défini par : $p(z) = z^3 - (1 + 3i)z^2 + (1 + 4i)z - 3(i - 1)$.

1. Montrer que i est une racine du polynôme $p(z)$.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $p(z) = 0$.

Exercice 2

Soit p un polynôme complexe d'inconnue z défini par : $p(z) = z^3 + (4 - 5i)z^2 + 4(2 - 5i)z - 40i$.

1. Démontrer que le polynôme $p(z)$ admet une racine imaginaire pure notée z_0 à déterminer.
2. Déterminer trois nombres complexes a, b et c tels que : $p(z) = (z - 5i)(az^2 + bz + c)$.
3. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $p(z) = 0$.

5.8.2 Équations complexe du quatrième degré

a) Forme générale

Une Équations complexe du quatrième degré est une équation de la forme :
 (E) : $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$ où a, b, c, d et e des nombres complexes avec $a \neq 0$.

b) Résolution

La résolution de cette équation consiste à faire un changement de variable d'inconnue, on distingue deux cas :

▷ Si $a = e$ et $d = -b$, on a : $az^4 + bz^3 + cz^2 - bz + a = 0$ avec $a \neq 0$.

On pose $t = z - \frac{1}{z}$ avec $z \neq 0$.

Cette équation devient : $at^2 + bt + k_1 = 0$ avec $k_1 = 2a + c$.

▷ Si $a = e$ et $d = b$, on a : $az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a = 0$ avec $a \neq 0$.

On pose $t = z + \frac{1}{z}$ avec $z \neq 0$.

Cette équation devient : $at^2 + bt + k_2 = 0$ avec $k_2 = -2a + c$.

Exercice

Soit l'équation $(E) : z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$.

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E) .

2. Démontrer que l'équation (E) est équivalente au système : $\begin{cases} u = z + \frac{1}{z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$

3. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) .

5.9 Utilisation des nombres complexes en géométrie

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit quatre points A, B, C, Ω d'affixe z_A, z_B, z_C, z_Ω respectivement.

5.9.1 Distance de deux points

La distance AB est : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$

5.9.2 Affixe du milieu d'un segment et du centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle quelconque, on désigne par I et G respectivement le milieu du segment $[AB]$ et centre de gravité du triangle ABC .

L'affixe des points I et G sont : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ et $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

5.9.3 Affixe du barycentre de n points pondérés

Soit $G = \text{bary}\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); (A_3, \alpha_3); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$, alors on a :

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \alpha_3 z_{A_3} + \dots + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n}.$$

5.9.4 Interprétation géométrique de l'argument

Soit $(O; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct.

▷ Soit M un point du plan complexe d'affixe z , alors $\arg z = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) [2\pi]$.

▷ $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) [2\pi]$.

▷ $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) [2\pi]$.

▷ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$.

▷ L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $\arg(z - z_A) \equiv \alpha[\pi]$ est la droite de repère $(A; \vec{i})$, privée de A , avec $Mes(\vec{i}; \widehat{\vec{i}; \vec{u}}) \equiv \alpha[\pi]$.

▷ L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $\arg(z - z_A) \equiv \alpha[2\pi]$ est la demi-droite de repère $(A; \vec{i})$, privée de A , avec $Mes(\widehat{\vec{i}; \vec{u}}) \equiv \alpha[2\pi]$.

5.9.5 Interprétation géométrique du module

Soit $(O; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct.

On considère les points A, B et M d'affixe z_A, z_B et z .

▷ L'ensemble des points M d'affixe z vérifie $|z - z_A| = k$ où $k > 0$ est le cercle (\mathcal{C}) de centre A et de rayon k . Son équation cartésienne est : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k^2$ où $z = x + iy$ et $z_A = a + ib$.

▷ L'ensemble des points M du plan tel que : $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 1

Déterminer l'ensemble des points M tels que : $z = 1 + 2e^{i\alpha}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit M un point d'affixe z et $z' = \frac{z - z_A}{z - z_B}$ où $z_A = 2$ et $z_B = -4 + i$.

Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M tels que :

a) $|z'| = 1$; b) $|z'| = 2$; c) z' est réel et d) $\arg z' = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Remarque

Si $k = 1$ et $z_A = z_O$, on a : $|z| = 1$ caractérise le cercle trigonométrique.

5.9.6 Configurations du plan et nombres complexes

▷ Triangle isocèle

ABC est un triangle isocèle en $A \iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A|$

où $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm\alpha i}$ avec $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

▷ Triangle équilatéral

ABC est un triangle équilatéral $\iff |z_B - z_A| = |z_C - z_B| = |z_C - z_A|$

où $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$

▷ Triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en $A \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \lambda e^{\pm\frac{\pi}{2}i}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^* - \{1; -1\}$

▷ Triangle rectangle isocèle

ABC est un triangle rectangle en $A \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm\frac{\pi}{2}i}$.

▷ Carré

$$ABCD \text{ est un carré} \iff \frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = e^{\pm \frac{\pi}{2}i} \text{ et } |z_D - z_B| = |z_C - z_A|.$$

▷ Parallélogramme

$$ABCD \text{ est un parallélogramme} \iff \frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = e^{\pm \theta i} \text{ avec } \theta \neq 0[2\pi].$$

▷ Points cocycliques

$$\text{Les points } A, B, C \text{ et } D \text{ sont cocycliques} \iff \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} : \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} = \beta \in \mathbb{R}^*$$

5.9.7 Colinéarité et orthogonalité

Soit A, B et C trois points du plan complexe.

▷ Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires $\iff \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi]$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \beta \in \mathbb{R}^*$.

▷ Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux $\iff \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = i\beta$.

Conséquences

▷ Les points A, B et C sont alignés $\iff \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi]$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \beta \in \mathbb{R}^*$.

▷ Les droites (AB) et (CD) sont orthogonaux $\iff \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2}[2\pi]$

ou $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = i\beta$

▷ Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires $\iff \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0[2\pi]$

ou $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \pi[2\pi]$

5.10 Nombres complexes et transformations du plan

5.10.1 Translation

a) Définition

Translation de vecteur \vec{u} non nul est l'application du plan dans lui même qui associe à tout point M , le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

b) Expression complexe d'une translation

Soit M et M' des points d'affixe z et z' , \vec{u} un vecteur tel que $z\vec{u} = b$.
L'expression complexe de la translation de vecteur \vec{u} est : $z' = z + b$.

c) **Expression analytique d'une translation**

Posons $z' = x' + iy'$ et $b = x_0 + iy_0$

On a :

$$x' + iy' = x + iy + x_0 + iy_0$$

Par identification des deux membres, on a :
$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$$

d) **Élément caractéristique d'une translation**

L'élément caractéristique d'une translation est son vecteur.

Exercice 1

Soit f une transformation du plan dans le plan définie par son expression complexe suivante : $f : z' = z + 4 - 3i$.

1. Montrer que f est une translation.
2. Déterminer l'affixe de son vecteur \vec{u} .

Exercice 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A et B deux points d'affixe respectives $2 - i$ et $5 + 3i$.

1. Calculer l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} .
2. Déterminer l'expression complexe de la translation t de vecteur \overrightarrow{AB} .
3. Donner l'expression analytique de la translation t .

5.10.2 Homothétie

a) **Définition**

Une homothétie de centre Ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ est l'application du plan dans lui-même qui associe à tout point M , le point M' tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$.

b) **Expression complexe d'une homothétie**

Soit M, M' et Ω des points d'affixe respectives z et z' et z_Ω .

L'expression complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est :

$$z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega) \text{ ou } z' = kz + (1 - k)z_\Omega.$$

En posant $k = a$ et $b = (1 - k)z_\Omega$; on a : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$.

c) **Éléments caractéristiques d'une homothétie**

Un homothétie est caractérisé par son rapport $k = a$ et son centre Ω a pour affixe $z_\Omega = \frac{b}{1 - a}$.

d) **Expression analytique d'une homothétie**

$$z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$$

Posons $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$ et $z_\Omega = x_0 + iy_0$, alors on a :
$$\begin{cases} x' = kx + x_0(1 - k) \\ y' = ky + y_0(1 - k) \end{cases}$$

Remarques

- ▷ Si $k = 1$, alors $h(\Omega; 1) = Idp$ (Identité du plan).
- ▷ Si $k = -1$, alors $h(\Omega; -1) = S_\Omega$ (symétrie centrale).

Exercice 1

Soit h une transformation plane définie par : $h : z' = 3z + 2 - i$.

1. Montrer que h est une homothétie.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de l'homothétie h .

Exercice 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A un point d'affixe $z_A = 1 + 2i$.

1. Déterminer l'expression complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $k = -\frac{1}{2}$.
2. Donner l'expression analytique de la translation h .

5.10.3 Rotation

a) **Définition**

La rotation de centre Ω et d'angle θ est l'application du plan dans lui même qui associe à tout point M , le point M' tel que : $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\vec{\Omega M}; \vec{\Omega M}') = \theta[2\pi] \end{cases}$

b) **Expression complexe d'une rotation**

Soit M, M' et Ω des points d'affixe respectives z, z' et z_Ω .

$$\text{On a : } \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\vec{\Omega M}; \vec{\Omega M}') = \theta[2\pi] \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = e^{i\theta} \\ \arg\left(\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right) = \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = e^{i\theta} \iff z' - z_\Omega = (z - z_\Omega)e^{i\theta} \implies z' = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})z_\Omega.$$

En posant $e^{i\theta} = a$ et $b = (1 - e^{i\theta})z_\Omega$, on a la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| = 1$.

Remarques

- ▷ Si $\theta = \pi$, la rotation $r_{(\Omega; \theta)}$ est une symétrie centrale de centre Ω .
- ▷ Si $\theta = 0$, la rotation $r_{(\Omega; \theta)}$ est l'identité du plan.

c) **Éléments caractéristiques d'une rotation**

Une rotation r d'écriture complexe $z' = az + b$ est caractérisé par : son angle θ tel que : $\theta = \arg(a)[2\pi]$ et son centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{b}{1 - a}$.

d) Expression analytique d'une rotation

Soit r la rotation d'écriture complexe : $z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$

Posons : $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $z_\Omega = x_0 + iy_0$ et $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

$$x' + iy' = (x - x_0)\cos\theta - (y - y_0)\sin\theta + x_0 + i[(x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta + y_0]$$

Par égalité de deux nombres complexes, on a : $r : \begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\theta - (y - y_0)\sin\theta + x_0 \\ y' = (x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta + y_0 \end{cases}$

Remarques

▷ Si $\theta = \pi$, alors on a : $r : \begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}$ c'est l'expression analytique d'une symétrie

centrale de centre Ω d'affixe $z_\Omega = x_0 + iy_0$.

▷ Si $\theta = 0$, alors on a : $r : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ c'est l'expression analytique de l'identité du plan.

Exercice 1

Soit f une transformation du plan dans le plan définie par : $f : z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 - i\sqrt{3}$.

1. Montrer que f est une rotation.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de f .

Exercice 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A un point d'affixe $z_A = -3 + 2i$.

1. Déterminer l'expression complexe de la rotation R de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer l'expression analytique de la rotation R .

5.10.4 Symétries particulières

a) Symétrie par rapport à l'axe réel

Soit M et M' deux points d'affixe respectives z et z' .

M' est le symétrique de M par rapport à l'axe réel si et seulement si $z' = \bar{z}$.

b) Symétrie par rapport à l'axe imaginaire

Soit M et M' deux points d'affixe respectives z et z' .

M' est le symétrique de M par rapport à l'axe imaginaire si et seulement si $z' = -\bar{z}$.

c) Symétrie par rapport l'origine du repère

Soit M et M' deux points d'affixe respectives z et z' .

M' est le symétrique de M par rapport à l'origine si et seulement si $z' = -z$.

d) Symétrie par rapport à la première bissectrice

Soit M un point du plan complexe d'affixe $z = a + ib$.
 M' d'affixe z' est le symétrique de M par rapport à la première bissectrice si et seulement si $z' = b + ia$.

e) Symétrie par rapport à un point

Soit A, B et C trois points d'affixe respectives z_A, z_B et z_C .
 A est le symétrique que B par rapport à C si et seulement si $z_A = 2z_B - z_C$.

5.10.5 Similitude plane directe

a) Définition

La similitude plane directe S de centre Ω , d'angle θ et de rapport k ($k > 0$) est la composé commutative de la rotation de centre Ω et d'angle θ avec une homothétie de centre Ω et de rapport k , c'est-à-dire $S = h \circ r = r \circ h$.

b) Expression complexe d'une similitude plane directe

Soit S la similitude plane directe de centre Ω , d'angle θ et de rapport $k > 0$.
 L'expression complexe de S est : $z' - z_\Omega = ke^{i\theta}(z - z_\Omega)$ ou $z' = ke^{i\theta}z + (1 - ke^{i\theta})z_\Omega$.
 En posant $a = ke^{i\theta}$ et $b = (1 - ke^{i\theta})z_\Omega$, on a la forme $z' = az + b$.

c) Éléments caractéristiques d'une similitude plane directe

Soit S la similitude plane directe d'écriture complexe : $z' = az + b$.
 La similitude plane directe S est caractérisé par :

- ▷ son rapport k tel que : $k = |a|$;
- ▷ son angle θ tel que : $\theta = \text{arg}(a)[2\pi]$;
- ▷ son centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{b}{1 - a}$.

d) Expression analytique d'une similitude plane directe

Soit S la similitude plane directe d'écriture complexe : $z' = ke^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$
 Posons : $z = x + iy, z' = x' + iy', z_\Omega = x_0 + iy_0$ et $ke^{i\theta} = k \cos \theta + ik \sin \theta$.
 $x' + iy' = k(x - x_0) \cos \theta - k(y - y_0) \sin \theta + x_0 + i[k(x - x_0) \sin \theta + k(y - y_0) \cos \theta + y_0]$
 Par égalité de deux nombres complexes, on a : $S : \begin{cases} x' = k(x - x_0) \cos \theta - k(y - y_0) \sin \theta + x_0 \\ y' = k(x - x_0) \sin \theta + k(y - y_0) \cos \theta + y_0 \end{cases}$

e) Similitude plane directe particulière

Soit S une similitude plane directe d'écriture complexe $z' = az + b$.

- ▷ si $a = 1$; on a : $z' = z + b$, alors S est une translation de vecteur \vec{u} d'affixe b .
- ▷ si $a \neq 1, |a| = 1$ et $\theta \neq 0[2\pi]$, alors S est une rotation de centre Ω et d'angle θ .
- ▷ si $a = -1$; on a : $z' = -z + b$, alors S est une symétrie centre de centre Ω .
- ▷ si $a \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ et $\theta \equiv 0[2\pi]$, alors S est une homothétie de centre Ω et de rapport $k = a$.

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A, B, C et D quatre points du plan d'affixe respectives $3 - 2i$; $6 + 4i$; $-3 + i$ et $7i$. On désigne S la similitude plane directe de centre C , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

1. Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 + i)z + 1 + 3i$.
2. Déterminer l'expression analytique de S .
3. Déterminer l'affixe du point E image du point D par S .

Exercice 2

1. Résoudre dans \mathbb{C} le système
$$\begin{cases} (1 + i)\alpha + \beta = -2 + i \\ (2 - i)\alpha + \beta = -1 + 4i \end{cases}.$$
2. Le plan complexe (\mathcal{P}) est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A, B, C et D quatre points du plan complexe (\mathcal{P}) d'affixes respectives : $1 + i, 2 - i, -2 + i$ et $-1 + 4i$. On désigne par S la similitude plane directe qui transforme A en C et B en D .
 - (a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude S .
 - (b) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S .
 - (c) Déterminer analytiquement S puis donner l'affixe de point E image de C par S .
3. Soit p un polynôme d'inconnue z défini par : $p(z) = z^3 - 3iz^2 - 4z + 2i$.
 - (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $p(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$.
 - (b) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $p(z) = 0$.
4.
 - (a) Placer les points A, B, C et D dans le plan (\mathcal{P}) .
 - (b) Déterminer l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} .
 - (c) Déterminer l'affixe du point G image C par la translation du vecteur \overrightarrow{AB} .
 - (d) Quelle est la nature du quadrilatère $ACGB$?