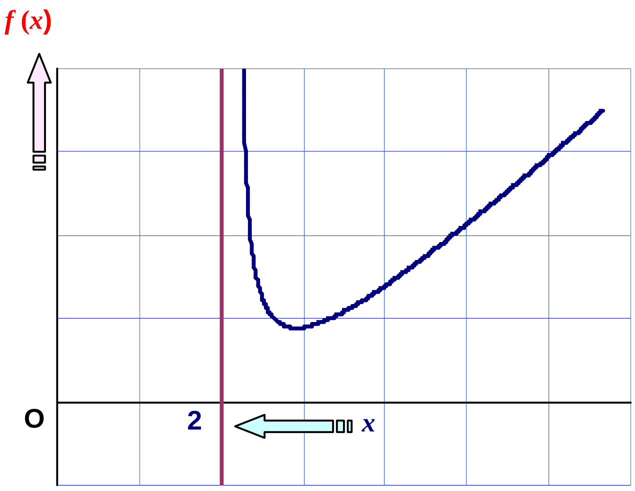
Les Asymptotes

I. ASYMPTOTE VERTICALE

Certaines fonctions n'existent qu'à partir d'un certain réel a sans être nécessairement définie en a. Il est alors utile d'étudier la limite de cette fonction quand x se rapproche de cette valeur a.

Par exemple, considérons la fonction f définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$, dont la courbe représentative est :



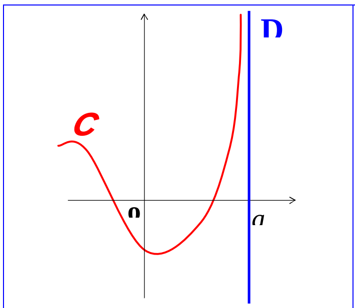
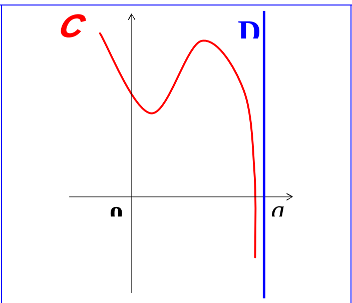
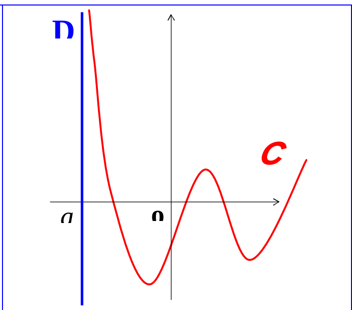
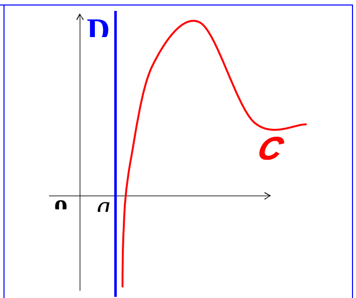
Lorsque x se rapproche de 2 par la droite, $f(x)$ croît sans bornes dans le sens où $f(x)$ devient plus grand que n'importe quelle valeur donnée, si grande soit-elle.
On dit alors que $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$.

Graphiquement, lorsque x se rapproche de 2, la courbe représentative de la fonction f se rapproche de plus en plus de la droite D d'équation $x = 2$

La droite D étant parallèle à l'axe des ordonnées on dit alors que D est une asymptote verticale à la courbe de *f* au voisinage de 2.

Remarque : Il existe aussi des fonctions qui ont pour limite $-\infty$ quand x tend vers un réel a, dans ce cas également la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe.

LES DIFFERENTS CAS :

			
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

DEFINITION :

Soit *a* un réel, dire que la droite d'équation *x* = *a* est asymptote à la courbe représentative de la fonction *f* signifie que la limite de *f* (*x*) est infinie quand *x* tend vers *a*. Soit
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$

II. Asymptote horizontale

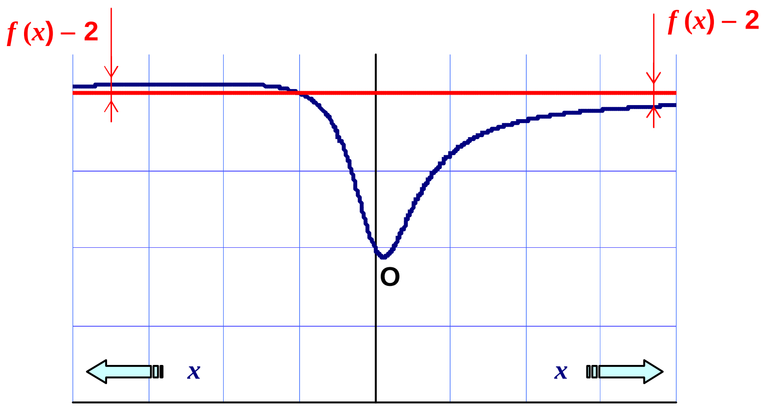
Soit f la fonction définie sur ………. par $f(x) = \dfrac{8x^2 - x + 1}{4x^2 + 1}$.

Nous avons $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x^2 - x + 1}{4x^2 + 1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \quad = \quad$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8x^2 - x + 1}{4x^2 + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \quad =$

soit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

Ainsi quand *x* tend vers – ∞, ou vers + ∞, *f* (*x*) prend des valeurs de plus en plus proche de 2.
Intuitivement cela signifie qu'en allant vers – ∞ ou vers + ∞ , la courbe représentative de la fonction *f* se rapproche de plus en plus de la droite Δ d'équation *y* = 2.

La droite Δ étant parallèle à l'axe des abscisses, on dit alors que Δ est une asymptote horizontale à la courbe de *f* .



Pour déterminer, les positions relatives de la courbe représentative de la fonction *f* et de l'asymptote Δ d'équation *y* = 2, intéressons nous au signe de la différence *f* (*x*) – 2.

$$f(x) - 2 = \frac{8x^2 - x + 1}{4x^2 + 1} - 2 = \frac{\qquad}{4x^2 + 1} = \frac{\qquad}{4x^2 + 1}$$

or :

pour $x < -1$, $\dfrac{-(x+1)}{4x^2+1} > 0$ et la courbe est au dessus de l'asymptote quand $x \to -\infty$

pour $x > -1$, $\dfrac{}{4x^2+1} < 0$ et la courbe est au dessous de l'asymptote quand $x \to +\infty$

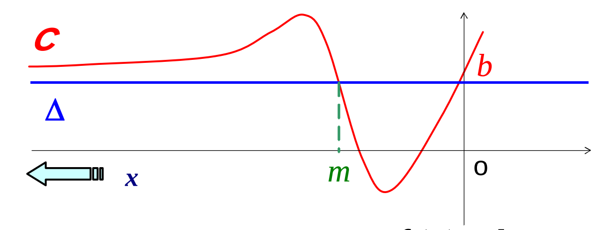
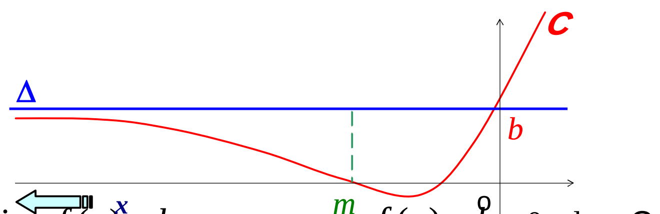
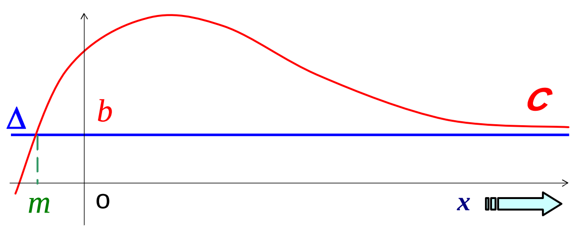
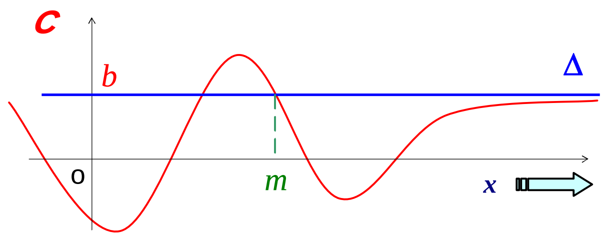
REMARQUE :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-(x+1)}{4x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \quad = \lim\limits_{x\to-\infty} \quad = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-(x+1)}{4x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = 0$

Or la différence $f(x) - 2$ représente la différence d'ordonnées entre un point de la courbe de f et le point de même abscisse de l'asymptote Δ.
Ainsi plus x devient grand (en valeur absolue) et plus la distance entre la courbe de f et l'asymptote Δ devient petite.
Cela vérifie ce que l'on constatait sur le graphique...

Une courbe peut s'approcher de l'asymptote par des valeurs inférieures, soit par des valeurs supérieures, ou encore par des valeurs alternativement supérieures et inférieures.

Les différents cas :

 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ et pour $x < m$ $f(x) - b > 0$ alors C est au dessus de Δ	 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ et pour $x < m$ $f(x) - b < 0$ alors C est au dessous de Δ
 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ et pour $x > m$ $f(x) - b > 0$ alors C est au dessus de Δ	 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ et pour $x > m$ $f(x) - b < 0$ alors C est au dessous de Δ

DEFINITION :

Soit b un réel, lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$) alors la droite Δ d'équation $y = b$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$)
L'étude du signe de $f(x) - b$ permet de préciser la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote .

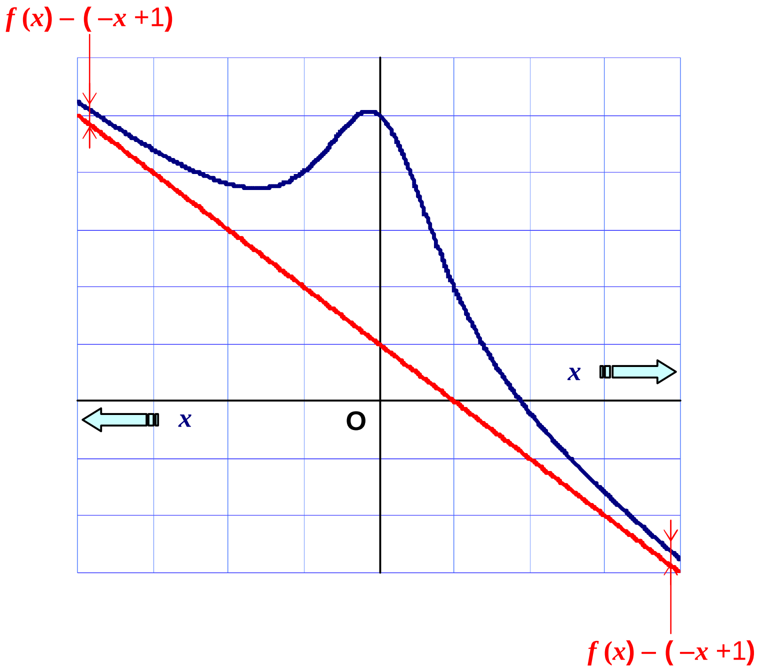
III. Asymptote oblique

Soit f la fonction définie sur ……. par $f(x) = \dfrac{-x^3 + x^2 - x + 5}{x^2 + 1}$.

1. Nous avons : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3 + x^2 - x + 5}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \quad = \lim\limits_{x \to -\infty} (\quad) =$ et

   $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3 + x^2 - x + 5}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} (\quad) =$. Soit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

   Traçons la courbe **C**$_f$ représentative de la fonction f.



En allant vers –∞ ou vers +∞, la courbe **C**$_f$ semble se rapprocher de plus en plus d'une droite Δ.

2. Montrons par le calcul que la droite Δ d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote à la courbe **C**$_f$ en –∞ et en + ∞.

Comme précédemment, on regarde la différence des ordonnées d'un point de la courbe et du point de la droite de même abscisse : $f(x) - (-x + 1)$

$$f(x)-(-x+1)=\frac{-x^3+x^2-x+5}{x^2+1}-(-x+1)$$

$$=\frac{}{x^2+1}-\frac{}{x^2+1}$$

$$=\frac{}{x^2+1}-\frac{}{x^2+1}$$

$$=\frac{}{x^2+1}$$

or $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{}{x^2+1}=$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{}{x^2+1}=$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x+1)=$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-x+1)=$.

Autrement dit, lorsque x tend vers $-\infty$, ou vers $+\infty$, $f(x)$ est proche de $-x+1$.

On dit que la droite Δ est asymptote oblique à la courbe C_f en $-\infty$ et en $+\infty$

D'autre part pour tout réel x : $\dfrac{4}{x^2+1}>0$ soit $f(x)-(-x+1)>0$, ainsi la courbe C_f est au dessus de l'asymptote Δ. Cela vérifie ce que l'on constatait sur le graphique...

DEFINITION

Dire que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) signifie que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0 \text{ (resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0)$$

– Si la fonction f peut s'écrire $f(x)=(ax+b)+g(x)$ avec $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ $\text{(resp. } \lim_{x\to-\infty} g(x)=0)$

alors la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

– L'étude du signe de $f(x) - (ax + b)$ permet de préciser la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote .

Lorsque $f(x) - (ax + b) > 0$ la courbe est au dessus de l'asymptote.

Lorsque $f(x) - (ax + b) < 0$ la courbe est au dessous de l'asymptote.

REMARQUE :

Une asymptote par rapport à une courbe fourni une sorte de modèle simplifié de comportement.
par exemple pour de grandes valeurs de x une valeur approchée de $f(x)$ peut être calculée à l'aide de $ax + b$

pour $x = 125$: $\dfrac{-x^3+x^2-x+5}{x^2+1}=\dfrac{-125^3+125^2-125+5}{125^2+1}=-\dfrac{968810}{7813}$

et $-x + 1 = -124$.

(-124) est une valeur approchée de $f(125)$ l'erreur commise $\left(\dfrac{4}{125^2+1}=\dfrac{2}{7813}\right)$ est inférieure à 10^{-3}.

EXERCICE 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$

1. Pourquoi peut-on affirmer que la droite Δ d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$? au voisinage de $-\infty$?
2. Précisez la position relative de C_f et de Δ.

EXERCICE 2

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 2}$

1. Étudier les limites quand x tend vers -2.
2. Trouver trois nombres a, b, c tels que pour tout $x \neq -2$; $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$
3. Trouvez une équation d'une asymptote oblique Δ à C_f au voisinage de $+\infty$.
4. Vérifiez que Δ est aussi asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.
5. Précisez la position relative de C_f et de Δ.