Comment donner une valeur approchée d'une solution d'une équation du type f(x) = k ?

Méthode

Pour déterminer une valeur approchée d'une solution α de l'équation f(x) = k , il suffit de déterminer deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1) < k < f(x_2)$. Si f est strictement croissante , alors on en déduit : $x_1 < \alpha < x_2$. Si f est strictement décroissante , alors on en déduit : $x_1 > \alpha > x_2$. A partir de l'encadrement d'amplitude recherchée , on en déduit une valeur approchée de α à la précision demandée .

Applications

1) Montrer que l'équation $x^3 + 2x^2 + 1 = 0$ admet une unique solution α dans $[-3 ; -2]$ et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut .

2) Soit f la fonction définie sur [1 ; 2] par $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.
   a) Etudier les variations de f
   b) Montrer que l'équation f(x) = 3 admet une solution et une seule, α , dans l'intervalle]1 ;2[.
   c) Donner, au moyen de la calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Réponses non détaillées

1) On pose $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$; … f est strictement croissante sur [–3 ;–2]

De plus f est continue sur [–3 ;–2] car … et … $0 \in [f(-3) ; f(-2)]$ donc l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans l'intervalle [–3 ;–2] .

Avec la calculatrice on obtient $-2{,}21 < \alpha < -2{,}20$ car …

Donc –2,21 est une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

2) a) …f est strictement croissante sur [1 ; 2].

   b) De plus f est continue sur [1 ; 2] car … et comme … $3 \in [f(1) ; f(2)]$ donc l'équation f(x) = 3 admet une unique sol. α dans [1 ; 2] et même dans]1 ;2[car …

   c) Avec la calculatrice on obtient $1{,}4142 < \alpha < 1{,}4143$ …

   Donc une valeur approchée de α à 10^{-3} près est 1,414.