Comment déterminer le nombre de solution(s) d'une équation du type f(x) = k ?

Méthode

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires ou théorème de la bijection permet de prouver l'existence d'une solution unique à une équation du type $f(x) = k$ sur un intervalle donné .
Pour déterminer le nombre de solution(s) d'une telle équation, on doit appliquer une ou plusieurs fois ce théorème , sur chaque intervalle qui vérifie les hypothèses.
La fonction doit être continue et strictement monotone sur l'intervalle considéré (une étude préalable des variations est donc nécessaire) .
Enfin, le réel k doit être compris entre les images ou les limites des bornes de l'intervalle.

Applications

1) Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$.

a) étudier les variations de la fonction f
b) déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

2) Montrer que l'équation $\frac{-1}{3}x^3 + x^2 + 3 = 0$ admet une et une seule équation dans R.

Réponses non détaillées

1) a) f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[3\,;+\infty[$ et strictement décroissante sur $[-1\,;3]$ car ...

b) f est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$; comme 0 est compris entre $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(-1) = 15$ alors … l'éq. $f(x) = 0$ admet une seule sol. dans $]-\infty\,;-1]$

L'équation $f(x) = 0$ admet aussi une seule sol. dans $[-1\,;3]$ et une seule dans $[3\,;+\infty[$ car …

2) On pose $f(x) = \frac{-1}{3}x^3 + x^2 + 3$; (…) d'après les variations de f, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty\,;2]$ par contre …on peut appliquer le théorème de la bijection sur $[2\,;+\infty[$ prouvant que l'équation $f(x) = 0$ a une sol. unique sur $[2\,;+\infty[$ …