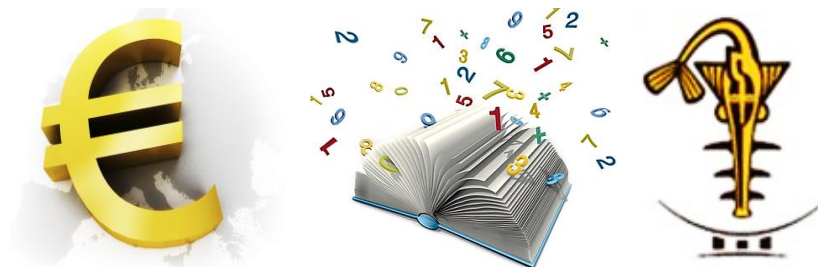


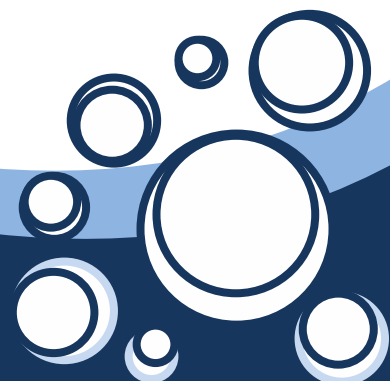
PRIX
2 000 FCFA

MATHEMATIQUES FINANCIERES & RECHERCHE OPERATIONNELLE

Cours, Applications, Exercices & Sujets d'Examen



BTS Deuxième Année
FINANCE COMPTABILITE & GESTION DES ENTREPRISES



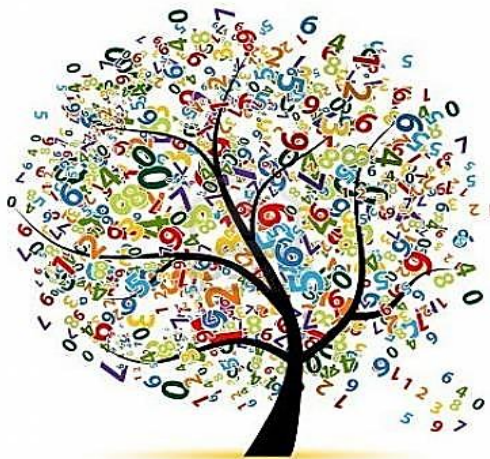
SOMMAIRE

1^{ère} PARTIE : MATHEMATIQUES FINANCIERES : LES OPERATIONS FINANCIERES DE LONG TERME.....	1
LES INTERETS COMPOSES.....	2
LES ANNUITES.....	8
LES EMPRUNTS INDIVIS.....	17
LES EMPRUNTS OBLIGATAIRES.....	26
 2^{ème} PARTIE : RECHERCHE OPERATIONNELLE.....	 32
PROGRAMMATION LINEAIRE.....	33
GESTION DE STOCKS.....	51
THEORIE DES GRAPHS ET ORDONNANCEMENT.....	59

Partie

1

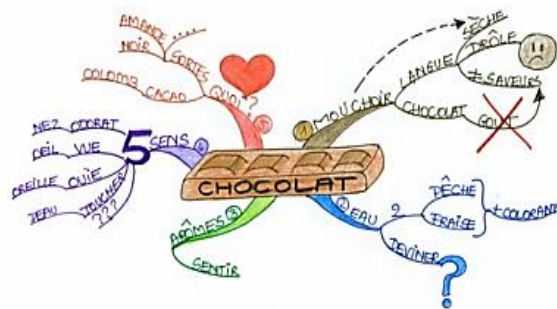
MATHEMATIQUES FINANCIERES



Chapitre

1

LES INTERETS COMPOSES



Les valeurs d'un capital sont liées à une date. Le temps influe sur la valeur du capital qui varie et est matérialisée par l'intérêt.

Si avec les intérêts simples l'on calcule l'intérêt et l'on incorpore au capital, pour les intérêts composés, l'on a le capital final (valeur acquise) et par soustraction l'on tire l'intérêt.

I - Notion de capitalisation

Quand on place à un certain taux pendant une période un capital, il produit des intérêts. Ce capital et l'intérêt qu'il a produit, ensemble forment le nouveau capital qui produit un nouvel intérêt au même taux. Ainsi de suite, sans toucher (réduire ou augmenter) le capital, il produit des intérêts qui croissent très rapidement. L'on pourrait donc prédire la valeur exacte que va acquérir un capital après n périodes de placement au taux i : l'on parle de **capitalisation**.

Périodes	Capital placé en début de période	Intérêt produit pendant la période	Capital obtenu en fin de période
1	C	$C \cdot i$	$C + C \cdot i = C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$C(1+i) \cdot i$	$C(1+i) + C(1+i) \cdot i = C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2 \cdot i$	$C(1+i)^2 + C(1+i)^2 \cdot i = C(1+i)^3$
-	-	-	-
-	-	-	-
-	-	-	-
P	$C(1+i)^{p-1}$	$C(1+i)^{p-1} \cdot i$	$C(1+i)^{p-1} + C(1+i)^{p-1} \cdot i = C(1+i)^p$
-	-	-	-
-	-	-	-
-	-	-	-
n-1	$C(1+i)^{n-2}$	$C(1+i)^{n-2} \cdot i$	$C(1+i)^{n-2} + C(1+i)^{n-2} \cdot i = C(1+i)^{n-1}$
n	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1} \cdot i$	$C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-1} \cdot i = C(1+i)^n$

Du tableau, il en découle que, la valeur acquise par un capital C placé au taux i pendant n périodes est C_n donné par la formule générale :

$$C_n = C(1+i)^n$$

Capitaliser c'est déterminer à un taux donné la valeur future d'un capital.

Remarques :

- la formule de la capitalisation ne s'applique que si le taux d'intérêt et la durée de placement sont dans la même unité de temps.
- L'intérêt est obtenu en soustrayant le capital initial de la valeur acquise :

$$I = C_n - C$$

Exemple : combien obtient-on en plaçant 3.750.000 € au taux de 8,5% pendant 5 ans ?

RESOLUTION

Valeur acquise après 5 ans :

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$C_5 = 3.750.000 (1+0,085)^5$$

$$C_5 = 5.638.712,59$$

On obtient au bout de 5 ans la somme de 5.638.712,59 €.

2- Taux proportionnels et taux équivalents

2-1- Taux proportionnels

Deux taux correspondant à 2 périodes différentes sont dits proportionnels lorsque leur rapport est proportionnel à leur période de capitalisation.

Exemple : Quel est le taux trimestriel proportionnel au taux annuel de 7,2% ?

RESOLUTION

Le rapport de périodes est de $\frac{3}{12} \text{ mois} = \frac{1}{4}$

Donc le taux trimestriel proportionnel correspondant : $\frac{1}{4} \times 7,2\% = 1,8\%$

2-2- Taux équivalents

Deux taux correspondant à 2 périodes de capitalisation différentes sont dits équivalents lorsque pour une même durée de placement ils produisent la même valeur acquise pour un capital donné.

Soit D et d , deux période telles que D est n fois plus longue que d ;

t_D et t_d les taux respectifs portant sur D et d .

si t_D et t_d sont équivalents alors :

$$1 + t_D = (1 + t_d)^n \text{ ou } (1 + t_D)^{1/n} = 1 + t_d$$

Exemple : Quel est le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 7,2% ?

$$1 + i_a = (1 + i_t)^4 \implies i_t = (1 + i_a)^{1/4} - 1 = 1,75 \%$$

3- Taux moyen de placement

Un capital C est placé pendant n_1 années au taux t_1 , puis au taux t_2 pendant n_2 années puis pendant n_3 années au taux t_3 ainsi de suite jusqu'à n_j années au taux t_j . Pour avoir le taux moyen i de ce placement, il faut :

$$C_n = C(1+i)^n \quad \text{avec } n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_j$$

$$C(1+i)^n = C(1+i)^{n_1} (1+i)^{n_2} (1+i)^{n_3} \dots (1+i)^{n_j}$$

$$(1+i)^n = (1+i)^{n_1} (1+i)^{n_2} (1+i)^{n_3} \dots (1+i)^{n_j}$$

$$1 + i = [(1 + i)^{n_1} (1 + i)^{n_2} (1 + i)^{n_3} \dots (1 + i)^{n_j}]^{-n}$$

$$i = [(1 + i)^{n_1} (1 + i)^{n_2} (1 + i)^{n_3} \dots (1 + i)^{n_j}]^{-n} - 1$$

Exemple:

On place un capital de 2.500 € selon les conditions suivantes :

- taux de 4% pendant 3 ans ;
- taux de 4,75 pendant 5 ans ;
- taux de 5% pendant 2 ans.

1- Quel est le taux moyen de ce placement ?

2- Calculer la valeur acquise par ce capital au terme de ce placement.

4- Notion d'actualisation

C'est la méthode qui consiste à déterminer la valeur d'un capital aujourd'hui sachant sa valeur future.

Soit C_0 le capital à la date t_0 ;

C_n la valeur acquise au bout de n périodes ;

i le taux d'intérêt.

$$C_0 = C_n (1 + i)^{-n}$$

L'actualisation est l'opération inverse de la capitalisation.

Exemple : Nous voulons percevoir 1.000.000 rands dans 4 ans. Combien faut-il placer à intérêt composé au taux de 3,5 %.

RESOLUTION

$$C_0 = C_n (1 + i)^{-n}$$

$$C_0 = 1.000.000 (1 + 3,5/100)^{-4}$$

$$C_0 = 871.442,23$$

On doit placer la somme de 871.442,23 rands.

Escompte à intérêt composé

L'escompte d'un effet commercial dont l'échéance est supérieure à 1 an est égale à la différence entre la valeur nominale et la valeur actuelle.

Soit e l'escompte à intérêt composé ;

C_0 la valeur nominale

C_n la valeur actuelle

$$e = C_0 - C_n$$

Exemple : Des effets de nominal 6.000.000 FCFA échéant dans 12 ans, escompté au taux annuel de 9 %. Calculer l'escompte.

Valeur actuelle C_{-12} :

$$C_{-12} = C_0 (1 + 9/100)^{-12} = 2.133.208,35 \text{ FCFA}$$

Escompte e :

$$e = C_0 - C_{-12} = 6.000.000 - 2.133.208,35 = 3.866.791,65 \text{ FCFA}$$

L'escompte est de 3.866.791,65 FCFA.

5- Equivalence à intérêt composé

Deux capitaux placés à intérêts composés au même taux sont équivalents à une date donnée si leurs valeurs actuelles sont égales.

REMARQUE : Si deux capitaux sont équivalents à une date donnée, ils sont équivalents à toute autre date.

Exemple : Montrer que les capitaux C_1 de 250.000 F et C_2 de 302.500 F payables respectivement dans 3 ans et 5 ans sont équivalents au taux de 10 %.

6- EXERCICES

- I- Un capital de 2 millions F a rapporté 5.796.000F en 13 ans dans une banque A. Le taux d'intérêt composé appliqué dans une autre banque B est de 6%. En tant qu'investisseur, sur laquelle des banques se portera votre choix pour le placement de vos liquidités ?
- II- On dépose en banque 1 million F productifs d'intérêt composé. Un an après, on retire 1 million F de ce compte. Un an après ce retrait, on dispose en banque de 80.625F.
 - 1) Calculer le taux de capitalisation annuel.
 - 2) Calculer le taux trimestriel équivalent.
- III- Un capital de 1 million F, placé à intérêt composé à un certain taux annuel, a produit pendant la 5^{ème} année de placement, un intérêt égal à celui qu'il aurait produit, à intérêt simple au même taux, en 427 jours.
 - a) Calculer le taux de placement
 - b) Calculer l'intérêt produit au bout des 10 années de placement.
 - c) calculer l'intérêt produit à la 5^{ème} année, à la 10^{ème} année.

- IV- Combien de temps faut-il à un capital de 8.639.521.470.000F placé au taux annuel de 4% pour tripler ? quintupler ?
- V- Un capital de 35 millions F est placé à intérêt composé pendant 8 ans et 5 mois, aux conditions suivantes :
- 3,5% pendant 4 ans ;
 - 4,5% les 2ans et 7 mois suivants ;
 - 5% le reste du temps.
- 1) Calculer les intérêts sur ce placement.
2) Quel est le taux moyen de ce placement ?

NOTIONS ESSENTIELLES :

- 1- Intérêt composé
- 2- Capitalisation
- 3- Actualisation
- 4- Taux proportionnel
- 5- Taux équivalent
- 6- Escompte à intérêt composé
- 7- Equivalence à intérêt composé
- 8- Valeur acquise
- 9- Valeur actuelle

Chapitre

2

LES ANNUITES



I - Notion sur les annuités

Les **annuités** sont une suite de versements effectués à intervalles de temps égaux. L'intervalle de temps entre deux versements consécutifs, appelé **période**, peut-être l'année le semestre le trimestre ou le mois. Dans ce cas on parlera d'**annuité** de **semestrialité** de **trimestrialité** voire de **mensualité**. Mais le mot annuité s'emploie à la place de toutes ces périodes.

Une suite d'annuité se caractérise par :

- la date du 1^{er} versement ;
- le nombre de versements n ;
- le montant de chaque versement ;
- la période ;
- la date du dernier versement ;
- le taux d'intérêt.

Une suite d'annuités sert à constituer un *capital* ou à rembourser un *emprunt*.

Les annuités sont dites **temporaires** lorsque le nombre de termes est connu. Les annuités dites **perpétuelles** ont des termes infinis. On parle d'annuités **viagères** si le nombre d'annuité dépend de la durée de vie d'une ou de plusieurs personnes.

Désignons par :

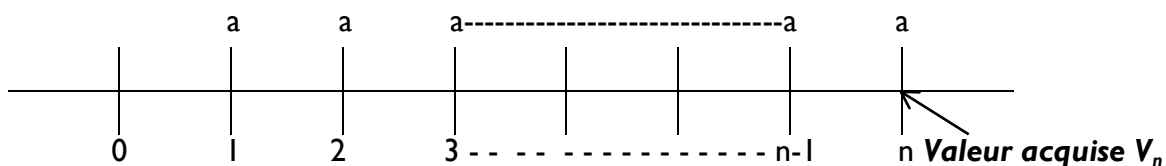
- V_0 , la valeur actuelle
- V_n , la valeur acquise
- a , l'annuité
- i , le taux d'intérêt.

2- Annuités constantes

Ce sont des annuités dont les montants versés sont les mêmes.

2-1- valeurs acquises

Supposons une suite d'annuités constituée de n versements égaux au taux i .



La valeur acquise de cette suite d'annuité est la somme des valeurs acquises par chacune de ces annuités.

1 ^{er} versement	: $a(1+i)^{n-1}$
2 ^{ème} versement	: $a(1+i)^{n-2}$
.	
.	
.	
.	
$(n-1)$ ^{ième} versement	: $a(1+i)$
n ^{ième} versement	: a

La valeur acquise $V_n = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + \dots + a(1+i) + a$, nous permet d'aboutir à la formule générale :

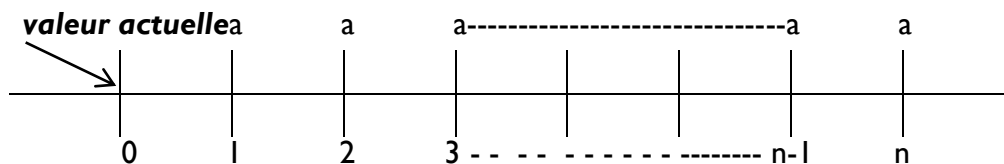
$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Exemple : Pour se constituer un capital, on doit verser 27 mensualités de 101.100 FCFA au taux de 2,3 % le mois. Combien obtient-on à la fin de cette opération ?

NB : - La valeur acquise (ici) s'obtient immédiatement après le dernier versement.
- L'exposant dans la formule générale est égal au nombre de versements effectués.

2-2- Valeur actuelle

Pour déterminer la valeur actuelle d'une suite d'annuités, on doit se situer au jour de la signature du contrat, c'est-à-dire une période avant le premier versement.



Plus simplement, nous pouvons déduire de la valeur acquise la valeur actuelle :

$$V_n = V_0 (1+i)^n \implies V_0 = V_n (1+i)^{-n}$$

$$\implies V_0 = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i)^{-n}$$

Donc la formule de la valeur actuelle est:

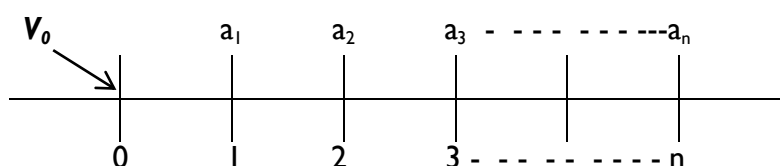
$$V_0 = a \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

NB : la date à laquelle on obtient la valeur actuelle se situe une période avant le 1^{er} versement.

2-3- Evaluation à une date quelconque

2-3-1- Annuités immédiates

Pour évaluer une suite d'annuités, lorsqu'on se situe une période avant le premier versement, on parle de suite d'**annuités immédiates**.



Il n'y a qu'une période entre la 1^{ère} annuité et la date d'évaluation V_0 .

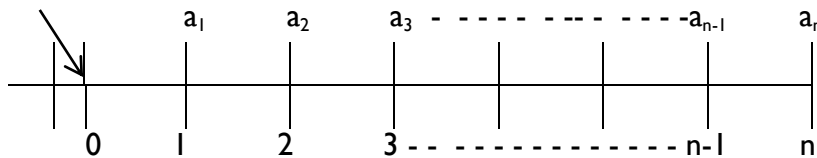
La formule pour les suites d'annuités dites immédiates est :

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

2-3-2- Annuités différées

Une suite d'annuités est dite **différée**, si la date d'évaluation se situe à plus d'une période du 1^{er} versement.

V_{-t}



Le temps t peut être un nombre entier ou non de périodes.

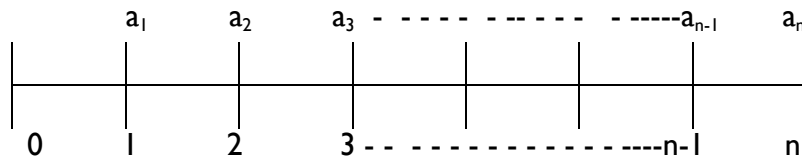
La valeur V_{-t} est obtenue par actualisation de V_0 :

$$V_{-t} = V_0 (1+i)^{-t} \implies V_{-t} = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} (1+i)^{-t}$$

2-3-3- Annuités anticipées

Une suite d'annuités est dite **anticipée** si la date d'évaluation se situe après la date de signature du contrat mais avant le 1^{er} versement.

V_{+t}



La valeur de V_{+t} est obtenue par capitalisation de V_0 :

$$V_{+t} = V_0 (1+i)^t \implies V_{+t} = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} (1+i)^t$$

2-4- Remplacement de suites.

Cette opération se fonde sur l'équivalence de deux capitaux.

2-4-1- Remplacement par un versement unique

Pour remplacer une suite de n annuités constantes placées au taux i par un versement unique à la période m , il faut poser l'égalité des valeurs actuelles :

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \text{ et } V_0' = V (1+i)^{-m}$$

$$V_0 = V_0'$$

2-4-2- Remplacement par une autre suite

On peut remplacer une suite de n annuités constantes placées au taux i par une suite de m versements constants au **même taux**.

A l'équivalence on a :

$$V_0 = V'_0$$

Avec

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \quad \text{et} \quad V'_0 = \frac{1 - (1+i)^{-m}}{i}$$

Exemple : on veut remplacer une suite de 20 trimestrialités constantes de 192.000 FCFA par soit :

- 50 mensualités constantes a ;
- Un versement unique de 3.500.000 FCFA.

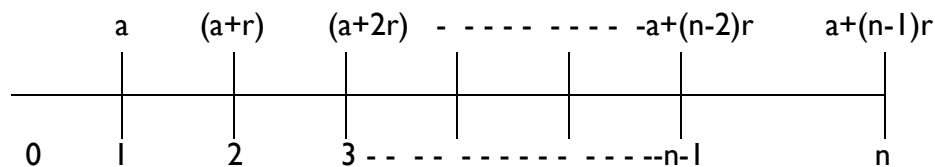
Déterminer au taux de 7,2% l'an la mensualité a puis l'échéance du versement unique.

3- Annuités variables

Ce sont des annuités dont les montants ne sont pas les mêmes.

3-1- En progression arithmétique

Une suite est en progression arithmétique lorsque les termes de cette suite s'obtiennent en ajoutant un montant fixe appelé raison au terme précédent.



3-1-1- Valeurs acquises

La valeur acquise d'une suite d'annuités en progression arithmétique est égale au total des valeurs acquises par chaque annuité considérée individuellement, à la date n du dernier versement.

$$V_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \left(a + \frac{r}{i} \right) - \frac{nr}{i}$$

Exemple : calculer la valeur acquise d'une suite d'annuités en progression arithmétique dont $a_1 = 20.000$ F, la raison $r = 2.500$ F pendant 30 mois au taux de 3,5% par mois.

3-1-2- Valeur actuelle

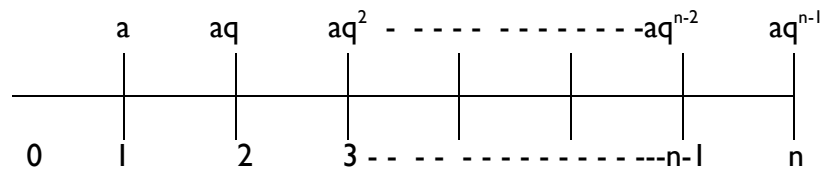
C'est l'évaluation avant le premier versement (date de signature du contrat) :

$$V_0 = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \left(a + \frac{r}{i} + nr \right) - \frac{nr}{i}$$

Exemple : calculer la valeur actuelle d'une suite d'annuités en progression arithmétique dont $a_1 = 20.000$ F, la raison $r = 2.500$ F pendant 30 mois au taux de 3,5% par mois.

3-2- En progression géométrique

Une suite est dite en progression géométrique lorsque les termes s'obtiennent en multipliant le terme précédent par une constante q appelée raison.



3-2-2- Valeur acquise

C'est l'évaluation à la date du dernier versement :

$$V_n = a_1 \frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q} \quad \text{ou} \quad V_n = a_1 \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}$$

Dans le cas où $q = 1+i$ alors

$$V_n = n a_1 (1+i)^{n-1}$$

3-2-3- Valeur actuelle

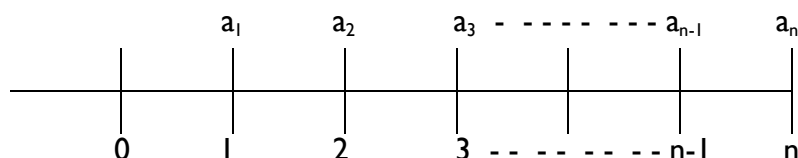
Elle s'obtient en actualisant la valeur acquise :

$$V_0 = a_1 \frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q} (1+i)^{-n} \quad \text{ou} \quad V_0 = a_1 \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} (1+i)^{-n}$$

Dans le cas où $q = 1+i$ alors

$$V_0 = n a_1 (1+i)^{-1}$$

3 3- Versements d'annuités dont les montants n'ont aucun lien n'entre eux



3-3-1- Valeurs acquises

On applique, quand cela arrive, les règles de la capitalisation à intérêts composés à chacun des montants versés :

$$V_n = a_1(1+i)^{n-1} + a_2(1+i)^{n-2} + \dots + a_{n-1}(1+i) + a_n$$

3-3-2-Valeurs actuelles

C'est l'évaluation à la date de signature du contrat, c'est-à-dire une période avant le premier versement. On a donc :

$$V_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + \dots + a_{n-1}(1+i)^{1-n} + a_n(1+i)^{-n}$$

EXERCICES

I- Pour acheter un terrain, on verse le jour de la signature du contrat, 1 million. Un mois après on verse 1 million et 1 an après ce dernier versement on effectue 18 mensualités de 100.000 FCFA. Taux 7.5 % l'an. Donner la valeur du terrain à la date de signature du contrat.

II- On veut partager la somme de 7.000.000 FCFA entre trois frères âgés respectivement, le jour du partage, de 9 ans 13 ans et 15 ans. Le partage s'effectue de façon à ce que chaque bénéficiaire dispose à sa majorité (21 ans) de la même somme après capitalisation annuelle de la fraction de 7 millions qui lui a été dévolue. Taux annuel 8%. Effectuer ce partage.

III- Un emprunt de 3.500.000 FCFA, est remboursé comme suit :

- 1 million un an après l'emprunt ;
- 750.000 FCFA un mois après le 1^{er} versement ;
- Le solde un mois après le 1^{er} versement.

L'emprunteur souhaite plutôt rembourser par n mensualités constantes, la 1^{ère} venant à échéance 4 mois après la signature du contrat. Taux 5%.

- 1- Quel est le solde à verser ?
- 2- Donner la valeur de l'annuité pour :
 - $n = 10$
 - $n = 15$
- 3- Calculer le nombre de versements pour des annuités de 250.000 FCFA.

IV- Un appareil électroménager coûte 1.188.000 FCFA après avoir subi 2 réductions successives sur le prix d'achat brut, l'une de 10% et l'autre de 12%. L'acheteur verse 400.000 FCFA à l'achat puis le solde est réglé en 12 mensualités de 71.474 FCFA chacune. La 1^{ère} est versée un mois après l'achat.

- 1- Quel est le prix d'achat brut de l'appareil ?
- 2- Calculer le taux d'intérêt qui correspond à ce crédit.

(d'après BTS IG 2007)

TRAVAUX DIRIGES

Exercice n°1

Calculer la valeur acquise par 84 mensualités de chacune 10 000 F. taux annuel : 10 %.

Exercice n°2

12 annuités constantes, de chacune 12 500 F, ont une valeur acquise à l'origine de 90 000 F. Calculer le taux auquel ces annuités ont été escomptées.

Exercice n°3

M. Yao place à intérêts composés 15 trimestrialités de 100 000 F du 1^{er} Janvier 2010 au 1^{er} Juillet 2013, période pendant laquelle le taux varie.

Taux trimestriels de : 2% du 1^{er} Janvier 2010 au 31 Mars 2011 ;
1,75% du 1^{er} Avril 2011 au 31 mars 2012 ;
2,25% du 1^{er} Avril 2012 au 1^{er} Juillet 2013.

Quelle est la valeur définitive de ce placement, au moment du dernier versement, le 1^{er} Juillet 2013 (capitalisation trimestrielle).

Problème n°1

M. N'Guessan envisage de constituer un capital de 3 420 082,881 F pour s'acheter une Mercedes. Pour cela, il verse chaque trimestre la somme de 250 000 F sur son compte d'épargne, au taux annuel de 8,25%.

Travail à faire :

1. Quel est le taux trimestriel équivalent à ce taux annuel ? (arrondir le résultat au taux usuel le plus proche).
2. Combien de versements trimestriels doit-il effectuer pour atteindre son objectif ?
Le capital acquis, M. N'Guessan va se renseigner chez le concessionnaire de Mercedes. Il constate que son épargne est insuffisante pour l'achat de la voiture de son choix. Il décide alors de laisser son épargne dans le compte pendant 18 mois le temps de bien réfléchir.
3. Quel sera le montant de son épargne à la fin du temps de réflexion ?
4. Après avoir bien réfléchi, et vu que son épargne ne suffit toujours pas, il demande et obtient auprès de sa banque un prêt dont le montant ajouté à son épargne lui permettra d'acheter la voiture. Ce prêt est remboursable par le versement de 20 trimestrialités constantes de 200 000 F au taux trimestriel de 3,5%.
 - a) Quel est le montant du prêt ?
 - b) Quel est le coût de revient de la voiture ?

Problème n°2

M^{me} N'Guessan souhaite se constituer un capital de 200 000 F pour le 1^{er} Janvier 2010. Pour cela elle verse sur un compte, chaque début d'année à partir du 1^{er} Janvier 2000 et jusqu'au 1^{er} Janvier 2009, une somme **S** constante.

Travail à faire :

1. Quel doit être le montant de cette somme si le taux d'intérêt ayant servi sur ce compte est de 8%.
2. Même question, en supposant cette fois que les versements annuels sont en progression géométrique de raison 1,12. (On précisera le versement à effectuer le 1^{er} Janvier 2000 et celui à effectuer le 1^{er} Janvier 2009).

Problème n°3

Dans le souci de préparer sa retraite, M. CAMARA décide d'ouvrir un PEL (Plan – Épargne – Logement) auprès de sa banque le 31 Décembre 1999. De ce fait, vu ses différents engagements, il effectue des

placements annuels de 200 000 F chacun, les 1^{er} Janvier de chacune des années 2 000 à 2 019 inclusivement. Ces placements étant prévus devoir porter intérêt composé à 0,2871% le mois.

Travail à faire :

1. De quelle somme disposera M. CAMARA à la date du 1^{er} Janvier 2 019 ?
2. Quelle somme sera mise à sa disposition le 1^{er} Janvier 2 029, le capital constitué en 2 019 ayant continué à porter intérêt ?
3. Immédiatement après avoir effectué le placement du 1^{er} Janvier 2 005, M.N'GUESSAN constate que le capital déjà constitué, ainsi que les placements à venir, ne pourront plus désormais produire des intérêts annuels qu'au taux de 7,5%. Dans ces conditions de quelle somme M.CAMARA disposera t-il le 1^{er} Janvier 2 029 ?

NOTIONS ESSENTIELLES

- 1- Annuité
- 2- Mensualité / trimestrialité ...
- 3- Annuités constants / annuités variables
- 4- Annuités immédiates
- 5- Annuités différées
- 6- Annuités anticipées
- 7- Equivalence
- 8- Progression arithmétique / progression géométrique

Chapitre

3

LES EMPRUNTS INDIVIS



I - Notions d'emprunts indivis

On parle d'**emprunts indivis** lorsque pour une somme d'argent prêtée, il n'y a qu'un seul prêteur. Le prêteur peut être une personne physique ou une personne morale.

De façon générale un emprunt est une dette que l'on s'engage à rembourser par échelonnement dans le temps. Ce qui implique le remboursement du capital intrinsèque augmenté des intérêts calculés à un taux donné dans les conditions et modalités prévues par le prêteur.

Le principe de remboursement est fondé sur l'équivalence à intérêts composés des sommes empruntées et de celles qui sont remboursées. Aussi le contrat doit-il tenir compte de :

- le montant de l'emprunt ;
- la durée de remboursement ;
- la périodicité des remboursements ;
- le taux d'intérêt ;
- le système de remboursement.

Le remboursement peut se faire de façon progressive ou en une seule fois.

L'emprunteur, à la fin de chaque période, paie un intérêt calculé sur le capital non encore remboursé ainsi qu'une partie du capital emprunté.

2- Remboursement d'un emprunt indivis

Le remboursement d'un emprunt peut se faire de façon progressive, au moyen d'un tableau d'amortissement ou en bloc.

2-1- Remboursement d'un emprunt de façon progressive

2-1-1- Généralités

2-1-1-1- Tableau d'amortissement

On désigne par :

- D_0 : le capital emprunté
- $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$: les n annuités successivement versées ;
- $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$: les n amortissements
- $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$: la dette encore vivante après paiement de la 1^{ère}, 2^{ème}, ..., $n^{\text{ième}}$ annuité ;
- n : le nombre d'annuités
- i : le taux d'intérêt

périodes	Dette en début de période	Intérêt de la période	Amortissements de la période	Annuités	Dette de fin de période
1	D_0	$D_0 \times i$	m_1	$a_1 = D_0 \times i + m_1$	$D_1 = D_0 - m_1$
2	D_1	$D_1 \times i$	m_2	$a_2 = D_1 \times i + m_2$	$D_2 = D_1 - m_2$
3	D_2	$D_2 \times i$	m_3	$a_3 = D_2 \times i + m_3$	$D_3 = D_2 - m_3$
-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-
k	D_{k-1}	$D_{k-1} \times i$	m_k	$a_k = D_{k-1} \times i + m_k$	$D_k = D_{k-1} - m_k$
-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-
n-1	D_{n-2}	$D_{n-2} \times i$	m_{n-1}	$a_{n-1} = D_{n-2} \times i + m_{n-1}$	$D_{n-1} = D_{n-2} - m_{n-1}$
n	D_{n-1}	$D_{n-1} \times i$	m_n	$a_n = D_{n-1} \times i + m_n$	$D_n = D_{n-1} - m_n = 0$

2-1-1-2- Propriétés générales

A partir du tableau général d'amortissement, on peut tirer les propriétés suivantes :

- Propriété 1 : Relation liant capital emprunté et amortissements

$$D_0 = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum m_j$$

- Propriété 2 : Dernier amortissement

Comme $D_n = D_{n-1} - m_n$ Or $D_n = 0$ donc $D_{n-1} = m_n$

- Propriété 3 : Relation liant capital emprunté et annuités versées

$$D_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + a_3(1+i)^{-3} + \dots + a_n(1+i)^{-n} = \sum a_j (1+i)^{-j}$$

- Propriété 4: Relation liant annuités et amortissements

On a : $a_n = iD_{n-1} + m_n$ et comme $D_{n-1} = m_n$ alors $a_n = m_n (1+i)$

- Propriété 5: dette amortie après paiement de la $k^{\text{ième}}$ annuité

Soit R_k ce capital amorti :

$$R_k = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k = \sum m_j$$

- Propriété 6: dette vivante après paiement de la $k^{\text{ième}}$ annuité

$$D_k = D_0 - R_k$$

On peut aussi obtenir D_k en actualisant les annuités non encore échues :

$$D_k = a_{k+1}(1+i)^{-1} + a_{k+2}(1+i)^{-2} + a_{k+3}(1+i)^{-3} + \dots + a_n(1+i)^{-(n-k)}$$

ou écrire D_k sous la forme

$$D_k = D_0(1+i)^k - [a_1(1+i)^{k-1} + a_2(1+i)^{k-2} + a_3(1+i)^{k-3} + \dots + a_k]$$

Le remboursement progressif d'un emprunt peut se faire suivant deux types de modalités :

- le paiement par annuités constantes.
- le paiement par amortissements constants ;

2-1-2-Remboursement d'un emprunt indivis par annuités constantes

Certaines propriétés générales subissent quelques modifications.

- Propriété 3 : Relation liant capital emprunté et annuités versées

$$D_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

- Propriété 1 : Relation liant capital emprunté et amortissements

$$D_0 = m_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Loi des amortissements : Lorsque les annuités sont constantes, les amortissements suivent une progression géométrique croissante de raison $q = 1+i$.

$$m_{p+1} = m_p (1+i) \quad \text{ou} \quad m_p = m_1 (1+i)^{p-1}$$

- Propriété 5: dette amortie après paiement de la $k^{\text{ième}}$ annuité

$$R_k = m_1 \frac{(1+i)^k - 1}{i}$$

Propriété 6: dette vivante après paiement de la $k^{\text{ième}}$ annuité

$$D_k = a \frac{1 - (1+i)^{k-n}}{i} = m_1 \frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{i} = D_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1}$$

2-1-3 Remboursement d'un emprunt indivis par amortissements constants

Les amortissements étant constants, les propriétés deviennent :

- Propriété 1 : Relation liant capital emprunté et amortissements

$$D_0 = n m$$

- Propriété 4 : Relation liant annuités et amortissements

$$a_{j+1} = a_j - \frac{D_0 \times i}{n}$$

Loi des annuités : Lorsque les amortissements sont constants, les annuités tout comme les intérêts sont en progression arithmétique de raison r :

$$r = - \frac{D_0 \times i}{n}$$

- Propriété 5 : dette amortie après paiement de la $k^{\text{ième}}$ annuité

$$R_k = \frac{k \times D_0}{n}$$

- Propriété 6: dette vivante après paiement de la $k^{\text{ième}}$ annuité

$$D_k = \left(1 - \frac{k}{n} \right) D_0$$

Remarque :

Pour les autres propriétés, il n'y a rien qui change.

2-2- Remboursement d'un emprunt indivis en bloc

C'est un système de remboursement d'un emprunt en une seule fois à l'expiration des n périodes, en général l'année. Ce système s'appelle aussi **remboursement in fine** (se lit : « in finé »).

L'emprunteur ne verse que les intérêts du capital emprunté à la fin de chaque année. A l'expiration du délai des n années, il rembourse la totalité du montant emprunté, sans oublier le dernier intérêt.

En fait, ce système consiste à rembourser d'abord les intérêts. Enfin, on rembourse en bloc le capital. C'est dire que l'emprunteur dispose des fonds. Pour y arriver, il serait intéressant pour lui de constituer un fonds de remboursement : il doit placer des annuités à un certain taux t afin de constituer la somme à rembourser. Ces annuités constantes donneront une valeur acquise V_n égale au capital emprunté :

$$V_n = a \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

EXERCICES

I- On emprunte une somme S à une banque, remboursable par 10 annuités constantes dont la 1^{ère} est payée un an après la remise des fonds. Il ressort du tableau d'amortissement les informations suivantes :

$$m_1 = 627.453,95 \quad m_5 = 918.655,33$$

1- Déterminer :

- a- Le taux d'intérêt annuel ;
- b- La somme S empruntée ;

2- Calculer :

- a- Le montant de l'annuité constante ;
- b- Le capital restant dû après paiement de la 4^{ème} annuité.

3- Immédiatement après le paiement de la 4^{ème} annuité, on décide de rembourser le solde par 15 semestrialités qui diminuent de 8% chaque semestre. Taux 10%.

- a- Déterminer le taux semestriel équivalent ;
- b- Calculer la 1^{ère} et la 12^{ème} semestrialités
- c- Ecrire dans le tableau d'amortissement les lignes de la 1^{ère} et de la 12^{ème} semestrialités.

II- Un emprunt de 200 millions FCFA est remboursable par annuités constantes au taux de 5% l'an.

Sachant que le dernier amortissement doit être 19.242.570 FCFA, calculer :

- 1- l'annuité constante ;
- 2- le premier amortissement ;
- 3- la durée de l'emprunt ;
- 4- le capital restant dû après le paiement de la 4^{ème} annuité (arrondir au million de francs inférieur).

III- le 1^{er} janvier, un négociant a emprunté un capital remboursable par annuités constantes, la 1^{ère} annuité est payable le 31 décembre de la même année.

On donne les renseignements suivants :

- 1^{er} amortissement : 4.373.520 FCFA ;
- 6^{ème} amortissement : 5.321.055 FCFA
- 12^{ème} amortissement : 6.732.855 FCFA

1- Exprimer A_6 en fonction de A_1 , puis A_{12} en fonction de A_6 .

2- En déduire que :

$$\frac{A_6}{A_{12}} = \frac{A_1}{(1+i)A_6} \quad \text{ou} \quad A_k \text{ désigne l'amortissement de l'année de rang } k$$

3- Déterminer le taux de cet emprunt ;

4- Sachant que le montant de l'annuité constante est 7.573.520 FCFA, calculer le montant de l'emprunt.

5- Calculer le nombre d'annuités.

TRAVAUX DIRIGES

Exercice n°1

Pour l'acquisition d'un logement M. Fofana emprunte sur 15 ans une somme qu'il doit rembourser en 180 mensualités de 1 241,48 F CFA, la première mensualité étant versée après la remise des fonds. Taux annuel : 9,75% (utiliser le taux équivalent)

Quel est le montant de cet emprunt ?

Exercice n°2

En combien de semestrialités constantes peut-on rembourser un emprunt de 28 000 F CFA, si l'on dispose d'environ 10 000 F par semestre ? Taux annuel : 14,25% (utiliser le taux équivalent).

Dresser le tableau d'amortissement pour la(ou les) solution(s) retenue(s)

Exercice n°3

M. KENEDY emprunte un capital remboursable par 15 annuités constantes de 3 375 dollars.

Taux annuel d'intérêt progressif : 7,5% pendant les cinq premières années ; 8,5% pendant les cinq années suivantes ; 9% pendant les cinq dernières années.

Travail à faire :

1. Calculer, au jour de la remise des fonds (la première annuité échéant un an après) la valeur actuelle des cinq premières annuités, puis la valeur actuelle des cinq annuités suivantes et la valeur actuelle des cinq dernières annuités.
2. En déduire le montant du capital emprunté.
3. Présenter le tableau d'amortissement.

Problème n°1

La coopérative agricole de BINA O, a construit un magasin de stockage de Cacao, d'une capacité de 10 000 sacs de 50 Kg. Le tiers du coût de l'opération est financé par la coopérative Suisse, et le reste par un prêt bancaire amortissable en douze (12) annuités constantes.

Les deux premières lignes du tableau d'amortissement présentent les caractéristiques suivantes :

Période	Capital en début de période	Intérêt de la période	Amortissements	Annuités	Capital en fin de période
1		1 200 000		1 614 368,076	
2			464 092,245		

Travail à faire :

- I. a) Calculer le 1^{er} amortissement.

- b) Calculer le taux d'intérêt.
2. a) Déterminer le montant D_0 de l'emprunt.
b) En déduire le coût C de la construction.
3. Calculer le montant de la dette restante après le paiement de la 8^{ème} annuité ; ainsi que le 12^{ème} et dernier amortissement.
4. Déterminer la 1^{ère} ligne, la 2^{ème} ligne, la 8^{ème} ligne et la 12^{ème} ligne du tableau d'amortissement de cet emprunt.
5. A la fin de la 8^{ème} année, la coopérative réalise une production égale à toute la capacité du magasin ; et le Kilogramme de Cacao est vendu à 450 F. La coopérative décide alors de s'acquitter de la totalité de sa dette, immédiatement après le versement de la 8^{ème} annuité, en utilisant le $\frac{1}{50}$ ^{ème} de son chiffre d'affaires de l'année.
- a) Déterminer le chiffre d'affaires de la 8^{ème} année.
- b) Le $\frac{1}{50}$ ^{ème} du chiffre d'affaires de la 8^{ème} année suffira-t-il pour éponger la dette ? Justifier la réponse.

Problème n°2

Partie I : Résoudre dans $\mathbb{R}^+$, l'équation suivante : $2x^2 - x - 1,3115125 = 0$.

Partie II

Afin de moderniser une partie de ses magasins, M^{me} N'GUESSAN a emprunté une somme de 600 000 F auprès de sa banque, remboursable au moyen de deux versements annuels de 300 000 F et 393 453,75 F intervenant respectivement 1 an et 2 ans après l'emprunt.

Travail à faire :

1. Calculer le taux de l'emprunt ;
2. Présenter le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Partie III

M^{me} N'GUESSAN se rendant compte de l'insuffisance de cette somme, sollicite un second emprunt dans un autre établissement financier, amortissable en 10 annuités constantes, 1^{ère} intervient 1 an après cet emprunt. L'examen du tableau d'amortissement indique que les amortissements de la 3^{ème} année et de la 6^{ème} année sont respectivement de 23 460,22 F et 30 381,67F.

1) Calculer :

- a. Le taux de l'emprunt(i);
- b. Le capital emprunté (D_0) et le coût(C) total du projet ;
- c. Le montant de l'annuité constante(a).

2)

- a. Calculer le capital restant dû immédiatement après la 7^{ème} annuité ;
- b. Présenter les 3 dernières lignes du tableau d'amortissement.

Problème n°3

M. YAO a obtenu de sa banque, un prêt remboursable par annuités constantes pendant 22 ans ; la 1^{ère} annuité est payable un an après la remise des fonds ; et le 1^{er} amortissement s'élève à 387 323,2395 F.

Partie I : Au lendemain du paiement de la 11^{ème} annuité, M.YAO consulte le tableau d'amortissement que lui avait remis la banque ; il constate qu'il n'a remboursé que 8 000 000 F du capital emprunté.

- 1- a) Déterminer le taux d'intérêt.
b) En déduire le montant du 11^{ème} amortissement.
- 2- a) Quel est le montant du capital emprunté ?
(On arrondira le résultat, à la centaine de francs la plus proche).
b) En déduire le montant du capital restant dû
- 3- Calculer le montant de l'annuité constante.

Partie II : Lors du paiement de la 11^{ème} annuité, à sa propre demande, M. YAO obtient de la banque, l'autorisation de rembourser le capital restant dû, par des amortissements constants, et pendant 10 ans.

1. Calculer :
 - a) Le montant de l'amortissement constant.
 - b) Les montants des 12^{ème}, 13^{ème}, 21^{ème} annuités.
 - c) La somme de toutes les annuités de remboursement de cet emprunt.
2. Donner les 11^{ème}, 12^{ème}, 13^{ème} lignes du tableau d'amortissement de cet emprunt.

Problème n°4

Partie I

I. Afin de moderniser une partie de ses magasins, l'entreprise DONY-DONY décide de procéder à un investissement de 1,5 million de francs C FA.

Le financement de ce projet sera réalisé de la manière suivante :

- Autofinancement à raison d'un tiers ;
- Le reste par emprunt auprès d'un établissement financier qui propose les deux formules suivantes :

I.1- Emprunt formule A :

- Annuités constantes ;
- Taux annuel : 15% ;
- Capital restant dû après le versement de la cinquième annuité : 667 923,82 F ;
- La première annuité vient à échéance un an après le versement des fonds.

Travail à faire :

- I.1.1 calculer la durée de remboursement de l'emprunt.
- I.1.2 Présenter la cinquième ligne du tableau d'amortissement de l'emprunt.

I.2- Emprunt formule B :

- Semestrialités constantes ;
- Taux annuel : 15% ;
- Différence entre le dernier et le premier amortissement semestriel : 65 571,74F ;
- La première semestrialité vient à échéance un semestre après le versement des fonds.

Travail à faire :

- I.2.1 Calculer le montant S de la semestrialité.

I.2 .2 Déterminer la durée de remboursement de l'emprunt. (Utiliser le taux semestriel équivalent pour 100F arrondi à la deuxième décimale).

I.2.3 Présenter la 1^{ère} et la dernière ligne, du tableau d'amortissement.

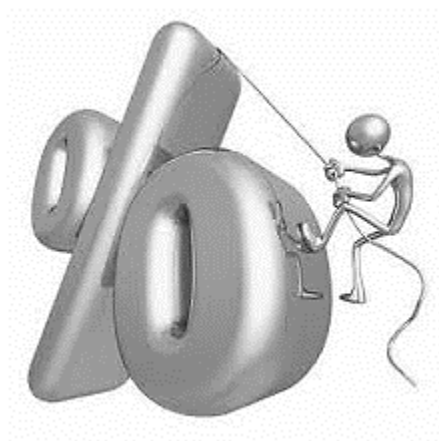
NOTIONS ESSENTIELLES

- 1- Emprunt indivis
- 2- Amortissements constants
- 3- Annuités constantes
- 4- Remboursement en bloc / remboursement in fine
- 5- Dette amortie
- 6- Dette vivante
- 7- Loi des amortissements
- 8- Loi des annuités

Chapitre

4

LES EMPRUNTS OBLIGATAIRES



I-Généralités

Pour un emprunt dont le montant est élevé, il est difficile pour un seul prêteur d'y faire face. C'est ainsi que l'emprunteur peut fractionner sa dette et s'adresser à une multitude de prêteurs.

On parle d'**emprunts obligataires** lorsqu'un emprunt a été contracté auprès d'un grand nombre de personnes.

Pour matérialiser cette créance, un titre négociable est émis : c'est une **obligation**.

Acheter une obligation, c'est prêter de l'argent à l'organisme qui émet ces titres. Les détenteurs d'obligations sont les **obligataires**.

2-Principes de remboursement des emprunts obligataires

La valeur nominale d'une obligation est la valeur inscrite sur cette obligation. On l'appelle aussi **valeur faciale** ou **pair**. Elle sert de base de calcul de l'intérêt.

Le **prix d'émission** est la somme effectivement prêtée par titre. L'obligation peut être émise **au pair, au-dessous du pair ou au-dessus du pair**.

Le taux nominal d'intérêt ou encore **taux facial** est le taux inscrit dans le contrat d'émission. Il peut être fixe ou variable.

Le **coupon d'intérêt** est l'intérêt simple perçu sur chaque obligation non amortie.

Le **prix de remboursement** est la valeur à laquelle une obligation est remboursée. Il peut être fixe ou variable.

La **prime de remboursement** est la différence entre le **prix de remboursement** et le **prix d'émission**.

Le **prix de souscription** est le montant total versé par l'obligataire à la souscription. En plus du prix d'émission, le souscripteur peut être tenu de rembourser la fraction courue entre la date de jouissance et la date de règlement.

Le **taux réel** est le taux de calcul à utiliser lorsque la valeur de remboursement n'est pas égale à la valeur nominale.

Un emprunt obligataire tout comme l'emprunt indivis peut se rembourser par **amortissements constants, annuités constantes ou en bloc**.

3- Tableau d'amortissement d'un remboursement au pair

On désigne par :

- D_0 : le capital emprunté
- $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$: les n annuités successivement versées ;
- $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$: les n amortissements
- D_k : la dette encore vivante après le paiement de la $k^{\text{ième}}$ annuité ;
- C : la valeur nominale d'une obligation ;
- β : la valeur de remboursement ;
- n : le nombre d'annuités ;

- N : le nombre d'obligations ;
- μ_k : le nombre d'obligations amorties au $k^{\text{ième}}$ tirage ;
- d_k : le nombre d'obligations encore vivantes après le $k^{\text{ième}}$ tirage ;
- i : le taux d'intérêt.

Remarques :

La valeur de remboursement β peut être égale ou différente de C .

Quand β est égal à C , on dit que le remboursement se fait au pair.

Quand β est supérieur à C , on dit que le remboursement se fait au-dessus du pair.

Quand β est inférieur à C , on dit que le remboursement se fait au dessous du pair.

Périodes	Obligations vivantes en début de période	Intérêt de la période	Amortissements		Annuités	Dettes de fin de période
			Nombre de titres	Montant		
1	N	$N \cdot C \cdot i$	μ_1	$m_1 = \beta \mu_1$	$a_1 = N \cdot Ci + m_1$	$D_1 = D_0 - m_1$
2	N_1	$N_1 \cdot C \cdot i$	μ_2	$m_2 = \beta \mu_2$	$a_2 = N_1 Ci + m_2$	$D_2 = D_1 - m_2$
3	N_2	$N_2 \cdot C \cdot i$	μ_3	$m_3 = \beta \mu_3$	$a_3 = N_2 Ci + m_3$	$D_3 = D_2 - m_3$
-	-	-		-	-	-
-	-	-		-	-	-
$n-1$	N_{n-2}	$N_{n-2} \cdot C \cdot i$	μ_{n-1}	$m_{n-1} = \beta \mu_{n-1}$	$a_{n-1} = N_{n-2} Ci + m_{n-1}$	$D_{n-1} = D_{n-2} - m_{n-1}$
n	N_{n-1}	$N_{n-1} \cdot C \cdot i$	μ_n	$m_n = \beta \mu_n$	$a_n = N_{n-1} Ci + m_n$	$D_n = D_{n-1} - m_n = 0$

4- Remboursement par annuités constantes

4-1- Formules

Les formules des emprunts obligataires ressemblent à celles des emprunts indivis.

EMPRUNTS INDIVIS	EMPRUNTS OBLIGATAIRES
Annuités constantes : $a = \frac{D_0 \times i}{1 - (1+i)^{-n}}$	$a = \frac{N \times C \times i}{1 - (1+i)^{-n}}$
EMPRUNTS INDIVIS	EMPRUNTS OBLIGATAIRES
1^{er} amortissement $m_1 = \frac{D_0 \times i}{(1+i)^n - 1}$	Nombre d'obligations amorties au 1^{er} tirage : $\frac{N \times i}{(1+i)^n - 1}$
Loi de progression des amortissements : $m_{p+1} = m_p (1+i)$ et $m_p = m_1 (1+i)^{p-1}$	Loi de progression du nombre d'obligations amorties : $\mu_{p+1} = \mu_p (1+i)$ et $\mu_p = \mu_1 (1+i)^{p-1}$
Dettes amorties après p échéances : $R_p = D_0 \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$	Nombre d'obligations amorties après p échéances : $r_p = N \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$
Dettes vivantes après p échéances : $D_p = D_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$	Nombre d'obligations encore vivantes après p échéances : $d_p = N \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$

4-2- Calcul du nombre d'obligations à amortir

Le nombre d'obligations à amortir doit être un entier. Comme le calcul ne donne pas toujours un nombre entier, il faut :

- d'abord calculer l'annuité que l'on appellera annuité théorique ;
- ensuite amortissement théorique = annuité théorique – intérêt de la période ;
- puis nombre d'obligations amorties = amortissement théorique / C, et on arrondit le résultat à l'entier le plus proche ;
- enfin nombre d'obligations vivantes au début d'une période = nombre d'obligations vivantes au début de la période précédente – nombre d'obligations amorties précédemment.

Exemple 1 : un emprunt remboursable par annuités constantes présente les caractéristiques suivantes : $D_0 = 5.000.000F$ $C = 5.000F$ $N = 1.000$ $i = 12\%$ $n = 5$ ans.

Etablir le tableau d'amortissement.

5- Remboursement par amortissements constants

Les formules sont semblables à celles des emprunts indivis :

EMPRUNTS INDIVIS	EMPRUNT OBLIGATAIRES
Amortissements constants $m = \frac{D_0}{n}$	Amortissements constants $m = \frac{N \times C}{n}$
Loi de progression des annuités : $a_{p+1} - a_p = -m \times i = -\frac{D_0 \times i}{n}$	Loi de progression des annuités $a_{p+1} - a_p = -\frac{N \times C \times i}{n}$

Exemple 2 : un emprunt remboursable par amortissements constants présente les caractéristiques suivantes :

$D_0 = 5.000.000F$ $C = 5.000F$ $N = 1.000$ $i = 12\%$ $n = 5$ ans.

Etablir le tableau d'amortissement.

6- Remboursement en bloc

Ce remboursement est identique à celui de l'emprunt indivis : l'emprunteur ne verse que les intérêts pendant les $n-1$ périodes ; à la $n^{\text{ième}}$ période il verse en plus du dernier intérêt le montant emprunté.

Exemple 3 : un emprunt remboursable in fine présente les caractéristiques suivantes :

$D_0 = 5.000.000F$ $C = 5.000F$ $N = 1.000$ $i = 12\%$ $n = 5$ ans.

Etablir le tableau d'amortissement.

Remboursement à une valeur différente du pair

Dans les exemples précédents, le remboursement s'effectuait au pair. Dans celui qui va suivre, le remboursement se fera au-dessus du pair.

Exemple 4 : une collectivité émet des obligations dont les caractéristiques sont les suivantes :

Nombre émis	: 50.000
Taux	: 7,5%
Durée	: 5 ans
Nominal	: 10.000F
Prix d'émission	: 9.500F
Valeur de remboursement	: 12.500F

TAF :

- 1- quel est le montant emprunté ?
- 2- quelle est la dette à rembourser ?
- 3- calculer le montant de l'annuité constante.
- 4- Dresser le tableau d'amortissement.

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Un emprunt obligataire répond aux caractéristiques suivantes:

Nombre d'obligations émises: 60 000

Nominal de l'obligation: 5000F

Valeur d'émission: 100%, soit 5 000F par obligation

Taux nominal d'intérêt: 9,10%

Remboursement au pair

Amortissement sur la base de 7 annuités constantes.

Travail à faire:

1. Présenter la 1^{ère}, 2^{ème} et dernière ligne du tableau d'amortissement.
2. Déterminer le taux effectif de rendement pour un souscripteur qui est remboursé au quatrième tirage.

Exercice 2

Caractéristiques d'emprunt obligations:

Nombre d'obligations émises: 50 000

Nominal de l'obligation: 5 000F

Valeur d'émission du titre: 5 000F

Remboursement du titre à : 5 312,50F

Taux nominal d'intérêt: 8,5%

Amortissement au moyen de 12 annuités sensiblement constantes comprenant intérêt, et amortissement au-dessus du pair.

Travail à faire:

1. Présenter la 1^{ère}, 2^{ème}, 3^{ème} et dernière ligne du tableau d'amortissement.
2. Calculer, à l'émission, le taux moyen de rendement de cet emprunt.
3. En supposant des frais d'émission, égaux à 2,4% du nominal, calculer le taux de revient de l'emprunt.

Exercice 3

Une société a émis un emprunt-obligations remboursable au pair, par annuités sensiblement constantes au taux nominal de 5,5%. La valeur nominale de chaque obligation est de 20 000F.

Travail à faire:

1. Le capital remboursé après le 7^{ème} tirage étant de 184 460 000F, déterminer le nombre d'obligations remboursées après le 7^{ème} tirage.
2. Déterminer le nombre d'obligations effectivement remboursées au 1^{er} tirage.
3. Donner l'expression de la 1^{ère} annuité. En déduire le nombre total d'obligations émises, puis montant de l'emprunt sachant que l'annuité théorique (que l'on pourrait arrondir à 49 800 000 F) est de 49 813 000F.
4. Déterminer la durée de l'emprunt.
5. Donner les 3 dernières lignes du tableau d'amortissement de cet emprunt.

Exercice 4

La société de transport de BINA O (STB) lance un emprunt-obligations pour l'achat de cars. Le montant de l'emprunt est estimé à 2 000 000 000F et la souscription est payée à 9420F.

Le montant de l'emprunt correspond à N=200 000 titres, remboursés au pair par annuités sensiblement constantes et par tirage au sort.

Partie I

Travail à faire :

1. Déterminer la valeur nominale de chaque titre.
2. Donner le type de souscription dans lequel s'est engagé la STB.
3. Quelle est la raison principale qui a poussé la STB à émettre ce type d'emprunt?

Partie II

La durée de l'emprunt est de 8 ans. Le nombre théorique d'obligations amorties la dernière année est 34080,73046 et le nombre théorique d'obligations amorties à la quatrième année est 23277,59747.

Travail à faire

1. Déterminer le taux de l'emprunt.
2. Calculer huit(08) titres amortis.
3. Calculer le montant des coupons puis le montant des amortissements versés aux obligataires au premier tirage au sort.
4. En déduire le montant de la première annuité réelle.

NOTIONS ESSENTIELLES

- 1- Obligation / obligataire
- 2- Emprunt obligataire
- 3- Prix d'émission
- 4- Prix de souscription
- 5- Prix de remboursement
- 6- Prime de remboursement
- 7- Remboursement au pair / au-dessus du pair / en dessous du pair
- 8- Remboursement par annuités constantes / amortissements constants / en bloc

Partie

2

RECHERCHE

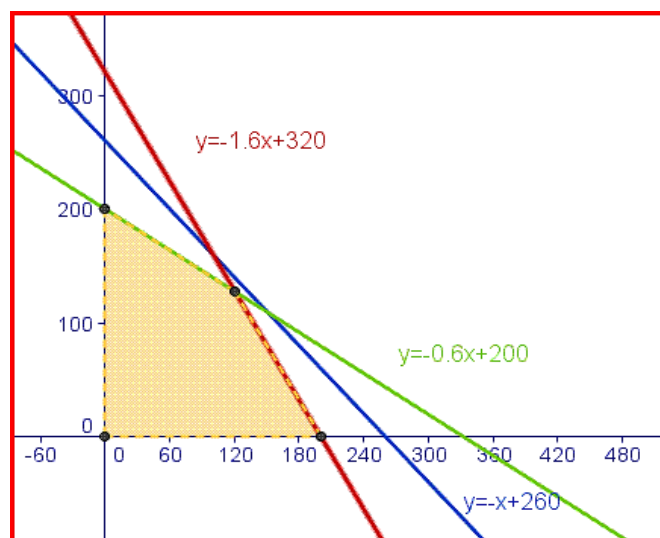
OPERATIONNELLE



Chapitre

1

PROGRAMMATION LINEAIRE



I-Définition

On appelle Programmation Linéaire, le problème mathématique qui consiste à optimiser (maximiser ou minimiser) une fonction linéaire de plusieurs variables qui sont reliées par des relations linéaires appelées contraintes.

2- Rappels mathématiques

2-1- Systèmes d'équations linéaires

- Forme linéaire dans les variables :

$$a x + b y + c z + \dots + d = 0$$

ou $a^2 x + b y + c^3 z + \dots + e^4 = 0$

- Forme linéaire des paramètres :

$$a x^2 + b y + c z^3 + \dots + k = 0$$

NB : les variables sont les inconnues tandis que les paramètres ont une valeur fixée.

- Système d'équations linéaires

2-2- Equations de droites

- Toute droite du plan a une équation de la forme $a x + b y = C$ ou $y = a x + b$
- avec a et b deux réels non simultanément nuls.

- si $b = 0$, la droite (D) à tracer sera parallèle à l'axe des ordonnées ;
- Si $b \neq 0$, la droite (D) est sécante aux axes ;
- Si $a = 0$, la droite (D) sera parallèle à l'axe des abscisses.

- Deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur.

- Toute droite du plan délimite 2 demi-plans P_1 et P_2 dont la frontière est (D). Chaque demi-plan est caractérisé par une inéquation.

3- Programmes linéaires

Un programme linéaire se présente sous forme d'une fonction linéaire $z = f(x)$ qu'il faut optimiser sous des contraintes (équations et/ou inéquations) linéaires.

3-1- Illustration

Une entreprise fabrique deux types de produits P1 et P2 avec trois matières premières A, B et C tel que :

- pour produire P1 il faut 3 kilogrammes de A, 3 kg de B et 7 kg de C ;
- pour fabriquer P2, il faut 6 kg de A, 1 kg de B et 6 kg de C.

Les disponibilités en matières premières sont limitées à 3.000 kg de A, 1.500 kg de B et 4.200 kg de C.

La marge réalisée est de 30 F par unité de P1 et 50 F par unité de P2.

Quel est le programme optimal maximisant la marge.

3-2- Mathématisation du problème

3-2-1-Traduction des contraintes

- CHOIX DES VARIABLES D'ACTIVITE

Ce sont les inconnues du problème. Elles correspondent aux quantités de P1 et P2 à fabriquer :

x_1 = la quantité de P1 à produire ;

x_2 = la quantité de P2 à produire.

- FONCTION ECONOMIQUE

Encore appelée fonction objectif, la fonction économique est une fonction linéaire de variables x_1, x_2 que l'on cherche à optimiser. Ici nous allons la maximiser.

Soit Z la marge, la fonction économique devient :

$$\text{Max } (Z = 30 x_1 + 50 x_2)$$

- CONTRAINTES

Comme les quantités ne peuvent pas être négatives, on parle de contrainte de **non négativité** :

$$x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0$$

Ensuite nous allons traiter les contraintes de disponibilité des facteurs de production.

Prenons la matière première A : pour fabriquer une unité de P1 on a besoin de 3 kg de A. si l'on décide de fabriquer par exemple 8 unités de P1 on utilisera 24 kg (3 kg $\times$ 8) de A. comme nous ne savons pas combien d'unités nous devons produire, nous dirons pour produire x_1 unités de P1, nous aurons besoin de $3 x_1$ kg de A. on fait la même chose pour le produit P2. Pour x_2 unités de P2 on a besoin de $6 x_2$ kg de la matière première A. on a donc

$$3 x_1 + 6 x_2$$

Mais le texte impose une contrainte : les disponibilités en matières premières sont limitées à 3.000 kg de A. Ce qui signifie qu'il faut utiliser une quantité totale de la matière première A inférieure ou égale à 3.000 kg.

$$3 x_1 + 6 x_2 \leq 3.000$$

Enfin, on procède ainsi pour toutes les matières premières et les tous les produits.

Ce que l'on trouve peut se résumer dans le tableau suivant :

	Matière A	Matière B	Matière C
x_1 unités de P1	$3 x_1$	$3 x_1$	$7 x_1$
x_2 unités de P2	$6 x_2$	x_2	$6 x_2$
Totaux	$3 x_1 + 6 x_2$	$3 x_1 + x_2$	$7 x_1 + 6 x_2$
Contraintes	$3 x_1 + 6 x_2 \leq 3.000$	$3 x_1 + x_2 \leq 1.500$	$7 x_1 + 6 x_2 \leq 4.200$

Exemple 1:

Un hôtel veut renouveler une partie de son équipement. Il faut changer au moins 72 coussins, 48 rideaux et 32 draps.

Deux ateliers de confections font les offres suivantes :

- l'atelier A1 propose 1 lot de 12 coussins, 4 rideaux et 4 draps au prix de 42.000F ;

- l'atelier A2 propose 1 lot de 6 coussins, 6 rideaux et 2 draps au prix de 33.000F.

Quel est le programme qui minimise les dépenses de renouvellement ?

3-2-2- Rédaction mathématique

Après avoir choisi les variables d'activité, sorti la fonction économique et trouver les contraintes, il faut les présenter dans un certain ordre : c'est la forme canonique.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 30 x_1 + 50 x_2 \\ \text{Sous les contraintes} \\ \left\{ \begin{array}{ll} 3 x_1 + 6 x_2 \leq 3.000 & \text{(A)} \\ 3 x_1 + x_2 \leq 1.500 & \text{(B)} \\ 3 x_1 + 6 x_2 \leq 4.200 & \text{(C)} \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 & \text{(non négativité)} \end{array} \right. \end{aligned}$$

NB : La forme canonique se caractérise par les signes d'inégalité.

3-3- Résolution graphique

Ce type de résolution n'est possible que lorsque l'on a que deux (2) variables d'activité.

Après avoir mathématisé le problème et l'avoir écrit sous forme canonique, il faut représenter le problème.

3-3-1- Procédures de résolution

3-3-1-1- Les étapes

- Résoudre le système de contraintes afin de déterminer l'ensemble des solutions admissibles ;
- Parmi les solutions admissibles, identifier la solution qui optimise la fonction économique.

3-3-1-2- Identification de la solution optimale

Deux possibilités s'offrent à nous : la méthode des droites parallèles et la méthode énumérative.

- La méthode des droites parallèles

Il faut donner une valeur arbitraire à Z afin de pouvoir représenter la fonction économique par une droite (Δ_1). Ensuite, tracer des droites parallèles à (Δ_1) qui passe par chaque sommet.

Le sommet le plus éloigné de l'origine est la solution dans le cas d'une **maximisation**.

En cas de **minimisation**, c'est le **sommet le plus proche** qui est solution.

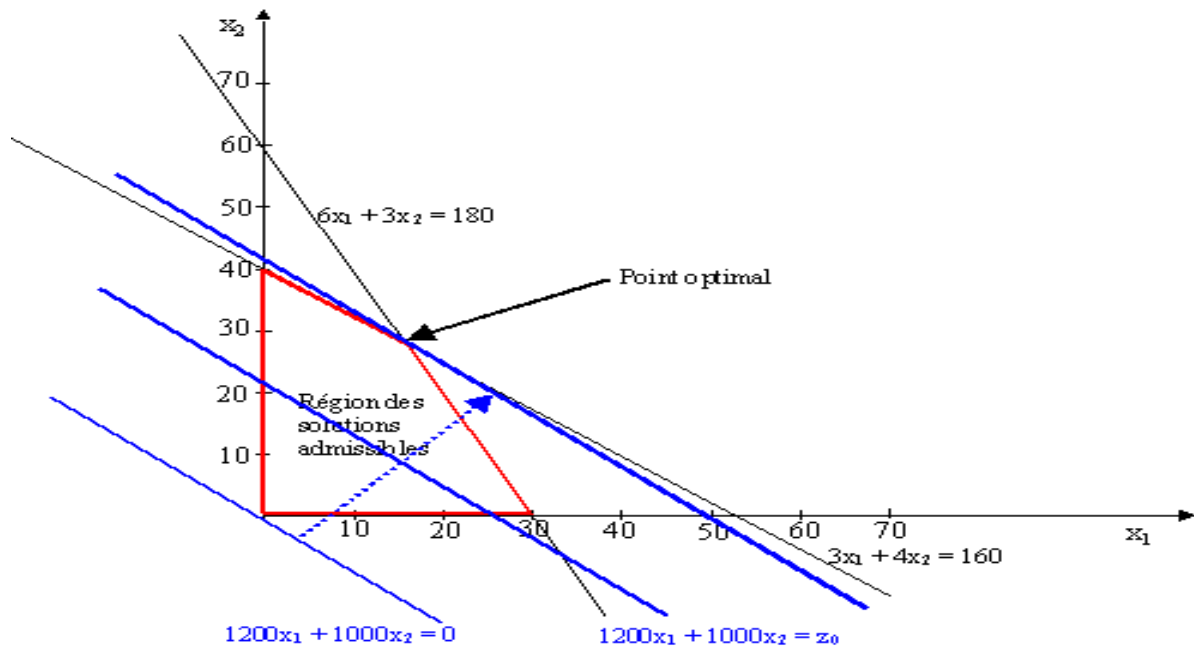
- La méthode énumérative

La zone des solutions admissibles (ou encore zone d'acceptabilité) forme un polygone. L'un des sommets est la solution optimale. Aussi, faut-il calculer, pour tous les sommets, la valeur de Z pour n'en retenir que l'optimum.

Exemple 2 : Résoudre le problème suivant:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 1200 x_1 + 1000 x_2 \\ \text{sous les contraintes} \\ \left\{ \begin{array}{l} 3 X_1 + 4 X_2 \leq 160 \\ 6 X_1 + 3 X_2 \leq 180 \\ X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Solution par la méthode des droites parallèles



On remarquera que la solution optimale se trouve nécessairement sur le pourtour de la région des solutions admissibles.

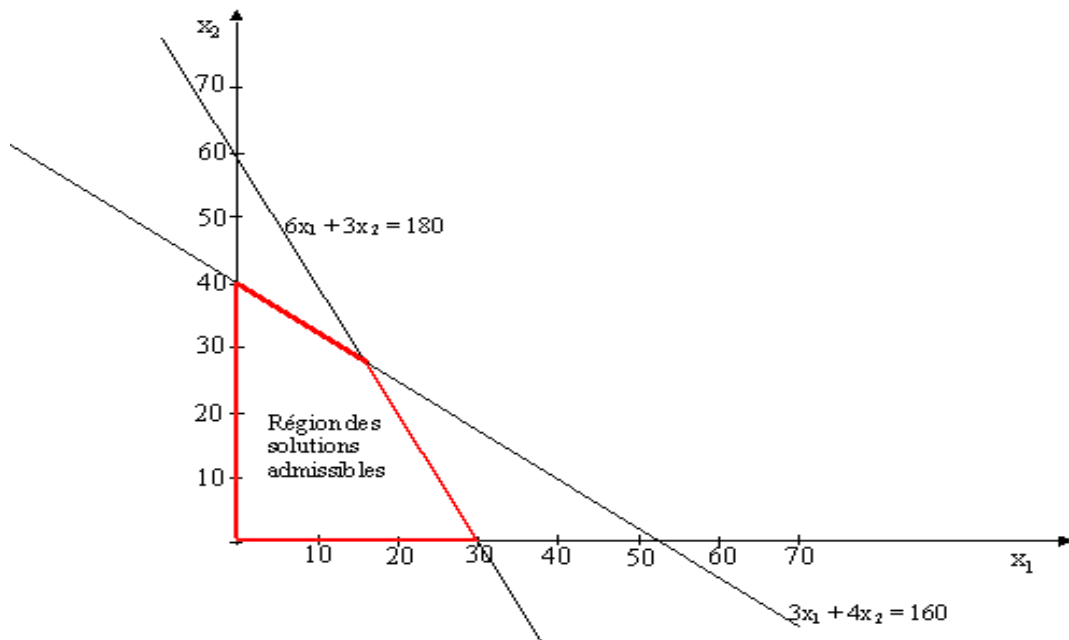
La solution se trouvant sur les deux droites d'équation

$$3X_1 + 4X_2 = 160$$

$$6X_1 + 3X_2 = 180$$

la résolution de ce système conduit à la solution $X_1 = 16$, $X_2 = 28$, d'où $Z = 47200$.

Solution par la méthode énumérative



La région des solutions admissibles est un polygone que nous nommerons OABC avec

O (0 ; 0) A(0 ; 40) B(16 ; 28) C(30 ; 0)

Calculons :

$$Z_A = 1.200 (0) + 1.000 (40) = 40.000$$

$$Z_B = 1.200 (16) + 1.000 (28) = 47.200$$

$$Z_C = 1.200 (30) + 1.000 (0) = 36.000$$

Ces calculs pourraient être résumés dans un tableau comme ci-dessous

Sommets	Coordonnées		$Z = 1.200x + 1.000y$	
	X	Y		
O	0	0	$Z_o = 0$	
A	0	40	$Z_A = 40.000$	
B	16	28	$Z_B = 47.200$	Z maximal
C	30	0	$Z_C = 36.000$	

Comme nous sommes dans un programme de maximisation, alors c'est le Z le plus élevé qui est solution du problème. Ici c'est Z_B et les coordonnées du point B sont les quantités recherchées.

On a donc : $X_1 = 16$ et $X_2 = 28$ pour $Z = 47.200$

Exemple 3 : résoudre l'exemple 2

3-4-Résolution par la méthode du simplexe

Cette forme de résolution d'un programme linéaire peut être envisagée quelque soit le nombre de variables. Elle s'impose dès lors que le programme linéaire comporte plus de deux (2) variables.

3-4-1- Algorithme du simplexe

Un algorithme est une procédure de traitement d'une catégorie de problèmes. La méthode du simplexe est une technique algébrique qui permet de trouver la solution d'un programme linéaire d'une façon ordonnée et précise, ceci, quelque soit le nombre de variables. Cette méthode est itérative c'est-à-dire le même principe se répète plusieurs fois jusqu'à la solution optimale, si elle existe.

3-4-2- Procédure de résolution

A partir de l'illustration (3-1-), nous allons donner les étapes à suivre.

- Mettre le programme sous forme canonique:

$$\text{Max } Z = 30 x_1 + 50 x_2$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} 3 x_1 + 6 x_2 \leq 3.000 \\ 3 x_1 + x_2 \leq 1.500 \\ 7 x_1 + 6 x_2 \leq 4.200 \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Ecrire le même programme sous forme standard :

Le passage de la forme canonique à la forme standard fait appel à des variables supplémentaires positives ou nulles appelées variables d'écart. Ces variables transforment les contraintes (sauf celles de non négativité) en égalités.

$$\text{Max } Z = 30 x_1 + 50 x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

Sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 6x_2 + e_1 = 3.000 \\ 3x_1 + x_2 + e_2 = 1.500 \\ 3x_1 + 6x_2 + e_3 = 4.200 \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; e_1 \geq 0 ; e_2 \geq 0 ; e_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Interprétation : les variables d'écart représentent les variables d'inactivité du programme avant toute production ($x_1 = x_2 = 0$) de P1 et P2. Et dans ce cas,

$e_1 = 3.000$ kg de matière première A disponibles ;

$e_2 = 1.500$ kg de matière première B disponibles

$e_3 = 4.200$ kg de matière première C disponibles.

- Tableau initial

Après la forme standard, nous avons une succession de tableau dont le 1^{er} que nous appelons tableau initial.

VHB VB	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	R
e_1	3	6	1	0	0	3.000
e_2	3	1	0	1	0	1.500
e_3	7	6	0	0	1	4.200
Z	30	50	0	0	0	0

L'écriture linéaire de $Z = 30 x_1 + 50 x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$ (ligne en pointillés) montre que la production de x_1 ou de x_2 augmente la valeur de Z. Donc la solution associée à ce 1^{er} tableau n'est pas optimale.

Règle générale :

L'optimum est atteint lorsque les coefficients dans la fonction économique sont tous négatifs ou nuls.

- 1^{ère} itération : Tableau 2

* Variable entrante (VE)

C'est la variable hors base pouvant entrer en base. Il faut prendre le coefficient positif le plus grand dans la ligne Z du tableau et voir la variable qui lui correspond.

Dans un problème de recherche du maximum, il paraît évident de commencer par fabriquer le produit ayant la contribution économique la plus grande.

Dans notre exemple, 50 (dans la case orange) est le plus grand coefficient positif de la ligne de Z, ce qui correspond à la variable entrante $VE = x_2$ (case verte).

* Variable sortante (VS)

C'est la variable de base sortant de celle-ci.

Le choix de la VS entraîne la modification du 1^{er} tableau. Il faut tracer une colonne après celle de R nommée C. pour remplir cette colonne il faut faire le rapport :

$$C = \frac{R_i}{VE_i} = \frac{\text{Coefficient de la colonne résultats}}{\text{Coefficient de la colonne variable entrante}}$$

Une fois cette colonne remplie, la variable sortante correspond au coefficient de C le plus petit.

Pour notre exemple on aura :

$$\frac{3.000}{6} = 500 \quad \frac{1.500}{1} = 1.500 \quad \frac{4.200}{6} = 700$$

VS = e_1 (correspond à 500)

En définitive, le 1^{er} tableau sera

$\uparrow$ VE

VHB VB	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	R	C
e_1	3	6	1	0	0	3.000	500
e_2	3	1	0	1	0	1.500	1.500
e_3	7	6	0	0	1	4.200	700
Z	30	50	0	0	0	0	

Dans le tableau 2, e_1 en ligne (case rouge) sera remplacé par x_2 (case verte)

* Le pivot

Il est situé à l'intersection de la colonne variable entrante et de la ligne variable sortante. Soit : 6 (valeur entourée dans le tableau).

• Règle de pivotage

Nous remarquons que les colonnes correspondant aux variables hors base sont unitaires. Dans le tableau suivant où x_2 sera hors base, sa colonne correspondante doit être unitaire. Pour ce faire, on divise la ligne L_p du pivot par le pivot pour obtenir :

$$L'_1 = L_p = \frac{L_p}{6} = \frac{3}{6} \quad 1 \quad \frac{1}{6} \quad 0 \quad 0 \quad 500$$

Une ligne L du tableau sera transformée en une ligne $L' = L - kL'_p$. k est le coefficient de la ligne L se trouvant sur la colonne du pivot, à transformer en zéro.

$$\begin{array}{rcl}
 L_2 & = & 3 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\,500 \\
 - \quad 1 \times L'_p & = & \frac{3}{6} \quad 1 \quad \frac{1}{6} \quad 0 \quad 0 \quad 500 \quad (k=1) \\
 \hline
 L'_2 & = & \frac{15}{6} \quad 0 \quad \frac{-1}{6} \quad 1 \quad 0 \quad 1\,000 \\
 L_3 & = & 7 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 4\,200 \\
 - \quad 6L'_p & = & 3 \quad 6 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 3\,000 \quad (k=6) \\
 \hline
 L'_3 & = & 4 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 1\,200 \\
 L_Z & = & 30 \quad 50 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 - \quad 50L'_p & = & \frac{150}{6} \quad 50 \quad \frac{50}{6} \quad 0 \quad 0 \quad 25\,000 \quad (k=50) \\
 \hline
 L'_Z & = & 5 \quad 0 \quad \frac{-50}{6} \quad 0 \quad 0 \quad -25\,000
 \end{array}$$

Après tous ces calculs nous pouvons dresser le tableau 2.

2^{ème} tableau

variables	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
VHB VB	x_1	-	e_1	-	-	R
x_2	1/2	1	1/6	0	0	500
e_2	5/2	0	-1/6	1	0	1.000
e_3	4	0	-1	0	1	1.200
Z	5	0	-25/3	0	0	-25.000

Conclusion partielle : la solution de base réalisable associée à ce tableau 2 est $x_1 = 0$, $x_2 = 500$, $e_1 = 0$, $e_2 = 1.000$ et $e_3 = 1.200$.

$x_1 = 0$ produit P1

$x_2 = 500$ produits P2

$e_1 = 0$ = matière première A épuisée

$e_2 = 1.000$ = quantité de matière première B encore disponibles

$e_3 = 1.200$ = quantité de matière première C encore disponibles.

Dans la ligne de Z, le coefficient de la variable hors base x_1 est 5. C'est dire que cette solution n'est pas optimale.

- 2^{ème} itération : tableau3

En appliquant les critères précédents, le tableau final devient :

VHB VB	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	R
x_2	0	1	7/24	0	-1/8	350
e_2	0	0	11/24	1	5/8	250
x_1	1	0	-1/4	0	1/4	300
Z	0	0	-85/12	0	-5/4	-26.500

Conclusion : la solution de base réalisable associée à ce tableau est $x_1 = 300$, $x_2 = 350$, $e_1 = 0$, $e_2 = 250$ et $e_3 = 0$.

Tous les coefficients des variables hors base (VHB) de la ligne de Z sont négatifs ou nuls. Cette solution est optimale et on a $Z = 26.500$ pour une production de 300 unité de P1 et 350 unités de P2.

Les quantités de matières premières A et C sont épuisées tandis que 250 kg de B sont encore disponibles.

Dans la ligne de Z, il y a la valeur **-85/12** (colonne d' e_1). Cette valeur est appelée valeur marginale et signifie que si l'on augmente les disponibilités de la matière première A d'une unité, la fonction économique va s'accroître d'une valeur de $85/12 \approx 7,0833$ F. On fait la même analyse pour la matière première C, où Z va se valoriser de $5/4 \approx 1,25$.

4- Programme dual

A chaque problème de maximisation correspond un problème de minimisation impliquant les mêmes données, et vice versa. Il existe un lien étroit entre leurs solutions optimales.

Le programme écrit en premier est appelé **primal** et le second qui en découle est dit **dual**.

4-1- Règle de passage du primal (P) au dual (D)

- si la fonction économique de l'un est à maximiser, celle de l'autre est à minimiser ;
- les variables de décisions et d'écart des deux (2) programmes doivent être notées par des lettres différentes pour éviter toute confusion ;
- le vecteur ligne des coefficients de la fonction économique de (P) devient vecteur colonne des constantes seconds membres des contraintes de (D);
- le vecteur colonne second membre des contraintes de (P) devient vecteur ligne de la fonction économique de (D) ;
- la matrice des contraintes principales de (P) est transposée pour donner la matrice des contraintes de (D) ;
- le sens des inégalités change ;
- à l'optimum, les fonctions économiques de (P) et de (D) sont égales.

Exemple:

<u>Forme canonique</u>	
<u>Primal</u> Max Z = 1200 x₁ + 1000 x₂ 3 x₁ + 4 x₂ ≤ 160 6 x₁ + 3 x₂ ≤ 180 2 x₁ + x₂ ≤ 95 x₁ ≥ 0 ; x₂ ≥ 0	<u>Dual</u> Min W = 160 x + 180 y + 95 z 3x + 6y + 2z ≥ 1.200 4x + 3y + z ≥ 1.000 x ≥ 0; y ≥ 0; z ≥ 0
<u>Ecriture matricielle</u>	
<u>Primal</u> Max Z = (1.200 1.000) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 160 \\ 180 \\ 95 \end{pmatrix}$ x₁ ≥ 0 ; x₂ ≥ 0	<u>Dual</u> Min W = (160 180 95) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1.200 \\ 1.000 \end{pmatrix}$ x ≥ 0; y ≥ 0; z ≥ 0

4-2- Résolution d'un programme linéaire à minimiser

Lorsque le programme à résoudre est un problème de minimisation et qu'il faut passer impérativement par la méthode du simplexe, l'on peut soit passer par le dual (méthode indiquée au BTS) soit utiliser les variables artificielles (pas au programme du BTS).

Passage par le dual

Cette méthode a été exposée plus haut. C'est seulement la présentation des résultats dans le tableau qui est différente. Ainsi, à partir d'un exemple nous allons voir comment lire les résultats.

Exemple : résoudre l'exemple I

Primal

- Forme canonique:

$$\text{Min } Z = 42.000 x_1 + 33.000 x_2$$

$$12 x_1 + 6 x_2 \geq 72$$

$$4 x_1 + 6 x_2 \geq 48$$

$$4 x_1 + 2 x_2 \geq 32$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

Passage au dual

Forme canonique :

$$\text{Max } W = 72x + 48y + 32z$$

$$12x + 4y + 4z \leq 42.000$$

$$6x + 6y + 2z \leq 33.000$$

$$x \geq 0 ; y \geq 0 ; z \geq 0$$

Forme standard (du dual):

$$\text{Max } W = 72x + 48y + 32z + 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2$$

$$12x + 4y + 4z + \varepsilon_1 = 42.000$$

$$6x + 6y + 2z + \varepsilon_2 = 33.000$$

$$x \geq 0 ; y \geq 0 ; z \geq 0 ; \varepsilon_1 \geq 0 ; \varepsilon_2 \geq 0$$

Tableau initial

VHB \ VB	x	y	z	ε_1	ε_2	R	C
ε_1	12	4	4	1	0	42.000	3.500
ε_2	6	6	2	0	1	33.000	5.500
W	72	48	32	0	0	0	

Tableau 2 :

VHB \ VB	x	y	z	ε_1	ε_2	R	C
x	1	1/3	1/3	1/12	0	3.500	10.500
ε_2	0	4	0	-1/2	1	12.000	3.000
W	0	24	8	-6	0	- 252.000	

Tableau 3

VHB \ VB	x	y	z	ε_1	ε_2	R	C
x	1	0	1/3	1/8	-1/12	2.500	7.500
y	0	1	0	-1/8	1/4	3.000	$+\infty$
W	0	0	8	-3	-6	- 324.000	

Tableau 4

VB \ VHB	x	y	z	ε_1	ε_2	R
z	3	0	1	3/8	-1/4	7.500
y	0	1	0	-1/8	1/4	3.000
W	-24	0	0	-6	-4	-384.000

Tous les coefficients de la ligne de Z sont négatifs ou nuls. La solution de base réalisable associée à ce tableau est :

$$x = 0, y = 3.000, z = 7.500, \varepsilon_1 = 6, \varepsilon_2 = 4 \text{ et pour cette solution, } W = 384.000 \text{ F.}$$

Afin de pouvoir conclure, il faut faire un tableau de correspondance comme suit :

(P)	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	Z
(D)	ε_1	ε_2	x	y	z	W

Conclusion : il faudrait acheter 6 lots à l'atelier A1 et 4 lots à l'atelier A2.

EXERCICES :

1-Deux artisans A1 et A2 décident de s'associer en travaillant chacun un maximum de 42 heures par semaine, pour fabriquer des couteaux et des paires de ciseaux. La fabrication d'un couteau nécessite 2h à A1 puis 1h à A2. la fabrication d'une paire de ciseaux demande 2h à A1 et 3h à A2. Un couteau rapporte un bénéfice de 200F et 300F pour une paire de ciseaux.

Combien faut-il fabriquer de couteaux et de paires de ciseaux par semaine pour réaliser un bénéfice maximum ?

2-L'usine ' Mo-BLA' produit 3 qualités de pagnes : noir bleu et blanc dans 2 atelier successifs A1 et A2 selon les caractéristiques techniques et économiques suivantes :

	A1	A2	Charges variables	Prix de vente
Noir	30 unités à l'heure	30 unités à l'heure	13F	18 F
Bleu	30 unités à l'heure	30 unités à l'heure	14F	20F
Blanc	30 unités à l'heure	-	11F	15F
Total d'heures disponibles par jour	8	7		

L'approvisionnement en matières premières et fournitures diverses est suffisant pour fabriquer 250 pagnes par jour. On estime que le marché peut absorber quotidiennement au maximum 90 pagnes noirs, 60 bleus et 70 blancs.

Déterminer le programme de fabrication optimum. (On raisonnera en minutes).

3-Pour boiser son domaine, monsieur Kroupair a besoin de 1.600 plants de teks, 600 pieds de jatropa et 1.500 pieds de Samba. Il reçoit les propositions suivantes :

- Lot A : 15 jatrophas, 20 teks et 15 sambas à 14.000F ;

- Lot B : 5 jatropha, 20 teks et 25 sampas à 10.500F.

a- Combien de lots A et de lots B doit-il acheter pour minimiser sa facture ?

c- quels sont les plants excédentaires ?

TRAVAUX DIRIGES

Problème n° 1

La société « **SAMACOTCHE CARS** » est spécialisée dans la fabrication des pièces de véhicules. Ces pièces sont de trois types P1, P2 et P3. Les données techniques et commerciales relatives à cette fabrication sont résumées le tableau ci –dessous :

	Nombres d'heures-machine nécessaires à la fabrication D'un lot de 10 pièces			Bénéfice réalisé sur la vente d'un lot
	Usinage	Montage	Finitions	
Pièces P1	1	3/2	3 /2	100 F
Pièces P2	2	3/2	5/2	150 F
Pièces P3	4	9/2	3/2	250 F
Capacité de l'atelier (h/mois)	2 000	2 400	2 400	

La société veut déterminer le nombre de pièces de chaque type à fabriquer par mois pour maximiser la marge sur la vente de toute la fabrication.

Travail à faire :

1. Déterminer le programme linéaire relatif à ce problème.
2. Résoudre ce programme linéaire par la méthode du SIMPLEXE.
3. Quel est le bénéfice mensuel maximal pouvant ainsi être réalisé ?
4. Ce programme de fabrication utilise-t-il à plein les capacités de chaque atelier ?

Problème n°2

À l'occasion de la fête des mères organisée à « **ANAN** » à 5 km de Bingerville, le responsable des ventes de « **PARFUM FLOORS** » a proposé à ses clients des pots de fleurs sous la forme de lots présentés selon trois modèles.

Les caractéristiques sont contenues dans le tableau ci – dessous :

	1 Lot modèle M1	1 Lot modèle M2	1 Lot modèle M3	Coût d'achat d'un pot de fleurs
Jacinthe	2	2	3	7 500 F
Tulipe	1	2	2	10 500 F
Narcisse	1	1	2	17 500 F
Prix de vente d'un kit	50 500 F	63 000 F	91 000 F	

Pour la période de la fête des mères « **PARFUM FLOORS** » disposait de :

780 pots de jacinthe, 40 paquets de 12 pots de tulipe et 30 paquets de 12 pots de narcisse. On note X1, X2 et X3 le nombre de lots des modèles M1, M2 et M3 vendus.

Travail à faire :

1. Quel est le coût de revient d'un lot de chaque modèle ?
2. En déduire la marge sur coût variable unitaire.
3. Écrire le programme linéaire permettant de maximiser la marge sur coût variable.
4. Écrire le premier tableau de résolution de ce programme selon la méthode du simplexe.
5. À la suite des itérations on aboutit au tableau suivant ci – dessous dans lequel e1, e2 et e3 désignent les variables d'écart.

HB B	•	•	X3	•	e2	e3	SM
e1	0	0	-1	1	0	-2	60
X2	0	1	0	0	1	-1	120
X1	1	0	2	0	-1	2	240
Z	0	0	-2500	0	-2000	-5500	-2940000

- a. L'optimum est-il atteint ? Justifier votre réponse.
- b. Déduire la solution optimale.

Préciser le nombre de pots de fleurs de chaque variété non vendues à l'optimum.

Problème n°3

Partie A

Résoudre graphiquement le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} X \geq 0 ; Y \geq 0 \\ 6X + 2Y \geq 12 \\ 2X + 2Y \geq 8 \\ 4X + 12Y \geq 24 \\ W_{(\min)} = 2\,000\,000X + 1\,600\,000Y \end{cases}$$

Partie B

Une PME Ivoirienne opérant dans le textile, possède deux usines U_1 et U_2 qui n'ont pas les mêmes capacités de production et qui sont en deux lieux distincts. Ces usines produisent à partir du coton ivoirien, trois qualités de tissus appelées respectivement qualité supérieure (**QS**), qualité moyenne (**QM**) et qualité normale (**QN**). Ces trois qualités sont demandées sur le marché.

Cette PME s'est engagée à fournir par semaine, à une société française, 12 tonnes de tissus QS, 8 tonnes de tissus QM et 24 tonnes de tissus QN.

L'usine U_1 produit par jour, 6 tonnes de tissus QS, 2 tonnes de tissus QM et 4 tonnes de tissus QN, pour un coût de production de 2 000 000 F.

L'usine U_2 produit par jour, 2 tonnes de tissus QS, 2 tonnes de tissus QM et 12 tonnes de tissus QN, pour un coût de production de 1 600 000 F.

Travail à faire :

1. Déterminer le programme linéaire (P), en vue de minimiser les coûts de production.
 2. En utilisant la méthode graphique, déterminer le nombre X de jours par semaine, et le nombre Y de jours par semaine, pendant lesquels les usines U_1 et U_2 doivent fonctionner pour que les engagements soient tenus aux coûts minimum.
 3. Écrire le programme dual (D) associé au programme primal (P) en désignant par X_1 , X_2 et X_3 les variables réelles du programme dual(D).
 4. Présenter la 1^{ère} itération du programme dual(D).
- e_1 , e_2 étant les variables d'écart associées au programme dual (D), on considère le tableau suivant correspondant à la résolution partielle de ce programme dual.

$\begin{matrix} \text{HB} \\ \text{B} \end{matrix}$	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2	SM
X_1	1	1/4	0	3/16	-1/16	275 000
X_3	0	1/8	1	-1/32	3/32	87 500
Z	0	2	0	-3/2	-3/2	-5 400 000

- Dire si l'optimum est atteint. Dans le cas contraire, achever la résolution.
- Déterminer les solutions du programme primal (P).

5. Commenter la solution optimale obtenue.

6. Que peut-on suggérer au DG de cette PME, pour rentabiliser au mieux son entreprise ?

Problème n°4

La société des carrières d'ABIDJAN a pour objet l'extraction et la distribution de matériaux de carrière. Elle doit assurer, pour les travaux routiers, la fourniture aux ponts et chaussées de graviers en divers calibres. Un marché, portant sur les quantités suivantes :

Graviers calibre 1	13 500 tonnes
Graviers calibre 2	11 200 tonnes
Graviers calibre 3	5 000 tonnes

a été adjugé pour un prix global de facturation.

La société exploite deux carrières P1 et P2 louées à une société civile qui perçoit une redevance par tonne de pierre extraite. Celle – ci est la suivante :

- Pour P1..... 19,40 F
- Pour P2.....20, 00 F

Après extraction, la pierre est concassée. Les graviers ainsi obtenus sont triés selon leur calibre. Chaque tonne de pierre fournit les quantités suivantes de graviers (exprimées en tonnes) :

- Pierre P1 :

Graviers calibre 1	0,36 tonne
Graviers calibre 2	0,40 tonne
Graviers calibre 3	0,16 tonne

- Pierre P2 :

Graviers calibre 1	0,45 tonne
Graviers calibre 2	0,20 tonne
Graviers calibre 3	0,10 tonne

La Direction souhaite définir son programme d'extraction de pierre de P1 et de Pierre de P2 de façon à minimiser le coût des redevances à la société Civile.

Travail à faire :

- Présenter le programme linéaire correspondant sous forme canonique.
- Donner une solution graphique.
- Donner la formulation du dual (D).
- Résoudre le programme dual(D) par la méthode du simplexe (Méthode des tableaux) et contrôler la solution obtenue à la question 2.
- L'optimisation de programme conduit- elle à produire des graviers en excédent par rapport aux tonnages adjugés ? Justifier la réponse.

Problème n°5

L'entreprise « Pierres -Précieuses» fabrique pour des entreprises de bijoux des pièces en OR massif. Les pièces sont de 3 types A1, A2, A3. Elles sont fabriquées par lots de 50 dans une grande usine où sont rassemblées deux machines pour la découpe de l'or, une machine pour le revêtement et deux machines pour le polissage et la finition. Chaque poste de travail fonctionne 120 heures par mois. Les contraintes de fabrication sont rassemblées dans le tableau ci-dessous :

	Lot A1	Lot A2	Lot A3	Coût de l'heure
Découpe	1h	1,5h	1,5h	5 000 F
Revêtement	0,5h	0h	1h	7 000 F
Polissage et finition	2h	1h	1h	9 000 F
Coût de l'or massif	30 000 F	45 000 F	40 000 F	
Prix de vente (hors taxe)	80 000 F	90 000 F	85 000F	

L'entreprise voudrait déterminer le programme de production qui maximise sa marge commerciale mensuelle.

1. Écrire le programme linéaire sous forme canonique et sous forme standard.
2. Résoudre ce programme par la méthode du simplexe.
3. Quels sont les ateliers qui ont réalisé le plein emploi ?

Problème n°6

Par suite de graves incidents intervenus dans un village du pays, le programme alimentaire mondial (P.A.M) doit distribuer des vivres aux populations sinistrées. Une entreprise est sollicitée pour conditionner ces vivres (sachets de riz de 5 Kg, des bouteilles d'huile 1L, des boîtes de conserve) dans trois types de cartons marqués C_1 , C_2 et C_3 . Les contenus imposés pour chaque carton sont les suivants :

Carton C_1 : 10 sachets de riz, 20 bouteilles d'huile et 20 boîtes de conserve.

Carton C_2 : 10 sachets de riz, 30 bouteilles d'huile et 30 boîtes de conserve.

Carton C_3 : 10 sachets de riz, 50 bouteilles d'huile et 30 boîtes de conserve.

Pour satisfaire les besoins des sinistrés, le P.A.M doit distribuer au moins 12 350 sachets de riz, 40 040 bouteilles d'huile, et 28 800 boîtes de conserve.

Le conditionnement des cartons est facturé à 320 F le carton C_1 , 360 F le carton C_2 et 500 F le carton C_3 . L'organisme désire satisfaire les besoins au moindre coût.

Travail à faire :

1. Écrire le programme linéaire (P) correspondant au problème.
2. Écrire le programme dual (D) associé au programme (P) précédent, en désignant par Y_1 , Y_2 et Y_3 les variables d'activités du programme dual(D).
3. e_1 , e_2 , e_3 étant les variables d' écart associées au programme dual (D) on considère le tableau suivant correspondant à la résolution partielle de ce programme dual.

B \ HB	Y_1	*	*	*	e_2	e_3	C
e_1	10/3	0	0	1	-2/3	0	80
Y_3	1/3	0	1	0	1/12	-1/20	5
Y_2	0	1	0	0	-1/20	1/20	7
Z'	2 750	0	0	0	-398	-562	-424 280

- i. Dire si l'optimum est atteint. Dans le cas contraire, achever la résolution.

ii. Déterminer les solutions du programme initial (P).

Problème n°7 Un atelier de haute couture spécialisé dans la confection et vente de costumes, produit à partir du tissu << Super 200>> trois modèles de costumes par semaine :

- Le modèle classique ;
- Le modèle élégance ;
- Le modèle tendance.

L'approvisionnement en tissus <<Super 200>> se fait par semaine.

La confection de ces costumes nécessite le passage dans deux ateliers A et B, qui dure un certain nombre d'heures.

Le tableau ci-dessous présente les contraintes techniques de confection de ces costumes.

	Atelier A	Atelier B	Quantité de << Super 200>>	Prix de vente unitaires
Un modèle classique	1h	1h	3m	150 000 F
Un modèle élégance	1h	2h	3m	200 000 F
Un modèle tendance	2h	3h	4m	300 000 F
Disponibilités hebdomadaires	900h	1 200h	1 500m	
Coûts unitaires	20 000 F/h	30 000F/h	15 000F /m	

L'objectif du responsable de l'atelier est de maximiser sa marge hebdomadaire.

Travail à faire :

1°- a / Déterminer pour la confection de chaque modèle, le montant global des coûts.

b/ Reproduire puis complète le tableau technique ci- dessous :

	1 Modèle classique	1 Modèle élégance	1 Modèle tendance	Disponibilités hebdomadaires
Nombre d'heures de main d'œuvre En Atelier A				
Nombre d'heures de main d'œuvre En Atelier B				
Nombre de mètres de tissu <<Super 200>>				
Bénéfice net				

2- Écrire le programme linéaire correspondant à l'objectif du responsable de l'atelier.

3- a / Résoudre ce programme par la méthode du simplexe.

b/ Commenter la solution optimale. En déduire des suggestions.

- 1- Optimiser / maximiser / minimiser
- 2- Fonction économique
- 3- Variables d'activité
- 4- Contraintes
- 5- Méthode des droites parallèles
- 6- Méthode énumérative
- 7- Méthode du simplexe
- 8- Forme canonique / forme standard
- 9- Variables d'écart
- 10- Variables de base / variables hors base
- 11- Pivot
- 12- Primal / dual

Chapitre

2

GESTION DES STOCKS



La gestion des stocks est une pratique courante dans l'activité économique. En effet, lorsqu'on exerce une activité économique, il se pose le problème de l'accumulation des stocks pour le bon fonctionnement de l'entreprise. Un stock élevé augmente le coût de stockage mais réduit les frais de commande et permet d'offrir un meilleur service aux clients. Par contre un stock peu élevé augmente le risque de pénurie et les frais de commandes, tout en diminuant le coût de stockage.

Ainsi, la politique optimale de gestion des stocks pousse à répondre à deux (2) questions fondamentales :

- Quel est le niveau optimal de stocks à détenir ?
- Quel est le nombre de commandes à passer ?

Tout au long de ce chapitre, nous considérerons que les articles sont commandés et non produits : ce sont des approvisionnements.

I-Définitions

- **Approvisionnement** : c'est mettre à la portée de l'entreprise des matières premières, des biens, des consommables, des produits semi-finis ou finis de bonne qualité, en quantités suffisantes au moment voulu et au moindre coût. L'approvisionnement fait donc appel à l'achat puis au stockage ;
- **Coût de stockage** : c'est un coût de possession d'un stock ; il peut s'exprimer en pourcentage de la valeur des produits stockés. On va le noter **C_s** ;
- **Coût de passation d'une commande** : c'est le coût engendré par le lancement d'une commande. Il est indépendant de la quantité. On le note **C_l** ;
- **Stock initial (S_i)**: c'est la quantité de produits disponible au début d'une période ;
- **Stock final (S_f)** : c'est la quantité encore disponible à la fin de la période ;
- **Stock moyen (S_m)** : c'est la demi somme du stock initial et du stock final ;
- **Stock de sécurité (S_s)** : c'est la quantité minimale présente en permanence en stock afin de faire face aux aléas ;
- **Stock de réapprovisionnement (S_r)**: c'est le niveau de stock qui déclenche la prochaine commande ;
- **Délai de réapprovisionnement** : encore appelé délai de livraison, c'est le temps qui sépare l'envoi d'une commande et la réception de la commande ;
- **Période (T)** : c'est la durée qui sépare deux commandes ;
- **Durée globale de gestion (θ)** : c'est la durée totale sur laquelle est effectuée la gestion. Elle se subdivise en n périodes ;

- **Demande totale de produits (D)** : c'est le volume total sur toute la durée globale de gestion ;

Quantité commandée à chaque réapprovisionnement (Q): elle doit permettre de satisfaire la demande ;

- **Coût de pénurie (Cp)** : c'est le manque à gagner sur les ventes non réalisées des produits.

2- La gestion des stocks en avenir certain

2-1- Le modèle de Wilson

Ce modèle nous aide à déterminer la quantité optimale à commander à chaque période afin de minimiser le coût global de gestion du stock durant la période considérée. Il se fonde sur les hypothèses suivantes :

- La consommation ou demande est constante ;
- Aucune rupture de stocks n'est admise ;
- Il n'y a pas de stocks de sécurité ;
- Le prix d'achat unitaire du produit est constant ;
- La période de réapprovisionnement T est constante.

Le coût global de gestion des stocks **G** dépend du nombre de commandes à passer et aussi des quantités à stocker.

*Soit **Gl** le coût total de passation des commandes: ce coût prend en compte le nombre de passation (n) et le coût d'une passation (**Cl**).

$$Gl = Cl \times n$$

Or $n = \frac{D}{Q}$ (Demande totale de produits divisée par Quantité commandée à chaque réapprovisionnement)

$$Gl = Cl \times \frac{D}{Q}$$

*Soit **Gs** le coût total de détention d'un stock :

$$Gs = Cs \times \frac{Q}{2} \times \theta$$

$$\text{Donc } G = Cl \times \frac{D}{Q} + Cs \times \frac{Q}{2} \times \theta$$

Pour minimiser la valeur de **G**, nous allons le dériver par rapport à **Q** :

$$G' (Q) = \frac{dG}{dQ} = - Cl \times \frac{D}{Q^2} + Cs \times \frac{1}{2} \times \theta$$

En notant **Q*** la quantité qui annule la dérivée première,

On a :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times D \times Cl}{Cs \times \theta}}$$

Q* est appelé quantité économique ou lot économique. C'est la quantité à commander à chaque réapprovisionnement quand on veut minimiser le coût global de gestion.

A partir de la quantité économique **Q*** on peut tirer le délai de réapprovisionnement et le nombre de réapprovisionnement.

$$T^* = \frac{\theta \times Q^*}{D} \quad n^* = \frac{D}{Q^*} \quad G^* = 2G^*_s = 2G^*_l = \sqrt{2Cs \times Cl \times D}$$

Exemple 1 :

Une entreprise commerciale a une demande annuelle de 25.000 articles. Le coût d'une commande est de 500F CFA. Le taux de possession mensuel est 20% sachant que le prix d'achat d'un article est de 300F CFA.

Déterminer la quantité économique à commander, le nombre de commandes, le délai de réapprovisionnement et le coût global de gestion de ses stocks.

Solution

$Q^* = 187$ unités (arrondi à l'entier supérieur)

$n^* = 134$ commandes

$T^* = 2$ jours

$G = 134.164, 08$

2-2- Modèle avec rupture de stocks (pénurie)

On parle de rupture de stocks ou pénurie, lorsqu'il n'est pas possible de satisfaire une demande à un moment donné, pour cause de stock vide. Cela engendre un coût appelé coût de pénurie (C_p). Ce coût est difficile à estimer. Il exprime la pénurie par unité non satisfaite et par unité de temps.

Afin de pouvoir tirer les variables économiques, l'on détermine le taux de pénurie ρ .

$$\rho = \frac{C_p}{C_p + C_s}$$

Quand le taux de pénurie est connu, il permet un rapprochement avec le modèle de Wilson :

	Modèle sans pénurie	Modèle avec pénurie
Quantité économique	$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times Cl \times D}{Cs \times \theta}}$	$Q_p^* = \frac{Q^*}{\sqrt{\rho}}$
Nombre de commandes	$n^* = \frac{D}{Q^*}$	$n_p^* = n^* \times \sqrt{\rho}$
Délai de livraison	$T^* = \frac{\theta}{n^*}$	$T_p^* = T^* / \sqrt{\rho}$
Coût global de gestion	$G^* = \sqrt{2 \times Cl \times Cs \times D \times \theta}$	$G_p^* = G^* \times \sqrt{\rho}$

Uniquement dans le cas avec pénurie

Le stock à reconstituer ou quantité maximale stockée est :

$$S = Q_p^* \times \rho$$

L'économie réalisée en pourcentage est :

$$E = \frac{G^* - G_p^*}{G^*} = 1 - \sqrt{\rho}$$

Exemple 2 :

La demande annuelle d'un article est de 450.000 unités. Le coût de passation de commande est de 1.500 F CFA. Le coût de stockage est de 0,15 F par jour par article et le coût de pénurie est de 0,64 FCFA par jour.

- 1- Quelle est la quantité à commander ?
- 2- Combien de commandes à passer ?
- 3- Déterminer le délai de réapprovisionnement ?

- 4- A combien s'élèvera le coût de gestion des stocks ?
- 5- Quelle est le niveau optimal de stock à reconstituer ?

Réponses

- 1) 5.556 unités (arrondi)
- 2) 81 commandes
- 3) 5 jours (arrondi)
- 4) 243.019 FCFA (arrondi)
- 5) 4.500 unités

2-3- Modèle avec tarifs dégressifs

Dans ce cas de figure, on ne cherchera pas le coût global de gestion mais le coût total de l'approvisionnement. En effet, il faut prendre en compte, pour chaque prix, le coût d'achat.

$$\begin{aligned}
 & \text{Coût d'achat} \\
 & + \text{Coût de lancement} \\
 & + \text{Coût de stockage} \\
 & \hline
 & = \text{Coût d'approvisionnement}
 \end{aligned}$$

Sachant que le coût d'achat = prix unitaire (P) × demande globale (D),

Le coût de lancement = coût unitaire de lancement × nombre de commandes,

Le coût de stockage = prix × taux de possession × stock moyen × θ ,

Le coût global d'approvisionnement Y s'écrira :

$$Y = P \times D + Cl \times \frac{D}{Q} + P \times t \times \frac{Q}{2} \times \theta$$

Exemple 3 :

Une entreprise pour gérer ses stocks, donne les informations suivantes :

- Demande quotidienne, 10 unités ;
- Le coût de stockage est proportionnel à la valeur du stock moyen et aussi proportionnel au temps de stockage calculé en jours ouvrables. Il est de 20 F par jour ouvrable pour 1000 FCFA de marchandises;
- Le coût de lancement est de 180 FCFA pour une commande ;
- On considère que l'année de gestion θ dure 300 jours ouvrables.

1- Donner l'expression du coût total de gestion de ce stock pour une année de gestion en fonction :

a- De la quantité Q^* commandée pour chaque période ;

b- Du prix P d'une unité de marchandise ;

2- Sachant que $P = 50$ F, déterminer la quantité optimale Q^* à commander et en déduire :

a- Le nombre de commandes à passer en cette année ;

b- Le coût de gestion de ce stock ;

c- Le délai de réapprovisionnement.

3- Le fournisseur fait les propositions de tarifs dégressifs suivants :

Quantités	Prix unitaire
$q < 50$	50
$50 \leq q < 80$	45
$q \geq 80$	40

Réponse :

2) 60 unités

a) 50 commandes

b) 18.000 FCFA

c) 6 jours ouvrables

3) Le coût total d'approvisionnement

a) $CA = p \times D + 540.000/Q + 3 pQ$

1^{er} Cas : $q < 50$ et $p = 50F$

$$CA = 3\,000 \times 50 + 540\,000/Q + 3 \times 50 \times Q$$

$$CA = 150\,000 + 540\,000/Q + 150Q$$

$$CA'(Q) = 150 - 540\,000/Q^2$$

CA est minimum $\rightarrow CA'(Q) = 0 \rightarrow Q = 60$; 60 n'appartient pas à $[0 ; 50[$

Il y a incompatibilité, on choisit donc $Q^* = 49$ unités

$$\text{On a donc } CA = 150\,000 + 540\,000/49 + 150 \times 49 = 168\,370,4082 \text{ soit } 168\,370,41F$$

2^{eme} Cas : $50 \leq q < 80$ et $p = 45 F$

$$CA = 3\,000 \times 45 + 540\,000/Q + 3 \times 45 \times Q$$

$$CA = 135\,000 + 540\,000/Q + 135Q$$

$$CA'(Q) = 135 - 540\,000/Q^2$$

CA est minimum $\rightarrow CA'(Q) = 0 \rightarrow Q = 63,24$ soit 64 unités ; 64 appartient à $[50 ; 80[$

Il y a compatibilité donc $Q^* = 64$ unités

$$\text{On a donc } CA = 135\,000 + 540\,000/63,24 + 135 \times 63,24 = 152\,076,2994 \text{ soit } 152\,076,30 F$$

3^{eme} Cas : $q \geq 80$ et $p = 40 F$

$$CA = 3\,000 \times 40 + 540\,000/Q + 3 \times 40 \times Q$$

$$CA = 120\,000 + 540\,000/Q + 120Q$$

$$CA'(Q) = 120 - 540\,000/Q^2$$

CA est minimum $\rightarrow CA'(Q) = 0 \rightarrow Q = 67,08$ soit 68 unités ; 68 n'appartient pas à $[80 ; \infty[$

Il y a incompatibilité, on choisit donc $Q^* = 80$ unités

$$\text{On a donc } CA = 120\,000 + 540\,000/80 + 120 \times 80 = 136\,350F$$

b/ Le tarif dégressif conduit la société à modifier la quantité optimale à commander.

La quantité minimale à commander est donc 80 unités car elle donne le CA < minimum.

TRAVAUX DIRIGES

Exercice n°1

Les caractéristiques de la gestion d'un dépôt de boisson, sont les suivantes :

- Demande : 500 000 casiers
- Coût de stockage : 50 F/casier/jour
- Prix d'achat d'un casier : 6 000 F
- Le coût de passation d'une commande : 20 000 F

Partie I

Aucune pénurie n'admise et aucun stock de sécurité n'étant nécessaires,

Calculer :

- 1) La quantité optimale à commander.
- 2) La durée optimale séparant deux réapprovisionnements consécutifs.
- 3) Le nombre optimal de commandes
- 4) Le coût global minimal de la gestion des stocks.

Partie II

On suppose que la gestion se fait sans stock de sécurité, et la pénurie est admise, avec un taux de pénurie de 78%.

Calculer :

- 1) Le volume optimal de chaque commande de réapprovisionnement.
- 2) La durée optimale séparant deux réapprovisionnements consécutifs.
- 3) Le nombre optimal de commandes de l'année.
- 4) Le niveau optimal du stock au début de chaque période de gestion.
- 5) La durée de stockage et la durée de pénurie, au cours d'une période de gestion.
- 6) Le coût annuel de la gestion.

Exercice n°2

Une entreprise achète et vend des articles, elle gère un stock. Le taux de possession d'un article est estimé à 0,25 par an. Le coût d'achat d'une marchandise en stock est estimé de 24 000 F. La demande annuelle est constante et s'élève à 1 680 articles. Le coût de lancement d'une commande est de 35 000F.

Travail à faire :

Partie I : Dans l'hypothèse d'une gestion de stock sans pénurie

1. Exprimer en fonction de la quantité commandée Q , le coût total annuel de gestion de stock.
2. Déterminer le nombre optimal de commandes.

Partie II : Dans l'hypothèse d'une gestion de stock avec pénurie où on estime à 25% le taux de défaillance (taux de pénurie)

1. Déterminer l'économie réalisée.
2. En déduire le taux d'économie.

Exercice n°3

Après quelques années d'activités, la société SAKO et Fils décide d'améliorer la gestion du stock de l'article A 50. Pour l'année 2 003 sa consommation est estimée à 150 000 unités. Le prix d'achat unitaire est de 96F. De plus, passer une commande revient à 9 000 F quelque soit le volume. Le taux de possession du stock est de 8%.

1. Quel est le coût global annuel de gestion du stock si, à chaque réapprovisionnement, la quantité est de 25 000 unités ?
2. Dire pourquoi ce coût n'est pas minimum.
3. Quelle est la quantité constante à commander à chaque réapprovisionnement si l'on désire minimiser le coût global de gestion ?
4. Quel est alors ce coût ?

En vue d'inciter ses clients à augmenter l'importance de leurs commandes, le fournisseur de cet article propose les tarifs suivants :

- Quantité commandée $Q < 20\,000$ unités : prix unitaire 96 F.
- Quantité commandée $20\,000 < Q < 30\,000$ unités : remise de 2%.
- Quantité commandée $Q > 30\,000$ unités : remise de 3 %.

Travail à faire :

Quelle est la solution intéressante pour l'entreprise SAKO et Fils ?

Problème n°1

Une société industrielle utilise une matière M pour sa production. Pour une consommation annuelle de 36 000 Kilogrammes, elle a dépensé 144 000 000 F. Le coût de lancement d'une commande est de 180 000 F quelque soit la quantité de matière M commandée. Par ailleurs on estime à 360 F le coût de stockage par kilogramme et par an.

I. Dans l'hypothèse d'une pénurie non admise

- a. Déterminer le nombre optimal de commandes de réapprovisionnement
- b. Déterminer le coût global de gestion du stock.

II. le fournisseur de la matière M accorde une réduction de 2% sur le prix d'achat pour une quantité supérieure ou égale à 9 000 Kg et 3% pour des commandes d'au moins 18 000 Kg.

Déterminer le volume optimal des commandes et le nombre de commandes dans l'année.

III. la pénurie est désormais admise et le taux de pénurie est évalué à 0,36.

Déterminer l'économie réalisée en acceptant cette pénurie et en déduire le taux d'économie.

Problème n° 2

M. KMC est responsable de la gestion des stocks d'un produit de grande consommation, dans une grande entreprise de la place. Voici les caractéristiques de sa gestion :

- La demande annuelle est de **24 000** unités.
- Le coût de lancement d'une commande, quel qu'en soit le volume, est de **12 500 F**.
- Le prix d'achat unitaire de ce produit est de **24 000 F**.
- Le taux de possession des stocks est de **10%**.
- La gestion se fait sans pénurie.

On désigne par F , la fonction économique de cette gestion des stocks, et par X , le volume de chaque commande de réapprovisionnement.

Travail à faire :

1. Donner en fonction de X , l'expression du coût global de la gestion de tous les stocks de l'année.
2. En déduire :
 - a. La quantité optimale X_0 à commander à chaque réapprovisionnement.
 - b. Le coût global minimum de la gestion de tous les stocks de l'année.
3. Déterminer :
 - a. Le nombre optimal de commandes à passer pendant toute l'année.
 - b. La durée optimale de chaque période de gestion.

NOTIONS ESSENTIELLES

- 1- Approvisionnement
- 2- Délai de réapprovisionnement
- 3- Stock / stock initial / stock final / stock moyen
- 4- Pénurie / rupture de stock
- 5- Modèle de Wilson
- 6- Coût de lancement coût de passation
- 7- Coût de possession / coût de stockage
- 8- Coût de pénurie
- 9- Coût de gestion
- 10- Coût d'approvisionnement

Chapitre

3

THEORIE DES GRAPHS

&

ORDONNANCEMENT



I. LA THEORIE DES GRAPHS

Un graphe est un ensemble de points X_i , appelés sommets, dont certains couples sont reliés entre eux par un arc ou par une arête.

Tout graphe peut être représenté par :

- ✓ Un schéma (représentation sagittale) ;
- ✓ Une liste des sommets et des arcs ;
- ✓ Un tableau à simple entrée : dictionnaire des précédents et dictionnaires des suivants ;
- ✓ Une matrice littérale ou booléenne.

La recherche des niveaux d'un graphe sans circuit (succession d'arcs adjacents dont l'origine et l'extrémité sont distincts) est utile pour sa construction et la détermination d'un chemin de valeur optimale.

Un algorithme, fondé sur le marquage des sommets et la comparaison des valeurs obtenues à un sommet X_i , permet de trouver soit la valeur maximum, soit la valeur minimum d'un chemin sur un graphe.

2. ORDONNANCEMENT

Tout projet est un ensemble complexe de tâches qu'il faut ordonner en fonction multiples contraintes, de telle sorte que sa réalisation soit obtenue dans des conditions de durée et de coût minimums.

Toute méthode qui permet de résoudre ce problème est une méthode d'ordonnement.

Deux méthodes sont proposées :

Les méthodes « **à chemin critique** », fondée sur la théorie des graphes à savoir la méthode **M.P.M** et la méthode **P.E.R.T.**

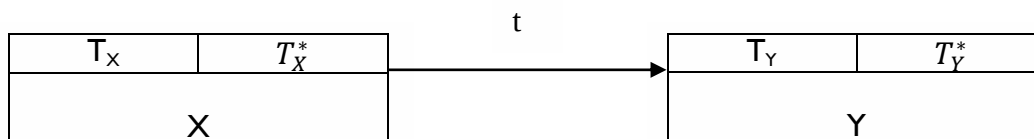
Méthode M.P.M

Sommets= tâches

Arcs= relations d'antériorité

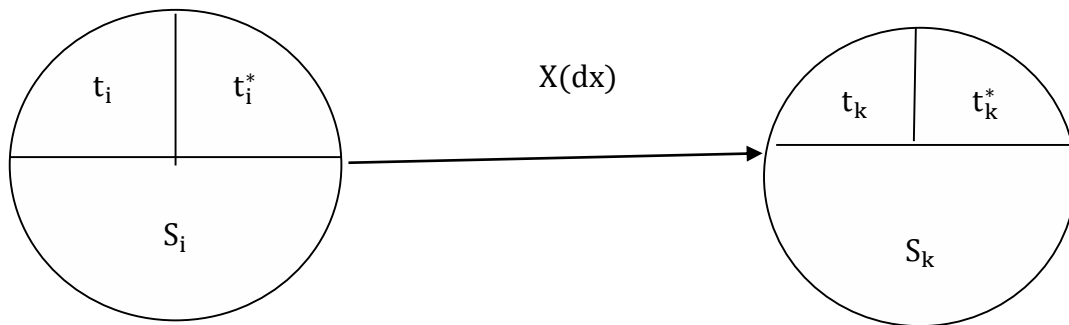
Longueur d'un arc (X, Y)= temps minimal qui doit s'écouler entre le début de la tâche X et le début de Y.

ORDONNER LE GRAPHE PAR NIVEAUX



	Définition	Mode de calcul
T_X	Date de début au plus tôt de la tâche X	Longueur du chemin le plus long allant d'une tâche de niveau 0 à X
T_X^*	Date de début au plus tard de la tâche x	Plus petit des nombres $T_Y^* - t$ sur l'ensemble des suivants de X. pour la tâche « FIN » : $T = T^*$
Marge totale de X	Retard maximum que l'on peut prendre dans la mise en route de X sans retarder la fin des travaux.	$T_X^* - T_X$
Marge libre de X	Retard maximum que l'on peut prendre dans la mise en route de X sans modifier les dates au plus tôt des tâches suivantes.	Plus petit des nombres $T_Y - T_X - t$ sur l'ensemble des suivants Y de X

Sommets=étapes **Arcs**= tâches **Arcs en pointillés**= tâches fictives
Longueur d'un arc = durée de la tâche correspondante (notée d_x pour la tâche x)



	Définition	Mode de calcul
t_i	Date de début au plus tôt de toutes les tâches partant du sommet S_i	Longueur du chemin le plus long allant du début des travaux au sommet S_i
t_i^*	Date de fin au plus tard de toutes les tâches aboutissant au sommet S_i	Plus petit des nombres $t_k^* - dx$ sur l'ensemble des tâches X partant de S_i .
Marge totale de X	Retard maximum que l'on peut prendre dans la mise en route de X sans retarder la fin des travaux.	Voir mode de calcul M.P.M
Marge libre de X	Retard maximum que l'on peut prendre dans la mise en route de X sans modifier les dates au plus tôt des tâches suivantes.	$t_k - t_i - dx$

TRAVAUX DIRIGES

LA THEORIE DES GRAPHS

Problème n°I

À une course, les cyclistes doivent se rendre dans une ville J à partir d'une ville A .
 Le tableau-ci-dessous indique le temps en mn (temps de trajet + temps d'arrêt) qu'ils mettent pour joindre les différentes villes $A, B, \dots, J$.

→	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		18		6	15	4				
B					12					
C								5		14
D					8					
E			7			3	9		14	13
F										
G									4	
H										
I										6
J										

Travail à faire :

Partie I :

1. Établir le dictionnaire des précédents de chaque ville.
2. Représenter le problème sous forme de graphe ordonnancé par niveaux.
3. Déterminer le chemin le plus long reliant A à J. Quel est le temps mis sur ce chemin ?

Partie II

L'objectif de ces cyclistes est d'arriver à la ville J le plus tôt possible.

1. Quelles sont les villes qui permettent de résoudre leur problème ?
2. Quel est alors le chemin qu'ils devraient emprunter ? Déduire le temps mis sur ce chemin.
3. Sachant que la course débute de la ville A à 7h45mn et que parmi eux, un seul s'est démarqué du groupe tout en empruntant ADEJ, à quelle heure arrivera-t-il ?

Problème 2

Le tableau suivant représente un réseau routier à travers lequel M. N'GUESSAN veut partir d'une ville X vers une ville Y, avec son véhicule en traversant plusieurs autres villes : $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7$.

Les valeurs dans le tableau représentent les distances en Km.

→	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	X	Y
V_1					8				
V_2					2				
V_3					10				
V_4					9				
V_5						7	6		
V_6									4
V_7									2
X	8	10	15	5					
Y									

Travail à faire :

Partie I :

1. Établir le dictionnaire des précédents.
2. Faire la représentation sagittale ordonnée par niveaux.
3. Quel est le chemin minimal pour aller de X à Y ? Déduire sa longueur.

Partie II : L'objectif de M. N'GUESSAN est de minimiser les frais de déplacement. Une estimation du coût de transport donne 250 F par Km.

De plus, sur la voie (V2, V5) il y a un pont à péage et le droit de passage est de 1 000 F.

- Déterminer les frais de déplacement sur chaque voie.
- Quel itinéraire doit suivre M.N'GUESSAN pour, minimiser les frais ?
- Quelle est alors la distance parcourue ?

Problème n°3

« **AIR BINAIO** » est une compagnie de transport aérien basée dans la capitale D et dessert les villes par vol réguliers.

Le tableau 1 ci-dessous indique les différents départs et les différentes destinations ainsi que les temps mis en minutes.

Tableau 1 :

		A R R I V E E S								
		A	B	C	E	F	G	H	I	J
D E P A R T S	B					60	62			
	C	180						15		
	D		45	70	25					
	E					36		40		50
	F	100					30			
	G								18	
	H									45
	I	35								
	J	90								

Tableau 2 :

Villes	B	C	E	F	G	H	I	J
Escales En mn	15	25	10	15	30	30	10	20

La compagnie veut connaître les villes à traverser pour arriver le plus tôt possible.

Travail à faire :

- Représenter ce problème en graphe ordonné par niveau ;
- Quel est l'itinéraire à suivre par avion pour répondre à la préoccupation de la compagnie ?
- Pour faire le plein de l'avion, des escales sont faites à chaque ville selon le **tableau 2** ci-dessus.
 - Déterminer les nouvelles valeurs des arcs susceptibles de résoudre le problème.
 - Quelles sont alors les villes à traverser pour arriver à le plus tôt possible ?
- On suppose qu'à la ville G, il n'y pas d'escale si l'avion vient de la ville B.
 - Déterminer dans ce cas la solution au problème.
 - Quel est alors le temps minimum à mettre pour aller de D à A?

ORDONNANCEMENT

Problème I

L'État de Côte d'Ivoire a décidé de réhabiliter les voies urbaines enfin de faciliter la circulation automobile à Abidjan. La société « **BONNE CONDUITE** » a été retenue pour la réalisation du projet.

Les services logistiques de ladite société ont déterminé l'ensemble des tâches nécessaires à cette action : A , B , C , D , E , F , G , H , I , J , K , L , M , N , O.

Les conditions d'antériorité liant ces tâches et les durées en semaines de celles-ci sont rassemblées dans le tableau ci-dessous :

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Tâches antérieures	I N	—	—	—	—	C D,B	F I	G F	B	H K	C	N	L N	I E	A H
Durées	10	3	4	2	8	5	1	3	7	6	1	1	7	12	8

Travail à faire :

- Déterminer les tâches immédiatement antérieures à chaque tâche.
- Tracer le graphe du projet par la méthode des potentiels métra (MPM), en indiquant les dates au plus tôt et les dates au plus tard de chaque tâche.
- Dire au bout de combien de semaines au minimum les voies peuvent être ouvertes à la population.
- Indiquer quel est le chemin critique.
- Dresser un tableau des marges de flottement (marges totales) et (marges libres) des tâches E, H et O.
- Pour des raisons techniques, la tâche O a connu un retard de démarrage de deux (02) semaines, quel sera donc son impact sur la fin du projet ?
- a) Sachant que la tâche E connaît un retard de démarrage de 42 jours, la fin du projet sera-t-elle retardée ?
b) Si oui, quelle est alors la date de fin du projet ?

Problème n°2

La SOTRA a reçu des bus en pièces détachées. Le montage de ces engins se décompose en 12 tâches élémentaires : A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L.

Les contraintes d'antériorités ainsi que les durées de ces tâches sont dans le tableau suivant :

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Tâches antérieures	—	—	A, B	C	C	C	D, E	E, F	G, D	G, H	H	H
Durée en mn	8	10	6	9	5	4	12	8	4	9	13	11

En tant que responsable du projet, Le DG vous demande de faire un planning d'ordonnancement en graphe MPM pour monter ces engins dans un délai minimum.

Travail à faire :

- Déterminer immédiatement les tâches antérieures.
- Représenter le graphe MPM de ce problème.
- Préciser les tâches critiques et la durée minimale de montage de ces engins.
- a) Calculer la marge totale et la marge libre des tâches D, E et H.
b) la tâche H connaît un retard de démarrage de 10 mn. Quel st son impact sur le début de la tâche J et sur la fin du projet ?
- L'exécution des tâches D et E nécessite l'utilisation d'une même pièce.
Sachant que cette pièce est unique à quelle tâche doit –on l'affecter en priorité ? Justifier votre réponse.

Problème n°3

L'entreprise « CROKO » a procédé à la définition d'un certain nombre de tâches à effectuer et à l'évaluation de leur durée. Le tableau ci-dessous est l'aboutissement de ce travail :

Désignation des tâches	Tâches antérieures	Durées en semaines
A	Néant	2
B	A	8
C	A, B	1
D	C	3
E	D	5
F	C	1
G	F	2
H	A, B, C	2
I	H	3
J	I	8
K	E, G	7
L	K, J	2
M	E, G, K, L	1
N	K, J	1
O	B	8
P	M, N, O	1

Travail à faire :

- Déterminer les tâches immédiatement antérieures.
- Déterminer les niveaux du graphe.
- On utilise la méthode MPM. Tracer le graphe : préciser les tâches, les dates au plus tôt, les dates au plus tard.
- Déterminer les tâches constituant le chemin critique et sa durée minimale de réalisation du projet.
- Calculer les marges libres et marges totales des tâches : D, I, O (uniquement).
 - La tâche D connaît un retard de démarrage de deux (2) jours. Quel est son impact sur la fin du projet ?
 - La tâche I connaît un retard de démarrage d'une semaine. Quel est son impact sur la tâche J et la fin du projet ?
 - Des difficultés rencontrées au niveau de la tâche O ont rallongé sa durée de 84 jours. quel est son impact sur le début de la tâche P et sur la fin du projet ?

Problème n°4

L'État de Côte d'Ivoire décide de construire un 3^{ème} Pont reliant la commune de Cocody à celle de Marcory. La société « Pont- Inter » a été désignée pour cette activité. Les services logistiques ont déterminé l'ensemble des tâches nécessaires à cette action : A,B,C,D,E ,F,G,H,I,J,K.

Les conditions d'antériorité liant ces tâches et les durées en mois de celles-ci sont rassemblées dans le tableau ci – dessous :

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Tâches antérieures	E	J, E	-	-	-	D	F, D	A, C, D	H, A,C,E,K,D,F	E	F, D
Durées des tâches	4	6	12	14	8	2	10	6	8	12	2

Travail à faire :

- Déterminer les tâches immédiatement antérieures à chaque tâche.
- Tracer le graphe du projet par la Méthode des Potentiels Metra (MPM), en indiquant les dates au plus tôt et les dates au plus tard de chaque tâche.
- La population ivoirienne soucieuse de cette réalisation, veut connaître la date de fin de réalisation de ce projet. Indiquer donc cette date.

4. Quel est alors le chemin critique ? Déduire donc les tâches critiques.
5. Dresser un tableau des marges de flottement (Marges totales) et de (Marges libres).
6. a) Pour des raisons techniques, la tâche H a connu un retard de démarrage de 3 mois, quel sera donc son impact sur la fin du projet ?
b) Sachant que la tâche K connaît un retard de démarrage de 4 mois, la fin du projet sera-t-elle retardée ?
Si oui, quelle est alors la date de fin du projet ?