



Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la
Recherche Scientifique

PIGIER 
Côte d'Ivoire
L'Université des métiers



SUPPORT DE COURS

UE : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES 1

LPCF 1

Equipe Pédagogique

MATHÉMATIQUES

Propriété exclusive de PIGIER CI. Toute reproduction même partielle de ce document est strictement interdite.

Formation – Placement - Consultance

Tél : (225) 27 20 30 35 00 / Fax : (225) 27 20 22 67 64
E-mail : pigierci@aviso.ci / pigierci@pigierci.com
01 BP 1585 Abidjan République de Côte d'Ivoire
23, Boulevard de la République -Plateau

SARL au capital de 300.000.000 FCFA
RCCM N° CI-ABJ-1977-B-26872
CC : 7702508 P / Centre des Impôts : DGE
Régime d'Imposition : Réel Normal

SOMMAIRE

CHAPITRE 1 : LES INTÉRÊTS SIMPLES	2
CHAPITRE 2 : ESCOMPTE BANCAIRE COMMERCIAL	7
CHAPITRE 3 : EQUIVALENCE D'EFFETS À INTÉRÊTS SIMPLES	11
CHAPITRE 4 : LES INTÉRÊTS COMPOSÉS.....	15
CHAPITRE 5 : LES ANNUITÉS	20
CHAPITRE 6 : LES EMPRUNTS INDIVIS.....	25

CHAPITRE 1 : LES INTÉRÊTS SIMPLES

Objectifs pédagogiques :

- Définir convenablement un intérêt,
- Établir et exploiter la formule des intérêts simples,
- Calculer le taux moyen de plusieurs placements et le taux effectif d'un placement

I. GENERALITES

1. Approche

M. ATSE se propose de placer la somme de 4 800 000 F dans une banque. Il s'adresse à deux banques A et B. Au bout d'un an, il recevra :

- 4 968 000 F de la banque A
- 4 992 000 F de la banque B

Travail à faire :

- 1- Que représente la somme de 4 800 000 F ?
- 2- Que représentent respectivement 4 968 000 F et 4 992 000 F ?
- 3- Calculer l'intérêt à recevoir par M. ATSE dans les deux banques
- 4- Comment justifier la différence entre ces deux résultats ?

2. Définitions

- a- Un intérêt est **la somme que paie un débiteur à son créancier** en rémunération de l'usage de l'argent prêté ou placé. On peut également définir l'intérêt comme étant le revenu (ou loyer) de l'argent prêté ou placé appelé **capital**. L'intérêt est dit simple si le capital qui sert au calcul de l'intérêt reste inchangé pendant toute la durée du prêt.
- b- La valeur acquise est la somme obtenue lorsqu'on ajoute l'intérêt au capital

Remarque : Selon les clauses du contrat de placement (ou de l'emprunt) on distingue :

- Les intérêts post-comptés payés au moment du remboursement du prêt
- Les intérêts précomptés payés au moment de la réception du capital

II. CALCUL DE L'INTERET

1- Formule fondamentale

Le montant de l'intérêt est fonction de trois paramètres essentiels, à savoir le taux d'intérêt, le capital prêté et la durée du prêt.

Notation : soient

- C : le capital placé ou prêté,
- $t\%$: le taux d'intérêt,
- n : la durée de placement ou de prêt.
- I : le montant de l'intérêt commercial (1 an = 360 jours)
- I' : le montant de l'intérêt civil (1 an = 365 jours)

Durée n	I	I'
En années	$\frac{C t n}{100}$	$\frac{C t n}{100}$
En mois	$\frac{C t n}{1200}$	$\frac{C t n}{1200}$
En jours	$\frac{C t n}{36000}$	$\frac{C t n}{36500}$

N.B : D'une manière générale on utilise :

- l'année commerciale sauf précision du sujet
- le taux annuel lorsque l'unité de temps du taux n'est pas précisée

Illustration 1:

Un capital de 300 000 € est placé au taux d'intérêt de 12%. Calculons le montant de l'intérêt produit au bout de :

- 125 jours
- 4 mois
- 2 ans

Illustration 2 :

La différence entre l'intérêt commercial et l'intérêt civil d'un capital placé à 9,5% pendant 72 jours, est de 114 €. Calculer ce capital.

NB : On démontre et on admet que la différence entre l'intérêt commercial et l'intérêt civil est égal à $\frac{I}{73}$

2- Valeur acquise

Soit V la valeur acquise du capital placé C ; l'expression de V est alors :

$$V = C + I$$

III. DETERMINATION DU NOMBRE DE JOURS

Déterminer le nombre de jours entre les dates suivantes :

- Du 15 Mars au 25 Juin ;
- Du 12 Avril au 25 Septembre ;
- Du 18 Janvier au 22 Avril ;
- Du 10 Octobre au 18 Mars ;
- Du 28 Juin au 19 Novembre ;
- Du 3 Janvier au 16 Septembre.

IV. NOTION DE TAUX

1. Taux proportionnel

En intérêts simples, deux taux proportionnels produisent sur un même capital, des intérêts égaux au bout du même temps de placement.

Illustration 1 :

Compléter le tableau suivant sachant qu'il s'agit de taux proportionnels dans une même colonne.

Taux annuel	6%	0,09				
Taux semestriel				5,5%		0,06
Taux trimestriel					0,02	
Taux mensuel			1%			

Illustration 2 :

Un capital de 250 000 F est placé pendant 2ans et 6mois au taux de 6%. Calculer l'intérêt produit dans les cas suivants :

- 1- Taux semestriel 3%
- 2- Taux trimestriel 1,5%
- 3- Taux mensuel 0,5%

2. Taux moyen de placement (t_m)

On appelle taux moyen de plusieurs capitaux, le taux unique t_m auquel il faut placer ces capitaux pour obtenir le même intérêt total.

Capital	Durée de placement	Taux annuel de placement	Intérêt
250 000	3 ans	8%	
200 000	18 mois	6,5%	
120 000	75 jours	7,5%	
Total			

Capital	Durée de placement	Taux annuel de placement	Intérêt
250 000	3 ans	t_m	
200 000	18 mois	t_m	
120 000	75 jours	t_m	
Total			

3. Taux effectif d'une transaction

C'est le taux d'intérêt qui correspond au capital effectivement engagé.

Illustration 1 :

On place à intérêt précomptés la somme de 2 000 000 F au taux de 9% pendant 20 mois. Calculer le taux effectif de placement.

Illustration 2.:

Une personne place 1 200 000 F sur un compte spécial, rémunéré au taux de 6%. Il est convenu que le créancier perçoive au moment du retrait, non seulement les intérêts mais aussi une prime représentant 25% du montant de ces intérêts. Déterminons, pour une durée de 1 an 6 mois, le taux effectif de ce placement.

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

Exercice 1

Calculer l'intérêt produit par les capitaux suivants placés à intérêts simples :

- 600 000 F à 12%
 - a) Pendant 80 Jours ;
 - b) Pendant 7 mois ;
 - c) Pendant 4 ans.
- 1 500 000 F à 4,5% :
 - a) Pendant 9 mois et 15 jours ;
 - b) Pendant 2 ans 6 mois ;
 - c) Du 15 Janvier au 21 Septembre

Exercice 2

Calculer le capital qui placé à :

- a) 13 % pendant 3 ans produit un intérêt de 88 500 F.
- b) 14 % pendant 8 mois produit un intérêt de 330 624 F.
- c) 15 % pendant 90 jours produit un intérêt de 201 392 F.
- d) 16 % pendant du 16 Avril au 5 Juillet produit un intérêt de 31 488 F.

Exercice 3

1. Calculer le taux de placement des capitaux suivants :
 - a) 4 780 € placés 120 jours ont rapporté 215,10 € d'intérêts.
 - b) 4 500 € placés du 3 Avril au 11 Août ont rapporté 195 € d'intérêts
2. Calculer la durée de placement (exprimée en jours) des capitaux suivants :
 - a) 72 000 £ placés à 12 % ont rapporté 96 £ d'intérêts.
 - b) 14 500 £ placés à 8,5 % ont rapporté 246,50 £ d'intérêts.
3. Déterminer la date de retrait des capitaux suivants :
 - a) 8 600 £ placés le 7 Mai à 11,25 % ont rapporté 268,75 £ d'intérêts.
 - b) 12 000 £ placés le 5 Avril à 12,5 % ont rapporté 350 £ d'intérêts.
4. Déterminer la date de placement des capitaux suivants :
 - a) 7 500 \$ qui rapportent 150 \$ d'intérêts le 05 Janvier au taux de 9%
 - b) 432 000 f au taux de 5,75 % dont la valeur acquise le 30 Décembre est de 452 493 f.

Exercice 4

Une personne devant payer une dette le 15 Mars, ne l'a réglée que le 14 Mai suivant. Ce qui a augmenté son remboursement de 21 500 F d'intérêts calculés à 5%. Que devait-elle le 15 Mars ?

Exercice 5

Un capital de 12 000 \$ est divisé en trois parts inégales.

- La première part représente $\frac{11}{24}$ du capital, est placée à 8 % pendant 6 mois. Calculer l'intérêt.
- La deuxième part représente $\frac{7}{24}$ du capital, est placée à 6 % pendant 120 jours. Calculer l'intérêt.
- La troisième part, qui représente le reste du capital, est placée un certain temps à 9 % et rapporte un intérêt de 112,50 \$. Calculer la durée de placement.

Exercice 6

Quel est le taux moyen des placements suivants :

Capital : C	100 000	250 000	120 000	360 000
Taux annuel : t%	6%	6,5%	7%	6,75 %
Durée : n	18 mois	2 ans	4 ans	270 jours

Exercice 7

Un capital de 1 000 000 F a été divisé en deux parts. La première a été placée à 4%, la seconde à 4,5%. Après 3 mois, l'intérêt produit par la première part est le double de l'intérêt produit par la seconde en 60 jours. Calculer les deux parts et les deux intérêts.

Exercice 8

Trois capitaux ont pour total 1 365 000 F. placés respectivement à 2%, 3% et 4%, ils rapportent le même intérêt annuel. Quels sont ces capitaux ?

Exercice 9

Deux capitaux de 8 000 Naira et 12 600 Naira sont placés respectivement à 4,5% et 10%. Le premier est placé du 5 Février au 17 Juillet. La somme des intérêts produits au terme de leur placement est égale à 477 Naira.

- Calculer la valeur acquise par le premier capital à l'issue de son placement.
- Calculer la durée, en mois, du placement du second capital.
- Calculer le taux moyen de ces placements.

Exercice 10

Trois capitaux ont des montants en progression arithmétique. La différence entre la troisième et le premier est de 100 000 f. Les trois capitaux sont placés à intérêts simples pendant un an à 9%. L'intérêt total des trois placements est de 27 000 f. calculer les trois capitaux.

Exercice 11

Deux capitaux C1 et C2 sont placés respectivement aux taux de t% et (t+1) % pendant 6 mois. Leur somme est égale à 1500000f. Le premier capital est égal à la moitié du second. La somme des intérêts est égale à 42500f. Calculer la valeur des capitaux et des taux de placement.

Exercice 12

Un capital de 800.000f est placé à t%. Au bout de 2 ans le prêteur retire capital et intérêts et remplace le tout à (t + 2) %. 3 ans après, il dispose d'une valeur acquise de 1.305.600f. Calculer t.

CHAPITRE 2 : ESCOMPTE BANCAIRE COMMERCIAL

Objectif : Maitriser le vocabulaire relatif à l'escompte et les calculs effectués lors de la négociation d'un effet

I- GENERALITES

1- Approche

Pour les fêtes de Noel, M. BARROT achète le 25 Novembre, des boites de foie gras pour 2 500 000 F à M. CHALOSSE. M. BARROT ne paie pas immédiatement, il convient avec M. CHALOSSE de le régler le 30 Décembre. M. BARROT reconnaît sa dette envers M. CHALOSSE en signant un effet de commerce le jour de l'achat.

Travail à faire

- 1- Qu'est-ce qu'un effet de commerce ?
- 2- Que représente la somme de 2 500 000 f ?
- 3- Que représentent les dates suivantes :
 - 25 Novembre
 - 30 Décembre

Le 05 décembre, M. CHALOSSE a un besoin de trésorerie. Il peut vendre son effet à une banque. La banque peut accepter d'acheter l'effet moyennant une rémunération appelée **escompte bancaire**.

2- Définitions

- Un escompte bancaire commercial est un intérêt que le banquier perçoit lors de la vente d'un effet de commerce.
- Vendre un effet, c'est le négocier, l'escompter ou le remettre à l'escompte.

II- CALCUL DE L'ESCOMPTE ET DE LA VALEUR ACTUELLE

1) Calcul de l'escompte

L'escompte commercial est un intérêt qui se calcule selon la formule de l'intérêt simple.

En notant

- V : la valeur nominale de l'effet ;
- t% : le taux d'escompte,
- n : la durée (en jours) séparant la date de négociation et celle de d'échéance
- e : le montant de l'escompte commercial

La formule donnant le montant de l'escompte s'écrit :

$$e = \frac{V \times t \times n}{36000}$$

Illustration 1 :

Une société remet à l'escompte le 20 Mai un effet de commerce dont les caractéristiques sont les suivantes : valeur nominale 450 000 F ; date d'échéance 15 Juin ; taux d'escompte 12%. Calculer le montant de l'escompte.

Remarque :

La banque peut imposer un minimum de jours, un minimum d'escompte et/ou des jours de banque.

2) Calcul de la valeur actuelle

La valeur actuelle A est la somme obtenue lorsqu'on déduit l'escompte e de la valeur nominale V le jour de la négociation.

$$A = V - e$$

III- AGIO ET VALEUR ACTUELLE NETTE

En réalité, en plus de l'escompte, le banquier opère d'autres retenues sur la valeur nominale d'un effet escompté. Ce sont les commissions et la TOB. L'ensemble des retenues constitue l'Agio. On distingue l'Agio HT (escompte + toutes les commissions éventuelles) et l'Agio TTC (Agio HT + TOB).

1) Les commissions

On distingue :

- a) La commission d'endos (Ce) ou commission proportionnelle à la durée. Elle se calcule de la même manière que l'escompte.

$$Ce = \frac{V \times te \times n}{36000}$$

- b) Les commissions indépendantes (Ci) de la durée. Elles sont uniquement proportionnelles à la valeur nominale de l'effet

$$Ci = \frac{V \times ti}{100}$$

- c) Les commissions fixes (Cf) : elles ne dépendent pas des caractéristiques de l'effet, elles sont fixées par la banque.

2) La T.O.B.

Elle représente 10% de l'Agio HT.

3) La valeur actuelle nette ou le net de la négociation

Le net TTC est le montant de la valeur nominale diminué du montant de l'Agio TTC.

IV- TAUX EFFECTIFS

1) Taux réel d'escompte ou taux de l'Agio HT

C'est le taux unique tr qu'il faut appliquer à la valeur nominale de l'effet, pour trouver le montant de L'Agio HT.

$$\frac{V \times tr \times nr}{36000} = \text{Agio HT}$$

2) Taux de revient (pour le vendeur de l'effet)

C'est le taux Tr qu'il faut appliquer à la valeur nette de l'effet, pour obtenir le montant de l'Agio TTC.

$$\frac{Vn \times Tr \times nr}{36000} = \text{Agio TTC}$$

3) Taux de placement (pour le banquier)

C'est le taux unique tp qu'il faut appliquer à la valeur actuelle A de l'effet, pour obtenir le montant de l'escompte e .

$$\frac{A \times tp \times nr}{36000} = e$$

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

Exercice 1

Un effet de 1515 £ est escompté à 15%, le 20 Mars. Sa valeur actuelle est de 1420 £. Déterminer la date d'échéance de cet effet.

Exercice 2

Le 15 avril, un commerçant négocie auprès de sa banque trois effets dont les caractéristiques sont les suivantes :

Montant	739 200 F	261 000 F	576 000 F
Date d'échéance	10 Mai	12 Juin	25 Juin

Les conditions d'escomptes sont les suivantes : taux d'escompte : 10% ; commission d'endos : 0,6% ; commission de service 300 F par effet ; jour de banque : 2 jours. Calculer la valeur nette de la négociation.

Exercice 3

Un effet de nominal 450 000 F est négocié aux conditions suivantes : taux d'escompte 9,2% ; endos 0,4% ; commission indépendante 0,2% ; commission fixe 900 ; TOB 10%. Calculer le coût TTC de l'opération et la valeur nette perçue par l'entreprise.

Exercice 4

En vue de négocier le 15 Mars un effet d'une valeur de 916 000 F échéant le 15 Avril, un commerçant hésite entre deux banques A et B ayant les conditions d'escompte suivantes :

	Banque A	Banque B
Taux d'escompte	10%	10,5%
Commission d'endos	0,7%	0,15%
Commission fixe	380	580

Calculer pour chaque banque, le taux réel d'escompte et indiquer la banque la plus avantageuse pour ce commerçant.

Exercice 5

Le 16 Janvier, vous négociez trois effets auprès de votre banque ; leurs caractéristiques sont les suivantes :

Valeur nominale	589 600 F	594 400 F	X F
Date d'échéance	21 Février	20 Mars	14 Juillet

Les valeurs actuelles sont les mêmes le jour de la négociation. Calculer :

- Le taux d'escompte pratiqué par cette banque ;
- La valeur nominale du 3^{ème} effet.

CHAPITRE 3 : EQUIVALENCE D'EFFETS À INTÉRÊTS SIMPLES

Objectif :

Etudier les problèmes liés aux prorogations d'échéances et aux paiements à crédit

Approche

M. Laplace, propriétaire d'un magasin de maillots de bains et d'articles de plage, a acheté à crédit le 20 Mai à la Maison MODIA, un lot de marchandises pour un montant de 1 200 000 F. La Maison MODIA tire alors une lettre de change à échéance du 30 Juin.

La saison étant anormalement pluvieuse, M. Laplace n'a pas vendu ce qu'il espérait. Il souhaite alors reporter l'échéance de l'effet au 31 Août. Ce report d'échéance ne sera équitable à la seule condition que la valeur actuelle de l'effet remplaçant soit égale à la valeur actuelle de l'effet remplacé.

I- EQUIVALENCE DEUX EFFETS

1- Définition

Deux effets de valeurs nominales V_1 et V_2 sont équivalents à une date donnée lorsqu'étant escomptés au même taux, ils ont la même valeur actuelle.

Notons A_1 et A_2 les valeurs actuelles respectives ; on a :

$$A_1 = V_1 - \frac{V_1 \times t \times n_1}{36000} ; \quad A_2 = V_2 - \frac{V_2 \times t \times n_2}{36000}$$

L'équation d'équivalence s'écrit comme suit :

$$A_1 = A_2 \text{ ou } V_1 - \frac{V_1 \times t \times n_1}{36000} = V_2 - \frac{V_2 \times t \times n_2}{36000}$$

Remarque : A intérêts simples, cette date d'équivalence est unique.

Illustration

Les deux effets suivants sont-ils équivalents le 01 Mai au taux de 15% ?

- 1 560 000 F échéant le 31 Mai
- 1 580 000 F échéant le 30 Juin

2- Détermination de la valeur nominale du nouvel effet

Un créancier accepte de remplacer une lettre de change de 240 000 F payable dans 30 jours par une nouvelle lettre de change, payable dans 90 jours. Quelle doit-être la nouvelle valeur nominale du nouvel effet si le taux d'escompte est de 10% ?

3- Détermination de la date d'équivalence du nouvel effet

Le 12 Janvier, on remplace un effet de 715 000 F échéant le 25 Mars, par un effet de 726 000 F. Calculer au taux de 5%, la date d'équivalence du nouvel effet.

4- Détermination de la date d'équivalence

Monsieur Karim accepte de remplacer un effet de 390 000 F payable le 01 Août, par un de 395 000 F payable le 31 Août. Sachant que le taux d'escompte est de 15%, déterminer la date d'équivalence.

II- ÉQUIVALENCE D'UN EFFET A UN ENSEMBLE D'EFFETS

Il est possible de remplacer un seul effet par plusieurs d'effets en vue d'étaler une dette remboursable initialement en une échéance ; de même, plusieurs d'effets ayant chacun sa valeur nominale et son échéance peut être remplacée par un seul effet.

1- Définition

Un effet est équivalent à une date donnée à un ensemble d'effets, si à cette date, sa valeur actuelle est égale à la somme des valeurs actuelles des autres effets.

Notons V la valeur nominale et n la durée entre la date d'équivalence et celle d'échéance de l'effet unique.

Soit V_1, n_1 ; V_2, n_2 ; V_3, n_3 les valeurs nominales et les durées respectives des effets constituant le groupe. L'équation s'écrit comme suit :

$$V - \frac{V \times t \times n}{36000} = V_1 - \frac{V_1 \times t \times n_1}{36000} + V_2 - \frac{V_2 \times t \times n_2}{36000} + V_3 - \frac{V_3 \times t \times n_3}{36000}$$

2- Echéance commune

C'est la date d'échéance de l'effet unique équivalent à un ensemble d'effets.

Illustration

Un débiteur a accepté trois traites : 540 000 F échéant dans 14 jours, 510 000 F échéant dans 60 jours et 630 000 F échéant dans 75 jours. Il souhaite que son créancier les remplace par un effet unique de 1 670 000 F. taux d'escompte 12%.

Déterminer la date d'échéance de cet effet unique (c'est l'échéance commune)

3- Echéance moyenne

L'échéance commune de plusieurs effets prend le nom d'échéance moyenne, lorsque la valeur nominale de l'effet unique est égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés. La relation d'équivalence entre le groupe d'effets et l'effet unique s'écrit :

$$V - \frac{V \times t \times n}{36000} = V_1 - \frac{V_1 \times t \times n_1}{36000} + V_2 - \frac{V_2 \times t \times n_2}{36000} + V_3 - \frac{V_3 \times t \times n_3}{36000}$$

avec $V = V_1 + V_2 + V_3$;

après les simplifications on aboutit à la relation suivante :

$$n = \frac{\sum V_i \times n_i}{V}$$

Illustration :

Déterminer l'échéance d'un effet de 2 000 000 F remplaçant les trois effets suivants :

- 800 000 f au 05 Avril
- 200 000 f au 25 Avril
- 1 000 000 f au 4 Juin
- a) Date d'équivalence 16 Mars
- b) Date d'équivalence 03 Avril
- c) Date d'équivalence 05 Avril

Remarque : la date d'échéance moyenne est indépendante du taux d'escompte et de la date d'équivalence choisie.

N.B : Lorsque le taux d'escompte (et/ou la date d'équivalence) n'est pas donné, il est indiqué de rechercher si le cas proposé n'est pas un cas d'échéance moyenne.

III- PAIEMENT A CREDIT : ECHEANCES ECHELONNEES

Ce problème se traite comme les équivalences d'effets. Il faut qu'à la date de l'achat, le paiement comptant soit équivalent au paiement à crédit.

L'équation d'équivalence s'écrit comme suit : somme des valeurs actuelles des traites (+ versement comptant comme avance éventuelle) = prix comptant au jour de l'achat

Illustration : Un poste téléviseur est vendu 590 000 F. le paiement à crédit est possible aux conditions suivantes : Versement comptant à l'achat 90 000 F et 3 mensualités d'égales valeurs, la première payable deux mois après l'achat. Taux de crédit 8,5%. Quel est le montant de chaque mensualité.

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

Exercice 1

Le 31 Août, M. Douk demande que l'on reporte au 10 Novembre, l'échéance d'une traite de 640 000 F qu'il devait payer le 30 Septembre. Sachant que le taux d'intérêt est de 16%, calculer la valeur nominale de la nouvelle traite à créer pour qu'elle soit équivalente à la première.

Exercice 2

Un effet de 400 000 F échéant dans 90 jours est équivalent aujourd'hui à un effet de 396 000 F échéant dans 70 jours. A quel taux l'escompte a-t-il été calculé ?

Exercice 3

Calculer la valeur nominale de l'effet unique payable le 31 août qui remplace le 1^{er} juin les trois effets suivants : 340 000 F payable le 10 Juin, 220 000 F payable le 30 juin 180 000 F payable le 31 juillet. Taux d'escompte 12%.

Exercice 4

Le 1^{er} Octobre, on remplace un effet de 5 400 € payable le 15 Octobre par trois traites de même valeur nominale, échéant respectivement le 31 Octobre, le 15 Novembre et le 30 Novembre.

Calculer la valeur nominale de chaque traite si le taux d'escompte est de 12%.

Exercice 5

Déterminer au taux de 9%, la date d'équivalence des deux effets suivants :

Effet 1 : 780.000f à échéance du 31 Mai ; Effet 2 : 788.000f à échéance du 10 Juillet

Exercice 6

Le 30 avril, on remplace par un effet unique de 8 300 € de valeur nominale les trois effets suivants : 2 200 € au 30 avril, 2 600 € au 5 mai et 3 500 € au 21 mai.

Déterminer l'échéance de l'effet unique. Taux 13%.

Exercice 7

Pour s'acquitter d'une dette de 646 400 F le 01/03/2015, un débiteur convient avec son créancier de lui verser immédiatement 25% de la dette, et le reste en 18 traites bimestrielles de même valeur nominale, la première payable dans 2 mois. Taux d'escompte 10%.

- 1- Calculer la valeur nominale commune des 18 traites.
- 2- L'acheteur propose de verser 25% de la dette cash et de remplacer les 18 traites par un effet unique de 576 000 f. Déterminer la date de paiement de cet effet.

Exercice 8

Pour l'achat d'un ordinateur portable de 859 €, le vendeur propose le mode de règlement suivant : 400 € comptant et le solde en quatre traites de même valeur nominale échéant de mois en mois, la première payable deux mois après l'achat. Calculer la valeur nominale de chaque traite. Taux 15%.

Exercice 9

Mlle. Kobinan, en règlement de sa commande d'articles de literie, avait accepté de payer les trois effets suivants : 430 000 F au 25 Octobre, 375 000 F au 15 Novembre et 450 000 F au 25 Décembre. Le 1^{er} Octobre, elle propose à son fournisseur, qui accepte, de remplacer ces trois effets par un effet unique payable le 31 Décembre.

Quel doit être la valeur nominale de cet effet unique si le taux d'escompte est de 15% ?

Exercice 10

Une commerçante doit payer les effets suivants : 1200 € le 15 Mai, 1800 € le 20 Mai, 1500 € le 1^{er} Juin, 2000 € le 14 Juin, 3500 € le 31 Juillet.

1. Elle se met d'accord avec son créancier pour remplacer les trois premiers effets par un effet unique de 4500 €. Quel doit être la date d'échéance de cet effet unique ?
2. Le 15 Mai, les deux derniers effets sont remplacés par un effet unique au 31 Août. Quel doit être la valeur nominale de cet effet ? taux 12%.

CHAPITRE 4 : LES INTÉRÊTS COMPOSÉS

Approche

Examinons la publicité suivante : « Confiez-nous 10 000 f, nous vous donnerons 13 310 f à la fin de la troisième année au taux de 10% »

Travail à faire :

- 1- Que représentent les 13 310 f ?
- 2- Calculer à intérêt simple, la valeur acquise de ce placement.

NB :

- Pour les opérations financières à long terme, le créancier peut considérer à la fin de chaque année, l'intérêt simple fourni par son capital comme un nouveau capital productif d'intérêts : on parle de capitalisation des intérêts.
- Généralement, la capitalisation est annuelle, mais les parties peuvent convenir dans un contrat, d'une capitalisation semestrielle, trimestrielle et même mensuelle.

I- VALEUR ACQUISE

1- Formule générale

Désignons par :

- C_0 le capital initial
- i le taux par franc correspondant à la période de capitalisation ($i = \frac{t}{100}$)
- n le nombre de périodes dans la durée de placement
- C_1 la valeur acquise à la fin de la première période
- C_2 la valeur acquise à la fin de la deuxième période
- C_3 la valeur acquise à la fin de la troisième période
- C_n la valeur acquise à la fin de la $n^{\text{ième}}$ période

Période	Capital placé	Intérêt produit	Valeur acquise
1	$C_0 = 10\ 000$	$I_1 = C_0 \times i =$	$C_1 = C_0 + C_0 \times i = C_0 (1 + i) =$
2	$C_1 =$	$I_2 =$	$C_2 =$
3	$C_2 =$	$I_3 =$	$C_3 =$
...	...	...	...
n			

On obtient la formule générale de la valeur acquise à intérêts composés :

$$C_n = C_0 (1+i)^n$$

Remarque :

- Il faut retenir un nombre suffisant de décimales dans le calcul de $(1 + i)^n$
- La formule de la valeur acquise à intérêts composés, nécessite l'utilisation d'un taux par franc « i », et d'un nombre de périodes « n » qui concordent avec la période de capitalisation convenue.

2- Calculs de C_0 , de n ou de i

Exemple 1 : $C_n = 2\,315\,250$ F, $i = 5\%$ et $n = 3$ ans. Calcul de C_0

Exemple 2 : $C_0 = 1\,000\,000$ F, $n = 6$ ans et $C_n = 1\,418\,519$ F. Calcul de i

Exemple 3 : $C_0 = 5\,000\,000$ F, $i = 10\%$ et $C_n = 11\,789\,740$ F. Calcul de n

3- Taux équivalents

Deux taux correspondant à des périodes de capitalisation différentes, sont dits équivalents, lorsqu'à intérêts composés, ils donnent au bout du même temps de placement, à un même capital, la même valeur acquise.

$$(1+i_a)^1 = (1+i_s)^2$$

$$(1+i_a)^1 = (1+i_t)^4$$

$$(1+i_a)^1 = (1+i_m)^{12}$$

II- **CALCUL DES INTERETS**

1- INTÉRÊT TOTAL

Partant du fait que la valeur acquise est la somme du capital et de ses propres intérêts, l'intérêt au terme de n périodes de placement est la différence entre la valeur acquise C_n et le capital placé C_0 .

$$I = C_n - C_0$$

2- INTÉRÊT D'UNE PÉRIODE

Le calcul de l'intérêt peut être celui d'une période bien précise et non l'intérêt total produit par le capital ; si I_k désigne l'intérêt de la période k , on l'obtient de la façon suivante :

$$I_k = C_k - C_{k-1} = C_{k-1}(1+i) - C_{k-1} = C_{k-1} \times i$$

III- **VALEUR ACTUELLE ET ESCOMPTE**

1) Valeur actuelle d'un capital définitif

C'est la somme qu'il faut placer à un instant t_0 pour obtenir, n périodes plus tard, le capital escompté.

Dans la formule fondamentale des intérêts composés, C_n est la valeur acquise par C_0 et C_0 est la valeur à placer à l'instant t_0 pour avoir C_n , C_0 est la valeur actuelle de C_n .

$$C_0 = C_n(1+i)^{-n}$$

2) Escompte à intérêts composé

Il survient lorsque l'échéance d'un effet est supérieure à l'année. Comme observé à intérêts simples, l'escompte correspond à la différence entre la valeur nominale et la valeur actuelle. Si V est la valeur à percevoir dans n périodes et A sa valeur actuelle, l'escompte commercial est :

$$E = V - A = V [1 - (1+i)^{-n}]$$

IV- ÉQUIVALENCE DE CAPITAUX A INTERETS COMPOSES

1- Equivalence de deux capitaux

Deux capitaux évalués au même taux sont équivalents si à une date donnée, leurs valeurs actuelles sont égales.

Illustration1 : un débiteur désire rembourser par anticipation dans 3 ans, une dette de 8 000 000 F dans 6 ans. Déterminer au taux de 10%, la somme qu'il devra déboursier

- 1- Equivalence à la date 0
- 2- Equivalence à la date 3
- 3- Equivalence à la date -3

Remarque : Contrairement aux intérêts simples, l'équivalence à intérêts composés se vérifie quel que soit la date à laquelle elle est établie.

Illustration 2 : un débiteur décide de s'acquitter d'une dette de 3 000 000 F payable dans 5 ans par un règlement de 2 700 000 F. déterminer au taux de 10%, la date à laquelle doit être effectuée ce paiement.

Cette équivalence se traduit elle aussi par l'égalité des valeurs actuelles à une date donnée. Soit C_1 et C_2 deux capitaux à percevoir respectivement dans n_1 et n_2 périodes. Dire que ces capitaux sont équivalents au taux $t\%$, à une date t_0 revient à écrire l'égalité suivante :

$$C_1 (1+i)^{-n_1} = C_2 (1+i)^{-n_2}$$

2- Equivalence d'un capital et de la somme de plusieurs capitaux

Un capital est équivalent à la somme de plusieurs autres capitaux si, à une date quelconque, la valeur actuelle de ce capital est égale à la somme des valeurs actuelles des autres capitaux.

Illustration : Déterminer au taux de 10%, la valeur nominale d'un capital unique échéant dans 7 ans, destiné à remplacer les capitaux suivants : $V_1 = 1\,000\,000$ F payable dans 2 ans, $V_2 = 2\,000\,000$ F payable dans 4 ans et $V_3 = 3\,000\,000$ F payable dans 6 ans.

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

Exercice 1

Deux capitaux dont le total est 1 000 000 F, sont placés :

- L'un à intérêt simple au taux de 10%
- L'autre à intérêts composés au taux de 8%.

Au bout de 9 ans, ils ont la même valeur acquise. Calculer les montants des deux capitaux.

Exercice 2

Un industriel effectue un DAT pour une durée de 5 ans. Sachant qu'il est d'une valeur de 5 000 000 F et que les intérêts composés sont calculés au taux annuel de 8%, calculer :

- 1- L'intérêt produit par ce placement au terme de la 1^{ère} année ;
- 2- La valeur acquise au bout des cinq années de placement ;
- 3- L'intérêt total produit pendant les cinq années ;
- 4- L'intérêt de la 5^{ème} année de placement.

Exercice 3

On place aujourd'hui 4 000 000 F à intérêts composés au taux annuel de 5,2%. Au terme du placement, on dispose de 6 000 000 F.

- 1- Déterminer la durée de placement n ;
- 2- Calculer l'intérêt de l'année n-2 ;

Exercice 4

Deux capitaux sont placés pendant 3 ans, le premier, à intérêts simples au taux de 7%, le second, à intérêts composés au taux de 10%. Le premier étant supérieur au second de 500 € a acquis la même valeur que celle du second. Calculer le montant des deux capitaux.

Exercice 5

Un investisseur souscrit un bon de capitalisation de 100 millions pour une période de 10 ans. Sachant que les intérêts sont composés annuellement et que le taux d'intérêt est de 5,5% les quatre premières années, de 5,8% les trois années qui suivent et de 7% les trois dernières années,

- 1- Calculer la valeur acquise au terme des dix années de placement ;
- 2- Calculer le taux annuel moyen des dix années de placement.

Exercice 6

Un investisseur a placé une certaine somme à intérêts composés pour une longue période. Vous disposez des renseignements suivants sur ce placement :

- Le montant de la valeur acquise au bout de la 7^{ième} année s'élève à 177 014, 22€
- Le montant de la valeur acquise au bout de la 10^{ième} année s'élève à 226 098, 34€
- Le montant des intérêts capitalisés à l'expiration de la durée de placement s'élève à 239 974, 29 €

Travail à faire :

- 1- Calculer le taux d'intérêt à 10^{-3} près
- 2- Déterminer le capital investi (à l'entier le plus proche)
- 3- Déterminer la durée totale de placement

Exercice 7

Un capital de 1 500 000 F est placé à intérêts composés pendant 12 ans. Au début le taux était à 6%, puis il est passé à 7%. La valeur acquise au bout des 12 ans étant de 3 253 756 F, déterminer le nombre d'années au bout duquel, le taux a changé.

Exercice 8

Un capital C_0 est placé à intérêt composé au taux annuel i pendant cinq ans. On note C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 les valeurs acquises consécutives.

- 1- Exprimer C_k en fonction de C_0
- 2- Sachant que $C_0 + C_1 = 16\,400\,000$ F et $C_4 + C_5 = 19\,934\,250$ F, calculer :
 - a. Le taux annuel de placement ;
 - b. Le capital placé ;
 - c. La valeur acquise à la fin de la 5^{ème} année de placement.

Exercice 9

Déterminer au taux de 10%, l'échéance d'un capital unique de 7 572 500 F substitué aux capitaux suivants : $V_1 = 1\,000\,000$ F payable dans 2 ans, $V_2 = 2\,000\,000$ F payable dans 4 ans et $V_3 = 3\,000\,000$ F payable dans 6 ans.

CHAPITRE 5 : LES ANNUITÉS

I- GENERALITES

1- Approche

Monsieur BONTEL a placé le 01 Janvier de chaque année et cela depuis 2012, une somme de 100 000 F dans une banque qui pratique un taux annuel de 7%. Le dernier versement date du 01 Janvier 2019.

Travail à faire :

- 1- Représenter l'échelonnement des versements dans le temps puis en déduire le nombre de versements effectués
- 2- Quel est la valeur acquise au 01 janvier 2019 :
 - a) Par le premier versement
 - b) Par le second versement
 - c) Par le troisième versement
 - d) Par la totalité des versements

2- Définitions

- On appelle annuités, une suite de versements effectués à intervalle de temps égaux.
- On appelle période, l'intervalle entre deux versements consécutifs
- La périodicité des versements peut être mensuelle, trimestrielle, semestrielle ou annuelle.
- Ces versements permettent de constituer un capital ou de rembourser une dette.
- On parle d'annuités constantes si les versements sont tous égaux. Les annuités peuvent être aussi de montants différents : on parle d'annuités variables.

II- ANNUITES VARIABLES (QUELCONQUES)

1- Valeur acquise

a) On évalue la suite d'annuités à la date du dernier versement

A cette date, la valeur de l'ensemble des versements (ou des retraits) est la somme des valeurs acquises par chacune des sommes versées (ou retirées).

Soit V la valeur acquise de la suite de n annuités ; on a :

$$V = \sum a_k (1+i)^{n-k}$$

b) On évalue la suite d'annuités p périodes après le dernier versement

La valeur à cette date de l'ensemble des versements (ou retraits) est encore la somme des valeurs acquises par chacune des sommes versées (ou retirées).

Soit V' cette nouvelle valeur acquise ; on a :

$$V' = \sum a_k (1+i)^{n-k+p} = V(1+i)^p$$

2- Valeur à l'origine

a) On évalue la suite d'annuités une période avant le premier versement

A cette date, la valeur de la suite d'annuités est la somme des valeurs actuelles de chacune des annuités ; par conséquent, si A désigne la valeur recherchée, on écrit :

$$A = \sum a_k (1+i)^{-k} ;$$

Cette valeur actuelle peut également être obtenue par actualisation de la valeur V sur n périodes ; on peut donc écrire également

$$A = V (1+i)^{-n}$$

b) On évalue la suite d'annuités plusieurs périodes avant le premier versement

La valeur à une date située plusieurs périodes avant le premier versement de l'ensemble des versements (ou retraits) est encore la somme des valeurs actuelles par chacune des sommes versées (ou retirées).

Soit A' cette nouvelle valeur actuelle ; on a : $A' = A (1+i)^{-p}$ avec p = nombre de périodes entre A et A'

Application 1

On place sur un compte rémunéré au taux annuel de 6,5% les annuités suivantes : 500 000 F, 400 000 F, 350 000 F et 600 000 F.

- 1- Evaluons immédiatement après le dernier versement, la somme disponible.
- 2- Quelle somme pourrait-on retirer trois ans après le dernier versement ?
- 3- Les différents montants ont servi à rembourser une dette contractée un an avant le premier versement ; quel était le montant de cette dette ?
- 4- Quel était le montant de la dette contractée 3 ans le premier versement ?

III- ANNUITES CONSTANTES

1- Valeur acquise

On appelle valeur acquise par une suite d'annuités constantes, la somme des valeurs acquises par les annuités, **calculée immédiatement après le versement de la dernière annuité.**

Désignons par :

- n : le nombre d'annuités
- i : le taux de placement correspondant à la période
- a : le montant de l'annuité constante
- V la somme des valeurs acquises à la période n

$$V = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

2- Valeur actuelle ou à l'origine

Quand les versements permettent de rembourser une dette, il est possible de connaître, au moment où commencent les remboursements, quel capital représente les versements à effectuer. Pour cela, on calcule une valeur dite à l'origine.

On appelle valeur à l'origine d'une suite d'annuités, la somme des valeurs actuelles des annuités, calculée **une période avant le versement de la première annuité**.

Notons V_0 la valeur à l'origine.

$$V_0 = V_n (1 + i)^{-n}$$

En actualisant la valeur V de la formule précédente, on obtient la formule permettant de calculer A ; par conséquent on a :

$$A = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i)^{-n} = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Application

Dix annuités de 300 000 F chacune sont versées aux taux annuel de 5,5%. Déterminer la valeur de cette suite d'annuités :

- 1- Au moment du dixième et dernier versement ;
- 2- 5 ans après avoir effectué le dernier versement ;
- 3- Un an avant le premier versement.

3- Evaluation d'une suite d'annuités constantes à une date quelconque

Une suite comporte 8 annuités de 400 000 F chacune.

Travail à faire : Déterminer la valeur de la suite, au taux de 10%,

- a) Au moment du dernier versement
- b) A la période 0
- c) Quatre périodes avant le premier versement
- d) Au terme de la 5^{ème} annuité
- e) Trois périodes après le dernier versement.

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

Exercice 1

On place 144 mensualités de 10 000 F au taux annuel de 9%. Calculer la valeur acquise par ces mensualités.

Des annuités de 500 000 F placés au taux de 5%, ont acquis une valeur de 5 513 282 F. déterminer le nombre d'annuités versées.

Dix annuités constantes placés au taux de 8% ont acquis une valeur de 13 037 906 F. calculer le montant de l'annuité.

Douze annuités de 150 000 F chacune, ont acquis une valeur de 2 846 569 F. calculer le taux annuel de placement.

Exercice 2

Dix-huit annuités constantes de 600 000 F ont une valeur à l'origine de 4 550 628 F. calculer le taux annuel de placement.

On place des annuités de 50 000 F au taux annuel de 11%. La valeur à l'origine est de 398 156 F. calculer le nombre d'annuités versées.

Le versement de dix annuités constantes et égales à 1000 000 F a permis la constitution le 26 mars 1998, soit un an après le dernier versement, d'un capital de 13 971 643 F. Quel était le taux de capitalisation utilisé ? (6%)

Exercice 3

Combien faut-il verser d'annuités constantes de 180 000 F, à intérêts composés, au taux annuel de 5,27 % afin de constituer un capital de 1 million de francs immédiatement après le dernier versement ?

Exercice 4

Une suite de 12 annuités constantes, évaluée deux ans après le dernier versement a une valeur de 37 323 569,47. Évaluée deux ans avant le premier versement elle vaut 9 566 903,285 F.

- 1- Calculer le taux annuel d'intérêt.
- 2- Calculer le montant de l'annuité constante.
- 3- A quelle date faut-il verser 21 652 021,82 F pour remplacer de la suite d'annuités ?

Exercice 5

Une somme de 6 275 179 F est remboursable à l'aide de 24 semestrialités constantes de 500 000 F chacune, la première étant versée 1 semestre après la remise des fonds.

- 1- À quel taux semestriel le prêt a-t-il été consenti ?
- 2- Quel est le taux annuel équivalent ?

Exercice 6

Un emprunt de 10 millions contracté au taux annuel de 9 % est remboursable au moyen de n mensualités.

- 1- Si le remboursement s'effectue au moyen de 36 mensualités constantes dont la première est versée à terme échu, calculer la valeur de chaque mensualité.
- 2- Calculer le nombre de mensualités de 205 890 f chacune à verser.
- 3- L'emprunt est remboursable à l'aide de 36 mensualités dont les 12 premiers valent 100 000 F chacune et les autres sont constantes. Sachant que la première mensualité est versée 2 mois après la signature du contrat, quel est le montant de chacune des 24 mensualités ?

Exercice 7

Vous souhaitez constituer un capital de 3 millions en vue de vous équiper en matériel agricole. Vous effectuez à cette fin tous les deux mois, au taux bimestriel de 3%, 18 versements égaux d'une valeur de 120 000 F chacun.

- 1- Avez-vous atteint votre objectif le jour du dernier versement ?
- 2- Quel devrait être le montant à verser à chacune des échéances pour constituer exactement le capital ?
- 3- En fait, le capital constitué à la date du dernier versement de la question 1 n'est retiré que 8 mois plus tard. Quelle somme sera alors remise à l'épargnant ?

Exercice 8

Le premier juillet de chaque année, Monsieur MENGUE verse sur un compte épargne 1 000 000 F capitalisés à 4,5%. Le nombre des versements est égal à 10.

Cinq ans après le dernier versement, Monsieur MENGUE retire, et ainsi de suite chaque année, une somme de 1 000 000 F de ce compte. Le nombre de retraits est égal à 10.

- 1) De quelle somme dispose Monsieur MENGUE sur son compte immédiatement après son dernier retrait ?
- 2) Quel aurait dû être le montant constant de chacun des 10 retraits pour que ce solde soit nul ?

CHAPITRE 6 : LES EMPRUNTS INDIVIS

Ce chapitre est une application immédiate des annuités et donc des intérêts composés. En effet, nous avons indiqué que les annuités peuvent être versées en vue de constituer un capital (annuités de capitalisation) ou plus souvent, afin de rembourser une dette (annuités de remboursement). Nous étudierons par la suite les différents modes de remboursement les plus utilisés.

I. GENERALITES

1- Approche

Un emprunt de 2 000 000 F est remboursable sur 4 ans, au taux de 8% par les amortissements suivants :

- 500 000 F la première année
- 600 000 F la deuxième année
- 400 000 F la troisième année
- Le reste la quatrième et dernière année

Le capital restant dû au début de la première année est de 2 000 000 F.

- 1- Quel est le montant des intérêts à payer la première année ?
- 2- Que versera-t-on au total la première année ?
- 3- Quel sera le montant de la dette restante à la fin de la première année ?
- 4- Compléter le tableau suivant :

Périodes k	Dette en début de période D_{k-1}	Intérêt de la période $I_k = D_{k-1} \times i$	Amortissement de la période m_k	Annuité de la période $a_k = m_k + I_k$	Dette à la fin de la période $D_k = D_{k-1} - m_k$
1	$D_0 =$	$I_1 =$	$m_1 =$	$a_1 =$	$D_1 =$
2	$D_1 =$	$I_2 =$	$m_2 =$	$a_2 =$	$D_2 =$
3	$D_2 =$	$I_3 =$	$m_3 =$	$a_3 =$	$D_3 =$
4	$D_3 =$	$I_4 =$	$m_4 =$	$a_4 =$	$D_4 =$
TOTAL					

2- Définitions

Un emprunt indivis est un emprunt contracté auprès d'un prêteur unique ; celui-ci peut être une personne physique ou une personne morale. L'annuité de règlement « a » comprend deux parties :

- l'amortissement « m » qui représente une fraction de la somme empruntée et,
- l'intérêt périodique « I » calculé sur la dette encore vivante en début de période.

Le remboursement d'un emprunt peut se faire :

- par amortissements constants,
- par annuités constantes,
- en bloc (in fine).

3- Formules générales

Quel que soit le mode de remboursement, on démontre et on admet les formules suivantes :

$I_k = D_{k-1} \times i$	$a_k = m_k + I_k$	$D_k = D_{k-1} - m_k$	$D_{p-1} = m_p$	$a_p = m_p(1+i)$
$D_0 = m_1 + m_2 + \dots + m_p$		$a_{k+1} - a_k = m_{k+1} - m_k(1+i)$		$R_k = m_1 + m_2 + \dots + m_k$
$D_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + \dots + a_p(1+i)^{-p}$			$D_k = D_0 - R_k$	

II. REMBOURSEMENT PAR AMORTISSEMENTS CONSTANTS

1- Illustration

Un emprunt de 2 000 000 F est remboursable sur 4 ans, au taux de 8%, par des **amortissements constants**. Cela signifie qu'on rembourse la même somme chaque année, la même fraction du capital emprunté. L'emprunteur paiera à chaque échéance : $\frac{2\,000\,000}{4} = 500\,000$ F + les intérêts calculés sur le capital restant dû au début de chaque année.

Périodes k	Dette en début de période D_{k-1}	Intérêt de la période $I_k = D_{k-1} \times i$	Amortissement de la période m	Annuité de la période $a_k = m + I_k$	Dette à la fin de la période $D_k = D_{k-1} - m$
1	$D_0 =$	$I_1 =$	$m =$	$a_1 =$	$D_1 =$
2	$D_1 =$	$I_2 =$	$m =$	$a_2 =$	$D_2 =$
3	$D_2 =$	$I_3 =$	$m =$	$a_3 =$	$D_3 =$
4	$D_3 =$	$I_4 =$	$m =$	$a_4 =$	$D_4 =$
TOTAL					

2- Formules d'emprunt remboursé par amortissements constants

$m_1 = m_2 = \dots = m_p = m$	$a_k = m + I_k$	$D_{p-1} = m$	$D_0 = m \times p$	$m = \frac{D_0}{p}$
$D_k = D_{k-1} - m$	$a_p = m(1+i)$	$a_{k+1} = a_k - m \times i$	$R_k = m \times k$	$D_k = m (p - k)$

Loi de variation des annuités

Dire que les amortissements sont constants équivaut à dire que $m_{k+1} = m_k = \frac{D_0}{p}$. Partant de la relation liant annuités et amortissements, on déduit que : $a_{k+1} = a_k + (-\frac{D_0}{p} \times i)$; les annuités varient en progression arithmétique décroissante de raison $-\frac{D_0}{p} \times i$.

III. EMPRUNT REMBOURSE PAR ANNUITES CONSTANTES

1- Illustration

Un emprunt de 2 000 000 F est remboursable sur 4 ans, au taux de 8%, par des **annuités constantes**. Cela signifie qu'on verse la même somme chaque année : la somme intérêt + amortissement reste la même de la première à la dernière année de remboursement.

Périodes k	Dette en début de période D_{k-1}	Intérêt de la période $I_k = D_{k-1} \times i$	Amortissement de la période m_k	Annuité de la période $a = m_k + I_k$	Dette à la fin de la période $D_k = D_{k-1} - m_k$
1	$D_0 =$	$I_1 =$	$m_1 =$	$a =$	$D_1 =$
2	$D_1 =$	$I_2 =$	$m_2 =$	$a =$	$D_2 =$
3	$D_2 =$	$I_3 =$	$m_3 =$	$a =$	$D_3 =$
4	$D_3 =$	$I_4 =$	$m_4 =$	$a =$	$D_4 =$
TOTAL					

2- Formules d'emprunt remboursé par annuités constantes

$$a_1 = a_2 = \dots = a_p = a$$

$$a = m_k + I_k$$

$$a = m_p(1+i)$$

$$m_{k+1} = m_k(1+i)$$

$$D_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-p}}{i}$$

$$a = \frac{D_0 xi}{1 - (1+i)^{-p}}$$

$$D_0 = m_1 \frac{(1+i)^p - 1}{i}$$

$$m_1 = \frac{D_0 xi}{(1+i)^p - 1}$$

$$R_k = m_1 \frac{(1+i)^k - 1}{i}$$

$$D_k = m_1 \frac{(1+i)^p - (1+i)^k}{i} = D_0 \frac{(1+i)^p - (1+i)^k}{(1+i)^p - 1} = a \frac{1 - (1+i)^{-(p-k)}}{i}$$

Loi de variation des amortissements

Partant de la relation liant annuités et amortissements, et considérant que $a_{k+1} = a_k$, la différence $a_{k+1} - a_k = 0$; ce qui conduit à $m_{k+1} = m_k(1+i)$. Les amortissements forment donc une suite géométrique croissante de raison $(1+i)$.

IV. EMPRUNT REMBOURSE EN BLOC (OU IN FINE)

Il peut être convenu entre le prêteur et l'emprunteur que le capital emprunté soit remboursé en une seule fois à la fin de la durée du prêt ; il s'agit d'un remboursement **en bloc** aussi appelé remboursement **in fine**.

1- Illustration

Un emprunt de 2 000 000 F est remboursable **en bloc** sur 4 ans, au taux de 8%.

Puisque la dette initiale D_0 ne subit aucune réduction par le jeu des amortissements, les intérêts périodiques I_k sont constants et calculés à partir de D_0 ; chaque annuité est ramenée au paiement des intérêts à la fin de chaque période : $a_k = I_k = D_0 \times i$.

La dernière annuité a_p est la somme du capital initial D_0 et de l'intérêt I_k de cette dernière période.

Périodes k	Dette en début de période D_{k-1}	Intérêt de la période $I = D_0 \times i$	Amortissement de la période m_k	Annuité de la période $a_k = m_k + I_k$	Dette à la fin de la période $D_k = D_{k-1} - m_k$
1	$D_0 =$	$I =$	$m_1 =$	$a_1 =$	$D_1 =$
2	$D_1 =$	$I =$	$m_2 =$	$a_2 =$	$D_2 =$
3	$D_2 =$	$I =$	$m_3 =$	$a_3 =$	$D_3 =$
4	$D_3 =$	$I =$	$m_4 =$	$a_4 =$	$D_4 =$
TOTAL					

2- Formules d'emprunt remboursé en bloc

$$m_1 = m_2 = \dots = m_{p-1} = 0 \text{ et } m_p = D_0$$

$$I_1 = I_2 = \dots = I_p = I = D_0 \times i$$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{p-1} = I$$

$$a_p = m_p + I_p = D_0 + D_0 \times i = D_0 (1 + i)$$

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

EXERCICE 1

Un emprunt est remboursable au moyen de 5 annuités, comprenant chacune intérêt et amortissement, dont les montants et les échéances sont les suivants :

Montants :

a_1 : 4 200 F

a_2 : 4 200 F

a_3 : 4 500 F

a_4 : 4 500 F

a_5 : 5 500 F

Echéance:

1an après le prêt

2ans après le prêt

3ans après le prêt

4ans après le prêt

5ans après le prêt

Le dernier amortissement étant de 5 000 F, calculer le taux d'intérêt de cet emprunt et le montant de la somme prêtée

EXERCICE 2

Afin de rénover son matériel informatique, l'Ecole KOLO décide de contracter le 04 Juin 2012, un emprunt d'un montant de 20 000 000 F remboursable par 40 mensualités composées d'amortissements constants. La 1^{ère} mensualité étant de 600°000 F, calculer :

- 1- Le taux d'intérêt mensuel,
- 2- Le montant de la dernière mensualité,
- 3- Le montant du 20^{ème} intérêt et déduire la 20^{ème} mensualité

EXERCICE 3

On donne l'extrait suivant du tableau d'amortissement d'un emprunt régi par le système des annuités constantes :

Echéance	Capital dû en début de période	Intérêt	Amortissement	Annuité
2		722.57	1 794.98	
4			2 055.07	

- a. Reconstituer la première et la dernière ligne de ce tableau.
- b. Calculer la durée totale de l'amortissement.

EXERCICE 4

Un emprunt est remboursable par annuités constantes. Le 7^{ième} amortissement vaut 674 856 F, le 8^{ième} amortissement est de 755 843 F et le dernier amortissement vaut 948 130 F.

- 1- Calculer :
 - a. le taux annuel,
 - b. le premier amortissement,
 - c. le montant de l'annuité,
 - d. le montant de l'emprunt,
 - e. le capital dû après versement de la 6^{ième} annuité,
 - f. le nombre d'années de remboursement
- 2- On suppose qu'après le versement de la 6^{ième} annuité, le taux passe à 10% et on rembourse le reste de la dette par 4 amortissements constants.
 - a. Faire le tableau d'amortissement (4 dernières lignes)
 - b. Quelle est la relation qui lie deux annuités successives ?

EXERCICE 5

Une imprimerie voudrait acquérir une machine d'un montant de 25 000 000 F. Pour cela, elle fait un apport personnel de 40% et un emprunt du solde sur 5 ans au taux mensuel d'intérêt de 0,6%. Sachant que le remboursement du capital emprunté sera fait par mensualités constantes, calculer :

- 1- le montant de la mensualité constante,
- 2- le montant du premier amortissement,
- 3- les éléments de la 30^{ème} ligne du tableau d'amortissement.

EXERCICE 6

La compagnie de transport UTD envisage acquérir dix cars neufs. Le financement est prévu ainsi :

- un versement comptant représentant 20% du coût d'achat,
 - le reste, soit 360 000 000 F, à l'aide d'un emprunt remboursable en 5 annuités constantes.
- 1- Calculer le coût d'achat des dix cars neufs.
 - 2- Le taux de l'emprunt étant de 7,2% l'an, calculer l'intérêt correspondant à la première annuité.
 - 3- Calculer de deux façons différentes, le montant de l'annuité constante.
 - 4- Calculer de deux façons différentes, le montant du 5^{ème} et dernier amortissement.

EXERCICE 7

Afin d'améliorer le taux de scolarisation dans son village, le directeur d'une école primaire de ZOUENOULA décide de construire une cantine scolaire. Il emprunte pour cela la somme de 12 000 000 F qui devrait être remboursée au moyen de cinq annuités constantes de 3 005 477 F chacune.

- 1- Calculer le taux d'intérêt annuel de ce prêt. En déduire le montant du premier amortissement.
- 2- Calculer le coût du crédit accordé i.e. la différence entre la somme remboursée et le montant du prêt.
- 3- En définitive, il a été convenu que le prêt soit remboursé en 8 annuités constantes au taux de la question 1 ; calculer alors le montant de l'annuité constante.

EXERCICE 8

Partie A : Afin de rénover son matériel informatique, l'Ecole KOLO décide de contracter le 04 Juin 2012, un emprunt d'un montant de 20 000 000 F aux conditions suivantes :

- Durée : 4 ans
 - Mensualité constante, la première échéant en 04 Juillet 2012,
 - Amortissement contenu dans la première mensualité : 340 020 F.
- 1- Montrer que le taux d'intérêt mensuel du prêt est de 0,84%.
 - 2- Calculer le montant de la mensualité constante.
 - 3- Compléter les trois lignes du tableau d'amortissement suivant :

Echéances	Capital dû avant l'échéance	Intérêt	Amortissement	Mensualité
04/07/2012	20 000 000		340 020	
04/08/2012				
04/09/2012				

- 4- Calculer le montant remboursé après le versement de la 35ème mensualité et en déduire le capital restant dû avant la 36ème échéance.

Partie B : Le prêt de la partie A est remboursable au moyen de 40 mensualités composées d'amortissements constants. La dernière mensualité étant de 502 500 F calculer :

- 1- Le taux d'intérêt mensuel,
- 2- Le montant de la première mensualité,
- 3- Le montant de la 20ème mensualité ; en déduire l'intérêt contenu dans cette mensualité.

EXERCICE 9

Une société qui désire contracter un emprunt de 12 000 000 F, s'adresse à un groupe financier qui étudie différentes modalités de remboursement.

Première modalité : emprunt remboursable par annuités constantes sur la base d'un taux annuel de 9%. Dans ces conditions, le capital restant dû après le versement de la troisième annuité se monterait à 6 771 290 F. en combien d'années le prêt serait-il amortissable ?

Deuxième modalité : emprunt dont le service serait assuré par des semestrialités constantes, le taux semestriel étant de 5%. Dans ce cas, il y aurait une différence de 525 997,3 F entre le dernier et le premier amortissement semestriel. Calculer le montant de la semestrialité constante et le nombre de semestrialités à verser par la société.