Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

TERM-D

Comment appliquer le théorème des « valeurs intermédiaires » ?

Méthode

Le théorème dit « des valeurs intermédiaires » permet de démontrer qu'une fonction prend au moins une fois une valeur donnée , c'est à dire de justifier l'existence de solution(s) pour une équation du type $f(x) = k$.
Il faut pour cela que la fonction soit continue sur l'intervalle considéré (ce qui est le cas pour la plupart des fonctions étudiées en terminale) et que l'on trouve 2 réels dont les images encadrent k.
Si l'intervalle est donné , il suffit de calculer les images des bornes (ou éventuellement les limites) .
Si il n'y a aucune indication d'intervalle , l'image de 0 (si elle existe) est simple à calculer , et en général des considérations de signe ou d'ordre de grandeur permettent de trouver rapidement une autre valeur (en général entière)
Il est bien entendu conseillé **d'utiliser la calculatrice et sa fonction « tableau »** pour rechercher ces valeurs.

Applications

1) Démontrer que l'équation $x^4 + 3x^2 - 5x + 1 = 4$ admet au moins une solution dans $[-1;0]$.

2) Démontrer que l'équation $\sqrt{x-3} = \frac{8}{x^2}$ admet au moins une solution dans $[3 ; +\infty[$.

3) Démontrer que l'équation $\cos x = \frac{x^2}{2}$ admet au moins une solution dans **R**.

Réponses non détaillées

1) La fonction $f : x \mapsto x^4 + 3x^2 - 5x + 1$ est continue sur **R** car … et $4 \in [f(-1) ; f(0)]$ car …
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires …

2) Equation se transformant en $f(x) = k$ avec $f(x) = x^2\sqrt{x-3}$ et $k = 8$.
f est continue sur $[3 ; +\infty[$ car … et $8 \in [f(3) ; f(4)]$ car ...
D'où, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 8$ admet au moins une solution dans $[3 ; 4]$ donc …

3) En posant $f(x) = \cos x - \frac{x^2}{2}$, cela revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

f est continue sur **R** car … et $0 \in [f(0) ; f(\frac{\pi}{2})]$ car ...
D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ donc ...