

Département de Mathématiques et informatique  
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah  
Faculté Des Sciences  
Dhar El Mehraz Fes

**Cours D'Algèbre 2**  
**Semestre 2**  
**Filières SMC-SMP**

Année Universitaire  
2010-2011

# Table des matières

Chapitre I. ESPACES VECTORIELS	2
1.1. Espaces vectoriels	2
1.1.1. Exemples	3
1.2. Sous-espaces vectoriels	3
Chapitre II. MATRICES. DÉTERMINANTS	6
2.1. Matrices	6
2.1.1. Quelques types de matrices carrées d'ordre $m$	7
2.2. Opérations sur les matrices	7
2.3. Rang d'une matrice	9
2.3.1. Opérations élémentaires sur une matrice $A = (a_{ij})$ de type $(n, p)$	10
2.4. Déterminants	10
2.4.1. déterminant de deux vecteurs du plan vectoriel	10
2.4.2. Déterminant des matrices carrées d'ordre 2	11
2.4.3. Déterminant des matrices d'ordre 3	11
2.4.4. Résumé des Propriétés des déterminants	12
2.5. Application des déterminants	13
Chapitre III. APPLICATIONS LINÉAIRES	15
3.1. Applications linéaires	15
3.1.1. Opérations sur les applications linéaires	17
3.1.2. Matrice d'une application linéaire	17
3.1.3. Effet de changement de base	17
3.1.4. Matrice de passage	17

3.1.5. Effet de changement de base sur les composantes d'un vecteur: . . . . .	18
3.1.6. Effet de changement de base sur la matrice d'une application linéaire: . . . . .	19
Chapitre IV. DIAGONALISATION. TRIGONALISATION	20
4.1. Applications linéaires . . . . .	20
4.2. Introduction . . . . .	20
4.3. Valeurs propres Vecteurs propres . . . . .	21
4.4. Polynôme caractéristique Trigonalisation diagonalisation . . . . .	22
4.5. Application à la résolution des systèmes linéaires . . . . .	24
Chapitre IV. EXERCICES SUR LES ESPACES VECTORIELS	26
4.6. sous-espaces vectoriels . . . . .	26
4.7. Familles libres. Génératrices. Dimension. Rang . . . . .	26
4.8. Opérations sur les matrices . . . . .	28
4.9. Rang d'une matrice . . . . .	28
4.10. Inverse d'une matrice . . . . .	29

# Chapitre 1

## ESPACES VECTORIELS

### 1.1. Espaces vectoriels

**Définition 1.1** On appelle espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  la donnée d'un ensemble  $E$  et de deux lois  $+$  (dite interne) et  $\cdot$  (dite externe) telles

- Pour tout  $(x, y) \in E$ , on a  $x + y \in E$  ( $+$  est une loi interne).
- Il existe dans  $E$  un élément noté  $0$  qui satisfait:

$$\forall x \in E; x + 0 = 0 + x = x.$$

L'élément  $0$  est appelé élément neutre pour  $+$

- Pour tout  $x \in E$ , il existe  $x' \in E$  tel que  $x + x' = x' + x = 0$ .  $x'$  est appelé l'opposé de  $x$  pour la loi  $+$ , on le note  $x' = -x$ .
- Pour tout  $x, y, z$  dans  $E$ , on:

$$(x + y) + z = x + (y + z) \text{ associativité de } +$$

- $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  
 $\forall x, y \in E$

$$1. \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

1.

$$2. \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$$

2.

$$3. \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

3.

$$4. \quad 1 \cdot x = x$$

4.

**Remarque 1.2** En remplaçant, dans la définition 1.1 ci-dessus, l'ensemble  $\mathbb{R}$  par l'ensemble  $\mathbb{C}$ , on obtient la définition d'un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  ou un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

### 1.1.1. Exemples

- Soit  $n$  un entier naturel  $\geq 1$ . Sur le produit cartésien  $\mathbb{R}^n$  de  $n$  copies de  $\mathbb{R}$  ensemble des nombres réels, on définit  
1) l'addition:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

qu'on appelle loi interne dans  $\mathbb{R}^n$

- 2) la multiplication par un scalaire réel:

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

appelée loi externe.

Muni de ces deux lois,  $\mathbb{R}^n$  est appelé un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- L'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .
- L'ensemble  $\mathbb{R}_n[X]$ , des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  et de degré inférieur ou égal à  $n$ .

## 1.2. Sous-espaces vectoriels

**Définition 1.3** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Une partie  $F$  de  $E$  est dite sous-espace vectoriel de  $E$  si

- $0 \in F$ .
- Si  $x, y \in F$  alors  $x + y \in F$ .
- Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $x \in F$  alors  $\alpha \cdot x \in F$ .

**Proposition 1.4** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Une partie  $F$  de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si

- $F \neq \emptyset$ .
- Pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , pour tout  $(x, y) \in F$ , on a:

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F.$$

DÉMONSTRATION.  $\Leftarrow$

- Montrons que  $0 \in F$ : Puisque  $F$  est non vide,  $F$  contient un  $x$ . En prenant  $\alpha = -1 \in \mathbb{R}$  on a  $-x \in F$  et  $x - x = 0 \in F$ .
- La propriété  $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$  entraîne la stabilité de  $F$  pour  $+$  et pour  $\cdot$ .

**Exercice 1** Soit  $E$  un espace vectoriel. Une partie  $F$  de  $E$  est appelée sous-espace de  $E$  si

1)  $F \neq \emptyset$

2)  $\forall x, y \in F$ ; on a :

$$x - y \in F \quad (F \text{ est stable pour la loi interne de } E)$$

3)  $\forall x \in F, \forall \alpha \in K$ ; on a :

$$\alpha x \in F \quad (F \text{ est stable pour la loi externe définie sur } E)$$

**Définition 1.5** somme de deux sous-espaces: Soient  $E$  un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$ . La partie

$$F + G = \{z = x + y; x \in F \text{ et } y \in G\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $E$  appelé somme de  $F$  et de  $G$ . Si de plus

$$F \cap G = \{0\}$$

la somme  $F + G$  est dite directe et on note

$$F + G = F \oplus G.$$

**Exercice 2** Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que l'intersection  $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

### Exemples 1.1

1. L'espace des matrices carrées d'ordre  $n \geq 1$  est somme directe du sous-espace des matrices symétriques du sous-espace des matrices antisymétriques.

2. L'espace

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X]; d^{\circ}P \leq 3\}$$

est somme des sous-espaces

$$E_1 = \text{Vect}\{1, X, X^2\} \quad E_2 = \text{Vect}\{X^2, X^3\}$$

mais la somme  $E_1 + E_2$  n'est pas une somme directe.

**Définition 1.6** (Combinaison linéaire) Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $x_1, \dots, x_p$ ;  $p$  vecteurs de  $E$ . Un élément  $x$  de  $E$  est dit combinaison linéaire de  $x_1, \dots, x_p$  si, il existe  $p$  scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  tels que:

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_p \cdot x_p.$$

**Proposition 1.7 (Sous-espace engendré)** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $\{x_1, \dots, x_n\}$  une partie de  $E$ . L'ensemble

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i; \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{l'ensemble des combinaisons linéaires des } x_i)$$

est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Le sous-espace vectoriel

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

est appelé sous-espace engendré par les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$ .

**Définition 1.8 (Partie génératrice. Partie libre. Base. Dimension)** Soit  $E$  un espace vectoriel. Une partie non vide  $S = \{x_1, \dots, x_n\}$  de  $E$  est dite:

1) partie génératrice de  $E$  si

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K;$$

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

C'est-à-dire que tout élément de  $E$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $x_1, \dots, x_n$ .

2) partie libre de  $E$  si

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K;$$

$$\left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \right) \implies (\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0).$$

3) base de  $E$  s'elle est à la fois partie génératrice et libre de  $E$ .

L'espace  $E$  est dit de dimension finie s'il possède une base de cardinal fini. On montre que toutes les bases d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie ont un même cardinal appelé dimension de  $E$ .

**Définition 1.9 Rang d'un système:** Étant donné un système  $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ , non vide, d'éléments d'un espace vectoriel  $E$ . On appelle rang de  $S$  la dimension du sous-espace vectoriel  $\text{Vect}(S)$ , engendré par le système  $S$ .

**Exercice 3** Déterminer les rangs des systèmes de vecteurs suivants

$$\{(2, 3, 5), (-1, 2, -3), (4, -3, 8)\}, \{(2, 3, 5), (-1, 2, -3), (1, 5, 2)\}.$$

# Chapitre 2

## MATRICES. DÉTERMINANTS

Dans ce chapitre  $\mathbb{K}$  est soit égal à  $\mathbb{R}$  soit égal à  $\mathbb{C}$ .

### 2.1. Matrices

**Définition 2.1** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls, on appelle matrice de type  $(n, p)$  et à termes dans  $\mathbb{K}$ , tout tableau

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Le terme  $a_{ij}$  se trouve au croisement de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ . C'est-à-dire, l'indice  $i$  désigne la ligne et  $j$  la colonne.

Lorsque  $n = p$ , on dit que la matrice est carrée d'ordre  $n$ .

Une matrice de type  $(n, p)$  est dite uniligne ( resp unicolonne ) lorsque  $n = 1$  ( resp  $p = 1$  ).

L'ensemble des matrices à termes dans  $\mathbb{K}$  et de type  $(n, p)$  est noté:  $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ . L'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  et à termes dans  $\mathbb{K}$  est noté simplement:  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

La matrice uniligne  $(a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{ip})$  est la  $i$ -ième ligne de la matrice  $A$ .

La matrice unicolonne  $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$  est appelée la  $j$ -ième colonne de  $A$ .

**Définition 2.2** Egalité de deux matrices Deux matrices  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{st})$  sont dites égales si, et seulement si

- elles sont de même type, soit  $(n, p)$ ,
- pour tout  $(r, h)$ , on a  $a_{rh} = b_{rh}$ .

### 2.1.1. Quelques types de matrices carrées d'ordre $m$

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice identité                      Matrice nulle

$$aI_m = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_m \end{pmatrix}$$

Matrice scalaire                      Matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{m-1,m} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{mm} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{m,m-1} & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure                      Triangulaire inférieure

## 2.2. Opérations sur les matrices

- **Addition** Soient  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  deux matrices de même type  $(n, p)$ . On appelle matrice somme de  $A$  et  $B$  la matrice  $A+B = (c_{ij})$  de type  $(n, p)$  avec  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

**Remarque 2.3** On ne peut pas faire la somme de deux matrices de type différents.

- **Multiplication de deux matrices**

~ Le produit d'une matrice uniligne  $(a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1p})$  de type  $(1, p)$  par

une matrice unicolonne  $\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{i1} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix}$  de type  $(p, 1)$  est défini par:

$$(a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1p}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{i1} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix} = (a_{11}b_{11} + \dots + a_{1i}b_{i1} + \dots + a_{1p}b_{p1}).$$

– **Produit d'une matrice  $A = (a_{ij})$  de type  $(n, p)$  par une matrice  $B = (b_{kl})$  de type  $(p, m)$  est la matrice  $C = (c_{ls})$ , de type  $(n, m)$ , définie par**

$$A \cdot B = (c_{ls}), \quad c_{ls} = \sum_{k=1}^p a_{lk} b_{ks}.$$

#### Remarque 2.4

\* La multiplication des matrices n'est pas commutative.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 31 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$$

\* La multiplication est associative.

\* L'addition est associative.

– **Multiplication par un scalaire:** La multiplication de la matrice

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

par le nombre  $a$  est définie par:

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \dots & \lambda \cdot a_{1j} & \dots & \lambda \cdot a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{i1} & \dots & \lambda \cdot a_{ij} & \dots & \lambda \cdot a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{n1} & \dots & \lambda \cdot a_{nj} & \dots & \lambda \cdot a_{np} \end{pmatrix}.$$

**Remarque 2.5** Le produit  $A \cdot B$  des matrices  $A$  et  $B$  n'est possible que si le nombre des colonnes de la matrice de gauche ( $A$ ) est égal au nombre des lignes de la matrice de droite ( $B$ ).

Considérons les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $B = (4 \ 5)$ . On peut faire le produit  $BA$  mais on ne peut pas faire le produit  $AB$ .

**Proposition 2.6** L'ensemble  $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ , muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Les matrices de dimension  $np$ .

**Définition 2.7** Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice de type  $(n, p)$ . On appelle matrice transposée de  $A$ , la matrice  ${}^tA$ , de type  $(p, n)$ , définie par:

$${}^tA = (a'_{ij}), \quad a'_{ij} = a_{ji}.$$

**Proposition 2.8** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de même type, alors

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB.$$

**Proposition 2.9** Soient  $A$  une matrice de type  $(n, p)$  et  $B$  une matrice de type  $(p, r)$ , on a alors

$${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA.$$

La preuve se réduit à montrer que le coefficient  $(i, j)$  de  ${}^t(AB)$  comme de  ${}^tB \cdot {}^tA$  est le produit scalaire de la  $j$ -ème ligne de  ${}^tA$  et de la  $i$ -ème colonne de  $B$ .

**Définition 2.10** Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , non nulle. On appelle matrice inverse de  $A$ , la matrice carrée, notée:  $A^{-1}$ , d'ordre  $n$ , définie par:

$$A \cdot A^{-1} = I_n.$$

**Exemple 2.11**

## 2.3. Rang d'une matrice

**Définition 2.12** Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ . Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on pose

$L_i = (a_{i1} \dots a_{ip})$  et pour tout  $1 \leq j \leq p$ , on pose  $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ .  $L_1, \dots, L_n$  s'appellent

les vecteurs lignes de  $A$  et  $C_1, \dots, C_p$  sont appelés les vecteurs colonnes de  $A$ . On appelle rang de  $A$  la dimension du sous-espace de  $\mathbb{K}^p$  engendré par les vecteurs lignes  $L_1, \dots, L_n$  de  $A$ .

### 2.3.1. Opérations élémentaires sur une matrice $A = (a_{ij})$ de type $(n, p)$

- **L'opération:  $L_{ij}$  ou  $L_i \leftrightarrow L_j$**   
Soit  $A$  une matrice, en permutant la ligne  $L_i$  de  $A$  avec la ligne  $L_j$  de  $A$  on obtient une nouvelle matrice. Cette opération est notée  $L_{ij}$  ou  $L_i \leftrightarrow L_j$ .
- **L'opération:  $\alpha \cdot L_i \leftarrow L_i, \alpha \in \mathbb{K}^*$**   
En multipliant, la ligne  $L_i$  de la matrice  $A$ , par un nombre  $\alpha$  non nul, on obtient une nouvelle matrice. Cette opération est notée  $\alpha \cdot L_i \leftarrow L_i$ .
- **L'opération:  $\sum_{t=1}^n \alpha_t \cdot L_t \leftarrow L_i$ , avec  $\alpha_i \neq 0$ .**

Cette opération consiste à remplacer la ligne  $L_i$  de  $A$  par  $\sum_{t=1}^n \alpha_t \cdot L_t$ .

**Définition 2.13** Les opérations  $L_i \leftrightarrow L_j, \alpha \cdot L_i \leftarrow L_i, \alpha \in \mathbb{K}^*, \sum_{t=1}^n \alpha_t \cdot L_t \leftarrow L_i$  définies ci-dessus sont appelées opérations élémentaires sur  $A$ .

**Proposition 2.14** Soient  $A$  et  $B$  de même type. Si  $B$  est obtenue à partir  $A$  par une opération élémentaire, alors  $A$  et  $B$  ont le même rang.

**Définition 2.15** Une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est dite échelonnée si

- Toute ligne nulle n'est suivie que de lignes nulles.
- L'indice de colonne du premier terme non nul de toute ligne non nulle est supérieur à l'indice de colonne du premier terme non nul de la ligne qui la précède.

Exemple de matrice échelonnée

## 2.4. Déterminants

### 2.4.1. déterminant de deux vecteurs du plan vectoriel

**Définition 2.16** Soient  $u = (x, y), v = (x', y')$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ . On appelle déterminant de  $u$  et  $v$ , le nombre réel  $\det(u, v)$  défini par:

$$\det(u, v) = xy' - x'y.$$

**Exercice 4** Soient  $u, v, w$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Montrer que:

- $\det(u + v, w) = \det(u, w) + \det(v, w)$ .
- $\det(u, v + w) = \det(u, v) + \det(u, w)$ .
- $\det(v, u) = -\det(u, v)$ .
- $\det(\lambda \cdot u, v) = \lambda \cdot \det(u, v)$ .

### 2.4.2. Déterminant des matrices carrées d'ordre 2

**Définition 2.17** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

une matrice d'ordre 2. On appelle déterminant de  $A$  le nombre réel  $\det(A)$  défini par

$$\det(A) = ad - bc.$$

Notation:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

**Exercice 5** • Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  et sa transposée:  ${}^tA$  ont même déterminant.

• Montrer que

$$\begin{vmatrix} a+x & b \\ c+y & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ y & d \end{vmatrix}$$

•

$$\begin{vmatrix} a & x+b \\ c & y+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

• Calculer

$$\begin{vmatrix} a+t & x+b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ en fonction de } \begin{vmatrix} a & c \\ x & d \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} t & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

### 2.4.3. Déterminant des matrices d'ordre 3

**Définition 2.18** Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  une matrice d'ordre 3. On appelle déterminant de  $A$ , le nombre  $\det A$ , défini par:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

**Exercice 6** • Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ . Calculer  $\det(\lambda A)$ , en fonction de  $\lambda$  et  $\det(A)$ .

- Montrer que

$$\begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + y & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12} & a_{13} \\ y & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + x & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + y & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + z & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & x & a_{13} \\ a_{21} & y & a_{23} \\ a_{31} & z & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Montrque

$$\det({}^t A) = \det(A).$$

**Définition 2.19** Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée d'ordre  $n \geq 2$ . Pour tout terme  $a_{ij}$  de la matrice  $A$ , on note  $A_{ij}$  la matrice obtenue de  $A$  en enlevant à celle-ci la ligne  $L_i$  et la colonne  $C_j$ .

On appelle cofacteur de  $a_{ij}$  le nombre

$$\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

**Proposition 2.20** Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée d'ordre  $n$ .

- Soit  $1 \leq t \leq n$ . On a:

$$\det(A) = \sum_{s=1}^n a_{st} \text{cof}(a_{st}). \quad (\text{développement suivant la colonne } C_t)$$

- Soit  $1 \leq s \leq n$ . On a:

$$\det(A) = \sum_{t=1}^n a_{st} \text{cof}(a_{st}). \quad (\text{développement suivant la ligne } L_s)$$

#### 2.4.4. Résumé des Propriétés des déterminants

1. Un déterminant d'ordre  $n$  est transformé en son opposé lorsqu'on échange deux colonnes (idem pour les lignes).
2. Un déterminant d'ordre  $n$  est nul dès qu'une des ses colonnes est combinaison linéaire des de ses autres colonnes (idem avec les lignes).
3. Un déterminant d'ordre  $n$  est invariant si on ajoute à une de ses colonnes une combinaison linéaire de ses autres colonnes (idem avec les lignes).
4. Un déterminant d'ordre  $n$  est multiplié par  $\lambda$  si on multiplie les termes d'une de ses colonnes par  $\lambda$  (idem pour les lignes).
5. Un déterminant d'ordre  $n$  est multiplié par  $\lambda^n$  si on multiplie tous ses termes par  $\lambda$ .

## 2.5. Application des déterminants

### 1. Calcul de l'inverse d'une matrice carrée inversible

#### (a) Calcul de l'inverse une matrice carré d'ordre 2

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  inversible. On a alors  $AA^{-1} = I_2$ . Donc  $\det A \neq 0$ . On

vérifie rapidement que  $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

#### (b) Calcul de l'inverse d'une matrice inversible d'ordre 3

Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \end{pmatrix}$  inversible. La comatrice de  $A$  est la matrice

$${}^c A = (b_{ij} = \text{cof}(a_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$

On vérifie que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} ({}^c A)$$

**Exercice 7** Calculer l'inverse de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

### 2. Résolution des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

Considérons le système linéaire de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases}$$

En termes matriciels, le système peut aussi s'écrire

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est inversible, alors son déterminant  $\det(A) = ad - bc \neq 0$  et l'inverse de  $A$  est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Ce qui donne:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

### 3. Résolution des systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues

Considérons le système linéaire de trois équations à trois inconnues

$$\begin{cases} ax + by + cz = u \\ dx + ey + fz = v \\ gx + hy + iz = w \end{cases}$$

Matriciellement, le système peut aussi s'écrire

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Si la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  est inversible alors

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b & c \\ v & e & f \\ w & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a & u & c \\ d & v & f \\ g & w & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & u \\ d & e & v \\ g & h & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

**Définition 2.21** On appelle système de Cramer tout système  $AX = B$ , avec  $A$  une matrice carrée inversible. Tout système de Cramer est déterminé et sa solution est donnée par:

$$x_i = \frac{\det M_i}{\det(A)},$$

où  $M_i$  est la matrice obtenue de la matrice  $A$  en remplaçant la  $i$ -ième colonne de  $A$  par la matrice  $B$ .

# Chapitre 3

## APPLICATIONS LINÉAIRES

Dans ce chapitre,  $K$  désigne l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 3.1. Applications linéaires

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur un même corps  $K$  une application  $f : E \rightarrow F$  est dite linéaire si

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y) \quad (\forall x, y \in E) \\ f(\lambda x) &= \lambda f(x) \quad (\forall x \in E, \lambda \in K) \end{aligned}$$

Lorsque  $E = F$  on dit que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ . Une application linéaire bijective est appelée isomorphisme. Les isomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  sur lui-même forment un groupe pour la composition des applications qu'on appelle le groupe des automorphismes de  $E$ , on le note  $GL_K(E)$ .

Pour toute application linéaire  $f$  d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$  dans un  $K$ -espace vectoriel  $F$  on définit

- le noyau de  $f$  par:

$$\ker f = \{x \in E : f(x) = 0\}, \text{ (le noyau de } f\text{)}$$

- l'image de  $f$  par:

$$\text{Im} f = \{f(x) : x \in E\} \text{ (l'image de } f\text{)}.$$

**Proposition 3.1** *Le noyau de  $f$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $\text{Im} f$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .*

**Exercice 8** • Montrer que l'application:  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$f(x, y, z) = (x + y, x + y + z),$$

est une application linéaire.

- Calculer le noyau de  $f$ .
- Calculer l'image de  $f$ .

**Théorème 3.2** Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit à 0.

**Exercice 9** L'application:  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$f(x, y, z) = (x + y, x + y + z),$$

est-elle linéaire?

**Rang d'une application linéaire :** Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$ , de dimension finie, dans un  $K$ -espace vectoriel  $F$ . La dimension de  $\text{Im} f$  est appelée rang de  $f$  et on le note  $\text{rg} f$ .

**Exercice 10** Déterminer le rang de chacune des applications suivantes:

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x, x + y, x - y) \end{array} \quad \begin{array}{l} g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x - y) \end{array}$$

**Théorème 3.3 (du rang)** Soient  $E$  et  $F$  deux  $K$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On a alors

$$\dim E = \dim \ker f + \text{rg} f.$$

**Exercice 11** Vérifier le théorème du rang pour les applications suivantes:

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x, x + y, x - y) \end{array} \quad \begin{array}{l} g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x - y) \end{array}$$

### 3.1.1. Opérations sur les applications linéaires

**Addition.** Soient  $f$  et  $g$  deux applications linéaires d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$  dans un  $K$ -espace vectoriel  $F$ . L'application

$$f + g : E \longrightarrow F; x \longmapsto f(x) + g(x)$$

est linéaire appelée somme de  $f$  et  $g$ .

**Multiplication par un scalaire:** Soient  $f : E \longrightarrow F$  une application d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$  dans un  $K$ -espace vectoriel  $F$  et  $\alpha$  un élément de  $K$ . L'application

$$\alpha f : E \longrightarrow F; x \longmapsto \alpha f(x)$$

est linéaire.

**Théorème 3.4** Soit  $E$  et  $F$  deux  $K$ -espaces vectoriels, l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ , muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un  $K$ -espace vectoriel.

**Composée d'applications:** Soient  $E, F$  et  $G$  trois  $K$ -espaces vectoriels;  $f : E \longrightarrow F$  et  $g : F \longrightarrow G$  deux applications linéaires. L'application  $g \circ f$  définie par:

$$g \circ f : E \longrightarrow G \\ x \longmapsto g(f(x))$$

est appelée la composée de  $g$  et de  $f$  et elle est linéaire.

### 3.1.2. Matrice d'une application linéaire

**Définition 3.5** Soient  $f$  une application linéaire d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$  dans un  $K$ -espace vectoriel  $F$ , tous deux de dimension finie;  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  et  $B' = \{f_1, \dots, f_m\}$  une base de  $F$ . On appelle matrice de  $f$  dans les bases  $B, B'$  la matrice:

$$M(f, B, B') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avec

$$f(e_i) = a_{1i}f_1 + \dots + a_{mi}f_m.$$

### 3.1.3. Effet de changement de base

### 3.1.4. Matrice de passage

**Définition 3.6** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ ,  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$ .

Considérons une nouvelle base  $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$ . Evidemment chaque  $E_j \in \mathcal{E}$  s'écrit de façon unique

$$E_j = p_{1j}e_1 + \dots + p_{ij}e_i + \dots + p_{nj}e_n.$$

La matrice

$$P = (p_{ij})$$

est appelée matrice de passage de la base  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  à la base  $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$ .

**Exercice 12** • Vérifier que  $E = \{E_1 = (1, 0, 1), E_2 = (1, 1, 0), E_3 = (0, 0, 1)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- Donner la matrice  $P$ , de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  à la base  $E = \{E_1 = (1, 0, 1), E_2 = (1, 1, 0), E_3 = (0, 0, 1)\}$ .
- Calculer la matrice  $Q$ , de passage de la base  $E = \{E_1 = (1, 0, 1), E_2 = (1, 1, 0), E_3 = (0, 0, 1)\}$  à la base canonique.
- Calculer le produit  $PQ$ . onciure.

### 3.1.5. Effet de changement de base sur les composantes d'un vecteur:

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ ,  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  et  $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  deux bases de  $E$ .  $P = (p_{ij})$  la matrice de passage de  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  à la base  $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  et  $Q = (q_{ji})$  la matrice de passage de  $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  à  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ . On sait que  $P$  et  $Q$  sont inversibles et sont inverses l'une de l'autre et on a:

$$\begin{aligned} E_j &= \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i, \\ e_i &= \sum_{j=1}^n q_{ji} E_j. \end{aligned}$$

Tout élément  $x$  de  $E$  s'écrit:

$$x = x_i e_i = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad (\text{écriture de } x \text{ dans la base } e)$$

$$x = X_j E_j = \sum_{j=1}^n X_j E_j \quad (\text{écriture de } x \text{ dans la base } \mathcal{E}).$$

Les relations entre les anciennes composantes:  $x^i$  et les nouvelles composantes:  $X^i$  de  $x$  sont données par les formules de changement suivantes.

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{l=1}^n p_{il} X_l \\ X_l &= \sum_{i=1}^n q_{li} x_i \end{aligned}$$

Matricielement,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{les anciennes coordonnées de } x} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{matrice de passage}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}}_{\text{les nouvelles coordonnées de } x}$$

### 3.1.6. Effet de changement de base sur la matrice d'une application linéaire

Soient  $E$  et  $F$  deux  $K$ -espaces vectoriels de dimensions finies,  $B, B'$  deux bases de  $E$ ,  $B_1, B'_1$  deux bases de  $F$ ,  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ ,  $M_{B',B'_1}$  la matrice de  $f$  dans les bases  $B'$  et  $B'_1$ ,  $M_{B,B_1}$  la matrice de  $f$  dans les bases  $B$  et  $B_1$ ,  $P_{B',B}$  la matrice de passage de  $B$  à  $B'$  et  $Q_{B'_1,B_1}$  la matrice de passage de  $B_1$  à  $B'_1$ . On a alors

$$M_{B',B'_1} = Q_{B'_1,B_1}^{-1} \cdot M_{B,B_1} \cdot P_{B',B}$$

Lorsque  $E = F$ ,  $B = B_1$  et  $B' = B'_1$  on a  $P_{B',B} = Q_{B'_1,B_1}$  et

$$M_{B',B'} = P_{B',B}^{-1} \cdot M_{B,B} \cdot P_{B',B}$$

$$\begin{array}{ccc} (E, B') & \xrightarrow{f} & (F, B'_1) \\ P_{B',B} \downarrow & & \downarrow Q_{B'_1,B_1} \\ (E, B) & \xrightarrow{f} & (F, B_1) \end{array}$$

# Chapitre 4

## DIAGONALISATION. TRIGONALISATION

### 4.1. Applications linéaires

Les espaces considérés sont des espaces vectoriels de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  qui est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 4.2. Introduction

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice par rapport à la base canonique

$$(e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$$

est

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $U^m$ ,  $m \geq 1$ .
2. Déterminer la matrice de  $u$  dans la nouvelle base

$$\begin{aligned} E_1 &= (-4, 3, 2), \\ E_2 &= (-4, 0, 1), \\ E_3 &= (2, 1, 0); \end{aligned}$$

puis calculer  $U^m$ .

**Solution :**

1. Il est, pratiquement, très difficile de répondre à la première question avant de traiter la deuxième.

2. Soit

$$P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base:  $\{E_1, E_2, E_3\}$ . la matrice de  $u$  dans la nouvelle base est

$$V = P^{-1}UP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$U^m = (P V P^{-1})^m = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix} P^{-1}$$

Désormais, réduire un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel de dimension finie signifie, chercher une base dans laquelle sa matrice est la plus simple possible (en général diagonale ou triangulaire).

Dans toute la suite de ce chapitre,  $K$  désigne un corps commutatif et  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie.

### 4.3. Valeurs propres. Vecteurs propres

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On appelle vecteur propre de  $u$  tout  $x \neq 0$  de  $E$  tel qu'il existe  $\lambda$  dans  $K$  vérifiant

$$u(x) = \lambda x.$$

Un élément  $\lambda$  de  $K$  est appelé valeur propre de  $u$  s'il existe  $x$  non nul dans  $E$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .

Un vecteur propre  $x$  (resp. une valeur propre  $\lambda$ ) est dit associé à une valeur propre  $\lambda$  (resp. à un vecteur propre  $x$ ) de  $u$  si  $u(x) = \lambda x$ . Pour toute valeur propre  $\lambda$ , l'ensemble

$$E_\lambda = \{x \in E, u(x) = \lambda x\}.$$

est un sous-espace vectoriel de  $E$ , appelé sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

#### Exercice 13

Soit

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \longmapsto (x + y, x + y)$$

- Montrer  $X = (1, -1)$  et  $Y = (1, 1)$  sont des vecteurs propres de  $u$ .
- Donner deux valeurs propres de  $u$ .

Les sous-espaces propres de  $u$  sont stables par  $u$ :

$$\forall x \in E_\lambda; u(x) = \lambda x \in E_\lambda.$$

**Proposition 4.1** Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux valeurs propres distinctes, de  $u$ , Alors le système  $\{x_1, x_2\}$  est libre.

#### 4.4. Polynôme caractéristique Trigonalisation diagonalisation

**Définition 4.2** Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ . On appelle polynôme caractéristique de la matrice

$$P_A(X) = \det(A - X I_n).$$

Les racines de  $P_A$  sont les valeurs propres de  $A$ .

**Exercice 14** • Montrer que  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ .

- Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 1$  et  $A$  la matrice de  $u$  dans une base de  $E$ . Montrer que les valeurs propres de  $u$  sont les valeurs propres de  $A$ .

Polynôme caractéristique de quelques matrices:

1) La matrice  $A$  est d'ordre 2.

Posons:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On a:

$$P_A(X) = X^2 - (a + d)X + \det(A).$$

2) La matrice  $A$  est d'ordre 3.

Posons:

$$A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}.$$

On a:

$$P_A(X) = -X^3 + \text{tr}(A)X^2 - (ae + ai + ei - bd - cg - fh)X + \det(A)$$

Dans le cas général on peut écrire

$$P_A(X) = (-1)^n [X^n - \text{tr}(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)]$$

où  $n$  est la dimension de  $E$  et  $\text{tr}(A)$  désigne la trace de  $A$ .

**Trigonalisation** Une matrice carrée  $A$  est

dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire. Un endomorphisme  $u$  est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire.

**Théorème 4.3** Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $K$ -espace  $E$  de dimension finie  $n \geq 1$ . Si toutes les valeurs propres de  $u$  sont dans  $K$ , alors  $u$  est trigonalisable.

DÉMONSTRATION. Nous allons faire un raisonnement par récurrence sur la dimension de  $E$ . Si  $n = 1$  alors toute matrice de  $u$  est trigonalisable. Supposons le théorème vérifié pour tous les espaces de dimension  $\leq n$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  et  $e$  un vecteur propre de  $u$  associé à  $\lambda$ , il existe un supplémentaire  $F$  de  $Ke$  dans  $E$ , c'est à dire  $E = Ke \oplus F$ . Soit

$$\begin{array}{ccc} \text{pr} : & E & \longrightarrow F \\ & \alpha e + y & \longmapsto y, \end{array}$$

la projection de  $E$  sur  $F$  parallèlement à  $Ke$ . Nous pouvons alors définir un endomorphisme de  $F$  de la façon suivante:

$$\begin{array}{ccc} v : & F & \longrightarrow F \\ & y & \longmapsto \text{pr} \circ u(y). \end{array}$$

Pour toute base  $\{a_2, \dots, a_n\}$  de  $F$ , on a:

$$u(a_i) = \alpha_i e + v(a_i) = \alpha_i e + \sum_{j=2}^n \alpha_{ij} a_j; \quad i = 2, \dots, n.$$

La matrice de  $u$  dans la base  $\{e, a_2, \dots, a_n\}$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ 0 & & & & \\ \vdots & & V & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix};$$

où  $V$  est la matrice de  $v$  dans la base  $\{a_2, \dots, a_n\}$ . Il est évident que

$$P_u(X) = (\lambda - X) P_v(X).$$

Donc  $v$  a toutes ses valeurs propres dans  $K$ . D'après l'hypothèse de récurrence,  $v$  est trigonalisable et  $u$  l'est aussi.

**Diagonalisation** Un endomorphisme  $u$  d'un espace  $E$  de dimension finie  $n$  est diagonalisable s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

**Théorème 4.4** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace  $E$  de dimension finie  $n$ ,

$$\mathbb{K} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$$

l'ensemble des valeurs propres de  $u$  et  $\alpha_i$  l'ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda_i$  dans  $P_u(X)$ ; on a alors

$$u \text{ est diagonalisable} \iff \begin{cases} \alpha_1 + \dots + \alpha_r = n, \\ \text{et} \\ \dim E_{\lambda_i} = \alpha_i. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION.

( $\Leftarrow$ ). Soit  $B_i$  une base de  $E_{\lambda_i}$ ;  $i = 1, \dots, r$ . Puisque la somme des  $E_{\lambda_i}$  est directe et la somme des dimensions des  $E_{\lambda_i}$  est égale à la dimension de  $E$  alors la réunion des  $B_i$  est une base de  $E$ , formée de vecteurs propres; donc  $u$  est diagonalisable.

( $\Rightarrow$ ) Puisque  $u$  est diagonalisable,  $E$  possède une base formée de vecteurs propres et

$$P_u(X) = (\lambda_1 - X)^{\beta_1} \dots (\lambda_r - X)^{\beta_r}$$

avec  $\beta_i = \dim E_{\lambda_i}$ . Ceci termine la démonstration.

## 4.5. Application à la résolution des systèmes linéaires

Les systèmes considérés dans ce paragraphe sont les systèmes avec le nombre de lignes est égal au nombre d'inconnues:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots + \dots + \dots = \dots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots + \dots + \dots = \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

où les  $a_{ij}$  et les  $b_i$  sont des réels ou des complexes. Rappelons que résoudre ce système, c'est chercher les  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}$  qui satisfont, simultanément, les  $n$  équations ci-dessus.

Le système est dit déterminé lorsqu'il possède une et une seule solution.

Le système est dit indéterminé, lorsqu'il possède une infinité de solutions.

Le système est dit incompatible, lorsqu'il n'a aucune solution.

Deux systèmes  $S$  et  $S'$  sont dits équivalents lorsqu'ils possèdent les mêmes solutions.

Soit  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ , l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$ ; défini par:

$$\begin{aligned} \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n; \\ f(x_1, \dots, x_n) = \left( \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right). \end{aligned}$$

Il est évident que le système  $S$  ci-dessus possède une solution si et seulement si le vecteur  $b = (b_1, \dots, b_i, \dots, b_n) \in \text{Im}f$ .

### Traduction matricielle du système

Considérons la matrice  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ , appelée matrice du système, dont les termes sont les coefficients du système  $S$  ci-dessus, le terme  $a_{ij}$  se trouve dans le croisement de la ligne  $i$  avec la colonne  $j$ . Posons

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \text{ L'écriture matricielle du système est}$$

$$AX = b$$

Supposons que la matrice  $A$  est diagonalisable ou trigonalisable. Il existe alors une matrice  $P$ , carrée d'ordre  $n$  et inversible telle que la matrice  $P^{-1}AP$  est diagonale ou triangulaire.

**Cas 1:**  $D = P^{-1}AP$  est diagonale. On a alors

$$AX = b \iff P^{-1}APX = P^{-1}BP \iff DX = P^{-1}BP.$$

**Cas 2:**  $T = P^{-1}AP$  est triangulaire. On a alors

$$AX = b \iff P^{-1}APX = P^{-1}BP \iff DX = P^{-1}BP.$$

Les systèmes  $DX = P^{-1}BP$  et  $DX = P^{-1}BP$  sont équivalents au système  $S$  de départ et leur résolution est plus facile.

## EXERCICES SUR LES ESPACES VECTORIELS

### 4.6. sous-espaces vectoriels

#### Exercice 1

Soient les sous-ensembles de suivants :

- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$ ,
- $G = \{(a - b, a + b, a - 3b), (a, b) \in \mathbb{R}^3\}$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer  $F \cap G$ .
3. Le vecteur  $(2, 1, 3)$  appartient-il à  $F \cap G$ ?
4. La somme  $F + G$  est-elle directe?

#### Exercice 2

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ . Montrer que

$$F \cap G = F + G \iff F = G.$$

### 4.7. Familles libres. Génératrices. Dimension. Rang

#### Exercice 1

- 1) Montrer que la partie

$$B = \left\{ a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- 2) Calculer les coordonnées de chacun des vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dans la base  $B$ .

- 3) Le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  appartient-il à  $\text{vect}\{a, b\}$ ?

#### Exercice 2

1. Donner une partie de  $\mathbb{R}^3$  qui est libre mais pas génératrice.
2. Donner une partie de  $\mathbb{R}^3$  qui soit génératrice mais pas libre

### Exercice 3

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient  $x_1, \dots, x_m$  des vecteurs de  $E$  tels que, aucun d'entre eux n'est combinaison linéaire des autres. Montrer que les vecteurs  $x_1, \dots, x_m$  forment un système libre.

### Exercice 4

Soit  $\mathcal{P}_3$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq 3$ . Vérifier que les ensembles  $B_i, i = 1, 2, 3$  suivants sont des bases de  $\mathcal{P}_3$ :

- $B_1 = \{1, X, X^2, X^3\}$ ,
- $B_2 = \{1, 1 - X, X - X^2, X^2 - X^3\}$ .
- $B_3 = \{1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3\}$ .

### exercice 5

Donner le rang de  $\{v_1, v_2, v_3\}$  dans chacun des cas suivants:

- $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (-1, 1, -1)$ .
- $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (1, 8, 13)$
- $v_1 = (1, 2, -3), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (1, 10, -1)$ .

## Exercices sur les matrices

## 4.8. Opérations sur les matrices

## Exercice 1

Calculer la somme des deux matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

## Exercice 2

Calculer  $2A - 3B$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 11 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ -7 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

## Exercice 3

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculer (si possible)  $A^2, A^3, AB, (AB)^2, BA$ .

## Exercice 4

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer (si possible)  $AB, BA$  et  $AB - BA$ . Conclusion?

## Exercice

Calculer  $D^k$  de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

## 4.9. Rang d'une matrice

Déterminer le rang des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

## 4.10. Inverse d'une matrice

### Exercice 1

1. Déterminer s'il existe l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que

$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0.$$

A l'aide de la relation ci-dessus, déterminer l'inverse de  $A$ .

- Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{ } M \text{ est-elle inversible? Si oui, déterminer } M^{-1}.$$

### Exercice 2

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Trouver la matrice}$$

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

telle que le produit  $AB$  soit égal à la matrice identité  $I_2$ . Prouver que  $BA = I_2$ .

### Exercice 3

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Calculer } A^3 - 3A^2 - 3A + 5I_3. \text{ Cette matrice est-elle inversible?}$$

Si oui, trouver son inverse.

## Exercices sur les déterminants

## Exercice 1

1. Calculer les déterminants suivants:

$$d_1 = \begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ m-3 & m-4 \end{vmatrix} \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 0 & 1 & 2b \end{vmatrix} \quad d_3 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad d_4 = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

2. Pour quelles valeurs de  $m$  la matrice  $A_m = \begin{pmatrix} m-1 & m-2 \\ m-3 & m-4 \end{pmatrix}$  est inversible?

## Exercice 2

Calculer les déterminants suivants

$$d_1 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \quad d_2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad d_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

## Exercice 3

1. Résoudre les systèmes suivants:

$$S_1 : \begin{cases} (m-1)x + my + z = m+1 \\ mx + 2y + 3z = 3 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m-1 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} -mx + (m+1)y + mz = m+1 \\ (2m-1)x + (m-1)y - mz = m^2 - 1 \\ -2x - 4y + 2mz = m^2 - 3m - 4 \end{cases}$$

2. Pour quelles valeurs de  $m$ , le système  $S_1$  est indéterminé?

3. Même question pour le système  $S_2$ .

## Exercices sur les applications linéaires

## Exercice 1

On considère l'application  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (2x - y, x + 3y)$

1. Montrer que  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ .
2. Calculer  $\varphi(0, 1)$ ,  $\varphi(1, 0)$ ,  $\varphi(2, -2)$ ,  $\varphi(-4, -1)$ .
3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_5 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Déterminer  $AX_i$  pour chaque  $X_i$ .

4. Donner la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique.
5. L'application  $\varphi$  est-elle injective? est-elle surjective? est-elle un automorphisme?
6. l'application  $\varphi$  est-elle diagonalisable? est-elle trigonalisable?
7. Montrer que la partie  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
8. Donner la matrice de passage de la base canonique à la base  $B$ .
9. Donner la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique puis, sa matrice dans la base  $B$ .

## Exercice 2

Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x + y - z \\ 2x + 4y - 2z \\ x - y + 3z \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique.
2. Soient  $E_1 = \text{Ker}(f - 2\text{id})$ ,  $E_2 = \text{Ker}(f - 4\text{id})$ ,  $E_3 = \text{Ker}(f - 6\text{id})$ , où  $\text{id}$  désigne l'application identité de  $\mathbb{R}^3$ . Donner une base et la dimension de chacun de ces sous-espaces.
3. Choisir  $v_1 \in E_1$ ,  $v_2 \in E_2$  et  $v_3 \in E_3$  tels que la deuxième coordonnée de  $v_1$ , la troisième coordonnée de  $v_2$  et la première coordonnée de  $v_3$  soient égales à 1. Montrer que  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
4. Calculer  $f(v_1)$ ,  $f(v_2)$ ,  $f(v_3)$ . En déduire la matrice  $A'$  de  $f$  dans la base  $B$ .
5. Donner la matrice de passage  $P$  de la base canonique à la base  $B$  et calculer  $P^{-1}$ .
6. exprimer  $A'$  en fonction de  $A$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ .

7. Montrer que  $A^n = PA^n P^{-1}$  pour  $n \geq 1$ . Calculer  $A^n$  pour  $n \geq 1$ .
8. Déterminer toutes les matrices  $B' = \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$  telles que  $A'B' = B'A'$ . En déduire toutes les matrices  $B'$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  (l'espace des matrices carrées d'ordre 3) telles que  $B'^3 = A'$ .
9. Déterminer toutes les matrices  $B$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $B^3 = A$ .

### Exercice 3

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X], \\ P & \longmapsto & XP'(X) - 2P(X). \end{cases}$$

1.  $n = 2$ 
  - (a) Montrer que  $f$  est une application linéaire, à valeurs dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .
  - (b) Déterminer  $\text{Im} f$ . Quelle est le rang de  $f$  ?
  - (c) Donner la dimension de  $\text{Ker} f$ , puis déterminer  $\text{Ker} f$ .
2. On prend  $n = 3$ . Mêmes questions que pour  $n = 2$ .
3.  $n$  quelconque. Mêmes questions que pour  $n = 2$ .

### exercice 4

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 dont une base est  $(e_1, e_2, e_3)$ . On considère l'endomorphisme  $f$  défini par :

$$f(e_1) = e_2 + e_3, f(e_2) = e_3 + e_1, \text{ et } f(e_3) = e_1 + e_2$$

Soit  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ . Déterminer l'expression de  $f(x)$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ .  $f$  est-il un automorphisme de  $E$  ?

### Exercice 5

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3,  $(e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Démontrer que la donnée de :

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = e_1 + e_2 \\ \varphi(e_2) = e_1 - e_2 \\ \varphi(e_3) = e_1 + \lambda e_3 \end{cases}$$

définit une application linéaire  $\varphi$  de  $E$  dans  $E$ .

Écrire le transformé du vecteur  $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ . Comment choisir  $\lambda$  pour que  $\varphi$  soit injective ? Surjective ?

## Diagonalisation. Trigonalisation

## Exercice 1

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

## Exercice 2

Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 3

Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables et si elles le sont, donner une base dans laquelle elles sont diagonales.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 4

Considérons les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -35 & \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer le déterminant de chaque matrice.
- 2) Dans chaque cas (sauf pour  $\mathbb{K}$ ), trouver toutes les valeurs propres de la matrice, ainsi que les espaces propres associés. Préciser si la matrice est diagonalisable ou non sur  $\mathbb{R}^3$ . Dans le cas où elle est diagonalisable, déterminer l'exponentielle  $e^{tA}$  (pour la matrice  $A$ ) pour chaque  $t \in \mathbb{R}$ .

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah  
 Faculté des Sciences  
 Département de Mathématique  
 Dhar Lmahraz

Filières : SMP – SMC  
 Cours : Algèbre 2  
 Année : 2010 – 2011  
 Semestre :  $S_2$

### Série 1: Espaces vectoriels

#### Exercice 1(Sous-espaces)

Soit

$$\begin{aligned} E = \mathbb{R}_2[X] &= \{P(X) = aX^2 + bX + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}, \\ F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\} \end{aligned}$$

Vérifier que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  et que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

#### Exercice 2(Somme de deux sous-espaces)

On considère l'espace vectoriel réel  $E = \mathbb{R}^3$  et le vecteur  $u = (1, 1, 1)$ . On pose

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}, \\ G &= \text{Vect}(u) = \{\alpha u; \alpha \in \mathbb{R} = (\alpha, \alpha, \alpha)\}. \end{aligned}$$

- Vérifier que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces de  $\mathbb{R}^3$ .
- La somme  $F + G$  est-elle directe?
- $F$  et  $G$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ ?

#### Exercice 3(Combinaison linéaire)

Les vecteurs  $u$  suivants, sont-ils combinaison linéaire des vecteurs  $u_1, u_2$  suivants:

- 1)  $u = (1, 2), u_1 = (1, -2), u_2 = (2, 3)$
- 2)  $u = (2, 5, 3), u_1 = (1, 3, 2), u_2 = (1, -1, 4)$
- 3)  $u = (3, 1, m), u_1 = (1, 3, 2), u_2 = (1, -1, 4)$

#### Exercice 4(Sous-espace engendré. Base. Coordonnées. Changement de base)

Soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y = 0\}.$$

- Donner une base de  $F$ .
- On admet que  $B = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$  et  $B' = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, 0)\}$  sont deux bases de  $F$ . Donner les coordonnées de  $(2, -2, 2)$  dans la base  $B$  puis, dans la base  $B'$ .

#### Exercice 5(rang d'un système de vecteurs)

Déterminer, suivant les valeurs de  $\alpha$ , le rang de chacun des systèmes  $S_1, S_2, S_3$  suivants:

$$S_1 = \{a = (\alpha, 1, 1), b = (1, \alpha, 1), c = (1, 1, \alpha)\} \quad S_2 = \{u = (\alpha, 1, 1), b = (-1, -\alpha, -1), c = (-1, -1, \alpha)\}$$

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah  
 Faculté des Sciences  
 Département de Mathématique  
 Dhar Lmahraz

Filières : SMP – SMC  
 Cours : Algèbre2  
 Année : 2010 – 2011  
 Semestre :  $S_2$

### Série 2: Matrices et déterminants

#### Exercice 1

Montrer que les matrices suivantes ont pour déterminant zéro

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

#### Exercice 2

Calculer l'inverse des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah  
 Faculté des Sciences  
 Département de Mathématique  
 Dhar Lmahraz

Filières : SMP – SMC  
 Cours : Algèbre2  
 Année : 2010 – 2011  
 Semestre :  $S_2$

### Série 3: Applications linéaires

**Exercice 1** Soit trois vecteurs  $e_1, e_2, e_3$  formant une base de  $\mathbb{R}^3$ . On note  $T$  la transformation linéaire définie par

$$\begin{aligned} T(e_1) &= e_3, \\ T(e_2) &= e_3, \\ T(e_3) &= -e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

- Déterminer le noyau de cette application. Ecrire la matrice  $A$  de  $T$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ .
- On pose  $f_1 = e_1 - e_3$ ,  $f_2 = e_1 - e_2$ ,  $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$ . Calculer  $e_1, e_2, e_3$  en fonction de  $f_1, f_2, f_3$ . Les vecteurs  $f_1, f_2, f_3$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^3$  ?
- Calculer  $T(f_1), T(f_2), T(f_3)$  en fonction de  $f_1, f_2, f_3$ . Ecrire la matrice  $B$  de  $T$  dans la base  $(f_1, f_2, f_3)$  et trouver la nature de l'application  $T$ .
- On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ . Quelle relation lie  $A, B, P$  et  $P^{-1}$  ?

- Donner une base de  $\text{Im}T$  et déduire le rang de  $T$ .

### Exercice 2

Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + y - z \\ 2x + 4y - 2z \\ x - y + 3z \end{pmatrix}$$

- Donner la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique.
- Soient  $E_1 = \text{Ker}(f - 2id)$ ,  $E_2 = \text{Ker}(f - 4id)$ ,  $E_3 = \text{Ker}(f - 6id)$ , où  $id$  désigne l'application identité de  $\mathbb{R}^3$ . Donner une base et la dimension de chacun de ces sous-espaces.

3. Choisir  $v_1 \in E_1$ ,  $v_2 \in E_2$  et  $v_3 \in E_3$  tels que la deuxième coordonnée de  $v_1$ , la troisième coordonnée de  $v_2$  et la première coordonnée de  $v_3$  soient égales à 1. Montrer que  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
4. Calculer  $f(v_1)$ ,  $f(v_2)$ ,  $f(v_3)$ . En déduire la matrice  $A'$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
5. Donner la matrice de passage  $P$  de la base canonique à la base  $\mathcal{B}$  et calculer  $P^{-1}$ .
6. exprimer  $A'$  en fonction de  $A$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ .
7. Montrer que  $A^n = PA^nP^{-1}$  pour  $n \geq 1$ . Calculer  $A^n$  pour  $n \geq 1$ .

### Exercice 3

Soit  $f$  l'application linéaire définie par

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \\ f(\alpha, \beta) = (\alpha + 2\beta, -2\alpha + 3\beta, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta).$$

1. Quel est l'espace de départ de  $f$ ?
2. Quel est l'espace d'arrivée de  $f$ ?
3. Calculer le rang de  $f$ .
4.  $f$  est-elle surjective?

### Exercice 4

Soit

$$f : \mathbb{C}_2[X] \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ aX^2 + bX + c \longmapsto ((a - b + c, b + c))$$

1. Déterminer la dimension de  $\ker f$  et dire si oui ou non,  $f$  est injective.
2. Calculer le rang de  $f$ .  $f$  est-elle surjective?
3.  $f$  est-il un isomorphisme.

### Exercice 5

1) Soit  $B = \{a = (1, 0, -1), b = (0, 0, 1), c = (0, 1, 0)\}$ . Vérifier que  $B$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . 2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice par rapport à la base  $B$  est la matrice  $A$ . Donner la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah  
 Faculté des Sciences  
 Département de Mathématique  
 Dhar Lmahraz

Filières : SMP – SMC  
 Cours : Algèbre2  
 Année : 2010 – 2011  
 Semestre :  $S_2$

Série 4: Diagonalisation

Exercice 1 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ? dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des endomorphismes suivants

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3; \quad f(x, y, z) = (x + y, 2x + y + 2z, y + z),$$

$$g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4; \quad g(x, y, z, t) = (t, -y, -z, x)$$

## Contenu mathématiques du semestre $S_2$ pour les filières SMP-SMC

### Mathématique I

#### - Élément 1 : Analyse 1 (Cours, TD)

1. Suites de nombre réels : convergence et limite. 2. Suites particulière : Suites arithmétiques, suites géométriques et suites arithmético-géométrique. 3. Suites alternées et suites adjacentes. 4. Fonction numérique d'une variable réelle : Calcul des limites, continuité. 5. Théorème des valeurs intermédiaires. 6. Notion de dérivabilité (dérivée première et dérivée d'ordres supérieurs). 7. Fonctions convexes. 8. Fonction monotones et Fonctions réciproques des Fonctions circulaires et fonctions hyperboliques. 9. Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis. 10. Formule de Taylor, polynômes d'interpolations et calcul approché. 11. Fonctions équivalentes et développements limités.

#### - Élément 2 : Algèbre 1 (Cours, TD)

1. Systèmes d'équations linéaires et résolution par la méthode de Gauss ou pivots, 2. Propriétés vectorielles de  $n$  : Famille libres, famille génératrices, notion de base et base canonique, 3. Le plan  $\mathbb{R}^2$  et le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, 4. L'espace affine  $E^2$ : Coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires, équation d'une droite et équation d'un cercle, 5. Produit scalaire, produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$  et Projection orthogonale. 6. Fonctions polynomiales. Polynôme irréductible dans  $\mathbb{R}$  et dans  $\mathbb{C}$ . Fractions rationnelles. 7. Division euclidienne et division suivant les puissances croissantes. 8. Décomposition des fractions en éléments simples dans  $\mathbb{R}$  et dans  $\mathbb{C}$ .

### Mathématique II

#### - Élément 1 : Analyse 2 (Cours, TD)

1. Introduction la notion d'intégrale aide des calculs des aires. 2. Théorème fondamental de l'analyse et calcul des primitives. 3. Intégration par parties et intégration par changement de variable. 4. Intégration des fractions rationnelles. 5. Intégrale dépendent d'un paramètre. 6. Intégrale généralisée et critères de convergences. 7. Equations différentielles du premier ordre. 8. Equations différentielles du second ordre coefficients constants. 9. Séries numériques. 10. Généralités de suites et séries de fonctions. 11. Séries entières, rayons de convergences et fonctions analytiques réelles, 12. Séries trigonométriques et séries de Fourier.

#### - Élément 2 : Algèbre 2 (Cours, TD)

1. Espaces vectoriels, sous espaces et sous espaces engendrés. 2. Applications linéaires et endomorphismes. 3. Calcul matriciel et rang d'une matrice. 4. Déterminant d'une matrice carrée et applications. 5. Changement de bases et matrices de passage. 6. Polynôme caractéristique, diagonalisation, trigonalisation. 7. Applications aux systèmes linéaires.



