PROBABILITÉS :
Savoirs et Savoir-faire

Notice

***

J'ai vu plus loin que les autres
parce que je me juché sur les
épaules de géants.

Isaac NEWTON

Le présent cours est établi dans le cadre d'une formation académique de renforcement de capacités.

Pour toutes autres informations utiles ou complémentaires, vous pouvez joindre l'auteur par :

Appel : (+226) 70 35 76 83 / (+226) 66 87 17 97

Whatsapp : (+226) 70 35 76 83 / (+226) 66 87 17 97

Facebook : https ://www.facebook.com/traore.djimi.14

Mail : tgnibangatien@gmail.com

Cordialement.

Chapitre 1

Probabilités (I) : Probabilités sur un ensemble fini

***

Tu connaitras la vérité et la vérité t'affranchira

La Bible

Choisis toujours le chemin qui semble le meilleur même s'il parait plus difficile : L'habitude le rendra agréable.

Pythagore

Sommaire

Historique

Un résultat aussi élégant qu'impressionnant :

la probabilité pour que deux entiers choisis au hasard soient premiers entre eux est : $\dfrac{6}{\pi^2}$

Les Probabilités ont fait tardivement leur entrée dans le périmètre des Mathématiques. En effet, on estime la naissance des Probabilités en 1654, lorsque **Blaise Pascal** élabore dans sa correspondance avec Pierre de Fermat, la base du calcul des probabilités à partir de situations de jeux d'argent.

En 1713, **Jacques Bernoulli** énonce la première version de la **loi des grands nombres** qui dit en langage courant que : « Lorsque le hasard se répète un grand nombre de fois, il perd son caractère d'imprévisibilité »

En 1718, **Abraham de Moivre** énonce le **théorème central limite** dit en langage courant que : « Toute chose tend à devenir normal à partir d'un certain rang »

En 1764, **Thomas Bayes** énonce le théorème qui porte son nom : **Théorème de Bayes**. Ce théorème permet de déterminer la probabilité qu'un événement arrive à partir d'un autre événement réalisé, à condition que ceux-ci soient interdépendants. Il est aujourd'hui fréquemment utilisé aussi bien en médecine qu'en géographie ou démographie.

En 1770, **Joseph Louis Lagrange** introduit les **lois continues**.

La dernière grande étape symbolique est l'axiomatisation des Probabilités par le mathématicien russe **Andreï Kolmogorov** en 1933. C'est cette étape qui légitimé les Probabilités en discipline mathématique à part entière.
Andreï Kolmogorov est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens du XX^{e} siècle.

1.1 Vocabulaire des probabilités

1) On appelle **expérience aléatoire**, tout jeu à plusieurs issues.

   Par exemples :
   - Lorsque nous lançons une pièce de monnaie, nous avons deux issues possibles : « PILE » ou « FACE ».
     Le lancer d'une pièce de monnaie est donc une expérience aléatoire.
   - Lorsque nous lançons un dé de ludo, nous avons six issues possibles : « 1 » ou « 2 » ou « 3 » ou « 4 » ou « 5 » ou « 6 ».
     Le lancer d'un dé de ludo est donc une expérience aléatoire.

- Lorsque nous tirons une boule dans une urne qui contient des boules rouges, vertes et noires, nous avons trois issues possibles : « ROUGE » ou « VERTE » ou « NOIRE ».
  Le tirage de boules dans une urne, qui en contient plusieurs, est donc une expérience aléatoire.

2) On appelle **éventualité** d'une expérience aléatoire, toute issue possible de cette expérience aléatoire.

   Par exemples :
   - Dans le lancé d'une pièce de monnaie, nous avons deux éventualités : « PILE » ou « FACE ».
   - Dans le lancé d'un dé de ludo, nous avons six éventualités : « 1 » ou « 2 » ou « 3 » ou « 4 » ou « 5 » ou « 6 ».
   - Dans le tirage d'une boule dans une urne qui contient des boules rouges, vertes et noires, nous avons trois éventualités : « ROUGE » ou « VERTE » ou « NOIRE ».

3) On appelle **univers associé** à une expérience aléatoire, l'ensemble de toutes les éventualités de cette expérience aléatoire.
   Par convention, l'univers associé à une expérience aléatoire est souvent noté : Ω.

   Par exemples :
   - Dans le lancé d'une pièce de monnaie, nous avons : $\Omega = \{\text{PILE} ; \text{FACE}\}$.
   - Dans le lancé d'un dé de ludo, nous avons : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
   - Dans le tirage d'une boule dans une urne qui contient des boules rouges, vertes et noires, nous avons : $\Omega = \{\text{ROUGE} ; \text{VERTE} ; \text{NOIRE}\}$.

4) On appelle **événement** d'un univers Ω, toute partie ou sous-ensemble de cet univers Ω.
   Si $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω, alors un événement de Ω est un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.

   Par exemples :
   - Dans le lancé d'une pièce de monnaie, nous avons :

$$\Omega = \{\text{PILE} ; \text{FACE}\}$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing ; \{\text{PILE}\} ; \{\text{FACE}\} ; \{\text{PILE} ; \text{FACE}\}\}$$

   Ici, l'univers Ω dispose de quatre événements qui correspond exactement au cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui est : $2^2 = 4$.

- Dans le lancé d'un dé de ludo, nous avons :

$$\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$$

$\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing\,;\{1\}\,;\{2\}\,;\{3\}\,;\{4\}\,;\{5\}\,;\{6\}\,;\{1\,;2\}\,;\{1\,;3\}\,;\cdots\}$

Ici, le cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$ est : $2^6 = 64$. Donc l'univers Ω dispose exactement de soixante et quatre événements. Il est donc pratiquement difficile de définir $\mathcal{P}(\Omega)$ en extension (en énumérant tous ses éléments).
- Dans le tirage d'une boule dans une urne qui contient des boules rouges, vertes et noires, nous avons, en désignant ROUGE par R, VERTE par V et NOIRE par N :

$$\Omega = \{R\,;V\,;N\}$$

$\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing\,;\{R\}\,;\{V\}\,;\{N\}\,;\{R\,;V\}\,;\{R\,;N\}\,;\{V\,;N\}\,;\{R\,;V\,;N\}\}$

Ici, l'univers Ω dispose de huit événements qui correspond exactement au cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui est : $2^3 = 8$.

5) On appelle **événement élémentaire** d'un univers Ω, tout événement de Ω à un seul élément.

Par exemples :
- Dans le lancé d'une pièce de monnaie, nous avons : $\Omega = \{\text{PILE}\,;\text{FACE}\}$.
Les événements élémentaires de Ω sont donc : $\{\text{PILE}\}$ et $\{\text{FACE}\}$.
- Dans le lancé d'un dé de ludo, nous avons : $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$.
Les événements élémentaires de Ω sont donc : $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{4\}$; $\{5\}$ et $\{6\}$.
- Dans le tirage d'une boule dans une urne qui contient des boules rouges, vertes et noires, nous avons : $\Omega = \{\text{ROUGE}\,;\text{VERTE}\,;\text{NOIRE}\}$.
Les événements élémentaires de Ω sont donc : $\{\text{ROUGE}\}$; $\{\text{VERTE}\}$ et $\{\text{NOIRE}\}$.

6) On appelle **espace probabilisable**, tout couple $(\Omega\,,\mathcal{P}(\Omega))$, où Ω est l'univers associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de tous les événements de Ω.
Si Ω est un ensemble fini, alors $\mathcal{P}(\Omega)$ l'est également. Dans ce cas, on dit que $(\Omega\,,\mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable fini.

7) Soit $(\Omega\,,\mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable.
On dira que deux événements A et B de Ω sont **disjoints** ou **incompatibles** si leur intersection est vide : $A \cap B = \varnothing$.

Par exemples :

- Dans le lancé d'une pièce de monnaie, les événements $A = \{\text{PILE}\}$ et $B = \{\text{FACE}\}$ sont disjoints car $A \cap B = \varnothing$.
- Dans le lancé d'un dé de ludo, les événements $A = \{2\,;3\,;5\}$ et $B = \{2\,;4\,;6\}$ ne sont pas disjoints vu que $A \cap B \neq \varnothing$.
- Dans le tirage d'une boule dans une urne qui contient des boules rouges (R), vertes (V) et noires (N), les événements $A = \{\text{R}\}$ et $B = \{\text{V}\,;\text{N}\}$ sont incompatibles puisque $A \cap B = \varnothing$.

8) Soit $(\Omega\,, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable.
On dira qu'un événement de Ω est **réalisé** si l'issue finale obtenu est un élément de cet événement.
Dans ces conditions :

a) Ω qui est un événement de lui-même, est appelé **événement certain** car il est toujours réalisé.

b) $\varnothing$ qui est un événement de Ω, est appelé **événement impossible** car il n'est jamais réalisé.

Par exemples :
- Dans le lancé d'une pièce de monnaie, si l'issue final est « PILE », alors l'événement $\{\text{PILE}\}$ est réalisé mais l'événement $\{\text{FACE}\}$ n'est pas réalisé.
- Dans le lancé d'un dé de ludo, si l'issue final est « 3 », alors l'événement $A = \{2\,;4\,;6\}$ n'est pas réalisé.
Par contre, si si l'issue final était « 2 » ou « 4 » ou « 6 », alors l'événement A serait réalisé.
- Dans le tirage d'une boule dans une urne qui contient des boules rouges, vertes et noires, si la boule obtenue est « VERTE », alors l'événement $B = \{\text{ROUGE}\,;\text{VERTE}\}$ est réalisé.
Par contre, si la boule obtenue était « NOIRE », alors l'événement B ne serait pas réalisé.

9) Soit $(\Omega\,, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable.
Si A et B sont deux événements de Ω, alors :

a) $A \cap B$ est l'événement « A et B ».
Il est réalisé si les deux événements A et B sont réalisés simultanément.

b) $A \cup B$ est l'événement « A ou B ».
Il est réalisé si l'un au moins des deux événements A ou B est réalisé.

c) $\overline{A}$ est « l'événement contraire de A ».
Il est réalisé si A n'est pas réalisé, et inversement.

1.2 Probabilité d'un événement

1.2.1 Définition

Soit $(\Omega\,, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable, où Ω est l'univers associé au lancé d'un dé de ludo.
On a :

$$\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$$

Considérons, en extension, les événements :

$$A = \{3\}$$

$$B = \{1\,;3\}$$

$$C = \{2\,;4\,;6\}$$

En compréhension, les événements A, B et C pourraient s'énoncer sous la forme :

A : « Obtenir 3 »

B : « Obtenir 1 ou 3 »

C : « Obtenir 2 ou 4 ou 6 » = « Obtenir un numéro pair »

On se propose de déterminer les chances de réalisation de chacun des événements A, B et C.

a) Sur les six issus possibles, seul un est favorable à la réalisation de l'événement A.
On dit alors la probabilité de l'événement A est $\frac{1}{6}$ que l'on note $P(A) = \frac{1}{6}$.

b) De même, sur les six issus possibles, seuls deux sont favorables à la réalisation de l'événement B.
On dit alors la probabilité de l'événement B est $\frac{2}{6}$ que l'on note $P(B) = \frac{2}{6}$.

c) De même, sur les six issus possibles, seuls trois sont favorables à la réalisation de l'événement C.
On dit alors la probabilité de l'événement B est $\frac{3}{6}$ que l'on note $P(B) = \frac{3}{6}$.

Définition

Soit $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini et P une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0\,;\,1]$.
On dira que P est une probabilité sur $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega))$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $P(\Omega) = 1$;
- Pour tous éléments A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \varnothing$, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Vocabulaire

Soit $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.

1) Si P est une probabilité sur $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega))$, alors on dit que le triplet $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$ est un **espace probabilisé fini**.
2) Si $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$ est un espace probabilisé fini, alors pour tout élément A de $\mathcal{P}(\Omega)$, la quantité $P(A)$ est appelée **probabilité** de l'événement A.

1.2.2 Propriétés

Propriété 1

Soit $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$ un espace probabilisé fini.
Pour tout élément A de $\mathcal{P}(\Omega)$, on a :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Démonstration :

Soit A un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.
On a que :

$$\begin{cases} \Omega = A \cup \overline{A} \\ A \cap \overline{A} = \varnothing \end{cases}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{array}{rcl} P(\Omega) & = & P(A \cup \overline{A}) \\ & = & P(A) + P(\overline{A}) \end{array}$$

Comme $P(\Omega) = 1$, alors on obtient que :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

D'où l'on tire :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Propriété 2

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini, n un entier naturel tel que $n \geq 2$.
Pour tous éléments $A_1, A_2, \cdots, A_n$ deux à deux disjoints de $\mathcal{P}(\Omega)$, on a :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Démonstration :

Procédons par récurrence sur l'entier naturel n.

- **Initialisation :**
  Soit A_1 et A_2 deux éléments disjoints de $\mathcal{P}(\Omega)$.
  On a par définition :

  $$P(A_1 \cup A_2 \cup) = P(A_1) + P(A_2)$$

  Par conséquent, la propriété fonctionne au départ.
- **Hérédité :**
  Soit $n \geq 2$ un entier naturel, $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$ des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que :

  $$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

  On a que :

  $$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1}) = P\left[(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}\right]$$

  Comme les événements $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$ sont deux à deux disjoints, alors il en est de même des événements $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ et A_{n+1}.
  D'où :

  $$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1}) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) + P(A_{n+1})$$

  On obtient alors, d'après l'hypothèse de récurrence, que :

  $$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1}) &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(A_{n+1}) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_{n+1}) \end{aligned}$$

  Par conséquent, la propriété est héréditaire.

- **Conclusion :**
La propriété « $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1}) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ » est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tous éléments A_1, A_2, $\cdots$, A_n deux à deux disjoints de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Propriété 3

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini.

1) $P(\varnothing) = 0$
2) Si $\Omega = \{\omega_1\,;\omega_2\,;\cdots\,;\omega_n\}$, alors on a que :

$$P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \cdots + P(\{\omega_m\}) = 1$$

Démonstration :

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ est un espace probabilisé fini.

1) On a que : $\begin{cases} \Omega \cup \varnothing = \Omega \\ \Omega \cap \varnothing = \varnothing \end{cases}$

Donc :

$$\begin{array}{rcl} P(\Omega) & = & P(\Omega \cup \varnothing) \\ & = & P(\Omega) + P(\varnothing) \end{array}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{array}{rcl} P(\varnothing) & = & P(\Omega) - P(\Omega) \\ & = & 1 - 1 \\ & = & 0 \end{array}$$

2) Si $\Omega = \{\omega_1\,;\omega_2\,;\cdots\,;\omega_n\}$, alors on peut écrire que :

$$\Omega = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \cdots \cup \{\omega_n\}$$

Comme de plus les événements $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, $\cdots$, $\{\omega_n\}$ sont deux à deux disjoints, alors on obtient que :

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & P(\Omega) \\ & = & P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \cdots \cup \{\omega_n\}) \\ & = & P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \cdots + P(\{\omega_m\}) \end{array}$$

Propriété 4

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini.
Pour tous éléments A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \subset B$, on a :

$$P(A) \leq P(B)$$

Démonstration :

Soit A et B deux éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \subset B$.
Comme $A \subset B$, alors on a que :

$$\begin{cases} B = A \cup (B \setminus A) \\ A \cap (B \setminus A) = \varnothing \end{cases}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left[A \cup (B \setminus A)\right] \\ &= P(A) + P(B \setminus A) \end{aligned}$$

Comme $P(B \setminus A) \geq 0$, alors on obtient que :

$$P(B) \geq P(A)$$

Propriété 5

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini.
Pour tous éléments A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Démonstration :

Soit A et B deux éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$.
Les événements $A \setminus B$, $B \setminus A$ et $A \cap B$ sont deux à deux disjoints et leur union est égale à $A \cup B$.
Donc :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P\left[(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)\right] \\ &= P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{cases} A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \\ (A \setminus B) \cap (A \cap B) = \varnothing \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B = (B \setminus A) \cup (A \cap B) \\ (B \setminus A) \cap (A \cap B) = \varnothing \end{cases}$$

Alors on obtient que :

$$\begin{cases} P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) \\ P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B) \end{cases}$$

D'où l'on tire :

$$\begin{cases} P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) \\ P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) \end{cases}$$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) \\ &= [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)] + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

1.2.3 Équiprobabilité

Définition

Définition 1 : Événements équiprobables

Soit $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$ un espace probabilisé fini, A et B deux éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$.
On dira que les événement A et B sont **équiprobables** si $P(A) = P(B)$.

Définition 2 : Équiprobabilité

Soit $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$ un espace probabilisé fini.
On dira que P est l'**équiprobabilité** sur Ω si tous les événements élémentaires de Ω sont **équiprobables**.

Propriété

Soit $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$ un espace probabilisé fini tel que P est l'équiprobabilité.
Posons $\Omega = \{\omega_1\,;\,\omega_2\,;\,\cdots\,;\,\omega_n\}$ où l'entier naturel n est le cardinal de Ω.
Comme P est l'équiprobabilité sur Ω, alors tous les événements élémentaires de

Ω sont équiprobables.
On peut donc poser :

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = p$$

Considérons maintenant un élément quelconque A de $\mathcal{P}(\Omega)$.
On distingue deux cas :

1) Si $A \neq \varnothing$, alors, quitte à rénuméroter les éléments on peut supposer que $A = \{\omega_1\,;\, \omega_2\,;\, \cdots\,;\, \omega_m\}$ où l'entier naturel m est le cardinal de A.
   On peut écrire que :

$$A = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \cdots \cup \{\omega_m\}$$

   Et comme les événements élémentaires $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, $\cdots$ et $\{\omega_m\}$ sont deux à deux disjoints, alors on déduit que :

$$\begin{array}{rcl}
P(A) & = & P\left(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \cdots \cup \{\omega_m\}\right) \\
 & = & P\left(\{\omega_1\}\right) + P\left(\{\omega_2\}\right) + \cdots + P\left(\{\omega_m\}\right) \\
 & = & \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \cdots + \dfrac{1}{n} \qquad (m \text{ termes}) \\
 & = & \dfrac{m}{n} \\
 & = & \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}
\end{array}$$

2) Si $A = \varnothing$, alors on a que :

$$\begin{array}{rcl}
P(A) & = & 0 \\
 & = & \dfrac{0}{n} \\
 & = & \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}
\end{array}$$

D'où la propriété suivante :

Propriété

Soit $(\Omega\,;\, \mathcal{P}(\Omega)\,;\, P)$ un espace probabilisé fini tel que P est l'équiprobabilité.
Pour tout événement A de Ω, on a : $P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

Hypothèse d'équiprobabilité

Lors d'une expérience aléatoire, l'équiprobabilité sur l'univers est souvent suggéré par des expression du genre :

- On lance un dé parfait, ou non pipé, ou équilibré, ...
- On tire d'une urne des boules indiscernables au toucher, ...
- On extrait au hasard des objets d'un sac, ...
- ...

1.3 Cas pratiques

1.3.1 Exercice 1 :

Énoncé

On lance un dé non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

1) A : « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 ».
2) B : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 5 ».
3) C : « Obtenir un nombre pair ».
4) D : « Obtenir un nombre premier ».

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
Comme le dé est non pipé, donc tous les événements élémentaires sont équiprobables. Munissons donc Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir l'espace probabilisé fini $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$.
Une éventualité de Ω est un élément de l'ensemble des six numéros du dé.
D'où :

$$\Omega = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$$

Et :

$$\text{Card}(\Omega) = 6$$

1) Calculons la probabilité de A :
Puisque A est l'événement : « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 » on en déduit que :

$$A = \{5\,;\,6\}$$

Donc :

$$\text{Card}(A) = 2$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{3}}$$

2) Calculons la probabilité de B :
Puisque B est l'événement : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 5 » on en déduit que :

$$B = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$$

Donc :

$$\text{Card}(B) = 5$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{P(B) = \frac{5}{6}}$$

3) Calculons la probabilité de C :
Puisque C est l'événement : « Obtenir un nombre pair » on en déduit que :

$$C = \{2\,;4\,;6\}$$

Donc :

$$\text{Card}(C) = 3$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{P(C) = \frac{1}{2}}$$

4) Calculons la probabilité de D :
Puisque D est l'événement : « Obtenir un nombre premier » on en déduit que :

$$D = \{2\,;\,3\,;\,5\}$$

Donc :

$$\text{Card}(D) = 3$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(D) &= \frac{\text{Card}(D)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{P(D) = \frac{1}{2}}$$

1.3.2 Exercice 2 :

Énoncé

Une case contient 5 pigeons dont 3 mâles et 2 femelles. On prend au hasard et successivement deux pigeons de la case sans remise.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

1) A : « On a pris une femelle et un mâle dans cet ordre ».

2) B : « On a pris une femelle et un mâle ».

3) C : « On a pris un pigeon mâle en première position ».

4) D : « On a pris deux pigeons de même sexe ».

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
Comme les pigeons sont choisis au hasard, donc tous les événements élémentaires sont équiprobables. Munissons donc Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir l'espace probabilisé fini $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$.
Une éventualité de Ω est un 2-arrangement de l'ensemble des cinq pigeons.
D'où :

$$\text{Card}(\Omega) = A_5^2 = 5 \times 4 = 20$$

1) Calculons la probabilité de A :
Puisque A est l'événement : « On a pris une femelle et un mâle dans cet ordre » on en déduit que :

$$\text{Card}(A) = A_2^1 \times A_3^1 = 2 \times 3 = 6$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{6}{20} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{P(A) = \frac{3}{10}}$$

2) Calculons la probabilité de B :
Puisque B est l'événement : « On a pris une femelle et un mâle » on en déduit que :

$$\text{Card}(B) = C_2^1 \times A_2^1 \times A_3^1 = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

Donc :

$$\text{Card}(B) = 12$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{12}{20} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{P(B) = \frac{3}{5}}$$

3) Calculons la probabilité de C :
Puisque C est l'événement : « On a pris un pigeon mâle en première position ». on en déduit que :

$$\text{Card}(C) = \times A_3^1 \times A_4^1 = 3 \times 4 = 12$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{12}{20} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{P(C) = \frac{3}{5}}$$

4) Calculons la probabilité de D :
Puisque D est l'événement : « On a pris deux pigeons de même sexe » on en déduit que :

$$\text{Card}(D) = A_3^2 + A_2^2 = 3 \times 2 + 2 \times 1 = 8$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(D) &= \frac{\text{Card}(D)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{8}{20} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{P(D) = \frac{2}{5}}$$

1.3.3 Exercice 3 :

Énoncé

Une urne contient quatre boules rouges, trois boules blanches et deux boules noires. On tire au hasard, successivement et sans remise trois boules de l'urne.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

1) A : « Obtenir trois boules rouges ».
2) B : « Obtenir trois boules de même couleur ».
3) C : « Obtenir une boule rouge, une boule blanche et une boule noire dans cet ordre ».
4) D : « Obtenir trois boules de couleurs différentes ».
5) E : « Obtenir les deux boules noires ».

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
Comme les boules sont tirées au hasard, donc tous les événements élémentaires sont équiprobables. Munissons donc Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir l'espace probabilisé fini $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$.
Une éventualité de Ω est un 3-arrangement de l'ensemble des neuf boules.
D'où :

$$\mathrm{Card}(\Omega) = A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

1) Calculons la probabilité de A :
   Puisque A est l'événement : « Obtenir trois boules rouges » on en déduit que :

$$\mathrm{Card}(A) = A_4^3 = 24$$

   D'où :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{24}{540} \\ &= \frac{1}{21} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{21}}$$

2) Calculons la probabilité de B :
Puisque B est l'événement : « Obtenir trois boules de même couleur » on en déduit que :

$$\text{Card}(B) = A_4^3 + A_3^3 = 4 \times 3 \times 2 + 3 \times 2 \times 1 = 30$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{30}{504} \\ &= \frac{5}{84} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{P(B) = \frac{5}{84}}$$

3) Calculons la probabilité de C :
Puisque C est l'événement : « Obtenir une boule rouge, une boule blanche et une boule noire dans cet ordre » on en déduit que :

$$\text{Card}(C) = A_4^1 \times A_3^1 \times A_2^1 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{24}{504} \\ &= \frac{1}{21} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{P(C) = \frac{1}{21}}$$

4) Calculons la probabilité de D :
Puisque D est l'événement : « Obtenir trois boules de couleurs différentes » on en déduit que :

$$\text{Card}(D) = C_3^1 \times C_2^1 \times A_4^1 \times A_3^1 \times A_2^1 = 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 144$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(D) &= \frac{\text{Card}(D)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{144}{504} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{P(D) = \frac{2}{7}}$$

5) Calculons la probabilité de E :
Puisque E est l'événement : « Obtenir les deux boules noires » on en déduit que :

$$\text{Card}(E) = C_2^1 \times A_2^2 \times A_7^1 = 2 \times 2 \times 7 = 28$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{28}{504} \\ &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{P(E) = \frac{1}{18}}$$

1.3.4 Exercice 4 :

Énoncé

On lance un dé pipé à 6 faces. On suppose que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1) Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.
2) Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
Le dé étant pipé, on munit Ω de la probabilité P telle que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face. On obtient l'espace probabilisé fini $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$.
Une éventualité de Ω est un élément de l'ensemble des six numéros du dé.
D'où :

$$\Omega = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$$

1) Calculons la probabilité d'apparition de chaque face :
Soit un entier naturel.
Pour k allant de 1 à 6, on note p_k la probabilité d'obtenir la face numéro k.
D'après l'énoncé, p_k est proportionnelle à k pour tout k élément de $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$.
Donc :

$$\frac{P_1}{1} = \frac{P_2}{2} = \frac{P_3}{3} = \frac{P_4}{4} = \frac{P_5}{5} = \frac{P_6}{6}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{cases} P_2 = 2P_1 \\ P_3 = 3P_1 \\ P_4 = 4P_1 \\ P_5 = 5P_1 \\ P_6 = 6P_1 \end{cases}$$

Comme $P(\Omega) = 1$ et que $P(\Omega) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6$, donc :

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$$

Ce qui donne :

$$P_1 + 2P_1 + 3P_1 + 4P_1 + 5P_1 + 6P_1 = 1$$

Autrement dit :

$$21P_1 = 1$$

D'où l'on tire :

$$P_1 = \frac{1}{21}$$

On obtient alors que :

$$\begin{cases} P_2 = \dfrac{2}{21} \\ P_3 = \dfrac{3}{21} \\ P_4 = \dfrac{4}{21} \\ P_5 = \dfrac{5}{21} \\ P_6 = \dfrac{6}{21} \end{cases}$$

En conséquence :

$$\boxed{P_1 = \frac{2}{21}\,;\, P_2 = \frac{2}{21}\,;\, P_3 = \frac{1}{7}\,;\, P_4 = \frac{4}{21}\,;\, P_5 = \frac{5}{21}\,;\, P_6 = \frac{2}{7}}$$

2) Calculons la probabilité d'obtenir un nombre pair :
Soit A l'événement : « obtenir un nombre pair »
On a donc :

$$A = \{2\,;\,4\,;\,6\}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} P(A) &= p_2 + p_4 + p_6 \\ &= \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{2}{7} \\ &= \frac{12}{21} \\ &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

En conséquence :

$$\boxed{P(A) = \frac{4}{7}}$$

Chapitre 2

Probabilités (II) : Probabilités conditionnelles

***

Tu connaitras la vérité et la vérité t'affranchira

La Bible

Choisis toujours le chemin qui semble le meilleur même s'il parait plus difficile : L'habitude le rendra agréable.

Pythagore

Sommaire

Historique

Une probabilité est **conditionnelle** si elle est calculée à condition qu'un événement survienne.

Dans « The Doctrine of Chances » publié à Londres en 1718, **Abraham de Moivre** est le premier mathématicien à aborder la notion d'indépendance d'événements.
En 1733, il utilise la formule de Stirling pour décrire la loi normale comme une approximation de la loi binomiale qu'il venait de formuler.

C'est **Thomas Bayes**, dans une œuvre publiée en 1764 à titre posthume, qui énonce une première version d'une formule dite **Théorème de Bayes** en utilisant les probabilités conditionnelles.
Cependant le premier à donner une formulation précise de ce théorème de Bayes est **Pierre-Simon de Laplace** en 1774 dans son mémoire « Sur la probabilité des causes »

2.1 Probabilités conditionnelles

2.1.1 Présentation

Énoncé

Une classe de Terminale C est constituée de 42 élèves dont 30 garçons et 12 filles. On a demandé des volontaires pour effectuer un travail en groupe et on a obtenu 20 garçons et 4 filles.
On considère l'expérience aléatoire qui consiste à choisir au hasard un élève parmi les 42 élèves.

1) Calculer les probabilités de chacun des événements suivants :
   a) F : « l'élève choisi est une fille »
   b) V : « l'élève choisi est un volontaire »
   c) $F \cap V$: « l'élève choisi est une fille volontaire »
   d) Calculer $\dfrac{P(F \cap V)}{P(F)}$.
2) a) Sachant que l'élève choisi est une fille, quelle est la probabilité qu'elle soit volontaire ? On notera $P_F(V)$ cette probabilité.
   b) Comparer $P_F(V)$ et $\dfrac{P(F \cap V)}{P(F)}$.

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire, et soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
Vu que le choix est effectué au hasard, donc on muni Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir l'espace probabilisé fini $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$.

1) Calculons les probabilités de chacun des événements donnés :

a) On a que :

$$\begin{aligned} P(F) &= \frac{\text{Card}(F)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{12}{42} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{P(F) = \frac{2}{7}}$$

b) On a que :

$$\begin{aligned} P(V) &= \frac{\text{Card}(V)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{20+4}{42} \\ &= \frac{24}{42} \\ &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{P(V) = \frac{4}{7}}$$

c) On a que :

$$\begin{aligned} P(F \cap V) &= \frac{\text{Card}(F \cap V)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{4}{42} \\ &= \frac{2}{21} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{P(F \cap V) = \frac{2}{21}}$$

d) On a que :

$$\begin{aligned} \frac{P(F \cap V)}{P(F)} &= \frac{\frac{2}{21}}{\frac{2}{7}} \\ &= \frac{2}{21} \times \frac{7}{2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{P(F \cap V)}{P(F)} = \frac{1}{3}}$$

2) a) Ici, on a un événement « étrange » qui diffère des autres à cause de la condition « l'élève choisi est une fille »
On a donc à chercher une volontaire parmi les filles.
On aura donc que :

$$\begin{aligned} P_F(V) &= \frac{\text{Card}(F \cap V)}{\text{Card}(F)} \\ &= \frac{4}{12} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b) Comme : $P_F(V) = \frac{1}{3}$ et que : $\frac{P(F \cap V)}{P(F)} = \frac{1}{3}$, on en déduit que :

$$\boxed{P_F(V) = \frac{P(F \cap V)}{P(F)}}$$

2.1.2 Propriété

Propriété

Soit $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$ un espace probabilisé fini et A un événement de Ω tel que $P(A) \neq 0$.
L'application

$$\begin{array}{rccc} P_A: & \mathcal{P}\left(X(\Omega)\right) & \longrightarrow & [0\,;\,1] \\ & B & \longmapsto & \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{array}$$

est une probabilité sur $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega))$.

Démonstration :

1) **Démontrons que $\forall \mathbf{B} \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega})$, on a $\mathbf{P_A}(\mathbf{B}) \in [\mathbf{0}\,;\,\mathbf{1}]$:**
Soit B un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.
Tout d'abord, comme P est une probabilité sur $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega))$, donc :

$$\begin{cases} 0 \leq P(A \cap B) \leq 1 \\ 0 \leq P(A) \leq 1 \end{cases}$$

Comme de plus $P(A) \neq 0$, on en déduit que :

$$\begin{cases} 0 \leq P(A \cap B) \leq 1 \\ 0 < P(A) \leq 1 \end{cases}$$

Il en découle alors, en effectuant le rapport, que :

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq 0$$

Ensuite, vu que $A \cap B \subset A$, on en déduit que :

$$P(A \cap B) \leq P(A)$$

Comme de plus $P(A) > 0$, il vient, en divisant par $P(A)$, que :

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq 1$$

Enfin, avec $\begin{cases} P(A\cap B) \geq 0 \\ P(A\cap B) \leq 1 \end{cases}$, on obtient que :

$$0 \leq P(A\cap B) \leq 1$$

D'où :

$$\boxed{P_A(B) \in [0\,;1], \quad \forall B \in \mathcal{P}(\Omega)}$$

2) Démontrons que $\mathbf{P_A(\Omega) = 1}$:
On a :

$$\begin{aligned} P_A(\Omega) &= \frac{P(A\cap\Omega)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A)}{P(A)} \qquad \text{car : } A\cap\Omega = A \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{P_A(\Omega) = 1}$$

3) Démontrons que $\forall(\mathbf{B}\,,\mathbf{C}\,) \in \mathcal{P}(\mathbf{\Omega}) \times \mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$ tels que $B\cap C = \varnothing$, on a $\mathbf{P_A(B\cup C) = P_A(B) + P_A(C)}$:
Soit B et C deux éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $B\cap C = \varnothing$.
On a :

$$\begin{aligned} P_A(B\cup C) &= \frac{P[A\cap(B\cup C)]}{P(A)} \\ &= \frac{P[(A\cap B)\cup(A\cap C)]}{P(A)} \\ &= \frac{P(A\cap B) + P(A\cap C)}{P(A)} \qquad \text{car : } (A\cap B)\cap(A\cap C) = \varnothing \\ &= \frac{P(A\cap B)}{P(A)} + \frac{P(A\cap C)}{P(A)} \\ &= P_A(B) + P_A(C) \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{P_A(B\cup C) = P_A(B) + P_A(C), \quad \forall(B\,,C\,) \in \mathcal{P}(\Omega)\times\mathcal{P}(\Omega)\ /\ B\cap C = \varnothing}$$

Ainsi, l'application P_A est une probabilité sur $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega))$.
D'où le résultat.

2.1.3 Définition

Définition

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini et A un événement de Ω tel que $P(A)\neq 0$.
La probabilité $\mathbf{P_A}$ est appelée **probabilité conditionnelle sachant A**.

Vocabulaire et Notation

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini, A un événement de Ω tel que $P(A)\neq 0$ et P_A la probabilité conditionnelle sachant A.
Pour tout élément B de $\mathcal{P}(\Omega)$:

- $P_A(B)$ est appelée la probabilité conditionnelle de B sachant A ;
- $P_A(B)$ se note aussi $P_A(B) = P(B/A)$.

2.1.4 Propriété

Propriété

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini.
Pour tous événements A et B deux de Ω tels que $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$, on a :

$$P(A)\times P(B/A) = P(B)\times P(A/B)$$

Démonstration :

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini et A et B deux événements de Ω de probabilités non nulles.
Comme $P(A)\neq 0$, donc en conditionnant par rapport à A, on a :

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

D'où l'on tire :

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B/A)$$

De même, comme $P(B)\neq 0$, donc en conditionnant par rapport à B, on a :

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

D'où l'on tire :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B)$$

Avec : $\begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) \\ P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B) \end{cases}$ on obtient :

$$P(A) \times P(B/A) = P(B) \times P(A/B)$$

D'où le résultat.

2.1.5 Arbres pondérés

Lorsqu'on est en présence d'une situation de conditionnement, il est conseillé d'utiliser un arbre de probabilités pour calculer les probabilités.

Principe de construction :

Principe de construction

1) La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
2) La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est égale au produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.
3) La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités de tous les trajets réalisant cet événement.

Remarques :

a) **Sur les nœuds :**
   — Le premier nœud de départ est Ω, lui-même.
   — Les deuxièmes nœuds sont formés en choisissant une partition A_1 ; A_2 ; $\cdots$; A_n de Ω.
   — Les troisièmes nœuds sont formés en choisissant de nouveau une partition B_1 ; B_2 ; $\cdots$; B_m de Ω.
   — Et ainsi de suite jusqu'à satisfaction.

b) **Sur les branches :**
   — Les premières branches sont les réalisations de chacun des événements A_1 ; A_2 ; $\cdots$; A_n de Ω.
   — Les deuxièmes branches sont les réalisations de chacun des événements B_1 ; B_2 ; $\cdots$; B_m de Ω.

— Les troisièmes branches sont les réalisations de chacun des événements C_1 ; C_2 ; $\cdots$; C_l de Ω.
— Et ainsi de suite jusqu'aux dernières branches de la dernière partition choisie de Ω.

c) **Sur les trajets :**
Un trajet est un chemin partant de Ω jusqu'à un nœud final, en passant par les différentes branches concernées : $\Omega \longrightarrow A_i \longrightarrow B_j \longrightarrow C_k \cdots$

d) **Sur les événements :**
Un événement quelconque peut être obtenu en empruntant un ou plusieurs trajets possibles.
Par exemple, dans un jeu, on peut « gagner » en tirant une boule rouge ou bien on peut « gagner » en tirant une boule verte. On peut donc « gagner » en empruntant deux trajets différents.
Un événement est donc un trajet ou la réunion de plusieurs trajets.

e) **Sur la probabilité d'une branche :**
la probabilité d'une branche est la probabilité l'événement dont celle-ci est la réalisation. Il faut donc calculer les probabilités de chaque branche :
— La probabilité d'une première branche $\Omega \longrightarrow A_i$ est $P(A_i)$.
— La probabilité d'une deuxième branche $A_i \longrightarrow B_j$ est $P(B_j/A_i)$.
— La probabilité d'une troisième branche $B_j \longrightarrow C_k$ est $P(C_k/A_i \cap B_j)$.
— Et ainsi de suite jusqu'aux dernières branches.

f) **Sur la probabilité d'un trajet :**
la probabilité d'un trajet est égale au produit des probabilités des différentes branches qui le composent.
Par exemple, la probabilité d'un trajet $\Omega \longrightarrow A_i \longrightarrow B_j \longrightarrow C_k \cdots$ est $P(A_i) \times P(B_j/A_i) \times P(C_k/A_i \cap B_j) \times \cdots$

g) **Sur la probabilité d'un événement :**
La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités de tous les trajets qui réalisent cet événement.

Exemple de construction d'un arbre pondéré :

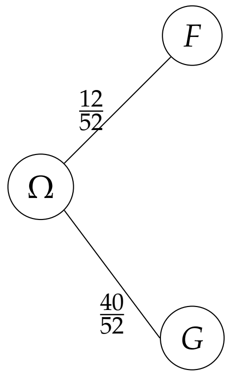
Une classe de terminale est constituée de 52 élèves dont 12 filles et 40 garçons. On demande des volontaires pour faire groupe de travail. On obtient 36 volontaires dont 8 filles et 28 garçons.
On se propose de réalisé un arbre pondéré représentant la situation des élèves de cette classe de terminale.

1) Si on choisit au hasard un élève de cette classe, on distingue alors deux cas : cet élève est une fille ou un garçon.

Désignons par F l'événement : « l'élève choisi est une fille » et par G l'événement : « l'élève choisi est un garçon ».
Les événements F et G forment une partition de Ω, ensemble formé par les 52 élèves de cette classes.
Comme il y a 12 filles et 40 garçons sur les 52 élèves, alors on déduit que :

$$P(F) = \frac{12}{52} \quad \text{et} \quad P(G) = \frac{40}{52}$$

Ce qui donne comme début de l'arbre pondéré le schéma suivant :



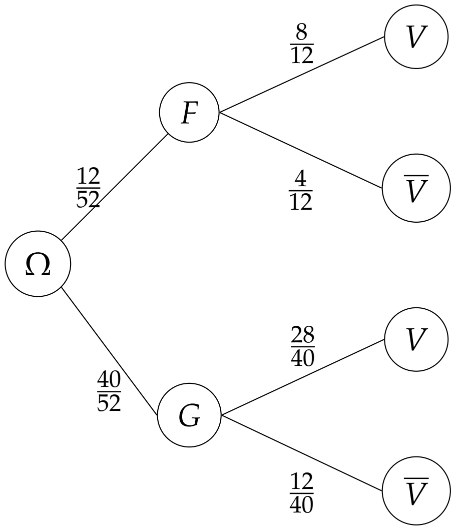
2) Quel que soit le sexe de l'élève choisi, on distingue deux cas sous-cas : cet élève est un volontaire ou n'est pas un volontaire.
Désignons par V l'événement : « l'élève choisi est un volontaire » et par $\overline{V}$ l'événement : « l'élève choisi n'est pas un volontaire ».
Les événements V et $\overline{V}$ forment une partition de Ω.
   - Si l'élève choisi est une fille, alors elle est volontaire ou non-volontaire. Comme il y a 8 filles volontaires et 4 filles non-volontaires sur les 12 filles, alors on déduit que :

$$P(V/F) = \frac{8}{12} \quad \text{et} \quad P(\overline{V}/F) = \frac{4}{12}$$

   - Si l'élève choisi est un garçon, alors il est volontaire ou non-volontaire. Comme il y a 28 garçons volontaires et 12 garçons non-volontaires sur les 40 garçons, alors on déduit que :

$$P(V/G) = \frac{28}{40} \quad \text{et} \quad P(\overline{V}/G) = \frac{12}{40}$$

On obtient donc l'arbre pondéré final suivant :



3) Maintenant, si on souhaite calculer la probabilité d'un événement quelconque, on utilise l'arbre pondéré obtenu :
   — L'événement « l'élève choisi est une fille volontaire » est $F \cap V$.
   Sa probabilité est d'après l'arbre pondéré :

$$P(F \cap V) = P(F) \times P(V/F) = \frac{12}{52} \times \frac{8}{12} = \frac{2}{13}$$

   — L'événement « l'élève choisi est un garçon non-volontaire » est $G \cap \overline{V}$.
   Sa probabilité est d'après l'arbre pondéré :

$$P(G \cap \overline{V}) = P(G) \times P(\overline{V}/G) = \frac{40}{52} \times \frac{12}{40} = \frac{3}{13}$$

2.2 Événements indépendants

2.2.1 Définition

Définition

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini.
Deux événements A et B de Ω sont dits indépendants lorsque la réalisation de A n'influe pas sur la réalisation de B, et inversement.

2.2.2 Propriété

Soit $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$ un espace probabilisé fini, A et B deux événements de Ω.
On a que :

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B/A) \quad \text{et} \quad P(A\cap B) = P(B)\times P(A/B)$$

On obtient que :

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ indépendants} &\iff P(A/B) = P(A) \quad \text{et} \quad P(B/A) = P(B) \\ &\iff P(A\cap B) = P(A)\times P(B) \end{aligned}$$

D'où la propriété suivante :

Propriété

Soit $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$ un espace probabilisé fini.
Deux événements A et B de Ω sont indépendants si, et seulement si :

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$$

2.3 Formule des probabilités composées

Soit $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$ un espace probabilisé fini.

1) Soit A et B deux événements de Ω tels que $P(A)\neq 0$.
On sait que :

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B/A)$$

2) Soit A, B et C trois événements de Ω tels que $P(A)\neq 0$ et $P(A\cap B)\neq 0$.
On a que :

$$\begin{aligned} P(A\cap B\cap C) &= P[(A\cap B)\cap C] \\ &= P(A\cap B)\times P(C/A\cap B) \quad (\text{car } P(A\cap B)\neq 0) \\ &= P(A)\times P(B/A)\times P(C/A\cap B) \quad (\text{car } P(A)\neq 0) \end{aligned}$$

D'où la propriété suivante :

Propriété : Formule des probabilités composées

Soit $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$ un espace probabilisé fini.

1) Si A et B sont deux événements de Ω tels que $P(A) \neq 0$, alors on a :
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

2) Si A, B et C sont trois événements de Ω tels que $P(A \cap B) \neq 0$, alors on a :
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/A \cap B)$$

Remarques :

1) Il existe une généralisation de la formule des probabilités composées dans le cas de n événements, avec $n \geq 2$.
En effet, Soit $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$ un espace probabilisé fini ; A_1, A_2, $\cdots$, A_n des événements de Ω tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n-1}) \neq 0$. On a que :
$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \cap A_2) \times \cdots \times P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

2) C'est la précisément la formule des probabilités composées qui utilisés dans la construction des arbres pondérés pour le calcul des probabilités.

2.4 Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$ un espace probabilisé fini.
On considère A un événement de Ω et B_1, B_2, $\cdots$, B_n une partition de Ω.
On a que :

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap \Omega) \qquad (\text{car } A \subset \Omega) \\
&= P[A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)] \qquad (\text{car } \Omega = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) \\
&= P[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)] \\
&= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n) \\
&= P(B_1) \times P(A/B_1) + P(B_2) \times P(A/B_2) + \cdots + P(B_n) \times P(A/B_n)
\end{aligned}$$

D'où la propriété suivante :

Propriété : Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini.
On considère A un événement de Ω et $B_1, B_2, \cdots, B_n$ une partition de Ω.
On a que :

$$P(A) = P(B_1) \times P(A/B_1) + P(B_2) \times P(A/B_2) + \cdots + P(B_n) \times P(A/B_n)$$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Énoncé

On place dans une urne trois boules rouges, quatre boules vertes et deux boules noires, indiscernables au toucher.

- Parmi les boules rouges, deux portent le numéro 1 et une le numéro 0.
- Parmi les boules noires, deux portent le numéro 1 et deux le numéro 0.
- Parmi les boules noires, une portes le numéro 1 et une le numéro 0.

On tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité que celle-ci porte le numéro 1 ?

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
Comme les boules sont indiscernables au toucher, alors tous les événements élémentaires sont équiprobables. On munit donc Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir un espace probabilisé fini $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$.
On considère l'événement A : « Tirer une boule portant le numéro 1 ».
On se propose d'évaluer la probabilité de A.

- Utilisons une probabilité simple :
  On a :
  $$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$
  Avec $\text{Card}(\Omega) = 3+4+2 = 9$ et $\text{Card}(A) = 2+2+1 = 5$, on obtient :
  $$\boxed{P(A) = \frac{5}{9}}$$
- Utilisons la formule des probabilités totales :
  La boule tirée peut être :

— rouge et porter le numéro 1 ;
— ou verte et porter le numéro 1 ;
— ou encore noire et porter le numéro 1.

Nous allons donc partitionner Ω en trois événements.
Soit :

R l'événement : « Tirer une boule rouge »
V l'événement : « Tirer une boule verte »
N l'événement : « Tirer une boule noire »

Les événements R, V et N forment, par construction, une partition de Ω.
D'après la formule des probabilités totales, on a que :

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap \Omega) \\
&= P[A \cap (R \cup V \cup N)] \\
&= P[(A \cap R) \cup (A \cap V) \cup (A \cap N)] \\
&= P(A \cap R) + P(A \cap V) + P(A \cap N) \\
&= P(R) \times P(A/R) + P(V) \times P(A/V) + P(N) \times P(A/N)
\end{aligned}$$

On a :

$$P(R) = \frac{3}{9} \text{ et } P(A/R) = \frac{2}{3}$$
$$P(V) = \frac{4}{9} \text{ et } P(A/V) = \frac{2}{4}$$
$$P(N) = \frac{2}{9} \text{ et } P(A/N) = \frac{1}{2}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}
P(A) &= \left(\frac{3}{9} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{4}{9} \times \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{9} \times \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \\
&= \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{P(A) = \frac{5}{9}}$$

Exercice 2 :

On place dans une urne trois boules rouges, quatre boules vertes et deux boules noires, indiscernables au toucher.

On tire successivement deux boules sans les remettre dans l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au $2^{\text{ème}}$ tirage ?

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
Comme les boules sont indiscernables au toucher, alors tous les événements élémentaires sont équiprobables. On munit donc Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir un espace probabilisé fini $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$.
On considère l'événement R_2 : « Tirer une boule rouge au $2^{\text{ème}}$ tirage ».
On se propose d'évaluer la probabilité de R_2.
Utilisons la formule des probabilités totales :
La boule rouge tirée au $2^{\text{ème}}$ tirage peut être obtenue après avoir tiré :

— une boule rouge au $1^{\text{ème}}$ tirage ;
— ou une boule verte au $1^{\text{ème}}$ tirage ;
— ou encore une boule noire au $1^{\text{ème}}$ tirage.

Nous allons donc partitionner Ω en trois événements.
Soit :

$$R_1 \text{ l'événement : « Tirer une boule rouge au } 1^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

$$V_1 \text{ l'événement : « Tirer une boule verte au } 1^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

$$N_1 \text{ l'événement : « Tirer une boule noire au } 1^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

Les événements R_1, V_1 et N_1 forment, par construction, une partition de Ω.
D'après la formule des probabilités totales, on a que :

$$\begin{aligned}
P(R_2) &= P(R_2 \cap \Omega) \\
&= P[R_2 \cap (R_1 \cup V_1 \cup N_1)] \\
&= P[(R_2 \cap R_1) \cup (R_2 \cap V_1) \cup (R_2 \cap N_1)] \\
&= P(R_2 \cap R_1) + P(R_2 \cap V_1) + P(R_2 \cap N_1) \\
&= P(R_1) \times P(R_2/R_1) + P(V_1) \times P(R_2/V_1) + P(N_1) \times P(R_2/N_1)
\end{aligned}$$

On a :

$$P(R_1) = \frac{3}{9} \text{ et } P(R_2/R_1) = \frac{2}{8}$$
$$P(V_1) = \frac{4}{9} \text{ et } P(R_2/V_1) = \frac{3}{8}$$
$$P(N_1) = \frac{2}{9} \text{ et } P(R_2/N_1) = \frac{3}{8}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} P(R_2) &= \left(\frac{3}{9} \times \frac{2}{8}\right) + \left(\frac{4}{9} \times \frac{3}{8}\right) + \left(\frac{2}{9} \times \frac{3}{8}\right) \\ &= \frac{6+12+6}{72} \\ &= \frac{24}{72} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{P(R_2) = \frac{1}{3}}$$

2.5 Cas pratiques

2.5.1 Exercice 1 :

Énoncé

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 :
- U_1 contient trois boules blanches et une boule noire.
- U_2 contient une boule blanche et deux boules noires.

On lance un dé non-truqué. Si le dé donne un numéro inférieur ou égal à 2, alors on tire une boule dans l'urne U_1. Sinon on tire une boule dans l'urne U_2.
On suppose que les boules sont indiscernables au toucher.

1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
2) On a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1.

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
Comme les boules sont indiscernables au toucher et que le dé est non-truqué alors tous les événements élémentaires sont équiprobables. On munit donc Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir un espace probabilisé fini $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$.
Réalisons un arbre de probabilités afin de calculer les différente probabilités :

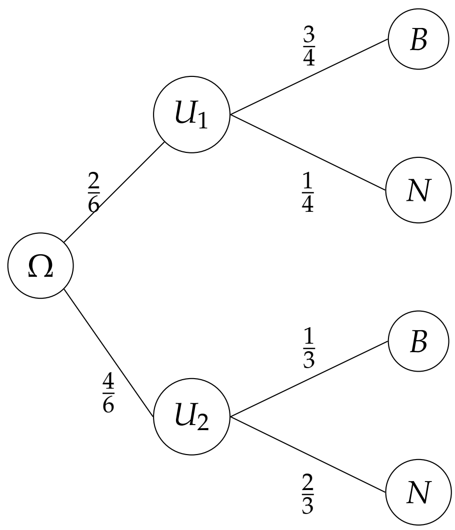
— La probabilité de tirer une boule dans l'urne U_1 est : $P(U_1) = \dfrac{2}{6}$.

— La probabilité de tirer une boule dans l'urne U_2 est : $P(U_1) = \dfrac{4}{6}$.

— La probabilité de tirer une boule blanche et tirer une boule noire dans l'urne U_1 sont respectivement : $P(B/U_1) = \dfrac{3}{4}$ et $P(N/U_1) = \dfrac{1}{4}$.

— La probabilité de tirer une boule blanche et tirer une boule noire dans l'urne U_2 sont respectivement : $P(B/U_2) = \dfrac{1}{3}$ et $P(N/U_2) = \dfrac{2}{3}$.

D'où l'arbre de probabilités suivant :



1) Calculons la probabilité de tirer une boule blanche :
D'après l'arbre de probabilités, on a :

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{2}{6} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{9} \\ &= \frac{17}{36} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\text{La probabilité de tirer une boule blanche est : } \frac{17}{36}}$$

2) Calculer la probabilité que la boule provienne de l'urne U_1, sachant que la boule tirée est blanche :
On a que :

$$P(U_1) \times P(B/U_1) = P(B) \times P(U_1/B)$$

D'où l'on tire :

$$\begin{aligned} P(U_1/B) &= \frac{P(U_1) \times P(B/U_1)}{P(B)} \\ &= \frac{2}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{36}{17} \\ &= \frac{9}{17} \end{aligned}$$

Ainsi :

La probabilité que la boule provienne de l'urne U_1,
sachant que la boule tirée est blanche est : $\dfrac{9}{17}$

2.5.2 Exercice 2 :

Le quart d'une population été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

1) Démontrer que la probabilité de tomber malade est égale à $\dfrac{5}{48}$.
2) Calculer la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné.
3) Le vaccin est-il efficace ?

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette situation régis par le hasard et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
En considérant que les choix des personnes se font au hasard, on munit l'univers Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir un espace probabilisé fini $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$.
On considère les événements suivants :
V : « Être vacciné »
M : « Tomber malade »
D'après l'énoncé, on a les probabilités suivantes :

— Comme le quart de la population a été vacciné, donc :
  - La probabilité d'être vacciné est : $P(V) = \dfrac{1}{4}$.
  - La probabilité de ne pas être vacciné est : $P(\overline{V}) = \dfrac{3}{4}$.

— Comme parmi les malades il y a un vacciné pour quatre non vaccinés donc :
  - La probabilité d'être vacciné sachant qu'on est malade est : $P(V/M) = \dfrac{1}{5}$.
  - La probabilité de ne pas être vacciné sachant qu'on est malade est : $P(\overline{V}/M) = \dfrac{4}{5}$.

— Comme au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés donc :
  - La probabilité de tomber malade sachant qu'on est vacciné est : $P(M/V) = \dfrac{1}{12}$.
  - La probabilité de ne pas tomber malade sachant qu'on est vacciné est : $P(\overline{M}/V) = \dfrac{11}{12}$.

1) Démontrons que la probabilité de tomber malade est égale à $\dfrac{5}{48}$:
On a que :

$$P(M) \times P(V/M) = P(V) \times P(M/V)$$

D'où l'on tire :

$$\begin{aligned} P(M) &= \frac{P(V) \times P(M/V)}{P(V/M)} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} \times \frac{5}{1} \\ &= \frac{5}{48} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité de tomber malade est bien égale à : } \frac{5}{48}}$$

2) Calculons la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné :
On a que :

$$P(\overline{V}) \times P(M/\overline{V}) = P(M) \times P(\overline{V}/M)$$

D'où l'on tire :

$$\begin{aligned} P(M/\overline{V}) &= \frac{P(M) \times P(\overline{V}/M)}{P(\overline{V})} \\ &= \frac{5}{48} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné est : } \frac{1}{9}}$$

3) Vérifions si le vaccin est efficace :
   - Comme la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné est $\frac{1}{9}$, donc il y a un individu malade sur neuf non-vaccinés.
   - Comme la probabilité de tomber malade pour un individu vacciné est $\frac{1}{12}$, donc il y a un individu malade sur douze vaccinés.

   On en déduit alors que :

   $$\boxed{\text{le vaccin est efficace puisque la maladie se propage moins vite parmi les vaccinés.}}$$

2.5.3 Exercice 3 : BAC C, Burkina Faso

Énoncé

Une enquête portant sur les élèves d'un lycée a donné les résultats suivants :
- 60% des élèves ont déjà redoublé au moins une classe ;
- 75% de ceux qui n'ont jamais redoublé sont admis au baccalauréat ;
- le pourcentage de succès au baccalauréat est de 55% chez les redoublant.

On note A l'événement « être admis au baccalauréat » et R l'événement « avoir redoublé au moins une classe ».

1) Calculer la probabilité des événements suivants :
   B : « un redoublant est admis au baccalauréat » ;
   C : « un non redoublant est admis au baccalauréat »
   En déduire la probabilité de l'événement A.

2) Sachant qu'un élève est reçu au baccalauréat, quelle est la probabilité pour qu'il n'ait jamais redoublé une classe.

3) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

4) Calculer la probabilité pour qu'un élève échoue au baccalauréat sachant qu'il est redoublant.

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette situation régis par le hasard et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
En considérant que les choix des personnes se font au hasard, on munit l'univers Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir un espace probabilisé fini $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$.
On considère les événements suivants :
A : « Être admis au baccalauréat »
R : « Avoir redoublé au moins une classe »
D'après l'énoncé, on a les probabilités suivantes :

— Comme 60% des élèves ont déjà redoublé au moins une classe, donc :
  - La probabilité d'avoir déjà redoublé au moins une classe est : $P(R) = \dfrac{60}{100} = \dfrac{3}{5}$.
  - La probabilité de n'avoir pas déjà redoublé au moins une classe est : $P(\overline{R}) = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$.

— Comme 75% de ceux qui n'ont jamais redoublé sont admis au baccalauréat, donc :
  - La probabilité d'être admis au baccalauréat sachant qu'on a jamais redoublé au moins une classe est : $P(A/\overline{R}) = \dfrac{75}{100} = \dfrac{3}{4}$.
  - La probabilité de ne pas être admis au baccalauréat sachant qu'on a jamais redoublé au moins une classe est : $P(\overline{A}/\overline{R}) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$.

— Comme le pourcentage de succès au baccalauréat est de 55% chez les redoublant, donc :
  - La probabilité d'être admis au baccalauréat sachant qu'on a redoublé au moins une classe est : $P(A/R) = \dfrac{55}{100} = \dfrac{11}{20}$.
  - La probabilité de ne pas être admis au baccalauréat sachant qu'on a redoublé au moins une classe est : $P(\overline{A}/R) = \dfrac{45}{100} = \dfrac{9}{11}$.

1) Calculons la probabilité des événements B, C et A :
  - Comme B est l'événement « un redoublant est admis au baccalauréat »

donc on a :

$$B = R \cap A$$

Il vient que :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(R \cap A) \\ &= P(R) \times P(A/R) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{11}{20} \\ &= \frac{33}{100} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{P(B) = \frac{33}{100}}$$

- Comme C est l'événement « un non redoublant est admis au baccalauréat » donc on a :

$$C = \overline{R} \cap A$$

Il vient que :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\overline{R} \cap A) \\ &= P(\overline{R}) \times P(A/\overline{R}) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{P(C) = \frac{3}{10}}$$

- Comme A est l'événement « être admis au baccalauréat » et les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de Ω, donc on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) \\ &= P[A \cap (R \cup \overline{R})] \\ &= P(A \cap R) + P(A \cap \overline{R}) \\ &= P(B) + P(C) \\ &= \frac{33}{100} + \frac{3}{10} \\ &= \frac{63}{100} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{P(A) = \frac{63}{100}}$$

Ainsi :

63% des élèves de cette classe sont admis au baccalauréat.

2) Sachant qu'un élève est reçu au baccalauréat, calculons la probabilité pour qu'il n'ait jamais redoublé une classe :
Considérant les événements A et $\overline{R}$, on a que :

$$P(A) \times P(\overline{R}/A) = P(\overline{R}) \times P(A/\overline{R})$$

D'où l'on tire :

$$\begin{aligned} P(\overline{R}/A) &= \frac{P(\overline{R}) \times P(A/\overline{R})}{P(A)} \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{100}{63} \\ &= \frac{10}{21} \end{aligned}$$

Ainsi :

La probabilité de n'avoir jamais redoublé une classe pour un élève admis est : $\frac{10}{21}$

3) Vérifions si les événements A et B sont indépendants :
On a d'une part que :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P[A \cap (R \cap A)] \\ &= P(A \cap R \cap A) \\ &= P(R \cap A) \qquad (\text{car : } A \cap A = A) \\ &= P(B) \\ &= \frac{33}{100} \end{aligned}$$

On a d'autre part que :

$$\begin{aligned} P(A) \times P(B) &= \frac{63}{100} \times \frac{33}{100} \\ &= \frac{2079}{10000} \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

D'où :

$$\boxed{\text{Les événements } A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

4) Calculons la probabilité pour qu'un élève échoue au baccalauréat sachant qu'il est redoublant :
En conditionnant par rapport à R, on a que :

$$\begin{aligned} P(\overline{A}/R) &= 1 - P(A/R) \\ &= 1 - \frac{11}{20} \\ &= \frac{9}{20} \end{aligned}$$

Ainsi :

La probabilité d'avoir échoué au baccalauréat pour un élève redoublant est : $\frac{9}{20}$

2.5.4 Exercice 4 :

Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie :

	Tennis	Équitation	Voile
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

1) Les événements « étudier l'anglais » et « étudier l'allemand » sont-ils indépendants ?
2) Les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la Voile » sont-ils indépendants ?

Proposition de solution

On considère les suivants :
- An : « étudier l'anglais »

- Al : « étudier l'allemand »
- V : « pratiquer la Voile »

Calculons leur cardinal respectifs :

— Parmi les stagiaires qui étudient l'anglais, 50 pratiquent le tennis, 18 pratiquent l'équitation et 27 la voile.
On en déduit que :
$$\text{Card}(An) = 45 + 18 + 27 = 90$$
D'où :
$$P(An) = \frac{90}{150} = \frac{3}{5}$$

— De même, parmi les stagiaires qui étudient l'allemand, 33 pratiquent le tennis, 9 pratiquent l'équitation et 18 la voile.
On en déduit que :
$$\text{Card}(Al) = 33 + 9 + 18 = 60$$
D'où :
$$P(Al) = \frac{60}{150} = \frac{2}{5}$$

— Aussi, parmi les stagiaires qui pratiquent la voile, 27 étudient l'anglais et 18 étudient l'allemand.
On en déduit que :
$$\text{Card}(V) = 27 + 18 = 45$$
D'où :
$$P(V) = \frac{45}{150} = \frac{3}{10}$$

1) Étudions l'indépendance des événements An et V :
On a :
$$\begin{aligned} P(An \cap V) &= \frac{27}{150} \\ &= \frac{9}{50} \end{aligned}$$
Et :
$$\begin{aligned} P(An) \times P(V) &= \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{9}{50} \end{aligned}$$
On en déduit alors que :
$$P(An \cap V) = P(An) \times P(V)$$
D'où :

$$\boxed{\text{Les événements } An \text{ et } V \text{ sont indépendants.}}$$

2) Étudions l'indépendance des événements Al et V :
On a :

$$\begin{aligned} P(Al \cap V) &= \frac{18}{150} \\ &= \frac{3}{25} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} P(Al) \times P(V) &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{3}{25} \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$P(Al \cap V) = P(Al) \times P(V)$$

D'où :

$$\boxed{\text{Les événements } Al \text{ et } V \text{ sont indépendants.}}$$

Chapitre 3

Probabilités (III) : Variable aléatoire

***

Tu connaitras la vérité et la vérité t'affranchira
La Bible

Choisis toujours le chemin qui semble le meilleur même s'il parait plus difficile : L'habitude le rendra agréable.

Pythagore

Sommaire

Historique

De grosses avancées ont été faites sur le calcul des probabilités à partir du XVIIe siècle, mais il faudra attendre le début des années 1930 pour que la description actuelle en terme d'univers s'impose. La notion de variable aléatoire apparaît alors comme une fonction particulière définie sur son univers.

3.1 Notion de variable aléatoire

Définition :

Définition

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.
On appelle variable aléatoire sur Ω, toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$:

$$X: \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array}$$

Exemple 1 :

Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à tirer simultanément deux boules d'une urne qui contient 4 boules vertes et 2 jaunes, toutes indiscernables au toucher.
Introduisons la variante suivante dans le jeu : On gagne 100 F par boule jaune tirée et -50 F par boule verte tirée.
Si Ω désigne l'univers associé à cette expérience aléatoire, alors à chaque éventualité de Ω correspond un gain et un seul.
On peut donc définir une application X de Ω dans $\mathbb{R}$, qui à chaque éventualité ω de Ω fait correspondre son gain $X(\omega)$:

$$X: \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array}$$

L'application X ainsi défini est une variable aléatoire.

Vocabulaire et notation

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini et X une variable aléatoire sur Ω.

1) On appelle valeur prise par X, tout réel $x = X(\omega)$ où $\omega \in \Omega$.

2) L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$.

3) Pour tout élément x de $\mathbb{R}$, on pose : $(X = x) = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = x\}$.
Ainsi $(X = x)$ est le sous-ensemble de Ω formé de toutes les éventualités qui ont pour image x par la variable X.
$(X = x)$ étant une partie de Ω, désigne donc un événement. On dit que c'est l'événement « X prend la valeur x ».

4) Pour tout élément x de $\mathbb{R}$, on pose : $(X \leq x) = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \leq x\}$.
Ainsi $(X \leq x)$ est le sous-ensemble de Ω formé de toutes les éventualités qui ont une image plus petite ou égale à x par la variable X.
$(X \leq x)$ étant une partie de Ω, désigne donc un événement. On dit que c'est l'événement « X prend une valeur inférieure ou égale à x ».

5) Pour tous éléments x et y de $\mathbb{R}$, on définit de même l'événement :

$$(x < X \leq y) = \{\omega \in \Omega \,/\, x < X(\omega) \leq y\}$$

Exemple 2 :

Revenons sur l'exemple 1 :

- On peux tirer :
  — 2 boules vertes et gagner $-50 + (-50) = -100$ F ;
  — une boule verte et une boule jaune et gagner $-50 + 100 = 50$ F ;
  — 2 boules jaunes et gagner $100 + 100 = 200$ F.
  Les valeurs prises par X sont donc : -100 ; 50 et 200.
  D'où :
  $$X(\Omega) = \{-100\,;\, 50\,;\, 200\}$$
- Considérant les valeurs prises par X, on a :
  — $(X = -100)$ est l'événement « X prend la valeur -100 ».
  $(X = -100)$ correspond ici à l'événement « Tirer 2 boules vertes ».
  — $(X = 50)$ est l'événement « X prend la valeur 50 ».
  $(X = 50)$ correspond ici à l'événement « Tirer 2 boules de couleurs différentes ».
  — $(X = 200)$ est l'événement « X prend la valeur 200 ».
  $(X = 200)$ correspond ici à l'événement « Tirer 2 boules jaunes ».
  — $(X = 1)$ est l'événement « X prend la valeur 1 ».
  Comme X ne prend pas la valeur 1, alors $(X = 1)$ correspond ici à l'événement impossible.
- Considérant toujours les valeurs prises par X, on a :
  — $(X \leq 1)$ est l'événement « X prend une valeur inférieure ou égale à 1 ».
  Comme -100 est l'unique valeur de X qui soit inférieure ou égale à 1, alors $(X \leq 1)$ correspond ici à l'événement « Tirer 2 boules vertes ».

— $(X \leq 83)$ est l'événement « X prend une valeur inférieure ou égale à 83 ».
Comme -100 et 50 sont les seules valeurs de X qui soient inférieures ou égales à 83, alors $(X \leq 83)$ correspond ici à l'événement « Tirer au moins une boule verte ».
— $(-7 < X \leq 10)$ est l'événement « X prend la valeur comprise entre -7 exclu et 10 inclus ».
Comme aucune de X ne vérifie cette condition, alors $(-7 < X \leq 10)$ correspond ici à l'événement impossible.

3.2 Caractéristiques d'une variable aléatoire

3.2.1 Loi de probabilité

Définition :

Définition

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω.
On appelle **loi de probabilité** de X, l'application :

$$P_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}\left(X(\Omega)\right) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ A & \longmapsto & P\left(X^{-1}(A)\right) \end{array}$$

où $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \in A\}$.

Remarque :

Pour définir la loi de probabilité de X, il suffit de connaître $P(X = x)$ pour tout élément x de $X(\Omega)$. C'est pourquoi dans la pratique la loi de probabilité de X se résume aux données $(x\,; P(X = x))$ pour tout élément x de $X(\Omega)$.
Ainsi, si $X(\Omega) = \{x_1\,; x_2\,; \cdots\,; x_n\}$, alors on représente la loi de probabilité de X sous la forme :

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$\cdots$	$P(X = x_n)$

Exemple 3 :

Revenons sur l'exemple 1 :
On a : $X(\Omega) = \{-100\,;\,50\,;\,200\}$.
Puisque les boules sont indiscernables au toucher, alors on munit Ω de l'équiprobabilité P.
Calculons maintenant les différentes probabilités $P(X = x)$ pour tout élément x de $X(\Omega)$. On a successivement :

$$\begin{aligned} P(X = -100) &= \frac{C_4^2}{C_6^2} \\ &= \frac{6}{15} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 50) &= \frac{C_4^1 \times C_2^1}{C_6^2} \\ &= \frac{4 \times 2}{15} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 200) &= \frac{C_2^2}{C_6^2} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

D'où la loi de probabilité suivante :

x	-100	50	200
$P(X = x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

3.2.2 Espérance mathématique

Définition :

Définition

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω avec $X(\Omega)=\{x_1\,;x_2\,;\cdots\,;x_n\}$.
On appelle **espérance mathématique** de X, le réel noté $E(X)$, défini par :

$$E(X)=x_1P(X=x_1)+x_2P(X=x_2)+\cdots+x_nP(X=x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)$$

Remarques :

1) Si $E(X)=0$, alors on dit que la variable X est centrée.
2) Comme $P(X=x_1)+P(X=x_2)+\cdots+P(X=x_n)=1$, alors on peut écrire que :

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1P(X=x_1)+x_2P(X=x_2)+\cdots+x_nP(X=x_n)\\ &= \frac{x_1P(X=x_1)+x_2P(X=x_2)+\cdots+x_nP(X=x_n)}{P(X=x_1)+P(X=x_2)+\cdots+P(X=x_n)}\\ &= \frac{P(X=x_1)\times x_1+P(X=x_2)\times x_2+\cdots+P(X=x_n)\times x_n}{P(X=x_1)+P(X=x_2)+\cdots+P(X=x_n)} \end{aligned}$$

$E(X)$ est donc le barycentre dans l'espace affine $\mathbb{R}$ des n réels $x_1\,;x_2\,;\cdots$ et x_n affectés des coefficients $P(X=x_1)\,;P(X=x_2)\,;\cdots$ et $P(X=x_n)$ respectivement ; c'est une valeur moyenne de X.
Dans un jeu, $E(X)$ est le gain moyen du joueur :

a) Si $E(X)=0$, alors le jeu est équilibré pour le joueur.
b) Si $E(X)>0$, alors le jeu est favorable au joueur.
c) Si $E(X)<0$, alors le jeu est défavorable au joueur.

Exemple 4 :

Revenons sur l'exemple 1 :
On a :

x	-100	50	200
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

On obtient :

$$\begin{aligned} E(X) &= -100 \times \frac{2}{5} + 50 \times \frac{8}{15} + 200 \times \frac{1}{15} \\ &= \frac{-600 + 400 + 200}{15} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme nous sommes dans un jeu où le joueur peut gagner (gain positif) ou perdre (gain négatif) et $E(X) = 0$, alors le jeu est équitable pour le joueur dans ce cas.

3.2.3 Variance

Définition :

Définition

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω avec $X(\Omega) = \{x_1\,;\,x_2\,;\,\cdots\,;\,x_n\}$.
On appelle **variance** de X, le réel noté $V(X)$, défini par :

$$V(X) = E\left[X - E(X)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - E(X)\right]^2 P(X = x_i)$$

Propriété :

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω avec $X(\Omega) = \{x_1\,;\,x_2\,;\,\cdots\,;\,x_n\}$.

On a que :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\left[X - E(X)\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \, P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2x_i E(X) + [E(X)]^2\right) P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) - 2E(X) \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) + [E(X)]^2 \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \\
&= E(X^2) - 2E(X) \times E(X) + [E(X)]^2 \times 1 \\
&= E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2
\end{aligned}$$

D'où la propriété suivante :

Propriété

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω. On a :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Exemple 5 :

Revenons sur l'exemple 1 :
On a :

x	-100	50	200
$P(X = x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

On obtient :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= (-100)^2 \times \frac{2}{5} + (50)^2 \times \frac{8}{15} + (200)^2 \times \frac{1}{15} - (0)^2 \\
&= \frac{60000 + 20000 + 40000}{15} \\
&= 8000
\end{aligned}$$

3.2.4 Écart-type

Définition :

Définition

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω.
On appelle **écart-type** de X, le réel noté $\sigma(X)$, défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

où V(X) est la variance de X.

Remarque :

L'écart-type $\sigma(X)$ mesure l'écart moyen des dispersions des valeurs prises par la variable X par rapport à sa valeur moyenne $E(X)$:

a) Plus $\sigma(X)$ est élevé, plus les valeurs de X sont éloignées (de part et d'autre) de la moyenne.

a) Plus $\sigma(X)$ est faible, moins les valeurs de X sont éloignées (de part et d'autre) de la moyenne.

Exemple 6 :

Revenons sur l'exemple 1 :
On a : $V(X) = 8000$.
On obtient : $\sigma(X) = \sqrt{8000} = 40\sqrt{5}$

3.2.5 Fonction de répartition

Définition :

Définition

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω.
On appelle **fonction de répartition** de X, l'application :

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0\,;1] \\ & x & \longmapsto & P(X \leq x) \end{array}$$

Remarque :

Dans la pratique, pour déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, on classe par ordre croissant les valeurs de X puis on subdivise $\mathbb{R}$ en plusieurs intervalles selon ces valeurs croissantes de X :
Soit $X(\Omega) = \{x_1\,;\,x_2\,;\,\cdots\,;\,x_n\}$ tel que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.
On obtient que :

- $\forall x \in \left]-\infty\,;\,x_1\right[,\ F(x) = P(X \leq x) = 0$
  car aucune valeur de X n'est inférieure ou égale à x.
- $\forall x \in \left[x_1\,;\,x_2\right[,\ F(x) = P(X \leq x) = P(X = x_1)$
  car x_1 est la seule valeur de X inférieure ou égale à x.
- $\forall x \in \left[x_2\,;\,x_3\right[,\ F(x) = P(X \leq x) = P(X = x_1) + P(X = x_2)$
  car x_1 et x_1 sont les seules valeurs de X inférieures ou égales à x.
- Ainsi de suite.

Exemple 7 :

Revenons sur l'exemple 1 :
On a :

x	-100	50	200
$P(X = x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

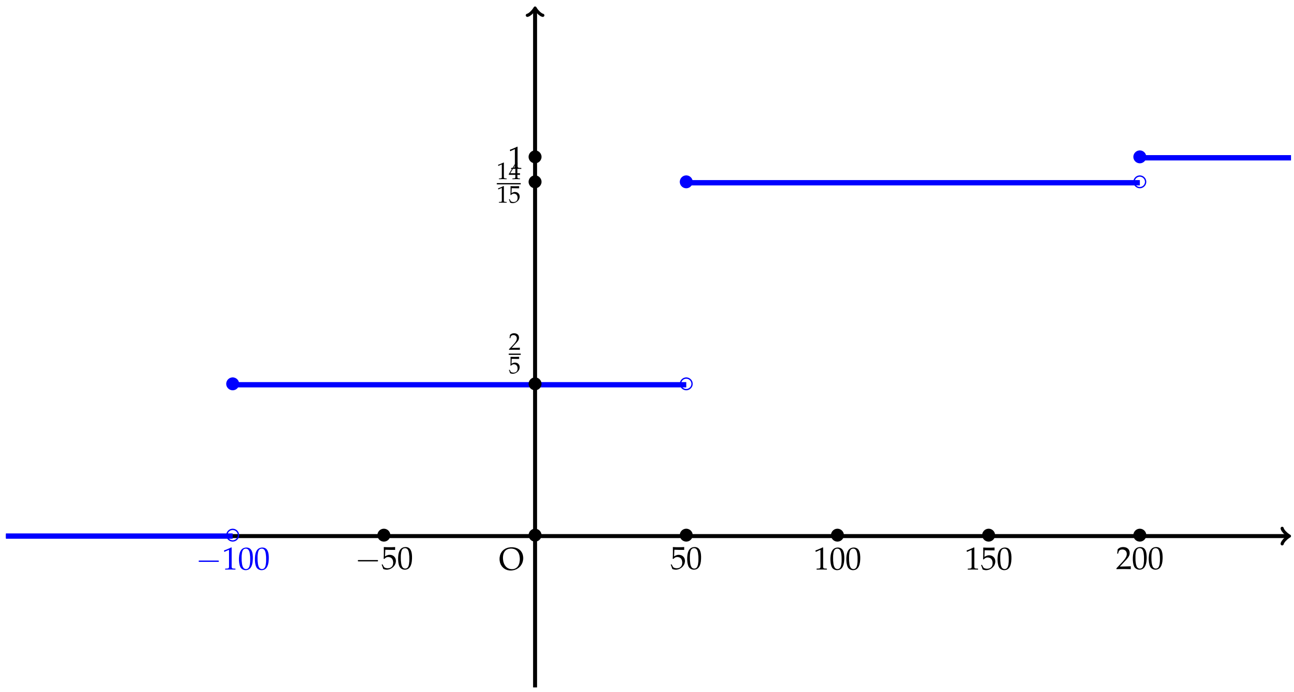
On obtient :

- $\forall x \in \left]-\infty\,;\,-100\right[,\ F(x) = 0$
- $\forall x \in \left[-100\,;\,50\right[,\ F(x) = \dfrac{2}{5}$
- $\forall x \in \left[50\,;\,200\right[,\ F(x) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{8}{15} = \dfrac{14}{15}$
- $\forall x \in \left[200\,;\,+\infty\right[,\ F(x) = \dfrac{14}{15} + \dfrac{1}{15} = 1$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -100 \\ \dfrac{2}{5} & \text{si } -100 \leq x < 50 \\ \dfrac{14}{15} & \text{si } 50 \leq x < 200 \\ 1 & \text{si } x \geq 200 \end{cases}$$

Dès lors, nous pouvons représenter graphiquement l'application F :



3.3 Cas pratiques

3.3.1 Exercice 1 :

Énoncé

Une urne contient quatre boules roses, trois boules vertes et deux boules jaunes indiscernables au toucher. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1 Calculer la probabilité de chacun des événement suivants :

a) A : « Obtenir les trois couleurs »

b) B : « Obtenir les deux boules jaunes »

c) C : « Obtenir au moins une boule jaune »

2) Soit X la variable aléatoire qui à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules jaunes tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

c) Déterminer la fonction de répartition de X.

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
Vu que les boules indiscernables au toucher, on munit l'univers Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir un espace probabilisé fini $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$.
Une éventualité de Ω est une 3-combinaison de l'ensemble des 9 boules de l'urne.
Donc :

$$\text{Card}(\Omega) = C_9^3 = 84$$

1 a) Calculer la probabilité de chacun des événement suivants A :
On a que :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Or :

$$\text{Card}(A) = C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 24$$

On obtient que :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{24}{84} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{P(A) = \frac{2}{7}}$$

b) Calculer la probabilité de chacun des événement suivants B :
On a que :

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Or :

$$\text{Card}(B) = C_2^2 \times C_7^1 = 7$$

On obtient que :

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{7}{84} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{12}}$$

c) Calculer la probabilité de chacun des événement suivants C :
On a que :

$$P(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Or :

$$\text{Card}(C) = C_2^0 \times C_7^3 + C_2^2 \times C_7^1 = 42$$

On obtient que :

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{42}{84} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{P(C) = \frac{1}{2}}$$

2) Soit X la variable aléatoire qui à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules jaunes tirées.

a) Déterminons la loi de probabilité de X :
Vu qu'on peut tirer 0; 1 ou 2 boules, donc on a :

$$X(\Omega) = \{0\,;\,1\,;\,2\}$$

Calculons les différentes probabilités :

- On a :

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{C_2^0 \times C_7^3}{C_9^3} \\ &= \frac{35}{84} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

- On a ensuite :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{C_2^1 \times C_7^2}{C_9^3} \\ &= \frac{42}{84} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- On a enfin :

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \frac{C_2^2 \times C_7^1}{C_9^3} \\ &= \frac{7}{84} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

D'où la loi de probabilité suivante :

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

b) Calculons l'espérance mathématique et l'écart-type de X :

- On a que :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(X=x_i)$$

Donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{E(X) = \frac{2}{3}}$$

- On a que :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Or :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 0^2 \times \frac{5}{12} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{12} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{5}{6} - \frac{4}{9} \\ &= \frac{7}{18} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\frac{7}{18}}}$$

c) Déterminons la fonction de répartition de X :
On a que :

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0\,;1] \\ & x & \longmapsto & P(X \leq x) \end{array}$$

Calculons $F(x)$ pour tout élément x de $\mathbb{R}$:

- Pour tout $x < 0$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Pour tout $0 \leq x < 1$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(X = 0) \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

- Pour tout $1 \leq x < 2$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \frac{5}{12} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{11}{12} \end{aligned}$$

- Pour tout $x \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{5}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \text{ on a : } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{5}{12} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{11}{12} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}}$$

3.3.2 Exercice 2 :

Énoncé

Un paquet de dix cartes à jouer comprend cinq as, trois rois et deux dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi rapporte 2 points et celui d'une dame coûte un point.
Du paquet on extrait simultanément et au hasard deux cartes et on désigne par X la variable aléatoire qui, à tout tirage, associe le total des points marqués.

1) Quelles sont les valeurs prises par X ?
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
Vu que les cartes sont tirées hasard, donc tous les événements élémentaires sont équiprobables. On munit alors l'univers Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir un espace probabilisé fini $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$.
Une éventualité de Ω est une 2-combinaison de l'ensemble des 10 cartes du paquet.
Donc :

$$\text{Card}(\Omega) = C_{10}^{2} = 45$$

Soit X la variable aléatoire qui, à tout tirage, associe le total des points marqués.

1) Trouvons les valeurs prises par X :
   - On peut tirer 2 as et obtenir 10 points.
   - On peut tirer 2 rois et obtenir 4 points.
   - On peut tirer 2 dames et obtenir -2 points.
   - On peut tirer un as et un rois et obtenir 7 points.
   - On peut tirer un as et une dame et obtenir 4 points.
   - On peut tirer un rois et une dame et obtenir 1 points.

   Donc :

$$\boxed{X(\Omega) = \{-2\,;\,1\,;\,4\,;\,7\,;\,10\}}$$

2) Déterminons la loi de probabilité de X :

- On a :

$$\begin{aligned} P(X=-2) &= \frac{C_2^2}{C_{10}^2} \\ &= \frac{1}{45} \end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} \\ &= \frac{6}{45} \\ &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned} P(X=4) &= \frac{C_2^2 + C_5^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} \\ &= \frac{11}{45} \end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned} P(X=7) &= \frac{C_5^1 \times C_3^1}{C_{10}^2} \\ &= \frac{15}{45} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned} P(X=10) &= \frac{C_5^2}{C_{10}^2} \\ &= \frac{10}{45} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

D'où la loi de probabilité suivante :

x	-2	1	4	7	10
$P(X=x)$	$\frac{1}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{11}{45}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$

3) Calculons l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X :

- On a que :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= -2 \times \frac{1}{45} + 1 \times \frac{2}{15} + 4 \times \frac{11}{45} + 7 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{2}{9} \\ &= \frac{253}{45} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{E(X) = \frac{253}{45}}$$

- On a que :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} V(X) &= (-2)^2 \times \frac{1}{45} + 1^2 \times \frac{2}{15} + 4^2 \times \frac{11}{45} + 7^2 \times \frac{1}{3} + 10^2 \times \frac{2}{9} - \left(\frac{253}{45}\right)^2 \\ &= \frac{22436}{2025} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{V(X) = \frac{22436}{2025}}$$

- On a que :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Ainsi :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\frac{22436}{2025}}}$$

3.3.3 Exercice 3 :

Énoncé

Un jeu consiste à lancer 2 dés cubiques parfaitement équilibrés.

1) Un joueur A mise 100F sur le numéro 6. Si le numéro 6 est obtenu sur chacun des dés, le joueur reçoit 500F; s'il est obtenu sur un seul dé, le joueur reçoit 250F; si le numéro 6 ne sort sur aucun des dés le joueur perd sa mise.
   a) Quelles sont les probabilités des événements indiqués ci-dessus ?
   b) On désigne par X_A le gain du joueur A (somme reçue diminuée de la mise). Quelle est l'espérance mathématique de X_A ?
2) Un joueur B s'engage à jouer dans les mêmes conditions que le joueur A. Il obtient en plus la possibilité de tenter une deuxième fois sa chance en cas de perte la première fois. La deuxième fois il mise de nouveau 100F. Si le numéro 6 est obtenu sur les 2 dés il récupère la deuxième mise plus 500F et si le numéro 6 est obtenu sur un seul dé il récupère 250F plus la moitié de la mise. Dans les autres cas il perd également sa deuxième mise.
   Soit X_B le gain du joueur B.
   a) Donner la loi de probabilité de X_B.
   b) Calculer l'espérance mathématique de X_B.

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
Vu que les dés sont parfaitement équilibrés, donc tous les événements élémentaires sont équiprobables. On munit alors l'univers Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir un espace probabilisé fini $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$.
Une éventualité de Ω est un 2-uplet de l'ensemble des 6 numéro d'un dé.
Donc :

$$\text{Card}(\Omega) = 6^2 = 36$$

Représentons les éventualité de Ω à l'aide d'un tableau à double entrée :

	1	2	3	4	5	6
1	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	$(1;5)$	$(1;6)$
2	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;4)$	$(2;5)$	$(2;6)$
3	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$	$(3;4)$	$(3;5)$	$(3;6)$
4	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$	$(4;4)$	$(4;5)$	$(4;6)$
5	$(5;1)$	$(5;2)$	$(5;3)$	$(5;4)$	$(5;5)$	$(5;6)$
6	$(6;1)$	$(6;2)$	$(6;3)$	$(6;4)$	$(6;5)$	$(6;6)$

1) a) Calculer la probabilité de chacun des événements indiqués :

- Soit A l'événement : « obtenir 6 sur chacun des dés ».
  On a :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

  Ainsi :

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{36}}$$

- Soit B l'événement : « obtenir 6 sur un seul dé ».
  On a :

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{10}{36} \\ &= \frac{5}{18} \end{aligned}$$

  Ainsi :

$$\boxed{P(B) = \frac{5}{18}}$$

- Soit C l'événement : « ne pas obtenir 6 sur aucun des dés ».
  On a :

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{25}{36} \end{aligned}$$

  Ainsi :

$$\boxed{P(A) = \frac{25}{36}}$$

b) Soit X_A la variable aléatoire qui à chaque lancé associe le gain algébrique du joueur. Déterminons l'espérance mathématique de X_A :
- Valeurs prises par X_A :
  Le joueur peut obtenir le numéro 6 sur chacun des dés. Il recevra alors 500F et gagnera alors : 500F-100F=400F.
  Le joueur peut également obtenir le numéro 6 sur seul dé. Il recevra alors 250F et gagnera alors : 250F-100F=150F.

Le joueur peut encore ne pas obtenir le numéro 6 sur aucun des dés. Il perdra alors sa mise et gagnera alors : 0F-100F=-100F.
Donc :
$$X_A(\Omega) = \{-100\,;\,150\,;\,400\}$$

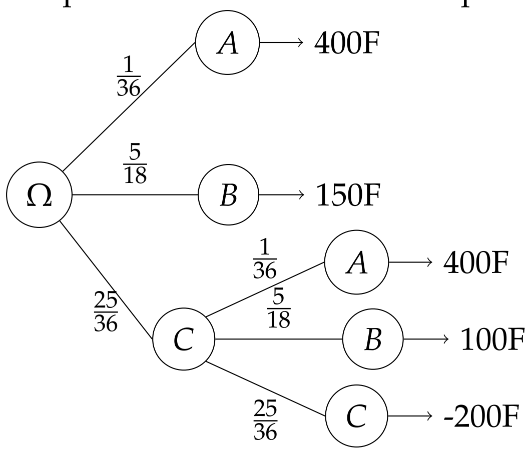
- Loi de probabilité de X_A :
  On a d'après la question précédente :

x	-100	150	400
$P(X_A = x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$

- Espérance mathématique de X_A :
  On a :
$$\begin{aligned} E(X_A) &= \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) \\ &= -100 \times \frac{25}{36} + 150 \times \frac{5}{18} + 400 \times \frac{1}{36} \\ &= -\frac{50}{3} \end{aligned}$$
  Ainsi :
$$\boxed{E(X_A) = -\frac{50}{3}}$$

2) a) Donnons la loi de probabilité de X_B :
- Valeurs prises par X_B :
  Si le joueur B obtient le numéro 6 sur chacun des dés au premier essai, alors il recevra 500F et gagnera alors : 500F-100F=400F.
  Si le joueur B obtient le numéro 6 sur seul dé, alors li recevra 250F et gagnera alors : 250F-100F=150F.
  Si joueur B n'obtient pas le numéro 6 sur aucun des dés, il mise de nouveau 100F, et tentera un deuxième essai lors duquel : il peut obtenir le numéro 6 sur chacun des dés, il recevra 600F et et gagnera alors : 600F-200F=400F ;
  ou encore il peut obtenir le numéro 6 sur seul des dés, il recevra 300F et et gagnera alors : 300F-200F=100F ;
  ou enfin il peut ne obtenir pas le numéro 6 sur aucun des dés, il recevra 0F et et gagnera alors : 0F-200F=-200F ;
  Donc :
$$X_B(\Omega) = \{-200\,;\,100\,;\,150\,;\,400\}$$
- Loi de probabilité de X_B :
  Vu que le joueur B a une possibilité de faire un deuxième essai,

alors on est dans une situation de conditionnement. Réalisons donc un arbre pondéré pour calculer les différentes probabilités :



On a d'après l'arbre pondéré :

$$\begin{aligned} P(X_B = -200) &= \frac{25}{36} \times \frac{25}{36} \\ &= \frac{625}{1296} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_B = 100) &= \frac{25}{36} \times \frac{5}{18} \\ &= \frac{125}{648} \end{aligned}$$

$$P(X_B = 150) = \frac{5}{18}$$

$$\begin{aligned} P(X_B = 400) &= \frac{1}{36} + \frac{25}{36} \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{61}{1296} \end{aligned}$$

D'où la loi de probabilité suivante :

x	-200	100	150	400
$P(X_B = x)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{648}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{61}{1296}$

b) Calculons l'espérance mathématique de X_B :

On a :

$$\begin{aligned}
E(X_B) &= \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) \\
&= -200 \times \frac{625}{1296} + 100 \times \frac{125}{648} + 150 \times \frac{5}{18} + 400 \times \frac{61}{1296} \\
&= -\frac{21600}{1296} \\
&= -\frac{50}{3}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{E(X_B) = -\frac{50}{3}}$$

3.3.4 Exercice 4 :

Énoncé

On considère l'épreuve qui consiste à lancer un dé parfait à six faces, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et on note le chiffre de la face supérieure obtenue.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque chiffre associe le nombre de diviseurs (entiers naturels).

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de la variable X.
3) Déterminer la fonction de répartition, puis construire sa courbe représentative.

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
Vu que les cartes sont tirées hasard, donc tous les événements élémentaires sont équiprobables. On munit alors l'univers Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir un espace probabilisé fini $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$.
Une éventualité de Ω est un élément l'ensemble des 6 chiffres du dé.
Donc :

$$\Omega = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$$

Soit X la variable aléatoire qui à chaque chiffre associe le nombre de ses diviseurs positifs.

1) Déterminons la loi de probabilité de X :
   - Valeurs prises par X :
     On peut obtenir le chiffre 1 qui a un seul diviseur positif : 1 lui-même.
     On peut obtenir le chiffre 2 qui a deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.
     On peut obtenir le chiffre 3 qui a deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.
     On peut obtenir le chiffre 4 qui a trois diviseurs positifs : 1 ; 2 et lui-même.
     On peut obtenir le chiffre 5 qui a deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.
     On peut obtenir le chiffre 6 qui a quatre diviseurs positifs : 1 ; 2 ; 3 et lui-même.
     Donc :
     $$\boxed{X(\Omega) = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\}}$$
   - Loi de probabilité de X :
     On a :
     $$P(X=1) = \frac{1}{6}$$
     $$\begin{aligned} P(X=2) &= \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$
     $$P(X=3) = \frac{1}{6}$$
     $$P(X=4) = \frac{1}{6}$$
     D'où la loi de probabilité suivante :

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2) Calculons l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de la variable X :

- On a que :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i)$$

Donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{E(X) = \frac{7}{3}}$$

- On a que :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} V(X) &= 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 \\ &= \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{V(X) = \frac{8}{9}}$$

- On a que :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Ainsi :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

3) Déterminons la fonction de répartition, puis construire sa courbe représentative :
   - Déterminons la fonction de répartition :
   On a que :
   $$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0\,;1] \\ & x & \longmapsto & P(X \leq x) \end{array}$$
   Calculons $F(x)$ pour tout élément x de $\mathbb{R}$:

— Pour tout $x < 1$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

— Pour tout $1 \leq x < 2$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(X = 1) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

— Pour tout $2 \leq x < 3$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

— Pour tout $3 \leq x < 4$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

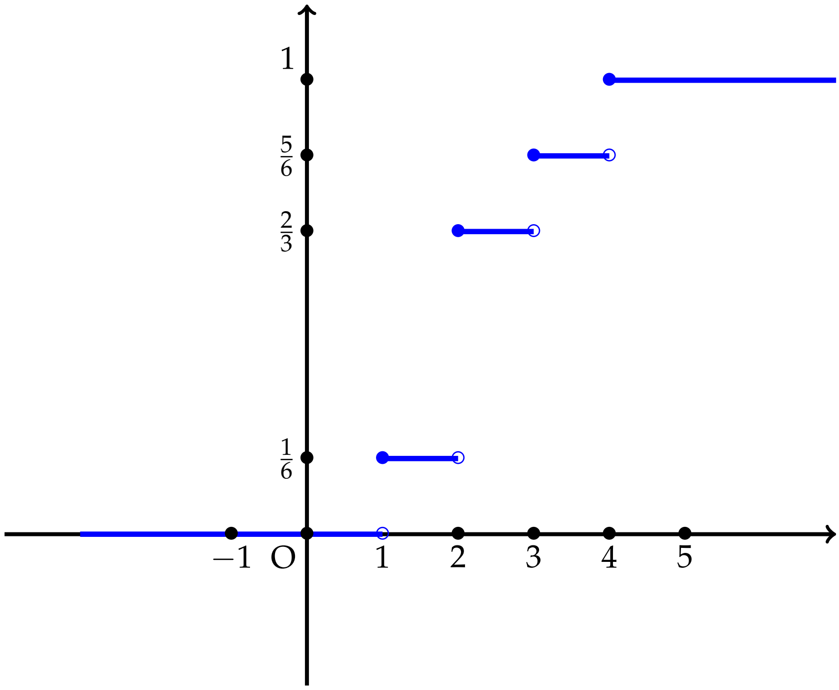
— Pour tout $x \geq 4$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \text{on a : } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{5}{6} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- Représentons graphiquement la fonction de répartition :
  Du point précédent, on obtient la représentons graphique suivante :



Chapitre 4

Probabilités (IV) : Loi binomiale

***

Tu connaitras la vérité et la vérité t'affranchira
La Bible

Choisis toujours le chemin qui semble le meilleur même s'il parait plus difficile : L'habitude le rendra agréable.

Pythagore

Sommaire

Historique

L'histoire de la **loi binomiale** remonte à l'année 1713 avec **Jacob Bernoulli**, un mathématicien suisse.

Jacob Bernoulli étudie les processus de tirage aléatoire, notamment les jeux de pile ou face. Il réalise des expériences et observe les résultats obtenus. Il formule ensuite des principes mathématiques pour décrire ces résultats.

Il introduit la loi binomiale formellement dans son ouvrage ***Ars Conjectandi***. Lors d'une même expérience, indépendante, répétée plusieurs fois qui admet deux issues (le succès ou l'échec), Bernoulli utilise la loi binomiale pour modéliser le nombre de succès.

Aujourd'hui, la loi binomiale est un des concepts fondamentaux de la théorie des probabilités !

4.1 Épreuve de Bernoulli

4.1.1 Définition

Définition

On appelle **épreuve de Bernoulli**, toute expérience aléatoire à deux éventualités.
L'une des éventualités est appelée succès et l'autre échec.

4.1.2 Exemples

1) Dans l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie, il y a deux et seulement deux éventualités : « PILE » ou « FACE ».
   Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli.

2) Dans l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 :
   - Si on s'intéresse au nombre porté par la face supérieure du dé, il y a six éventualités : « 1 » ; « 2 » ; « 3 » ; « 4 » ; « 5 » ou « 6 ».
     Ce n'est donc pas une épreuve de Bernoulli.
   - Mais si on s'intéresse, par exemple, à la parité du nombre porté par la face supérieure du dé, il y a deux éventualités : « PAIR » ou « IMPAIR ».
     C'est donc une épreuve de Bernoulli.

3) Dans l'expérience aléatoire qui consiste à tirer une boule d'une urne qui contient des boules rouges, des boules vertes et des boules jaunes un dé :
   - Si on s'intéresse à la couleur de la boule tirée, il y a trois éventualités : « ROUGE » ; « VERTE » ou « JAUNE ».
     Ce n'est donc pas une épreuve de Bernoulli.
   - Mais si on s'intéresse, par exemple, à l'obtention de la couleur rouge, il y a deux éventualités : « ROUGE » ou « NON ROUGE ».
     C'est donc une épreuve de Bernoulli.

4.1.3 Propriété

Propriété

Soit $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$ un espace probabilisé fini et A un événement de Ω tel que : $0 < P(A) < 1$.
Si dans toute l'expérience, on ne s'intéresse qu'à la réalisation de l'événement A, alors il n'y a que deux éventualités : A ou $\overline{A}$.

4.2 Schéma de Bernoulli

4.2.1 Définition

Définition

On appelle **schéma de Bernoulli**, toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli, où n est un entier naturel tel que $n \geq 2$.

4.2.2 Exemples

1) L'expérience aléatoire qui consiste à lancer sept fois de suite, de façon indépendante, une pièce de monnaie, est un schéma de Bernoulli.

2) L'expérience aléatoire qui consiste à lancer quatre fois de suite un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et à ne s'intéresser qu'à l'obtention d'un numéro pair, est un schéma de Bernoulli.

3) L'expérience aléatoire qui consiste à tirer dix fois de suite une boule d'une urne qui contient des boules rouges, des boules vertes et des boules jaunes

un dé, en remettant dans l'urne la boule tirée, et à ne s'intéresser qu'à l'obtention d'une boule rouge à chaque fois, est un schéma de Bernoulli.

4.2.3 Propriété

Propriété

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini, où est l'univers associé à une épreuve de Bernoulli, p la probabilité du succès.
On effectue n fois de suite, et de façon indépendante, cette épreuve.
Si k est un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$, alors la probabilité que le succès se réalise k au cours de ces n épreuves est :

$$p_k = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

En effet :

- Obtenir k au cours des n épreuves signifie : « Obtenir k succès et $n-k$ échecs ».
  — Obtenir k succès donne : p^k.
  — Obtenir $n-k$ échecs donne : $(1-p)^{n-k}$.
- Comme les n épreuves sont réalisées les unes à la suite des autres, alors il faut tenir compte de l'ordre des places des k succès sur les n places disponibles. Cela donne : C_n^k.

D'où, d'après le principe multiplicatif : $p_k = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

4.3 Loi binomiale

4.3.1 Définition

Définition

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini, où Ω est l'univers associé à une épreuve de Bernoulli, p la probabilité du succès.
On effectue n fois de suite, et de façon indépendante, cette épreuve.
Si X est la variable aléatoire égale au nombres de succès obtenus au cours des n épreuves, alors :

- la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** ;
- on dit alors que X suit une **loi binomiale de paramètre n et p**.

4.3.2 Loi de probabilité

Définition

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire sur Ω suivant une loi binomiale de paramètre n et p.

- On a :
$$X(\Omega) = \{0\,;1\,;\cdots\,;n\}$$
- Pour tout élément k de $\{0\,;1\,;\cdots\,;n\}$, on a :
$$P(X=k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Espérance mathématique et Variance

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire sur Ω suivant une loi binomiale de paramètre n et p.

1) On a que :
$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \times C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Soit b un nombre réel donné. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+b)^n$.
D'après la formule du binôme de de Newton, on peut écrire que :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \times x^k \times b^{n-k}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\;:\quad f'(x) &= \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k \times x^k \times b^{n-k}\right]' \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \times C_n^k \times x^{k-1} \times b^{n-k}\end{aligned}$$

En multipliant par x, on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} : \quad xf'(x) &= x\sum_{k=1}^{n} k \times C_n^k \times x^{k-1} \times b^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \times C_n^k \times x^k \times b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \times C_n^k \times x^k \times b^{n-k}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $x = a$ on obtient :

$$af'(a) = \sum_{k=0}^{n} k \times C_n^k \times a^k \times b^{n-k} \quad (\alpha)$$

Mais, comme $f(x) = (x+b)^n$, alors on a aussi :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} : \quad f'(x) &= [(x+b)^n]' \\
&= n(x+b)^{n-1}
\end{aligned}$$

En multipliant par x, on obtient que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad xf'(x) = nx(x+b)^{n-1}$$

Ainsi, pour $x = a$ on obtient aussi que :

$$af'(a) = na(a+b)^{n-1} \quad (\beta)$$

Avec (α) et (β), on déduit que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k \times C_n^k \times a^k \times b^{n-k} = na(a+b)^{n-1} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}}$$

Maintenant, en choisissant $a = p$ et $b = 1 - p$, on déduit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k \times C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k} &= np(p+1-p)^{n-1} \\
&= np
\end{aligned}$$

En définitive, on a que :

$$E(X) = np$$

2) On a que :

$$V(X) \quad = \quad E(X^2) - [E(X)]^2$$

avec : $E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \times C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ et : $E(X) = np$.
Soit b un nombre réel donné, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+b)^n$.
D'après ce qui précède, on a que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \times C_n^k \times x^{k-1} \times b^{n-k}$$

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} : \quad f''(x) &= \left[\sum_{k=0}^{n} k \times C_n^k \times x^{k-1} \times b^{n-k}\right]' \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \times C_n^k \times x^{k-2} \times b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \times C_n^k \times x^{k-2} \times b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k^2-k) \times C_n^k \times x^{k-2} \times b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 \times C_n^k \times x^{k-2} \times b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k \times C_n^k \times x^{k-2} \times b^{n-k}
\end{aligned}$$

En multipliant par x^2, on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} : \quad x^2 f''(x) &= x^2 \sum_{k=0}^{n} k^2 \times C_n^k \times x^{k-2} \times b^{n-k} - x^2 \sum_{k=0}^{n} k \times C_n^k \times x^{k-2} \times b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 \times C_n^k \times x^{k} \times b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k \times C_n^k \times x^{k} \times b^{n-k}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $x = a$ on obtient :

$$a^2 f''(a) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \times C_n^k \times a^k \times b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k \times C_n^k \times a^k \times b^{n-k} \quad (\gamma)$$

Mais, comme $f(x) = (x+b)^n$, alors on a aussi successivement :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} : \quad f'(x) &= [(x+b)^n]' \\
&= n(x+b)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} : \quad f''(x) &= \Big[n(x+b)^{n-1}\Big]' \\ &= n(n-1)(x+b)^{n-2}\end{aligned}$$

En multipliant par x^2, on obtient que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad x^2 f''(x) = n(n-1)x^2(x+b)^{n-2}$$

Ainsi, pour $x = a$ on obtient aussi que :

$$a^2 f''(a) = n(n-1)a^2(a+b)^{n-2} \quad (\delta)$$

Avec (γ) et (δ), on déduit que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 \times C_n^k \times a^k \times b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k \times C_n^k \times a^k \times b^{n-k} = n(n-1)a^2(a+b)^{n-2} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}}$$

Maintenant, en choisissant $a = p$ et $b = 1-p$, on déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \times C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k \times C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2}$$

C'est-à-dire :

$$E(X^2) - E(X) = n(n-1)p^2$$

D'où l'on tire que :

$$\begin{aligned}E(X^2) &= n(n-1)p^2 + E(X) \\ &= n(n-1)p^2 + np\end{aligned}$$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= [n(n-1)p^2 + np] - (np)^2 \\ &= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \\ &= np - np^2 \\ &= np(1-p)\end{aligned}$$

D'où les propriétés suivantes :

Propriétés

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.
On a :

1) $E(X) = np$
2) $V(X) = np(1-p)$

4.4 Cas pratiques

4.4.1 Exercice 1 :

Énoncé

Dans un restaurant 30% des clients choisissent un plat P. Six clients entre dans le restaurant. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de clients parmi les six qui choisissent le plat P, sachant que les choix des clients sont indépendants.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable X.
3) On considère l'événement A : « Au moins une personne choisit le plat P » Calculer $P(A)$.
4) On suppose que n clients ($n \geq 2$) entre dans le restaurant, les choix des clients étant toujours indépendants.
   a) Calculer en fonction de n la probabilité p_n de l'événement A_n : « Au moins une personne choisit le plat P »
   b) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que $p_n \geq 0,99$.

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
Vu que les choix des clients sont indépendants, donc tous les événements élémentaires sont équiprobables. On munit alors l'univers Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir un espace probabilisé fini $(\Omega\,;\mathcal{P}(\Omega)\,;P)$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de clients parmi les six qui choisissent le plat P.

1) Déterminons la loi de probabilité de X :
Vu que 30% des clients choisissent le plat P, alors la probabilité pour un client de choisir le plat P est $p = 0,3$.
Vu que la variable X compte le nombre de clients parmi les six qui choisissent le plat P et que les choix des clients sont indépendants, donc la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,3$.
D'où :

$$\boxed{\forall k \in \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}\,,\ P(X=k) = C_6^k \times \left(\frac{3}{10}\right)^k \times \left(\frac{7}{10}\right)^{6-k}}$$

2) Calculons l'espérance mathématique et la variance de X :
Puisque X suit la loi binomiale de paramètre 6 et $0,3$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ &= 6 \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{9}{5} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{E(X) = \frac{9}{5}}$$

3) Calculer $P(A)$:
Si A est l'événement : « Au moins une personne choisit le plat P » alors $\overline{A}$ est l'événement : « Aucune personne choisit le plat P »
Donc :

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= P(X=0) \\ &= C_6^0 \times \left(\frac{3}{10}\right)^0 \times \left(\frac{7}{10}\right)^6 \\ &= \left(\frac{7}{10}\right)^6 \end{aligned}$$

De $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, on déduit :

$$\boxed{P(A) = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^6}$$

4) a) Calculons en fonction de n la probabilité p_n de A_n :
Dans le cas de n clients, la variable X suit une loi binomiale de paramètre n et $p = 0,3$.
On a :

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= P(X = 0) \\ &= C_n^0 \times \left(\frac{3}{10}\right)^0 \times \left(\frac{7}{10}\right)^n \\ &= \left(\frac{7}{10}\right)^n \end{aligned}$$

De $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, on déduit :

$$\boxed{p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n}$$

b) Déterminons le plus petit entier naturel n_0 tel que $p_n \geq 0,99$:
On a :

$$\begin{aligned} p_n \geq 0,99 &\iff 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n \geq 0,99 \\ &\iff \left(\frac{7}{10}\right)^n \leq 0,01 \\ &\iff n \ln\left(\frac{7}{10}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{100}\right) \\ &\iff n\left(\ln 7 - \ln 10\right) \leq -\ln 100 \\ &\iff n \geq \frac{-2\ln 10}{\ln 7 - \ln 10} \quad (\text{car } \ln 7 - \ln 10 < 0) \end{aligned}$$

Mais :

$$\frac{-2\ln 10}{\ln 7 - \ln 10} \simeq 12,91$$

Donc

$$n \geq \frac{-2\ln 10}{\ln 7 - \ln 10} \iff n \geq 13$$

Par conséquent, le plus petit entier naturel n_0 tel que $p_n \geq 0,99$ est :

$$\boxed{n_0 = 13}$$

4.4.2 Exercice 2 :

Énoncé

Une société d'assurance répartit ses clients en trois classes :

C_1 **:** Les bons risques

C_2 **:** Les risques moyens

C_3 **:** Les mauvais risques

Les effectifs de ces trois classes représentent 15% des clients pour la classe C_1, 60% des clients pour la classe C_2 et 25% des clients pour la classe C_3.
Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours d'une année par un client de l'une de ces 3 classes sont respectivement : $0,1$; $0,2$ et $0,4$.

1) Déterminer la probabilité qu'un client de cette société ait un accident au cours d'une année.
2) Sachant qu'un client a eu un accident au cours d'une année, déterminer la probabilité qu'il soit de la classe C_1.
3) Au cours d'une année, cette société a reçu la déclaration de 10 accidents. On désigne par Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de déclarations provenant de la classe C_1.
   a) Quelle est la loi de probabilité de Y.
   b) Déterminer le nombre moyen de déclaration provenant de la classe C_1 au cours de cette année.

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
En considérant que ce qui arrive à un client au cours d'une année est indépendant de ce qui arrive aux clients. On munit alors l'univers Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir un espace probabilisé fini $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$.
On considère les événements suivants :

- C_1 : « le client appartient à la classe C_1 »
  Comme l'effectif de la classe C_1 représente 15% de l'effectif total, donc la probabilité qu'un client choisi soit de la classe C_1 est :
  $$P(C_1) = 0,15$$
- C_2 : « le client appartient à la classe C_2 » Comme l'effectif de la classe C_2 représente 60% de l'effectif total, donc la probabilité qu'un client choisi soit de la classe C_2 est :
  $$P(C_2) = 0,6$$

- C_3 : « le client appartient à la classe C_3 » Comme l'effectif de la classe C_3 représente 25% de l'effectif total, donc la probabilité qu'un client choisi soit de la classe C_3 est :
$$P(C_3) = 0,25$$
- A : « le client a eu un accident au cours de l'année »
  — Vu que la probabilité d'avoir un accident au cours d'une année par un client de la classe C_1 est $0,1$, donc :
$$P(A/C_1) = 0,1$$
  — Vu que la probabilité d'avoir un accident au cours d'une année par un client de la classe C_2 est $0,2$, donc :
$$P(A/C_2) = 0,2$$
  — Vu que la probabilité d'avoir un accident au cours d'une année par un client de la classe C_3 est $0,4$, donc :
$$P(A/C_3) = 0,4$$

1) Déterminons la probabilité qu'un client de cette société ait un accident au cours d'une année :
Les événements C_1, C_2 et C_3 forment une partition de Ω et sont tous de probabilité non nulle. D'après la formule des probabilités totales, on a :
$$\begin{aligned} P(A) &= P(C_1) \times P(A/C_1) + P(C_2) \times P(A/C_2) + P(C_3) \times P(A/C_3) \\ &= 0,15 \times 0,1 + 0,6 \times 0,2 + 0,25 \times 0,4 \\ &= 0,235 \end{aligned}$$
Donc :
$$\boxed{P(A) = 0,235}$$

2) Sachant qu'un client a eu un accident au cours d'une année, déterminons la probabilité qu'il soit de la classe C_1 :
On a que :
$$P(A) \times P(C_1/A) = P(C_1) \times P(A/C_1)$$
D'où l'on tire :
$$\begin{aligned} P(C_1/A) &= \frac{P(C_1) \times P(A/C_1)}{P(A)} \\ &= \frac{0,15 \times 0,1}{0,235} \\ &= \frac{3}{47} \end{aligned}$$
Ainsi :

$$\boxed{P(C_1/A) = \frac{3}{47}}$$

3) a) Déterminons la loi de probabilité de Y :
Puisque Y compte le nombre de déclarations provenant de la classe C_1, donc la variable Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{47}$.

b) Déterminons le nombre moyen de déclarations provenant de la classe C_1 au cours de cette année :
Puisque Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{47}$, donc on a :

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ &= 10 \times \frac{3}{47} \\ &= \frac{30}{47} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{le nombre moyen de déclarations provenant de la classe } C_1 \text{ au cours de l'année considérée est : } \frac{30}{47}.}$$

4.4.3 Exercice 3 : BAC C, Burkina Faso

Énoncé

Une roue de loterie est composé de six secteurs identiques :
- trois secteurs sont peints en blanc,
- deux secteurs sont peints en vert,
- un secteur est peint en rouge.

On fait tourner la roue devant un repère fixe. Chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant le repère. Le principe du jeu est le suivant : le joueur fait une mise de 1000F (il paie 1000F) et il fait tourner la roue :
- si le secteur repéré est rouge, il gagne 2000F ;
- si le secteur repéré est vert, il perd sa mise ;
- si le secteur repéré est blanc, il relance la roue, et dans ce second cas :
  — si le secteur repéré est rouge, il gagne 3000F ;
  — si le secteur repéré est vert, il perd sa mise ;

— si le secteur repéré est blanc, il est remboursé et le jeu s'arrête.

1) a) Quelle est la probabilité de gagner au premier tour ?

   b) Quelle est la probabilité de perdre au second tour ?

   c) Quelle est la probabilité d'être uniquement remboursé ?

2) Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

   a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

   b Quelle est la loi de probabilité de X ?

3) a) Quelle est la probabilité d'avoir un gain strictement positif à l'issue d'un jeu ?

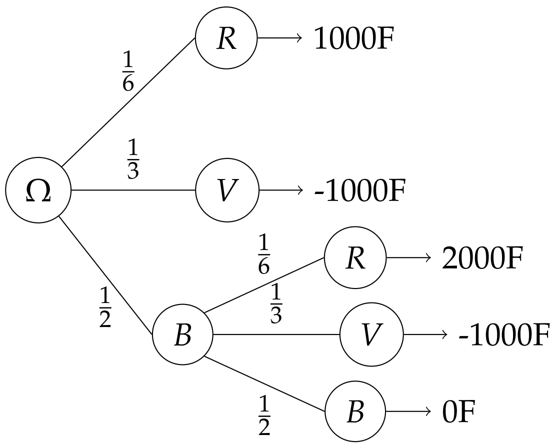
   b) Un joueur joue cinq fois de suite. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un gain strictement positif à l'issue de ces cinq jeux ?

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
Vu que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant le repère, donc on munit l'univers Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir un espace probabilisé fini $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$.
On considère les événements suivants :

- B : « le secteur arrêté devant le repère est blanc »
  Comme il y a 3 secteurs blancs sur 6 au total, donc la probabilité de l'événement B est :
$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
- V : « le secteur arrêté devant le repère est vert »
  Comme il y a 2 secteurs verts sur 6 au total, donc la probabilité de l'événement V est :
$$P(V) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
- R : « le secteur arrêté devant le repère est rouge »
  Comme il y a un secteur rouge sur 6 au total, donc la probabilité de l'événement R est :
$$P(R) = \frac{1}{6}$$

Réalisons un arbre pondéré pour calculer les probabilités :



1) a) Calculons la probabilité de gagner au premier tour :
Soit G_1 l'événement : « gagner au premier tour »
Pour gagner au premier tour, le secteur arrêté devant le repère doit être rouge.
D'où :

$$\boxed{P(G_1) = \frac{1}{6}}$$

b) Calculons la probabilité de perdre au second tour :
Soit P_2 l'événement : « perdre au second tour »
Pour perdre second tour, il faut que le secteur arrêté devant le repère soit blanc au premier tour puis vert au second tour.
Donc :

$$\begin{aligned} P(P_2) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{P(P_2) = \frac{1}{6}}$$

c) Calculons la probabilité d'être uniquement remboursé :
Soit R l'événement : « être uniquement remboursé »
Pour être uniquement remboursé, il faut que le secteur arrêté devant le repère soit blanc au premier tour et encore blanc au second tour.

Donc :

$$\begin{aligned} P(R) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{P(R) = \frac{1}{4}}$$

2) a) Donnons les valeurs prises par X :
On a :

$$X(\Omega) = \{-1000\,;\,0\,;\,1000\,;\,2000\}$$

b Déterminons la loi de probabilité de X :
On a :

$$\begin{aligned} P(X = -1000) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$P(X = 1000) = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2000) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

D'où la loi de probabilité suivante :

x	-1000	0	1000	2000
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

3) a) Calculons la probabilité d'avoir un gain strictement positif à l'issue d'un jeu :
On a :

$$\begin{aligned} P(X > 0) &= P(X = 1000) + P(X = 2000) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Donc :

$\boxed{\text{la probabilité d'avoir un gain strictement positif est : } \frac{1}{4}}$

b) Calculons la probabilité que le joueur ait au moins un gain strictement positif à l'issue de ces cinq jeux :
On reconnait ici une épreuve de Bernoulli avec $n = 5$ et $p = \frac{1}{4}$.
Pour tout k élément de $\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$, la probabilité d'obtenir k succès est :

$$p_k = C_5^k \times \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}$$

La probabilité d'obtenir 0 succès est :

$$\begin{aligned} p_0 &= C_5^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^5 \end{aligned}$$

Donc :

$\boxed{\text{la probabilité d'obtenir au moins un succès est : } 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5}$

4.4.4 Exercice 4 : BAC C, Burkina Faso

Énoncé

Une urne contient 3 boules blanches portant les nombres $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et 2 boules noires portant chacune le nombre $\frac{\pi}{6}$. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une expérience consiste à tirer simultanément de l'urne 2 boules. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur :

- $\cos(a+b)$ si les 2 boules sont de même couleur et portent les nombres a et b.
- $\sin(a+b)$ si les 2 boules sont de couleurs différentes et portent les nombres a et b.

1) a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable X.
   d) Calculer la probabilité de l'événement : $A = \left\{X \geq \dfrac{1}{2}\right\}$.
2) On réalise l'expérience 3 fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne dans l'urne. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de fois où l'événement A est réalisé. Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer son espérance mathématique $E(Y)$.

Proposition de solution

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
Vu que les boules sont indiscernables au toucher, donc on munit l'univers Ω de l'équiprobabilité P pour obtenir un espace probabilisé fini $(\Omega\,;\,\mathcal{P}(\Omega)\,;\,P)$.

1) a) Déterminons l'ensemble des valeurs prises par X :

- Si l'on tire deux boules blanches qui portent les nombres $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$, alors X prend la valeur :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

- Si l'on tire deux boules blanches qui portent les nombres $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$, alors X prend la valeur :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right) &= \cos(\pi)\\ &= -1\end{aligned}$$

- Si l'on tire deux boules noires qui portent les nombres $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$, alors X prend la valeur :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

- Si l'on tire une boule blanche et une boule noire qui portent respectivement les nombres $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, alors X prend la valeur :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

- Si l'on tire une boule blanche et une boule noire qui portent respectivement les nombres $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, alors X prend la valeur :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

D'où :

$$X(\Omega)=\left\{-1\,;\,-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right\}$$

b) Déterminons la loi de probabilité de X :
On a que :

$$\begin{aligned}P\left(X=-1\right) &= \frac{C_2^2}{C_5^2}\\ &= \frac{1}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\left(X=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{C_1^1\times C_2^1}{C_5^2}\\ &= \frac{2}{10}\\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P\left(X=-\frac{1}{2}\right) &= \frac{C_2^2}{C_5^2} \\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(X=0\right) &= \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_5^2} \\
&= \frac{4}{10} \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(X=\frac{1}{2}\right) &= \frac{C_2^2}{C_5^2} \\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

D'où la loi de probabilité suivante :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

c) Calculons l'espérance mathématique $E(X)$ de X :
On a que :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i P(X = x_i)$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
E(X) &= -1 \times \frac{1}{10} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \\
&= -\frac{1+\sqrt{3}}{10}
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$\boxed{E(X) = -\frac{1+\sqrt{3}}{10}}$$

d) Calculons la probabilité de A :
On a :

$$A = \left\{ X \geq \frac{1}{2} \right\}$$

Seule une valeur de X est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$ lui-même.
D'où :

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(X \geq \frac{1}{2}\right) \\ &= P\left(X = \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{10}}$$

2) Déterminons la loi de probabilité de Y et calculons son espérance mathématique $E(Y)$:

- Vu que l'épreuve est réalisée trois de suite de façon indépendante et la variable Y compte le nombre de réalisation de A, donc Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = P(A)$.
D'où :

$$\boxed{\forall k \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}\,,\; P(Y = k) = C_3^k \times \left(\frac{1}{10}\right)^k \times \left(\frac{9}{10}\right)^{3-k}}$$

- Comme Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{10}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} E(Y) &= np \\ &= 3 \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{E(Y) = \frac{3}{10}}$$