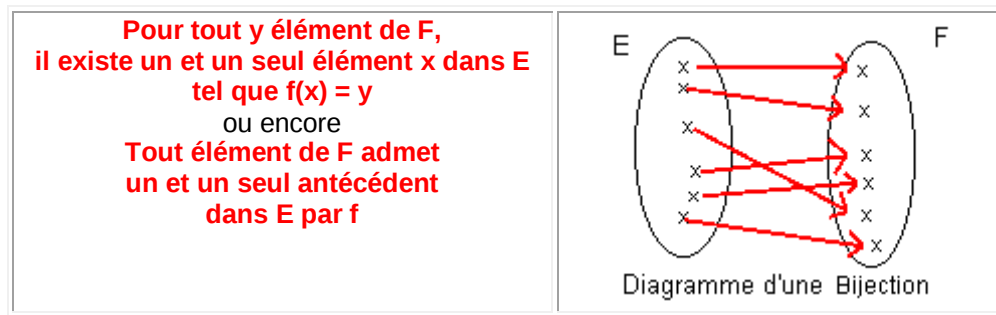


III] Combinaisons

1. Bijection d'un ensemble E sur un ensemble F:

On appelle BIJECTION de E sur F toute application f vérifiant "



Si E et F sont des ensembles finis, il existe une bijection de E sur F si et seulement si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$. Dans ce cas, si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F) = n$, le nombre de bijections possibles de E sur F est $n!$

2. Combinaison

E est un ensemble fini de cardinal n : $\text{Card}(E) = n$.

Pour p entier appartenant à $\{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n\}$, on note E_p l'ensemble des parties de E ayant exactement p éléments.

a) Définition: On appelle Combinaison de p éléments pris parmi les n éléments de E tout choix de p éléments de E, sans ordre et sans remise. Cela correspond donc au choix d'une partie de E ayant p éléments, ou d'un sous-ensemble de E à p éléments.

C'est donc un élément de E_p .

Par exemple, si $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, choisir une Combinaison de 2 éléments parmi les 4 éléments de E, c'est choisir un de des ensembles suivants:

$\{1;2\}$ ou $\{1;3\}$ ou $\{1;4\}$ ou $\{2;3\}$ ou $\{2;4\}$ ou $\{3;4\}$

Il faut attention à ne pas confondre $\{1;2\}$ qui est la partie de E contenant les éléments 1 et 2, avec le couple $(1;2)$ qui est un élément du produit cartésien $E \times E$.

La partie $\{1;2\}$ et la partie $\{2;1\}$ sont identiques, alors que les couples $(1;2)$ et $(2;1)$ sont distincts.

Nombre de Combinaisons à p éléments dans un ensemble à n éléments:

Pour p quelconque compris entre 0 et n , on note $\binom{n}{p}$ ou C_n^p le nombre de Combinaisons de p éléments parmi les n éléments de E. Ce nombre correspond au cardinal de E_p .

On a
$$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$$

Fomesoutra.com
ça s'écrit !
Docs à portée de main

b) Propriétés :

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

- $\binom{n}{0} = 1$ • $\binom{n}{n} = 1$ • $\binom{n}{1} = n$ • $\binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{p} = 0$ lorsque $p > n$ • $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ ($0 \leq p \leq n$)
- $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ ($1 \leq p \leq n$)

c) Exercice : Pour remplir une grille de loto, il faut cocher 6 cases sur 49. Sachant que l'on met 10 secondes pour remplir une grille, combien de temps faudrait-il pour remplir toutes les grilles différentes possibles.

3. Triangle de Pascal

L'idée du triangle de Pascal est de présenter les $\binom{n}{p}$ ou C_n^p sous forme de tableau à double-entrées.

En colonne, les valeurs de p et en ligne les valeurs de n .

Les colonnes et les lignes sont numérotées à partir de 0, et la case correspond à la p -ème colonne et n -ème ligne est

le coefficient $\binom{n}{p}$ ou C_n^p .

Or les formules précédentes montrent deux choses.



1: Il y a une symétrie dans ce tableau car $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

2: Si on connaît les éléments de la ligne $(n-1)$, on connaît automatiquement ceux de la ligne n par la formule $\binom{n}{p-1}$

$$+ \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

D'où le Triangle de Pascal:

	0	1	2	3	4		p-1	p
0	1	0						
1	1	1	0					
2	1	2	1	0				
3	1	3	3	1	0			
4	1	4	6	4	1			
n-1							C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^p
n								C_n^p

Exemples : Développer $(a+b)^2$; $(a+b)^3$; $(a+b)^4$. Écrire les résultats en utilisant les nombres $\binom{n}{p}$.

4. Formule du binôme de Newton :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $a \in \mathbb{C}$ et pour tout $b \in \mathbb{C}$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{p} a^{n-p} b^p + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Cette formule, valable pour des nombres réels, est bien entendu valable pour des nombres complexes.

Exercices : 1) En utilisant la formule du binôme de Newton, développer $(1+\sqrt{2})^4$.

2) Appliquer la formule du binôme de Newton avec $a=1$ et $b=1$. Que peut-on en déduire ?

Propriété Le nombre de parties d'un ensemble de cardinal n est 2^n .

c'est-à-dire que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{p} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} = 2^n$

Dénombrements : quelles méthodes ?

Types de tirages	Ordre	Répétitions d'éléments	Dénombrement
Successifs Avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	n^p p -listes
Successifs sans remise		Un élément n'est tiré qu'une seule fois	A_n^p arrangements
Simultanés	L'ordre n'intervient pas		C_n^p combinatoires