

Questions les plus fréquentes dans une étude de Fonctions Méthodes et stratégies classiques.

1-Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f ?

S'il n'est pas donné dans l'énoncé, il faut chercher le domaine (ou ensemble) de définition de la fonction à étudier. Ce peut être $\mathbb{R}$, un intervalle, ou une réunion d'intervalles.

- Les fonctions polynômes, sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$
- La fonction inverse est définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$

Si l'expression de la fonction présente un dénominateur, celui-ci doit être non nul

En conséquence, les fonctions rationnelles sont définies pour toutes les valeurs qui n'annulent pas leur dénominateur.

- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0 ; +\infty [$

Si l'expression de la fonction présente un radical, l'expression située sous le radical doit être positif ou nul

- La fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln x$ est définie sur $] 0 ; +\infty [$

Si l'expression de la fonction présente un logarithme, l'expression située dans le logarithme doit être strictement positif

- La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$

Chacune de ces conditions, ou contraintes, peut entraîner la résolution d'une équation ou d'une inéquation. Ces conditions ou contraintes peuvent se cumuler

Exemple

Vérifier les ensembles de définition des fonctions suivantes :

3) Comment déterminer les limites, asymptotes et les Interprétations ?

3-1) Calculs de limites

C'est **aux bornes** (finies ou infinies) de l'ensemble de définition de f que l'on étudie ses limites. Interviennent alors :

- Les limites « usuelles » (**Tableau des limites usuelles**)
- Les opérations entre limites (limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée).

En cas de **forme indéterminée**, on utilise souvent les résultats :

- La limite en ∞ d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré
- La limite en ∞ d'une fraction rationnelle (quotient de 2 polynômes) est celle du quotient simplifié des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur
- Pour les expressions faisant intervenir les radicaux (racines carrées), les méthodes employées suivent :

- La factorisation par le terme du plus haut degré d'un polynôme figurant sous une racine carrée, ceci dans le but de « sortir de la racine » ce terme
- La factorisation entre des termes « avec radicaux » et des termes « sans radicaux »
- La multiplication par la l'expression conjuguée en cas de forme indéterminée

3-2) Asymptotes

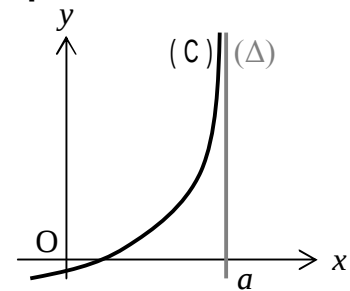
Connaître le comportement asymptotique d'une fonction aux bornes de son ensemble de définition permet d'aider à tracer sa courbe représentative

Soit f une fonction, (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J)

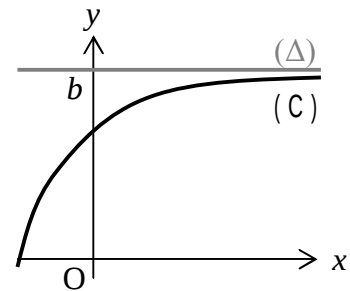
1- Asymptotes

Il existe 3 types d'asymptotes : **verticale**, **horizontale** et **oblique**

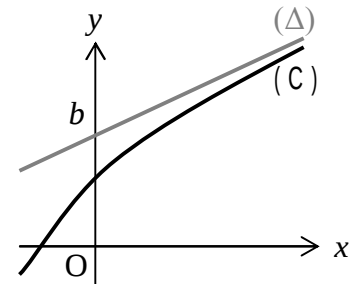
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ alors la droite (Δ) d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe (C) représentant f .



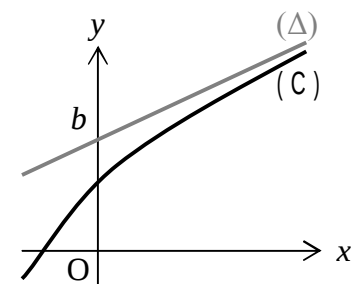
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, alors la droite (Δ) d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à la courbe (C) représentant f .



- Si $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe (C) représentant f .
[L'étude du signe de $f(x) - (ax + b)$ permet de déterminer la position de la courbe par rapport à son asymptote]



- Si $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - ax] = b$ alors la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe (C) représentant f .
[L'étude du signe de $f(x) - (ax + b)$ permet de déterminer la position de la courbe par rapport à son asymptote]



2- Branches paraboliques

Soit f une fonction de limite infinie en l'infini.

-Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OI) .

-Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ alors la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) .

Exemple 1 :

3-3) Position de la courbe par rapport aux asymptotes

Soit (Δ) une droite d'équation $y = ax + b$ asymptote (horizontale si $a = 0$ ou oblique si $a \neq 0$) à la courbe représentative de la fonction C_f . Pour étudier la position relative de (Δ) et de C_f , on doit étudier le signe de la différence $f(x) - ax + b$ (qui est le signe de $h(x)$ dans le cas d'une asymptote oblique, voir 3-2-3)), signe qui dépend en général de x .

Pour les valeurs de x telles que $f(x) - ax + b > 0$, c'est à dire $f(x) > ax + b$, C_f est au dessus de (Δ) .

Pour les valeurs de x telles que $f(x) - ax + b < 0$, c'est à dire $f(x) < ax + b$, C_f est en dessous de (Δ) .

4) Variations de la fonction

On doit chercher les **intervalles** de D_f sur lesquels f est strictement croissante ou décroissante (voire constante)

4-1) Sans utiliser le calcul différentiel

Certains résultats généraux permettent de conclure sur le sens de variation des fonctions :

- La somme de deux fonctions croissantes sur un même intervalle I est croissante sur cet intervalle I .
- La somme de deux fonctions décroissantes sur un même intervalle I est décroissante sur cet intervalle I .
- Si $f: I \rightarrow J$ et $g: J \rightarrow K$ ont même sens de variation, alors la composée $g \circ f$ est croissante. Si f et g ont des sens de variations contraires, alors leur composée est décroissante

4-2) En utilisant les dérivées

- Déterminer les sous-ensembles de D_f sur lesquels f est dérivable

Les polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$, les fonctions rationnelles sur chaque intervalle de leur ensemble de définition, la fonction $x \mapsto x$ sur $]0; +\infty[$, les fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$.

Calcul de la dérivée de f :

- En utilisant les résultats concernant les dérivées des fonctions usuelles

(Tableau des dérivées usuelles)

- En utilisant les résultats concernant les dérivées de somme, produit, quotient, compositions de fonctions...
- Dans le calcul de dérivée d'un quotient,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left[\frac{u'v - v'u}{v^2}\right], \text{ on se retrouve avec un dénominateur **strictement positif**}$$

(Quel que soit x appartenant à l'intervalle de dérivabilité, $(v(x))^2 > 0$. Alors **la dérivée de f est du signe de $u'v - uv'$**

On essaiera de **factoriser au maximum** l'expression de $f'(x)$, le but étant d'en **étudier le signe**

On étudie le signe de $f'(x)$ en utilisant souvent un **tableau des signes** (règle du signe d'un produit/quotient), pour appliquer le :

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors :
 Si la dérivée est positive sur I , alors la fonction est croissante sur I ;
 Si la dérivée est négative sur I , alors la fonction est décroissante sur I ;
 Si la dérivée est nulle en toute valeur de I , alors la fonction est constante sur I ;

Signe de la dérivée
 ↓
 Sens de variation de la fonction

On cherche les extrema (extremums) locaux parmi les valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule **en changeant de signe**

5) Comment dresser le tableau de variation de f ?

On consigne tous les résultats obtenus jusqu'à présent en un **Tableau de variations de f** . C'est l'occasion de tout résumer, de vérifier la cohérence des différents résultats, et éventuellement de corriger une éventuelle erreur

Ce tableau comporte sur la première ligne :

- Les bornes de l'ensemble de définition D_f
 - Les valeurs pour lesquelles f n'est pas définie, discontinue ou non dérivable
 - Les valeurs pour lesquelles $f(x)$ s'annule ou change de signe
- Sur la deuxième ligne figure le signe de $f'(x)$ (« + » ou « - ») sur les intervalles où $f'(x)$ est de signe constant (en précisant par un « 0 » les valeurs pour lesquelles elle s'annule)
- Sur la troisième ligne, et dans chacun des intervalles le sens de variation de la fonction, indiqué par une flèche ascendante $\nearrow$ si f est strictement croissante et descendante $\searrow$ si f est strictement décroissante. Inscrire les limites de f aux bornes de D_f

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0,5 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow 4,5 \nearrow +\infty$		

On tracera une double barre verticale à cheval sur les 2ème et 3ème lignes, sous une valeur de la première ligne, pour indiquer que ni f ni f' ne sont définies en cette valeur. Cependant, si f est définie en cette valeur, mais non dérivable, on se serait contenté de tracer cette double-barre sur la ligne de f' (à savoir la 2ème)

On peut préciser quelques points remarquables (extrema, valeurs particulières)

6) Equation des tangentes

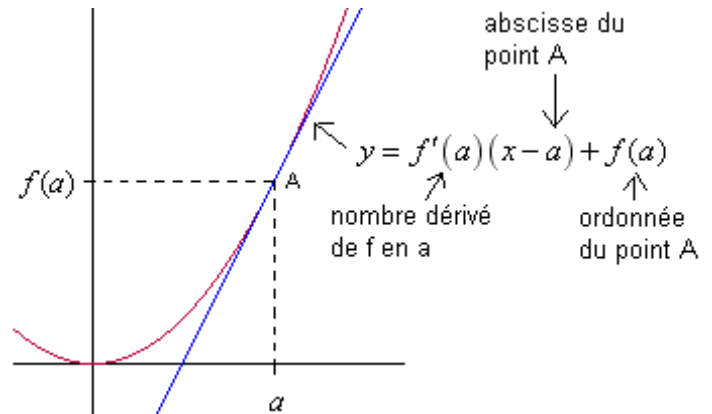
L'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point de C_f de coordonnées $(a ; f(a))$ est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

□

A retenir :

$f'(a)$ est le **coefficient directeur** de la tangente et est la valeur du nombre dérivé en a



8) Résolution d'équations $f(x)=0$

Cette question figure très souvent dans les énoncés, rédigée de manières diverses. On peut trouver :

"Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; +\infty[$ puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} ou "Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α telle que $\alpha \in]2;3[$ " ou toute autre rédaction équivalente. Il va de soi que chacun affectionne une rédaction plutôt qu'un autre.

Il faut néanmoins y faire figurer :

- La **continuité** de la fonction f sur l'intervalle considéré. Cette continuité peut découler de la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle considéré.
- La stricte monotonie (croissance ou décroissance) de la fonction f sur l'intervalle considéré, afin d'assurer l'**unicité** de la solution
- L'appartenance de 0 à l'intervalle d'arrivée (**il faut le vérifier!**), ce qui assure l'existence de la solution α .

Si l'énoncé nous invite à mentionner la notion de bijection, on peut alors rédiger ainsi :

"La fonction f étant continue car dérivable sur l'intervalle $[a;b]$ □ et strictement croissante sur $[a;b]$ elle réalise une bijection de $[a;b]$ vers $].f(a); f(b)[$. Comme $0 \in]f(a); f(b)[$, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [a;b]$."

Pour trouver un encadrement de la solution α de l'équation $f(x)=0$, on peut utiliser la méthode de balayage ou la méthode de dichotomie d'une (jusqu'à obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}).

5-Qu'appelle-t-on ensemble de dérivabilité .Comment le détermine-t-on ?

On appelle ensemble de dérivabilité l'ensemble sur lequel la fonction dérivée est définie ou l'ensemble sur lequel la fonction f est dérivable. Cet ensemble se détermine généralement par les règles de bases tels que :
Lest fonctions

8-Qu'appelle-t-on élément de symétrie ?

On appelle de élément symétrie toute notion relatives a la parité, l'imparité, aux axes et centre de symétrie.

9-Quel est l'intérêt des éléments de symétrie ?

Lorsqu'on connaît la nature de l'élément ce symétrie, on peut restreindre l'étude a un intervalle puis déduire la courbe en fonction de l'élément de symétrie.

Des informations sur la parité/périodicité d'une fonction peuvent s'avérer intéressante pour éventuellement restreindre le domaine d'étude de la fonction. Même si le texte ne le précise pas, il est essentiel d'avoir procédé à une telle étude.

Le caractère périodique de la fonction proviendra essentiellement du caractère périodique des fonctions trigonométriques (sinus, cosinus, tangente sont périodiques de période 2π), si l'expression de f en contient.

-Si f est fonction paire : cela suppose que (C_f) est symétrique par rapport a l'axe des ordonnées

- Si f est fonction impaire, cela suppose que (C_f) est symétrique par rapport a l'axe des abscisses

-Si $x = 2$ est un axe de symétrie, cela suppose que (C_f) est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 2$ (valable pour $x = a$)

-Si $A(2;3)$ est un centre de symétrie, cela suppose que (C_f) est symétrique par rapport au point $A(2;3)$ (valable pour tout point $A(a;b)$)

10-Comment montrer qu'une fonction admet un axe de symétrie ?

Soit a un nombre réel. La droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement si : $\forall x \in D_f$, on a $\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$ ou $\begin{cases} a - x \in D_f \\ a + x \in D_f \\ f(a - x) = f(a + x) \end{cases}$

Exemple 1 :

11-comment montrer qu'une fonction admet un centre de symétrie ?

Soit a et b deux nombres réels. Le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe

(C_f) si et seulement si : $\forall x \in D_f$, on a : $\begin{cases} 2a-x \in D_f \\ f(2a-x) + f(x) = 2b \end{cases}$ ou $\begin{cases} a-x \in D_f \\ a+x \in D_f \\ f(a-x) + f(a+x) = 2b \end{cases}$

Application : soit la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

Vérifier que le point $\Omega(\frac{1}{2};0)$ est un centre de symétrie de (C_f)

11-Comment montrer qu'une fonction est paire ?

Soit une f une fonction numérique, d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

On dit que f est une fonction paire si $\forall x \in D_f$, on a $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

Application : soit la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 1 + \ln|x|$

Vérifier que le point $\Omega(\frac{1}{2};0)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Lorsqu'une fonction est paire, l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour une courbe représentative.

11- Comment montrer qu'une fonction est impaire ?

Soit une f une fonction numérique, d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

On dit que f est fonction impaire si $\forall x \in D_f$, on a $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Exemple 1

Lorsqu'une fonction est impaire l'origine du repère est un centre de symétrie pour sa courbe représentative.

12-Qu'appelle-t-on point anguleux ?

On appelle point anguleux d'une courbe représentative, tout point auquel le nombre dérive a gauche n'est pas égal au nombre dérivé a droite et que au moins l'une de ces dérivées n'est pas infinies

Exemple : soit la fonction f définie par : $f(x) = |x|$

On montre aisément que $A(0;0)$ est un point anguleux car $f'_g(0) = -1 \neq f'_d(0) = 1$

Application : Soit la fonction h définie par : $h(x) = |x^2 - 4|$

Montrer que $A(2;0)$ et $B(-2;0)$ sont des points anguleux pour la courbe (C_h)

13-qu'appelle t-on point d'inflexion ?

On appelle point d'inflexion d'une courbe représentative, tout point auquel s'annule la dérivée seconde de $f(x)$

Exemple : Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^2 \ln(x)$

On a $f'(x) = 2x \ln x + x$ et $f''(x) = 2(\ln x + 1)$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

Alors le point $A(e^{-1}; f(e^{-1}))$ est un point d'inflexion pour la courbe (C_f)

Application : Soit la fonction h définie par :

14-Qu'appelle-t-on point de rebroussement ?

On appelle point d'inflexion d'une courbe représentative, tout point auquel le nombre dérive a gauche n'est pas égal au nombre dérivé a droite et que ces deux dérivées infinies

Exemple : soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{|x-1|}$

On montre aisément que $A(1;0)$ est un point rebroussement car

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

Application : Soit la fonction f définie par : $g(x) = \sqrt{|x^2 - 4|}$

Montrer que $A(2;0)$ et $B(-2;0)$ sont des points rebroussement pour la courbe (C_g)

15-comment construire compléter une courbe représentative d'une fonction en connaissant un élément de symétrie ?

16-comment déterminer construire l'équation de la tangente en point d'abscisse a

17-comment démontrer qu'une équation de la forme

a la courbe représentable de la fonction f ?

18-comment démontrer que f admet une équation de la forme

Sans que l'on ait donné au préalable la forme explicite de

20-Comment déterminer les coordonnées points d'intersections d'une courbe (C_g) avec l'axe des abscisses ?

Pour déterminer les coordonnées points d'intersections d'une courbe (C_g) avec l'axe des abscisses, on procède comme suit :

-Avec l'axe des abscisses : on résouds l'équation $f(x) = 0$

-Avec l'axe des ordonnées : on Calcul $f(0)$

Exemple : Soit h la fonction définie par : $h(x) = e^x - 2$

Déterminer les coordonnées points d'intersections de (C_h) avec l'axe des abscisses puis avec l'axe des ordonnées ?

-Avec l'axe des abscisses : on a l'équation $h(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$, on obtient donc le point $A(x;0)$ c'est à dire $A(\ln 2;0)$

-Avec l'axe des ordonnées : On a $h(0) = (e^0 - 2) = -1 \Leftrightarrow y = -1$

On obtient donc le point $B(0;y)$ c'est à dire $B(0;-1)$

21-comment déterminer le signe d'une fonction connaissant le tableau de variations ?

NB : Ne pas confondre le signe de et celui de

22-comment étudier la dérivabilité d'une fonction en un point a ?

23-comment étudier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle ?

24-comment montrer qu'une équation admet une solution unique sur un intervalle donne ? a préciser

25-comment montrer qu'une fonction réalise une bijection ?

26-comment montrer qu'une fonction est continue ou non en un point ?

Par définition, une fonction f est continue en un point a se et seulement si

Si c'est en un point a , on applique la définition :

- f est continue en a si elle est définie en a

Si c'est un intervalle, on applique les théorèmes généraux l'aide des fonctions de référence, du genre

-« f est continue sur I comme quotient de fonctions continues sur I , avec dénominateur non nul. »

On montre qu'elle est dérivable.

Si graphiquement sa courbe « ne saute pas ».

27-comment déterminer que le point de ou la tangente a en un autre point est parallèle a la tangente au point ?

28-comment montrer que l'image d'un point remarquable peut être exprimé tel que

29-comment déterminer une valeur approchée de au cas où la méthode

Comment peut-on déterminer une primitive ? On nous donne une fonction F possible donc il suffit de la dériver et de la comparer à f .

On une formule de référence de style

...{voir cours}.

On n applique une intégration par parties.

Comment peut-on calculer une intégrale ?

On détermine nue primitive F de f : dans ce cas

On se rappelle que l'intégrale correspond a une aire algebrique, ca peut servir...

Comment peut-on montrer des inégalités avec des intégrales ?

Pour montrer que $g, on peut montrer que sur [a,b], f \geq g.$
 Pour montrer que $0, on peut montrer que sur [a,b], F \geq 0.$

Comment peut-on montrer qu'une fonction est dérivable ?

Si c'est en un point a , on applique la définition : f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a admet une limite {voir cours}.

Si c'est un intervalle, on applique les théorèmes généraux l'aide des fonctions de référence.

Si graphiquement sa courbe admet en tout point une tangente non verticale.

Comment peut-on étudier les variations d'une fonction ?

On étudie le signe de sa dérivée
 {on applique les règles de composition}

Comment peut-on étudier le signe d'une fonction

On la factorise et on utilise les règles de signe des fonctions affines ou des fonctions trinômes.

On fait une résolution directe d'inéquation, lorsque par exemple on travaille avec les fonctions expo ou ln :

On appliquera alors des règles suivantes : $\exp\{X\} \geq 0$ pour tout réel X

Dans certains cas, on pourra se servir des variations de f pour étudier son signe.

Si par exemple sur I avec $f(l) = 0$ alors f est négative avant l et positive après

Comment peut-on lever une forme indéterminée en l'infini ?

On applique la règle des fonctions rationnelles : « en l'infini, la limite d'une fonction rationnelle égale à la limite du quotient de ses termes de plus degré ».

Si on est en présence de fonction ln ou exp, on applique les croissances comparées : en gros, « en l'infini l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x », en l'infini, le logarithme s'incline devant toute puissances de x

Comment peut-on lever une forme indéterminée en a {fini} ?

On reconnaît un taux de variation.

On factorise par $x-a$ numérateur et dénominateur

On multiplie par la quantité conjuguée

Comment étudier la position de deux courbes ?

On étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$:

Si $f(x) - g(x) > 0$ sur I , alors C_f est au dessus de C_g sur I .

Si $f(x) - g(x) = 0$ en x alors C_f et C_g s'intersectent au point d'abscisse x ...

Comment montrer qu'une équation admet au moins une solution ?

Si on peut la résoudre, a l'attaque.

On applique le théorème des valeurs intermédiaires.

On l'aborde graphiquement en cherchant les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

1- Prolongement par continuité

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et a un nombre réel n'appartenant pas à D_f . Si f admet une limite finie l en a , alors la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x), \forall x \in D_f \\ g(a) = l \end{cases} \text{ est continue en } a.$$

Exercice d'application

Soit g une fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{\sqrt{x+7}-2}{x+3}$

1) Quel est l'ensemble de définition de g ?

2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -3} [g(x)]$

3) a- Peut-on prolonger g par continuité en -3 ?

b) Si oui déterminer cette fonction

Déterminer

7) Tracé de la courbe

7-1) Le repère, les axes

Doivent toujours apparaître :

- Les axes - Les vecteurs unitaires (attention à l'unité !) - Les flèches au bout des axes
- Les noms des axes

Si l'étude de f a montré par exemple que $f(x) > 0$ pour tout x appartenant à D_f , alors seule la partie « des y positifs » nous intéresse. On fera donc coïncider l'axe des abscisses avec le bas de la page.

7-2) Tableau de valeurs

Il est très utile de dresser un petit tableau des différentes valeurs de $f(x)$ pour différentes valeurs de x , ceci aidant à la précision du tracé de C_f . Pour cela, il peut-être utile d'employer une calculatrice

- Tracer les deux axes, en respectant bien l'échelle donnée dans l'énoncé, et en restreignant l'axe (Ox) à l'ensemble de définition de la fonction.
- Placer les points d'intersection avec les axes, les maximums, minimums, points d'inflexion.
- Construire les tangentes (inutile de tracer « entièrement » la droite, se contenter du petit morceau autour du point de tangence).
- Construire la courbe en lissant autant que possible, et évitant les points anguleux.