

A) Rappels utiles sur les applications linéaires

Prenons l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^3 est muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère l'endomorphisme f défini de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^3 .

Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ une autre base de \mathbb{R}^3 (le déterminant de la matrice associée à la famille de vecteur $\{u_1, u_2, u_3\}$ est non nul)

Soit A la forme matricielle de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit M la forme matricielle de f dans la base canonique $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.

- On a : la matrice A associée à f s'écrit sous forme :

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{matrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_2) = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_3) = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

- La matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ s'écrit sous forme :

$$P = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{matrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_2 = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_3 = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

- La matrice de passage de la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ et la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ s'écrit sous forme :

$$Q = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \theta_1 & \delta_1 \\ \lambda_2 & \theta_2 & \delta_2 \\ \lambda_3 & \theta_3 & \delta_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{matrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{e}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{e}_2 = \theta_1\mathbf{u}_1 + \theta_2\mathbf{u}_2 + \theta_3\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{e}_3 = \delta_1\mathbf{u}_1 + \delta_2\mathbf{u}_2 + \delta_3\mathbf{u}_3 \end{cases}$$

NB : Si P est inversible, alors $P^{-1} = Q$

- La matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est donnée par : $M = P^{-1}AP$
- $M^n = P^{-1}A^nP$; $A = PAP^{-1}$ et $A^n = PM^nP^{-1}$

B) Comment montrer qu'un endomorphisme est injectif ?

Un endomorphisme $f: E \rightarrow E$ est **injectif** si et seulement si l'une des propositions suivantes est vérifiée :

- $\ker(f) = \{0\}$ (noyau réduit au vecteur nul),
- la **matrice associée** est de **rang maximal** (égal à la dimension de l'espace),
- la **matrice est inversible** (déterminant de la matrice associée différent de zéro),

EXEMPLE

Prenons l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^3 est muni de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère l'endomorphisme f défini de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^3 par :

$$f(x, y, z) = (2x + y, x + y + z, y + 3z)$$

Montrer que f est injectif.

RÉSOLUTION

La forme matricielle de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{car} \begin{cases} f(e_1) = f(1,0,0) = (2 \times 1 + 0, 1 + 0 + 0, 0 + 3 \times 0) = (2,1,0) \\ f(e_2) = f(0,1,0) = (2 \times 0 + 1, 0 + 1 + 0, 1 + 3 \times 0) = (1,1,1) \\ f(e_3) = f(0,0,1) = (2 \times 0 + 0, 0 + 0 + 1, 0 + 3 \times 1) = (0,1,3) \end{cases}$$

1. Par la méthode du noyau (noyau réduit à zéro) :

$$\text{Le noyau } \ker(f) = \left\{ u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (0, 0, 0) \right\}$$

$$\text{On résout } f(x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ ou } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Résolvons le système.

$$f(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x + y + z = 0 \\ z = \frac{2}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x - 2x + \frac{2}{3}x = 0 \\ z = \frac{2}{3}x \end{cases}$$

$$\text{D'où } f(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = z = 0 \Leftrightarrow u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le noyau de f est donc réduit à $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Par conséquent f est **injectif**.

2. Par la méthode du rang de la matrice :

On vérifie que la matrice est de rang 3 (maximum pour \mathbb{R}^3) :

Effectuons un pivot de Gauss (ou calcul du déterminant) :

a) **Par le calcul du déterminant**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (6 + 0 + 0) - (0 + 2 + 3) = 1$$

$\det(A) \neq 0$, d'où la matrice associée à f est inversible, donc le rang(f) = 3, par conséquent f est **injectif**

b) **Par la méthode de pivot de Gauss**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad L'_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L'_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$\Leftrightarrow \text{rang}(A) = 3$ (Nombre de valeurs non nul sur la diagonale principale de la matrice triangulaire supérieure)

Par conséquent, f est **injectif**

3. Par la méthode par l'inversibilité de la matrice (déterminant non nul) :

Si la matrice associée A est inversible (ou f est un automorphisme), alors l'endomorphisme f est bijectif, donc f est injectif.

C) Comment montrer qu'un endomorphisme est surjectif ?

Un endomorphisme $f: E \rightarrow E$ (dans un espace vectoriel de dimension finie, $\dim(E) = n$) est **surjectif** si et seulement si l'une des propositions suivantes est vérifiée :

- $\text{Im}(f) = E$, c'est-à-dire que tout vecteur de E est une image de f ,
- la matrice associée est de rang maximal (égal à la dimension de E) ou ($\dim(\text{Im}f) = n$, donc $\text{rang} = n$),

NB : Dans un espace E de dimension finie, si $\text{rang}(f) = \dim E$, alors f est à la fois injectif, surjectif et bijectif

EXEMPLE

Prenons l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^3 est muni de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère l'endomorphisme f défini de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^3 par :

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, x + y + 2z)$$

Montrer que f est surjectif.

RÉSOLUTION

La forme matricielle de l'endomorphisme f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{car} \begin{cases} f(e_1) = f(1,0,0) = (1+0+0, 2 \times 0+0, 1+0+2 \times 0) = (1,0,1) \\ f(e_2) = f(0,1,0) = (0+1+0, 2 \times 1+0, 0+1+2 \times 0) = (1,2,1) \\ f(e_3) = f(0,0,1) = (0+0+1, 2 \times 0+1, 0+0+2 \times 1) = (1,1,2) \end{cases}$$

1. Par la **méthode de l'image (f couvre tout l'espace)** :

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On veut montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
 $f(x, y, z) = (a, b, c)$

$$f(x, y, z) = (a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ 2y + z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ 2y + z = b \\ z = c - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3a-b-c}{2} \\ y = \frac{b+a-c}{2} \\ z = c - a \end{cases}$$

D'où il existe toujours une solution $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
 $f(x, y, z) = (a, b, c)$, donc **f est surjectif**.

2. **Méthode du rang de la matrice :**

On vérifie que la matrice est de rang 3 (maximum pour \mathbb{R}^3) :

Effectuons un pivot de Gauss (ou calcul du déterminant) :

a) **Par le calcul du déterminant**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (4 + 1 + 0) - (2 + 1 + 0) = 2$$

$\det(A) \neq 0$, d'où la matrice associée à f est inversible, donc le rang(f) = 3, alors $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, par conséquent **f est bijectif**, donc **f est surjectif**

b) **Par la méthode de pivot de Gauss**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L'_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$\Leftrightarrow \text{rang}(A) = 3$ (Nombre de valeurs non nul sur la diagonale principale de la matrice triangulaire supérieure)

Alors $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, par conséquent **f est surjectif**

D) Comment déterminer le rang d'un endomorphisme ?

Soit $f: E \rightarrow E$ un **endomorphisme** (application linéaire de E dans lui-même, avec $\dim(E) < \infty$).

Le **rang de f** est :

$\text{rang}(f) = \dim(\text{Im}(f)) =$ Nombre de colonnes linéairement indépendantes de la matrice associée.

EXEMPLE

Prenons l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^3 est muni de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère l'endomorphisme f défini de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^3 par :

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$$

Déterminer le rang de f .

RÉSOLUTION

La forme matricielle de l'endomorphisme f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{car} \begin{cases} f(e_1) = f(1,0,0) = (1+0, 0+0, 1+0) = (1,0,1) \\ f(e_2) = f(0,1,0) = (0+1, 1+0, 0+0) = (1,1,0) \\ f(e_3) = f(0,0,1) = (0+0, 0+1, 0+1) = (0,1,1) \end{cases}$$

1. Par méthode du pivot de Gauss (réduction par lignes)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad L'_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L''_3 \leftarrow L'_3 + L_2$$

$\Leftrightarrow \text{rang}(A) = 3$ (Nombre de valeurs non nul sur la diagonale principale de la matrice triangulaire supérieure)

2. Par méthode des mineurs non nuls

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (1 + 1 + 0) - (0 + 0 + 0) = 2$$

$\det(A) \neq 0$, d'où la matrice associée à f est inversible, donc le rang(f) = 3,

NB : Si $\det(A) = 0$, alors si le déterminant d'un mineur d'ordre 2 de A est non nul alors rang(f) = 2

E) Comment montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel ?

EXEMPLE

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3

Soit $E = \{v \in \mathbb{R}^3 / f(v) = 2v\}$

Démontrons que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

RÉSOLUTION

Soient u et v deux vecteurs de E et $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\forall v \in E, v \in \mathbb{R}^3$, donc $E \subset \mathbb{R}^3$
- Soit $0_{\mathbb{R}^3} \in E$

$$f(0) = 2 \times 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$f(0) = 0 \in E$$

Donc E est non vide

- $u \in E \Rightarrow f(u) = 2u$
 $v \in E \Rightarrow f(v) = 2v$

D'où $f(u + v) = f(u) + f(v)$ car est une application linéaire

$$f(u + v) = 2u + 2v$$

$$f(u + v) = 2(u + v)$$

Donc $(u + v) \in E$

- Soit $u \in E$ et
 $f(\alpha u) = 2(\alpha u)$

$$f(\alpha u) = \alpha(2u)$$

$$f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

Donc $\alpha u \in E$

Par conséquent, E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3

F) Comment montrer qu'une matrice A est diagonalisable ?

Soit A une matrice carrée à coefficients réels.

- Soit $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ le polynôme caractéristique de A .
- λ valeur propre de la matrice A est solution de $\det(A - \lambda I) = 0$.
- $E_\lambda = \{\vec{V}, A\vec{V} = \lambda\vec{V}\}$ ou $E_\lambda = \{\vec{V}, (A - \lambda I)\vec{V} = \vec{0}\}$ est le sous-espace vectoriel associé à λ avec \vec{V} vecteur propre de λ .

Pour déterminer les vecteurs propres \vec{V} , il faut résoudre le système donné par $(A - \lambda I)\vec{V} = \vec{0}$.

La matrice A est diagonalisable si et seulement si l'une des 2 conditions suivantes sont vérifiées :

- $P_A(\lambda)$ est scindé et n'a que des racines simples ($P_A(\lambda)$ est totalement factorisé et ses racines sont des racines simples)
- Pour chaque valeur propre λ , la dimension de E_λ égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ dans $P_A(\lambda)$ (c'est-à-dire le nombre de vecteurs propres associés à chaque valeur propre λ est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ)