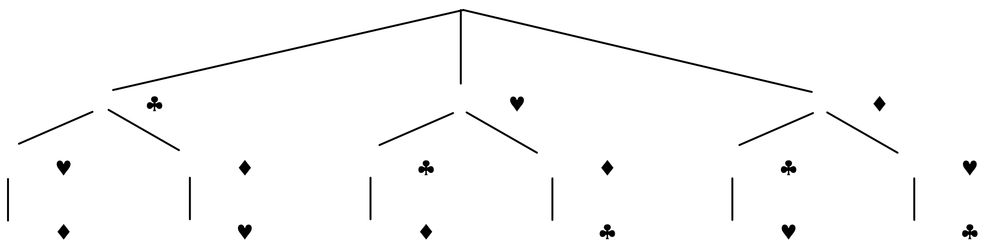
II] Permutations

1. **Définition** :

E est un ensemble fini et on note n son cardinal : Card(E) = n.
On appelle Permutation sur E toute n-liste des éléments de E.

Par exemple, si E = {a ; b ; c ; d} , une permutation de E est (a ; b ; d ; c) ou (b ; a; d ; c).
En revanche (a ; b; c ; c) n'est pas une permutation de E car l'élément "c" apparait 2 fois.
Une permutation de E est donc un élément de E^n dont lequel chaque élément de E apparait une et une seule fois.
Exemple :
Soit E = {♣ ; ♥ ; ♦} . On peut écrire toutes les permutations des éléments de E en utilisant un arbre :



On obtient 6 permutations : (♣ ; ♥ ; ♦) ; (♣ ; ♦ ; ♥) ; (♥ ; ♣ ; ♦) ; (♥ ; ♦ ; ♣) ; (♦ ; ♣ ; ♥) ; (♦ ; ♥ ; ♣).
Une permutation étant un triplet (a ; b ; c) d'éléments de E deux à deux distincts, on peut choisir le premier élément a de 3 façons dans l'ensemble E.
Pour chaque choix de a, on peut choisir le deuxième élément b de 2 façons possibles (puisqu'il doit être différent de a).
On a donc $3 \times 2 = 6$ façons de choisir les deux premiers éléments a et b.
Lorsque les deux premiers éléments sont choisis, il ne reste plus qu'une seule possibilité de choix pour le troisième élément c.
Le nombre de permutations des éléments de E est donc $3 \times 2 \times 1 = 6$

2. **Propriété**

Le nombre de permutations d'un ensemble ayant n éléments est : $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times 2 \times 1$.

Définition : Si n est un entier strictement positif, on appelle factorielle de n (ou n factorielle) le nombre noté n! égal au produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n.

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Par convention, on posera 0! = 1.

Exemples : a)Dans une salle contenant 20 personnes, on veut faire sortir les personnes les unes après les autres. Ceci correspond à classer les personnes de la première à la vingtième. Il y a donc 20! façons de faire sortir les 20 personnes, c'est à dire 2 432 902 008 176 640 000 façons.
b) Avec les chiffres 1 ; 2 ; 3 ...; 9 , on veut écrire tous les nombres possibles en utlisant tous ces chiffres une et une seule fois (en base 10). Un tel nombre apparait alors comme une permutation des 9 chiffres. Il y a alors 9! = 362 880 nombres possibles.

3. **P-listes** : Il s'agit de compter toutes les listes possibles de p éléments parmi n en tenant compte de l'ordre et avec répétitions des éléments. Le nombre de ces listes est n^p.

Arrangements : On choisit p éléments parmi n **en tenant compte de l'ordre mais sans répétitions**.

$$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1) \quad = \quad \frac{n!}{(n-p)!}$$