Fomesoutra.com
ça soutra !

j'intègre

TOUT-EN UN

MP|MP*

C. Deschamps, F. Moulin, A. Warusfel
N. Cleirec, Y. Gentric, F. Lussier,
C. Mullaert, S. Nicolas, M. Volker

Mathématiques tout-en-un

DUNOD

Conception et création de couverture : Atelier 3+

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2016
5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-071994-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Préface

La réforme du lycée, qui a suivi celle du collège, s'est achevée en 2012, avec la mise en œuvre des nouvelles classes de terminale. Depuis septembre 2013, les étudiants qui entreprennent des études en classes préparatoires, ont bénéficié, durant leur scolarité au collège et au lycée, de programmes rénovés, en particulier en mathématiques. Afin d'assurer une continuité, de nouveaux programmes de classes préparatoires étaient donc indispensables.
En mathématiques, en 1995, lors de la mise en place des programmes de l'époque, les Éditions Dunod nous avaient confié la tâche de fournir aux étudiants des ouvrages de référence clairs et précis complétant le cours, irremplaçable, du professeur. Nous avions alors tenté un pari : faire tenir exposés et exercices, avec corrigés, en un seul volume, le premier « tout-en-un » (depuis très largement imité), qui a remporté un grand succès.
En septembre 2013 ont été mis en place de nouveaux programmes des classes préparatoires et, avec une équipe partiellement renouvelée et de grande qualité, nous avons récidivé : deux ouvrages « tout en un » (MPSI et PCSI-PTSI) proposent, aux étudiants de première année, un cours en conformité avec le texte, mais aussi avec l'esprit, du nouveau programme des classes préparatoires.
Aujourd'hui ce nouveau « tout en un » MP prolonge, pour la seconde année, l'ouvrage MPSI et il conserve l'ambition, en mettant en œuvre de nouvelles méthodes d'acquisition des connaissances, de proposer à l'étudiant une démarche pour s'approprier les théories du programme, théories indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines.

En pratique, dans chaque chapitre :

- De très nombreux exemples, souvent simples et issus de connaissances du lycée ou du programme de première année, illustrent chaque définition et permettent à l'étudiant de s'approprier cette nouvelle notion.
- Les propositions et théorèmes sont énoncés et suivis immédiatement d'exemples élémentaires d'applications. En outre, leurs démonstrations sont l'occasion d'un travail personnel de l'étudiant. Nous avons choisi de ne pas faire figurer systématiquement, à la suite des énoncés, la rédaction complète de ces démonstrations mais plutôt d'indiquer à l'étudiant le principe de celles-ci avec les éléments qui lui permettront de la construire par lui-même et ainsi de mieux s'approprier la propriété. Évidemment, guidé par un renvoi précis en fin du chapitre, il pourra ensuite consulter la démonstration complète et vérifier ou compléter son travail personnel.

- Lorsque plusieurs preuves étaient possibles, nous avons choisi de ne pas privilégier systématiquement la plus courte, souvent au profit de constructions explicites. C'est volontaire ; durant leurs études au lycée nos étudiants n'ont en général pas construit les objets mathématiques qu'ils ont utilisés : ils se sont contentés d'en admettre les propriétés. Or construire un objet, comme le fait un artisan, c'est se l'approprier, connaître parfaitement ses propriétés et les limites de ces propriétés.
- Dans chaque chapitre, l'étudiant trouvera, pour illustrer immédiatement l'usage des propositions et théorèmes, de très nombreux exercices simples qu'il doit évidemment chercher au fur et à mesure de son apprentissage et dont il pourra consulter une solution en fin de chapitre afin de vérifier son propre travail.
- Régulièrement l'étudiant trouvera des « point méthode » qui, pour une situation donnée, lui offrent une ou deux possibilités d'approche de la résolution de son problème. Évidemment il trouvera après ce « point méthode » exemples et exercices l'illustrant.
- À l'issue de chaque chapitre, figurent des exercices plus ambitieux, demandant plus de réflexion, à chercher une fois le chapitre totalement maitrisé. Certains plus difficiles sont signalés par des étoiles ; les solutions détaillées de tous ces exercices complémentaires sont données.
- Enfin les étudiants de classes préparatoires de seconde année sont candidats aux concours des grandes écoles. Nous avons réunis des exercices posés aux premiers oraux portant sur les nouveaux programmes : l'étudiant trouvera des exercices posés aux oraux des concours 2015. Les chercher (et les résoudre) sera pour lui un excellent entraînement.
- Bien entendu nous sommes très intéressés par toute remarque que les étudiants, nos collègues, tout lecteur... seraient amenés à nous communiquer. Cela nous permettra, le cas échéant, de corriger certaines erreurs nous ayant échappé et surtout ce contact nous guidera pour une meilleure exploitation des choix pédagogiques que nous avons faits aujourd'hui dans cet ouvrage.

Un grand merci à tous les auteurs de cet ouvrage d'avoir mené à terme ce travail de longue haleine.

Claude Deschamps et François Moulin

Nathalie tu nous manques !

Notre collègue et amie Nathalie Cleirec
nous a quittés le 17 novembre 2015.
Enseignante de grande qualité,
elle était très attachée à ses étudiants
et faisait tout pour leur réussite.

Toute l'équipe de cet ouvrage
se souvient de sa gentillesse et de son travail :
une participation active aux réunions du groupe
et une rédaction remarquable des chapitres
dont elle avait la responsabilité.

Table des matières

Préface v

Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres 1

I Anneaux et corps . . . 2
II Anneau des polynômes à une indéterminée . . . 13
III Groupes . . . 21
IV Algèbres . . . 29
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 35
Exercices . . . 51

Chapitre 2. Réduction des endomorphismes 63

I Sous-espaces stables et endomorphismes induits . . . 64
II Éléments propres . . . 67
III Endomorphismes et matrices diagonalisables . . . 86
IV Endomorphismes et matrices trigonalisables . . . 92
V Utilisations des polynômes annulateurs . . . 96
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 107
Exercices . . . 130

Chapitre 3. Fonctions convexes 153

I Parties convexes d'un espace vectoriel . . . 154
II Fonctions convexes d'une variable réelle . . . 158
III Convexité et dérivabilité . . . 163
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 166
Exercices . . . 176

Chapitre 4. Espaces vectoriels normés 187

I Généralités 188
II Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé 201
III Topologie d'un espace vectoriel normé 206
IV Comparaison de normes 216
Démonstrations et solutions des exercices du cours 220
Exercices 242

Chapitre 5. Limites, continuité 255

I Limite d'une application 256
II Opérations sur les limites 262
III Continuité globale 263
IV Continuité des applications linéaires 269
Démonstrations et solutions des exercices du cours 271
Exercices 279

Chapitre 6. Compacité, connexité, dimension finie 289

I Compacité 290
II Connexité par arcs 295
III Espaces vectoriels normés de dimension finie 299
Démonstrations et solutions des exercices du cours 306
Exercices 319

Chapitre 7. Fonctions vectorielles de la variable réelle 343

I Dérivation 344
II Intégration sur un segment 353
III Primitives et intégrales 358
IV Formules de Taylor 360
V Arcs paramétrés 362
Démonstrations et solutions des exercices du cours 368
Exercices 378

Chapitre 8. Séries numériques et vectorielles 399

I Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie . . . 400
II Compléments sur les séries numériques 405
Démonstrations et solutions des exercices du cours 417
Exercices 427

Chapitre 9. Familles sommables 447

I Dénombrabilité . . . 448
II Familles sommables de réels positifs . . . 452
III Familles sommables de nombres complexes . . . 459
IV Applications . . . 463
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 468
Exercices . . . 477

Chapitre 10. Suites et séries de fonctions 491

I Modes de convergence des suites . . . 492
II Convergence uniforme et limites . . . 500
III Intégration, dérivation d'une limite . . . 502
IV Séries de fonctions . . . 505
V Approximation uniforme . . . 518
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 521
Exercices . . . 546

Chapitre 11. Séries entières 581

I Séries entières . . . 582
II Séries entières de la variable réelle . . . 593
III Développements en série entière . . . 595
IV Pratique du développement en série entière . . . 605
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 614
Exercices . . . 635

Chapitre 12. Intégration sur un intervalle quelconque 663

I Intégrale généralisée sur un intervalle $[a, +\infty[$ . . . 665
II Généralisation aux autres types d'intervalles . . . 672
III Propriétés de l'intégrale . . . 676
IV Calcul d'intégrales . . . 678
V Intégration des relations de comparaison . . . 682
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 685
Exercices . . . 701

Chapitre 13. Convergence dominée et applications 723

I Suites et séries d'intégrales . . . 724
II Intégrales à paramètre . . . 732
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 744
Exercices . . . 759

Chapitre 14. Espaces préhilbertiens et euclidiens 795

I Rappels et compléments . . . 796
II Projection orthogonale . . . 799
III Suites orthonormales . . . 802
IV Endomorphismes d'un espace euclidien . . . 806
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 814
Exercices . . . 827

Chapitre 15. Espaces probabilisés 845

I Espaces probabilisés . . . 846
II Probabilités conditionnelles . . . 855
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 861
Exercices . . . 873

Chapitre 16. Variables aléatoires discrètes 891

I Variables aléatoires discrètes . . . 892
II Lois usuelles . . . 895
III Couples de variables aléatoires . . . 898
IV Indépendance de variables aléatoires . . . 903
V Espérance, variance, covariance . . . 909
VI Fonctions génératrices . . . 921
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 924
Exercices . . . 952

Chapitre 17. Équations différentielles linéaires 1011

I Équations différentielles linéaires d'ordre 1 . . . 1012
II Équations différentielles linéaires à coefficients constants . . . 1022
III Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n . . . 1030
IV Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 . . . 1034
V Exemples de résolution d'équations non résolues . . . 1045
Démonstration du théorème de Cauchy linéaire . . . 1047
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 1049
Exercices . . . 1075

Chapitre 18. Calcul différentiel 1097

I Introduction . . . 1098
II Différentielle d'une fonction . . . 1101
III Opérations sur les fonctions différentiables . . . 1110
IV Fonctions numériques . . . 1118
V Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ . . . 1123
VI Applications . . . 1133
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 1143
Exercices . . . 1170

Chapitre 1 : Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

I Anneaux et corps 2
1 Rappels et notations 2
2 Anneaux intègres 2
3 Sous-anneaux — sous-corps 3
4 Morphismes d'anneaux 4
5 Anneaux produit 6
6 Idéaux d'un anneau commutatif 6
7 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 8
8 Théorème chinois 11
9 Indicatrice d'Euler 12
II Anneau des polynômes à une indéterminée 13
1 Propriétés arithmétiques élémentaires 14
2 Utilisation des idéaux de $\mathbb{K}[X]$ 16
III Groupes 21
1 Rappels 21
2 Morphismes de groupes 21
3 Noyau, image 23
4 Produit de groupes 24
5 Groupes monogènes et cycliques 25
6 Ordre d'un élément dans un groupe 28
IV Algèbres 29
1 Structure d'algèbre 29
2 Sous-algèbres 30
3 Morphismes d'algèbres 31
4 Substitution polynomiale, polynômes annulateurs . 31
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 35
Exercices 51

Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres



Nous revenons dans ce chapitre sur les structures algébriques usuelles vues en première année : groupes, anneaux et corps, notamment en vue de leur utilisation en arithmétique (sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{K}[X]$).
Nous finirons par la notion d'*algèbre*, très présente en analyse, et dont les applications en algèbre linéaire seront étudiées dans le chapitre de réduction des endomorphismes.
Dans ce chapitre, nous supposons acquises les notions de groupe, de sous-groupe, d'anneaux et de corps vues en première année.

I Anneaux et corps

1 Rappels et notations

- Dans un anneau A, le neutre pour l'addition est noté 0 (ou 0_A), le neutre pour la multiplication 1 (ou 1_A).
- L'anneau est commutatif si la multiplication est commutative (l'addition est commutative par définition).
- Un anneau A est trivial si $1_A = 0_A$; dans ce cas, A est réduit à cet unique élément.
- Rappelons que, par définition, un corps est un anneau commutatif non trivial dans lequel tout élément non nul est inversible.

2 Anneaux intègres

Définition 1

Un anneau **intègre** est un anneau A *commutatif non trivial* qui vérifie :

$$\forall (a,b) \in A^2 \quad a\,b = 0 \Longrightarrow (a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0)\,.$$

Exemples

1. $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre.
2. Tout corps est un anneau intègre.

p.35 **Exercice 1** Donner un exemple d'anneau commutatif non trivial et non intègre.

Point méthode

Dans un anneau A intègre tout élément a non nul est **régulier** pour la multiplication, c'est-à-dire vérifie :

$$\forall (x,y) \in A^2 \quad a\,x = a\,y \Longrightarrow x = y.$$

Exemple Tout anneau fini intègre est un corps.
En effet, soit A un anneau fini intègre et $a \in A$ non nul. L'application $x \mapsto a\,x$ de A dans A est injective par régularité de a. Comme A est fini, elle est bijective, donc 1 admet un antécédent ce qui signifie qu'il existe $b \in A$ tel que $a\,b = 1$. Comme A est commutatif (puisqu'intègre), on a aussi $b\,a = 1$ et a est inversible.

p.35 **Exercice 2** Montrer que dans l'anneau des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, toute fonction polynomiale non nulle est régulière.

3 Sous-anneaux — sous-corps

Définition 2

Un **sous-anneau** d'un anneau A est un sous-groupe additif de A stable par multiplication et contenant 1_A.

Point méthode

Pour montrer qu'une partie d'un anneau A est un sous-anneau de A, il suffit de vérifier qu'elle est stable par les deux lois de A par passage à l'opposé, et qu'elle contient l'élément neutre multiplicatif 1_A.

En effet, il ne manque que la présence de l'élément neutre 0_A, que l'on obtient par différence : $0_A = 1_A - 1_A$.

Définition 3

Un sous-corps d'un corps $\mathbb{K}$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}$ qui est un corps.

Exemples

1. $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. $\mathbb{Z} + i\,\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
4. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des sous-corps de $\mathbb{C}$.

Proposition 1

Si B est un sous-anneau de A et C un sous-anneau de B, alors C est un sous-anneau de A.

Démonstration.

C'est immédiat à partir de la caractérisation donnée dans le point méthode ci-dessus. □

Attention

- La définition d'un sous-anneau impose qu'il contienne 1_A. Cette vérification est indispensable car elle n'est pas une conséquence des autres axiomes comme le montrent les exemples de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ou plus simplement $\{0_A\}$ lorsque A est un anneau non trivial.
- Ce même exemple $\{0_A\}$ montre que, contrairement à ce qui se passe pour les sous-groupes, une partie d'un anneau A stable par les lois de A et qui, munie des lois induites, est un anneau, n'est pas nécessairement un sous-anneau de A (les deux éléments neutres multiplicatifs peuvent être différents). Voir aussi l'exercice 1.1 de la page 51.

4 Morphismes d'anneaux

Définition 4

Soit A et B deux anneaux. On dit qu'une application $\varphi : A \to B$ est un **morphisme d'anneaux** si elle vérifie :

$$\begin{aligned} &\forall (a,b) \in A^2 \quad \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \\ &\forall (a,b) \in A^2 \quad \varphi(a\,b) = \varphi(a)\,\varphi(b) \\ &\qquad\qquad\quad \varphi(1_A) = 1_B. \end{aligned}$$

Remarques

- La première des conditions ci-dessus est en fait la définition d'un morphisme de groupes de $(A,+)$ dans $(B,+)$ (voir page 21). Un morphisme d'anneaux est donc en particulier un morphisme de groupes.
- Un morphisme d'anneaux φ de A dans B vérifie l'égalité $\varphi(0) = 0$.

  En effet :

  $$\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0)$$

  et en ajoutant $-\varphi(0)$ des deux côtés, on obtient $0 = \varphi(0)$. Alors, si $x \in A$, on a $\varphi(x) + \varphi(-x) = \varphi(0) = 0$ ce qui montre que $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

  Ce sont également des propriétés générales des morphismes de groupes.

Attention En revanche, l'égalité $\varphi(1) = 1$ de la définition précédente n'est pas une conséquence des autres axiomes comme le montre l'exemple de la fonction nulle lorsque $B \neq \{0\}$.

Définition 5

Un **isomorphisme d'anneaux** est un morphisme d'anneaux bijectif.

Proposition 2

Si φ est un isomorphisme d'anneaux, alors φ^{-1} est également un isomorphisme d'anneaux.

Démonstration page 35

Proposition 3

Soit f un morphisme d'anneaux de A dans B.

1. L'image par f de tout sous-anneau de A est un sous-anneau de B.
2. L'image réciproque par f de tout sous-anneau de B est un sous-anneau de A.

Démonstration page 35

Exemple Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.
L'**image** de f est le sous-anneau $f(A)$ de B.
Évidemment, f est surjectif si, et seulement si, son image est égale à B.

Définition 6 (Noyau)

Le **noyau** d'un morphisme d'anneaux $f : A \to B$ est :

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}.$$

p.35 **Exercice 3** Montrer qu'un morphisme d'anneaux est injectif si, et seulement si, son noyau est réduit à $\{0\}$.

Attention Le noyau d'un morphisme d'anneaux n'est pas en général un sous-anneau (voir ci-dessous la notion d'idéal) comme le montre l'exercice suivant.

p.36 **Exercice 4** Montrer que le noyau d'un morphisme d'anneaux $f : A \to B$ est un sous-anneau de A si, et seulement si, B est trivial.

5 Anneaux produit

Étant donné des anneaux $A_1, \ldots, A_n$, on munit le produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_n$ d'une structure d'anneau par opérations terme à terme :

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \times (b_1, \ldots, b_n) = (a_1\, b_1, \ldots, a_n\, b_n).$$

Les deux éléments neutres sont naturellement $(0_{A_1}, \ldots, 0_{A_n})$ et $(1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n})$.

p.36

Exercice 5

1. Écrire de même l'opposé d'un élément du produit cartésien.
2. Quels sont les inversibles d'un anneau produit ?
3. À quelle condition l'anneau produit $A \times B$ est-il un corps ?
4. À quelle condition l'anneau produit $A \times B$ est-il intègre ?

6 Idéaux d'un anneau commutatif

Introduction

Si φ est un morphisme d'anneaux de A dans B, l'image de φ est un sous-anneau de B mais son noyau n'est pas un sous-anneau de A, sauf si B est trivial (voir l'exercice 4 de la page précédente).
Mais $\operatorname{Ker}\varphi$ est un sous-groupe de $(A, +)$ qui possède la propriété suivante :

$$\forall x \in \operatorname{Ker}\varphi \quad \forall a \in A \quad (a\,x, x\,a) \in (\operatorname{Ker}\varphi)^2$$

puisque si $x \in \operatorname{Ker}\varphi$ et $a \in A$, on a $\varphi(a\,x) = \varphi(a)\,\varphi(x) = \varphi(a) \times 0 = 0$ et de même pour $\varphi(x\,a)$.
Cela caractérise la notion d'**idéal bilatère**.
Conformément au programme, on se place dans toute la suite dans le cadre des anneaux commutatifs.

Définition 7 (Idéal d'un anneau commutatif)

Soit A un anneau commutatif.

On dit qu'une partie I de A est un **idéal** de A si :

- I est un sous-groupe de $(A, +)$;
- I est stable par multiplication par tout élément de A, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I \quad \forall a \in A \quad x\,a \in I.$$

Remarque Par commutativité de A, un idéal I de A vérifie aussi :

$$\forall x \in I \quad \forall a \in A \quad a\,x \in I.$$

Exemples

1. Nous venons de voir que le noyau d'un morphisme d'anneaux de A (commutatif) dans B est un idéal de A.
2. Si A est un anneau commutatif, alors A et $\{0\}$ sont évidemment des idéaux de A.
3. L'ensemble des fonctions nulles sur une partie X de $\mathbb{R}$ est un idéal de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

p.36

Exercice 6 Montrer que les suites réelles convergeant vers 0 constituent un idéal de l'anneau des suites réelles bornées.

S'agit-il d'un idéal de l'anneau de toutes les suites réelles ?

Remarque Soit I un idéal de A contenant 1.
Alors, pour tout $a \in A$, on a $a = a.1 \in I$, donc $I = A$.

p.37

Exercice 7

1. Montrer plus généralement qu'un idéal contenant un élément inversible de A est égal à A.
2. Quels sont les idéaux d'un corps ?

Opérations sur les idéaux

Soit A un anneau commutatif.

Proposition 4

Une intersection d'idéaux de A est un idéal de A.

Démonstration page 37

p.37

Exercice 8 Étant donné une partie X de A, montrer qu'il existe un plus petit idéal de A contenant X.

On l'appelle **idéal de A engendré par X**.

Exemple : idéal engendré par un élément Soit $x \in A$. Décrivons l'idéal engendré par x, c'est-à-dire par $\{x\}$ (*cf.* exercice précédent). Par définition, pour tout idéal I contenant x et pour tout $a \in A$, on a $a\,x \in I$, donc I contient $x\,A = \{x\,a\,;\ a \in A\}$. Montrons que $x\,A$ est le plus petit idéal de A contenant x.

- Il contient $0 = x \times 0$ et il est stable par $+$ et $-$ puisque pour tout $(a,b) \in A$:
$$x\,a + x\,b = x\,(a+b) \in x\,A \qquad \text{et} \qquad -(x\,a) = x\,(-a) \in x\,A.$$
Donc $x\,A$ est un sous-groupe de $(A,+)$.
- Pour tout $y = x\,a \in x\,A$ et $b \in A$, on a $y\,b = x\,(a\,b) \in x\,A$. Donc $x\,A$ est un idéal.
- Comme $x = x \times 1_A$, on a bien $x \in x\,A$.
- Enfin, on a vu plus haut que tout idéal de A contenant x contenait aussi $x\,A$.

p.37

Exercice 9 Montrer qu'un anneau commutatif A non trivial n'ayant que les deux idéaux A et $\{0\}$ est un corps (réciproque de la deuxième question de l'exercice 7 de la page précédente).

Proposition 5

Si I_1 et I_2 sont deux idéaux de A, leur **somme** :

$$I_1 + I_2 = \{x_1 + x_2\,;\ (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2\}$$

est un idéal de A.

C'est le plus petit idéal de A contenant I_1 et I_2.

Démonstration page 37

Idéaux de $\mathbb{Z}$

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $n\,\mathbb{Z} = \{n\,k\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$ des multiples de n est un idéal de $\mathbb{Z}$. C'est l'idéal de $\mathbb{Z}$ engendré par n (voir l'exemple de la page précédente).

Remarque

Comme $n\,\mathbb{Z} = (-n)\,\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on peut se limiter à $n \in \mathbb{N}$.
Nous allons voir qu'en fait ce sont les seuls idéaux de $\mathbb{Z}$.

Lemme 6

Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\,\mathbb{Z}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Principe de démonstration. Si H est un sous-groupe non nul de $\mathbb{Z}$, on considère le plus petit élément n strictement positif de H et l'on utilise la division euclidienne par n pour montrer que tout élément de H est un multiple de n.

Démonstration page 37

Un idéal étant en particulier un sous-groupe, on en déduit le résultat important suivant.

Théorème 7

Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les $n\,\mathbb{Z}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

7 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Congruences dans $\mathbb{Z}$

Soit n un entier naturel.

Rappels Nous avons vu en première année la relation de congruence modulo n définie par :

$$x \equiv y \quad [n] \iff y - x \in n\,\mathbb{Z}.$$

Il s'agit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ qui est compatible avec les opérations de $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire qui vérifie :

$$\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{Z}^4 \quad \left\{ \begin{array}{ll} x \equiv x' & [n] \\ y \equiv y' & [n] \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x+y \equiv x'+y' & [n] \\ x \times y \equiv x' \times y' & [n]. \end{array} \right.$$

Notation
On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation.
La classe d'un élément k de $\mathbb{Z}$ est notée $\overline{k}$.

p.38 **Exercice 10** Qu'est-ce que $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z}$? $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$? $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Proposition 8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a n éléments, et l'on a :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}.$$

Principe de démonstration. Utiliser la division euclidienne par n. Démonstration page 38

Remarque $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est appelé **ensemble quotient** de $\mathbb{Z}$ par $n\mathbb{Z}$, ce qui explique sa notation.

Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Proposition 9

1. Il existe sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des lois, notées $+$ et $\times$ (ou implicitement pour le produit) et appelées **lois quotient**, telles que :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \quad \overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y} \quad \text{et} \quad \overline{x} \times \overline{y} = \overline{x\,y}.$$
2. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif d'éléments neutres $\overline{0}$ et $\overline{1}$.
3. La projection canonique $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & \overline{x} \end{array}$ est un morphisme d'anneaux surjectif de noyau $n\mathbb{Z}$.

Principe de démonstration. Pour α et β dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on définit :

$$\alpha + \beta = \overline{x+y} \quad \text{et} \quad \alpha \times \beta = \overline{x\,y} \qquad \text{où} \qquad x \in \alpha \quad \text{et} \quad y \in \beta.$$

Il faut vérifier que $\overline{x+y}$ et $\overline{x\,y}$ ne dépendent que de α et β, et non des représentants x et y choisis, grâce à la compatibilité de la relation de congruence avec les lois de $\mathbb{Z}$.

Démonstration page 38

Remarques

- On peut aussi prendre pour représentants des classes modulo $n \neq 0$, n'importe quel n-uplet d'entiers consécutifs.

  Par exemple, pour étudier la multiplication sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, il pourra être intéressant d'écrire $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \pm\overline{1}, \pm\overline{2}\}$.

- Les éléments $0, 1, \ldots, n-1$ sont privilégiés dans leurs classes respectives. Il arrivera donc que l'on note p à la place de $\overline{p}$ lorsque $0 \leqslant p < n$, s'il n'y a pas de confusion possible.

p.39

Exercice 11 Écrire les tables d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Ces anneaux sont-ils intègres ?

Proposition 10 (Éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

1. La classe de $k \in \mathbb{Z}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si, et seulement si, k est premier avec n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les assertions suivantes sont équivalentes :
   - (i) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ;
   - (ii) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre ;
   - (iii) n est premier.

Principe de démonstration. Démonstration page 39

1. L'élément $\overline{k}$ est inversible si, et seulement s'il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $k\,u + n\,v = 1$ et son inverse est alors $\overline{u}$.
2. On montre $(ii) \Longrightarrow (iii)$ par contraposée : si $n = a\,b$, alors $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{0}$.
   $(iii) \Longrightarrow (i)$: si n est premier, tous les éléments de $[\![1, n-1]\!]$ sont premiers avec n.

Remarque

L'implication $(ii) \Longrightarrow (i)$ est un cas particulier de l'exemple de la page 3.

Point méthode

Comme on l'a vu dans la démonstration précédente, pour déterminer l'inverse de $\overline{k}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il suffit de trouver un couple (u, v) tel que $k\,u + n\,v = 1$ (coefficients de Bézout). L'inverse de $\overline{k}$ est alors $\overline{u}$.

p.40

Exercice 12 Donner l'inverse de $\overline{13}$ dans $\mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$.

8 Théorème chinois

On note ici $[k]_n$ la classe de l'entier k modulo un entier naturel non nul n.

Proposition 11

Soit n et m des entiers premiers entre eux. Les anneaux $\mathbb{Z}/(nm)\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ sont isomorphes par le morphisme d'anneaux φ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/(nm)\mathbb{Z} & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \\ [k]_{nm} & \longmapsto & ([k]_n, [k]_m). \end{array}$$

Principe de démonstration. Pour la définition de φ, vérifier que le couple $\left([k]_n, [k]_m\right)$ ne dépend que de la classe de k modulo nm.

On démontre l'injectivité de φ et l'on conclut par cardinalité. Démonstration page 40

Le corollaire suivant n'est que la traduction en termes de congruence de la proposition 11.

Corollaire 12 (Théorème chinois)

Si n et m sont des entiers premiers entre eux, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, il existe un entier k vérifiant le système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} k \equiv a & [n] \\ k \equiv b & [m] \end{array} \right. \qquad (S)$$

et les solutions de ce système sont exactement les entiers congrus à k modulo $n\,m$.

Le théorème chinois permet de ramener l'étude d'une équation sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ lorsque n n'est pas premier, à celle d'équations sur des anneaux plus simples.

Point méthode (pour obtenir une solution de (S))

À partir d'une relation de Bézout $m\,u + n\,v = 1$, on trouve deux entiers $k_1 = m\,u$ et $k_2 = n\,v$ vérifiant respectivement les systèmes de congruences :

$$\left\{ \begin{array}{ll} k_1 \equiv 1 & [n] \\ k_1 \equiv 0 & [m] \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} k_2 \equiv 0 & [n] \\ k_2 \equiv 1 & [m] \end{array} \right.$$

et une solution du système (S) est alors $k = k_1\,a + k_2\,b$ (vérification immédiate en prenant les congruences modulo n et m).

Remarque L'obtention d'une telle solution est non triviale, mais sa vérification est immédiate. Il ne faut donc pas oublier de la faire pour repérer une erreur de calcul éventuelle.

Exemple Trouvons les entiers k tels que $k^2+k+11 \equiv 0 \quad [143]$, c'est-à-dire tels que $k^2+k+11 \equiv 0 \quad [11]$ et $k^2+k+11 \equiv 0 \quad [13]$.
Cela revient à résoudre l'équation $x^2+x+11=0$ dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. Pour chaque couple de solutions $\big([a]_{11},[b]_{13}\big)$, le point méthode précédent donne la classe modulo 143 correspondante.

p.40

Exercice 13 Finir l'exemple ci-dessus.

9 Indicatrice d'Euler

Définition 8

On appelle **indicatrice d'Euler** de $n \in \mathbb{N}^*$, et l'on note $\varphi(n)$, le cardinal de l'ensemble :

$$\big\{k \in [\![1,n]\!] \;\big|\; k \wedge n = 1\big\}.$$

Remarques

- On a évidemment $\varphi(1)=1$.
- Pour $n \geqslant 2$, $\varphi(n)$ est aussi le nombre d'éléments de $[\![1,n-1]\!]$ premiers avec n.
- Dans tous les cas, c'est aussi le nombre d'éléments de $[\![0,n-1]\!]$ premiers avec n, donc également le nombre d'éléments inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exemples

1. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\varphi(n) \leqslant n-1$ avec égalité si, et seulement si, n est premier. En effet, d'après les remarques précédentes, $\varphi(n)$ est le nombre d'éléments de $[\![1,n-1]\!]$ premiers avec n (d'où l'inégalité) et n est premier si, et seulement s'ils sont tous premiers avec n.
2. Soit p un nombre premier. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ puisque les éléments qui sont non premiers avec p^k sont les multiples de p, c'est-à-dire $p, 2p, \ldots, (p^{k-1})\,p$ pour ceux qui sont dans $[\![1,p^k]\!]$. Il y en a donc p^{k-1}.

p.40

Exercice 14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Indication : on pourra considérer l'ensemble des rationnels de la forme p/n, avec $p \in [\![1,n]\!]$.

Proposition 13

Si n et m sont premiers entre eux, alors on a $\varphi(n\,m) = \varphi(n)\,\varphi(m)$.

Démonstration. Les anneaux $\mathbb{Z}/(nm)\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ étant isomorphes (théorème chinois), ils ont autant d'éléments inversibles.

Or, les inversibles de l'anneau produit $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ sont évidemment les couples (u, v), où u et v sont inversibles respectivement dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. On en déduit le résultat. □

Corollaire 14

Si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, avec $p_1, \ldots, p_r$ des nombres premiers distincts deux à deux et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des entiers naturels non nuls, alors on a :

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Démonstration. Le résultat est immédiat si $n = 1$ (un produit vide vaut 1). Sinon, $r \geqslant 1$ et puisque les $p_k^{\alpha_k}$ sont premiers entre eux deux à deux, $p_r^{\alpha_r}$ est premier avec $p_1^{\alpha_1} \cdots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}}$. À partir de la proposition précédente, on a $\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1} \cdots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}})\,\varphi(p_r^{\alpha_r})$.

On en déduit $\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdots \varphi(p_r^{\alpha_r})$ par récurrence immédiate, sur le nombre de facteurs premiers de n. À l'aide du résultat de l'exemple 2 de la page ci-contre, il vient :

$$\varphi(n) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdots \left(p_r^{\alpha_r} - p_r^{\alpha_r - 1}\right)$$

ce qui donne le résultat après factorisation par $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$. □

Calcul de l'indicatrice d'Euler à l'aide d'une méthode de crible On peut adapter le crible d'Eratosthène (voir livre de première année) pour calculer l'indicatrice d'Euler des n premiers entiers. Cela consiste à multiplier chaque entier k par $1 - \frac{1}{p}$, pour tous les diviseurs premiers p de k.

```
    """ Retourne la liste des phi(p)
        pour p in [0,n]"""
    t=list(range(n+1))  # initialement, t[p]=p pour tout p
    for p in range(2,n):
        if t[p] == p: # p est premier
            for k in range(p,n+1,p):
                # on multiplie les multiples
                # de p par 1-1/p
                t[k] -= t[k] // p
    return t
```

II Anneau des polynômes à une indéterminée

On considère un corps $\mathbb{K}$ (dans la pratique, un sous-corps de $\mathbb{C}$). La structure d'anneau de $\mathbb{K}[X]$, étudiée en première année lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se définit de la même manière dans le cas général.

On conserve en particulier la notion de degré ainsi que ses propriétés qui permettent de montrer le résultat suivant.

Proposition 15

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre.

Démonstration. Il est clair que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif non réduit à $\{0\}$.

Soit A et B deux polynômes non nuls. Écrivons :

$$A = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=0}^{q} b_j X^j \qquad \text{avec} \qquad p = \deg A \quad \text{et} \quad q = \deg B.$$

Par définition du produit, le coefficient du terme de degré $n = p + q$ de AB est $a_p b_q$, donc non nul comme produit d'éléments non nuls du corps $\mathbb{K}$. Ainsi $AB \neq 0$. □

1 Propriétés arithmétiques élémentaires

Divisibilité

Définition 9

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$. On dit que B **divise** A, ou que A est un **multiple** de B, s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$, appelé **quotient** de A par B, tel que $A = BQ$. On note $B \mid A$.

La relation de divisibilité est une relation réflexive et transitive, mais n'est ni symétrique ni antisymétrique (ce n'est ni une relation d'ordre, ni une relation d'équivalence).

Proposition 16

Les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les éléments de $\mathbb{K}^*$.

Démonstration page 41

Exemples

1. Les diviseurs de 1 sont les éléments inversibles, c'est-à-dire les polynômes constants non nuls.
2. Tout élément de $\mathbb{K}[X]$ divise 0, mais 0 ne divise que lui-même.

Polynômes associés

Proposition 17

Soit A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $A \mid B$ et $B \mid A$;

(ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $B = \lambda A$.

On dit alors que A et B sont **associés**.

Démonstration page 41

Exemples
1. 0 n'est associé qu'à lui-même.
2. Les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les associés de 1.

Corollaire 18

Tout élément non nul de $\mathbb{K}[X]$ est associé à un unique polynôme unitaire.

Polynômes irréductibles

Définition 10

Un **polynôme irréductible** est un polynôme non constant dont les seuls diviseurs sont ses associés et les constantes non nulles.

Exemple Tout polynôme de degré 1 est irréductible.

Proposition 19

Un élément $A \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible si, et seulement si :
- A est non constant ;
- si $A = BC$, avec $(B, C) \in \mathbb{K}[X]^2$, alors B ou C est constant.

Démonstration page 41

Rappel
- Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
- Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Exemple Montrons que $P = X^3 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
Supposons $P = QR$, avec Q et R non constants. Alors l'un est de degré 2 et l'autre de degré 1. En particulier, l'un des deux, donc P aussi, admet une racine dans $\mathbb{Q}$. Montrons que c'est impossible.
Soit p et q deux entiers premiers entre eux, avec $q \neq 0$, tels que $P(p/q) = 0$.
Alors $p^3 + pq^2 + q^3 = 0$, donc $q \mid p^3$ et $p \mid q^3$. On en déduit $p = \pm 1$ et $q = \pm 1$ puisque $p \wedge q = 1$. Ainsi, $p/q = \pm 1$, ce qui est contradictoire puisque $P(1) = 3 \neq 0$ et $P(-1) = -1 \neq 0$.

Remarque Plus généralement, un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré 2 ou 3 n'ayant aucune racine dans $\mathbb{K}$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

p.41

Exercice 15 Le polynôme $P = X^4 + X^2 + 1$
1. a-t-il des racines dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{Q}$?
2. est-il irréductible dans $\mathbb{C}[X]$? dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{Q}[X]$?

Polynômes premiers entre eux

Définition 11

Deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ sont **premiers entre eux** si leurs seuls diviseurs communs sont les polynômes constants non nuls de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple Deux polynômes irréductibles non associés sont premiers entre eux. Considérons, en effet, deux polynômes irréductibles P et Q non premiers entre eux. Ils admettent alors un diviseur commun D non constant. Comme P et Q sont irréductibles, on en déduit que D est associé à P et à Q, donc que P et Q sont associés.

Plus généralement :

Proposition 20

Soit P un polynôme irréductible et A un polynôme quelconque. Alors P et A sont premiers entre eux si, et seulement si, P ne divise pas A.

Démonstration page 41

2 Utilisation des idéaux de $\mathbb{K}[X]$

Idéaux de $\mathbb{K}[X]$

Si B est un élément de $\mathbb{K}[X]$, l'exemple de la page 7 montre que :

$$B\,\mathbb{K}[X] = \{B\,Q\,;\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
Comme dans le cas de $\mathbb{Z}$, on a ainsi obtenu tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$.

Théorème 21

Les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont les $B\,\mathbb{K}[X]$, pour $B \in \mathbb{K}[X]$.

Principe de démonstration. Si I est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$, on considère un élément B non nul de I de degré minimal et l'on utilise la division euclidienne par B pour montrer que tout élément de I est un multiple de B.

Démonstration page 42

Grâce à cette propriété importante de $\mathbb{K}[X]$, nous allons pouvoir retrouver (et généraliser au cas d'un corps $\mathbb{K}$ quelconque) les propriétés arithmétiques de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.

Remarques

- Un **anneau principal** est un anneau intègre A dans lequel tout idéal est principal, c'est-à-dire de la forme $x\,A$, pour un certain x de A (voir l'exemple de la page 7).
- L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est ainsi un anneau principal, ainsi que $\mathbb{Z}$ d'après le théorème 7 de la page 8.

- Les résultats arithmétiques qui suivent utilisent cette propriété de principalité de $\mathbb{K}[X]$ et peuvent donc se généraliser à n'importe quel anneau principal (sauf l'algorithme d'Euclide qui utilise la division euclidienne).
- Le même schéma permettrait ainsi de retrouver les résultats classiques de l'arithmétique de $\mathbb{Z}$ en utilisant ses idéaux.

Lien avec la divisibilité

La proposition suivante permet de ramener la notion de divisibilité à une relation d'ordre (inclusion sur les idéaux).

Proposition 22

On a :

$$\forall (A,B) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad B \mid A \iff A\,\mathbb{K}[X] \subset B\,\mathbb{K}[X].$$

Démonstration. On a les équivalences immédiates :

$$B \mid A \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X] \quad A = BQ \iff A \in B\,\mathbb{K}[X].$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que $A\,\mathbb{K}[X] \subset B\,\mathbb{K}[X] \iff A \in B\,\mathbb{K}[X]$.

- L'implication $\Longrightarrow$ est évidente puisque $A \in A\,\mathbb{K}[X]$.
- Puisque $B\,\mathbb{K}[X]$ est un idéal, si $A \in B\,\mathbb{K}[X]$, alors $\forall Q \in \mathbb{K}[X] \quad AQ \in B\,\mathbb{K}[X]$, ce qui prouve l'implication $\Longleftarrow$. □

Remarque On en déduit, grâce à la proposition 17 de la page 14, que deux polynômes sont associés si, et seulement s'ils sont générateurs du même idéal.

Corollaire 23

Tout idéal I de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0\}$ est de la forme $A\,\mathbb{K}[X]$ pour un unique polynôme unitaire A.

Ce polynôme A est appelé **le générateur** de I.

PGCD

Exemples Soit A et B deux polynômes non nuls.

1. L'ensemble des multiples communs à A et B est $A\,\mathbb{K}[X] \cap B\,\mathbb{K}[X]$. Il s'agit donc d'un idéal de $\mathbb{K}[X]$, non nul puisque AB lui appartient. Son générateur M est appelé **le PPCM** de A et B. C'est l'unique polynôme unitaire $M \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$$A\,\mathbb{K}[X] \cap B\,\mathbb{K}[X] = M\,\mathbb{K}[X]$$
c'est-à-dire vérifiant :
$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad (A \mid P \quad \text{et} \quad B \mid P) \iff M \mid P.$$
2. De même que, pour le PPCM, on s'intéresse à $A\,\mathbb{K}[X] \cap B\,\mathbb{K}[X]$ qui est le plus grand idéal de $\mathbb{K}[X]$ contenu dans $A\,\mathbb{K}[X]$ et $B\,\mathbb{K}[X]$, pour le PGCD on va considérer le plus petit idéal de $\mathbb{K}[X]$ contenant $A\,\mathbb{K}[X]$ et $B\,\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire, d'après la proposition 5 de la page 8, leur somme $A\,\mathbb{K}[X] + B\,\mathbb{K}[X]$.

Définition 12

Soit A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ non tous les deux nuls.

On appelle **PGCD** de A et B le générateur D de l'idéal $A\,\mathbb{K}[X]+B\,\mathbb{K}[X]$.

Il vérifie la relation :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad (P \mid A \quad \text{et} \quad P \mid B) \iff P \mid D.$$

On a la **relation de Bézout** :

$$\exists (U,V) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad D = AU + BV.$$

Remarques

- Parmi les diviseurs communs à A et B, le PGCD est le polynôme unitaire de degré maximal.
- Si $A = 0$, le PGCD de A et B est le polynôme B normalisé (c'est-à-dire divisé par son coefficient dominant).
- Rappelons que l'on peut obtenir le PGCD par l'algorithme d'Euclide :
  - tant que B est non nul, on remplace (A,B) par (B,R), où R est le reste de la division euclidienne de A par B ;
  - le PGCD recherché est alors A divisé par son coefficient dominant.

Remarque La définition précédente se généralise naturellement à k éléments $(A_1,\dots,A_k) \in \mathbb{K}[X]^k$ non tous nuls. L'ensemble :

$$\{A_1U_1 + A_2U_2 + \cdots + A_kU_k\,;\ (U_1,U_2,\dots,U_k) \in \mathbb{K}[X]^k\},$$

noté $A_1\,\mathbb{K}[X] + A_2\,\mathbb{K}[X] + \cdots + A_k\,\mathbb{K}[X]$, est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Son générateur D est le **PGCD** de $(A_1,A_2,\dots,A_k)$ et on a la relation de Bézout :

$$\exists (U_1,U_2,\dots,U_k) \in \mathbb{K}[X]^k \quad D = A_1U_1 + A_2U_2 + \cdots + A_kU_k.$$

Relation de Bézout

Par définition du PGCD, on a immédiatement les résultats suivants.

Proposition 24

Soit $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$.

1. Si D est le PGCD de A et B, alors il existe U et V dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $D = AU + BV$.
2. Les polynômes A et B sont premiers entre eux si, et seulement s'il existe $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $AU + BV = 1$.

Démonstration. Seule la réciproque du deuxième point reste à démontrer. Si $AU+BV=1$, tout diviseur commun à A et B divise $AU+BV$ donc 1. On en déduit que les seuls diviseurs communs à A et B sont les polynômes constants non nuls, donc que A et B sont premiers entre eux. □

p.42

Exercice 16 Soit $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$. Pour quels $P \in \mathbb{K}[X]$, l'équation $AU+BV=P$ admet-elle des solutions en $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$?

Corollaire 25

Soit $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$. Si D est le PGCD de A et B, on peut écrire $A = DA'$ et $B = DB'$, avec A' et B' premiers entre eux.

Démonstration. Il suffit de diviser une relation de Bézout $AU+BV=D$ par D pour obtenir $A'U+B'V=1$, ce qui prouve que A' et B' sont premiers entre eux. □

Algorithme d'Euclide étendu Dans $\mathbb{K}[X]$, on peut déterminer le PGCD et un couple de coefficients de Bézout par l'algorithme d'Euclide.
Cet algorithme a déjà été présenté en première année (lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Nous donnons ici une version récursive.

Algorithme d'Euclide étendu dans $\mathbb{K}[X]$

Entrées : les polynômes A et B, avec A non nul.
Variables : Q, R, D, U, V et λ.
Résultat : PGCD unitaire et coefficients de Bézout
function `pgcd(A,B)`
  if $B=0$ **then**
    $\lambda \leftarrow$ coefficient dominant de A
    return $(\frac{A}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, 0)$
  else
    $(Q,R) \leftarrow$ quotient et reste de la division de A par B
    $(D,U,V) \leftarrow$ `pgcd`(B,R)
    return $(D, V, U-QV)$

Théorème de Gauss

Théorème 26 (Lemme de Gauss)

Soit A, B et C trois éléments de $\mathbb{K}[X]$.

Si A divise BC et si A est premier avec B, alors A divise C.

Principe de démonstration. Multiplier par C une relation de Bézout $AU+BV=1$.

Démonstration page 42

p.42

Exercice 17 Montrer que si A et B sont deux polynômes premiers entre eux et non tous les deux constants, il existe un unique couple $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$AU+BV=1 \qquad \text{avec} \qquad \deg U < \deg B \quad \text{et} \quad \deg V < \deg A.$$

Décomposition en facteurs irréductibles

Théorème 27

Tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ est produit d'irréductibles.

Principe de démonstration. On démontre qu'un polynôme P non constant est produit d'irréductibles par récurrence forte sur le degré de P. Démonstration page 43

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires. Les éléments de $\mathcal{P}$ sont donc deux à deux non associés et tout polynôme irréductible est associé à un unique élément de $\mathcal{P}$.

Théorème 28

Tout polynôme A non nul de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$A = \lambda \prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\alpha_P}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $(\alpha_P)_{P\in\mathcal{P}}$ est une famille presque nulle d'entiers naturels.

Démonstration page 43

Point méthode

Dans la pratique, on écrit la décomposition en produits d'irréductibles d'un élément A non nul sous l'une des formes :

- $A = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k}$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $P_1, \dots, P_k$ sont des éléments de $\mathcal{P}$ distincts deux à deux et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des entiers naturels non nuls ;
- $A = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k}$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $P_1, \dots, P_k$ sont des éléments de $\mathcal{P}$ distincts deux à deux et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des entiers naturels éventuellement nuls.

Avec la deuxième forme, on perd l'unicité, mais on peut utiliser les mêmes irréductibles pour plusieurs éléments de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple Soit A et B deux éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$ décomposés sous la deuxième forme :

$$A = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k} \qquad \text{et} \qquad B = \mu P_1^{\beta_1} \cdots P_k^{\beta_k}.$$

- $B \mid A$ si, et seulement si, $\forall i \in [\![1, k]\!] \quad \beta_i \leqslant \alpha_i$;
- le PGCD de A et B est $D = P_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdots P_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$;
- le PPCM de A et B est $M = P_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdots P_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$.

On a ainsi $A\,B = \lambda\,\mu\,D\,M$.

III Groupes

1 Rappels

Rappelons quelques exemples de groupes classiques étudiés en première année.

Exemples

1. $\mathbb{Z}$ est un groupe commutatif.
2. Si E est un ensemble, l'ensemble $\mathfrak{S}(E)$ des permutations de E est un groupe pour la composition des applications.
3. Si E est un espace vectoriel, le groupe linéaire $\mathcal{GL}(E)$ est un groupe.
4. Si n est un entier naturel non nul, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un groupe, non commutatif dès que $n \geqslant 2$.
5. Si E est un espace vectoriel euclidien, les automorphismes orthogonaux de E forment le groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$. De même, les matrices orthogonales d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, forment le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Nous venons également de voir la structure d'anneau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{N})$. Comme pour tout anneau, muni de son addition, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a donc une structure de groupe abélien.
Nous allons ici prolonger l'étude des groupes commencée en première année. Contrairement aux groupes additifs des anneaux, leur loi est souvent notée multiplicativement. C'est ainsi que seront formulés les définitions et résultats qui vont suivre. Le lecteur est invité à les traduire avec la notation additive (réservée aux groupes commutatifs, rappelons-le).

2 Morphismes de groupes

Généralités

Définition 13

Soit G et G' deux groupes. On appelle **morphisme de groupes** de G dans G', toute application φ de G dans G' vérifiant :

$$\forall (g,h) \in G^2 \quad \varphi(g\,h) = \varphi(g)\,\varphi(h).$$

Exemples

1. L'application qui envoie tous les éléments d'un groupe G sur l'élément neutre d'un groupe G' est un morphisme de groupes.
2. L'exponentielle est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

   Sa réciproque, l'application logarithme, est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ dans $(\mathbb{R},+)$.
3. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \\ A & \longmapsto & \det A \end{array}$$

   est un morphisme de groupes de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\times)$ dans $(\mathbb{K}^*,\times)$.

4. La signature est un morphisme de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$.
5. Un morphisme d'anneaux est en particulier un morphisme entre leurs groupes additifs.

   Il induit un morphisme entre les groupes des éléments inversibles des deux anneaux.

Proposition 29

Soit f un morphisme de groupes de G (d'élément neutre e) dans G' (d'élément neutre e'). On a :

- $f(e) = e'$,
- $\forall x \in G \quad (f(x))^{-1} = f(x^{-1})$,
- $\forall x \in G \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (f(x))^n = f(x^n)$.

Démonstration page 43

Isomorphismes

Définition 14

Un **isomorphisme** est un morphisme bijectif.

Un **automorphisme** est un isomorphisme d'un groupe dans lui-même.

Exemples

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'application $x \mapsto \lambda x$ est un automorphisme de $(\mathbb{R}, +)$.
2. Plus généralement, un automorphisme d'un espace vectoriel E est en particulier un automorphisme de groupe additif de E.
3. Soit $(G, .)$ un groupe et $g \in G$. L'application $x \mapsto g x g^{-1}$ est un automorphisme de G, appelé **automorphisme intérieur**.

Proposition 30

Si φ est un isomorphisme de groupes, alors φ^{-1} est également un isomorphisme de groupes.

Démonstration page 44

Exemples

1. La fonction logarithme est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.
2. Sa réciproque, l'exponentielle, est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Notation On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes du groupe G.

p.44 **Exercice 18** Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe.

Définition 15

Deux groupes sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme entre eux.

Exemple Les groupes additifs $\mathbb{Z}/(mn)\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sont isomorphes lorsque m et n sont premiers entre eux : c'est une conséquence du théorème chinois (*cf.* page 11) puisqu'un isomorphisme d'anneaux induit en particulier un isomorphisme entre leurs groupes additifs.

Point méthode

- Pour montrer que deux groupes sont isomorphes, il suffit d'exhiber un isomorphisme entre eux.
- Pour montrer qu'ils ne sont pas isomorphes, on exhibe une propriété liée à la loi de groupe (et donc conservée par isomorphisme) qui est vraie pour l'un et pas pour l'autre.

Exemples

1. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{S}_3$ ne sont pas isomorphes car l'un est commutatif et pas l'autre.
2. Lorsque n et m ne sont pas premiers entre eux, $\mathbb{Z}/(nm)\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ ne sont pas isomorphes. En effet, si p est le PPCM de m et n, on a $0 < p < n\,m$ puisque et n et m ne sont pas premiers entre eux et donc $p\,[1]_{nm} = [p]_{nm} \neq [0]_{nm}$.

   Si $\mathbb{Z}/(nm)\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ étaient isomorphes, il existerait donc un élément $(x, y) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ tel que $p\,(x, y) \neq \big([0]_n, [0]_m\big)$, ce qui est faux puisque $p\,x = [0]_n$ (p multiple de n) et $p\,y = [0]_m$ (p multiple de m).

   Rappelons que la notation $p\,\alpha = \underbrace{\alpha + \cdots + \alpha}_{p \text{ fois}}$ désigne ici l'itéré d'un élément α d'un groupe additif.

p.44

Exercice 19 Les groupes suivants sont-ils isomorphes ?

1. $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$,
2. $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$,
3. $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$,
4. $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$.

3 Noyau, image

Soit G et G' deux groupes d'éléments neutres respectifs e et e', ainsi que f un morphisme de groupes de G dans G'.

Proposition 31

- Si H est un sous-groupe de G, alors $f(H)$ est un sous-groupe de G'.
- Si H' est un sous-groupe de G', alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.

Démonstration page 44

Corollaire 32

- $f(G)$, l'**image** de f, est un sous-groupe de G'. On le note $\operatorname{Im} f$.
- L'ensemble $f^{-1}(\{e'\})$, appelé **noyau** de f, est un sous-groupe de G. On le note $\operatorname{Ker} f$.

Exemples

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est un endomorphisme surjectif du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. Son noyau est $\mathcal{U}_n$, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, ce qui permet de prouver que ce dernier est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.
2. Le morphisme $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G' \\ x & \longmapsto & e' \end{array}$ a pour noyau G et pour image $\{e'\}$.
3. L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathcal{U}, \times)$. Son noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.
4. L'application $z \mapsto e^z$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. Son noyau est $2i\pi\mathbb{Z}$.
5. Le **groupe spécial orthogonal** $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, constitué des matrices orthogonales de déterminant 1 est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par le morphisme de groupes déterminant.

p.45

Exercice 20 Montrer que l'application $\varphi : g \mapsto (x \mapsto g\,x\,g^{-1})$ est un morphisme de groupes de G dans le groupe des automorphismes de G. Quel est son noyau ?

Théorème 33

Le morphisme de groupes f est injectif si, et seulement si, $\operatorname{Ker} f = \{e\}$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in G \quad f(x) = e' \Longrightarrow x = e.$$

Démonstration page 45

4 Produit de groupes

Soit G_1 et G_2 deux groupes dont les lois sont notées multiplicativement et d'éléments neutres e_1 et e_2. On définit sur l'ensemble produit $G_1 \times G_2$ une loi de composition par :

$$\forall ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (G_1 \times G_2)^2 \quad (x_1, x_2).(y_1, y_2) = (x_1\,y_1, x_2\,y_2).$$

Cette loi munit $G_1 \times G_2$ d'une structure de groupe, le neutre étant (e_1, e_2), le symétrique de (x_1, x_2) étant (x_1^{-1}, x_2^{-1}).
On peut facilement étendre cette définition à tout produit fini de groupes.

Exemples

1. L'application $(\rho, \theta) \mapsto \rho\, e^{i\theta}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times) \times (\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Si $\mathcal{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1, l'application $(\rho, u) \mapsto \rho\, u$ est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}_+^*, \times) \times (\mathcal{U}, \times)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

5 Groupes monogènes et cycliques

Sous-groupe engendré par une partie

Soit G un groupe.

Proposition 34

Une intersection de sous-groupes de G est un sous-groupe de G.

Démonstration page 45

Définition 16

Soit A une partie de G. Il existe un plus petit sous-groupe de G contenant A. On l'appelle **sous-groupe engendré par A**.

Remarque Il est immédiat que le sous-groupe de G engendré par l'ensemble vide est $\{e\}$. Dans la suite, nous pouvons donc supposer $A \neq \varnothing$.

Proposition 35

Le sous-groupe engendré par une partie A non vide est l'ensemble des produits d'éléments de A et d'inverses d'éléments de A.

Démonstration.

Soit H l'ensemble des produits d'éléments de A et d'inverses d'éléments de A :

$$H = \left\{x_1 \dots x_n \,;\; n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad x_i \in A \text{ ou } x_i^{-1} \in A\right\}.$$

On montre que H est le plus petit sous-groupe de G contenant A.

- H contient A : pour tout $a \in A$, prendre $n = 1$ et $x_1 = a$.
- Tout sous-groupe de G contenant A contient H par stabilité par produit et passage à l'inverse.
- H est un sous-groupe de G :
  - H contient l'élément neutre e de G puisque, A étant non vide, on peut écrire $e = x\,x^{-1}$ avec $x \in A$
  - il est évidemment stable par produit et par passage à l'inverse (l'inverse de $x_1 \dots x_n$ est $x_n^{-1} \dots x_1^{-1}$). □

Définition 17

On dit que A **engendre** G ou que c'est une **partie génératrice** de G si le sous-groupe engendré par A est égal à G.

Exemples On a vu en première année

1. que tout élément du groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $[\![1,n]\!]$ était produit de transpositions ; cela signifie que le groupe $\mathfrak{S}_n$ est engendré par l'ensemble des transpositions ;

2. que tout automorphisme orthogonal d'un plan euclidien E était soit une réflexion, soit une rotation qui est alors un produit de deux réflexions ; cela entraîne que le groupe $\mathcal{O}(E)$ est engendré par l'ensemble des réflexions.

   Nous verrons dans l'exercice 14.9 de la page 829 que ce résultat subsiste en toute dimension.

Groupes monogènes

Définition 18

Un groupe G est **monogène** s'il existe $x \in G$ tel que $G = \{x^n\,;\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Un tel élément x est alors appelé **générateur de G**. On dit aussi que G est **engendré** par x.

Attention Pour un groupe noté additivement, la définition devient :

$$\exists x \in G \quad G = \{n.x\,;\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemples

1. $\mathbb{Z}$ est engendré par 1.
2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est engendré par $\overline{1}$.
3. $\mathcal{U}_n$ est engendré par $e^{2i\pi/n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

p.45

Exercice 21

1. Montrer que $\mathbb{Z}^2$ n'est pas monogène.
2. Est-ce que $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/21\mathbb{Z})$ est monogène ?

Définition 19

Un groupe est **cyclique** s'il est monogène et fini.

Exemple Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les groupes $\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}$ et $\mathcal{U}_n$ sont ainsi cycliques.

Structure des groupes monogènes

Soit G un groupe monogène et a un générateur de G.
L'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ & n & \longmapsto & a^n \end{array}$$

est donc surjective. Les règles de calcul sur les itérés :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \quad a^{p+q} = a^p\, a^q$$

montrent que φ_a est un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}$ dans G. Son noyau :

$$\operatorname{Ker} \varphi_a = \{k \in \mathbb{Z} \mid a^k = e\}$$

est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, donc de la forme $n\mathbb{Z}$, pour $n \in \mathbb{N}$ (*cf.* le lemme 6 de la page 8). On obtient la description suivante de G.

Proposition 36

Avec les notations précédentes :

- ou bien φ_a est injective et G est infini isomorphe à $\mathbb{Z}$,
- ou bien $\operatorname{Ker}\varphi_a = n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$$

est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

L'entier n et alors le plus petit entier naturel k non nul tel que $a^k = e$.

Principe de démonstration. Lorsque $\operatorname{Ker}\varphi_a = n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, on vérifie que l'on peut définir l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & a^k \quad \text{si } x = \overline{k} \end{array}$$

et que cette dernière est un isomorphisme.

Démonstration page 46

Corollaire 37

1. Tout groupe monogène infini est isomorphe à $\mathbb{Z}$.
2. Tout groupe cyclique de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exemple Le groupe $\mathcal{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

p.46

Exercice 22

Montrer que $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & n\,2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} ;\ n \in \mathbb{Z} \right\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathbb{Z}$.

p.46

Exercice 23 Montrer que tout sous-groupe d'un groupe monogène est monogène.

Indication : considérer l'image réciproque d'un tel sous-groupe par le morphisme φ_a.

Proposition 38

Les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les classes des entiers premiers avec n.

Il y en a donc $\varphi(n)$, où φ est l'indicatrice d'Euler.

Principe de démonstration.

Démonstration page 46

Remarquer que $\overline{k}$ engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si, et seulement si, $\overline{1}$ est dans le sous-groupe engendré par $\overline{k}$.

6 Ordre d'un élément dans un groupe

Définition 20

Un élément a d'un groupe G d'élément neutre e est **d'ordre fini** s'il existe un entier naturel n non nul tel que $a^n = e$.

L'ordre de a est alors le plus entier naturel n non nul tel que $a^n = e$.

Proposition 39

Un élément a d'un groupe G est d'ordre fini si, et seulement si, le sous-groupe engendré par a est fini et l'ordre p de a est alors le cardinal de ce sous-groupe. Il est caractérisé par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a^n = e \iff p \mid n.$$

Démonstration. C'est un conséquence de la proposition 36 de la page précédente. En particulier, le fait que a soit d'ordre fini est une traduction, par le noyau, de la non injectivité du morphisme φ_a. □

Remarque L'ordre de a est donc le plus petit entier naturel non nul p tel que $a^p = e$, aussi bien pour l'ordre naturel de $\mathbb{N}$ que pour la relation de divisibilité.

p.47

Exercice 24 Soit a un élément d'ordre n.

1. Montrer que pour tout diviseur d de n, l'ordre de a^d est n/d.
2. Quel est l'ordre de a^k, pour $k \in \mathbb{N}$?

Corollaire 40

Dans un groupe fini, tout élément est d'ordre fini.

p.47

Exercice 25 Montrer que si G est fini, le sous-groupe engendré par une partie A est l'ensemble des produits d'éléments de A.

Théorème 41

L'ordre de tout élément d'un groupe fini G divise le cardinal de G.

Principe de démonstration dans le cas où G est commutatif

Pour tout $a \in G$, on a $\prod_{g \in G} (ag) = \prod_{g \in G} g$.

Démonstration page 47

La démonstration dans le cas général est non exigible.

Elle est proposée dans l'exercice 1.8 de la page 52.

Exemples

1. Tout groupe fini de cardinal premier est cyclique.

   En effet, soit G un groupe de cardinal p premier. Alors $G \neq \{e\}$. Considérons donc un élément a de G différent de e. Le cardinal du sous-groupe H de G engendré par a est alors un diviseur de p, différent de 1 puisque $a \neq e$.

   On a donc $\text{card}\, H = p = \text{card}\, G$, ce qui prouve l'égalité $G = H$ et donc que G est engendré par a.

2. $\mathcal{U}_n$ est le seul sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ de cardinal n. En effet, si H est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ de cardinal n, le théorème 41 de la page ci-contre donne :

   $$\forall z \in H \quad z^n = 1 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad H \subset \mathcal{U}_n.$$

   Cette inclusion et l'égalité des cardinaux (finis) donne alors $H = \mathcal{U}_n$.

Théorème 42 (Théorème d'Euler)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ premier avec n, on a $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \quad [n]$.

Principe de démonstration. La classe de a est élément de l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui est un groupe de cardinal $\varphi(n)$.

Démonstration page 47

Exemple Lorsque p est un nombre premier, on retrouve le petit théorème de Fermat :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad k \wedge p = 1 \Longrightarrow k^{p-1} \equiv 1 \quad [p] \qquad \text{puis} \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \quad k^p \equiv k \quad [p].$$

IV Algèbres

1 Structure d'algèbre

Définition 21

Une **algèbre** sur $\mathbb{K}$ (ou une **$\mathbb{K}$-algèbre**) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A, muni d'une loi de composition interne $(x, y) \mapsto x.y$, appelée **multiplication**, qui est bilinéaire, associative et qui possède un neutre souvent noté 1 ou 1_A.

Remarques

- La bilinéarité se traduit par la propriété suivante : quels que soient x, y, z dans A et quels que soient les scalaires λ et μ :

  $$x\,(\lambda\, y + \mu\, z) = \lambda\, xy + \mu\, xz \qquad \text{et} \qquad (\lambda\, x + \mu\, y)\, z = \lambda\, xz + \mu\, yz. \qquad (*)$$

- Munie de son addition et de sa multiplication, une algèbre est un anneau.

  Réciproquement, un espace vectoriel A muni d'une structure d'anneau est une algèbre si, et seulement si, les deux multiplications (interne et externe) vérifient la propriété de compatibilité :

  $$\forall (\lambda, a, b) \in \mathbb{K} \times A \times A \quad \lambda\,(a.b) = (\lambda a).b = a.(\lambda b). \qquad (**)$$

  En effet, cette propriété $(**)$ est une conséquence évidente de $(*)$ et réciproquement $(*)$ découle de $(**)$ et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

- Lorsque la multiplication est commutative, on dit que l'algèbre est **commutative**.

La structure d'algèbre est une notion très importante qui se rencontre fréquemment, notamment en analyse.

Exemples

1. Les suites réelles, les suites réelles convergentes, les fonctions réelles constituent des $\mathbb{R}$-algèbres.
2. De même, les suites complexes, les suites complexes convergentes, les fonctions complexes constituent des $\mathbb{C}$-algèbres.
3. $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-algèbres pour les lois usuelles (E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel).

p.48

Exercice 26 Soit A un anneau contenant $\mathbb{K}$ comme sous-anneau. À quelle condition peut-on munir A d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre avec comme loi externe la restriction à $\mathbb{K} \times A$ du produit de A ?

p.48

Exercice 27 Soit A une algèbre de dimension finie et a un élément de A régulier à gauche, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad a\,x = a\,y \Longrightarrow x = y.$$

1. Montrer qu'il existe un élément $b \in A$ tel que $a\,b = 1$.
2. En déduire que a est inversible.
3. Que peut-on dire d'une algèbre A de dimension finie vérifiant :

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad x\,y = 0 \Longrightarrow (x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0) \ ?$$

2 Sous-algèbres

Définition 22

Une **sous-algèbre** d'une algèbre A est un sous-espace vectoriel de A stable par multiplication et contenant 1_A, c'est-à-dire une partie de A stable par combinaison linéaire, par multiplication et contenant l'élément neutre multiplicatif 1_A.

Exemples

1. Si A est une algèbre, alors $\mathrm{Vect}(1_A)$ est une sous-algèbre de A.
2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est une sous-algèbre. De même pour les matrices triangulaires inférieures ou les matrices diagonales, mais pas pour les matrices symétriques lorsque $n \geqslant 2$ (un produit de deux matrices symétriques est symétrique si, et seulement si, elles commutent).

3 Morphismes d'algèbres

Définition 23

Soit A et B deux $\mathbb{K}$-algèbres. Un **morphisme d'algèbres** de A dans B est une application linéaire de A dans B qui est également un morphisme d'anneaux, c'est-à-dire une application de A dans B qui vérifie :

- $\forall (x,y) \in A^2 \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$
- $\forall (x,y) \in A^2 \quad f(xy) = f(x) f(y)$,
- $f(1_A) = 1_B$.

On dit que f est un **isomorphisme** lorsqu'il est bijectif, un **endomorphisme** lorsque $A = B$ et un **automorphisme** lorsque c'est un endomorphisme bijectif.

Exemples

1. Pour toute algèbre A, la sous-algèbre $\mathrm{Vect}(1_A)$ est isomorphe à $\mathbb{K}$ par l'isomorphisme $\lambda \mapsto \lambda 1_A$.
2. Si $\mathcal{B}$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension finie n, l'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
   L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & P M P^{-1} \end{array}$ est un automorphisme d'algèbre.

Résultats

- Une composée de morphismes d'algèbres est un morphisme d'algèbres.
- La réciproque d'un isomorphisme d'algèbres est un isomorphisme d'algèbres.

p.48

Exercice 28

1. L'image par un morphisme d'algèbres d'une sous-algèbre est-elle une sous-algèbre ? Et l'image réciproque ?
2. L'image et le noyau d'un morphisme d'algèbres sont-ils des sous-algèbres ?

Remarque Un morphisme d'algèbres $f : A \to B$ étant en particulier une application linéaire et un morphisme d'anneaux, son noyau est un sous-espace vectoriel et un idéal de A.

4 Substitution polynomiale, polynômes annulateurs

Dans le chapitre de réduction, nous aurons besoin de considérer $P(A)$ ou $P(u)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour unifier ces deux cas de figure, nous allons nous placer plus généralement dans une $\mathbb{K}$-algèbre A. Les exemples seront donnés dans les cas particuliers de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui nous intéressent.

Substitution

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre.

Définition 24

Soit $u \in A$ et $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On note $P(u)$ l'élément de A défini par :

$$P(u) = a_0 1_A + a_1 u + \cdots + a_p u^p = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k.$$

Remarque En utilisant la notation $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, où (a_k) est une suite de scalaires nulle à partir d'un certain rang, cela s'écrit aussi $P(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$.

Exemples importants

1. Lorsque $A = \mathbb{K}$, on retrouve la notion de **fonction polynomiale**.
2. Lorsque $A = \mathbb{K}[X]$, cela donne la **composition des polynômes** : si P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$, le polynôme $P(Q)$ est aussi noté $P \circ Q$.
3. **Cas des endomorphismes d'un espace vectoriel** E.

   Ici, $A = \mathcal{L}(E)$. Pour $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme $P(u)$ est défini par :

   $$P(u) = a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 u + \cdots + a_p u^p = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k.$$
4. **Cas des matrices carrées**.

   Ici, $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $P(A)$ est définie par :

   $$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k.$$

Proposition 43

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre et $u \in A$. L'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ dans A.

Démonstration page 49

Idéal annulateur, polynômes annulateurs, polynôme minimal

Définition 25

Soit $u \in A$. Le noyau du morphisme $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & A \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array}$ est appelé **idéal annulateur de u**.

On appelle **polynôme annulateur de u** tout élément de l'idéal annulateur de u, c'est-à-dire tout polynôme P tel que $P(u) = 0$.

La structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$ (*cf.* le théorème 21 de la page 16) justifie la définition suivante.

Définition 26 (Polynôme minimal)

Soit $u \in A$ admettant un polynôme annulateur *non nul*. Le **polynôme minimal** de u est le générateur unitaire de l'idéal annulateur de u. On le note π_u.

Lorsque u admet un polynôme minimal, ses polynômes annulateurs sont alors les multiples de π_u.

Exemples

1. Un élément u d'une algèbre est dit **nilpotent** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^n = 0$. Pour un tel n, le polynôme X^n est alors annulateur de u et donc le polynôme minimal de u est de la forme X^k, avec $k \leqslant n$.

   L'entier k ainsi défini est appelé **indice de nilpotence** de u.

2. Si $A \neq \{0\}$, le polynôme minimal de $u \in A$, s'il existe, est de degré supérieur ou égal à 1, puisque $1(u) = 1_A \neq 0$.

3. Un élément u d'une algèbre non nulle est dit **idempotent** si $u^2 = u$. Son polynôme minimal π est alors un diviseur de $X^2 - X$. C'est donc son polynôme minimal sauf si l'on est dans un des deux cas suivants :

   - $\pi = X$ auquel cas $u = 0_A$,
   - $\pi = X - 1$ auquel cas $u = 1_A$.

   Ainsi, les projecteurs non triviaux d'un espace vectoriel ont pour polynôme minimal $X^2 - X$.

p.49

Exercice 29 Qu'en est-il des symétries ?

Structure de la sous-algèbre $\mathbb{K}[u]$

Soit u un élément de l'algèbre A.

On note $\mathbb{K}[u] = \{P(u)\,;\ P \in \mathbb{K}[X]\}$. C'est une sous-algèbre commutative de A comme image de l'algèbre commutative $\mathbb{K}[X]$ par le morphisme d'évaluation $P \mapsto P(u)$.

Proposition 44

- Si u admet un polynôme minimal et si $d = \deg(\pi_u)$, alors $\mathbb{K}[u]$ est de dimension finie d et la famille $\left(u^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.
- Sinon, $\mathbb{K}[u]$ est isomorphe à $\mathbb{K}[X]$ donc de dimension infinie.

Principe de démonstration. On utilise la division euclidienne par le polynôme minimal π_u.

Démonstration page 49

Point méthode

La démonstration de la proposition précédente fournit une méthode pratique de décomposition de $v = P(u) \in \mathbb{K}[u]$ dans la base $(u^k)_{k\in[\![0,d-1]\!]}$ de $\mathbb{K}[u]$: on détermine le reste de la division euclidienne de P par le polynôme minimal de u.

Ainsi, pour calculer les puissances successives de u, on détermine le reste de la division euclidienne de X^p, avec $p \in \mathbb{N}$, par le polynôme minimal de u.

p.50

Exercice 30 Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et en déduire un polynôme de degré 2 annulant A.
   S'agit-il de son polynôme minimal ?
2. En déduire que A est inversible.
3. Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ puis pour $n \in \mathbb{Z}$.

Cas de la dimension finie

Proposition 45

Dans une algèbre A de dimension finie, tout élément admet un polynôme minimal.

Démonstration. Soit n la dimension de A. Pour tout $u \in A$, la famille $(1, u, \dots, u^n)$ est liée, puisque constituée de $n+1$ vecteurs, donc il existe une famille de scalaires $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ non tous nuls tels que $\sum_{p=0}^{n} \lambda_p u^p = 0$. Le polynôme $P = \sum_{p=0}^{n} \lambda_p X^p$ est donc un polynôme annulateur non nul de u. □

Exemple Soit E un espace vectoriel de dimension n. Tout endomorphisme u de E admet un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à n^2. En fait, on verra dans le chapitre suivant que le polynôme minimal de u est de degré inférieur ou égal à n. Il en est de même pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

p.50

Exercice 31

1. Soit $\varphi : A \to B$ un isomorphisme d'algèbres. Montrer que $u \in A$ admet un polynôme minimal si, et seulement si, $\varphi(u)$ admet un polynôme minimal et qu'alors ces polynômes minimaux sont égaux.
2. Si E est un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E, montrer que tout endomorphisme de E a même polynôme minimal que sa matrice dans $\mathcal{B}$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 On peut prendre par exemple l'anneau des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: les fonctions indicatrices de $\mathbb{R}_+$ et de $\mathbb{R}_-^*$ sont non nulles, mais leur produit est nul.

Exercice 2 Soit f une fonction polynomiale non nulle. L'ensemble Z de ses zéros est alors fini, donc $\mathbb{R} \setminus Z$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit g et h deux fonctions continues telles que $f\,g = f\,h$.

On a alors $\forall x \in \mathbb{R} \setminus Z \quad g(x) = h(x)$. Par densité de $\mathbb{R} \setminus Z$ dans $\mathbb{R}$ et continuité de g et h, on en déduit $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = h(x)$, c'est-à-dire $g = h$.

Donc f est régulière.

Proposition 2 Soit φ un isomorphisme d'anneaux de A dans B.

- Comme $\varphi(1_A) = 1_B$, on a $\varphi^{-1}(1_B) = 1_A$.
- Soit y_1 et y_2 deux éléments de B. On a :
$$\varphi\left(\varphi^{-1}(y_1) + \varphi^{-1}(y_2)\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}(y_1)\right) + \varphi\left(\varphi^{-1}(y_2)\right) = y_1 + y_2$$
et l'on en déduit $\varphi^{-1}(y_1 + y_2) = \varphi^{-1}(y_1) + \varphi^{-1}(y_2)$.
- On procède de la même façon pour le produit.

Donc φ^{-1} est un morphisme d'anneaux de B dans A, c'est-à-dire un isomorphisme par bijectivité.

Proposition 3

1. Soit A' un sous-anneau de A.
   - Comme $1_A \in A'$, on a $1_B = f(1_A) \in f(A')$.
   - Soit $(x_1, x_2) \in {A'}^2$. On a $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$, avec $x_1 + x_2 \in A'$ par stabilité de A' par addition. On en déduit que $f(A')$ est stable par addition.
   - Il en est de même pour la multiplication.
   - Enfin, si $x \in A'$, on a $-f(x) = f(-x)$ avec $-x \in A'$, donc $f(A')$ est stable par passage à l'opposé.

   Donc $f(A')$ est un sous-anneau de B.
2. Soit B' un sous-anneau de B.
   - Comme $f(1_A) = 1_B$ appartient à B' par définition, on a $1_A \in f^{-1}(B')$.
   - Soit $(x_1, x_2) \in f^{-1}(B')^2$.
     Alors $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont dans B', donc $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ aussi. On en déduit que $x_1 + x_2$ est dans $f^{-1}(B')$.
   - On procède de la même façon pour le produit.
   - Enfin, l'égalité $f(-x) = -f(x)$ et la stabilité de B' par passage à l'opposé donne la stabilité de $f^{-1}(B')$ par passage à l'opposé.

Exercice 3 Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

- L'égalité $f(0) = 0$ montre que 0 est le seul antécédent de 0 lorsque f est injective.
- Supposons $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Soit x et y deux éléments de A tels que $f(x) = f(y)$. Alors $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$, donc $x - y \in \operatorname{Ker} f$. On en déduit $x - y = 0$, c'est-à-dire $x = y$. D'où l'injectivité de f.

Exercice 4

- Si $B = \{0\}$, il est clair que $\operatorname{Ker} f = A$ est un sous-anneau de A.
- Supposons que $\operatorname{Ker} f$ soit un sous-anneau de A.
  Alors $1_A \in \operatorname{Ker} f$, donc $1_B = f(1_A) = 0$. On en déduit que B est trivial.

Exercice 5

1. Pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$:
$$(a_1, \dots, a_n) + (-a_1, \dots, -a_n) = (a_1 - a_1, \dots, a_n - a_n) = (0, \dots, 0)$$
donc $-(a_1, \dots, a_n) = (-a_1, \dots, -a_n)$.
2. Soit $(a_1, \dots, a_n)$ inversible dans $A_1 \times \cdots \times A_n$ et $(b_1, \dots, b_n)$ son inverse. Alors :
$$(a_1\, b_1, \dots, a_n\, b_n) = (a_1, \dots, a_n) \times (b_1, \dots, b_n) = (1, \dots, 1)$$
ce qui prouve que $a_1, \dots, a_n$ sont inversibles d'inverses respectifs $b_1, \dots, b_n$.
Réciproquement, il est clair que si $a_1, \dots, a_n$ sont inversibles, alors :
$$(a_1, \dots, a_n)\,(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}) = (1, \dots, 1)$$
donc que $(a_1, \dots, a_n)$ est inversible d'inverse $(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1})$.

3 et 4. Supposons $A \times B$ intègre (ce qui est le cas en particulier si c'est un corps). Alors l'égalité $(1_A, 0_B) \times (0_A, 1_B) = (0_A, 0_B)$ prouve que $1_A = 0_A$ ou $1_B = 0_B$. L'un des deux anneaux A ou B est donc trivial et ils ne peuvent pas l'être tous les deux, sinon leur produit le serait également.

Supposons maintenant B trivial. L'application $f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \times B \\ x & \longmapsto & (x, 0) \end{array}$ est alors une bijection et c'est un morphisme d'anneaux. En effet :
$$f(1_A) = (1_A, 0_B) = (1_A, 1_B) \qquad \text{puisque } B \text{ est trivial,}$$
les deux autres propriétés étant évidentes.

Par l'isomorphisme f, il est alors immédiat que $A \times B$ est intègre si, et seulement si, A est intègre et que $A \times B$ est un corps si, et seulement si, A est un corps.

En conclusion, un produit de deux anneaux est :

- intègre si, et seulement si, l'un des deux anneaux est intègre et l'autre trivial ;
- un corps si, et seulement si, l'un des deux est un corps et l'autre trivial.

Exercice 6

- Notons $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites bornées. Il s'agit d'un sous-anneau de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$: cela traduit le fait qu'une somme, une différence et un produit de suites bornées sont des suites bornées et que la suite constante $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

  L'ensemble C_0 des suites tendant vers 0 est une partie de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ puisqu'une suite convergente est bornée. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ donc en particulier un sous-groupe additif. La deuxième propriété traduit le fait que le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 est une suite tendant vers 0.
- En revanche, C_0 n'est pas un idéal de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ puisque, par exemple, le produit de la suite $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}} \in C_0$ par $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite tendant vers 0.

Exercice 7

1. Si l'idéal I de A contient un élément inversible u, il contient aussi $1 = u\,u^{-1}$, donc est égal à A d'après la remarque précédente.
2. Ainsi, un idéal non réduit à $\{0\}$ d'un corps $\mathbb{K}$ contient un élément inversible, donc est égal à $\mathbb{K}$.

   Réciproquement, $\mathbb{K}$ et $\{0\}$ sont évidemment des idéaux de $\mathbb{K}$.

Proposition 4 Soit $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'idéaux de A. Posons $I = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$.

- Comme tous les I_λ sont des sous-groupes de $(A,+)$, leur intersection I en est également un sous-groupe.
- Soit $x \in I$ et $a \in A$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $a\,x \in I_\lambda$ puisque I_λ est un idéal de A. Donc $a\,x \in I$.

Exercice 8 Considérons l'intersection I de tous les idéaux de A contenant X (il en existe, puisque A est lui-même un idéal de A contenant X). D'après la proposition précédente, il s'agit d'un idéal de A, il contient évidemment X et, par définition, tout idéal de A contenant X contient I.

Exercice 9 Soit A un anneau commutatif non trivial dans lequel les seuls idéaux sont A et $\{0\}$. Montrons que tout élément non nul de A est inversible.

Soit $x \in A$ non nul. L'idéal $x\,A$ engendré par x contient x donc est différent de $\{0\}$. On en déduit que $x\,A = A$ et, en particulier, qu'il existe $a \in A$ tel que $x\,a = 1$, ce qui prouve que x est inversible.

Proposition 5

- I_1 et I_2 sont des sous-groupes de $(A,+)$, donc :
  - ils contiennent 0, ce qui donne $0 = 0 + 0 \in I_1 + I_2$;
  - pour tous $(x_1, y_1) \in I_1^2$ et $(x_2, y_2) \in I_2^2$, par commutativité de l'addition et stabilité de I_1 et I_2 par soustraction :
    $$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \in I_1 + I_2.$$

  Ainsi, $I_1 + I_2$ est un sous-groupe de A.
- Soit $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$ et $a \in A$. Par distributivité, $(x_1 + x_2)\,a = x_1\,a + x_2\,a$, ce qui prouve que $(x_1 + x_2)\,a$ appartient à $I_1 + I_2$ puisque I_1 et I_2 sont des idéaux de A.

Donc $I_1 + I_2$ est un idéal de A et il contient $I_1 = I_1 + \{0\}$ et $I_2 = \{0\} + I_2$. C'est évidemment le plus petit idéal de A contenant I_1 et I_2, puisque tout idéal de A contenant I_1 et I_2 doit contenir tous les $x_1 + x_2$ pour $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$ (par stabilité par addition).

Lemme 6 Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Si $H = \{0\}$, on a bien $H = 0\,\mathbb{Z}$. Sinon, H contient un élément p non nul et il contient aussi $-p$. Ainsi, l'ensemble des éléments strictement positifs de H est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Considérons son plus petit élément n.

- Par stabilité par addition de H, on a :
  $$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad k\,n = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{k \text{ fois}} \in H.$$

Comme $0 \in H$, on a $0 \times n \in H$ puis, par stabilité par passage à l'opposé :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad k\,n \in H \qquad \text{soit} \qquad n\,\mathbb{Z} \subset H.$$

- Soit $a \in H$. La division de a par $n > 0$ s'écrit :

$$a = n\,q + r \qquad \text{avec} \qquad q \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad r \in [\![0, n-1]\!].$$

Alors $r = a - n\,q$ appartient à H puisque $a \in H$ et $n\,a \in n\,\mathbb{Z} \subset H$. Comme n est le plus petit élément strictement positif de H, on en déduit $r = 0$, ce qui donne $a = n\,q \in n\,\mathbb{Z}$. Ainsi $H \subset n\,\mathbb{Z}$.

Conclusion : $H = n\,\mathbb{Z}$.

Exercice 10

- La congruence modulo 0 est la relation d'égalité, donc $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z} = \big\{\{k\}\,;\ k \in \mathbb{Z}\big\}$.
- Deux entiers quelconques sont évidemment congrus modulo 1, donc $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}\}$ (il n'y a qu'une seule classe).
- Enfin, il y a deux classes modulo 2 : celle des entiers pairs et celle des entiers impairs. Donc $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}+1\}$.

Proposition 8 Grâce à la division euclidienne par n, tout entier est congru à un élément de $[\![0, n-1]\!]$, donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \big\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\big\}$.

Pour conclure, il suffit de vérifier que les éléments $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$ sont distincts deux à deux, ce qui est le cas puisque deux éléments de $[\![0, n-1]\!]$ ne peuvent différer d'un multiple de n que s'ils sont égaux.

Proposition 9

1. Soit α et β dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si x, x' sont deux représentants de α et y, y' deux représentants de β, on a :

$$\begin{cases} x \equiv x' & [n] \\ y \equiv y' & [n] \end{cases} \qquad \text{donc, par compatibilité,} \qquad \begin{cases} x + y \equiv x' + y' & [n] \\ x \times y \equiv x' \times y' & [n]. \end{cases}$$

On peut donc poser $\alpha + \beta = \overline{x+y}$ et $\alpha \times \beta = \overline{x \times y}$ pour n'importe quels représentants x de α et y de β et l'on a ainsi :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \quad \overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y} \quad \text{et} \quad \overline{x} \times \overline{y} = \overline{x\,y}.$$

2. Pour l'associativité de l'addition, on écrit, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$:

$$\overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} + (\overline{y+z}) = \overline{x + (y+z)}$$

par définition de l'addition.

En utilisant l'associativité de l'addition de $\mathbb{Z}$, on a $x + (y+z) = (x+y) + z$ et de la même façon que ci-dessus, on a $\overline{(x+y)+z} = (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z}$.

On démontre de la même façon l'associativité de la multiplication, la commutativité de l'addition et de la multiplication, ainsi que la distributivité.

Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{Z}$:

$$\overline{0} + \overline{x} = \overline{0+x} = \overline{x} \qquad \text{et} \qquad \overline{1} \times \overline{x} = \overline{1 \times x} = \overline{x}.$$

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{Z}$:

$$\overline{x} + \overline{(-x)} = \overline{x - x} = \overline{0}$$

donc tout élément est symétrisable pour l'addition.

3. Le fait que la projection canonique soit un morphisme d'anneau est une conséquence des relations suivantes déjà montrées :

$$\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y} \qquad \overline{x\times y}=\overline{x}\times\overline{y} \qquad \overline{x}\times\overline{1}=\overline{x}.$$

Elle est surjective par définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Son noyau est l'ensemble des entiers congrus à 0 modulo n, c'est-à-dire des multiples de n.

Exercice 11 Conformément à la remarque précédente, et pour alléger les notations, nous identifierons chaque classe avec son représentant privilégié.

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:

$+$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\times$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

On remarque que $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est intègre puisque pour avoir $x\,y=0$ il est nécessaire d'avoir $x=0$ ou $y=0$.

En revanche, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est non intègre puisque, par exemple $\overline{2}\times\overline{3}=\overline{0}$.

Proposition 10

1. Soit $k\in\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\overline{k}\text{ inversible dans }\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\iff \exists u\in\mathbb{Z}\quad \overline{k}\,\overline{u}=\overline{1}\\ &\iff \exists u\in\mathbb{Z}\quad \overline{k\,u}=\overline{1}\\ &\iff \exists u\in\mathbb{Z}\quad \exists v\in\mathbb{Z}\quad k\,u+n\,v=1\\ &\iff k\wedge n=1.\end{aligned}$$

2. $(i)\Longrightarrow(ii)$**.** Tout corps est intègre.

   $(ii)\Longrightarrow(iii)$ **par contraposée.** Supposons n non premier.

   Si $n=1$, alors $\operatorname{card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=1$ donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est non intègre puisque trivial. Sinon, il existe alors deux entiers a et b tels que $n=a\,b$ avec $1<a<n$ et $1<b<n$. Par suite, $\overline{a}\neq\overline{0}$ et $\overline{b}\neq\overline{0}$ et $\overline{a}\,\overline{b}=\overline{0}$. Donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est non intègre.

   $(iii)\Longrightarrow(i)$**.** Supposons n premier. Soit $\alpha\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ différent de $\overline{0}$. Alors il existe $k\in[\![1,n-1]\!]$ tel que $\alpha=\overline{k}$ et ainsi k est premier avec n donc sa classe est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'après le premier point de la proposition. On en déduit que α est inversible.

   Donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps.

Exercice 12 Par exemple à l'aide de l'algorithme d'Euclide (voir le cours de première année), on trouve $5\times34-13\times13=1$, donc l'inverse de $\overline{13}$ est $-\overline{13}=\overline{21}$ dans $\mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$.

Proposition 11

- Soit k et ℓ deux entiers tels que $k\equiv\ell\ \ [nm]$. Alors évidemment k et ℓ ont même classe modulo m et même classe modulo n. L'application φ est donc bien définie.
- Le fait que φ soit un morphisme découle immédiatement de la même propriété pour les trois projections canoniques de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/(nm)\mathbb{Z}$.
- Soit $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\varphi\big([k]_{nm}\big)=\big([0]_n,[0]_m\big)$. Alors k est un multiple de n et m, donc un multiple de nm puisque n et m sont premiers entre eux. On en déduit $[k]_{nm}=[0]_{nm}$. Donc φ est injective (son noyau est trivial).

  Comme $\operatorname{card}\left(\mathbb{Z}/(nm)\mathbb{Z}\right)=nm=\operatorname{card}\left((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\right)$, on en déduit que φ est bijective.

Ainsi, φ est un isomorphisme d'anneaux.

Exercice 13

- Dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, l'équation devient $x^2+x=0$, c'est-à-dire $x\,(x+1)=0$.

  Comme $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ est un corps, cela équivaut à $x=0$ ou $x=-1$.
- De même, dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, on obtient l'équation $x^2+x-2=0$, c'est-à-dire $(x-1)(x+2)=0$, ce qui donne les deux solutions $x=1$ ou $x=-2$.
- On a donc 4 solutions modulo 143 à l'équation initiales données par $a\in\{0,-1\}$ et $b=\{1,-2\}$.
- Une relation de Bézout entre 11 et 13 est $6\times11-5\times13=1$. Ainsi $k_1=-65$ vérifie $k_1\equiv1\ \ [11]$ et $k_1\equiv0\ \ [13]$. De même, $k_2=66$ vérifie $k_2\equiv0\ \ [11]$ et $k_2\equiv1\ \ [13]$.
- Pour chaque couple (a,b), la solution correspondante est $a\,k_1+b\,k_2$. Les résultats sont récapitulés dans le tableau ci-dessous :

a \ b	1	-2
0	66	11
-1	-12	76

Exercice 14 Considérons $A=\left\{\frac{p}{n}\,;\ p\in[\![1,n]\!]\right\}$. C'est un ensemble de cardinal n. Ses éléments admettent une forme irréductible $\frac{k}{d}$, avec $k\wedge d=1$ et $d\mid n$. On a donc :

$$A=\bigcup_{d|n}A_d\qquad\text{où}\qquad A_d=\left\{\frac{k}{d}\,;\ k\wedge d=1\quad\text{et}\quad k\in[\![1,d]\!]\right\}.$$

Cette réunion est disjointe par unicité du représentant irréductible d'un rationnel. Donc :

$$n=\operatorname{card}\,A=\sum_{d|n}\operatorname{card}\,A_d=\sum_{d|n}\varphi(d).$$

Proposition 16 Si A est inversible, il existe $B \in \mathbb{K}[X]$ tel que $AB = 1$.

On a donc $\deg A + \deg B = \deg 1 = 0$. Comme $\deg A \in \mathbb{N}$ et $\deg B \in \mathbb{N}$ (les polynômes A et B sont non nuls), on a $\deg A = \deg B = 0$, c'est-à-dire $A \in \mathbb{K}^*$ et $B \in \mathbb{K}^*$.

Réciproquement, si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on a $\lambda\lambda^{-1} = 1$, donc λ est inversible.

Proposition 17 Supposons $A \mid B$ et $B \mid A$. Il existe alors deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que $A = BQ_1$ et $B = AQ_2$.

- Si $A = 0$, alors $B = AQ_2 = 0$ et donc $B = 1 \times A$, avec $1 \in \mathbb{K}^*$.
- Sinon, on a $A = AQ_2Q_1$ et comme $A \neq 0$, l'intégrité de $\mathbb{K}[X]$ donne $Q_1Q_2 = 1$, donc Q_1 et Q_2 sont inversibles. On a alors $A = \lambda B$, avec $\lambda = Q_1 \in \mathbb{K}^*$ d'après la proposition 16 de la page 14.

Réciproquement, si $A = \lambda B$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $B = \lambda^{-1}A$ donc $B \mid A$ et $A \mid B$.

Proposition 19

- Supposons A irréductible. Alors A est non constant par définition.
  Si $A = BC$, alors $B \mid A$, donc B est constant ou associé à A. Dans ce deuxième cas, $A = \lambda B$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, et comme $A = BC$, on en déduit que C est égal à la constante λ par intégrité de $\mathbb{K}[X]$.
- Réciproquement, supposons A non constant (en particulier non nul) et :
$$\forall (B,C) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad A = BC \Longrightarrow \big(B \in \mathbb{K} \quad \text{ou} \quad C \in \mathbb{K}\big).$$
  Soit B un diviseur de A. Il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BC$. Par hypothèse, B est constant (non nul, puisque $A \neq 0$) ou C est constant (non nul pour la même raison) et dans ce cas A est associé à B.
  Comme A est non constant, on en déduit qu'il est irréductible.

Exercice 15

1. Le polynôme P a (au moins) une racine dans $\mathbb{C}$ comme tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$.
   Il n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ et, *a fortiori*, pas dans $\mathbb{Q}$, puisque $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) > 0$.
2. Comme il est de degré 4, il n'est irréductible ni dans $\mathbb{C}[X]$ ni dans $\mathbb{R}[X]$ (voir le rappel ci-dessus).
   Il n'est pas non plus irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ comme le montrent les égalités suivantes :
$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

Proposition 20 Il est évident que si P divise A, alors P et A ne sont pas premiers entre eux puisqu'ils admettent P comme diviseur commun non constant.

Supposons que P et A soient non premiers entre eux. Ils admettent alors un diviseur commun D non constant. Par suite D divise P irréductible, donc est associé à P. Comme D divise A, on en déduit que P divise A.

Théorème 21 Soit I un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

- Si $I = \{0\}$, alors $I = 0\,\mathbb{K}[X]$.
- Sinon, parmi les éléments non nuls de I, il en existe un de degré minimal. Notons B un tel polynôme.

  Comme B appartient à I, on a $B\,\mathbb{K}[X] \subset I$ puisque $B\,\mathbb{K}[X]$ est le plus petit idéal de $\mathbb{K}[X]$ contenant B.

  Réciproquement, soit $A \in I$. Effectuons la division euclidienne de A par B : $A = B\,Q + R$, avec $\deg R < \deg B$. Or, $R = A - B\,Q$ appartient à I puisque $A \in I$ et $B\,Q \in B\,\mathbb{K}[X] \subset I$. Par minimalité du degré de B parmi les polynômes non nuls de I, on en déduit $R = 0$, c'est-à-dire $A = B\,Q \in B\,\mathbb{K}[X]$. Donc $I \subset B\,\mathbb{K}[X]$.

  Finalement $I = B\,\mathbb{K}[X]$.

Exercice 16 Soit D le PGCD de A et B.

- S'il existe un tel couple (U, V), alors $P \in A\,\mathbb{K}[X] + B\,\mathbb{K}[X] = D\,\mathbb{K}[X]$.
  Donc $D \mid P$.
- Réciproquement, supposons $D \mid P$.
  En multipliant une relation de Bézout $D = A\,U + B\,V$ par le polynôme quotient $Q = P/D$, on obtient $A\,(U\,Q) + B\,(V\,Q) = P$.

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc $D \mid P$.

Théorème 26 Supposons $A \wedge B = 1$ et $A \mid BC$. D'après l'identité de Bézout, il existe des polynômes U et V tels que $A\,U + B\,V = 1$, ce qui implique $A\,C\,U + B\,C\,V = C$.

Comme A divise $A\,C\,U$ et $B\,C\,V$, on a $A \mid A\,C\,U + B\,C\,V$ et donc $A \mid C$.

Exercice 17

Unicité. Supposons l'existence de deux tels couples (U_1, V_1) et (U_2, V_2). On a alors :

$$A\,(U_1 - U_2) = B\,(V_2 - V_1)$$

Donc $A \mid B\,(V_2 - V_1)$ et comme A et B sont premiers entre eux, on a $A \mid (V_2 - V_1)$. Or, $\deg(V_2 - V_1) < \deg A$, donc $V_2 - V_1 = 0$, ce qui donne $V_1 = V_2$. Par symétrie, on a donc aussi $U_1 = U_2$, d'où l'unicité.

Existence. Supposons, par exemple, $\deg A > 0$. Alors $B \neq 0$, sinon A serait un diviseur non constant commun à A et B. On en déduit que A et B sont tous les deux non nuls, et il en est de même, par symétrie, si $\deg B > 0$.

Soit U_0 et V_0 deux polynômes tels que $A\,U_0 + B\,V_0 = 1$. Notons Q et U respectivement les quotient et reste de la division euclidienne de U_0 par B. On a donc $U_0 = B\,Q + U$; posons $V = V_0 + A\,Q$ de sorte que l'on ait :

$$A\,U + B\,V = A\,(U_0 - B\,Q) + B\,(V_0 + A\,Q) = A\,U_0 + B\,V_0 = 1.$$

- D'une part, par définition de U, on a $\deg U < \deg B$.
- Pour prouver que le couple (U, V) convient, il reste à montrer $\deg V < \deg A$. On a $\deg(A\,U) = \deg A + \deg U < \deg A + \deg B$ puisque $\deg U < \deg B$ et $\deg A \neq -\infty$. De plus, $\deg 1 = 0 < \deg A + \deg B$, donc :

  $$\deg(B\,V) = \deg(1 - A\,U) < \deg A + \deg B.$$

  On en déduit $\deg V < \deg A$ puisque $\deg B \neq -\infty$.
  Finalement, le couple (U, V) répond à la question.

Théorème 27 Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n \text{ : « tout polynôme } P \text{ de degré } n \text{ est produit d'irréductibles. »}$$

- H_1 est immédiat car tout polynôme de degré 1 est irréductible.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Supposons $H_1, \dots, H_{n-1}$. Soit P de degré n.
  - Si P est irréductible, alors il est évidemment produit d'irréductibles (un seul).
  - Sinon, on peut écrire $P = A\,B$, avec $1 \leqslant \deg A, \deg B < n$. Par hypothèse de récurrence, A et B sont des produits d'irréductibles et par suite $P = A\,B$ aussi.

  D'où H_n.

Théorème 28

Existence. Si A est constant non nul, on prend $\lambda = A$ et $\alpha_P = 0$ pour tout $P \in \mathcal{P}$. Sinon, on utilise le théorème 27 de la page 20 pour écrire $A = P_1 \dots P_r$, avec $P_1, \dots, P_r$ irréductibles. En factorisant chaque P_i par son coefficient dominant, cela donne $A = \lambda Q_1 \dots Q_r$, où $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $Q_1, \dots, Q_r$ dans $\mathcal{P}$. Pour tout $P \in \mathcal{P}$, on prend alors pour α_P le nombre de Q_i égaux à P.

Unicité. Soit $A = \lambda \prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\alpha_P}$ une telle décomposition. Comme les éléments de $\mathcal{P}$ sont unitaires, le scalaire λ est égal au coefficient dominant de A.

Considérons une autre décomposition $A = \lambda \prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\beta_P}$. Soit $P_0 \in \mathcal{P}$. Supposons par exemple $\alpha_{P_0} \leqslant \beta_{P_0}$. En simplifiant par $P_0^{\alpha_{P_0}} \neq 0$ ($\mathbb{K}[X]$ est intègre), on obtient :

$$\prod_{P \in \mathcal{P} \setminus \{P_0\}} P^{\alpha_P} = P_0^{\beta_{P_0} - \alpha_{P_0}} \prod_{P \in \mathcal{P} \setminus \{P_0\}} P^{\beta_P}.$$

Le membre de gauche de cette égalité est un polynôme premier avec P_0 (produit de polynômes premiers avec P_0). Donc $P_0^{\beta_{P_0} - \alpha_{P_0}}$ est premier avec P_0, ce qui prouve que $\beta_{P_0} - \alpha_{P_0} = 0$.

Les familles $(\alpha_P)_{P \in \mathcal{P}}$ et $(\beta_P)_{P \in \mathcal{P}}$ sont donc égales, ce qui montre l'unicité de la décomposition.

Proposition 29

- En notant $*$ les lois de G et de G', on a :
$$e' * f(e) = f(e) = f(e * e) = f(e) * f(e).$$
En simplifiant par $f(e)$ qui est régulier dans le groupe G', on en déduit $f(e) = e'$.
- D'autre part, pour tout $x \in G$:
$$f(x) * f(x^{-1}) = f(x * x^{-1}) = f(e) = e'$$
et de même :
$$f(x^{-1}) * f(x) = e',$$
ce qui prouve que le symétrique de $f(x)$ est $f(x^{-1})$.
- Une récurrence permet de prouver la dernière formule pour $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{Z}^-$, on écrit alors :
$$f(x)^n = \big(f(x)^{-n}\big)^{-1} = \big(f(x^{-n})\big)^{-1} = f\left((x^{-n})^{-1}\right) = f(x^n).$$

Proposition 30 Soit φ un isomorphisme de groupes de G dans G'.

Soit y_1 et y_2 deux éléments de G'. On a :

$$\varphi\left(\varphi^{-1}(y_1)\,\varphi^{-1}(y_2)\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}(y_1)\right)\,\varphi\left(\varphi^{-1}(y_2)\right) = y_1\,y_2$$

et l'on en déduit $\varphi^{-1}(y_1\,y_2) = \varphi^{-1}(y_1)\,\varphi^{-1}(y_2)$ en composant par φ^{-1}.

Donc φ^{-1} est un morphisme de groupes de G' dans G, c'est-à-dire un isomorphisme par bijectivité.

Exercice 18 C'est la traduction des résultats suivants :

- l'identité de G est un automorphisme du groupe G ;
- la composée de deux automorphismes du groupe G est un automorphisme de G ;
- la réciproque d'un automorphisme du groupe G est un automorphisme de G.

Exercice 19

1. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas isomorphes puisqu'ils ne sont pas en bijection : $\mathbb{Q}$ est dénombrable alors que $\mathbb{R}$ ne l'est pas (voir le chapitre 9).
2. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont isomorphes ; l'application exponentielle est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe un élément $x = -1$ différent de l'élément neutre 1 et tel que $x \times x = 1$. Si $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ étaient isomorphes, il existerait donc dans $\mathbb{R}$ un élément y différent de l'élément neutre 0 tel que $y+y = 0$, ce qui est impossible.
4. Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ vérifie la propriété suivante :
$$\forall y \in \mathbb{Q} \quad \exists x \in \mathbb{Q} \quad y = x + x.$$
S'il existait un isomorphisme de $(\mathbb{Q}, +)$ sur $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$, on en déduirait :
$$\forall y \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists x \in \mathbb{Q}_+^* \quad y = x \times x$$
ce qui est impossible puisque par exemple, 2 n'admet pas de racine carrée dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 31

- Soit H un sous-groupe de G et $H'_0 = f(H)$.
  Comme H contient l'élément neutre e de G, H'_0 contient $e' = f(e)$ qui est l'élément neutre de G'.
  Soit $(y, y') \in {H'_0}^2$. Prenons $(x, x') \in H^2$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Alors :
  ▷ $y * y' = f(x) * f(x') = f(x * x') \in H'_0$ puisque $x * x' \in H$.
  ▷ $y^{-1} = f(x)^{-1} = f\left(x^{-1}\right) \in H'_0$ puisque $x^{-1} \in H$.
  Donc H'_0 est un sous-groupe de G'.
- Soit H' un sous-groupe de G' et $H_0 = f^{-1}(H')$.
  Comme $f(e) = e' \in H'$, on a $e \in H_0$.
  Soit $(x, x') \in {H_0}^2$. Alors $f(x) \in H'$ et $f(x') \in H'$, et puisque H' est un sous-groupe :
  ▷ $f(x * x') = f(x) * f(x') \in H'$
  ▷ $f\left(x^{-1}\right) = f(x)^{-1} \in H'$
  et par suite $x * x'$ et x^{-1} appartiennent à H_0.
  Donc H_0 est un sous-groupe de G.

Exercice 20 On a déjà vu (exercice 18 de la page 22) que $\mathrm{Aut}(G)$, l'ensemble des automorphismes du groupe G, était un groupe.

Soit g et h deux éléments de G. Pour tout $x \in G$, on a :

$$\varphi(h)\big(\varphi(g)(x)\big) = h\left(g\,x\,g^{-1}\right)h^{-1} = (h\,g)\,x\,(h\,g)^{-1}$$

ce qui prouve l'égalité $\varphi(h) \circ \varphi(g) = \varphi(h\,g)$. Donc φ est un morphisme de G dans $\mathrm{Aut}(G)$.

Son noyau est l'ensemble des $g \in G$ tels que $\varphi(g) = \mathrm{Id}_G$. Or, pour tout $x \in G$:

$$\varphi(g)(x) = x \iff g\,x\,g^{-1} = x \iff g\,x = x\,g.$$

Donc le noyau de φ est le **centre de G** c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui commutent avec tout élément de G.

Théorème 33

- La propriété :
$$\forall x \in G \quad f(x) = e' \Longrightarrow x = e.$$
signifie $\mathrm{Ker}\, f \subset \{e\}$, ce qui est bien équivalent à $\mathrm{Ker}\, f = \{e\}$ puisque $f(e) = e'$.
- Supposons l'application f injective. Si $x \in \mathrm{Ker}\, f$ alors $f(x) = e' = f(e)$ donc $x = e$ puisque f est injective.
- Supposons $\mathrm{Ker}\, f = \{e\}$. Soit $(x, y) \in G^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors :
$$f(x\,y^{-1}) = f(x)\,f(y)^{-1} = e',$$
c'est-à-dire $x\,y^{-1} \in \mathrm{Ker}\, f$. Donc $x\,y^{-1} = e$, ce qui donne $x = y$.
Donc f est injective.

Proposition 34 Soit $(H_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de sous-groupes de G. Posons $H = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$.

- Comme tous les H_λ sont des sous-groupes de G, ils contiennent son élément neutre e, donc $e \in H$.
- Soit $x \in H$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $x^{-1} \in H_\lambda$ puisque H_λ est un sous-groupe de G. Donc $x^{-1} \in H$.
- Soit $(x, y) \in H^2$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $x\,y \in H_\lambda$ puisque H_λ est un sous-groupe de G. Donc $x\,y \in H$.

Donc H est un sous-groupe de G.

Exercice 21

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

   Le sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ engendré par (a, b) est l'ensemble $A = \big\{(n\,a, n\,b)\,;\ n \in \mathbb{Z}\big\}$.

   - Si $(a, b) = (0, 0)$, il est clair que $A \neq \mathbb{Z}^2$.
   - Sinon, supposons par exemple $b \neq 0$.
     Alors $(1, 0) \notin A$ puisque $n\,b = 0 \Rightarrow n = 0$.

   Dans tous les cas $A \neq \mathbb{Z}^2$, donc $\mathbb{Z}^2$ n'est pas monogène.
2. D'après l'exemple de la page 23, le groupe $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/21\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/210\mathbb{Z}$ puisque 10 et 21 sont premiers entre eux $(21 - 2 \times 10 = 1)$.

Proposition 36 Le premier point est évident.

Supposons $\mathrm{Ker}\,\varphi_a = n\,\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On peut définir l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & a^k \quad \text{si } x = \overline{k} \end{array}$$

car si $\overline{k} = \overline{\ell}$, alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $\ell = k + n\,q$ et alors :

$$a^\ell = a^k\,a^{nq} = a^k\,(a^n)^q = a^k\,e^q = a^k,$$

donc a^k ne dépend que de la classe de k modulo n.

On a ainsi défini une application $\widetilde{\varphi}_a$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans G telle que :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \widetilde{\varphi}_a(\overline{k}) = \varphi_a(k) = a^k.$$

Cette application est surjective puisque a engendre G.

C'est un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans G puisque :

$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{Z}^2 \quad \widetilde{\varphi}_a(\overline{k}+\overline{\ell}) = \widetilde{\varphi}_a(\overline{k+\ell}) = a^{k+\ell} = a^k\,a^\ell = \widetilde{\varphi}_a(\overline{k})\,\widetilde{\varphi}_a(\overline{\ell}).$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\widetilde{\varphi}_a(\overline{k}) = e \iff \varphi_a(k) = e \iff k \in \mathrm{Ker}\,\varphi_a \iff k \in n\,\mathbb{Z} \iff \overline{k} = 0.$$

Donc $\mathrm{Ker}\,\widetilde{\varphi}_a = \{\overline{0}\}$ ce qui prouve que $\widetilde{\varphi}_a$ est injective.

Finalement, $\widetilde{\varphi}_a$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur G.

Comme

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\right\}$$

on en déduit que

$$G = \left\{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\right\}$$

De plus, n et alors le plus petit entier naturel k non nul tel que $\overline{k} = \overline{0}$, donc n est aussi le plus petit entier naturel k non nul tel que $a^k = e$.

Exercice 22 On remarque qu'en posant $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a $G = \left\{A^n\,;\ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Donc G est monogène. Comme il est de plus évidemment infini, il est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Exercice 23 Soit H un sous-groupe d'un groupe G monogène. Notons a un générateur de G. D'après la proposition 31 de la page 23, $\varphi_a^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, donc de la forme $n\,\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\varphi_a(n\,\mathbb{Z}) \subset H$.

Réciproquement, soit $x \in H$. Comme φ_a est surjective, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi_a(k) = x$ et alors, par définition de l'image réciproque, $k \in \varphi_a^{-1}(H) = n\,\mathbb{Z}$. Donc $x = \varphi_a(k) \in \varphi_a(n\,\mathbb{Z})$.

En conclusion, $H = \varphi_a(n\,\mathbb{Z})$ et comme $n\,\mathbb{Z}$ est engendré par n, il est immédiat que H est engendré par $\varphi_a(n)$ donc est monogène.

Proposition 38 Soit $k \in \mathbb{Z}$.

Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est engendré par $\overline{1}$ ce qui signifie que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ contenant $\overline{1}$ est égal à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Donc le sous-groupe engendré par $\overline{k}$ est égal à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si, et seulement s'il contient $\overline{1}$, ce qui équivaut à l'existence d'un entier ℓ tel que $\ell\,\overline{k} = \overline{1}$, c'est-à-dire si, et seulement s'il existe $(\ell, a) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\ell\,k = 1 + a\,n$, ce qui est encore équivalent à $k \wedge n = 1$ d'après la relation de Bézout.

Exercice 24

1. Posons $n = d\,p$. On a :
$$(a^d)^k = e \iff a^{dk} = e \iff n \mid dk \iff dp \mid dk \iff p \mid k.$$
Donc l'ordre de a^d est $p = n/d$.
2. Soit $d = k \wedge n$. Montrons que a^d et a^k engendrent le même sous-groupe ce qui prouvera qu'ils ont le même ordre $p = n/d$.
Pour $x \in G$, on note ici $\langle x \rangle$ le sous-groupe de G engendré par x.
En écrivant $k = d\,k'$, on a $a^k = (a^d)^{k'} \in \langle a^d \rangle$ ce qui donne $\langle a^k \rangle \subset \langle a^d \rangle$ puisque $\langle a^k \rangle$ est le plus petit sous-groupe contenant a^k.
D'autre part, le théorème de Bézout donne des entiers u et v tels que $d = u\,k + v\,n$. Alors :
$$a^d = a^{uk}\,a^{vn} = (a^k)^u\,(a^n)^v = (a^k)^u \in \langle a^k \rangle$$
et l'on conclut comme précédemment que $\langle a^d \rangle \subset \langle a^k \rangle$.

Exercice 25 D'après la caractérisation du sous-groupe engendré par A (*cf.* la proposition 35 de la page 25), il suffit de montrer que l'inverse de tout élément de A peut s'écrire comme produit d'éléments de A.
Soit $a \in A$. Comme G est fini, a est d'ordre fini, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = e$. On en déduit que $a^{-1} = a^n \times a^{-1} = a^{n-1}$ est bien un produit d'éléments de A.

Théorème 41 Démonstration dans le cas où G est commutatif. Notons $n = \operatorname{card} G$. Soit $a \in G$. L'application $g \mapsto a\,g$ est une bijection de G (de réciproque $g \mapsto a^{-1}\,g$). Comme le groupe G est commutatif, le produit $P = \prod_{h \in G} h$ a bien un sens et, par le changement d'indice $h = a\,g$, on a :
$$P = \prod_{h \in G} h = \prod_{g \in G} (ag).$$
Toujours par commutativité de G, on en déduit :
$$P = a^{\operatorname{card} G} \prod_{g \in G} g = a^n\,P.$$
Par régularité de P, cela donne $a^n = e$. D'après la proposition 39 de la page 28, cela implique que l'ordre de a divise n.

Théorème 42 Soit $a \in \mathbb{Z}$ premier avec n. Alors sa classe appartient au groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ce groupe étant de cardinal $\varphi(n)$ par définition de l'indicatrice d'Euler, on en déduit que l'ordre de $\overline{a}$ divise $\varphi(n)$, soit $\left(\overline{a}\right)^{\varphi(n)} = \overline{1}$. En termes de congruences, cela se réécrit $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \quad [n]$.

Exercice 26

- Comme A est un anneau, en particulier $(A,+)$ est un groupe commutatif.
- Les propriétés suivantes proviennent de la structure d'anneau de A :
  ① $\forall x \in A \quad 1.x = x$ (élément neutre),
  ② $\forall x \in A \quad \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \lambda\,(\mu\,x) = (\lambda\,\mu)\,x$ (associativité),
  ③ $\forall (x,y) \in A^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda\,(x+y) = \lambda\,x + \lambda\,y$ (distributivité),
  ④ $\forall x \in A \quad \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \quad (\lambda+\mu)\,x = \lambda\,x + \mu\,x$ (distributivité).
  Donc $(A,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Reste la propriété $(**)$ de la page 29 de compatibilité entre les deux multiplications.
  * La relation $\forall(\lambda,a,b) \in \mathbb{K}\times A\times A \quad \lambda\,(a.b) = (\lambda a).b$ vient de l'associativité du produit de A.
  * La relation $\forall(\lambda,a,b) \in \mathbb{K}\times A\times A \quad \lambda\,(a.b) = a.(\lambda b)$ est vraie, toujours pas associativité, si λ et a commutent.

Pour que A soit une $\mathbb{K}$-algèbre, il suffit (et il est facile d'ailleurs de montrer que c'est également nécessaire) que tout élément de $\mathbb{K}$ commute avec tout élément de A.

Exercice 27

1. Par bilinéarité du produit, l'application $x \mapsto a\,x$ est un endomorphisme d'espace vectoriel de A. La régularité à gauche de a donne son injectivité, donc sa bijectivité puisque A est un espace vectoriel de dimension finie.
   Par suite, il existe un élément $b \in A$ tel que $a\,b = 1$.
2. On a donc :
   $$a \times 1 = a = (a\,b)\,a = a\,(b\,a)$$
   et la régularité de a à gauche donne $b\,a = 1$. Donc a est inversible, d'inverse b.
3. Supposons que A vérifie :
   $$\forall (x,y) \in A^2 \quad x\,y = 0 \Longrightarrow (x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0).$$
   Soit $a \in A$ non nul. Alors :
   $$\forall (x,y) \in A^2 \quad a\,x = a\,y \Longrightarrow a\,(x-y) = 0 \Longrightarrow x - y = 0 \Longrightarrow x = y$$
   donc a est régulier à gauche et, par ce qui précède, inversible.
   Dans A, tout élément non nul est donc inversible.
   Si l'on suppose A intègre, c'est-à-dire si l'on ajoute aux hypothèses la non trivialité et la commutativité, alors A est un corps (comparer avec l'exemple de la page 3).

Exercice 28

1. La réponse est positive pour les deux questions en utilisant les résultats correspondant pour les morphismes d'espaces vectoriels et les morphismes d'anneaux.
2. Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'algèbres.
   L'image de φ est donc une sous-algèbre de B.
   On a vu à l'exercice 4 de la page 5 que le noyau de φ n'est pas un sous-anneau de A si B est non trivial. Ce n'est donc pas non plus une sous-algèbre. Lorsque B est trivial, on a $\operatorname{Ker}\varphi = A$ qui est alors évidemment une sous-algèbre de A.

Proposition 43 La relation $1(u)=1$ et la linéarité de $P\mapsto P(u)$ sont immédiates.

Soit $P=\sum_{p=0}^{n} a_p\,X^p$ et $Q=\sum_{q=0}^{m} b_q\,X^q$. Par bilinéarité, on a :

$$P\,Q=\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\ 0\leqslant q\leqslant m}} a_p\,b_q\,X^{p+q}$$

et donc $(P\,Q)(u)=\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\ 0\leqslant q\leqslant m}} a_p\,b_q\,u^{p+q}$ (linéarité).

De même, par bilinéarité :

$$P(u)\,Q(u)=\left(\sum_{p=0}^{n} a_p\,u^p\right)\left(\sum_{q=0}^{m} b_q\,u^q\right)=\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\ 0\leqslant q\leqslant m}} a_p\,b_q\,u^{p+q}$$

d'où l'égalité $(P\,Q)(u)=P(u)\,Q(u)$.

Exercice 29 De le même façon, le polynôme minimal π d'une symétrie s d'un espace vectoriel E divise X^2-1 puisque $s^2=\mathrm{Id}_E$. On a donc $\pi=X^2-1$ sauf si $\pi=X\pm1$, c'est-à-dire $s=\mp\,\mathrm{Id}_E$.

Proposition 44

- Supposons que u admette un polynôme minimal π_u de degré d.
  - La famille $\mathcal{F}=\left(u^k\right)_{k\in[\![0,d-1]\!]}$ est bien sûr une famille d'éléments de $\mathbb{K}\left[u\right]$.
  - Soit $(\lambda_0,\ldots,\lambda_{d-1})\in\mathbb{K}^d\setminus\left\{(0,\ldots,0)\right\}$ tel que $\sum_{k=0}^{d-1}\lambda_k u^k=0$.

    Le polynôme $P=\sum_{k=0}^{d-1}\lambda_k X^k$ est alors un polynôme annulateur non nul de u, de degré strictement plus petit que $d=\deg\pi_u$, ce qui contredit la définition du polynôme minimal π_u. La famille $\mathcal{F}$ est donc libre.
  - Soit $v\in\mathbb{K}[u]$; il existe donc $P\in\mathbb{K}[X]$ tel que $v=P\left(u\right)$. La division euclidienne de P par π_u s'écrit :

    $$P=Q\pi_u+R\quad\text{avec}\quad\deg\left(R\right)<d.$$

    En appliquant le morphisme d'évaluation, on obtient :

    $$v=P\left(u\right)=Q\left(u\right)\,\pi_u\left(u\right)+R\left(u\right)=R\left(u\right),$$

    puisque $\pi_u\left(u\right)=0$. Comme $\deg\left(R\right)<d$, on a $v\in\mathrm{Vect}\left(1,u,\ldots,u^{d-1}\right)$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}\left[u\right]$.

  En conclusion, la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}\left[u\right]$.
- Sinon, le morphisme d'évaluation $P\mapsto P(u)$ est injectif puisque son noyau est réduit à $\{0\}$. Son image $\mathbb{K}[u]$ est donc isomorphe à $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 30

1. On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 34 & -15 & -30 \\ -10 & 9 & 10 \\ 30 & -15 & -26 \end{pmatrix}$ puis $A^2 - 5A + 6I_3 = 0$.

   Le polynôme $X^2 - 5X + 6$ est donc annulateur. Si ce n'était pas le polynôme minimal, celui-ci serait de degré 1, donc A serait une matrice scalaire, ce qui n'est pas le cas.

   Donc $\Pi = X^2 - 5X + 6$ est le polynôme minimal de A.
2. On en déduit que $A\,(A - 5I_3) = -6I_3$, ce qui prouve que A est inversible, d'inverse $-\frac{1}{6}\,(A - 5I_3)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par Π s'écrit $X^n = Q_n\,\Pi + a_n X + b_n$, avec $Q_n \in \mathbb{K}[X]$ et $(a_n, b_n) \in \mathbb{K}^2$. En évaluant cette égalité en 2 et 3 (les deux racines de Π), on obtient le système :

   $$\begin{cases} 2a_n + b_n = 2^n \\ 3a_n + b_n = 3^n \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad a_n = 3^n - 2^n \quad \text{et} \quad b_n = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n.$$

   Finalement :

   $$A^n = (3^n - 2^n)\,A + (3 \times 2^n - 2 \times 3^n)\,I_3 = 2^n\,B + 3^n\,C$$

   avec $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ -2 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix}$.

   Remarquons que, pour $n = -1$, cette formule donne $-\frac{1}{6}\,A + \frac{5}{6}\,I_3$ qui est la valeur de A^{-1} trouvée à la question précédente.

   Montrons qu'il en est de même pour tout entier $n \in \mathbb{Z}_-^*$ en vérifiant que le produit de $2^n\,B + 3^n\,C$ par A^{-n} est bien égal à I_3, ce qui prouvera que $2^n\,B + 3^n\,C$ est bien l'inverse de A^{-n}. En effet, on a $B^2 = B$, $C^2 = C$ et $B\,C = C\,B = 0$. Donc :

   $$(2^n\,B + 3^n\,C)\,(2^{-n}\,B + 3^{-n}\,C) = 2^n \times 2^{-n}\,B + 3^n \times 3^{-n}\,C = B + C = I_3.$$

Exercice 31

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_p\,X^k$ un polynôme et $u \in A$. Comme φ est un morphisme d'algèbres, on a $\varphi(u^k) = \varphi(u)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (en particulier $\varphi(u^0) = \varphi(u)^0$ puisque $\varphi(1) = 1$), puis $\varphi\big(P(u)\big) = P\big(\varphi(u)\big)$ par linéarité de φ.

   On en déduit que si $P(u) = 0$, alors $P\big(\varphi(u)\big) = 0$. L'idéal annulateur de u est donc inclus dans l'idéal annulateur de $\varphi(u)$. Comme φ^{-1} est aussi un morphisme d'algèbres, on en déduit l'inclusion inverse.

   Les deux éléments u et $\varphi(u)$ ont donc le même idéal annulateur, donc le même polynôme minimal (générateur unitaire de cet idéal).
2. On applique la première question à l'isomorphisme $u \mapsto M_{\mathcal{B}}(u)$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

S'entraîner et approfondir

1.1 Montrer que $\mathbb{R} \times \{0\}$ muni des lois induites par celles de l'anneau produit $\mathbb{R}^2$ est un anneau mais n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{R}^2$.

1.2 On appelle **groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$** toute partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par produit et qui, munie de la loi induite, est un groupe.

1. Montrer que tout groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inclus dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
   Y a-t-il d'autres groupes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que les sous-groupes de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$?
2. Soit $r \in [\![0, n]\!]$. Montrer que :
$$G_{n,r} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \ ; \ A \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{K}) \right\}$$
   (avec par convention $G_{n,r} = \{0\}$ pour $r = 0$ et $G_{n,r} = \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ pour $r = n$) est un groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Montrer que son élément neutre est la matrice d'un projecteur.
3. Soit G un groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Montrer qu'il existe $r \in [\![0, n]\!]$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que G soit un sous-groupe du groupe :
$$\left\{ P\,M\,P^{-1} \ ; \ M \in G_{n,r} \right\}.$$

1.3 *(Polytechnique 2015)*
Montrer qu'il existe un multiple non nul de 23 qui ne s'écrit qu'avec des 1 en base 10.

1.4 Le polynôme $P = X^4 + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{C}[X]$? dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{Q}[X]$?

1.5 L'exercice 17 de la page 19 a montré que si A et B sont deux polynômes premiers entre eux et non tous les deux constants, alors ils sont tous les deux non nuls et il existe un unique couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :
$$A\,U + B\,V = 1 \qquad \text{avec} \qquad \deg U < \deg B \quad \text{et} \quad \deg V < \deg A.$$
Montrer que l'algorithme d'Euclide étendu de la page 19 donne ce couple-là.

1.6 Deux éléments d'un groupe G sont **conjugués** si l'un est l'image de l'autre pas un automorphisme intérieur (voir page l'exemple 3 de la page 22). Plus précisément, le **conjugué** de $x \in G$ par $g \in G$ est $g\,x\,g^{-1}$.

1. Montrer que le conjugué par $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ d'une transposition (a, b) de $\mathfrak{S}_n$ (avec donc $a \neq b$) est la transposition $\big(\sigma(a), \sigma(b)\big)$.
2. Quel est le conjugué d'un p-cycle $(a_1, \ldots, a_p)$ par une permutation σ ?
3. Montrer que deux transpositions quelconques de $\mathfrak{S}_n$ sont conjuguées.

1.7 On pourra utiliser la première question de l'exercice 1.6.

1. Montrer que les transpositions du type $(i, i+1)$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.
2. Montrer que le groupe $\mathfrak{S}_n$ est engendré par la transposition $\tau = (1,2)$ et le n-cycle $\gamma = (1,2,\ldots,n)$.
3. Est-ce vrai pour une transposition et un n-cycle quelconque ?

1.8 Théorème de Lagrange

Soit G un groupe fini. Si H est un sous-groupe de G, on définit la relation :

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff x^{-1}\, y \in H.$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et que la classe d'équivalence de tout élément $x \in G$ est :
$$xH = \big\{x\, h\,;\ h \in H\big\}.$$
2. Montrer que les classes d'équivalence pour cette relation ont toutes même cardinal égal à celui de H.
3. En déduire que le cardinal de H divise celui de G.
4. Démontrer le théorème 41 de la page 28.

1.9 Déterminer l'ordre d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ en fonction des longueurs des cycles intervenant dans sa décomposition en cycles à supports disjoints.

1.10 Soit G un groupe abélien fini, ainsi que a et b deux éléments de G d'ordres respectifs m et n.

1. Montrer que si m et n sont premiers entre eux, alors ab est d'ordre mn.
Que peut-on dire de l'ordre de ab dans le cas général ?
2. En déduire que si r est le PPCM des ordres des éléments de G, il existe un élément de G d'ordre r.
3. Qu'en est-il si G n'est plus supposé abélien ?

1.11 Soit $\mathbb{K}$ un corps. Montrer, en utilisant l'exercice 1.10, que tout sous-groupe multiplicatif fini de $\mathbb{K}^*$ est cyclique. On pourra admettre que tout polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$ admet au maximum n racines.

1.12 Montrer qu'un groupe G cyclique de cardinal n admet, pour tout diviseur d de n, un unique sous-groupe de cardinal d et que celui-ci est cyclique.

⋆ **1.13** 1. Montrer que si n est produit de nombres premiers distincts, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad a^{1+k\varphi(n)} \equiv a \quad [n].$$

2. Le résultat est-il vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque ?

⋆ **1.14** *(Centrale 2015)*

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre intègre de dimension finie $n \geqslant 2$ et $a \in A$.

1. Montrer que $x \mapsto a\,x$ est linéaire puis que a est inversible si, et seulement si, $a \neq 0$.
2. Montrer que a admet un polynôme annulateur non nul.
3. Montrer que son polynôme minimal est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Montrer que $\mathbb{C}$ est, à isomorphisme près, la seule $\mathbb{R}$-algèbre intègre de dimension finie $n \geqslant 2$.

⋆⋆ **1.15** *(***Constante de Liouville** *Polytechnique 2015)*

Un réel est dit **algébrique** lorsqu'il annule un polynôme non nul à coefficients rationnels. Dans le cas contraire, on dit qu'il est **transcendant**.

1. Soit x un irrationnel algébrique. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout rationnel $\dfrac{p}{q}$, avec $q \in \mathbb{N}^*$, on ait $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant \dfrac{\alpha}{q^n}$.

   Qu'en est-il si x est un rationnel ?
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n!}$ (constante de Liouville) est un réel transcendant.

Solution des exercices

1.1
- $\mathbb{R} \times \{0\}$ est un groupe commutatif comme produit des deux groupes commutatifs $(\mathbb{R}, +)$ et $\big(\{0\}, +\big)$.
- Il est évidemment stable par produit puisque $(x, 0) \times (y, 0) = (x\,y, 0)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- La multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition comme dans l'anneau $\mathbb{R}^2$.
- Il est immédiat que $(1, 0)$ est neutre pour la multiplication de $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Donc $\mathbb{R} \times \{0\}$ est un anneau. Ce n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{R}^2$ puisqu'il ne contient pas l'élément neutre multiplicatif $(1, 1)$ de ce dernier.

1.2 1. Soit G un tel groupe.
- Son élément neutre J vérifie $J^2 = J$, donc par inversibilité, $J = I_n$.
  Ainsi $I_n \in G$.
- Tout élément $M \in G$ admet un symétrique M' qui vérifie donc, par définition, $M\,M' = J = I_n$. On en déduit que $M^{-1} = M'$ appartient à G.

Donc G est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Il y a des groupes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui ne sont pas des sous-groupes de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$: par exemple le groupe trivial $\{0\}$.

2. Les deux cas particuliers $r = 0$ et $r = n$ sont évidents (et ont été vus dans la question précédente). Supposons donc $1 \leqslant r \leqslant n - 1$.

Les opérations matricielles par blocs donnent directement :
- que $G_{n,r}$ est stable par produit ;
- que $G_{n,r}$ admet pour élément neutre $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$;
- que tout élément $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in G_{n,r}$ admet pour symétrique $\left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

Enfin, l'associativité est une conséquence de celle de la multiplication de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Donc $G_{n,r}$ est un groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Son élément neutre J_r vérifie donc $J_r^2 = J_r$, ce qui caractérise la matrice d'un projecteur.

3.
- Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. L'application $M \mapsto P\,M\,P^{-1}$ est un automorphisme d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc il est clair qu'elle envoie tout groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur un groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, $P\,G_{n,r}\,P^{-1} = \big\{P\,M\,P^{-1}\,;\ M \in G_{n,r}\big\}$ est un groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit G un groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Son élément neutre J vérifie $J^2 = J$, donc c'est la matrice d'un projecteur et il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $J = P\,J_r\,P^{-1}$, où $r = \mathrm{rg}(J)$. Considérons alors $G' = P^{-1}\,G\,P$; c'est un groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'élément neutre J_r.

Soit M une matrice de G' écrite par blocs sous la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$, avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. On a alors :

$$M = J_r\, M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{et} \qquad M = M\, J_r = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & 0 \end{array}\right).$$

Donc $B = 0$, $C = 0$ et $D = 0$.
D'autre part, M admet un symétrique $M' = \left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in G'$, ce qui donne $A\,A' = I_r$ en écrivant $M\,M' = J_r$. Donc $A \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{K})$.
Finalement, $G' \subset G_{n,r}$ et, comme dans la première question, on montre que G' est un sous-groupe de $G_{n,r}$. Il s'ensuit, en écrivant $G = P\,G'\,P^{-1}$, que G est un sous-groupe de $G = P\,G_{n,r}\,P^{-1}$.

1.3 Un entier naturel s'écrit uniquement avec des 1 en base 10 si, et seulement s'il est de la forme :

$$n = 1 + 10 + \cdots + 10^{r-1} = \frac{10^r - 1}{10 - 1} \qquad \text{avec} \qquad r \in \mathbb{N}^*.$$

Le problème revient donc à montrer l'existence d'un entier naturel r non nul tel que $10^r - 1 = 9 \times k$, avec k multiple de 23. Pour un tel r, on a $10^r \equiv 1 \quad [23]$. Réciproquement, si $10^r \equiv 1 \quad [23]$, alors $10^r - 1$ est multiple de 23 et de 9, donc de 9×23 puisque $9 \wedge 23 = 1$. Alors $1 + 10 + \cdots + 10^{r-1}$ est un multiple de 23 qui ne s'écrit qu'avec des 1 en base 10.

Comme 10 est premier avec 23, sa classe $\overline{10}$ modulo 23 appartient au groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$. Notons r son ordre (le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$ est fini). Alors $\overline{10}^r = \overline{1}$, ce qui donne $10^r \equiv 1 \quad [23]$ et permet de conclure d'après ce qui précède.

Remarque L'ordre de $\overline{10}$ est un diviseur de $\varphi(23)$, c'est-à-dire de 22 puisque 23 est premier. Il suffit donc d'essayer 1, 2, 11 et 22 pour déterminer tel entier r.
On trouve ici $r = 22$.

1.4 Il n'est irréductible ni dans $\mathbb{C}[X]$ ni dans $\mathbb{R}[X]$ puisqu'il n'est ni de degré 1, ni de degré 2 (voir le rappel de la page 15).

Supposons qu'il soit réductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Comme il n'a pas de racine rationnelle (ni réelle, d'ailleurs), il ne peut pas admettre de diviseur de degré 1. Il s'écrit donc comme un produit de deux polynômes de degré 2. Quitte à les diviser par leur coefficient dominant, on peut même les supposer unitaires. On a donc :

$$P = (X^2 + a\,X + b)\,(X^2 + \alpha\,X + \beta) \qquad \text{avec } (a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^4.$$

Par identification des coefficients, on a les relations :

$$a + \alpha = 0 \qquad a\,\alpha + b + \beta = 0 \qquad a\,\beta + \alpha\,b = 0 \quad \text{et} \quad b\,\beta = 1.$$

On en déduit que b et β sont non nuls et de même signe, donc $b + \beta \neq 0$. Par conséquent, $\alpha = -a \neq 0$ et la troisième égalité, qui s'écrit $a\,(\beta - b) = 0$, donne $b = \beta$. Finalement, $b = \beta = \pm 1$ et donc $a^2 = \mp 2$, ce qui est impossible avec $a \in \mathbb{Q}$.

Donc P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

1.5 Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ le résultat suivant :

H_n : « Si A et B sont premiers entre eux, non tous les deux constants, et si $\deg B = n$, alors l'algorithme fournit un couple (U, V) tel que $AU + BV = 1$ avec $\deg U < \deg B$ et $\deg V < \deg A$. »

- H_0 est vérifié car si $\deg B = 0$, alors B est une constante $\lambda \neq 0$ et A est non constant. La division euclidienne de A par B s'écrit alors $A = (A/\lambda)\,\lambda + 0$ et la fonction `pgcd` est appelée avec $(\lambda, 0)$ et retourne ainsi $U = \lambda^{-1}$ et $V = 0$. Finalement, les coefficients U' et V' retournés tels que $AU' + BV' = 1$ sont $U' = V = 0$ et $V' = U - 0 = \lambda^{-1}$ qui vérifient bien :

  $\deg V' = 0 < \deg A \qquad$ et $\qquad \deg U' < \deg B \quad$ puisque $U' = 0$ et $B \neq 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons $H_0, H_1, \ldots, H_{n-1}$. Soit A et B premiers entre eux, avec $\deg B = n$ (donc B non constant). Soit Q et R les quotient et reste de la division euclidienne de A par B. On a $\deg R < n$, et l'hypothèse de récurrence appliquée aux polynômes B et R non tous les deux constants et premiers entre eux nous dit que le couple (U, V) retourné par `pgcd(B,R)` est tel que $\deg V < \deg B$. Donc les coefficients U' et V' retournés tels que $AU' + BV' = 1$ sont $U' = V$ et $V' = U - QV$, avec donc $\deg U' < \deg B$. Remarquons que A st non nul, sinon A et B ne serait pas premiers entre eux.
  - ∗ Si $V' = 0$, alors $\deg V' < \deg A$ puisque $A \neq 0$.
  - ∗ Sinon, BV' est non constant, puisque $\deg(B) = n \geqslant 1$.
    L'égalité $AU' = 1 - BV'$ donne alors :

    $$\deg(A) + \deg(U') = \deg(B) + \deg(V')$$

    et donc $\deg(V') < \deg(A)$ puisque $\deg(U') < \deg(B)$ et $A \neq 0$.

  D'où H_n.

1.6 1. Notons $\tau = \sigma \circ (a, b) \circ \sigma^{-1}$. On a : $\sigma(a) \overset{\sigma^{-1}}{\longmapsto} a \overset{(a,b)}{\longmapsto} b \overset{\sigma}{\longmapsto} \sigma(b)$

$$\sigma(b) \overset{\sigma^{-1}}{\longmapsto} b \overset{(a,b)}{\longmapsto} a \overset{\sigma}{\longmapsto} \sigma(a)$$

$$\sigma(x) \overset{\sigma^{-1}}{\longmapsto} x \overset{(a,b)}{\longmapsto} x \overset{\sigma}{\longmapsto} \sigma(x) \qquad \text{si } x \notin \{a, b\}.$$

Comme par bijectivité de σ tout élément de $[\![1, n]\!]$ s'écrit sous la forme $\sigma(x)$, avec $x \in [\![1, n]\!]$, cela prouve que τ échange $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$ et laisse fixe les autres éléments de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire est la transposition $\big(\sigma(a), \sigma(b)\big)$.

2. On démontre de la même façon qu'il s'agit du p-cycle $\big(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_p)\big)$.
3. Soit (a, b) et (c, d) deux transpositions. Montrons qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $(c, d) = \sigma \circ (a, b) \circ \sigma^{-1}$. D'après la première question, il suffit de montrer l'existence d'une permutation σ telle que $\sigma(a) = c$ et $\sigma(b) = d$.
   Les deux ensembles $E = [\![1, n]\!] \setminus \{a, b\}$ et $F = [\![1, n]\!] \setminus \{c, d\}$ sont de même cardinal $n - 2$; donc il existe une bijection φ de E sur F.
   L'application σ : $[\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ répond alors à la question.

$$\begin{array}{rcl} a & \longmapsto & c \\ b & \longmapsto & d \\ x & \longmapsto & \varphi(x) \quad \text{si } x \neq a \text{ et } x \neq b. \end{array}$$

1.7 1. Soit (i,j) une transposition, avec $j > i+1$. Alors (en utilisant les résultats de l'exercice 1.6 ou par un calcul direct) :

$$(j-1,j)\circ(i,j-1)\circ(j-1,j)=(i,j).$$

Il est alors facile de montrer par récurrence sur $j-i$ que toute transposition (i,j), avec $i<j$, est un produit de transpositions du type $(k-1,k)$.

2. Soit $i \in [\![1,n-1]\!]$. Les relations $\gamma^{i-1}(1)=i$ et $\gamma^{i-1}(2)=i+1$ permettent de vérifier, grâce à l'exercice 1.6, que :

$$\gamma^{i-1}\circ(1,2)\circ\gamma^{-(i-1)}=(i,i+1).$$

Toute transposition de la forme $(i,i+1)$ s'écrit donc comme un produit des permutations τ et γ (on utilise le fait que $\tau^{-1}=\tau$ et $\gamma^{-1}=\gamma^{n-1}$). On conclut à l'aide de la question précédente.

3. Le résultat est faux en général pour une transposition et un n-cycle quelconques. Par exemple, pour $n=4$, on prend la transposition $\tau=(1,3)$ et le n-cycle $\gamma=(1,2,3,4)$.

On vérifie facilement que, pour tout $(i,j)\in[\![,4]\!]^2$:

$$i\equiv j \quad [2] \implies \gamma(i)\equiv\gamma(j) \quad [2] \qquad \text{et} \qquad i\equiv j \quad [2] \implies \tau(i)\equiv\tau(j) \quad [2].$$

On en déduit que ce résultat reste vrai pour tout élément σ du sous-groupe engendré par τ et γ, puisque σ s'écrit comme produit de permutations égales à τ et γ. En particulier, la transposition $\sigma=(1,2)$ n'appartient pas à ce sous-groupe puisque $1\equiv 3 \quad [2]$ mais $\sigma(1)=2\not\equiv\sigma(3)=3 \quad [2]$.

1.8 1. **Réflexivité :** pour tout $x\in G$, $x^{-1}x=e\in H$.
Symétrie : pour tout $(x,y)\in G^2$,

$$\begin{aligned} x\,\mathcal{R}\,y &\implies x^{-1}y\in H \\ &\implies y^{-1}x=\left(x^{-1}y\right)^{-1}\in H. \end{aligned}$$

Transitivité : pour tout $(x,y,z)\in G^3$,

$$\begin{aligned} (x\,\mathcal{R}\,y \quad \text{et} \quad y\,\mathcal{R}\,z) &\implies \left(x^{-1}y\in H \quad \text{et} \quad y^{-1}z\in H\right) \\ &\implies x^{-1}z=\left(x^{-1}y\right)\left(y^{-1}z\right)\in H. \end{aligned}$$

Soit $x\in G$. Pour tout $y\in G$:

$$y\,\mathcal{R}\,x \iff \exists h\in H \quad x^{-1}y=h \iff \exists h\in H \quad y=xh$$

donc la classe d'équivalence de x est xH.

2. La classe de $x\in G$ est en bijection avec H par l'application $\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & xH \\ h & \longmapsto & xh \end{array}$ de réciproque $\begin{array}{ccc} xH & \longrightarrow & H \\ k & \longmapsto & x^{-1}k. \end{array}$

3. Comme G est fini, il y a un nombre fini de classes d'équivalence ; notons ce nombre p. Les classes formant une partition de G et ayant toutes le même nombre d'éléments $\operatorname{card} H$, on en déduit $\operatorname{card} G = p \operatorname{card} H$, ce qui donne $\operatorname{card} H \mid \operatorname{card} G$.

4. Soit $a \in G$. L'ordre de a est égal au cardinal du sous-groupe de G engendré par a et divise donc le cardinal de G.

1.9 Supposons $\sigma = \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_r$, avec $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ des cycles à supports disjoints de longueurs respectives $k_1, \ldots, k_r$.

Montrons que l'ordre de σ est le PPCM m de $k_1, \ldots, k_r$.

- Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $\gamma_i^{k_i} = \mathrm{Id}$, donc $\gamma_i^m = \mathrm{Id}$. Puisque les γ_i sont à supports disjoints, ils commutent deux à deux, ce qui donne $\sigma^m = \gamma_1^m \circ \cdots \circ \gamma_r^m = \mathrm{Id}$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma^p = \mathrm{Id}$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ et x dans le support de γ_i, on a $\sigma^p(x) = \gamma_i^p(x)$ puisque x est invariant par tous les autres γ_j. On en déduit que $\gamma_i^p(x) = x$, et donc $k_i \mid p$ par définition d'un cycle de longueur k_i.
  Par suite, m divise p et l'ordre de σ est bien m.

1.10 1. Comme G est commutatif, on a $\forall k \in \mathbb{N} \quad (a\,b)^k = a^k\,b^k$.
Donc $(a\,b)^{m \vee n} = e$ et l'ordre de $a\,b$ divise $m \vee n$.
Supposons $m \wedge n = 1$ et montrons que l'ordre de $a\,b$ est égal à $m \vee n = m\,n$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $(a\,b)^k = e$. Alors $a^k = b^{-k}$. Comme a^k appartient au sous-groupe engendré par a, son ordre divise le cardinal de ce sous-groupe, c'est-à-dire m. De même, l'ordre de b^{-k} divise n. Finalement, l'ordre de $a^k = b^{-k}$ divise m et n donc divise $m \wedge n = 1$ et l'on en déduit que $a^k = b^k = e$.
Donc $m \mid k$ et $n \mid k$, ce qui prouve que $m\,n = m \vee n$ divise k. Ainsi, l'ordre de $a\,b$ est égal à $m\,n$.
Dans le cas général, l'ordre de $a\,b$ divise $m \vee n$, mais ne lui est pas égal en général. Par exemple, dans $\mathcal{U}_n$, les éléments $a = e^{2i\pi/n}$ et $b = e^{-2i\pi/n}$ sont d'ordre n, alors que leur produit est d'ordre 1.

2. Pour $x \in G$, notons $\mathrm{o}(x)$ son ordre. Soit r le PPCM des ordres de tous les éléments de G. Décomposons r en facteurs premiers : $r = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, avec $p_1, \ldots, p_k$ premiers distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ dans $\mathbb{N}^*$.
Soit $i \in [\![1, k]\!]$. Notons v_i la valuation p_i-adique. Comme $r = \bigvee_{y \in G} \mathrm{o}(y)$, on a $\alpha_i = v_i(r) = \max_{y \in G} v_i\big(\mathrm{o}(y)\big)$, donc il existe un élément $y_i \in G$ tel que $v_i\big(\mathrm{o}(y_i)\big) = \alpha_i$, donc tel que $\mathrm{o}(y_i) = p_i^{\alpha_i}\,q_i$, avec $q_i \in \mathbb{N}^*$. Alors $x_i = y_i^{q_i}$ est d'ordre $p_i^{\alpha_i}$ (voir l'exercice 24 de la page 28).
Comme les x_i sont des éléments d'ordres premiers entre eux deux à deux, on déduit de la première question, par une récurrence immédiate :
$$\mathrm{o}(x_1 \cdots x_k) = \mathrm{o}(x_1) \cdots \mathrm{o}(x_k) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = r.$$

3. Le résultat ne subsiste pas sans l'hypothèse de commutativité. Par exemple, les éléments de $G = \mathfrak{S}_3$ sont l'identité (d'ordre 1), les transpositions (d'ordre 2) et les 3-cycles (d'ordre 3). On a donc $r = 6$, mais il n'existe aucun élément d'ordre 6.

1.11 Soit G un sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$ et n son cardinal. L'ordre de tout élément de G divise n, donc le PPCM r de tous ces ordres divise n.

Le polynôme X^r-1 est de degré r et admet pour racines dans $\mathbb{K}$ les n éléments de G donc $n \leqslant r$. On en déduit $r = n$ et puisque G est commutatif ($\mathbb{K}$ est commutatif par définition), il existe un élément x de G d'ordre r. Donc le sous-groupe engendré par x est de cardinal $n = \operatorname{card} G$, ce qui prouve que G est engendré par x, donc cyclique.

1.12 Soit d un diviseur de n.

- Soit a un générateur de G. On a vu à l'exercice 24 de la page 28 que $a^{n/d}$ était d'ordre d donc engendre un sous-groupe de G de cardinal d et celui-ci est alors cyclique.
- Montrons l'unicité d'un tel sous-groupe. Comme G et $\mathcal{U}_n$ sont isomorphes (tous les groupes cycliques de cardinal n le sont), il suffit de montrer que $\mathcal{U}_n$ n'admet qu'un seul sous-groupe de cardinal d.

  Puisque qu'un sous-groupe de $\mathcal{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ et que ce dernier n'admet qu'un seul sous-groupe fini de cardinal d d'après l'exemple 2 de la page 29, cela permet de conclure.

1.13 1.

- Supposons tout d'abord n premier. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{Z}$.
  - Si a est premier avec n, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \quad [n]$ d'après le théorème d'Euler, donc $a^{1+k\varphi(n)} \equiv a \quad [n]$.
  - Sinon, n divise a puisque n est premier. Alors $a^{1+k\varphi(n)} \equiv 0 \equiv a \quad [n]$.
- Soit n_1 et n_2 deux entiers naturels non nuls premiers entre eux tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{Z}$:

$$a^{1+k\varphi(n_1)} \equiv a \quad [n_1] \qquad \text{et} \qquad a^{1+k\varphi(n_2)} \equiv a \quad [n_2]. \tag{$*$}$$

  Montrons qu'alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad a^{1+k\varphi(n_1 n_2)} \equiv a \quad [n_1 n_2].$$

  Puisque n_1 et n_2 sont premiers entre eux, on a $\varphi(n_1 n_2) = \varphi(n_1)\,\varphi(n_2)$ (*cf.* la proposition 13 de la page 13). Soit $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{Z}$. D'après $(*)$:

$$a^{1+k\varphi(n_1 n_2)} = a^{1+\left(k\,\varphi(n_2)\right)\varphi(n_1)} \equiv a \quad [n_1]$$

$$a^{1+k\varphi(n_1 n_2)} = a^{1+\left(k\,\varphi(n_1)\right)\varphi(n_2)} \equiv a \quad [n_2].$$

  On en déduit que $a^{1+k\varphi(n_1 n_2)} - a$ est divisible par n_1 et n_2, donc par $n_1 n_2$ puisque n_1 et n_2 sont premiers entre eux. Par suite, $a^{1+k\varphi(n_1 n_2)} \equiv a \quad [n_1 n_2]$.
- La propriété :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad a^{1+k\varphi(n)} \equiv a \quad [n], \tag{H_n}$$

  qui est vraie pour tout nombre premier, est donc vraie pour tout entier n produit de nombre premiers distincts deux à deux par récurrence immédiate sur le nombre de ces facteurs premiers.

2. Le résultat est faux dans le cas général. En effet, prenons $n = 4$, $a = 2$ et $k = 1$. On a $\varphi(n) = 2$ et $a^{1+k\,\varphi(n)} = 2^3 \equiv 0 \quad [4]$, donc $a^{1+k\varphi(n)} \not\equiv a \quad [n]$.

1.14 1. C'est un cas particulier de l'exercice 27 de la page 30.

2. La famille $(1, a, \dots, a^n)$ est liée dans l'espace vectoriel A de dimension n.

   On en déduit l'existence de $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul tel que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a^i = 0$.

   Le polynôme $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i$ convient.

3. Soit $\Pi \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme minimal de a. Comme $A \neq \{0\}$, on a $\Pi \neq 1$ puisque $1(a) = 1_A \neq 0$.

   Supposons Π non irréductible. Il existe donc deux polynômes P et Q non constants tels que $\Pi = PQ$. On a alors $0 = \Pi(a) = P(a)\,Q(a)$ et comme A est intègre, on en déduit $P(a) = 0$ ou $Q(a) = 0$. C'est absurde puisque P et Q sont de degrés strictement inférieurs à $\deg \Pi$.

   Donc Π est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

4. • Puisque $n \geqslant 2$, il existe un élément a de A qui n'est pas dans la droite $\mathrm{Vect}(1_A)$. Son polynôme minimal Π est donc irréductible.
   ∗ Il ne peut pas être de degré 1, sinon il serait de la forme $\Pi = X - \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, et alors la relation $\Pi(a) = 0$ donnerait $a = \alpha\, 1_A$.
   ∗ Il est donc de degré 2 à discriminant strictement négatif, donc de la forme $\Pi = (X - \alpha)^2 + \beta^2$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\beta \neq 0$.

   L'élément $u = (a - \alpha)/\beta$ vérifie donc $u^2 = -1_A$.

   • Montrons qu'alors $(1, u)$ est une base de A.
   ∗ Elle est libre, sinon il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda\, 1_A$ et alors on aurait $u^2 = \lambda^2\, 1_A \neq -1_A$.
   ∗ Soit $x \in A$. D'après ce qui précède, son polynôme minimal est irréductible et :
   ⋆ s'il est de degré 1, on a $x \in \mathrm{Vect}(1, 1_A)$;
   ⋆ sinon, il existe un élément $v \in A$, avec $v^2 = -1_A$, tel que $x \in \mathrm{Vect}(1_A, v)$. On a donc :

   $$0 = v^2 - u^2 = (v - u)\,(v + u) \qquad \text{(commutativité de } A\text{)}$$

   et par intégrité de A, on en déduit $v = \pm u$, puis $x \in \mathrm{Vect}(1_A, u)$.

   Donc $(1, u)$ est génératrice de A.

   • Considérons l'application $\mathbb{R}$-linéaire $\varphi : \mathbb{C} \to A$ vérifiant $\varphi(1) = 1_A$ et $\varphi(i) = u$. C'est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels puisque l'image de la base $(1, i)$ est une base. D'autre part, un calcul élémentaire utilisant les relations $i^2 = -1$ et $u^2 = -1_A$ montre que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a $\varphi(z\,z') = \varphi(z)\,\varphi(z')$. Avec la propriété $\varphi(1) = 1_A$, cela prouve que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de $\mathbb{C}$ sur A.

   Finalement, $\mathbb{C}$ est, à isomorphisme près, la seule $\mathbb{R}$-algèbre intègre de dimension finie $n \geqslant 2$.

1.15 1. Par définition, x est algébrique si, et seulement s'il admet un polynôme annulateur non nul en tant qu'élément de la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{R}$. Notons n le degré de son polynôme minimal Π. Multiplions Π par le dénominateur commun de ses coefficients ; on obtient ainsi un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x) = 0$.

Le polynôme P étant non nul, il a un nombre fini de racines. On peut donc trouver un réel $r > 0$ tel que $\forall t \in [x-r, x+r] \setminus \{x\} \quad P(t) \neq 0$.

Posons $M = \sup_{[x-r,x+r]} |P'|$ (fonction continue sur un segment). On a alors, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall t \in [x-r, x+r] \quad \left|P(x) - P(t)\right| \leqslant M\,|x-t|. \qquad (*)$$

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

- Si $\left|\frac{p}{q} - x\right| \leqslant r$, alors $P(\frac{p}{q}) \neq 0$, puisque le seul élément de $[x-r, x+r]$ racine de P est x qui est irrationnel. Par réduction au même dénominateur, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $P(\frac{p}{q}) = \frac{k}{q^n}$. Comme $\frac{p}{q}$ n'est pas racine de P, on a $k \neq 0$, donc $\left|P(\frac{p}{q})\right| \geqslant q^{-n}$.

  En combinant cette inégalité avec $(*)$, on obtient :

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{M}\left|P(x) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{1}{M}\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqslant \frac{1}{M\,q^n}.$$

- Sinon, on a $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geqslant r \geqslant \frac{r}{q^n}$.

En posant $\alpha = \min(r, 1/M)$, on a bien $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant \dfrac{\alpha}{q^n}$ avec $\alpha > 0$.

Lorsque x est rationnel, il est algébrique avec comme polynôme minimal $\Pi = X - x$. Ce qui précède reste donc valable (avec $n = 1$), l'inégalité n'étant évidemment valable que pour les rationnels p/q différents de x.

2. Posons $x = \sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n!}$. La série est bien convergente, puisque $0 \leqslant 10^{-n!} \leqslant 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la série géométrique $\sum 10^{-n}$ est convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{-k!}$. C'est un rationnel qui s'écrit, par réduction au même dénominateur, $x_n = p_n/10^{n!}$ avec $p_n \in \mathbb{N}$.

D'autre part, $x_n < x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Supposons x algébrique. La question précédente (que x soit rationnel ou non, puisque $x_n \neq x$) nous donne l'existence d'un réel $\alpha > 0$ et d'un entier N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x - x_n| \geqslant \frac{\alpha}{(10^{n!})^N} = \frac{\alpha}{10^{N\,n!}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, d'autre part :

$$x - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} 10^{-k!} = 10^{-(n+1)!} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} 10^{-k!} \leqslant 10^{-(n+1)!} + \frac{1}{10}\sum_{k=n+1}^{+\infty} 10^{-k!}.$$

En effet, pour $k \geqslant 1$, on a $(k+1)! \geqslant 1 + k!$, donc $10^{-(k+1)!} \leqslant \frac{10^{-k!}}{10}$.

On en déduit $|x - x_n| \leqslant \frac{10}{9}\, 10^{-(n+1)!}$, ce qui donne finalement :

$$\frac{\alpha}{10^{N\,n!}} \leqslant \frac{10}{9.10^{-(n+1)!}} \qquad \text{soit} \qquad 10^{(n+1)!-N\,n!} \leqslant \frac{10}{9\alpha}.$$

On arrive à une contradiction en faisant tendre n vers $+\infty$ puisque :

$$(n+1)! - N\,n! \sim (n+1)! \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc x est transcendant et, en particulier, non rationnel.

Chapitre 2 : Réduction des endomorphismes

I Sous-espaces stables et endomorphismes induits . 64

II Éléments propres 67

1 Définition des éléments propres d'un endomorphisme 67

2 Rappels sur les matrices semblables 70

3 Éléments propres d'une matrice carrée 72

4 Polynômes annulateurs 74

5 Polynôme caractéristique 78

III Endomorphismes et matrices diagonalisables . . . 86

IV Endomorphismes et matrices trigonalisables . . . 92

V Utilisations des polynômes annulateurs 96

1 Polynôme minimal 96

2 Théorème de Cayley-Hamilton 98

3 Lemme de décomposition des noyaux 99

4 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité 103

5 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes . 104

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 107

Exercices 130

Réduction des endomorphismes



Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ sur un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ (on se limite en pratique au cas où $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et u est un endomorphisme de E.

I Sous-espaces stables et endomorphismes induits

Définition 1

Un sous-espace vectoriel F de E est dit **stable** par u si $u(F) \subset F$.

On dit aussi que u **stabilise** F.

Exemples

1. Les sous-espaces vectoriels $\{0\}$ et E sont stables par tout endomorphisme. Il existe des endomorphismes pour lesquels il n'y en a pas d'autres. Par exemple, une rotation vectorielle r d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ du plan euclidien.

   En effet, pour tout vecteur x non nul, la droite $\mathbb{R}x$ n'est pas stable car, comme θ n'est pas multiple entier de π, $r(x) \notin \text{Vect}(x)$. Ainsi r ne stabilise aucune droite.

2. À l'opposé, une homothétie stabilise tous les sous-espaces vectoriels de E.

   Il est évident qu'un endomorphisme stabilise tous les sous-espaces vectoriels de E si, et seulement s'ilstabilise toutes les droites de E.

   L'exercice qui suit montre que, réciproquement, cette propriété caractérise les homothéties. Pour cela, on utilise un résultat classique sur les homothéties qui a déjà été vu en première année.

3. Tout sous-espace vectoriel inclus dans le noyau de u ou contenant l'image de u est stable par u.

4. L'intersection et la somme de sous-espaces vectoriels stables par u sont stables par u.

p.107

Exercice 1

1. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie.
2. En déduire que les seuls endomorphismes stabilisant tous les sous-espaces vectoriels de E sont les homothéties.

p.107

Exercice 2 Soit D la dérivation de $\mathbb{K}[X]$.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par D et contenant un polynôme P non nul de degré d. Montrer que $\mathbb{K}_d[X] \subset F$.
2. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par D.

   Indication Si F est stable par D, on pourra distinguer deux cas, selon que l'ensemble des degrés des polynômes de F est majoré ou non.

Proposition 1

Si les endomorphismes u et v commutent, c'est-à-dire si $u \circ v = v \circ u$, alors $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par u.

Démonstration page 108

Proposition 2

Si F est un sous-espace vectoriel de E engendré par une famille $(e_i)_{i\in I}$, alors F est stable par u si, et seulement si :

$$\forall i \in I \quad u(e_i) \in F.$$

Démonstration page 108

Exemples

1. Soit x un vecteur non nul de E. La droite $\mathbb{K}x$ est donc stable par u si, et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

   Dans ce cas, si $\lambda \neq 0$, c'est-à-dire si $x \notin \operatorname{Ker} u$, alors $u(\mathbb{K}x) = \mathbb{K}x$.
2. Soit x un vecteur de E. Le sous-espace vectoriel :

   $$\operatorname{Vect}\left\{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\right\}$$

   est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par u.

   En effet, ce sous-espace vectoriel contient x (car $x = u^0(x)$) et est stable par u (car pour tout entier k, $u\big(u^k(x)\big) = u^{k+1}(x)$). De plus, il est évidemment inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant x et stable par u.

Définition 2

Soit F un sous-espace vectoriel stable par u. On appelle **endomorphisme induit** par u sur F l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ défini par :

$$\forall x \in F \quad u_F(x) = u(x),$$

Attention On ne peut parler d'endomorphisme induit par u sur un sous-espace vectoriel F que dans la mesure où F est *stable par* u.
Dans ce cas, on distinguera soigneusement l'endomorphisme induit u_F, qui est une application linéaire de F vers F, de la restriction $u_{|F}$ qui est une application linéaire de F vers E.

Remarque L'image de u_F est égale à $u(F)$ et son noyau à $F \cap \operatorname{Ker} u$.

p.108

Exercice 3

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}_F(E)$ des endomorphismes stabilisant F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Corollaire 3 (Traduction matricielle de la stabilité)

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F, c'est-à-dire telle que $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F.
L'endomorphisme u stabilise F si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
Dans ce cas, A est la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ de l'endomorphisme induit u_F.

Démonstration page 108

Remarques

- Une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est dite **triangulaire par blocs**. On rappelle que son déterminant est égal au produit $\det A \times \det B$.
- Avec les notations précédentes, notons $G = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
  - Le sous-espace vectoriel G est stable par u si, et seulement si, $C = 0$. Dans ce cas B s'interprète comme la matrice de l'endomorphisme induit par u sur G dans la base $(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
  - Lorsque G n'est pas stable par u, l'interprétation de B est plus délicate. Notons $q \in \mathcal{L}(E)$ la projection sur G parallèlement à F ; on peut interpréter B comme la matrice dans la base $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ de l'endomorphisme induit par $q \circ u$ sur G.

p.108

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, posons $E_i = \operatorname{Vect}(e_i)$. Caractériser par leur matrice dans la base $\mathcal{B}$, les endomorphismes de E qui stabilisent chaque E_i.
2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, posons $F_i = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_i)$. Caractériser, par leur matrice dans la base $\mathcal{B}$, les endomorphismes de E qui stabilisent chaque F_i.

Proposition 4

Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ une base adaptée à une décomposition $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_i$.

L'endomorphisme u stabilise chaque E_i si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix},$$

où, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la matrice A_i est carrée d'ordre $\dim E_i$.

Dans ce cas, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, A_i est la matrice dans la base $\mathcal{B}_i$ de l'endomorphisme induit par u sur E_i.

Démonstration page 108

II Éléments propres

1 Définition des éléments propres d'un endomorphisme

Définition 3

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de u s'il existe un vecteur *non nul* $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$, c'est-à-dire si l'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est non injectif.
2. On dit que $x \in E$ est **vecteur propre** de u **associé à la valeur propre** $\lambda \in \mathbb{K}$ s'il est *non nul* et vérifie $u(x) = \lambda x$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u, le **sous-espace propre** de u **associé à la valeur propre** λ est :

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$$

Remarque Si un vecteur x non nul vérifie $\lambda x = \mu x$, alors $\lambda = \mu$; ce qui explique que l'on parle de *la* valeur propre associée à un vecteur propre.

Définition 4

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres.

Remarques

- L'endomorphisme u admet 0 pour valeur propre si, et seulement s'il n'est pas injectif. Dans ce cas $E_0(u) = \mathrm{Ker}\, u$.
- Une droite vectorielle est stable par u si, et seulement si, elle est engendrée par un vecteur propre de u.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u, les vecteurs propres associés à la valeur propre λ sont les vecteurs *non nuls* de $E_\lambda(u)$.

- Soit x un vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ associé à une valeur propre λ *non nulle*. On a alors $x = u\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \operatorname{Im} u$. Par suite, tout espace propre associé à une valeur propre *non nulle* est inclus dans $\operatorname{Im} u$.

  Par suite, toute somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres **non nulles** est incluse dans $\operatorname{Im} u$.

Point méthode

On recherche les éléments propres d'un endomorphisme (valeurs et sous-espaces associés) en étudiant l'équation $u(x) = \lambda x$.

Exemples

1. Homothétie. Tout vecteur non nul est vecteur propre de l'homothétie $\lambda \operatorname{Id}_E$ pour la valeur propre λ. Par suite cette homothétie admet λ pour unique valeur propre et l'espace propre associé est E.
2. Rotation. Soit E un plan vectoriel euclidien orienté et u une rotation dont l'angle a pour mesure $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ (si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, alors u est une homothétie).

   Pour tout vecteur x non nul, l'angle $\left(\widehat{x, u(x)}\right)$ n'est pas multiple entier de π ; par suite, $u(x) \notin \operatorname{Vect}(x)$. Ainsi u n'a ni valeur propre, ni vecteur propre.
3. Projection. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur avec $p \neq 0$ et $p \neq \operatorname{Id}_E$ (sinon, p est une homothétie).

   Soit λ une valeur propre de p et x un vecteur propre associé. On a $p(x) = \lambda x$ puis $p(p(x)) = \lambda p(x)$ donc $p(x) = \lambda p(x)$. Ainsi, soit $p(x) = 0$ soit $\lambda = 1$. Les seules valeurs propres possibles de p sont donc 0 et 1.

   Or $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker} p$ sont deux sous-espaces supplémentaires. L'hypothèse $p \neq 0$ et $p \neq \operatorname{Id}_E$ implique qu'ils ne sont pas réduits à $\{0\}$.

   En conclusion, 0 et 1 sont les deux valeurs propres de p avec pour sous-espaces propres associés $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Im} p$.
4. Symétries. Soit F et G supplémentaires dans E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

   Rappelons que, si p est le projecteur d'image F et de noyau G, on a $s = 2p - \operatorname{Id}_E$.

   Ainsi la relation $s(x) = \lambda x$ équivaut à $p(x) = \dfrac{\lambda + 1}{2} x$.

   On déduit de ce qui a été prouvé sur les projections que, si $s \neq \pm \operatorname{Id}_E$ (ce qui correspond à $F \neq E$ et $F \neq \{0\}$), alors s admet pour valeurs propres 1 et -1 et que les sous-espaces propres associés sont respectivement F et G.

p.109

Exercice 5 Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{L}(E)$ la dérivation.

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de D.

p.109

Exercice 6 Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, l'espace des suites complexes.

On définit $\Delta \in \mathcal{L}(E)$ par $\Delta\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1}$.

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Δ.

p.109

Exercice 7 Soit $E = \mathbb{C}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(P) = XP$.

Déterminer les valeurs propres de u.

p.109

Exercice 8 Soit φ un isomorphisme de E dans F et u un endomorphisme de E.

Déterminer les éléments propres de $\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ en fonction de ceux de u.

Proposition 5

Si les endomorphismes u et v commutent, c'est-à-dire si $u \circ v = v \circ u$, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Démonstration. Soit λ une valeur propre de u ; comme u et v commutent, il en est de même de $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ et v. D'après la proposition 1 de la page 65, $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par v. □

Proposition 6

- Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u, alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}(u), \ldots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.
- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Principe de démonstration. Démonstration page 109

- On procède par récurrence sur l'entier p.
- On utilise le premier point.

Exemples

1. En reprenant l'exercice 5 de la page précédente, on voit que, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels deux à deux distincts, la famille de fonctions $(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_n})$ est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (on a noté e_λ la fonction définie par $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$).

   Ainsi, la famille $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est libre.
2. En reprenant l'exercice 6, on voit que, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des complexes deux à deux distincts, la famille de suites $\left((\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_p^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est libre dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

   Ainsi, la famille $\left((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{\lambda\in\mathbb{C}}$ est libre.

p.110

Exercice 9 Soit $E = \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$u(f) = g \qquad \text{où} \qquad \forall t > 0 \quad g(t) = tf'(t).$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, notons f_α la fonction définie par $f_\alpha(t) = t^\alpha$.

Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Corollaire 7

Si E est de dimension finie et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u, alors :

$$\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) \leqslant \dim E$$

Corollaire 8

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n a au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration page 110

Proposition 9

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, les valeurs propres de l'endomorphisme u_F induit par u sur F sont les valeurs propres λ de u telles que $E_\lambda(u) \cap F \neq \{0\}$. On a alors :

$$E_\lambda(u_F) = E_\lambda(u) \cap F.$$

Démonstration. Par définition $E_\lambda(u_F) = \{x \in F \mid u_F(x) = \lambda x\}$ donc :

$$E_\lambda(u_F) = \{x \in F \mid u(x) = \lambda x\} = F \cap E_\lambda(u). \qquad \square$$

2 Rappels sur les matrices semblables

Dans cette partie, E est supposé de dimension finie n.
Les résultats rappelés ont été vus en première année ; leurs démonstrations ne seront donc pas redonnées.

Proposition 10

Si f est un endomorphisme de E et si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors les matrices M et M' de f respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont reliées par :

$$M' = P^{-1}MP,$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Définition 5

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Proposition 11

Deux matrices M et M' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ c'est-à-dire s'il existe $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{K}^n$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ telles que :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \qquad \text{et} \qquad M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f).$$

Proposition 12

Deux matrices semblables ont même trace et même déterminant

p.110

Exercice 10 Soit M et M' deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire telles qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $M' = P^{-1}MP$.

Montrer que M et M' sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $M' = Q^{-1}MQ$.

Remarques

- Soit A la matrice représentant l'endomorphisme u dans une base $\mathcal{B}$.

  Un vecteur x de E, dont $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la matrice colonne des coordonnées dans $\mathcal{B}$, est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ si, et seulement si, X est non nulle et vérifie $AX = \lambda X$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{rccc} u & : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & & X & \longmapsto & AX \end{array}$$

  (on identifie $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).

  Un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ si, et seulement si, X est non nul et vérifie $AX = \lambda X$.

Cela justifie les définitions qui suivent.

3 Éléments propres d'une matrice carrée

Définition 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de A s'il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *non nulle* telle que $AX = \lambda X$.
2. On dit que la matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est **vecteur propre** de A **associé à la valeur propre** $\lambda \in \mathbb{K}$ si elle est *non nulle* et vérifie $AX = \lambda X$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A, le **sous-espace propre** de A **associé à la valeur propre** λ est :
$$E_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}$$
4. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le **spectre** de A et noté $\operatorname{sp}(A)$.

Remarque Le scalaire λ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $A - \lambda I_n$ est non inversible. De plus, d'après le théorème du rang :
$$\dim E_\lambda(A) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n).$$

p.111

Exercice 11

1. Déterminer les éléments propres propres de la matrice
$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$
2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
Déterminer les éléments propres propres de la matrice $A = \alpha J + \beta I_n$.

Remarque En sciences industrielles, on utilise des matrices d'inductance qui relient flux magnétique et intensité.
Lorsque celle-ci est de la forme $\begin{pmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{pmatrix}$, elle admet, d'après l'exercice précédents, deux valeurs propres $L - M$ et $L + 2M$.

Point méthode

On peut rechercher les éléments propres d'une matrice en étudiant l'équation $AX = \lambda X$.

On verra, à l'aide du polynôme caractéristique, une méthode qui permet d'obtenir les valeurs propres d'une matrice sans résolution de systèmes.

Remarque Les éléments propres d'une matrice A sont ceux de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui à une matrice colonne X associe AX.

Proposition 13

Soit A une matrice représentant l'endomorphisme u dans une base $(e_1, \dots, e_n)$. On a alors $\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(u)$ et, pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E_\lambda(u) \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(A).$$

Démonstration. On utilise l'exercice 8 de la page 69 avec :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

□

Corollaire 14

Deux matrices semblables ont le même spectre et les sous-espaces propres associés sont de même dimension.

Remarque Plus précisément, si $A = P^{-1}BP$, alors pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$:

$$E_\lambda(A) = \{P^{-1}X\,;\ X \in E_\lambda(B)\}.$$

Attention Lorsque A est une matrice à coefficients réels, on peut considérer que A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- On obtient dans le premier cas, les éléments propres réels, dans le second, les éléments propres complexes de A.
- On distinguera donc le spectre réel de A, noté $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et formé des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible, du spectre complexe, $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$, de cette matrice. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant inversible dans cette algèbre si, et seulement si, elle l'est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (grâce aux déterminants), on a :

$$\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{R}.$$

Exemple La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de valeurs propres dans $\mathbb{R}$ mais on a :

$$\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}.$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 15

Soit $\mathbb{K}'$ un sous-corps du corps $\mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$. Alors le spectre de A dans $\mathbb{K}'$ est inclus dans le spectre de A dans $\mathbb{K}$.

Démonstration page 111

Proposition 16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $\overline{\lambda}$ est valeur propre de A et :

$$X \in E_\lambda(A) \Leftrightarrow \overline{X} \in E_{\overline{\lambda}}(A)$$

Plus précisément, si $(X_1, \ldots, X_k)$ est une base de $E_\lambda(A)$ alors $\left(\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_k}\right)$ est une base de $E_{\overline{\lambda}}(A)$ donc $\dim E_\lambda(A) = \dim E_{\overline{\lambda}}(A)$.

Principe de démonstration. On prouve que, si $(X_1, \ldots, X_k)$ est une base de $E_\lambda(A)$, alors la famille $\left(\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_k}\right)$ est libre et composée de vecteurs propres de A pour la valeur propre $\overline{\lambda}$. On en déduit $\dim E_\lambda(A) \leqslant \dim E_{\overline{\lambda}}(A)$ puis l'égalité.

Démonstration page 111

Remarque

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$.
Si l'on considère A comme une matrice réelle, alors le sous-espace propre associé est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E_\lambda^{\mathbb{R}}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.
Si l'on considère A comme une matrice complexe, alors le sous-espace propre associé est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E_\lambda^{\mathbb{C}}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mid AX = \lambda X\}$.
Dans les deux cas, le sous-espace propre est le noyau de l'application linéaire $X \mapsto (A - \lambda I_n) X$.
Le théorème du rang donne donc $\dim_{\mathbb{K}} E_\lambda^{\mathbb{K}}(A) = n - \mathrm{rg}_{\mathbb{K}}(A - \lambda I_n)$. Comme le rang d'une matrice réelle est le même qu'on la considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (il est caractérisé par la plus grande taille des matrices carrées extraites de déterminant non nul), on en déduit que la dimension du sous-espace propre ne change pas suivant que l'on considère A comme une matrice réelle ou comme une matrice complexe.

4 Polynômes annulateurs

Dans le chapitre précédent, consacré en particulier à la structure d'algèbres, nous avons étudié la substitution polynomiale et les polynômes annulateurs (voir à partir de la page 31). Dans un souci d'unification des deux cas qui se

présentent ici, nous avons défini la substitution polynomiale et les polynômes annulateurs dans le cadre plus général d'une $\mathbb{K}$-algèbre. Étant donnée l'importance de ces notions dans le cas de ce chapitre consacré à la réduction, nous reprenons ici, intégralement, ces notions pour les endomorphismes et des matrices carrées.

On définit les itérés de $u \in \mathcal{L}(E)$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante : $u^0 = \mathrm{Id}_E$, puis, pour $k \geqslant 1$, $u^k = u^{k-1} \circ u$, c'est-à-dire :

$$u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}.$$

On en déduit facilement (par récurrence) :

$$\forall\, (k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \quad u^k \circ u^\ell = u^\ell \circ u^k = u^{k+\ell}.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit de même les puissances de A par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: $A^0 = I_n$, puis, pour $k \geqslant 1$, $A^k = A^{k-1} \times A$, c'est-à-dire :

$$A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

On a également :

$$\forall\, (k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \quad A^k A^\ell = A^\ell A^k = A^{k+\ell}.$$

Définition 7

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par :

$$P(u) = a_0 \,\mathrm{Id}_E + a_1 u + \cdots + a_p u^p = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit de même la matrice $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k.$$

On appelle polynôme en u (respectivement en A) tout endomorphisme (respectivement toute matrice) de la forme $P(u)$ (respectivement $P(A)$) avec $P \in \mathbb{K}[X]$

Notation L'ensemble des polynômes en $u \in \mathcal{L}(E)$ est noté $\mathbb{K}[u]$.
L'ensemble des polynômes en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathbb{K}[A]$.

Proposition 17

Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

En particulier, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im} P(u)$ et $\operatorname{Ker} P(u)$ sont des sous-espaces stables par u.

Démonstration. Le fait que pour tout couple d'entiers (k,ℓ), les endomorphismes u^k et u^ℓ commutent, permet d'obtenir l'égalité $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

Il suffit alors d'appliquer la proposition 1 de la page 65 à $v = P(u)$ qui commute avec u. □

Proposition 18

1. Si $x \in E_\lambda(u)$ et si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
2. En particulier, si λ est valeur propre de u, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$ et tout vecteur propre de u associé à la valeur propre λ est vecteur propre de $P(u)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.

Démonstration page 112

Corollaire 19

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si $X \in E_\lambda(A)$ et si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $P(A)X = P(\lambda)X$.
2. En particulier, si λ est valeur propre de A, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$ et tout vecteur propre de A associé à la valeur propre λ est vecteur propre de $P(A)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.

Définition 8

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un **polynôme annulateur** de u, s'il vérifie $P(u) = 0$.

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un **polynôme annulateur** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il vérifie $P(A) = 0$.

Exemples

1. Si p est un projecteur, alors $p^2 = p$ donc le polynôme $X^2 - X$ annule p.
2. Si s est une symétrie, alors $s^2 = \mathrm{Id}$ donc le polynôme $X^2 - 1$ annule s.

Proposition 20

Si P est un polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors toute valeur propre de u est racine de P.

Démonstration. D'après la proposition 18, si λ est valeur propre de u, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de l'endomorphisme nul $P(u)$ donc $P(\lambda) = 0$. □

Exemple
On retrouve le fait que si p est un projecteur alors $\mathrm{sp}(p) \subset \{0,1\}$ et si s est un symétrie alors $\mathrm{sp}(s) \subset \{-1,1\}$.

Attention Lorsqu'on dispose d'un polynôme annulateur P de $u \in \mathcal{L}(E)$, on peut dire que toutes les valeurs propres de u sont racines de P, mais certaines racines de P peuvent ne pas être valeurs propres de u.
Ainsi, le polynôme $X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de Id_E, alors que 0 n'est pas valeur propre de Id_E.

Corollaire 21

Si P est un polynôme annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors toute valeur propre de A est racine de P.

Corollaire 22

Si P est un polynôme annulateur de u tel que $P(0) \neq 0$ et si E est de dimension finie, alors u est bijectif.

Démonstration. D'après la proposition précédente, 0 n'est pas valeur propre de u. L'endomorphisme u est donc injectif. Comme E est de dimension finie, on en déduit que u est bijectif. □

Corollaire 23

Si P est un polynôme annulateur de A et si $P(0) \neq 0$, alors A est inversible.

Exemple Si u vérifie $u^4 + u + \mathrm{Id} = 0$, alors u est inversible. Plus précisément, on a $u^{-1} = -u^3 - \mathrm{Id}$ car $u \circ \left(-u^3 - \mathrm{Id}\right) = \mathrm{Id}$.
Plus généralement, soit P est un polynôme annulateur de u. Il existe un polynôme Q tel que $P - P(0) = XQ$. On a donc $u \circ Q(u) = Q(u) \circ u = -P(0)\,\mathrm{Id}$.
Ainsi, si $P(0) \neq 0$, alors $u^{-1} = \frac{-1}{P(0)} Q(u)$.

Point méthode

La connaissance d'un polynôme annulateur de u permet aussi le calcul rapide des puissances de u.

En effet, si P annule u et si R est le reste de la division euclidienne de X^p par P, alors $u^p = R(u)$.

L'utilisation de cette remarque nécessite de connaître un polynôme annulateur de u suffisamment « simple » pour pouvoir déterminer R.

p.112

Exercice 12 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 10 & -4 \\ -8 & 16 & -6 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme P unitaire de degré 2 tel que $P(A) = 0$.
2. En déduire que A est inversible.
3. Pour tout entier n déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.
4. En déduire A^n, pour tout entier naturel n.

5 Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice

Par définition, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, la matrice $A - \lambda I_n$ est non inversible donc si, et seulement si, $\det(\lambda I_n - A) = 0$. L'expression $\det(\lambda I_n - A)$ étant polynomiale en λ, on introduit le polynôme associé.

Définition 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de A et on note $\chi_A(X)$ l'unique polynôme tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \chi_\lambda(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Par abus, on note $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$

Remarques

- Il s'agit d'un léger abus. En effet, on a défini uniquement le déterminant d'une matrice à coefficients dans le corps des complexes. Pour pouvoir parler du polynôme $\det(XI_n - A)$, il faudrait avoir défini le déterminant d'une matrice à coefficients dans le corps des fractions rationnelles (ce qui ne pose pas plus de difficultés).
- Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est identique que l'on considère A comme une matrice réelle ou comme une matrice complexe.

Théorème 24

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si, et seulement s'il est une racine du polynôme caractéristique de A.

Démonstration. Un scalaire λ est valeur propre de A si, et seulement si, $A - \lambda I_n \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ c'est-à-dire si, et seulement si, $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Comme $\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \chi_A(\lambda)$, on en déduit le résultat. □

Proposition 25

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire de diagonale $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, alors son polynôme caractéristique est égal à $\prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$ et $\mathrm{sp}(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

Point méthode

Le théorème précédent montre l'importance pratique d'obtenir le polynôme caractéristique sous forme factorisée. On réalise dans les cas concrets cet objectif en calculant le déterminant $\det(XI_n - A)$ par opérations élémentaires afin de faire apparaître des facteurs communs dans les lignes ou les colonnes.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$\chi_A(X) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3-X & 5 & -6 \\ 4 & 7-X & -9 \\ 3 & 6 & -7-X \end{vmatrix}.$$

La somme des coefficients des colonnes du déterminant ci-dessus étant $2 - X$, l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ montre qu'on a :

$$\chi_A(X) = -\begin{vmatrix} 2-X & 5 & -6 \\ 2-X & 7-X & -9 \\ 2-X & 6 & -7-X \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 1 & 7-X & -9 \\ 1 & 6 & -7-X \end{vmatrix}.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ conduisent alors à :

$$\chi_A(X) = (X-2)\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 0 & 2-X & -3 \\ 0 & 1 & -X-1 \end{vmatrix} = (X-2)\left(X^2 - X + 1\right).$$

Le spectre de A est donc $\left\{2, -j, -j^2\right\}$ dans $\mathbb{C}$ et seulement $\{2\}$ dans $\mathbb{R}$.

p.112

Exercice 13 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique de A. Déterminer son spectre dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Remarque Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\chi_{\overline{A}} = \overline{\chi_A}$ donc on retrouve le résultat de la proposition 16 :

$$\lambda \in \mathrm{sp}\left(\overline{A}\right) \Longleftrightarrow \overline{\lambda} \in \mathrm{sp}\,(A)$$

p.112

Exercice 14 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique.

Corollaire 26

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors A a au moins une valeur propre.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si n est impair, alors A a au moins une valeur propre.

Démonstration. On utilise le résultat précédent et le fait :

- qu'un polynôme non constant à coefficients complexes possède au mois une racine complexe (théorème de d'Alembert-Gauss),
- qu'un polynôme à coefficient réel de degré impair possède au moins une racine (théorème des valeurs intermédiaires). □

Attention Comme le montre l'exemple de la page 74, une matrice réelle n'admet pas nécessairement de valeur propre réelle.

Proposition 27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Son polynôme caractéristique χ_A est un polynôme unitaire de degré n et l'on a :

$$\chi_A(X) = X^n - (\operatorname{Tr} A)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A.$$

Principe de démonstration. On utilise le développement complet d'un déterminant.

Rappelons que, si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : Démonstration page 113

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Remarque On retrouve le fait qu'une matrice carrée de taille n a au plus n valeurs propres distinctes.

Exemples

1. Le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est :
$$X^2 - (\operatorname{Tr} A)\, X + \det A = X^2 - (\alpha + \delta)\, X + (\alpha\delta - \beta\gamma).$$
2. Le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est :
$$X^3 - \operatorname{Tr}(A) X^2 + \big((\alpha\beta' - \alpha'\beta) + (\alpha\gamma'' - \alpha''\gamma) + (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') \big) X - \det A.$$
On remarquera que le coefficient de X est la trace de la comatrice de A.
3. Si M est matrice triangulaire supérieure par blocs de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, alors son polynôme caractéristique est donné par :
$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} XI_p - A & -C \\ 0 & XI_q - D \end{vmatrix} = \chi_A(X)\chi_D(X).$$
Ce résultat se généralise à toute matrice triangulaire par blocs.

p.113

Exercice 15 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice par blocs $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ en fonction de celui de A.

p.113

Exercice 16 Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice C de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par :

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

est le produit des polynômes caractéristiques de $A+B$ et $A-B$.

p.113

Exercice 17 Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon

Soit $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$.

Montrer que $\chi_A(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$.

Indication En notant $L_0, \dots, L_{p-1}$ les lignes de la matrice $XI_p - A$, on pourra effectuer l'opération $L_0 \leftarrow L_0 + XL_1 + \cdots + X^{p-1}L_{p-1}$.

Remarques

- On peut également prouver ce résultat par récurrence en développant par rapport à la première ligne.
- La matrice A de l'exercice précédent est appelée **matrice compagnon** du polynôme P. Elle intervient souvent dans les exercices et problèmes. Nous la retrouverons dans l'exercice 33 de la page 98.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

On suppose dans ce paragraphe que E est un espace vectoriel de dimension finie n non nulle.

Lemme 28

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. En utilisant les propriétés des déterminants, on a pour tout scalaire λ :

$$\chi_{PAP^{-1}}(\lambda) = \det\left(\lambda I_n - PAP^{-1}\right) = \det\left(P\left(\lambda I_n - A\right)P^{-1}\right) = \det\left(\lambda I_n - A\right) = \chi_A(\lambda). \quad \square$$

Le fait que deux matrices semblables aient le même polynôme caractéristique, c'est-à-dire que deux matrices représentant le même endomorphisme aient le même polynôme caractéristique, justifie la définition suivante.

Définition 10

On appelle **polynôme caractéristique** de l'endomorphisme u et l'on note χ_u, le polynôme caractéristique de toute matrice représentant u.

On a donc, pour tout scalaire λ, $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{Id}_E - u)$.

Remarques

- La notion de polynôme caractéristique d'un endomorphisme n'a donc aucun sens si E n'est pas de dimension finie.
- Si u est l'endomorphisme canoniquement associé à A, alors $\chi_u = \chi_A$.

Proposition 29

Le polynôme χ_u est unitaire, de degré n et l'on a :

$$\chi_u(X) = X^n - (\operatorname{Tr} u)\ X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u.$$

p.114

Exercice 18 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Exprimer χ_u à l'aide de $\operatorname{Tr} u$.

Indication On pourra utiliser une base adaptée au sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} u$.

Théorème 30

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u si, et seulement si, c'est une racine du polynôme caractéristique de u.

Démonstration. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre si, et seulement si, $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas inversible c'est-à-dire :

$$\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{Id}_E - u) = 0. \qquad \square$$

Remarque On retrouve le fait qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n a au plus n valeurs propres distinctes.

Corollaire 31

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors u a au moins une valeur propre.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $\dim E$ est impair, alors u a au moins une valeur propre.

Attention Comme le montre l'exercice 7 de la page 69, en dimension infinie, un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel n'admet pas nécessairement de valeur propre.

Proposition 32

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors le polynôme caractéristique, χ_{u_F}, de l'endomorphisme induit par u sur F divise χ_u.

Principe de démonstration. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice de u dans une base adaptée à F (base de F complétée en une base de E). Démonstration page 114

Remarques

- En particulier, on a l'inclusion $\mathrm{sp}\,(u_F) \subset \mathrm{sp}\,u$.
- Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u stabilisant les sous-espaces vectoriels d'une décomposition $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ est :

  $$\chi_u(X) = \chi_{u_1}(X) \cdots \chi_{u_p}(X),$$

  où, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, u_i est l'endomorphisme induit par u sur E_i.

  En effet, si $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ est une base adaptée à la somme directe considérée, la matrice de u dans cette base est une matrice diagonale par blocs dont le i-ème bloc diagonal est la matrice de u_i dans la base $\mathcal{B}_i$ de E_i.

Proposition 33

Si le polynôme caractéristique de u est scindé (respectivement scindé à racines simples), alors celui de l'endomorphisme induit par u sur tout sous-espace vectoriel de E stable par u l'est aussi.

Démonstration page 114

Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Définition 11

On appelle **ordre de multiplicité** d'une valeur propre λ de u (respectivement de A), son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de u (respectivement de A).

Remarque En particulier, une valeur propre de u est dite simple, double, triple, ... si c'est une racine simple, double, triple, ... du polynôme caractéristique de u.

Notation L'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ sera noté $m(\lambda)$.

Attention La notion d'ordre de multiplicité, tout comme celle de polynôme caractéristique, n'a pas de sens en dimension infinie.

Remarque D'après la remarque de la page 74, la multiplicité d'une valeur propre réelle d'une matrice réelle ne change pas si l'on considère A comme une matrice réelle ou comme une matrice complexe.

Proposition 34

Pour tout $\lambda \in \operatorname{sp}(u)$, on a :

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda).$$

Principe de démonstration. On utilise la stabilité par u de $E_\lambda(u)$ et la proposition 32 de la page précédente.

Démonstration page 114

Exemples

1. Si u est de rang r, le polynôme $\chi_u(X)$ est divisible par X^{n-r}, puisque le noyau $\operatorname{Ker} u = E_0(u)$ est de dimension $n-r$.
2. En particulier, si l'on considère la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 & 0 \end{bmatrix},$$

qui est de rang inférieur ou égal à 2, il existe des scalaires a et b tels que :

$$\chi_A(X) = X^{n-2}\left(X^2 + aX + b\right).$$

Le coefficient a, égal à l'opposé de la trace de A, est nul.

Pour obtenir le coefficient b, on peut procéder par récurrence.

Pour $n = 2$, on obtient $b = -\alpha_1^2$.

Posons $\det \begin{vmatrix} X & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & X & -\alpha_1 \\ -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_1 & X \end{vmatrix} = X^{n-2}\left(X^2 + b_n\right)$ et :

$$\det \begin{vmatrix} X & \dots & 0 & -\alpha_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & X & -\alpha_1 \\ -\alpha_n & \dots & -\alpha_1 & X \end{vmatrix} = X^{n-1}\left(X^2 + b_{n+1}\right)$$

En développant par rapport à la première colonne, on a :

$$\det \begin{vmatrix} X & \dots & 0 & -\alpha_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & X & -\alpha_1 \\ -\alpha_n & \dots & -\alpha_1 & X \end{vmatrix} = X^{n-1}\left(X^2 + a_n X + b_n\right) - \alpha_n^2 X^{n-1}$$

donc $b_{n+1} = b_n - \alpha_n^2$.

On en déduit que pour tout entier n $b_n = -\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2$.

On peut également obtenir ce résultat en utilisant le développement complet du déterminant :

$$\chi_A(X) = \sum_{\sigma \in S_n} P_\sigma \quad \text{avec} \quad P_\sigma = \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(X\delta_{\sigma(i),i} - a_{\sigma(i),i}\right).$$

- Si σ laisse invariants au plus $n-3$ entiers de $[\![1,n]\!]$, alors on a $\deg(P_\sigma) \leqslant n-3$.
- Si σ laisse invariants au moins $n-1$ entiers de $[\![1,n]\!]$, alors, comme c'est une bijection, on a $\sigma = \mathrm{Id}$ et $P_\sigma = X^n$.
- Si σ laisse invariants exactement $n-2$ entiers de $[\![1,n]\!]$, alors σ est une transposition $\tau_{i,j}$ $(i \neq j)$ et $P_\sigma = -a_{j,i}a_{i,j}X^{n-2}$.
  Pour $1 \leqslant i,j \leqslant n-1$, on a $a_{j,i} = a_{i,j} = 0$, donc $P_\sigma = 0$.
  Pour $i = n$ et $j \leqslant n-1$, on obtient $P_\sigma = -\alpha_j^2 X^{n-2}$.

Il vient alors $b = -\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2$. En conclusion $\chi_A(X) = X^n - X^{n-2}\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2$.

Corollaire 35

Si λ est valeur propre simple de u, alors $\dim E_\lambda(u) = 1$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 34 de la page ci-contre □

Remarque Le spectre de u est, par définition, l'ensemble des racines de χ_u dans $\mathbb{K}$. Comme dans le cas des polynômes, on distinguera soigneusement les notions d'ensemble et de liste des valeurs propres de u.

- L'ensemble des valeurs propres est le spectre de u. S'il est égal à $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ distincts deux à deux, alors on a :
$$\chi_u(X) = Q(X)\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m(\lambda_i)}$$
où $Q \in \mathbb{K}[X]$ n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$.
- Une liste des valeurs propres est une famille de scalaires répétant les valeurs propres avec leurs multiplicités. Une telle liste est unique à l'ordre près et si $(\mu_1, \ldots, \mu_s)$ est en est une, alors on a :
$$\chi_u(X) = Q(X)\prod_{i=1}^{s}(X-\mu_i)$$
où $Q \in \mathbb{K}[X]$ n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$.
- Bien sûr, la liste $(\mu_1, \ldots, \mu_s)$ est à l'ordre près formée des $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ répétés autant de fois que leur multiplicité, c'est-à-dire :
$$(\mu_1, \ldots, \mu_s) = (\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m(\lambda_1)\text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_p, \ldots, \lambda_p}_{m(\lambda_p)\text{ fois}}).$$
On a donc :
$$s = m(\lambda_1) + \cdots + m(\lambda_p).$$
- Si χ_u est scindé, alors on a $s = n$ et :
$$\chi_u(X) = \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{m(\lambda_k)} = \prod_{i=1}^{n}(X-\mu_i).$$

Proposition 36

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = n$, tel que χ_u soit scindé.

- Si $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ est une liste de valeurs propres de u, alors :
$$\operatorname{Tr} u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^{n} \mu_i.$$
- Si $\operatorname{sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ distincts deux à deux, alors :
$$\operatorname{Tr} u = \sum_{i=1}^{p} m(\lambda_i)\,\lambda_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m(\lambda_i)}.$$

Démonstration page 114

Exemples

1. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie a un polynôme caractéristique scindé puisque tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ l'est.
2. Il existe des endomorphismes d'espace vectoriel réel de dimension finie dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé.

   Par exemple, la rotation d'angle $\theta \neq 0 \bmod \pi$ du plan vectoriel euclidien orienté a pour matrice :
$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
   dans une (toute) base orthonormée directe et a pour polynôme caractéristique :
$$X^2 - 2X\cos\theta + 1,$$
   qui n'est pas scindé.

III Endomorphismes et matrices diagonalisables

On rappelle que E est un espace vectoriel de dimension finie n non nulle.

Définition 12

- Un endomorphisme u est dit **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.
- Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Proposition 37

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si, et seulement s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.

Démonstration page 115

Remarques

- Une base dans laquelle la matrice de u est diagonale s'appelle une **base de diagonalisation** de u.
- Une base de diagonalisation de $u \in \mathcal{L}(E)$ est donc une base de E constituée de vecteurs propres de u.

p.115

Exercice 19 Soit $D_n \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$ avec $n \geqslant 1$, défini par $D_n(P) = P'$.

L'endomorphisme D est-il diagonalisable ?

p.115

Exercice 20 Soit $f \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)$ défini par $f(A) = A + \operatorname{Tr}(A) I_n$.

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Proposition 38

Les projecteurs et les symétries de E sont diagonalisables.

Démonstration page 115

Remarque On verra plus tard qu'il y a plus rapide. En effet, d'après le théorème 60 de la page 103, un endomorphisme annulant un polynôme scindé à racines simples est diagonalisable.

Proposition 39

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice représentant un endomorphisme u.

La matrice A est alors diagonalisable si, et seulement si, u est diagonalisable.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition 12 de la page ci-contre. □

Corollaire 40

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable.

Remarque Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de A. D'après l'effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base $\mathcal{B}$ est égale à $P^{-1}AP$. Cette dernière matrice est donc diagonale.

Point méthode

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $(E_1, \dots, E_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Si on pose $P = (E_1, \dots, E_n)$, alors :

$$P^{-1}AP = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

p.115

Exercice 21 La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Si c'est le cas, fournir une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

La proposition suivante permet de déterminer si un endomorphisme est diagonalisable sans déterminer explicitement ses espaces propres mais en en connaissant simplement la dimension.

Proposition 41

Si $\operatorname{sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ distincts deux à deux, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) l'endomorphisme u est diagonalisable,

(ii) $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = E$,

(iii) $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) = \dim E$.

Démonstration page 116

Corollaire 42

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de spectre $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ distincts deux à deux. Il y a équivalence entre :

(i) la matrice A est diagonalisable,

(ii) $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

(iii) $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(A) = n$.

Exemples

1. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet λ pour unique valeur propre, u est diagonalisable si, et seulement si, le sous-espace propre associé est égal à E, c'est-à-dire si, et seulement si, $u = \lambda \operatorname{Id}_E$.

   De même, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet λ pour unique valeur propre, elle est diagonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est égal à $\lambda \operatorname{Id}_{\mathbb{K}^n}$, c'est-à-dire si, et seulement si, $A = \lambda I_n$.

2. En particulier un endomorphisme u vérifiant $u^p = 0$ n'est diagonalisable que s'il est nul. En effet, d'après la proposition 20 de la page 76, il est annulé par le polynôme X^p donc il admet au plus une valeur propre : 0. Un tel endomorphisme est dit **nilpotent**.

   L'étude de ces endomorphismes sera détaillée plus tard.

3. De même, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire de termes diagonaux tous égaux à λ, alors son polynôme caractéristique est égal à $(X-\lambda)^n$, d'après la proposition 25 de la page 79. La matrice A admet donc λ pour valeur propre d'ordre n ; elle n'est donc diagonalisable que si $A = \lambda I_n$.

Remarques

- Si $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} \subset \mathrm{sp}(u)$ et si $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) = \dim E$, alors

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} = \mathrm{sp}(u) \qquad \text{et} \qquad E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}.$$

- Supposons que u soit diagonalisable de spectre $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Nous avons alors la décomposition en somme directe :

$$E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}(u).$$

  Si l'on note $(p_{\lambda_1}, \ldots, p_{\lambda_r})$ la famille des projecteurs associés ; alors les endomorphismes u et $\lambda_1 p_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_r p_{\lambda_r}$ coïncident sur chaque E_{λ_i} donc :

$$u = \lambda_1 p_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_r p_{\lambda_r}.$$

  Ainsi, dans toute base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe précédente, la matrice de u est diagonale par blocs de la forme :

$$\mathrm{Diag}\,(D_1, \ldots, D_r)$$

  où D_k est la matrice scalaire de dimension $\dim E_{\lambda_k}(u)$ de rapport λ_k.

Exemple Soit la matrice complexe :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit aisément que son polynôme caractéristique vaut $X^2(X^2 - kX - 3)$.
Comme A est de rang 2, le sous espace-propre associé à 0 est de dimension 2.
Si k vérifie $k^2 + 12 \neq 0$, le trinôme $X^2 - kX - 3$ à deux racines λ_1 et λ_2 distinctes non nulles. Les sous-espaces vectoriels propres associés étant de dimension supérieure ou égale à 1, la matrice A est diagonalisable.

Si k est égal à $\pm 2i\sqrt{3}$, le trinôme $X^2 - kX - 3$ à une seule racine $\lambda = \dfrac{k}{2}$.
Le sous-espace propre associé est obtenu en résolvant :

$$\begin{cases} -\lambda x + y & = & 0 \\ x + \lambda y + z + t & = & 0 \\ y - \lambda z & = & 0 \\ y - \lambda t & = & 0 \end{cases}$$

Il est donc de dimension 1 engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La dimension de la somme des sous-espaces vectoriels propres valant 3, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Corollaire 43

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n et possède n valeurs propres distinctes c'est-à-dire si χ_u est est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

De même, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1 .

Démonstration page 117

p.117 **Exercice 22** La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Attention Il faut bien noter que le résultat précédent ne fournit qu'une condition *suffisante* pour que u soit diagonalisable comme le montre l'exercice 20 de la page 87.
Le théorème qui suit donne une condition nécessaire et suffisante.

Théorème 44

Pour que $u \in \mathcal{L}(E)$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

- son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$;
- pour toute valeur propre de u, la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de cette valeur propre, c'est-à-dire :

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(u) \quad \dim E_\lambda(u) = m(\lambda).$$

Principe de démonstration. Utiliser les propositions 41 de la page 88 et 34 de la page 84.

Démonstration page 117

Remarque

Pour toute valeur propre simple λ, on a toujours $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$ car :

$$E_\lambda(u) \neq \{0\} \qquad \text{et} \qquad \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda) = 1.$$

Corollaire 45

Pour que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

- son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$;
- pour toute valeur propre de A, la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de cette valeur propre, c'est-à-dire :

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(A) \quad \dim E_\lambda(A) = m(\lambda).$$

Point méthode

Pour que $u \in \mathcal{L}(E)$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

- son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$;
- pour toute valeur propre *multiple* de u, la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de cette valeur propre.

On a un résultat similaire pour les matrices.

p.117

Exercice 23 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ pour que la matrice A soit diagonalisable.

Remarque Il n'est pas toujours nécessaire de calculer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme pour savoir s'il est diagonalisable comme le montre l'exercice 20 de la page 87 ou l'exemple suivant.

Exemple Soit n un entier.

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, $v : P \mapsto \left(1 - X^2\right) P' + nXP$.

Il stabilise le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, $v(1) = nX$, $v(X^n) = nX^{n-1}$ et, pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, on a :

$$v(X^k) = (n-k)\, X^{k+1} + kX^{k-1} \in \mathbb{R}_n[X].$$

Considérons alors l'endomorphisme u induit par v sur $\mathbb{R}_n[X]$.

La matrice de u dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique ne paraissant pas facile à calculer, on peut rechercher les valeurs propres de u directement.
Un polynôme P non nul de $\mathbb{R}_n[X]$ est un vecteur propre de u s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left(1 - X^2\right) P' + nXP = \lambda P,$$

soit :

$$\frac{P'}{P} = \frac{nX - \lambda}{X^2 - 1} = \frac{n - \lambda}{2\,(X-1)} + \frac{n + \lambda}{2\,(X+1)}$$

dans $\mathbb{R}(X)$. Si la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est $C \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{n_k}$, on a :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{n_k}{X - \alpha_k}.$$

Ainsi, si P est un vecteur propre associé à un réel λ, alors, par unicité de la décomposition en éléments simples, $\frac{n-\lambda}{2}$ et $\frac{n+\lambda}{2}$ sont des entiers naturels et :

$$P = C(X-1)^{\frac{n-\lambda}{2}}(X+1)^{\frac{n+\lambda}{2}}.$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose donc $P_k = (X-1)^k (X+1)^{n-k}$. On vérifie alors que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad u(P_k) = (n - 2k)\, P_k.$$

Comme les nombres réels $(n-2k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ sont deux à deux distincts, u possède $n+1$ valeurs propres distinctes ; il est donc diagonalisable et la famille $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de vecteurs propres de u.

IV Endomorphismes et matrices trigonalisables

On suppose dans ce paragraphe que E est un espace vectoriel de dimension finie n non nulle.

Définition 13

- L'endomorphisme u est dit **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarque Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure si, et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad e_i \in \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_i)\,.$$

Proposition 46

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice représentant un endomorphisme u.

La matrice A est alors trigonalisable si, et seulement si, u est trigonalisable.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition 13. □

Corollaire 47

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est trigonalisable.

Remarque On aurait pu aussi choisir la forme triangulaire inférieure. En effet, il est facile de vérifier que, si la matrice d'un endomorphisme u dans une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est triangulaire supérieure, alors sa matrice dans la base $(e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$ est triangulaire inférieure.

p.118

Exercice 24 Soit A la matrice de u dans une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et B celle de u dans la base $(e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$. Quelle est la relation entre A et B ?

Théorème 48

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Principe de démonstration. Le sens direct découle de la proposition 25 de la page 79.
La réciproque se prouve par récurrence. Démonstration page 118

Corollaire 49

Un matrice est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

p.118

Exercice 25 Soit u trigonalisable et F un sous-espace vectoriel stable par u.

Montrer que l'endomorphisme induit u_F est aussi trigonalisable.

Corollaire 50

Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors tout endomorphisme de E est trigonalisable.

Toute matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{C}$ est trigonalisable.

Démonstration. Conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss. □

Remarque Il existe des endomorphismes d'espace vectoriel réel de dimension finie non trigonalisable.

Par exemple, une rotation du plan euclidien d'angle $\theta \neq 0 \mod \pi$ a un polynôme caractéristique non scindé donc n'est pas trigonalisable.

Exemples

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ayant une valeur propre double λ. Deux cas se présentent :
   (a) A est diagonalisable et, d'après l'exemple 1 de la page 88, on a $A = \lambda I_2$.
   (b) A n'est pas diagonalisable et le sous-espace propre pour la valeur propre λ est alors de dimension 1.
   Soit u un vecteur propre associé à cette valeur propre qu'on complète en une base (u, v) de $\mathbb{K}^2$. Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^2$ à cette base, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, avec $\alpha \neq 0$, car A n'est pas diagonalisable. Comme λ est la seule valeur propre de A, on a $\beta = \lambda$.
   En prenant comme base $(\alpha u, v)$ à la place de (u, v), on remarque que A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ ayant une valeur propre simple λ et une valeur propre double μ. Supposons A non diagonalisable, c'est-à-dire $\dim E_\mu(A) = 1$.
   Soit u un vecteur propre de A pour la valeur propre λ et v un vecteur propre de A pour la valeur propre μ. Complétons (u, v) en une base (u, v, w) de $\mathbb{K}^3$ et notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^3$ à cette base.
   On a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \mu & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Tr}(A) = \lambda + 2\mu$ donne $\gamma = \mu$.
   On peut encore faire mieux comme le montre l'exercice suivant.

p.118

Exercice 26 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ ayant une valeur propre simple λ et une valeur propre double μ. On suppose A non diagonalisable, c'est-à-dire que $\dim E_\mu(A) = 1$.

Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Indication : on pourra modifier le troisième vecteur d'une base de trigonalisation.

p.119

Exercice 27 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est trigonalisable et déterminer $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ et T triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$.

p.120

Exercice 28

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?

2. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Corollaire 51

Soit u est un endomorphisme trigonalisable.

- Si $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ est une liste de valeurs propres de u, on a :
$$\operatorname{Tr} u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^{n} \mu_i.$$
- Si $\operatorname{sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, on a alors :
$$\operatorname{Tr} u = \sum_{i=1}^{p} m(\lambda_i)\, \lambda_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m(\lambda_i)}.$$

Démonstration.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 36 et du théorème 48 de la page 93. □

Remarque Recherche de la valeur propre de plus grand module.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, de multiplicités respectives $m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_p)$, vérifient :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_p|.$$

Ainsi λ_1 est l'unique valeur propre de module maximal.

Pour tout entier k, on a $\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = \sum_{i=1}^{p} m(\lambda_i)\, \lambda_i^k \underset{k\to+\infty}{\sim} m(\lambda_1)\, \lambda_1^k$ donc :

$$\lambda_1 = \lim_{k\to+\infty} \frac{\operatorname{Tr}\left(A^{k+1}\right)}{\operatorname{Tr}\left(A^k\right)}.$$

On a déjà prouvé qu'un endomorphisme (respectivement une matrice) est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.
L'exercice suivant prouve qu'un endomorphisme (respectivement une matrice) est trigonalisable si, et seulement s'il possède un polynôme annulateur scindé.

p.121

Exercice 29 (Approfondissement)

On veut montrer qu'un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement s'il est annulé par un polynôme scindé.

1. Montrer par récurrence sur la dimension de E que si un endomorphisme u de E est annulé par un polynôme scindé, alors il est trigonalisable.
2. Montrer que si u est un endomorphisme trigonalisable de E, alors χ_u annule u.
3. Conclure.

Remarque En fait, pour tout endomorphisme u, on a $\chi_u(u) = 0$.
Il s'agit du théorème de Cayley-Hamilton qui sera démontré dans la section suivante.

V Utilisations des polynômes annulateurs

1 Polynôme minimal

Proposition 52

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble des polynômes P tels que $P(u) = 0$ est un idéal appelé **idéal annulateur de u**.

Corollaire 53

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'ensemble des polynômes P tels que $P(A) = 0$ est un idéal appelé **idéal annulateur de A**.

Remarque Comme le montre l'exercice suivant, il peut arriver, en dimension infinie, que l'idéal annulateur soit réduit au polynôme nul.
Nous verrons dans la section suivante que c'est impossible en dimension finie.

p.122

Exercice 30 On note D la dérivation de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, e_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R} \quad e_\lambda(t) = \exp(\lambda t)$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Calculer $P(D)(e_\lambda)$.
2. En déduire l'idéal annulateur de D.

Proposition 54

1. Si E de dimension finie, alors l'idéal annulateur de tout endomorphisme de E est non réduit à $\{0\}$.
2. L'idéal annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Démonstration page 122

Remarque D'après le théorème 21 de la page 16, si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit au polynôme nul, alors il existe un unique polynôme unitaire P, appelé générateur unitaire de $\mathcal{I}$, tel que $\mathcal{I} = P\mathbb{K}[X]$.

Définition 14

Soit E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le générateur unitaire de l'idéal annulateur de u est appelé **polynôme minimal** de u ; on le note π_u.

On a la même définition pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Dans la suite on supposera E de dimension finie non nulle, ce qui assure l'existence d'un polynôme minimal pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$.

Remarques

- Comme $\dim E \neq 0$, on a $\deg(\pi_u) \geqslant 1$, car si $P = \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on a $P(u) = \lambda \mathrm{Id}_E \neq 0$.
- Le polynôme minimal π_u est de degré 1 si, et seulement si, u est une homothétie.

  En effet, si $u = \lambda \mathrm{Id}$ alors π_u divise $X - \lambda$. Comme π_u est unitaire et de degré supérieur ou égal à 1, on en déduit que $\pi_u = X - \lambda$.

  Réciproquement, si $\pi_u = X - \lambda$, alors $0 = \pi(u) = u - \lambda \mathrm{Id}$ donc $u = \lambda \mathrm{Id}$.

p.122

Exercice 31

1. Déterminer le polynôme minimal d'un projecteur p de E.
2. Déterminer le polynôme minimal d'une symétrie s de E.

p.123

Exercice 32 Montrer que l'ensemble des racines du polynôme minimal π_u est égal au spectre de u.

Proposition 55

Si $d = \deg(\pi_u)$, alors la famille $\left(u^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$ et l'on a donc $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u)$.

On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Principe de démonstration.

Démonstration page 123

On utilise la division euclidienne par le polynôme minimal π_u.

Point méthode

La démonstration de la proposition précédente fournit une méthode pratique de décomposition de $v \in \mathbb{K}[u]$ dans la base $\left(u^k\right)_{k\in[\![0,d-1]\!]}$ de $\mathbb{K}[u]$:

si $v = P(u)$, avec $P \in \mathbb{K}[X]$, on détermine le reste de la division euclidienne de P par le polynôme minimal de u.

Ainsi, pour calculer les puissances successives de u, on détermine le reste de la division euclidienne de X^p, avec $p \in \mathbb{N}$, par le polynôme minimal de u.

2 Théorème de Cayley-Hamilton

On a vu l'intérêt d'obtenir des polynômes annulateurs dans la recherche de valeurs propres d'un endomorphisme et l'on a prouvé leur existence en dimension finie.

Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u est un polynôme annulateur de u.

La démonstration de ce théorème n'est pas exigible.

Nous proposons ici une démonstration en plusieurs étapes s'appuyant sur les matrices compagnons, notion hors-programme mais qui fait l'objet de nombreux sujets de concours.

p.123

Exercice 33 Polynôme minimal d'une matrice compagnon

Soit $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

On note $(E_0, \dots, E_{p-1})$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et l'on pose :

$$P(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots a_1 X + a_0.$$

1. Calculer $A^k E_0$, pour $k \in [\![0, p-1]\!]$. En déduire que $\deg(\pi_A) \geqslant p$.
2. Calculer AE_{p-1}, puis $P(A)E_0$. En déduire que $\pi_A = P$.

Remarque Combiné avec l'exercice 17 de la page 81, ce résultat prouve que si A est une matrice compagnon, alors $\pi_A = \chi_A$.

p.124

Exercice 34 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et x un vecteur non nul de E.

1. Montrer qu'il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E, noté F_x, stable par u et contenant x.
2. Prouver que, si F_x est de dimension p, alors $\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\right)$ est une base de F_x.

Théorème 56 (Théorème de Cayley-Hamilton)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.

Le polynôme caractéristique de $u \in$ annule u, c'est-à-dire $\chi_u(u) = 0$.

Principe de démonstration. On utilise le lemme précédent, puis les exercices 17 de la page 81 et 33 de la page précédente sur les matrices compagnons.

Démonstration (non exigible) page 124

Attention Comme il fait intervenir le polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$, le théorème de Cayley-Hamilton n'a de sens que si E est de dimension **finie**.

Corollaire 57 (Théorème de Cayley-Hamilton)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_A(A) = 0$.

p.124

Exercice 35 On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ de l'exemple page 79.

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} en fonction de I_3, A et A^2.

3 Lemme de décomposition des noyaux

Théorème 58 (Lemme de décomposition des noyaux)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $(P_1, \ldots, P_r) \in \mathbb{K}[X]^r$ une famille finie de polynômes deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \ldots P_r$ leur produit.

On a alors la décomposition en somme directe :

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k(u).$$

Principe de démonstration. On utilise la relation de Bézout pour $n = 2$ puis on procède par récurrence sur r.

Démonstration page 125

Corollaire 59

Soit $(P_1, \dots, P_r) \in \mathbb{K}[X]^r$ une famille finie de polynômes deux à deux premiers entre eux, P leur produit et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si P est un polynôme annulateur de u, on a alors :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k(u).$$

Démonstration page 125

Remarque

On retrouve le fait que si p est un projecteur alors $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires et que, si p est une symétrie alors $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id})$ sont supplémentaires.

p.125

Exercice 36 Soit $(P_1, \dots, P_r) \in \mathbb{K}[X]^r$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux et P leur produit. On suppose que $P(u) = 0$.

Montrer que les projecteurs associés à la décomposition en somme directe :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k(u).$$

sont des polynômes en u.

Exemples

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des suites u telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

est le noyau de l'endomorphisme $Q(T)$, avec :

$$Q = X^2 - aX - b \quad \text{et} \quad T : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ u & \longmapsto & (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{array}.$$

Si le polynôme Q a deux racines distinctes λ_1 et λ_2, alors le lemme des noyaux donne :

$$\mathcal{S} = \operatorname{Ker}(T - \lambda_1 \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(T - \lambda_2 \mathrm{Id}) = \left\{ (A\lambda_1^n + B\lambda_2^n)_{n \in \mathbb{N}},\ (A, B) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

On retrouve ainsi le résultat obtenu en première année.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f'' = af' + bf$. Il est aisé de montrer que tout élément de $\mathcal{S}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\mathcal{S}$ est le noyau de l'endomorphisme $Q(D)$, avec :

$$Q = X^2 - aX - b \text{ et } D : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}.$$

Si le polynôme Q a deux racines distinctes λ_1 et λ_2, alors le lemme des noyaux donne :

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \operatorname{Ker}(D-\lambda_1 \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(D-\lambda_2 \operatorname{Id}) \\ &= \left\{x \mapsto A\,e^{\lambda_1 x} + B\,e^{\lambda_2 x}\,;\ (A,B) \in \mathbb{K}^2\right\}.\end{aligned}$$

On retrouve donc le résultat obtenu en première année.

Nous allons généraliser ces deux résultats.

Application aux équations différentielles linéaires à coefficients constants

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre p :

$$f^{(p)} + \alpha_{p-1} f^{(p-1)} + \cdots + \alpha_1 f' + \alpha_0 f = 0 \qquad \text{(ED)}$$

où $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On appelle polynôme caractéristique de (ED) le polynôme :

$$C(X) = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k.$$

Sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ sera notée $C(X) = \prod_{k=1}^{r} (X-\lambda_k)^{p_k}$ (les λ_k sont deux à deux distincts et les $p_k > 0$).

Si D désigne l'endomorphisme de dérivation de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (ED) est le noyau de l'endomorphisme $C(D)$. Le lemme des noyaux nous fournit alors la décomposition en somme directe :

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker}\left(D-\lambda_k \operatorname{Id}_E\right)^{p_k}.$$

Pour tout complexe λ, on note e_λ, la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$.

On prouve alors par récurrence sur p la relation suivante :

$$(D-\lambda_k \operatorname{Id}_E)^p (f \times e_{\lambda_k}) = e_{\lambda_k} \times D^p(f)$$

pour tout $(k,f) \in [\![1,r]\!] \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On en déduit :

$$\operatorname{Ker}\left(D-\lambda_k \operatorname{Id}_E\right)^{p_k} = \left\{x \mapsto P(x) e^{\lambda_k x}\,;\ P \in \mathbb{C}_{p_k-1}[X]\right\}.$$

Ainsi, tout élément f de $\mathcal{S}$ s'écrit sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{r} P_k(x) e^{\lambda_k x}$$

pour une unique famille $(P_k) \in \prod_{k=1}^{r} \mathbb{C}_{p_k-1}[X]$ et l'espace $\mathcal{S}$ est de dimension p.

Lorsque $p = 1$ ou 2, ce dernier point est également une conséquence du théorème de Cauchy sur les équations linéaires à coefficients constants d'ordre 1 ou 2.

Application aux suites récurrentes linéaires à coefficients constants

Soit l'équation récurrente linéaire à coefficients constants d'ordre p :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} + \alpha_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_0 u_n = 0 \qquad \text{(ER)}$$

avec $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$, avec $\alpha_0 \neq 0$, d'inconnue $u \in E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
On appelle polynôme caractéristique de (ER) le polynôme :

$$C(X) = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k.$$

Sa factorisation dans $\mathbb{C}$ sera notée :

$$C(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{p_k}$$

(les λ_k sont deux à deux distincts et les $p_k > 0$).
Désignons alors par T l'endomorphisme de translation de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ défini par :

$$T\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (ER) est le noyau de l'endomorphisme $C(T)$.
Comme une suite de $\mathcal{S}$ est déterminée par ses p premiers termes, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ u & \longmapsto & (u_0, \ldots, u_{p-1}) \end{array}$$

est un isomorphisme et la dimension de $\mathcal{S}$ est égale à p. De plus, le lemme des noyaux nous fournit la décomposition en somme directe :

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker}\left(T - \lambda_k \operatorname{Id}_E\right)^{p_k}.$$

Il s'agit maintenant de déterminer pour tout k, le noyau de $(T - \lambda_k \operatorname{Id}_E)^{p_k}$.
Nous venons de voir que cet espace est de dimension p_k puisque l'équation $(T - \lambda_k \operatorname{Id}_E)^{p_k}(u) = 0$ est une relation de récurrence linéaire d'ordre p_k.

- Si $\lambda_k = 0$, il s'agit du noyau de T^{p_k}. C'est évidemment l'espace vectoriel de suites u telle que $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant p_k$. On retrouve le fait qu'il est de dimension p_k.
- Supposons $\lambda_k \neq 0$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, un simple calcul montre que la suite image de $\left(\lambda_k^n P(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par $T - \lambda_k \operatorname{Id}_E$ est :

  $$\left(\lambda_k^{n+1} Q(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

  où $Q(X)$ est le polynôme $P(X+1) - P(X)$. Le degré de Q étant inférieur ou égal à $\deg P - 1$, on voit par itération que $\operatorname{Ker}(T - \lambda_k \operatorname{Id}_E)^{p_k}$ contient l'ensemble :

  $$\left\{ \left(\lambda_k^n P(n)\right)_{n\in\mathbb{N}} ;\ P \in \mathbb{K}_{p_k-1}[X] \right\}.$$

Comme d'un autre côté, c'est un sous-espace vectoriel de dimension p_k puisqu'il est l'image de $\mathbb{K}_{p_k-1}[X]$ par l'application linéaire injective $P \mapsto \left(\lambda_k^n P(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (l'injectivité découlant du fait qu'un polynôme ayant une infinité de racines est nul), il vient :

$$\operatorname{Ker}(T-\lambda_k \operatorname{Id}_E)^{p_k} = \left\{ \left(\lambda_k^n P(n)\right)_{n\in\mathbb{N}} ;\ P \in \mathbb{K}_{p_k-1}[X] \right\}$$

puisque le noyau de $(T-\lambda_k \operatorname{Id}_E)^{p_k}$ est aussi de dimension p_k.

Comme $\alpha_0 \neq 0$, tous les λ_k sont non nuls donc toute solution u de (ER) s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^n Q_k(n)$$

pour une unique famille $(Q_k) \in \prod_{k=1}^{r} \mathbb{K}_{p_k-1}[X]$.

On retrouve le fait que l'espace $\mathcal{S}$ est de dimension p.

4 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

On a déjà prouvé que si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme (respectivement d'une matrice) est scindé à racines simples, alors l'endomorphisme (respectivement la matrice) est diagonalisable mais qu'il ne s'agit que d'une condition *suffisante*.

Le théorème suivant prolonge ce résultat et donne une condition nécessaire et suffisante pour être diagonalisable.

Théorème 60

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) u est diagonalisable ;

(ii) u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples ;

(iii) le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.

On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Principe de démonstration. Démonstration page 126

- Pour prouver $(i) \Longrightarrow (ii)$, on utilise la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$, où $\operatorname{sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, puis la proposition 18 de la page 76.
- Pour prouver $(iii) \Longrightarrow (i)$, on utilise le lemme de décomposition des noyaux.

Remarque L'exercice 29 de la page 96 permet d'énoncer un résultat similaire pour les endomorphismes trigonalisables.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) u est trigonalisable ;

(ii) u possède un polynôme annulateur scindé ;

(iii) le polynôme minimal de u est scindé.

Corollaire 61

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. L'endomorphisme induit par u sur F est alors diagonalisable.

Démonstration page 127

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'endomorphismes de E est *simultanément diagonalisable* s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices des u_i sont diagonales.
Une telle base s'appelle alors une base de *diagonalisation simultanée.*

p.127

Exercice 37 Montrer qu'une famille d'endomorphismes de E est simultanément diagonalisable si, et seulement si, elle est composée d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux.

Remarque En adaptant cet exercice et en utilisant l'exercice 25 de la page 93, on obtient qu'une famille d'endomorphismes de E trigonalisables commutant deux à deux est simultanément trigonalisable.

5 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

On s'intéresse dans cette section aux endomorphismes annulés par un monôme c'est-à-dire par un polynôme de la forme X^k.

Définition 15

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est **nilpotent** s'il existe un entier k tel que $u^k = 0$.

Le plus petit entier r tel que $u^r = 0$ s'appelle l'**indice de nilpotence** de u.

Remarques

- L'indice de nilpotence d'un endomorphisme u nilpotent est bien défini car l'ensemble des entiers k tels que $u^k = 0$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, elle admet donc un plus petit élément.
- Comme $u^0 = \mathrm{Id}$, l'indice de nilpotence est un entier non nul.
- L'endomorphisme de nilpotence est égal à 1 si, et seulement si, l'endomorphisme est nul.
- Un endomorphisme nilpotent est non injectif. En effet, si u est nilpotent d'indice r, alors $u^{r-1} \neq 0$ donc il existe un vecteur x tel que $u^{r-1}(x)$ soit un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} u$.
- La seule valeur propre d'un endomorphisme nilpotent est nulle. En effet, d'après le point précédent, 0 est valeur propre et, grâce à la proposition 20 de la page 76, c'est la seule.

Définition 16

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **nilpotente** s'il existe un entier k tel que $A^k = 0$.

Le plus petit entier r tel que $A^r = 0$ s'appelle l'**indice de nilpotence** de A.

Remarques

- Une matrice A est nilpotente si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est nilpotent.

  De même, si une matrice représente un endomorphisme, alors elle est nilpotente si, et seulement si, cet endomorphisme l'est.

  Les propriétés énoncées sur les endomorphismes nilpotents sont donc transposables aux matrices nilpotentes.

- Toute matrice semblable à une matrice nilpotente est donc nilpotente.

On suppose désormais que E est un espace vectoriel de dimension finie n (non nulle car $E \neq \{0\}$.)

Proposition 62

Les trois points suivants sont équivalents :

(i) u est nilpotent,

(ii) le polynôme caractéristique de u est X^n,

(iii) il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure stricte.

Démonstration page 127

Corollaire 63

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les trois points suivants sont équivalents :

(i) A est nilpotente,

(ii) le polynôme caractéristique de A est X^n,

(iii) A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

Corollaire 64

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre :

(i) A est nilpotente,

(ii) A est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

Corollaire 65

Soit u un endomorphisme de E. Il y a équivalence entre :

(i) u est nilpotent,

(ii) u est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

Corollaire 66

Soit u un endomorphisme nilpotent.

Son indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.

Démonstration. En effet, son polynôme caractéristique est X^n et il est annulateur d'après le théorème de Cayley-Hamilton. □

Corollaire 67

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est nilpotente, alors $A^n = 0$.

p.128

Exercice 38 Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice r et $x_0 \notin \operatorname{Ker} u^{r-1}$. Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{r-1}(x_0))$ est libre.

p.128

Exercice 39 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n nilpotent et d'indice n.

1. Soit x_0 tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$. Montrer que $\left(u^k(x_0)\right)_{0 \leqslant k < n}$ est une base de E.
2. Montrer que, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, le sous-espace $\operatorname{Ker} u^k$ est de dimension k.
3. Montrer que, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, $\operatorname{Ker} u^k$ est le seul sous-espace stable de dimension k stable par u.

p.128

Exercice 40 Montrer que pour toute famille $(u_1, \dots, u_n)$ de n endomorphismes nilpotents, commutant deux à deux, d'un espace vectoriel E de dimension n, on a :

$$u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0.$$

Théorème 68

Lorsqu'il existe un polynôme scindé annulant u, c'est-à-dire lorsque le polynôme minimal de u est scindé, alors E peut se décomposer en une somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Démonstration page 129

Remarque Matriciellement, si l'on prend une base adaptée à une telle décomposition, on obtient une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + N_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_p I_{n_p} + N_p \end{pmatrix} \quad \text{où } N_1, \dots, N_p \text{ sont nilpotentes.}$$

On peut même trigonaliser chaque matrice nilpotente N_k de façon à ce que chaque bloc diagonal soit triangulaire supérieur.
On obtient ainsi une forme triangulaire particulière que l'on a, par exemple, obtenue dans l'exercice 26 de la page 94.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

1. Par hypothèse, pour tout $x \in E$, il existe un scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$. Si le vecteur x est non nul, alors le scalaire λ_x est unique, sinon tous les scalaires λ conviennent.

   Soit x et y deux vecteurs non nuls de E. Montrons que $\lambda_x = \lambda_y$.

   - Si x est proportionnel à y, alors il existe un scalaire μ tel que $x = \mu y$. Ainsi :
   $$u(x) = \lambda_x x = \lambda_x \mu y = u(\mu y) = \mu \lambda_y y$$
   Comme le vecteur y est non nul, on en déduit que $\lambda_x \mu = \lambda_y \mu$. Le scalaire μ étant non nul (car $x \neq 0$), on en déduit que $\lambda_x = \lambda_y$.
   - Si la famille (x, y) est libre, alors l'égalité :
   $$u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$
   implique que $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

   Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$ non nul, $u(x) = \lambda x$. Cette égalité étant trivialement vraie pour $x = 0$, cela prouve que u est une homothétie.
2. Il est clair qu'une homothétie stabilise tous les sous-espaces vectoriels de E.

   Réciproquement, soit u un endomorphisme stabilisant toutes les sous-espaces vectoriels de E. Pour tout vecteur x non nul, $\mathbb{K}x$ est stable par u donc $u(x) \in \mathbb{K}x$, ce qui implique que la famille $(x, u(x))$ est liée. On en déduit, grâce à la question précédente, que u est une homothétie.

   Ainsi, les seuls endomorphismes stabilisant tous les sous-espaces vectoriels de E sont les homothéties.

Exercice 2

1. Comme $P \in F$, avec F stable par D, on a :
$$\forall k \in [\![0, d]\!] \quad P^{(k)} = D^k(P) \in F.$$
   La famille $\left(P^{(k)}\right)_{0 \leqslant k \leqslant d}$ est libre, car échelonnée en degré ; comme c'est une famille de polynômes de $\mathbb{K}_d[X]$ comportant $d+1 = \dim \mathbb{K}_d[X]$, c'en est une base. On a montré que $\mathbb{K}_d[X] \subset F$.
2. Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par D ; notons A l'ensemble des degrés des polynômes non nuls de F. Il s'agit donc d'une partie de $\mathbb{N}$ non vide.
   - Si A est majoré, alors A admet un plus grand élément, que l'on note d.
   Par suite, $F \subset \mathbb{K}_d[X]$ et il existe $P \in F$ de degré d donc, d'après la première question, on a $\mathbb{K}_d[X] \subset F$ puis $F = \mathbb{K}_d[X]$.
   - Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P \in A$ tel que $d := \deg P \geqslant n$. D'après la première question, on a $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}_d[X] \subset F$. Comme cette inclusion est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F = \mathbb{K}[X]$.

   Réciproquement, pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_d[X]$ est stable par D.

   En conclusion, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par D sont $\{0\}$, $\mathbb{K}[X]$ et les $\mathbb{K}_d[X]$, avec $d \in \mathbb{N}$.

Proposition 1

- Soit $x \in \operatorname{Ker} v$; on a $v\big(u(x)\big) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(0) = 0$ donc $u(x)$ appartient à $\operatorname{Ker} v$. Ainsi, $\operatorname{Ker} v$ est stable par u.
- Soit $y \in \operatorname{Im} v$; il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$.
  Par suite $u(y) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) \in \operatorname{Im} v$; donc $\operatorname{Im} v$ est stable par u.

Proposition 2

- Supposons F stable par u. Pour tout $i \in I$, comme $e_i \in F$ et F est stable par u, on a $u(e_i) \in F$.
- Réciproquement, supposons que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) \in F$ et montrons que F est stable par u. Soit $x \in F$, il existe une famille de scalaires presque nulle, $(\lambda_i)_{i\in I}$, telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$. Par linéarité de u, on a $u(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i u(e_i)$ donc $u(x) \in F$. Par suite, F est stable par u.

Exercice 3 Il est évident que $\mathcal{L}_F(E)$ est inclus dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ et contient Id_E.

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}_F(E)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Pour tout $x \in F$, on a $u(x) \in F$, $v(x) \in F$ et par suite $(\alpha u + \beta v)(x) \in F$. L'application $\alpha u + \beta v$ appartient donc à $\mathcal{L}_F(E)$.

De plus, pour tout $x \in F$, on a $(u \circ v)(x) = u\big(\underbrace{v(x)}_{\in F}\big) \in F$ et, par conséquent l'application $u \circ v$ appartient à $\mathcal{L}_F(E)$.

Ainsi, $\mathcal{L}_F(E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Corollaire 3 Comme $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F, l'espace vectoriel F est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, $\forall j \in [\![1, p]\!]$ $u(e_j) \in F$ c'est-à-dire si, et seulement si, les p premières colonnes de la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ ont leurs $n - p$ derniers coefficients nuls, c'est-à-dire si, et seulement si, cette matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

L'interprétation de A est alors claire.

Exercice 4

1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le sous-espace E_i est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si, et seulement s'il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Les endomorphismes cherchés sont donc ceux dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.
2. Les espaces F_i sont stables par u si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) \in F_i$. Les endomorphismes cherchés sont donc ceux dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.

Proposition 4 Le sous-espace E_i est stable par u si, et seulement si, les vecteurs de $\mathcal{B}_i$ ont pour image par u un vecteur de E_i, c'est-à-dire une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}_i$. On en déduit facilement l'équivalence annoncée et l'interprétation des matrices A_i.

Exercice 5 Un réel λ est valeur propre de D si, et seulement si, l'équation $f' = \lambda f$ a une solution non nulle dans E. Or les solutions de cette équation différentielle sont les multiples de la fonction non nulle $e_\lambda : t \mapsto \exp(\lambda t)$.

En conclusion, tout réel λ est valeur propre de D et $E_\lambda(D) = \mathrm{Vect}(e_\lambda)$.

Exercice 6 Un complexe λ est valeur propre de Δ si, et seulement si, l'équation $\Delta(u) = \lambda u$ a une solution non nulle dans E. Or $\Delta(u) = \lambda u$ équivaut à :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \lambda u_n,$$

ou encore, par une récurrence évidente, à :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 \lambda^n.$$

En conclusion, tout complexe λ est valeur propre de Δ, le sous-espace propre associé étant la droite vectorielle engendrée par la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison λ.

Rappelons que pour $\lambda = 0$, on a $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} = (\delta_{0,n})_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, 0, \ldots)$.

Exercice 7

Un complexe λ est valeur propre de u si, et seulement si, l'équation $XP = \lambda P$ a une solution non nulle dans E.

Or, pour $P \neq 0$, on a :

$$\deg(XP) = 1 + \deg(P) \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg(P) & \text{si} \quad \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si} \quad \lambda = 0, \end{cases}$$

ce qui rend l'égalité $XP = \lambda P$ impossible puisque $\deg(\lambda P) < \deg(XP)$.

En conclusion, u n'a pas de valeur propre.

Exercice 8 Comme φ est un isomorphisme, pour tout vecteur x de E et pour tout scalaire λ, on a :

$$u(x) = \lambda x \iff u \circ \varphi^{-1}\big(\varphi(x)\big) = \lambda x \iff \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}\big(\varphi(x)\big) = \lambda \varphi(x),$$

c'est-à-dire :

$$x \in E_\lambda(u) \iff \varphi(x) \in E_\lambda(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}).$$

Comme φ est un isomorphisme, on en déduit que les endomorphismes u et $\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ ont les mêmes valeurs propres et leurs sous-espaces propres sont reliés par :

$$E_\lambda(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}) = \varphi\big(E_\lambda(u)\big).$$

Proposition 6

- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $H(p)$: « Si u admet p valeurs propres distinctes, alors les espaces propres associés sont en somme directe. »

  Pour $p = 1$, il n'y a rien à prouver.

  Supposons la proposition vraie pour un certain rang $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$ des valeurs propres distinctes de u et $(x_1, \ldots, x_{p+1}) \in \prod_{i=1}^{p+1} E_{\lambda_i}(u)$ vérifiant $\sum_{i=1}^{p+1} x_i = 0$.

On a donc $u\left(\sum_{i=1}^{p+1} x_i\right) = 0 = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i$ puis :

$$0 = u\left(\sum_{i=1}^{p+1} x_i\right) - \lambda_{p+1}\sum_{i=1}^{p+1} x_i = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_{p+1} x_i$$
$$= \sum_{i=1}^{p+1} (\lambda_i - \lambda_{p+1})\, x_i = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{(\lambda_i - \lambda_{p+1})\, x_i}_{\in E_{\lambda_i}(u)}.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad (\lambda_i - \lambda_{p+1})\, x_i = 0.$$

Or, les valeurs propres étant deux à deux distinctes, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i \neq \lambda_{p+1}$ donc $x_i = 0$. L'égalité $\sum_{i=1}^{p+1} x_i = 0$ donne enfin $x_{p+1} = 0$; ce qui prouve $H(p+1)$.

- Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$.

  Comme $(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_p x_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$, l'on déduit de la première partie de la proposition que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\alpha_i x_i = 0$.

  Comme chaque x_i est non nul, car vecteur propre de u, on peut conclure que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad \alpha_i = 0.$$

  Par suite, la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

Exercice 9 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $t > 0$, on a $u(f_\alpha)(t) = t\left(\alpha t^{\alpha-1}\right) = \alpha t^\alpha$ donc $u(f_\alpha) = \alpha f_\alpha$ et la fonction non nulle f_α est vecteur propre de u pour la valeur propre α.

Par suite, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des réels deux à deux distincts, la famille de fonctions $(f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n})$ est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$.

Ainsi, la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Corollaire 8 D'après la proposition 6 de la page 69, à toute famille de p valeurs propres deux à deux distinctes on peut associer une famille libre de p vecteurs propres, donc $p \leqslant n$.

Exercice 10 Soit P_1 et P_2 deux matrices *réelles* telles que $P = P_1 + iP_2$.

On a $(P_1 + iP_2)\, M' = M\,(P_1 + iP_2)$, c'est-à-dire $P_1 M' = M P_1$ et $P_2 M' = M P_2$.

Ainsi, pour tout réel λ, on a $(P_1 + \lambda P_2)\, M' = M\,(P_1 + \lambda P_2)$. Il reste à prouver l'existence d'un réel λ tel que $P_1 + \lambda P_2 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ pour conclure.

Or, la fonction $\lambda \mapsto \det(P_1 + \lambda P_2)$ est polynomiale et non nulle car $P(i) \neq 0$.

Elle admet donc un nombre fini de racines, ce qui assure l'existence d'un réel λ tel que $P_1 + \lambda P_2 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Un vecteur $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ vérifie $AX = \lambda X$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & + \cdots + x_n & = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 & + \cdots + x_n & = \lambda x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 + x_2 & + \cdots + x_n & = \lambda x_n \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 0$, on en déduit que $x_1 = \cdots = x_n$ puis que $\lambda x_1 = n x_1$. Ainsi, n est l'unique valeur propre non nulle de J et le sous-espace propre associé est la droite engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda = 0$, alors le système devient $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Ainsi, 0 est valeur propre de J et le sous-espace propre associé est l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $AX = \lambda X$ si, et seulement si, $\alpha J X = (\lambda - \beta) X$.
Si $\alpha = 0$, alors $A = \beta I_n$ donc la seule valeur propre de A est β et le sous-espace propre associé est $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Sinon, λ est valeur propre de A si, et seulement si, $\frac{\lambda - \beta}{\alpha} \in \mathrm{sp}(J) = \{0, n\}$.

Ainsi, $\mathrm{sp}(A) = \{\beta, \alpha n + \beta\}$ et les sous-espaces propres associés sont respectivement $E_0(J)$ et $E_n(J)$.

Proposition 15 Soit $\lambda \in \mathbb{K}'$ une valeur propre de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}')$ un vecteur propre associé. Comme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}') \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, λ est aussi valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, d'où l'inclusion annoncée.

Proposition 16

- Soit X un vecteur propre de A pour la valeur propre λ. On a donc $AX = \lambda X$ et, en utilisant les propriétés de la conjugaison, on en déduit facilement :

$$\overline{A}\,\overline{X} = \overline{AX} = \overline{\lambda}\,\overline{X},$$

soit $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$, puisque A est à coefficients réels. D'où $\overline{\lambda} \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$ car $\overline{X} \neq 0$.

- Soit $(X_1, \ldots, X_k)$ une base de $E_\lambda(A)$.
D'après le point précédent, les vecteurs $\overline{X_1}$, ..., $\overline{X_k}$ appartiennent à $E_{\overline{\lambda}}(A)$.
Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ une famille de scalaires telle que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \overline{X_j} = 0$.
On a alors $\overline{\sum_{j=1}^{k} \overline{\alpha_j} X_j} = 0$ puis $\sum_{j=1}^{k} \overline{\alpha_j} X_j = 0$. La famille $(X_1, \ldots, X_k)$ étant libre, on en déduit que $\overline{\alpha_1} = \cdots = \overline{\alpha_k} = 0$, d'où $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Par suite la famille $\left(\overline{X_1},\ldots,\overline{X_k}\right)$ est libre et la dimension du sous-espace propre de A pour la valeur propre $\overline{\lambda}$ est supérieure ou égale à k ; d'où $\dim E_{\lambda}(A) \leqslant \dim E_{\overline{\lambda}}(A)$.

Comme $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A, on en déduit que :

$$\dim E_{\overline{\lambda}}(A) \leqslant \dim E_{\overline{\overline{\lambda}}}(A) = \dim E_{\lambda}(A)$$

puis que $\dim E_{\lambda}(A) = \dim E_{\overline{\lambda}}(A)$.

Proposition 18 Si $u(x) = \lambda x$, on établit, par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u^k(x) = \lambda^k x.$$

Si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, on en déduit $P(u)(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k x = P(\lambda)\, x$.

Ainsi, si x est vecteur propre de u associé à la valeur propre λ, alors x est vecteur propre de $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

Exercice 12

1. On vérifie que $A^2 = 3A - 2I_3$. Le polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ convient donc.
2. On a $A(3I_3 - A) = 2I_3$.

   On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(3I_3 - A)$.
3. Soit n un entier. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe deux réels a et b, ainsi qu'un polynôme Q tels que :

   $$X^n = PQ + aX + b = (X-1)(X-2)Q + aX + b.$$

   Les réels a et b vérifient le système $\left\{ \begin{array}{ll} 1^n & = a + b \\ 2^n & = 2a + b \end{array} \right.$.

   Par conséquent, le reste de la division Euclidienne de X^n par P est $(2^n - 1)X + 2 - 2^n$.
4. Soit n un entier. D'après la question précédent, il existe un polynôme Q tel que :

   $$A^n = P(A)Q(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_n;$$

   donc :

   $$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 2(2^n - 1) & 1 - 2^n \\ 4(1 - 2^n) & 9 \cdot 2^n - 8 & 4(1 - 2^n) \\ 8(1 - 2^n) & 16(2^n - 1) & -7 \cdot 2^n + 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13

En développant $\det(XI_3 - A)$ par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\chi_A(X) = (X-1)\left((X - \cos\theta)^2 + \sin\theta^2\right) = (X-1)\left(X^2 - 2\cos\theta X + 1\right).$$

Ainsi, $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \left\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right\}$ et $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$ ou $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 1\}$ (si $\theta \equiv \pi[2\pi]$).

Exercice 14 On a $\chi_{{}^tA} = \det\left(XI_n - {}^tA\right) = \det\left({}^t(XI_n - A)\right) = \chi_A$.

Proposition 27 Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. La matrice (XI_n-A) est une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$. Son déterminant, donné par :

$$\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\left(\lambda\delta_{\sigma(1),1}-a_{\sigma(1),1}\right)\dots\left(\lambda\delta_{\sigma(n),n}-a_{\sigma(n),n}\right)$$

est une expression polynomiale en λ de degré inférieur ou égal à n.

Soit $\sigma\in S_n$ différente de l'identité. il existe alors au moins deux éléments distincts i et j de $[\![1,n]\!]$ tels que $\delta_{\sigma(i),i}$ et $\delta_{\sigma(j),j}$ soient nuls et le terme :

$$\varepsilon(\sigma)\left(\lambda\delta_{\sigma(1),1}-\alpha_{\sigma(1),1}\right)\dots\left(\lambda\delta_{\sigma(n),n}-\alpha_{\sigma(n),n}\right)$$

est de degré inférieur ou égal à $n-2$. Les termes de degré n et $n-1$ de $\chi_A(\lambda)$ sont donc ceux du produit :

$$(\lambda-\alpha_{1,1})\dots(\lambda-\alpha_{n,n}),$$

soit λ^n et $-(\alpha_{1,1}+\dots+\alpha_{n,n})\,\lambda^{n-1}$ respectivement.

On obtient finalement le terme constant de χ_A en évaluant en 0.

Exercice 15 Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. Si $\lambda\neq 0$, alors, l'opération élémentaire par blocs $C_2\leftarrow C_2+\lambda^{-1}AC_1$ donne :

$$\chi_B(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda I_n & -A\\ -A & \lambda I_n\end{vmatrix}\begin{vmatrix}I_n & \lambda^{-1}A\\ 0 & I_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda I_n & 0\\ -A & \lambda I_n-\lambda^{-1}A^2\end{vmatrix}$$

et, par conséquent :

$$\chi_B(\lambda)=\det\left(\lambda^2I_n-A^2\right)=\det(\lambda I_n-A)\det(\lambda I_n+A)=\chi_A(\lambda)(-1)^n\chi_A(-\lambda).$$

Si $\lambda=0$, on a le même résultat. Ainsi $\chi_B(X)=(-1)^n\chi_A(X)\chi_A(-X)$.

Exercice 16 Pour tout complexe λ, on a :

$$\chi_C(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda I_n-A & -B\\ -B & \lambda I_n-A\end{vmatrix}.$$

Les opérations $C_1\leftarrow C_1+C_2$ puis $L_2\leftarrow L_2-L_1$ donnent :

$$\chi_C(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda I_n-A-B & -B\\ \lambda I_n-A-B & \lambda I_n-A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda I_n-A-B & -B\\ 0 & \lambda I_n-A+B\end{vmatrix}$$

donc $\chi_C(\lambda)=\chi_{A+B}(\lambda)\chi_{A-B}(\lambda)$. puis $\chi_C(X)=\chi_{A+B}(X)\chi_{A-B}(X)$.

Exercice 17 Par l'opération $L_0\leftarrow L_0+XL_1+\dots+X^{p-1}L_{p-1}$, la matrice XI_p-A se transforme en :

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & \dots & 0 & P(X)\\ -1 & X & \dots & \dots & 0 & a_1\\ 0 & -1 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & -1 & X & a_{p-2}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & X+a_{p-1}\end{pmatrix}$$

avec $P(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. Un développement suivant la première ligne donne alors :

$$\chi_A(X) = (-1)^{p+1} P(X)(-1)^{p-1} = P(X).$$

Exercice 18 Dans une base adaptée au sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} u$, la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donc $X^{n-1}(X - \alpha_{1,1})$. Comme $\alpha_{1,1}$ est la trace de u, on obtient :

$$\chi_u(X) = X^{n-1}(X - \operatorname{Tr} u).$$

Proposition 32 Soit p la dimension de F et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F, c'est-à-dire telle que $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F.

La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est alors de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, où A est la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}_F$. Le polynôme caractéristique de u, égal à $\chi_A(X)\chi_D(X)$ est donc divisible par le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de u_F.

Proposition 33 En effet, si F est stable par u, alors χ_{u_F} divise le polynôme scindé χ_u, d'après la proposition 32 de la page 83, donc est scindé.

Proposition 34 Notons $n(\lambda)$ la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(u)$.

Comme $E_\lambda(u)$ est non réduit à $\{0\}$, on a $1 \leqslant n(\lambda)$. De plus, $E_\lambda(u)$ est stable par u et l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(u)$ est l'homothétie $\lambda \operatorname{Id}_{E_\lambda(u)}$; son polynôme caractéristique vaut donc $(X - \lambda)^{n(\lambda)}$. D'après la proposition 32, il divise $\chi_u(X)$, ce qui donne $n(\lambda) \leqslant m(\lambda)$.

Proposition 36 D'après la définition 10 de la page 82, on a :

$$\chi_u(X) = X^n - (\operatorname{Tr} u)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u.$$

D'après les hypothèses, on a aussi $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \mu_i)$. En utilisant les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé, on obtient :

$$\operatorname{Tr} u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^{n} \mu_i.$$

Comme, à l'ordre près, on a l'égalité :

$$(\mu_1, \dots, \mu_n) = (\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m(\lambda_1) \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m(\lambda_p) \text{ fois}})$$

on obtient :

$$\operatorname{Tr} u = \sum_{i=1}^{p} m(\lambda_i)\, \lambda_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m(\lambda_i)}.$$

Proposition 37 S'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u, alors la matrice de u dans cette base est diagonale donc u est diagonalisable.

Réciproquement, s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de u dans cette base soit diagonale, alors la base $\mathcal{B}$ est constituée de vecteurs propres de u.

Exercice 19 Pour $P \neq 0$, on a $\deg(P') < \deg(P)$; par suite $P' = D_n(P) = \lambda P$ est impossible avec $\lambda \neq 0$. Ainsi, $\operatorname{sp} D_n \subset \{0\}$.

Comme $\operatorname{Ker}(D_n) = \mathbb{K}_0[X]$, les vecteurs propres de D_n sont de degré nul donc il n'existe pas de base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de D_n.

Par suite, D_n n'est pas diagonalisable.

Exercice 20 Une matrice A non nulle est vecteur propre de f pour la valeur propre λ si, et seulement si, $f(A) = \lambda A$, c'est-à-dire si, et seulement si, $(\lambda - 1)A = \operatorname{Tr}(A) I_n$. Deux cas se présentent :

- $\lambda = 1$. Dans ce cas $f(A) = A$ équivaut à $\operatorname{Tr}(A) = 0$. Ainsi 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est égal à l'ensemble des matrices de trace nulle. Il s'agit du noyau de la forme linéaire non nulle Tr donc d'un hyperplan.
- $\lambda \neq 1$. Dans ce cas $f(A) = \lambda A$ entraîne $A \in \operatorname{Vect}(I_n)$.
  Comme $f(I_n) = (n+1) I_n$, on en déduit que $n+1$ est valeur propre de f, de sous-espace propre associé $\operatorname{Vect}(I_n)$.

Comme $I_n \notin \mathcal{H}$ et que $\mathcal{H}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on sait qu'alors :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{H} \oplus \operatorname{Vect}(I_n).$$

Ainsi, en réunissant une base de $\mathcal{H}$ et une base de $\operatorname{Vect}(I_n)$, on obtient une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de f.

En conclusion, f est diagonalisable.

Proposition 38

- Soit p un projecteur de E. On a $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$. Donc, si l'on réunit une base de $\operatorname{Ker} p$ et une base de $\operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$, on obtient une base de E constituée de vecteurs propres de p. Ainsi p est diagonalisable.
  On peut même préciser que le spectre de p est $\{0, 1\}$ sauf si $p = 0$ (auquel cas $\operatorname{sp}(p) = \{0\}$) ou $p = \operatorname{Id}_E$ (auquel cas $\operatorname{sp}(p) = \{1\}$).
- Soit s une symétrie de E. On a $E = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$. Donc, si l'on réunit une base de $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$ et une base de $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$, on obtient une base de E constituée de vecteurs propres de s. Ainsi, s est diagonalisable.
  On peut même préciser que son spectre est $\{-1, 1\}$ sauf si $s = \operatorname{Id}$ (auquel cas $\operatorname{sp}(s) = \{1\}$) ou $s = -\operatorname{Id}_E$ (auquel cas $\operatorname{sp}(s) = \{-1\}$).

Exercice 21

- Pour le calcul de $\chi_A(X)$, notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice $XI_3 - A$. L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 - C_3$ donne :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -3 & -2 \\ X-1 & X-5 & -2 \\ 1-X & 3 & X \end{vmatrix}.$$

En notant cette fois L_1, L_2 et L_3 les lignes du nouveau déterminant, les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ donnent :

$$\chi_A(X) = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)^2.$$

Ainsi, $\mathrm{sp}(A) = \{1, 2\}$.

- On obtient le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 en résolvant le système $AX = X$ soit :

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0. \end{cases}$$

Notons E_1, E_2 et E_3 les équations de ce système. En effectuant les opérations $E_2 \leftarrow E_2 - E_1$ et $E_3 \leftarrow E_3 + E_1$, on montre que ce système est équivalent à $x = y = -z$. Ainsi $E_1(A) = \mathbb{K}v_1$, où :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

L'étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 2 conduit au système :

$$\begin{cases} -2x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0, \end{cases}$$

équivalent à $2x - 3y - 2z = 0$. On obtient $E_2(A) = \mathbb{K}v_2 \oplus \mathbb{K}v_3$ où :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Comme les sous-espaces propres sont en somme directe d'après la proposition 6 de la page 69, $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une famille libre donc une base de vecteurs propres. Ainsi, la matrice A est diagonalisable.
La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{C}$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc conclure que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition 41 D'après la proposition 6 de la page 69, la somme $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ est directe.

- Supposons (i). Puisqu'il existe une base de vecteurs propres de u, la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ contient E, ce qui implique (ii).

- La somme $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ étant directe, on a :

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u).$$

  On en déduit que $(ii) \Rightarrow (iii)$.
- Supposons (iii). En réunissant des bases de chaque sous-espace propre de u, on obtient, d'après la proposition 6 de la page 69, une famille libre de n vecteurs propres de u ; ce qui prouve (i).

Corollaire 43 Comme $\deg(\chi_u) = n$, l'endomorphisme u possède n valeurs distinctes si, et seulement si, χ_u est scindé à racines simples.

D'après le corollaire 35 de la page 85, chaque sous-espace propre est alors de dimension 1.

Si $\mathrm{sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, on a donc $\sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i}(u) = n = \dim E$. On conclut avec la proposition 41 de la page 88.

Exercice 22 Le polynôme caractéristique de A, $(X-1)(X-4)(X-6)$ est scindé simple donc A est diagonalisable.

Théorème 44 On pose $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda(u)$.

D'après la proposition 41, u est diagonalisable si, et seulement si, $F = E$ donc si, et seulement si, $\dim F = \dim E$. Or, d'après la proposition 34, pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$, on a $\dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$. Ainsi, :

$$\dim F = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} m(\lambda) \leqslant \deg(\chi_u) = \dim E.$$

Par suite, u est diagonalisable si, et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(u) \quad \dim E_\lambda(u) = m(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} m(\lambda) = \deg(\chi_u);$$

c'est-à-dire si, et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(u) \quad \dim E_\lambda(u) = m(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \chi_u \text{ est scindé.}$$

Exercice 23 On a $\chi_A = (X-1)^2(X+1)$; ainsi χ_A est scindé, -1 est valeur propre simple et 1 est valeur propre double.

D'après le corollaire 35 de la page 85, on a $\dim E_{-1}(A) = 1$. D'après le corollaire 45 de la page 91, la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, $\dim E_1(A) = 2$.

En appliquant le théorème du rang, cela équivaut à :

$$\mathrm{rg}(A - I) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - \dim E_1(A) = 1.$$

Comme $A - I = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{rg}(A-I) = 1$ si, et seulement si, la deuxième colonne est proportionnelle à la dernière, ce qui équivaut à $a = 0$.

Exercice 24 En revenant à la définition, on a $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad B_{i,j} = A_{n+1-i,n+1-j}$.
On passe donc de A à B par une « symétrie centrale ».

Théorème 48 D'après la proposition 46 de la page 93, il est équivalent d'établir le résultat pour les matrices ou pour les endomorphismes.

- Si un endomorphisme u est trigonalisable, alors son polynôme caractéristique est égal à celui d'une matrice triangulaire supérieure ; il est donc scindé sur $\mathbb{K}$, d'après la proposition 25 de la page 79.
- Montrons la réciproque par récurrence.

  Pour $n = 1$ il n'y a rien à prouver.

  Supposons le résultat vrai au rang $n \geqslant 1$ et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\dim E = n+1$ et χ_u soit scindé.

  Comme χ_u est scindé il possède une racine. Par conséquent, il existe $\lambda \in \operatorname{sp}(u)$ et x un vecteur propre associé. Complétons x en une base $\mathcal{B}$ de E de sorte que :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

  où le bloc nul est une colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

  En développant le polynôme caractéristique de u par rapport à la première colonne, on obtient $\chi_u(X) = (X-\lambda)\chi_A(X)$. Comme χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, on en déduit que χ_A l'est également. D'après l'hypothèse de récurrence, l'endomorphisme canoniquement associé à A est trigonalisable, il existe donc $P_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P_n^{-1}AP_n$ soit triangulaire supérieure.

  Notons P_{n+1} la matrice par blocs $P_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix}$. Il s'agit d'une matrice inversible d'inverse $P_{n+1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n^{-1} \end{pmatrix}$.

  Un produit par blocs donne alors :

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{-1}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\,P_{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & P_n^{-1}A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & LP_n \\ 0 & P_n^{-1}AP_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  Ainsi $P_{n+1}^{-1}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\,P_{n+1}$ est triangulaire supérieure, ce qui permet de conclure que u est trigonalisable.

Exercice 25 Le polynôme caractéristique de u_F divise celui de u qui est scindé. Ainsi, le polynôme caractéristique de u_F est scindé donc u_F est trigonalisable.

Exercice 26 Comme cela a été fait en remarque, il existe une base (u,v,w) telle que, en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^3$ à cette base, on ait :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \mu & \beta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

On pose $w' = au + bv + cw$ avec c non nul de sorte que la famille (u,v,w') soit une base.

On a alors :

$f(w') = a\lambda u + b\mu v + c(\alpha u + \beta v + \mu w) = (a\lambda + c\alpha - a\mu)u + (b\mu + c\beta - b\mu)v + \mu w'$.

Ainsi, on prend $a = \frac{c\alpha}{\mu - \lambda}$, de sorte que la matrice de f dans la base (u,v,w') soit égale à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & c\beta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Comme $\dim E_\mu(f) = 1$, on a $\beta \neq 0$ et l'on prend $c = 1/\beta$ pour obtenir la forme annoncée.

Exercice 27

1. Pour le calcul de $\chi_A(X)$, notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice $XI_3 - A$. L'opération $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 - C_3$ donne :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 2X & -3 \\ 1 & X & -6 \\ -2 & -X & X+10 \end{vmatrix}.$$

En notant cette fois L_1, L_2 et L_3 les lignes du nouveau déterminant, les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donnent :

$$\chi_A(X) = X \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & X+4 \end{vmatrix} = X(X+1)^2.$$

Une liste de valeurs propres de A est donc $(0,-1,-1)$. Comme la matrice :

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{pmatrix}$$

n'est pas de rang 1, on a $\dim E_{-1}(A) \neq 2$.

D'après le corollaire 45 de la page 91, la matrice A n'est pas diagonalisable.

2. Comme χ_A est scindé, la matrice A est trigonalisable, d'après le théorème 48 de la page 93. En étudiant les systèmes $AX = 0$ et $AX = -X$, on obtient facilement que :

- $E_0(A) = \mathrm{Vect}(u)$, avec $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
- $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}(v)$, avec $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

On peut compléter (u,v) en une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ à l'aide de $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En notant $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ à la base (u,v,w), il existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{K}^3$ tel que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

On peut soit calculer $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ et obtenir, par un simple calcul matriciel, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On peut aussi obtenir $Aw = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u - v - w$ par résolution d'un système ; on en déduit que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 28

1. On a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-14 & -18 & -18 \\ 6 & X+7 & 9 \\ 2 & 3 & X+1 \end{vmatrix}$. En retranchant la deuxième colonne de la troisième, il vient :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-14 & -18 & 0 \\ 6 & X+7 & -X+2 \\ 2 & 3 & X-2 \end{vmatrix}.$$

En ajoutant la dernière ligne à la deuxième, puis en développant par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-14 & -18 & 0 \\ 8 & X+10 & 0 \\ 2 & 3 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} X-14 & -18 \\ 8 & X+10 \end{vmatrix}$$
$$= (X-2)\left(X^2-4X+4\right) = (X-2)^3.$$

Ainsi χ_A est scindé et admet 2 pour racine triple. Comme $A \neq 2I_3$, A n'est pas diagonalisable, d'après l'exemple 1 de la page 88.

Comme χ_A est scindé, la matrice A est trigonalisable.

2. On cherche une base (U,V,W) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ telle que :

$$(\star)\quad \left\{\begin{array}{lcl}(A-2I_3)\,U &=& 0\\ (A-2I_3)\,V &=& 0\\ (A-2I_3)\,W &=& V.\end{array}\right.$$

Les vecteurs U et V sont donc à chercher dans le sous-espace propre de A pour la valeur propre 2. Comme $A-2I_3=\begin{pmatrix}12&18&18\\-6&-9&-9\\-2&-3&-3\end{pmatrix}$ est de rang 1, l'espace propre $E_2(A)$ est le plan de $\mathbb{K}^3$ d'équation $2x+3y+3z=0$.

De plus, le vecteur V doit appartenir à $\mathrm{Im}(A-2I_3)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}6\\-3\\-1\end{pmatrix}$.

Prenons $W=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}12\\-6\\-2\end{pmatrix}$, puis $U=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs U et V forment une base du plan $E_2(A)$ d'équation $2x+3y+3z=0$ et $W\notin E_2(A)$ donc la famille (U,V,W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $(\star)$.

Si l'on pose $P=\begin{pmatrix}0&12&1\\1&-6&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}$, alors $P\in\mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ et :

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Exercice 29

1. Le résultat est immédiat si E est de dimension 1.

Supposons désormais le résultat vrai pour tout espace vectoriel de dimension $\dim E-1$ et considérons un endomorphisme u annulé par un polynôme scindé $P(X)=\prod_{k=1}^{m}(X-\beta_k)$. La relation $(u-\beta_1\,\mathrm{Id}_E)\circ\cdots\circ(u-\beta_m\,\mathrm{Id}_E)=0$ implique alors qu'il existe $i\in[\![1,m]\!]$ tel que $(u-\beta_i\,\mathrm{Id}_E)$ soit non inversible. L'endomorphisme non injectif $(u-\beta_i\,\mathrm{Id}_E)$ est alors d'image F strictement contenue dans E. Choisissons alors un hyperplan H de E contenant F.

Comme $F=\mathrm{Im}(u-\beta_i\,\mathrm{Id}_E)\subset H$, l'hyperplan H est stable par $(u-\beta_i\,\mathrm{Id}_E)$ et donc par u. L'endomorphisme induit u_H vérifie $P(u_H)=0$; il est donc annulé par un polynôme scindé et, par hypothèse de récurrence, trigonalisable.

Il existe donc une base $\mathcal{B}'$ de H dans laquelle la matrice de u_H est triangulaire supérieure. Dans toute base $\mathcal{B}$ de E, obtenue en complétant $\mathcal{B}'$ par un seul vecteur, la matrice de u est triangulaire supérieure ; ce qui conclut la récurrence.

2. Supposons que la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ soit de la forme :
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \dots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$
Notons alors F_i le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$. Les relations
$$(u - \alpha_i \mathrm{Id}_E)(e_i) \in F_{i-1} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1, i-1]\!] \quad u(e_k) \in F_{i-1}$$
montrent que l'on a $(u - \alpha_i \mathrm{Id}_E)(F_i) \subset F_{i-1}$ pour tout i. Le sous-espace vectoriel :
$$(u - \alpha_1 \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (u - \alpha_n \mathrm{Id}_E)(F_n)$$
est donc contenu dans :
$$(u - \alpha_1 \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (u - \alpha_{n-1} \mathrm{Id}_E)(F_{n-1})$$
et par itération dans $(u - \alpha_1 \mathrm{Id}_E)(F_1)$ qui est réduit à $\{0\}$. On a donc $\chi_u(u) = 0$.
3. D'après la question précédente et le théorème 48 de la page 93, si u est un endomorphisme trigonalisable de E, alors il est annulé par un polynôme scindé. La réciproque ayant été montrée à la première question, l'équivalence est prouvée.

Exercice 30

1. Comme e_λ est vecteur propre de D pour la valeur propre λ, en appliquant la proposition 18, on obtient :
$$P\big(D\big)(e_\lambda) = P(\lambda)\, e_\lambda.$$
2. Soit P un polynôme annulateur de D. Comme les fonctions e_λ sont toutes non nulles, on a, d'après la première question :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad P(\lambda) = 0.$$
Le polynôme P, ayant une infinité de racines, est donc nul.
Par conséquent, l'idéal annulateur de D soit réduit au polynôme nul.

Proposition 54

1. On considère φ_u l'application linéaire qui à tout polynôme P associe $P(u)$.
Comme $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie (égale à n^2 si $\dim E = n$), le théorème du rang implique la non injectivité de φ_u puisque $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.
2. Il suffit d'appliquer ce qui précède à l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Exercice 31

1. - Si $p = 0$, on a $\pi_p = X$.
   - Si $p = \mathrm{Id}_E$, on a $\pi_p = X - 1$.
   - Dans les autres cas, comme p n'est pas une homothétie et vérifie $p^2 = p$, on a $\pi_p = X^2 - X$.
2. - Si $s = \mathrm{Id}_E$, on a $\pi_s = X - 1$.
   - Si $s = -\mathrm{Id}_E$, on a $\pi_s = X + 1$.
   - Dans les autres cas, comme s n'est pas une homothétie et vérifie $s^2 = \mathrm{Id}_E$, on a $\pi_s = X^2 - 1$.

Exercice 32

- On sait, d'après la proposition 20, que toute valeur propre de u est racine de π_u.
- Pour la réciproque, on raisonne par l'absurde. Soit μ une racine de π_u non valeur propre de u. On peut écrire : $\pi_u = (X-\mu)\,P$, avec $\deg(P) < \deg(\pi_u)$.
  Comme $\mu \notin \mathrm{sp}(u)$, on a $(u - \mu\,\mathrm{Id}_E) \in \mathcal{GL}(E)$. On déduit alors de :
  $$(u-\mu\,\mathrm{Id}_E)\circ P(u) = \pi_u(u) = 0$$
  que $P(u) = 0$. Comme π_u est non nul, P non plus car $\mathbb{K}[X]$ est intègre. Or $\deg(P) < \deg(\pi_u)$, ce qui contredit le caractère minimal de π_u.
  En conclusion, toute racine de π_u est valeur propre de u.

Proposition 55 La famille $\mathcal{F} = \left(u^k\right)_{k\in[\![0,d-1]\!]}$ est bien sûr une famille d'endomorphismes de $\mathbb{K}[u]$.

- Soit $(\lambda_0,\ldots,\lambda_{d-1}) \in \mathbb{K}^d \setminus \{(0,\ldots,0)\}$ tel que $\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k u^k = 0$.
  Le polynôme $P = \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k X^k$ est alors un polynôme annulateur non nul de u, de degré strictement plus petit que $d = \deg \pi_u$, ce qui contredit la définition du polynôme minimal π_u. La famille $\mathcal{F}$ est donc libre.
- Soit $v \in \mathbb{K}[u]$; il existe donc $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$. La division euclidienne de P par π_u s'écrit :
  $$P = Q\pi_u + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < d.$$
  En appliquant le morphisme d'algèbres φ_u, on obtient :
  $$v = P(u) = Q(u)\circ\pi_u(u) + R(u) = R(u),$$
  puisque $\pi_u(u) = 0$. Comme $\deg(R) < d$, on a $v \in \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{d-1}\right)$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[u]$.

En conclusion, la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Exercice 33

1. - On a immédiatement :
     $$\forall k \in [\![0, p-2]\!] \quad AE_k = E_{k+1},$$
     d'où l'on déduit par récurrence :
     $$\forall k \in [\![0, p-1]\!] \quad A^k E_0 = E_k.$$
   - La famille $\left(A^k E_0\right)_{k\in[\![0,p-1]\!]}$ est donc libre. Par suite, si $Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ est un polynôme non nul, on a $Q(A)\,E_0 \neq 0$ et donc $Q(A) \neq 0$.
     Comme il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à $p-1$, on a $\deg(\pi_A) \geqslant p$.
2. - On a $AE_{p-1} = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k E_k$, c'est-à-dire :
     $$A^p E_0 = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k A^k E_0.$$
     Par suite, $P(A)\,E_0 = 0$.

- Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on a $P(A) E_k = P(A) A^k E_0 = A^k P(A) E_0 = 0$, en utilisant la commutativité de $\mathbb{K}[A]$.
  Comme $(E_0, \ldots, E_{p-1})$ est une base de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on en déduit $P(A) = 0$. Le polynôme P est un polynôme unitaire de degré p, annulateur de A. D'après la première question, on a $\pi_A = P$.

Exercice 34 Notons $F_x = \text{Vect}\Big(\big(u^k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}\Big)$.

- Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant x, on a :
  $$\forall k \in \mathbb{N} \quad u^k(x) \in F,$$
  donc $F_x \subset F$. Comme F_x est stable par u et contient x, F_x est le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant x.
- La famille de F_x, $\big(u^k(x)\big)_{0\leqslant k\leqslant p}$, contient p éléments, il suffit donc de montrer qu'elle est génératrice pour conclure.
  Soit $y \in F_x$. Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(u)(x)$.
  Par ailleurs, la famille à $p+1$ éléments, $\big(u^k(x)\big)_{0\leqslant k\leqslant p}$, est liée donc il existe $T \in \mathbb{K}_p[X]$ non nul tel que $T(u)(x) = 0$.
  On effectue la division euclidienne de P par T :
  $$P = QT + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < p.$$
  On en déduit $y = P(u)(x) = Q(u) \circ T(u)(x) + R(u)(x)$. Comme $T(u)(x) = 0$ et $\deg(R) < p-1$, on a alors $y \in \text{Vect}\Big(\big(u^k(x)\big)_{0\leqslant k\leqslant p-1}\Big)$.
  En conclusion, la famille $\big(u^k(x)\big)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ engendre F_x, c'est est donc une base.

Théorème 56 Soit $x \in E\setminus\{0\}$ et F_x le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant x dont on note p la dimension. D'après le lemme précédent, $\big(u^k(x)\big)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est une base de F_x donc il existe $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $u^p(x) = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)$. Il en résulte que la matrice de l'endomorphisme induit u_{F_x} par u sur F_x dans la base $\big(u^k(x)\big)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est une matrice compagnon.

Or, d'après les exercices 17 et 33, si A est une matrice compagnon, alors $\pi_A = \chi_A$. Par conséquent, $\pi_{u_{F_x}} = \chi_{u_{F_x}}$ D'après la proposition 32, χ_{u_x} divise χ_u donc $\chi_u(u_x) = 0$. Comme $x \in E_x$, on peut écrire :
$$\chi_u(u)(x) = \chi_u(u_x)(x) = 0.$$
Cette dernière égalité a été établie pour tout $x \in E\setminus\{0\}$. On en déduit que $\chi_u(u) = 0$.

Exercice 35 On a vu que $\chi_A(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$. En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient $A^3 - 3A^2 + 3A - 2I_3 = 0$. On en déduit :
$$A\left(\frac{A^2}{2} - \frac{3A}{2} + \frac{3I_3}{2}\right) = I_3.$$
Par suite, A est inversible et l'on a $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 - 3A + 3I_3\right)$.

Théorème 58 On procède par récurrence sur $r \geqslant 2$.

- Montrons le résultat pour $r = 2$.
  Soit P_1, P_2 deux polynômes premiers entre eux et $P = P_1 P_2$.
  * Comme $P(u) = P_1(u) \circ P_2(u)$, on a $\operatorname{Ker} P_2(u) \subset \operatorname{Ker} P(u)$. Par commutativité de $\mathbb{K}[u]$, on a aussi $P(u) = P_2(u) \circ P_1(u)$ puis $\operatorname{Ker} P_1(u) \subset \operatorname{Ker} P(u)$.
    Par suite, $\operatorname{Ker} P_1(u) + \operatorname{Ker} P_2(u) \subset \operatorname{Ker} P(u)$.
  * D'après le théorème de Bézout, il existe $(U_1, U_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P_1 U_1 + P_2 U_2 = 1$; on a donc $P_1(u) \circ U_1(u) + P_2(u) \circ U_2(u) = \mathrm{Id}_E$. Soit $x \in \operatorname{Ker} P(u)$; posons :
    $$x_1 = P_2(u) \circ U_2(u)(x) \quad \text{et} \quad x_2 = P_1(u) \circ U_1(u)(x).$$
    On a alors $x = x_1 + x_2$ et :
    $$\begin{aligned} P_1(u)(x_1) &= P_1(u) \circ P_2(u) \circ U_2(u)(x) = U_2(u) \circ P_1(u) \circ P_2(u)(x) \\ &= U_2(u) \circ P(u)(x) = 0. \end{aligned}$$
    donc $x_1 \in \operatorname{Ker} P_1(u)$ et, de même $x_2 \in \operatorname{Ker} P_2(u)$. On a donc établi l'inclusion :
    $$\operatorname{Ker} P(u) \subset \operatorname{Ker} P_1(u) + \operatorname{Ker} P_2(u)$$
    et, avec le point précédent, l'égalité $\operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker} P_1(u) + \operatorname{Ker} P_2(u)$.
  * Si $x \in \operatorname{Ker} P_1(u) \cap \operatorname{Ker} P_2(u)$, l'égalité $x = U_1(u) \circ P_1(u)(x) + U_2(u) \circ P_2(u)(x)$ montre que $x = 0$. Par suite, $\operatorname{Ker} P_1(u) \cap \operatorname{Ker} P_2(u) = \{0\}$.

  On a donc prouvé $\operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker} P_1(u) \oplus \operatorname{Ker} P_2(u)$.
- Soit $r \geqslant 3$ tel que le résultat soit vrai au rang $r-1$. Considérons $(P_1, \ldots, P_r)$, une famille de r polynômes deux à deux premiers entre eux, et $P = \prod_{k=1}^{r} P_k$.

  Posons $Q = \prod_{k=1}^{r-1} P_k$; les polynômes Q et P_r sont premiers entre eux, car si un polynôme irréductible divise Q et P_r, il divise l'un des P_k, avec $k \in [\![1, r-1]\!]$, et P_r, ce qui est contraire aux hypothèses.
  D'après le premier point, on a $\operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker} Q(u) \oplus \operatorname{Ker} P_r(u)$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $\operatorname{Ker} Q(u) = \bigoplus_{k=1}^{r-1} \operatorname{Ker} P_k(u)$.

  On en déduit $\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k(u)$, ce qui achève la récurrence.

Corollaire 59 C'est une conséquence immédiate du lemme des noyaux.

Exercice 36

- Commençons par le montrer pour $r = 2$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(U_1, U_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P_1 U_1 + P_2 U_2 = 1$.
  On a donc $P_1(u) \circ U_1(u) + P_2(u) \circ U_2(u) = \mathrm{Id}_E$ ce qui, pour tout $x \in E$ donne :
  $$x = \underbrace{P_2(u) \circ U_2(u)(x)}_{\in \operatorname{Ker} P_1(u)} + \underbrace{P_1(u) \circ U_1(u)(x)}_{\in \operatorname{Ker} P_2(u)}.$$

Ainsi, les projections associées à la décomposition :

$$\operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker} P_1(u) \oplus \operatorname{Ker} P_2(u)$$

sont les endomorphismes $(U_1P_1)(u)$ et $(U_2P_2)(u)$.

- Soit $r \geqslant 3$ tel que le résultat soit vrai au rang $r-1$. Considérons $(P_1, \ldots, P_r)$, une famille de r polynômes deux à deux premiers entre eux, et $P = \prod_{k=1}^{r} P_k$ tel que $P(u) = 0$.

  On pose alors $Q = \prod_{k=1}^{r-1} P_k$; les polynômes Q et P_r sont premiers entre eux (car si un polynôme irréductible divise Q et P_r, il divise l'un des P_k, avec $k \in [\![1, r-1]\!]$, et P_r, ce qui est contraire aux hypothèses).

  D'après le premier point, on a $E = \operatorname{Ker} Q(u) \oplus \operatorname{Ker} P_r(u)$ et il existe des polynômes Q_1 et Q_2 tels que $Q_1(u)$ soit la projection sur $\operatorname{Ker} Q(u)$ et $Q_2(u)$, celle sur $\operatorname{Ker} P_r(u)$.

  Si l'on considère $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit pas u sur $\operatorname{Ker} Q(u)$, alors $Q(\tilde{u}) = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $\operatorname{Ker} Q(\tilde{u}) = \bigoplus_{k=1}^{r-1} \operatorname{Ker} P_k(\tilde{u})$ et, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe un polynôme R_i tel que , $R_i(\tilde{u})$ soit la projection sur $\operatorname{Ker} P_i(\tilde{u})$.

  Soit $x \in E$. Considérons sa décomposition $x = x_1 + \cdots + x_r$ dans la somme directe $\bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k(u)$. Le vecteur $x' = x_1 + \cdots + x_{r-1}$ appartient à $\operatorname{Ker} Q(\tilde{u}) = \operatorname{Ker} Q(u)$. De plus, pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$, x_i appartient à $\operatorname{Ker} P_i(u) = \operatorname{Ker} P_i(\tilde{u})$ (car $\operatorname{Ker} P_i(\tilde{u}) = \operatorname{Ker} P_i(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u)$) donc :

  $$x_i = R_i(\tilde{u})(x') = R_i(u)(x') = R_i(u)\left(Q_1(u)\right).$$

  Par conséquent, pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$, la projection sur $\operatorname{Ker} P_i(u)$ est $R_iQ(u)$; c'est donc un polynôme en u. Celle sur $\operatorname{Ker} P_r(u)$ étant égale à $Q_2(u)$, cela achève la récurrence.

Théorème 60

- Supposons (i) et prouvons (ii). Comme u est diagonalisable, on a :

  $$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) \quad \text{avec} \quad \operatorname{sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}.$$

  Considérons le polynôme scindé à racines simples $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$. L'endomorphisme $P(u)$ coïncide avec l'endomorphisme nul sur tous les $E_{\lambda_i}(u)$; ils sont donc égaux ; ce qui prouve que P est un polynôme annulateur de u.

  Ainsi, l'endomorphisme u est annulé par le polynôme P qui est scindé simple.
- L'implication $(ii) \Longrightarrow (iii)$ est évidente, puisque tout diviseur d'un polynôme scindé à racines simples est scindé à racines simples et que le polynôme minimal de u divise tout polynôme annulateur de u.

- Supposons (iii) et prouvons (i). Soit $\pi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$ le polynôme minimal de u ; on a vu dans l'exercice 32 de la page 97 que $\mathrm{sp}\,(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.
  Comme les λ_i sont deux à deux distincts, les polynômes $X - \lambda_i$ sont deux à deux premiers entre eux. D'après le lemme des noyaux, on a $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = E$; par suite, u est diagonalisable, ce qui établit (i).

Corollaire 61 En effet, d'après le théorème 60 le polynôme minimal π_u de u est scindé à racines simples et, comme $\pi_u(u_F) = 0$, on déduit du même théorème que u_F est diagonalisable.

Exercice 37 Le sens direct est clair puisque dans une base de diagonalisation simultanée, les matrices des endomorphismes sont diagonales donc commutent deux à deux.

Montrons la réciproque par récurrence sur la dimension de E.

Elle est évidente si E est de dimension 1.

Soit $n \geqslant 2$. Supposons le résultat démontré sur tout espace vectoriel de dimension strictement inférieur à n et considérons un espace vectoriel E de dimension n ainsi qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'endomorphismes de E diagonalisables et commutant deux à deux.

- Si tous les u_i sont des homothéties, n'importe quelle base de E est une base de diagonalisation commune aux u_i.
- Sinon, il existe $i_0 \in I$ tel que u_{i_0} ne soit pas une homothétie. On peut alors écrire $E = F \oplus G$ où F est un sous-espace vectoriel propre de u_{i_0} et G la somme non réduite à $\{0\}$ des autres sous-espaces vectoriels propres de cet endomorphisme. Ces sous-espaces vectoriels sont stables par u_i pour tout i par hypothèse de commutation. Les familles $(u'_i)_{i\in I}$ et $(u''_i)_{i\in I}$ d'endomorphismes induits sur F et G sont alors formées d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Les dimensions de F et G étant strictement inférieures à celle de E, elles possèdent des bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ de diagonalisation simultanée. La réunion $\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ fournit une base de diagonalisation simultanée des $(u_i)_{i\in I}$.

Proposition 62

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice r. Montrons, par récurrence sur n, que son polynôme caractéristique est X^n.
  Si $n = 1$, alors, comme $\mathrm{Ker}\, u \neq \{0\}$, $u = 0$ puis $\chi_u = X$.
  Supposons le résultat vérifié pour les espaces vectoriels de dimension strictement inférieure à celle de E.
  Comme u n'est pas injectif, il existe un vecteur x non nul appartenant au noyau de u. Complétons x en une base $\mathcal{B}$ de E, de sorte que :
  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & A \end{pmatrix},$$
  où $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

On vérifie alors que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^r) = \begin{pmatrix} 0 & L' \\ 0 & A^r \end{pmatrix}$. Ainsi $A^r = 0$ donc l'endomorphisme canoniquement associé à A est nilpotent. Par hypothèse de récurrence, on a $\chi_A = X^{n-1}$, ce qui permet de conclure car $\chi_u = X \times \chi_A(X)$.

- Si χ_u est égal à X^n, l'endomorphisme u est scindé donc il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Comme la diagonale de cette matrice est formée de la liste des valeurs propres de u, cette matrice est triangulaire supérieure stricte.
- Supposons qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle la matrice A de u est triangulaire supérieure stricte. Ainsi, $u(e_1) = 0$ et :

$$\forall i \in [\![2, n]\!] \quad u(e_i) \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_{i-1})\,.$$

Par suite, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $u^{i-1}(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1)$ puis $u^i(e_i) = 0$. On en déduit que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u^n(e_i) = 0$, et donc que $u^n = 0$.

Exercice 38 Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k u^k(x_0) = 0$.

On a alors $u^{r-1}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k u^k(x_0)\right) = \alpha_0 u^{r-1}(x_0) = 0$ et donc $\alpha_0 = 0$. En appliquant alors u^{r-2}, il vient $\alpha_1 u^{r-1}(x_0) = 0$ et donc $\alpha_1 = 0$.

On montre ainsi que $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$ et donc que la famille $\left(u^k(x_0)\right)_{0 \leqslant k \leqslant r-1}$ est libre.

Exercice 39

1. D'après l'exercice précédent, la famille $\left(u^k(x_0)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est libre. Cette famille comportant n éléments, c'est une base de E.
2. Soit $x = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_l u^l(x_0)$. On a :

$$u^k(x) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell u^{k+\ell}(x_0) = \sum_{\ell=0}^{n-k-1} \alpha_l u^{k+l}(x_0).$$

Donc $x \in \mathrm{Ker}\, u^k$ si, et seulement si, pour tout $i \in [\![0, n-k-1]\!]$, le scalaire α_i est nul. Le sous-espace $\mathrm{Ker}\, u^k$ est donc engendré par la famille libre $\left(u^\ell(x_0)\right)_{\ell \geqslant n-k}$, ce qui prouve qu'il est de dimension k.

3. Soit F un sous-espace vectoriel stable par u de dimension $k \in [\![0, n]\!]$. L'endomorphisme u_F induit par u est alors nilpotent donc vérifie $u_F^k = 0$. Par conséquent, F est inclus dans $\mathrm{Ker}(u^k)$.

Pour des raisons de dimension, on a donc $F = \mathrm{Ker}\, u^k$.

Exercice 40 Prouvons cette assertion par récurrence sur n.

Elle est évidente si $n = 1$ puisque, dans ce cas, $\mathcal{L}(E) = \mathbb{K}\,\mathrm{Id}_E$ donc tout endomorphisme nilpotent est nul.

Supposons-la acquise pour toute dimension strictement inférieure à n. L'espace $F = \operatorname{Im} u_n$ est de dimension $r < n$ puisque u_n n'est pas bijective et est stable par u_i pour tout i. La famille $(u'_1, \dots, u'_r)$ des endomorphismes induits vérifiant les mêmes hypothèses, il vient donc $u'_1 \circ \cdots \circ u'_r = 0$. Cela implique $u'_1 \circ \cdots \circ u'_{n-1} = 0$ et, vu la définition de F :

$$u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0.$$

Théorème 68 Si u est annulé par un polynôme scindé $\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont distincts deux à deux, alors le lemme des noyaux permet d'écrire :

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} (u - \lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}.$$

Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, le sous-espace vectoriel $E_i = \operatorname{Ker} (u - \lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}$ est stable par u et l'endomorphisme u_i induit par u sur E_i vérifie $(u_i - \lambda_i \operatorname{Id}_{E_i})^{\alpha_i} = 0$. Ainsi, l'endomorphisme $n_i = u_i - \lambda_i \operatorname{Id}_{E_i}$ est nilpotent et u_i est la somme de l'homothétie $\lambda_i \operatorname{Id}_{E_i}$ et d'un endomorphismes nilpotent.

L'endomorphisme induit u_i est donc la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

S'entraîner et approfondir

2.1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.
Prouver que si $\operatorname{Ker} u$ possède un supplémentaire F stable par u, alors $F = \operatorname{Im} u$.

2.2 Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les endomorphismes :

$$u_\sigma : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right)$$

avec $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

2.3 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Déterminer les endomorphismes stabilisant tous les hyperplans de E.

2.4 Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{L}_F(E)$ l'ensemble des endomorphismes stabilisant F.

1. Montrer que l'application $\varphi : u \mapsto u_F$ un morphisme d'algèbres de $\mathcal{L}_F(E)$ vers $\mathcal{L}(F)$.
2. On suppose F de dimension finie. Montrer que l'inverse de tout élément inversible u de $\mathcal{L}_F(E)$ stabilise aussi F et que l'on a :
$$(u^{-1})_F = (u_F)^{-1}.$$
3. En considérant l'endomorphisme de $\mathbb{K}(X)$ qui à P associe XP, prouver que le résultat de la question précédente est faux si F n'est pas de dimension finie.
4. On suppose que F possède un supplémentaire.
Montrer que le morphisme $u \mapsto u_F$ de $\mathcal{L}_F(E)$ vers $\mathcal{L}(F)$ est surjectif.

★ **2.5** Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que v soit nilpotent et vérifie $u \circ v = v \circ u$. Montrer que l'on a :

$$\det(u + v) = \det u.$$

2.6 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Déterminer le polynôme minimal de A.

2.7 Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1. La matrice B est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer le polynôme minimal de la matrice B.
3. Montrer que matrice B est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2.8 Diagonaliser la matrice réelle de taille n :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(les éléments d'indices (i, j) avec $|i - j| = 1$ valent 1, les autres sont nuls).

Indication : Il s'agit d'un exercice classique où il est difficile d'obtenir le polynôme caractéristique de A sous forme factorisé. On déterminera donc les éléments propres par la résolution de systèmes.

2.9 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A(A^2 + A + I_n) = 0$. Montrer que le rang de A est pair.

2.10 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^3 - 3A - 5I_n = 0$$

Montrer que A est de déterminant strictement positif.

2.11 *(Polytechnique 2015)*

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'équation $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.12 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

On suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $A^p = I_2$.

Montrer que $A^{12} = I_2$.

⋆ **2.13** Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $u^2 + u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = 0$.

1. Soit F un sous-espace stable par u et $x \notin F$. Montrer que $\mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est un plan, stable par u et en somme directe avec F.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et, qu'en particulier, n est pair.

2.14 On dit qu'un nombre complexe α est algébrique s'il est racine d'un polynôme unitaire (donc non nul) $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer qu'un nombre complexe est algébrique si, et seulement s'il est valeur propre d'une matrice à coefficients rationnels.
2. En déduire que si un nombre complexe α est algébrique, alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$, le nombre complexe α^r est aussi algébrique.

On pourra utiliser le résultat sur les matrices compagnons de l'exercice 17.

2.15 1. Montrer qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

2. Déterminer une telle famille.

On pourra utiliser l'endomorphisme $P(X) \mapsto P(X+1)$ *de* $\mathbb{K}[X]$

2.16 Déterminer les sous-espaces stables par l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.17 Soit a un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E. On considère les endomorphismes $M_a : u \mapsto a \circ u$ et $ad(a) : u \mapsto a \circ u - u \circ a$ de $\mathcal{L}(E)$.

1. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme M_a en fonction de ceux de a. En déduire que l'endomorphisme M_a est diagonalisable, si, et seulement si, a l'est.
2. Montrer que si a est diagonalisable, alors l'endomorphisme $ad(a)$ l'est aussi et préciser ses valeurs propres en fonction de celles de a.
3. Montrer que si a est nilpotent, alors M_a et $ad(a)$ le sont également.

2.18 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n et λ une valeur propre de u. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^2$,

(ii) $E_\lambda(u) \oplus \operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = E$,

(iii) $E_\lambda(u)$ possède un supplémentaire stable par u,

(iv) la dimension de $E_\lambda(u)$ est égale à la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de u,

(v) λ est une racine simple du polynôme minimal de u.

2.19 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A.
2. Discuter la diagonalisabilité de B en fonction de celle de A.

2.20 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice par blocs :

$$B = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

est diagonalisable si, et seulement si, A l'est.

2.21 Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose A inversible. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. Soit $r \in [\![0, n]\!]$. Prouver que $\chi_{J_r B} = \chi_{B J_r}$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. En déduire que l'on a toujours $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

2.22 Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que A et B ont une valeur propre commune si, et seulement s'il existe une matrice U non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AU = UB$.

2.23 *(Polytechnique 2015)*

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que s'il existe une matrice U de rang r tel que $AU = UB$, alors les polynômes caractéristiques de A et B ont un facteur commun de degré r

2.24 Soit u et v deux endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fine..

1. On suppose que u et v commutent. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.
2. On suppose que $u \circ v - v \circ u = \alpha u$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Montrer que u est nilpotent et que u et v ont un vecteur propre commun.
3. En déduire que si $u \circ v - v \circ u \in \mathrm{Vect}(u, v)$, alors u et v ont un vecteur propre commun.

2.25 *(Polytechnique 2015)*

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer qu'elles sont simultanément trigonalisables.

2.26 Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB = BA$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

soit diagonalisable.

2.27 Montrer qu'un endomorphisme u est nilpotent si, et seulement s'il vérifie $\mathrm{Tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

2.28 *(Centrale 2015)*

Soit G un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que G est fini.
   (a) Montrer que pour tout $g \in G$, il existe un entier N_g tel que $g^{N_g} = I_n$.
   (b) Montrer que tous les éléments de G sont diagonalisables et que $\{\mathrm{Tr}\, g\,;\ g \in G\}$ est fini.
2. Établir la réciproque. *Indication : considérer une base* $(A_1, \ldots, A_p)$ *de* $\mathrm{Vect}(G)$ *et* $f : X \in G \mapsto (\mathrm{Tr}(A_1 X), \ldots, \mathrm{Tr}(A_p X))$.

Solution des exercices

2.1 Supposons que $E = F \oplus \operatorname{Ker} u$, avec F stable par u. Grâce au théorème du rang, on a $\dim F = \dim \operatorname{Im} u$.

Soit $x \in \operatorname{Im} u$. Par définition, il existe $t \in E$ tel que $x = u(t)$. Comme $F \oplus \operatorname{Ker} u$, il existe $(t_1, t_2) \in F \times \operatorname{Ker} u$ tel que $t = t_1 + t_2$. On en déduit que $x = u(t_2) \in F$ car F est stable par u. Par suite, $\operatorname{Im} u \subset F$ puis $\operatorname{Im} u = F$.

2.2 Il est clair que $\{0_E\}$, $\mathbb{R}^n$, la droite $D = \mathbb{R}(1, \ldots, 1)$ et l'hyperplan H d'équation :

$$x_1 + \cdots + x_n = 0$$

sont stables par les u_σ.

Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel de E stable par les u_σ. S'il est inclus dans D, alors il est égal à $\{0\}$ ou D. Sinon, il contient un vecteur $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ayant deux composantes $x_r \neq x_s$, avec $r < s$. Notons $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si l'on considère la transposition $\tau = (r, s)$, la stabilité de F implique que :

$$(x_r - x_s)(e_r - e_s) = x - u_\tau(x) \in F$$

puis que $e_r - e_s \in F$.

Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, il existe une permutation σ_i qui transforme r en i et s en $i+1$ donc :

$$e_i - e_{i+1} =_u \sigma_i(e_r - e_s) \in F.$$

Comme les vecteurs $e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n$ sont indépendants, ils engendrent un hyperplan, et cet hyperplan est inclus dans H, puis égal à H pour des raisons de dimension. On en déduit que F contient H ; il est donc égal à H ou $\mathbb{R}^n$.

Par conséquent, les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les endomorphismes u_σ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^n$, $D = \mathbb{R}(1, \ldots, 1)$ et H.

2.3 Il est clair que les homothéties stabilisent les hyperplans.

Réciproquement, soit u un endomorphisme stabilisant tous les hyperplans, on va prouver qu'il s'agit d'une homothétie en établissant que, pour tout vecteur $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée (voir l'exercice 1 de la page 65).

Supposons par l'absurde, qu'il existe un vecteur x non nul tel que $u(x)$ n'appartienne pas à $\mathbb{K}x$. La famille $\big(x, u(x)\big)$ est alors libre, on peut donc la compléter en une base $(x, u(x), e_3, \ldots, e_n)$ de E. L'endomorphisme u ne stabilise donc pas l'hyperplan $\operatorname{Vect}(x, e_3, \ldots, e_n)$, ce qui est absurde.

Ainsi, si u stabilise les hyperplans, alors u est une homothétie.

2.4 1. Il est évident que Id_E appartient à $\mathcal{L}_F(E)$ et que l'on a $\varphi(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_F$.

Soit $(u,v) \in \mathcal{L}_F(E)^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.

Pour tout $x \in F$, on a $u(x) \in F$, $v(x) \in F$ et par suite $(\alpha u + \beta v)(x) \in F$. L'application $\alpha u + \beta v$ appartient donc à $\mathcal{L}_F(E)$ et $(\alpha u + \beta v)_F = \alpha u_F + \beta v_F$. Ainsi, $\mathcal{L}_F(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et φ est linéaire.

Soit $(u,v) \in \mathcal{L}_F(E)^2$.

Pour tout $x \in F$, on a $v(x) \in F$ puis $u\big(v(x)\big) \in F$. Ainsi $u \circ v$ appartient à $\mathcal{L}_F(E)$ et $(u \circ v)(x) = u_F\big(v_F(x)\big)$, donc $(u \circ v)_F = u_F \circ v_F$.

Par suite, $\mathcal{L}_F(E)$ est une algèbre et φ est un morphisme d'algèbres de $\mathcal{L}_F(E)$ vers $\mathcal{L}(F)$.

2. Soit u appartenant à $\mathcal{L}_F(E) \cap \mathcal{GL}(E)$. L'endomorphisme induit u_F est injectif (car $\operatorname{Ker} u_F = F \cap \operatorname{Ker} u$). Comme F est de dimension finie, le théorème du rang s'applique et implique la surjectivité et donc la bijectivité de u_F.

Pour tout x de F, l'unique antécédent $u^{-1}(x)$ de x par u appartient donc à F. Ainsi, u^{-1} appartient à $\mathcal{L}_F(E)$. La relation $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_E$ entraîne :

$$u_F \circ (u^{-1})_F = (u^{-1})_F \circ u_F = \mathrm{Id}_F,$$

puis $(u^{-1})_F = (u_F)^{-1}$.

3. L'endomorphisme $u : Q \mapsto XQ$, de l'espace des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$, est inversible et stabilise $F = \mathbb{K}[X]$ mais l'endomorphisme induit u_F n'est pas surjectif car l'unité 1 n'appartient pas à l'image de $\mathbb{K}[X]$ par u. Le résultat de la question précédente n'est donc pas vrai si F n'est pas de dimension finie.

4. Supposons que le sous-espace vectoriel F possède un supplémentaire que l'on notera G et notons p la projection de E sur F parallèlement à G.

Soit $v \in \mathcal{L}(F)$. L'application $u : E \to E$, $x \mapsto v \circ p(x)$ est un élément de $\mathcal{L}_F(E)$ et $u_F = v$; ce qui prouve la surjectivité de φ.

2.5 Montrons le résultat par récurrence forte sur la dimension $n \in \mathbb{N}^*$ de E.

Si $n = 1$, alors l'endomorphisme v est nul et la proposition est évidente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la proposition soit vraie pour toute dimension strictement inférieure à n.

Considérons u et v deux endomorphismes de E, avec $\dim E = n$, tels que u et v commutent et v soit nilpotent.

Comme v est nilpotent, l'endomorphisme v n'est pas inversible et la dimension r du sous-espace $F = \operatorname{Im} v$ appartient à $[\![0, n-1]\!]$. Si $v = 0$, alors le résultat est évident. On supposera donc désormais v non nul et donc que $r > 0$.

Choisissons alors une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à F. Comme $F = \operatorname{Im} v$ est stable par u et v, les matrices de u et v dans $\mathcal{B}$ sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ 0 & U_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $(U_{1,1}, V_{1,1}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})^2$.

Comme u et v commutent, les endomorphismes u_F et v_F induits par u et v sur F aussi. De même, v_F est nilpotent. La dimension de F étant strictement inférieure à n, l'hypothèse de récurrence donne :

$$\det(u_F + v_F) = \det u_F$$

soit, en termes de matrices :

$$\det\left(U_{1,1} + V_{1,1}\right) = \det U_{1,1}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} U_{1,1}+V_{1,1} & U_{1,2}+V_{1,2} \\ 0 & U_{2,2}\end{pmatrix} &= \det\left(U_{1,1}+V_{1,1}\right)\det U_{2,2} \\ &= \det U_{1,1}\det U_{2,2}\end{aligned}$$

donc $\det(u+v) = \det u$.

2.6 1. L'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, donne :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 2 \\ -2 & X-1 & 2 \\ -2 & -2 & X+3 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & X-1 & 2 \\ 1 & -2 & X+3 \end{vmatrix}.$$

En retranchant la première ligne aux deux autres, on a alors :

$$\chi_A(X) = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)(X+1)^2.$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 2.
On détermine le sous-espace propre E_1 en résolvant le système :

$$\begin{cases} 2y - 2z &= 0 \\ 2x - 2z &= 0 \\ 2x + 2y - 4z &= 0 \end{cases}$$

qui est équivalent à $x = y = z$. On a donc $E_1 = \mathbb{R}f_1$ avec $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On détermine le sous-espace propre E_{-1} en résolvant le système :

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z &= 0 \\ 2x + 2y - 2z &= 0 \\ 2x + 2y - 2z &= 0 \end{cases}$$

qui est équivalent à $2x + 2y - 2z = 0$ donc :

$$E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (y,z) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

Ainsi $E_{-1} = \mathbb{R}f_2 \oplus \mathbb{R}f_3$ avec $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Puisque $\dim E_1 + \dim E_{-1} = 3$, la matrice A est diagonalisable et (f_1, f_2, f_3) est une base de diagonalisation. Par conséquent :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Puisque A est diagonalisable de spectre $\{-1, 1\}$, le polynôme minimal de A est :
$$\pi_A(X) = (X-1)(X+1).$$

2.7 1. En développant par rapport à la deuxième colonne, il vient $\chi_B(X) = (X+1)^3$. La matrice B n'a donc qu'une valeur propre : -1. Si elle était diagonalisable, alors elle serait égale à la matrice $-I_3$ ce qui n'est pas le cas. La matrice B n'est donc pas diagonalisable.

2. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal de B est un diviseur de $(X+1)^3$.
Posons alors $C = B + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. On a $C \neq 0$ et $C^2 = 0$. Le polynôme minimal de B est donc $\pi_B(X) = (X+1)^2$.

3. On cherche une base (f_1, f_2, f_3) telle que f_1 et f_2 soit des vecteurs propres de B et que $Bf_3 = f_2 - f_3$ c'est-à-dire $Cf_3 = f_2$.
Si l'on prend un vecteur f_3 non nul, alors comme $C^2 = 0$, Cf_3, s'il est non nul, est un vecteur propre de B. Il suffit de ne pas prendre f_3 dans E_{-1} puis de compléter $f_2 = Cf_3$ en une base (f_1, f_2) de E_{-1} pour conclure.
On détermine E_{-1} en résolvant le système :

$$\begin{cases} 4x + 8z &= 0 \\ 3x + 6z &= 0 \\ -2x - 4z &= 0 \end{cases}$$

qui est équivalent à $x + 2z = 0$.
Ainsi, le vecteur $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à E_{-1}. Comme les vecteurs :

$$f_2 = Cf_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de E_{-1}, la famille (f_1, f_2, f_3) est une base dans laquelle l'endomorphisme u_B canoniquement associé à B est :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice B est donc semblable à la matrice annoncée.

Plus précisément, on a $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

2.8 Il s'agit d'un exercice classique où il est difficile d'obtenir le polynôme caractéristique de A sous forme factorisé. On détermine donc ses éléments propres par la résolution de systèmes.

Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un vecteur propre de A associé au scalaire λ. Il est donc non nul et vérifie le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\lambda x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 & = & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-2} - \lambda x_{n-1} + x_n & = & 0 \\ x_{n-1} - \lambda x_n & = & 0 \end{array}\right. .$$

Si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, la suite $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ est le début d'une suite vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre deux :

$$x_{k-2} - \lambda x_{k-1} + x_k = 0.$$

L'équation caractéristique associée est $X^2 - \lambda X + 1$ de discriminant $\Delta = \lambda^2 - 4$.

On étudie les différents cas suivant le signe de Δ.

- Si $\Delta = 0$ c'est-à-dire si $\lambda = \pm 2$, alors l'équation caractéristique admet une racine double $\varepsilon = \pm 1$ et il existe des scalaires α et β tels que :

  $$\forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad x_k = \alpha\varepsilon^k + \beta k\varepsilon^k.$$

  Comme $x_0 = x_{n+1} = 0$, on obtient $\alpha = \beta = 0$ ce qui contredit la non nullité de X.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et $r_2 = 1/r_1$ et il existe des scalaires α et β tels que :

  $$\forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k.$$

  Comme $x_0 = x_{n+1} = 0$, on obtient $\alpha = -\beta$ et $\frac{\alpha}{r_1^{n+1}}\left(r_1^{2n+2} - 1\right) = 0$, ce qui est impossible car $r_1 \neq 1$ et $X \neq 0$.

Par conséquent, si λ est valeur propre, alors $\Delta < 0$. Il existe donc $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\lambda = 2\cos\theta$. Les racines de $X^2 - \lambda X + 1$ étant $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, il existe des scalaires α et β tels que :

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad x_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta}.$$

La relation $x_0 = 0$ entraîne $\alpha + \beta = 0$ et :

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad x_k = 2\alpha i \sin(k\theta).$$

La relation $x_{n+1} = 0$ et la non nullité de X implique que $\sin\big((n+1)\theta\big) = 0$, c'est-à-dire que θ est de la forme $\dfrac{\ell\pi}{n+1}$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Il suffit alors de remonter les calculs, pour prouver que, pour tout l de $[\![1, n]\!]$, le vecteur :

$$X_l = \left(\sin \frac{k\ell\pi}{n+1}\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$$

est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_\ell = 2\cos\dfrac{\ell\pi}{n+1}$.

Les réels λ_ℓ, $\ell \in [\![1, n]\!]$, étant deux à deux distincts du fait de l'injectivité de la fonction cos sur $[0, \pi]$, la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ de spectre :

$$\mathrm{sp}(A) = \left\{2\cos\big(\frac{\ell\pi}{n+1}\big)\,;\ \ell \in [\![1, n]\!]\right\}$$

et la famille $(X_\ell)_{\ell\in[\![1,n]\!]}$ est une base de diagonalisation.

En fait, la matrice A est symétrique réelle et le théorème spectral (voir le chapitre 14 « Endomorphismes des espaces euclidiens ») prouve *a priori* qu'elle est diagonalisable et que la base $(X_\ell)_{\ell\in[\![1,n]\!]}$ dont les vecteurs sont associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est orthogonale. Nous allons redémontrer cette propriété.

Notons $\varphi = \dfrac{\pi}{n+1}$. Pour tous ℓ et ℓ' de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}(X_\ell \mid X_{\ell'}) &= \sum_{k=1}^{n} \sin(k\ell\varphi)\sin(k\ell'\varphi)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\left((\ell-\ell')k\varphi\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\left((\ell+\ell')k\varphi\right).\end{aligned}$$

Pour $x \not\equiv 0[2\pi]$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}e^{ikx} &= \mathrm{Re}\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\frac{e^{inx/2}\sin((nx/2)}{e^{ix/2}\sin(x/2)}\right)\\ &= \frac{\cos((n+1)x/2)\sin((nx/2)}{\sin(x/2)}.\end{aligned}$$

En particulier, si p est un entier non multiple de $2(n+1)$, alors $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(pk\varphi)$ est nul si p est pair et égal à -1 sinon.

Comme ℓ et ℓ' ont la même parité et appartiennent à $[\![1, n]\!]$, il vient :

$$(X_\ell \mid X_{\ell'}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq \ell' \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{sinon}\end{cases}$$

Finalement, la famille $\left(\sqrt{\dfrac{2}{n+1}}X_\ell\right)_{\ell\in[\![1,n]\!]}$ est une base orthonormée de diagonalisation de A.

La matrice de passage P correspondante est donc orthogonale et $P^{-1} = {}^tP$.

2.9 Comme A est annulée par le polynôme $X(X^2+X+1)$ scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et la dimension de son noyau est égal à la multiplicité de 0 dans χ_A De plus, ses valeurs propres appartiennent à $\{0, j, j^2\}$ donc il existe des entiers p et q tels que Son polynôme caractéristique χ_A soit égal à :

$$\chi_A(X) = X^{n-p-q}\,(X-j)^p\,\left(X-j^2\right)^q.$$

La matrice A étant réelle, son polynôme caractéristique aussi, donc $p = q$. Le théorème du rang donne alors $\operatorname{rg} A = 2p$.

2.10 La matrice A est annulée par le polynôme $P = X^3 - 3X - 5$. L'étude des variations de la fonction $x \mapsto x^3 - 3x - 5$ montre que P a une unique racine réelle α strictement positive. Ses deux autres racines dans $\mathbb{C}$ sont donc complexes conjuguées. Il existe donc $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que :

$$P = (X-\alpha)(X-\omega)(X-\overline{\omega})$$

Puisque P annule A ses valeurs propres appartiennent à $\{\alpha, \omega, \overline{\omega}\}$ donc il existe des entiers p et q tels que

$$\chi_A(X) = (X-\alpha)^{n-p-q}(X-\omega)^p(X-\overline{\omega})^q.$$

Comme A est une matrice réelle, le polynôme χ_A aussi, d'où $p = q$. Par conséquent :

$$\det A = (-1)^n\chi_A(0) = \alpha^{n-2p}\,|\omega|^{2p} > 0.$$

2.11 Raisonnons par analyse-synthèse.

- Considérons une matrice M solution.

  La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est annulée par son polynôme caractéristique $X(X-2)$.

  Le polynôme $(X^2+X)(X^2+X-2) = X(X+1)(X-1)(X+2)$ annule donc M. Comme ce polynôme est scindé à racines simples, on en déduit que M est diagonalisable.

  Soit $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

  On a alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha^2+\alpha & 0 \\ 0 & \beta^2+\beta \end{pmatrix}$

  La matrice M a donc comme polynôme caractéristique (et donc annulateur) un des quatre polynômes suivants : $X(X-1)$, $X(X+2)$, $(X+1)(X-1)$ ou $(X+1)(X+2)$.

  - Dans le premier cas, les relations $M^2 + M = A$ et $M^2 - M = 0$ donnent $M = \frac{1}{2}A$;
  - dans le deuxième cas, les relations $M^2 + M = A$ et $M^2 + 2M = 0$ donnent $M = -A$;
  - dans le troisième cas, les relations $M^2 + M = A$ et $M^2 - I_n = 0$ donnent $M = A - I_n$;
  - dans le dernier cas, les relations $M^2 + M = A$ et $M^2 + 3M + 2I_n = 0$ donnent $M = -\frac{1}{2}A - I_n$.

- On vérifie que les quatre matrices conviennent.

Par conséquent $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.

2.12 La matrice A annule le polynôme $X^p - 1$ dont les racines complexes sont simples. Elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et ses valeurs propres sont des racines p-ièmes de l'unité. Ainsi, A est semblable, à une matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\alpha, \beta)$ où α et β sont des racines p-ième de l'unité.

D'un autre côté, le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^2 + aX + b$ de A est à coefficients entiers. La relation $a = -\operatorname{Tr} A = -(\alpha + \beta)$ montre, du fait de l'inégalité triangulaire, que a est un entier de module inférieur ou égal à 2 et que $b = \det A = \alpha\beta$ est un entier de module 1 c'est-à-dire $b = \pm 1$.

- Si A possède un valeur propre réelle, alors comme a est réel, l'autre valeur propre est également réelle. Comme α et β sont des racines p-ièmes de l'unité, la matrice A est alors semblable à $\mathrm{Diag}(1,1)$, $\mathrm{Diag}(1,-1)$ ou $\mathrm{Diag}(-1,-1)$ et $A^2 = I_2$.
- Si A possède une valeur propre non réelle, $e^{i\theta}$ avec $\theta \not\equiv 0[\pi]$, alors l'autre est conjuguée et leur produit b vaut 1. On en déduit que $a = -2\cos\theta \in \{-1, 0, 1\}$ car a est un entier et $\theta \not\equiv 0[\pi]$. Le polynôme caractéristique est alors égal à $X^2 + X + 1$, $X^2 - X + 1$ ou $X^2 + 1$. La matrice A est semblable à :
  - $\mathrm{Diag}(j, j^2)$ et dans ce cas $A^3 = I_2$;
  - $\mathrm{Diag}(-j^2, -j)$ et dans ce cas $A^6 = I_2$
  - ou $\mathrm{Diag}(i, -i)$ et dans ce cas $A^4 = I_2$.

Dans tous les cas, $A^{12} = I_2$ et 12 est le plus petit entier convenable.

2.13 1. Supposons par l'absurde que $\mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big)$ ne soit pas un plan. Comme le vecteur x est non nul, il existe donc un réel λ tel que $u(x) = \lambda x$. Le réel λ étant une valeur propre de u, c'est une racine du polynôme annulateur X^2+X+1, ce qui est absurde car ce polynôme n'a pas de racine réelle. Par conséquent, $\mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est un plan.

Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$u\left(\lambda x + \mu u(x)\right) = -\mu x + (\lambda - \mu)u(x) \in \mathrm{Vect}\left(x, u(x)\right)$$

donc $\mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est stable par u.

Supposons par l'absurde qu'il existe y non nul dans $F \cap \mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big)$. Comme cette intersection est stable par u, elle contient $\mathrm{Vect}\big(y, u(y)\big)$, qui, d'après ce qui précède, est un plan. Pour des raisons de dimensions, on a donc :

$$F \cap \mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big) = \mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big),$$

puis $\mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big) \subset F$, ce qui n'est pas possible car $x \notin F$.

Ainsi, F et $\mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big)$ sont en somme directe.

2. Commençons par remarquer que si la matrice de u dans une base $(e_1, \cdots, e_n)$ est de la forme annoncée, alors n est pair et pour tout $k \in [\![1, n/2]\!]$, $u(e_{2k-1}) = e_{2k}$. Réciproquement, s'il existe une base de la forme $\big(e_1, u(e_1), \ldots, e_{n/2}, u(e_{n/2})\big)$, alors pour tout $k \in [\![1, n/2]\!]$:

$$u(e_{2k}) = u^2(e_{2k-1}) = -u((e_{2k-1})) - (e_{2k-1}) = -e_{2k} - e_{2k-1}$$

donc la matrice de u dans cette base est de la forme annoncée.
On considère donc l'ensemble A des entiers k tels qu'il existe $x_1, \dots, x_k$ de $\mathbb{R}^n$ avec $\big(x_1, u(x_1), \dots, x_k, u(x_k)\big)$ libre.
En utilisant la question précédente avec $F = \{0\}$, on montre que A est non vide. Elle est également bornée puisqu'une famille libre est de cardinal inférieur ou égal à n. Elle admet donc un maximum que nous noterons p. Il existe alors des vecteurs $x_1, \dots, x_p$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $\big(x_1, u(x_1), \dots, x_p, u(x_p)\big)$ soit libre. Le sous-espace :

$$F = \mathrm{Vect}\big(x_1, u(x_1), \dots, x_p, u(x_p)\big) = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Vect}\big(x_k, u(x_k)\big)$$

est stable par u. S'il n'est pas égal à $\mathbb{R}^n$, alors il existe $x_{p+1} \notin F$ et, d'après la question précédente, $\mathrm{Vect}\big(x_{p+1}, u(x_{p+1})\big)$ est en somme directe avec F. La famille $\big(x_1, u(x_1), \dots, x_{p+1}, u(x_{p+1})\big)$ est alors libre ce qui contredit la définition de p. On a donc $F = \mathbb{R}^n$, et par conséquent $\big(x_1, u(x_1), \dots, x_p, u(x_p)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, la matrice de u est de la forme désirée. On a aussi $n = 2p$.

2.14 1. Si un nombre complexe α est valeur propre d'une matrice à coefficients rationnels, alors, il est racine de son polynôme caractéristique qui est unitaire et à coefficient rationnels, donc α est algébrique.
Réciproquement, si un nombre complexe α est algébrique, alors il est racine d'un polynôme unitaire $P(X) = X^p + r_1 X^{p-1} + \cdots + r_p$ de $\mathbb{Q}[X]$. La matrice compagnon :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -r_p \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -r_1 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_p(\mathbb{Q})$ étant de polynôme caractéristique P, α est valeur propre de C.

2. Soit α un nombre complexe algébrique. Il est alors valeur propre d'une matrice M à coefficient rationnels. Pour tout entier r, α^r est alors valeur propre de M^r qui est à coefficients rationnels, ce qui prouve que α^r est algébrique.

2.15 1. L'endomorphisme $P(X) \mapsto P(X+1)$ de $\mathbb{K}[X]$ induit un endomorphisme u de $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Notons :

$$\chi(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

son polynôme caractéristique. Puisque $u^k(P)$ est égal à $P(X+k)$, on a d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

2. L'endomorphisme $\Delta = u - \mathrm{Id}_E$ est nilpotent et vérifie $\Delta^n = 0$ puisque, pour P non constant, $\deg(\Delta(P)) = \deg P - 1$. On a donc :

$$0 = (u - \mathrm{Id}_E)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u^k$$

et :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k) = 0.$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $a_k = (-1)^{k-n}\binom{n}{k}$ de sorte que :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

2.16 Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X-1)^2(X+1)$ et les sous espaces propres sont $E_1 = \mathbb{R}e_1$ et $E_{-1} = \mathbb{R}e_{-1}$ avec :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad e_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit F un sous-espaces stable par l'endomorphisme u.

- Si F est de dimension 0 ou 3, il est respectivement égal à $\{0\}$ ou $\mathbb{R}^3$.
- Si F est de dimension 1, alors F est une droite engendrée par un vecteur propre de A c'est-à-dire $F = \mathbb{R}e_1$ ou $F = \mathbb{R}e_{-1}$.
- Si F est de dimension 2, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit est un polynôme de degré deux divisant χ_A.

  Il vaut donc $(X-1)^2$ ou $(X-1)(X+1)$.

  Dans le premier cas, F est contenu dans le noyau de $(A - I_3)^2$ qui est égal au plan d'équation $2x - 2y - z = 0$.

  Dans le second cas, F contient un vecteur propre associé à 1 et un vecteur propre associé à -1. Il est donc égal à $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_{-1}$.

Ainsi, les sous-espaces stables par u sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}e_1$, $\mathbb{R}e_{-1}$, $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_{-1}$ et le plan d'équation $2x - 2y - z = 0$.

2.17 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence :

$$a \circ u = \lambda u \iff \mathrm{Im}\, u \subset E_\lambda(a).$$

Ainsi, $E_\lambda(M_a) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\, u \subset E_\lambda(a)\}$. En particulier,

$$E_\lambda(M_a) \simeq \mathcal{L}(E, E_\lambda(a)),$$

ce qui prouve que M_a et a ont les mêmes valeurs propres. De plus, pour tout scalaire λ, $\dim E_\lambda(M_a) = \dim E \times \dim E_\lambda(a)$. Comme $\dim \mathcal{L}(E) = \dim E \times \dim E$, on en déduit que M_a est diagonalisable si, et seulement si, a l'est.

2. Supposons a diagonalisable et considérons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de diagonalisation de a et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées

   Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $u_{i,j}$ l'endomorphisme de E défini par :
   $$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i.$$
   La famille $(u_{i,j})_{1 \leqslant i,jn}$ est alors une base de diagonalisation de $ad(a)$. En effet, pour tout $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$, on a :
   $$\begin{aligned} ad\,(u_{i,j})\,(e_k) &= a\big(u_{i,j}(e_k)\big) - u_{i,j}\big(a(e_k)\big) = \lambda_i u_{i,j}(e_k) - u_{i,j}\,(\lambda_k e_k) \\ &= \lambda_i u_{i,j}(e_k) - \lambda_k \delta_{j,k} e_i = \lambda_i u_{i,j}(e_k) - \lambda_j \delta_{j,k} e_i \\ &= (\lambda_i - \lambda_j)\, u_{i,j}(e_k) \end{aligned}$$
   donc $ad(a)(u_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)\, u_{i,j}$.

   Par conséquent, $ad(a)$ est diagonalisable et $\mathrm{sp}\,(ad(a)) = \{\lambda_i - \lambda_j\,;\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$.
3. Supposons a nilpotent. Il existe donc un entier p tel que $a^p = 0$. On a alors :
   $$\big(M_a\big)^p(u) = a^p \circ u = 0$$
   soit $(M_a)^p = 0$. Ainsi l'endomorphisme M_a est nilpotent.

   Notons N_a l'endomorphisme $u \mapsto u \circ a$ de $\mathcal{L}(E)$. On a de même $(N_a)^p = 0$. Comme M_a et N_a commutent, la formule du binôme fournit :
   $$\big(ad(a)\big)^{2p-1} = (M_a - N_a)^{2p-1} = \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k \binom{2p-1}{k} (M_a)^{2p-1-k} \circ (N_a)^k .$$
   Pour tout k de $[\![0, p-1]\!]$, on a $2p-1-k \geqslant p$ donc $(M_a)^{2p-1-k} = 0$ puis $(M_a)^{2p-1-k} \circ (N_a)^k = 0$. De même, pour tout k de $[\![p, 2p-1]\!]$, on a $(N_a)^k = 0$ puis $(M_a)^{2p-1-k} \circ (N_a)^k = 0$.

   Ainsi $ad(a)^{2p-1} = 0$, ce qui prouve que $ad(a)$ est nilpotent.

2.18 On peut, quitte à remplacer u par $u - \lambda\,\mathrm{Id}_E$, supposer que la valeur propre λ est nulle.

- Supposons (i) et montrons (ii). Grâce au théorème du rang, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}\,u$ et $\mathrm{Im}\,u$ sont en somme directe. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Im}\,u$. Par définition, $u(x) = 0$ et il existe t tel que $x = u(t)$. Ainsi, $u^2(t) = 0$ donc $t \in \mathrm{Ker}\,u^2 = \mathrm{Ker}\,u$ puis $x = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Im}\,u = E$.
- Supposons (ii) et montrons (iii). Comme $\mathrm{Im}\,u$ est stable par u, l'implication est évidente.
- Supposons (iii) et montrons (iv). On a $E = \mathrm{Ker}\,u \oplus F$ avec F stable par u. On peut donc définir u' l'endomorphisme induit par u sur F. Comme $\mathrm{Ker}\,u$ et F sont stables par u, un déterminant par blocs donne :
  $$\chi_u(X) = \chi_{u'}(X) X^d,$$
  où $d = \dim \mathrm{Ker}\,u$. Comme F et $\mathrm{Ker}\,u$ sont en somme directe, 0 n'est pas valeur propre de $\chi_{u'}$, la multiplicité de 0 dans χ_u est égale à d.

- Supposons (iv) et montrons (v). Par hypothèse, $\chi_u(X) = X^d P(X)$ où $d = \dim \operatorname{Ker} u$ et P est un polynôme tel que $P(0) \neq 0$. Les polynômes P et X^d étant premiers entre eux, le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton donne :
$$E = \operatorname{Ker} u^d \oplus \operatorname{Ker} P(u).$$
Si l'on note, u' et u'' les endomorphismes respectivement induits par u sur $\operatorname{Ker} u^d$ et $\operatorname{Ker} P(u)$, alors $\chi_u(X) = \chi_{u'}(X)\chi_{u''}(X) = X^{d'}\chi_{u''}(X)$ avec $d' = \dim \operatorname{Ker} u^k$. L'endomorphisme u'' étant annulé par P donc il n'admet pas 0 comme valeur propre. Par conséquent, $d' = d$. Comme $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^d$, on en déduit que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^k$ puis que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} P(u)$. Le polynôme $XP(X)$ annule donc u, ce qui prouve que 0 est racine simple du polynôme minimal de u.
- Supposons (v) et montrons (i). Comme $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$, il suffit de prouver que $\operatorname{Ker} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$. Soit $x \in \operatorname{Ker} u^2$. Par hypothèse, le polynôme minimal de u est de la forme $XQ(X)$ avec $Q(0) \neq 0$ donc, d'après le lemme des noyaux, on a $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$. Il existe donc $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Ker} Q(u)$ tel que $x = x_1 + x_2$. Comme $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} Q(u)$ sont stables par u et en somme directe, l'égalité $u^2(x) = u^2(x_1) + u^2(x_2) = 0$ donne $x_2 \in \operatorname{Ker} Q(u) \cap \operatorname{Ker} u^2$. Les polynômes, X^2 et Q étant en somme directe, on en déduit que $x_2 = 0$ puis que $x = x_1 \in \operatorname{Ker} u$.

2.19 1. Les opérations élémentaires $C_{i+n} \leftarrow C_{i+n} + XC_i$ puis $C_i \leftrightarrow C_{i+n}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ donnent :
$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ -I_n & XI_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} XI_n & -A + X^2 I_n \\ -I_n & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} -A + X^2 I_n & XI_n \\ 0 & -I_n \end{vmatrix}.$$
Ainsi, $\chi_B(X) = (-1)^{2n} \det\left(X^2 I_n - A\right) = \chi_A(X^2)$.

2. Comme $\chi_B(X) = \chi_A(X^2)$, un nombre complexe λ est valeur propre de B si, et seulement si, λ^2 est valeur propre de A. Si l'on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres distinctes de A et $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_d}$ leurs multiplicité dans χ_A, alors :
$$\chi_B(X) = \prod_{i=1}^{d} \left(X^2 - \lambda_i\right)^{m_{\lambda_i}} = \prod_{i=1}^{d} (X - \mu_i)^{m_{\lambda_i}} (X + \mu_i)^{m_{\lambda_i}},$$
où, pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, μ_i est une racine carrée de λ_i.
On en déduit tout valeur propre μ non nulle de B, a une multiplicité dans χ_B égale à m_{μ^2} si μ est non nul et $2m_0$ sinon.
Déterminons la dimension des espaces propres de B en fonction de ceux de A.
Soit μ une valeur propre de B. Un vecteur $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ avec $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ appartient au sous-espace propre $E_\lambda(B)$ si, et seulement si, on a :
$$\begin{cases} AY &= \mu X \\ X &= \mu Y \end{cases}$$

c'est-à-dire si, et seulement si, $Y \in E_{\mu^2}(A)$ et $X = \mu Y$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} E_{\mu^2}(A) & \longrightarrow & E_\mu(A) \\ Y & \longmapsto & \begin{pmatrix} \mu Y \\ Y \end{pmatrix} \end{array}$$

est donc un isomorphisme d'où $\dim E_\mu(B) = \dim E_{\mu^2}(A)$ pour tout $\mu \in \operatorname{sp} B$.

Comme B est diagonalisable si, et seulement si, pour tout $\mu \in \operatorname{sp}(B)$ la dimension de $E_\mu(B)$ est égale à la multiplicité de μ dans χ_B, on en déduit que :

- si 0 n'est pas valeur propre de A, alors B est diagonalisable si, et seulement si, A l'est ;
- si 0 est valeur propre de A, alors B n'est pas diagonalisable.

2.20 On étudie la matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique, $X^2 - 3X + 2$, est scindé simple de racines 1 et 2, donc la matrice U est diagonalisable. Plus précisément, on a :

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors que :

$$\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}$$

et que :

$$\begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix};$$

ce qui prouve que la matrice B est semblable à $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$.

- Si B est diagonalisable, alors la matrice C aussi donc il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(C) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(2A) \end{pmatrix} = 0$ donc la matrice A est diagonalisable.
- Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. On a alors :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 2D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1}.$$

Ainsi, C est diagonalisable donc B aussi.

2.21 1. Comme la matrice A est inversible, alors $AB = A(BA)A^{-1}$ donc les matrices AB et BA sont semblables. En particulier, $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$.

2. En écrivant $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ avec $B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ et $B_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$, on obtient :

$$J_r B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad BJ_r = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\chi_{J_r B} = \chi_{BJ_r} = X^{n-r}\chi_{B_1}(X)$.

3. La matrice A est équivalente à la matrice J_r où $r = \operatorname{rg} A$ .Il existe donc deux matrices inversibles P et Q telles que $A = PJ_rQ$. Comme P est inversible, on a :

$$\chi_{AB}(X) = \chi_{PJ_rQB}(X) = \chi_{J_rQBP}(X)$$

donc, d'après la question précédente, $\chi_{AB}(X) = \chi_{QBPJ_r}(X)$. La matrice Q étant inversible, on en déduit que $\chi_{AB}(X) = \chi_{BPJ_rQ}(X) = \chi_{BA}(X)$.

2.22 Supposons qu'il existe une matrice U non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AU = UB$. Pour tout scalaire λ, on a $(A - \lambda I_n)U = U(B - \lambda I_n)$. Comme χ_B est scindé dans $\mathbb{C}$, on en déduit que $\chi_B(A)U = U\chi_B(B) = 0$ d'après le théorème de Cayley Hamilton. La matrice $\chi_B(A)$ est donc non inversible. Si l'on pose $\chi_B(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_i)$, alors le produit des matrices $A - \lambda_i I_n$ est non inversible donc il existe une valeur propre de B telle que $A - \lambda I_n$ soit non inversible, c'est-à-dire une valeur propre commune.

Réciproquement, supposons que les matrices A et B possède une valeur propre commune λ, alors λ est aussi valeur propre de ${}^tB$ puisqu'une matrice et sa transposée ont le même spectre. Il existe donc deux vecteurs colonnes non nuls X et Y tels que l'on a ait $AX = \lambda X$ et ${}^tBY = \lambda Y$. La matrice $U = X\,{}^tY$ vérifie alors :

$$AU = AX\,{}^tY = \lambda X\,{}^tY \qquad \text{et} \qquad UB = X\,{}^tYB = X\,{}^t\big({}^tBY\big) = \lambda X\,{}^tY.$$

Comme les vecteurs X et Y sont non nuls, la matrice U est non nulle car il existe un couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $U_{i,j} = X_iY_j \neq 0$.

2.23 Supposons qu'il existe une matrice U de rang r tel que $AU = UB$. Il existe alors deux matrices inversibles P et Q telles que $U = PJ_rQ$. La relation $APJ_rQ = PJ_rQB$ donne alors $A'J_r = J_rB'$ avec $A' = P^{-1}AP$ et $B' = QBQ^{-1}$.

Si l'on écrit $A' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_2 \\ A'_3 & A'_4 \end{pmatrix}$, avec $A'_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ et $A'_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$ et, de même, $B' = \begin{pmatrix} B'_1 & B'_2 \\ B'_3 & B'_4 \end{pmatrix}$, avec $B'_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ et $B'_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$, alors on a :

$$A'J_r = \begin{pmatrix} A'_1 & 0 \\ A'_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J_rB' = \begin{pmatrix} B'_1 & B'_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $A'_1 = B'_1$, $A'_3 = 0$ et $B'_2 = 0$.

Par suite, $\chi_A = \chi_{A'} = \chi_{A'_1}(X)\chi_{A'_4}(X)$ et $\chi_B(X) = \chi_B(X) = \chi_{B'_1}(X)\chi_{B'_4}(X)$. Ainsi, $\chi_A(X)$ et $\chi_B(X)$ ont un facteur de degré r en commun : $\chi_{A'_1}(X)$.

2.24 1. Comme E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, u possède une valeur propre λ. Le sous-espace propre associé est stable par v car u et v commutent. L'endomorphisme v' induit par v sur $E_\lambda(u)$ possède alors un vecteur propre x qui est un vecteur propre de v car $v(x) = v'(x)$ et un vecteur propre de u puisque $x \in E_\lambda(u)$.

2. Pour tout entier k, on a $u^{k+1}\circ v - v\circ u^{k+1} = u\circ\big(u^k \circ v - v \circ u^k\big) + (u \circ v - v \circ u)\circ u^k$, ce qui permet de prouver par récurrence que, pour tout entier k, on a :

$$u^k \circ v - v \circ u^k = \alpha k u^k.$$

Ainsi, pour tout polynôme P, on a $P(u)\circ v - v\circ P(u) = \alpha u \circ P'(u)$. Comme E est de dimension finie, on peut considérer π_u le polynôme minimal de u. Comme $\alpha \neq 0$, le polynôme $X\pi'_u(X)$ annule u. Pour des raisons de degré, il existe donc un scalaire C non nul tel que :

$$\pi_u = CX\pi'_u(X).$$

Si l'on considère une racine non nulle z de π_u de multiplicité m, alors z est une racine de $X\pi'_u(X)$ de multiplicité $m-1$ ce qui est absurde. Par conséquent, π_u n'a que 0 comme racine, ce qui prouve qu'il est de la forme X^d et donc que u est nilpotent.

En particulier, $\operatorname{Ker} u$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et est stable par v car si $x \in \operatorname{Ker} u$, alors $u\,(v(x)) = v \circ u(x) + \alpha u(x) = 0$. L'endomorphisme v' induit par v sur $\operatorname{Ker} u$ possède alors un vecteur propre qui est un vecteur propre commun à u et v.

3. Supposons qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u \circ v - v \circ u = \alpha u + \beta v$.

Si $\beta = 0$, alors on conclut grâce à la question précédente. Sinon, l'endomorphisme $w = u\circ v - v\circ u$ vérifie alors $u\circ w - w\circ u = \beta w$ et la question précédente implique que les endomorphismes u et w possèdent un vecteur propre x commun. Il existe donc deux nombres complexes λ et μ tels que $u(x) = \lambda x$ et $w(x) = \mu x$. Comme β est non nul, on en déduit que $v(x) = \dfrac{\mu - \alpha\lambda}{\beta} x$. Le vecteur x est donc un vecteur propre commun à u et v.

2.25 Si B est la matrice nulle alors le résultat est évident.

On suppose donc désormais que B est non nul.

Démontrons le résultat par récurrence sur n.

Si $n = 1$ alors le résultat est évident.

Soit $n \geqslant 2$ tel que le résultat soit vrai pour des matrices de taille $n-1$.

Notons a et b les endomorphismes canoniquement associés aux matrices A et B.

Comme B est non nul, l'image de b est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et stable par b. L'endomorphisme induit par b sur $\operatorname{Im} b$ possède alors un vecteur propre x car le corps de base est $\mathbb{C}$. Le vecteur x est alors un vecteur propre de b. De plus, il appartient à l'image de b donc au noyau de a car la relation $AB = 0$ donne $a \circ b = 0$. Par conséquent, a et b possèdent un vecteur propre commun.

Soit $\mathcal{B}$ une base de premier vecteur x. Les matrices de a et b dans $\mathcal{B}$ sont alors de la forme $A' = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} \mu & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B'' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ avec A'' et B'' de taille $n-1$. Il suffit alors de montrer que les matrices A' et B' sont simultanément trigonalisables pour conclure.

Comme $a \circ b = 0$, on a $A''B'' = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc $P \in \mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}A''P$ et $P^{-1}B''P$ soient triangulaires supérieures.

Considérons la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Un calcul matriciel par blocs permet de vérifier que Q est inversible d'inverse $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et que les matrices $Q^{-1}A'Q$ et $Q^{-1}B'Q$ soient triangulaires supérieures ; ce qui conclut la récurrence.

2.26 Comme A et B commutent, on prouve par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout polynôme P :

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

En particulier, si M est diagonalisable, alors il existe un polynôme P scindé à racines simples qui annule M. On en déduit, que $P(A) = 0$ puis que A est diagonalisable. De plus, P' est premier avec P. Il existe donc des polynômes U et V tels que :

$$UP + VP' = 1.$$

Par suite $B = U(A)P(A)B + V(A)P'(A)B = 0$.

Réciproquement, si A est diagonalisable et $B = 0$, alors il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telle que $A = PDP^{-1}$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

et prouve que M est diagonalisable.

Par conséquent, M est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A est diagonalisable et la matrice B est nulle.

2.27 Si u est nilpotent, il existe une base dans laquelle la matrice A de u est triangulaire supérieure stricte. Les matrices A^k étant triangulaires supérieures strictes pour tout $k > 0$, on a $\operatorname{Tr}(u^k) = 0$ pour tout $k > 0$.

Nous prouverons la réciproque par récurrence sur n. Elle est évidente pour $n = 1$. Supposons le résultat acquis en dimension strictement inférieure à n.

Soit u vérifiant $\operatorname{Tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Le théorème de Cayley-Hamilton donne :

$$\chi(u) = u^n + \alpha_1 u^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} u + (-1)^n \det u \, \mathrm{Id}_E = 0$$

puis :

$$\operatorname{Tr}(u^n) + \alpha_1 \operatorname{Tr}(u^{n-1}) + \cdots + \alpha_{n-1} \operatorname{Tr}(u) + (-1)^n \det u \operatorname{Tr}(\mathrm{Id}_E) = 0,$$

c'est-à-dire $\det u = 0$ puisque $\operatorname{Tr}(\mathrm{Id}_E) = n \neq 0$. L'endomorphisme u n'est donc pas inversible. D'après le théorème du rang, le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} u$ est de dimension strictement inférieure à n.

Dans une base adaptée à $\operatorname{Im} u$, la matrice de u^k est :

$$\begin{pmatrix} B^k & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où B est la matrice de v, l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$.

On en déduit que $\operatorname{Tr}(v^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, \operatorname{rg} u]\!]$ et, par hypothèse de récurrence, que v est nilpotent. On a donc, en posant $r = \operatorname{rg} u$, $v^r = 0$.

Ainsi, pour tout $y \in \operatorname{Im} u$, on a $u^r(y) = 0$. Par conséquent, pour tout $x \in E$, on a :

$$u^{r+1}(x) = u^r\left(u(x)\right) = 0$$

donc $u^{r+1} = 0$; ce qui conclut la récurrence.

2.28 1. (a) Comme G est fini, tout élément g de G est d'ordre fini et il existe par conséquent $N_g \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^{N_g} = I_n$.

(b) Comme G est fini, $\{\operatorname{Tr} g\,;\ g \in G\}$ aussi.

Pour tout $g \in G$, le polynôme $X^{N_g} - 1$ est scindé à racines simples et annule g, donc g est diagonalisable.

2. Supposons que tous les éléments de G soient diagonalisables et que $\{\operatorname{Tr} g\,;\ g \in G\}$ soit fini et montrons que G est fini.

L'espace vectoriel $\operatorname{Vect}(G)$ est de dimension finie car inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De la partie génératrice G, on peut donc extraire une base $(A_1, \ldots, A_p)$. Comme $\{\operatorname{Tr} g\,;\ g \in G\}$ est fini, l'application $f : X \in G \mapsto (\operatorname{Tr}(A_1 X), \ldots, \operatorname{Tr}(A_p X))$ est à valeurs dans un ensemble fini. Il suffit donc de prouver que f est injective pour conclure.

Soit $(g, g') \in G^2$ tel que $f(g) = f(g')$. Par linéarité de la trace, on a donc $\operatorname{Tr}(hg) = \operatorname{Tr}(hg')$ pour tout $h \in \operatorname{Vect}(G)$. Pour tout $h \in G$, $hg^{-1} \in G$ donc $\operatorname{Tr}(hg^{-1}g) = \operatorname{Tr}(hg^{-1}g')$ puis $\operatorname{Tr}\left(h\left(g^{-1}g' - I_n\right)\right) = 0$. Par linéarité de la trace, on a donc :

$$\forall h \in \operatorname{Vect}(G) \quad \operatorname{Tr}\left(h\left(g^{-1}g' - I_n\right)\right) = 0.$$

En particulier, comme $g^{-1}g' - I_n \in \mathrm{Vect}(G)$, pour tout entier k, on a :

$$\mathrm{Tr}\left(\left(g^{-1}g' - I_n\right)^k\right) = 0.$$

En utilisant l'exercice 2.27, on en déduit que $g^{-1}g' - I_n$ est nilpotent. Or, $g^{-1}g'$ appartient à G donc il est diagonalisable. Par conséquent, $g^{-1}g' - I_n$ aussi et, comme il est nilpotent, il s'agit de l'endomorphisme nul d'où $g = g'$, ce qui achève la démonstration.

Chapitre 3 : Fonctions convexes

I Parties convexes d'un espace vectoriel 154
1 Barycentres 154
2 Parties convexes 157
II Fonctions convexes d'une variable réelle 158
1 Définitions 158
2 Caractérisation géométrique 160
3 Inégalité de convexité 160
4 Caractérisation en terme de pente 161
III Convexité et dérivabilité 163
1 Caractérisation des fonctions dérivables convexes . 163
2 Position par rapport à la tangente 164
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 166
Exercices 176

Fonctions convexes



I Parties convexes d'un espace vectoriel

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel réel et p un entier non nul.

1 Barycentres

Définition 1

Étant donné $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in E^p$ et $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$.

On appelle **barycentre** des points pondérés $\left((x_i,\lambda_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$, l'élément :

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, x_i.$$

Remarques

1. Lorsque les $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ sont égaux, le barycentre est appelé **isobarycentre**. Il est alors égal à $\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i$.
2. Supposons E de dimension finie muni d'un repère $\mathcal{R}$. Les coordonnées dans $\mathcal{R}$ du barycentre d'une famille de points pondérés sont les barycentres des coordonnées dans $\mathcal{R}$ de ces points (affectées des mêmes coefficients).

Exemples

1. L'isobarycentre de deux vecteurs x_1 et x_2 n'est autre que le vecteur $\frac{x_1+x_2}{2}$.
2. Le symétrique M' du point $M(x,y)$ par rapport au point $A(\alpha,\beta)$ vérifie :
$$\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$$
On a donc $M'(2\alpha-x, 2\beta-y)$ *i.e.* M' est le barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(M,-1)$.

3. L'isobarycentre des racine n-ièmes de l'unité *i.e.* des complexes $\left(e^{2ik\pi/n}\right)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est nul si $n \geqslant 2$ car on a alors $\sum_{i=1}^{n} e^{2ik\pi/n} = 0$.
4. Le **centre de gravité** d'un triangle de sommets A, B et C, d'affixes respectives a, b et c est le point d'affixe $\frac{a+b+c}{3}$ *i.e.* l'isobarycentre des points A, B et C.
5. L'espérance d'une variable aléatoire réelle X prenant les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ avec des probabilités $p_1, \ldots, p_n$, n'est autre que le barycentre des réels $x_1, \ldots, x_n$ pondérés par leurs probabilité *i.e.* $\left((x_i, p_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
6. En physique, le **centre de masses** des points $\left(M_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et de masse $\left(m_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est le barycentre des points pondérés $\left((M_i, m_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Proposition 1

Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in E^p$, $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$ et μ un réel non nul.

Le barycentre des points pondérés $\left((x_i, \mu\lambda_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est alors bien défini et égal au barycentre des points pondérés $\left((x_i, \lambda_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$.

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition et de simplifier par $\mu \neq 0$. □

Remarque On peut donc se limiter à considérer les barycentres de points pondérés $\left((x_i, \lambda_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.

Proposition 2

Soit $\left((x_i, \lambda_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $\left((y_i, \mu_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant q}$ deux familles de points pondérés. On suppose que $s_1 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$ et $s_2 = \sum_{i=1}^{q} \mu_i$ sont non nuls et vérifient $s_1 + s_2 \neq 0$. Alors le barycentre des points pondérés :

$$\left((x_1, \lambda_1), \ldots, (x_p, \lambda_p), (y_1, \mu_1), \ldots, (y_q, \mu_q)\right)$$

est le barycentre des points pondérés $\left((b_1, s_1), (b_2, s_2)\right)$, où b_1 et b_2 sont les barycentres respectifs de $\left((x_i, \lambda_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $\left((y_i, \mu_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant q}$.

Démonstration. Par définition, le barycentre des points pondérés $\left((b_1, s_1), (b_2, s_2)\right)$ est :

$$\frac{s_1 b_1 + s_2 b_2}{s_1 + s_2} = \frac{1}{s_1 + s_2}\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{q} \mu_i y_i\right).$$ □

Remarques

1. Étant donnés un nombre fini de points $A_0, \ldots, A_p$, l'ensemble des barycentres de ces points est le sous-espace affine $A_0 + \text{Vect}\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_0A_p}\right)$.

   En effet, pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$, le point $M = A_0 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \overrightarrow{A_0A_k}$ est le barycentre des points pondérés $\left(A_0, 1 - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k\right), (A_1, \alpha_1), \ldots, (A_p, \alpha_p)$.

   Réciproquement, si M est le barycentre des points pondérés $((A_i, \lambda_i))_{0 \leqslant i \leqslant p}$ avec $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1$, alors $M = A_0 + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{A_0A_k}$.
2. L'ensemble des barycentres des points A et B n'est autre que la droite (AB) *i.e.* $A + \text{Vect}(\overrightarrow{AB})$.
3. Si les points A, B et C ne sont pas alignés alors l'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan $A + \text{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Définition 2

On appelle **barycentre à coefficients positifs** des points $x_1, \ldots, x_p$, tout élément de la forme $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille de réels positifs telle que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.

Remarques

1. Étant donnés deux points A et B, on note $[A, B]$ l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points A et B.

   Il s'agit donc des points $M = (1 - \theta)A + \theta B$, $\theta \in [0, 1]$.
2. Dans $\mathbb{R}$, la notation $[x, y]$ existe lorsque $x \leqslant y$ et désigne l'ensemble des réels t tels que $x \leqslant t \leqslant y$. Ces deux notations coïncident donc sous l'hypothèse $x \leqslant y$.
3. L'ensemble des barycentres à coefficients positifs de trois points A, B et C est constitué des points $M = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ où λ et μ sont deux réels positifs tels que $\lambda + \mu \leqslant 1$; il s'agit de l'intérieur du triangle ABC.

Point méthode

Étant donné trois réels a, b et c tels que $a < b < c$, il faut savoir exprimer chacun de ces réel comme barycentre des deux autres.

Exemples

1. Par exemple pour a, on cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = (1-\theta)b + \theta c$ et on obtient $\theta = \dfrac{a-b}{c-b}$, c'est-à-dire $a = \dfrac{c-a}{c-b}b + \dfrac{a-b}{c-b}c$.
2. De même, on a $b = \dfrac{c-b}{c-a}a + \dfrac{b-a}{c-a}c$ et $c = -\dfrac{c-b}{b-a}a + \dfrac{c-a}{b-a}b$.

   En particulier, comme $b \in [a,c]$, b est un barycentre à coefficients positifs de a et c.

2 Parties convexes

Définition 3

Une partie C de E est convexe si, et seulement si :

$$\forall (c_1,c_2) \in C^2 \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 \in C.$$

Exemples

1. L'ensemble vide est convexe.
2. Un singleton est convexe.
3. Tout sous-espace affine de E est convexe.
4. Soit $E = \mathbb{R}^n$, $\|.\|$ la norme euclidienne sur E et $(a,r) \in E \times \mathbb{R}^+$.

   La boule fermée $B = \{x \in E \mid \|x-a\| \leqslant r\}$ est convexe.

   En effet, pour tout $(c_1,c_2) \in B^2$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a :

   $$\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 - a = \lambda(c_1-a) + (1-\lambda)(c_2-a)$$

   donc l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme donne :

   $$\begin{aligned}\|\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 - a\| &\leqslant \|\lambda(c_1-a)\| + \|(1-\lambda)(c_2-a)\| \\ &\leqslant \lambda\|c_1-a\| + (1-\lambda)\|c_2-a\| \\ &\leqslant \lambda r + (1-\lambda)r = r.\end{aligned}$$

   Ainsi, $\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 \in B$.

   On montrerait de même que la boule ouverte $B = \{x \in E \mid \|x-a\| < r\}$ est convexe (pour montrer l'inégalité stricte, on utilise que l'un des deux réels λ ou $1-\lambda$ est strictement positif).
5. Plus généralement, on verra que si E est muni d'une norme $\|.\|$ alors toute boule, ouverte ou fermée, est convexe.

Proposition 3

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$.

Démonstration page 166

p.166

Exercice 1

1. Montrer que l'intersection de deux parties convexes est une partie convexe.
2. Que dire d'une intersection quelconque de convexes ?
3. Que dire de l'union de deux convexes ?
4. Soit C_1 et C_2 deux convexes. Que dire de $M = \left\{\frac{c_1+c_2}{2},\ (c_1,c_2) \in C_1 \times C_2\right\}$?

Proposition 4

Soit C une partie de E. Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

1. C est convexe ;
2. pour toute famille $x_1, \dots\ x_p$ d'éléments de E et toute famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de réels *positifs* non tous nuls, le barycentre des points pondérés $\left((x_i,\lambda_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est un élément de C ;
3. pour toute famille $x_1, \dots\ x_p$ d'éléments de E et toute famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de réels *positifs* telle que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, le barycentre des points pondérés $\left((x_i,\lambda_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est un élément de C.

Démonstration page 167

On traduit le résultat précédent en disant que C est une partie convexe si, et seulement si, la partie C est **stable par barycentres à coefficients positifs.**

II Fonctions convexes d'une variable réelle

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

1 Définitions

Définition 4

La fonction f est **convexe** sur I si :

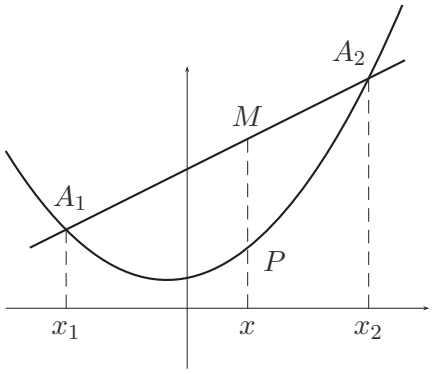
$$\forall (x_1,x_2) \in I^2 \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

La fonction f est **concave** si $-f$ est convexe.

Interprétation graphique

Soit Γ le graphe de la fonction f dans le plan.
La fonction f est convexe sur I si, et seulement si, pour tous points A_1 et A_2 de Γ d'abscisses respectives x_1 et x_2, le graphe de $f_{|[x_1,x_2]}$ est en dessous de la corde $[A_1, A_2]$.
En effet, pour tout $x \in [x_1, x_2]$, c'est-à-dire de la forme :

$$\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2 \quad \text{avec} \quad \lambda \in [0,1],$$



les points P et M d'abscisse x et se trouvant respectivement sur Γ et sur la corde $[A_1, A_2]$, admettent respectivement $f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2)$ et $\lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)$ pour ordonnées.

p.167

Exercice 2 Soit Γ le graphe d'une fonction convexe f définie sur $\mathbb{R}$ et A_1, A_2 deux points de Γ.

Étudier la position de Γ par rapport à la droite (A_1A_2).

Exemples

1. Toute fonction affine est convexe.
2. La fonction valeur absolue est convexe car, pour $\lambda \in [0,1]$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\big|\lambda\, x + (1-\lambda)\, y\big| \leqslant |\lambda\, x| + \big|(1-\lambda)\, y\big| = \lambda\, |x| + (1-\lambda)\, |y|.$$

Remarque Pour montrer à l'aide de la définition qu'une fonction est convexe, on pourra établir l'inégalité $f(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y) \leqslant \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$ seulement dans le cas où $x < y$ et $\lambda \in\,]0,1[$. En effet, les cas $x = y$ ainsi que $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ sont évidents et l'on peut toujours échanger les rôles de x et y.

p.168

Exercice 3 Montrer que si f est convexe sur $[a,b]$ et si $f(a) = f(b)$ alors :

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leqslant f(a).$$

p.168

Exercice 4

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto x^3$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

Remarque On verra dans la section suivante qu'il y a plus rapide pour montrer la convexité des fonctions f et g en étudiant leurs dérivées.

p.168

Exercice 5 Soit f et g deux fonctions convexes sur I.
Montrer que $f+g$ est une fonction convexe mais que fg ne l'est pas nécessairement.

p.169

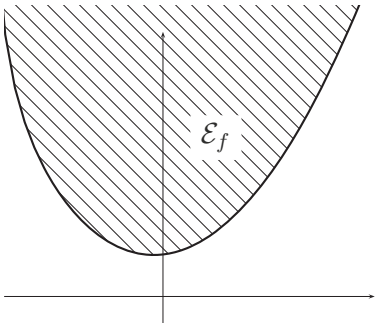
Exercice 6 Soit f une fonction de I dans J et g une fonction de J dans $\mathbb{R}$. On suppose f et g convexes.

1. Montrer que la composée $g \circ f$ n'est pas toujours une fonction convexe.
2. Montrer que si g est croissante alors $g \circ f$ est convexe.

2 Caractérisation géométrique

On considère toujours une fonction f définie sur un intervalle I. Son **épigraphe** est défini par :

$$\mathcal{E}_f = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x \in I \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y\Big\}.$$



Proposition 5

La fonction f est convexe si, et seulement si, son épigraphe est une partie convexe du plan, c'est-à-dire si, et seulement si, on a :

$$\forall (M_1, M_2) \in \mathcal{E}_f \times \mathcal{E}_f \quad [M_1, M_2] \subset \mathcal{E}_f.$$

Démonstration page 169

p.170

Exercice 7 Montrer que si f et g sont deux fonctions convexes sur I, alors la fonction $\sup(f,g)$ aussi.

3 Inégalité de convexité

Proposition 6

Étant donné une fonction f convexe et une famille $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de réels positifs telle que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, on a :

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in I^p \quad f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i).$$

Principe de démonstration. Utilisez la caractérisation de la convexité à l'aide de l'épigraphe.

Démonstration page 170

p.170 **Exercice 8** Montrer le résultat précédent par récurrence.

Remarque Si f est une fonction convexe sur I et si λ_1, λ_2, …, λ_p sont des réels positifs non tous nuls, on a :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in I^p \quad f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p}\right) \leqslant \frac{\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_p f(x_p)}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p}.$$

Exemple Par convexité de $x \mapsto x^2$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad \text{donc} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

4 Caractérisation en terme de pente

Proposition 7 (Inégalité des pentes)

Soit f une fonction convexe sur I. On a :

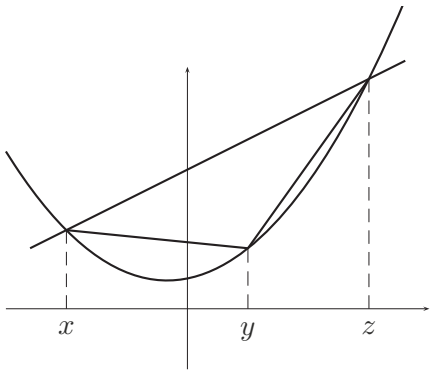
$$\forall (x, y, z) \in I^3 \quad x < y < z \Longrightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Principe de démonstration. Faire un dessin et exprimer y comme un barycentre de x et z.

Démonstration page 171

Remarques

- Ces inégalités s'expriment en terme de pentes de droites et se retiennent facilement à l'aide d'un dessin.



- La propriété précédente est en fait une équivalence comme le montre l'exercice suivant.

p.171

Exercice 9 Réciproque améliorée

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i)\quad \forall (x,y,z)\in I^3 \quad x<y<z \Longrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x},$$

$$(ii)\quad \forall (x,y,z)\in I^3 \quad x<y<z \Longrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y},$$

$$(iii)\quad \forall (x,y,z)\in I^3 \quad x<y<z \Longrightarrow \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

2. Montrer que chacune des propriétés précédentes implique la convexité de f.

Corollaire 8

Soit f une fonction concave sur I. On a :

$$\forall (x,y,z)\in I^3 \quad x<y<z \Longrightarrow \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Proposition 9

Une fonction f définie sur un intervalle I est convexe si, et seulement si, pour tout $a\in I$, la fonction φ_a : $\begin{array}{ccc} I\setminus\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$ est croissante.

Démonstration page 172

Exemple Si p et q sont deux réels, la fonction $g : x\mapsto f(x)-p\,x-q$ est convexe si, et seulement si, f est convexe. En effet, les fonctions φ_a correspondant à f et à g diffèrent de la constante p.

Attention Dans la proposition précédente, il s'agit bien de la croissance de φ_a sur $I\setminus\{a\}$ et pas seulement de sa croissance sur chacun des deux intervalles $I\cap\,]-\infty,a[$ et $I\cap\,]a,+\infty[$.

Corollaire 10

Une fonction f définie sur un intervalle I est concave si, et seulement si, pour tout $a\in I$, la fonction φ_a : $\begin{array}{ccc} I\setminus\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$ est décroissante.

p.172

Exercice 10 Montrer que la fonction f est à la fois convexe et concave si, et seulement si, f est affine.

III Convexité et dérivabilité

1 Caractérisation des fonctions dérivables convexes

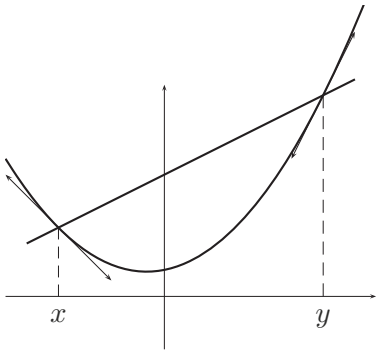
Proposition 11

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction f est convexe si, et seulement si, la fonction f' est croissante.

Démonstration page 173

Remarques



- Dans la première partie de la démonstration précédente, on a en fait établi que si f est une fonction convexe, on a :
$$x < y \Longrightarrow f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y),$$
résultat très facile à retrouver sur un dessin.
- Comme le théorème des accroissements finis sur lequel elle est fondée, la réciproque nécessite en fait seulement la continuité de f sur I et la dérivabilité sur I privé de ses bornes.

Par exemple, la fonction Arcsin, qui est continue sur $[-1,1]$, est concave sur $[-1,0]$ et convexe sur $[0,1]$, comme le prouvent les variations sur $]-1,1[$ de sa dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exemples

1. On retrouve rapidement la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$.
2. La monotonie de leurs dérivées prouve que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ et la fonction logarithme concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Corollaire 12

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

La fonction f est convexe si, et seulement si, f'' est positive.

Démonstration. En effet, sous cette hypothèse, f' est croissante sur l'intervalle I si, et seulement si, $f'' \geqslant 0$. □

Corollaire 13

- Une fonction f dérivable sur un intervalle I est concave si, et seulement si, la fonction f' est décroissante.
- Une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I est concave si, et seulement si, f'' est négative.

p.173 **Exercice 11** Soit a et b deux réels positifs et $(p,q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Montrer l'**inégalité de Young** : $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{a^q}{q}$.

p.174 **Exercice 12 Lien entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels positifs.

1. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Montrer l'inégalité :
$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i.$$
2. Prouver et interpréter l'**inégalité arithmético-géométrique** :
$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

p.174 **Exercice 13** Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $[a,b]$ vérifiant $f(a)=f(b)=0$ et dont la dérivée seconde est bornée par M sur $[a,b]$.

Montrer que :
$$\forall x \in [a,b] \quad \left|f(x)\right| \leqslant \frac{M}{2}(x-a)\,(b-x).$$

2 Position par rapport à la tangente

Proposition 14

Si f est une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I, on a :
$$\forall (x,a) \in I^2 \quad f(x) \geqslant f(a) + (x-a)\, f'(a).$$

Démonstration page 174

Corollaire 15

Si f est une fonction concave et dérivable sur un intervalle I, on a :
$$\forall (x,a) \in I^2 \quad f(x) \leqslant f(a) + (x-a)\, f'(a).$$

Remarque Les résultats précédents peuvent s'exprimer en disant que :

- le graphe d'une fonction convexe dérivable est situé au-dessus de chacune de ses tangentes,
- le graphe d'une fonction concave dérivable est situé en-dessous de chacune de ses tangentes.

p.174

Exercice 14

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp x \geqslant x+1$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x \leqslant x-1$.
3. Montrer que $\forall x \in [0, \pi/2] \quad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$.

Point méthode

Des inégalités du type de l'exercice précédent peuvent aussi être obtenues par étude de fonctions ou en utilisant l'inégalité des accroissements finis.

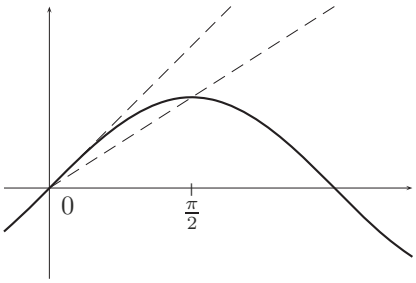
Lorsqu'une des deux fonctions est affine, l'inégalité a souvent une interprétation graphique en terme de tangente ou en terme de corde ce qui permet de la démontrer par des arguments de convexité.

Exemple

Un graphique permet de visualiser que les inégalités :

$$\forall x \in [0, \pi/2] \quad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$$

découlent de la position du graphe de la fonction sinus par rapport à sa tangente à l'origine et sa corde reliant les points d'abscisses 0 et $\pi/2$.



p.175

Exercice 15 Cas de convergence dans la méthode de Newton

Soit f une fonction dérivable dont la dérivée est strictement positive sur un intervalle I. On suppose que f est concave sur I et qu'il existe un point $a \in I$ tel que $f(a) = 0$.

Soit $u_0 \in I$ tel que $u_0 \leqslant a$. On considère la suite définie par $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

Montrer que cette suite est bien définie et qu'elle converge vers a.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 3 Il est clair que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est convexe.

Réciproquement, soit I une partie convexe de $\mathbb{R}$. Si I est vide alors c'est un intervalle de $\mathbb{R}$. Supposons donc I non vide.

On définit les éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ suivants :

$$a = \begin{cases} \inf I & \text{si } I \text{ est minoré} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad b = \begin{cases} \sup I & \text{si } I \text{ est majoré} \\ +\infty & \text{sinon .} \end{cases}$$

Par définition de a et b, $I \subset [a,b]$. Montrons que $]a,b[\subset I$.

Soit $c \in]a,b[$ alors, par caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure, il existe $c_- \in I \cap]a,c[$ et $c_+ \in I \cap]c,b[$. Comme I est convexe, on en déduit que :

$$c \in [c_-, c_+] \subset I.$$

Ainsi, $]a,b[\subset I \subset [a,b]$. Suivant que les éléments a et b soient réels ou pas et appartiennent à I ou pas, on obtient un intervalle, comme précisé dans le tableau suivant :

	$b \in I$	$b \in \mathbb{R} \setminus I$	$b = +\infty$
$a \in I$	$I = [a,b]$	$I = [a,b[$	$I = [a,+\infty[$
$a \in \mathbb{R} \setminus I$	$I =]a,b]$	$I =]a,b[$	$I =]a,+\infty[$
$a = -\infty$	$I =]-\infty,b]$	$I =]-\infty,b[$	$I =]-\infty,+\infty[$

Exercice 1

1. Soit C_1 et C_2 deux convexes de E. Soit $(x,y) \in (C_1 \cap C_2)^2$ et $\lambda \in [0,1]$.
   Comme C_1 est convexe, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C_1$. De même, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C_2$.
   Donc $\lambda x + (1-\lambda)y \in C_1 \cap C_2$. Par suite, $C_1 \cap C_2$ est convexe.
2. Une intersection quelconque de convexes est convexe. En effet, soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de convexes et $C = \bigcap_{i\in I} C_i$. Soit $(x,y) \in C^2$ et $\lambda \in [0,1]$.
   Pour tout $i \in I$, comme C_i est convexe, $\lambda x+(1-\lambda)y \in C_i$. Donc $\lambda x+(1-\lambda)y \in C$. Par suite, C est convexe.
3. L'union de deux convexes n'est pas nécessairement un convexe. Par exemple $[0,1]$ et $[3,4]$ sont deux convexes de $\mathbb{R}$ mais leur union U ne l'est pas car 2 est l'isobarycentre de 1 et 3, éléments de U, mais 2 n'appartient pas à U.
   Plus simplement, l'union de deux singletons distincts $\{a\}$ et $\{b\}$ n'est pas convexe car $\frac{a+b}{2} \notin \{a\} \cup \{b\}$.
4. L'ensemble M des milieux des convexes C_1 et C_2 est convexe.
   En effet, soit $(x,y) \in M^2$ et $\lambda \in [0,1]$. Il existe $(c_1,c_1',c_2,c_2') \in C_1^2 \times C_2^2$ tel que $x = \dfrac{c_1+c_2}{2}$ et $y = \dfrac{c_1'+c_2'}{2}$. Comme C_1 est convexe, $c_1'' = \lambda c_1 + (1-\lambda)c_1' \in C_1$.
   De même, $c_2'' = \lambda c_2 + (1-\lambda)c_2' \in C_2$. Ainsi, on a :
   $$\lambda x + (1-\lambda)y = \frac{c_1''+c_2''}{2} \in M;$$
   donc M est convexe.

Proposition 4

- Grâce à la proposition 1 de la page 155, on a $(2) \Leftrightarrow (3)$.
- $(2) \Rightarrow (1)$. Soit C une partie stable par barycentres à coefficients positifs.

  Considérons $(c_1, c_2) \in C^2$ et $\lambda \in [0,1]$. Les réels λ et $1-\lambda$ sont alors positifs donc $\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2$ est un barycentre à coefficients positifs d'éléments de C.

  Ainsi, $\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 \in C$, ce qui prouve la convexité de C.
- $(1) \Rightarrow (3)$. Soit C une partie convexe. Montrons, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, que si $x_1, \ldots, x_p$ sont des éléments de C et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ appartient à C.

  Le résultat est évident pour $p = 1$. Supposons-le vrai pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ et considérons $x_1, \ldots, x_{p+1}$ des éléments de C ainsi que $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$ des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1$.

  Si $\lambda_{p+1} = 1$, alors $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i = x_{p+1}$ appartient à C par hypothèse.

  Sinon, on a $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 - \lambda_{p+1} \neq 0$ donc :

  $$\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i = (1-\lambda_{p+1}) \frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p} + \lambda_{p+1} x_{p+1}.$$

  Or, par hypothèse de récurrence, $\dfrac{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i}$ est un élément de C. Par convexité, on en déduit que $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i$ appartient à C.

Exercice 2 Notons x_1 et x_2 les abscisses respectives des points A_1 et A_2 et supposons que $x_1 < x_2$.

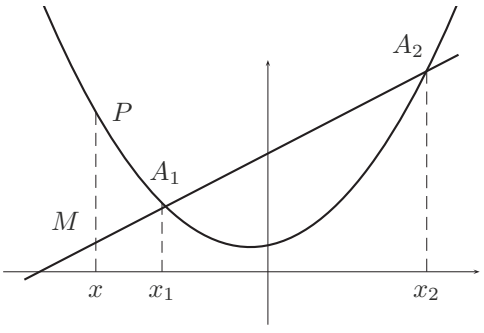
- On a déjà prouvé que le graphe de $f_{|[x_1,x_2]}$ est situé au-dessous de $[A_1, A_2]$.
- Étudions la position du graphe de $f_{|]-\infty,x_1]}$ par rapport à la droite (A_1A_2).

  Soit $x \in]-\infty, x_1]$, il existe $\lambda \in]0,1]$ tel que :

  $$x_1 = \lambda x + (1-\lambda)x_2.$$

  La fonction f étant convexe, on a donc $f(x_1) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x_2)$ puis :

  $$\frac{1}{\lambda} f(x_1) - \frac{1-\lambda}{\lambda} f(x_2) \leqslant f(x).$$



Or, les points P et M d'abscisse x se trouvant respectivement sur Γ et sur la droite (A_1, A_2), admettent respectivement $f(x)$ et $\dfrac{1}{\lambda}f(x_1) - \dfrac{1-\lambda}{\lambda}f(x_2)$ pour ordonnées.

Par conséquent, le graphe de $f_{|]-\infty,x_1]}$ est situé au-dessus de la droite (A_1A_2).

- Étudions la position du graphe de $f_{|[x_2,+\infty[}$ par rapport à la droite (A_1A_2).

  Soit $x \in [x_2, +\infty[$; il existe $\lambda \in [0,1[$ tel que :

$$x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x.$$

  La fonction f étant convexe, on a donc $f(x_2) \leqslant \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x)$ puis :

$$\frac{1}{1-\lambda}f(x_2) - \frac{\lambda}{1-\lambda}f(x_1) \leqslant f(x).$$

  Les points P et M d'abscisse x se trouvant respectivement sur Γ et sur la droite (A_1A_2), admettent respectivement $f(x)$ et $\dfrac{1}{1-\lambda}f(x_2) - \dfrac{\lambda}{1-\lambda}f(x_1)$ pour ordonnées. Par conséquent, le graphe de $f_{|[x_2,+\infty[}$ est situé au-dessus de la droite (A_1A_2).

Exercice 3 Soit $x \in [a,b]$. Il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $x = \lambda a + (1-\lambda)b$. Comme f est convexe, on en déduit que :

$$f(x) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) = f(a).$$

Graphiquement, cette inégalité découle simplement du fait que la corde reliant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ a pour équation $y = f(a)$.

Exercice 4

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned} f\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y\big) - \lambda\, f(x) - (1-\lambda)\, f(y) &= \lambda(1-\lambda)(2xy - x^2 - y^2) \\ &= -\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

   Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. On a $-1/2 = 1/2 \times 0 + 1/2 \times (-1)$ et $g(-1/2) = -1/8 > 1/2 \times g(0) + 1/2 \times g(-1)$ donc g n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

1. Soit $(x,y) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$. On a :

   $f\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y\big) \leqslant \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$ et $g\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y\big) \leqslant \lambda\, g(x) + (1-\lambda)\, g(y)$

   donc

$$(f+g)\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y\big) \leqslant \lambda\, (f+g)(x) + (1-\lambda)\, (f+g)(y);$$

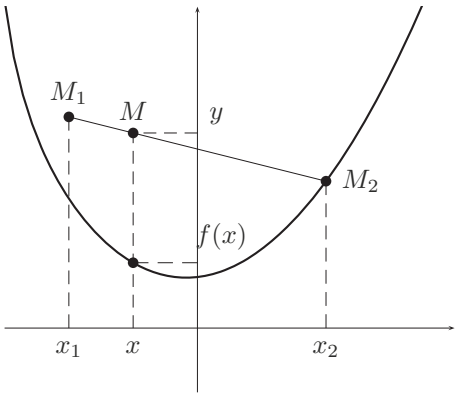
   ce qui prouve $f+g$ est convexe sur I.
2. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$ mais leur produit ne l'est pas.

Exercice 6

1. Les fonctions $g : x \mapsto -x$ et $f : x \mapsto x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$ mais leur composée $g \circ f : x \mapsto -x^2$ ne l'est pas.
2. Soit $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a :
$$f\big(\lambda x + (1-\lambda) y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
donc la croissance de g implique que :
$$(g \circ f)\big(\lambda x + (1-\lambda) y\big) \leqslant g\big(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\big).$$
Comme g est convexe, on a :
$$g\big(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\big) \leqslant \lambda (g \circ f)(x) + (1-\lambda) (g \circ f)(y)$$
donc :
$$(g \circ f)\big(\lambda x + (1-\lambda) y\big) \leqslant \lambda (g \circ f)(x) + (1-\lambda) (g \circ f)(y);$$
ce qui prouve $g \circ f$ est convexe sur I.

Proposition 5

- Supposons f convexe sur I.
Étant donnés deux points M_1 et M_2 de $\mathcal{E}_f$ de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2), tout point M de coordonnées (x, y) du segment $[M_1, M_2]$ est barycentre des points (M_1, λ) et $(M_2, 1-\lambda)$ avec $\lambda \in [0, 1]$.
On a donc :
$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$$
$$y = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2.$$



La fonction f étant convexe, on a :
$$f(x) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$
Comme les points M_1 et M_2 appartiennent à $\mathcal{E}_f$, on a $f(x_1) \leqslant y_1$ et $f(x_2) \leqslant y_2$. Les réels λ et $1-\lambda$ étant positifs,on en déduit que :
$$f(x) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \leqslant \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 = y,$$
ce qui prouve que le point M appartient à $\mathcal{E}_f$. Ainsi, $\mathcal{E}_f$ est une partie convexe du plan.

- Supposons $\mathcal{E}_f$ convexe, c'est-à-dire :
$$\forall (M_1, M_2) \in \mathcal{E}_f \times \mathcal{E}_f \quad [M_1, M_2] \subset \mathcal{E}_f.$$
Soit A_1 et A_2 deux points de Γ d'abscisses respectives x_1 et x_2. Comme A_1 et A_2 appartiennent à $\mathcal{E}_f$, tout point M du segment $[A_1, A_2]$, de coordonnées (x, y), appartient à $\mathcal{E}_f$, et par suite $f(x) \leqslant y$. Le graphe de $f_{|[x_1, x_2]}$ est donc en dessous du segment $[A_1, A_2]$, ce qui prouve que f est convexe.

Exercice 7 L'épigraphe de la fonction $\sup(f,g)$ est l'intersection des épigraphes des fonctions f et g. En effet, pour tout $(x,y)\in I\times\mathbb{R}$, on a :

$$(x,y)\in\mathcal{E}_{\sup(f,g)} \iff \sup(f,g)(x)\leqslant y \iff f(x)\leqslant y \text{ et } g(x)\leqslant y \iff (x,y)\in\mathcal{E}_f\cap\mathcal{E}_g.$$

L'intersection de deux convexes étant convexe, si les fonctions f et g sont convexes alors l'épigraphe de la fonction $\sup(f,g)$ aussi, ce qui prouve la convexité de $\sup(f,g)$.

On peut aussi démontrer ce résultat en revenant à la définition.

Pour cela, considérons $(x,y)\in I^2$ et $\lambda\in[0,1]$. Comme f est convexe, on a $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$. Or λ et $1-\lambda$ sont des réels positifs, donc :

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda\sup(f,g)(x)+(1-\lambda)\sup(f,g)(y).$$

De même, $g(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda\sup(f,g)(x)+(1-\lambda)\sup(f,g)(y)$. Ainsi :

$$\sup(f,g)(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda\sup(f,g)(x)+(1-\lambda)\sup(f,g)(y);$$

ce qui prouve la convexité de $\sup(f,g)$.

Proposition 6 Soit $(x_1,x_2,\dots,x_p)\in I^p$. Les points $(x_i,f(x_i))_{1\leqslant i\leqslant p}$ appartiennent à l'épigraphe de f donc leur barycentre $\left(\sum_{i=1}^p\lambda_i x_i,\sum_{i=1}^p\lambda_i f(x_i)\right)$ aussi, c'est-à-dire :

$$f\left(\sum_{i=1}^p\lambda_i\,x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^p\lambda_i\,f(x_i).$$

Exercice 8 Démontrons par récurrence sur $p\in\mathbb{N}^*$ la propriété H_p :

« pour tout $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p)\in(\mathbb{R}_+)^p$ et pour tout $(x_1,x_2,\dots,x_p)\in I^p$, on a :

$$\sum_{i=1}^p\lambda_i=1\Longrightarrow f\Big(\sum_{i=1}^p\lambda_i\,x_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^p\lambda_i f(x_i).\ \text{»}$$

- H_1 est vraie de façon évidente car si $p=1$ alors $\lambda_1=1$.
- Supposons H_{p-1} avec $p\geqslant 2$. Soit une famille $(x_1,x_2,\dots,x_p)\in I^p$ ainsi qu'une famille $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p)$ de réels positifs vérifiant $\sum_{i=1}^p\lambda_i=1$. Le point $\sum_{i=1}^p\lambda_i\,x_i$ appartient bien à I, comme barycentre à coefficients positifs d'éléments de I.
  - Si $\lambda_p=1$, alors pour tout $i\in[\![1,p-1]\!]$ on a $\lambda_i=0$ car les λ_i sont positifs. Par suite :
  $$f\left(\sum_{i=1}^p\lambda_i\,x_i\right)=f(x_p)=\sum_{i=1}^p\lambda_i f(x_i).$$
  - Si $\lambda_p\neq 1$, on peut écrire :
  $$\sum_{i=1}^p\lambda_i\,x_i=\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i\,x_i+\lambda_p\,x_p=(1-\lambda_p)\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_p}\,x_i+\lambda_p\,x_p.$$

La somme des réels positifs $\left(\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_p}\right)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ étant égale à 1, le réel

$$y_p = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_p}\, x_i$$

appartient à I et la propriété H_{p-1} donne :

$$f(y_p) = f\left(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_p}\, x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_p}\, f(x_i).$$

La convexité de f entraîne alors :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, x_i\right) &= f\left((1-\lambda_p)\, y_p + \lambda_p\, x_p\right) \\ &\leqslant (1-\lambda_p)\, f(y_p) + \lambda_p\, f(x_p) \\ &\leqslant (1-\lambda_p)\left(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_p}\, f(x_i)\right) + \lambda_p\, f(x_p) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i), \end{aligned}$$

ce qui prouve H_p.

Proposition 7 Soit x, y et z des éléments de I vérifiant $x < y < z$.

En posant $\lambda = \dfrac{z-y}{z-x}$, on a $y = \lambda x + (1-\lambda)z$ et $\lambda \in [0,1]$, ce qui implique que :

$$f(y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z).$$

Ainsi, on a $\lambda\,(f(y) - f(x)) \leqslant (1-\lambda)\,(f(z) - f(y))$, c'est-à-dire :

$$\frac{z-y}{z-x}\,(f(y) - f(x)) \leqslant \frac{y-x}{z-x}\,(f(z) - f(y))\,;$$

ce qui conduit à la première inégalité car $x < y < z$.

De même, on obtient :

$$f(y) - f(z) \leqslant \lambda\,(f(x) - f(z)) = \frac{z-y}{z-x}\,(f(x) - f(z))\,;$$

ce qui conduit à la seconde inégalité car $y < z$.

Exercice 9

1. Comme $x < y < z$, chacune des propriétés est équivalente à :
$$f(x)(y-z) + f(y)(z-x) + f(z)(x-y) \leqslant 0.$$
2. Supposons cette propriété vérifiée et montrons que f est convexe. Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$ et $\lambda \in]0,1[$. Si l'on pose $t = \lambda x + (1-\lambda)y$ alors $x < t < y$ donc :
$$f(x)(t-y) + f(t)(y-x) + f(y)(x-t) \leqslant 0.$$
Comme $t - y = \lambda(x-y)$, $x - t = (1-\lambda)(x-y)$ et $y - x > 0$, on obtient :
$$f(t) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
ce qui prouve la convexité de f, grâce à la remarque de la page 159.

Proposition 9

- Supposons f convexe sur I et $a \in I$. Montrons la croissance de la fonction φ_a.
  Soit $(x, x') \in (I \setminus \{a\})^2$ tel que $x < x'$.
  - Si $a < x < x'$, alors on a :
    $$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(x') - f(a)}{x' - a},$$
    c'est-à-dire $\varphi_a(x) \leqslant \varphi_a(x')$.
  - Si $x < a < x'$, alors on a :
    $$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leqslant \frac{f(x') - f(a)}{x' - a},$$
    c'est-à-dire $\varphi_a(x) \leqslant \varphi_a(x')$.
  - Si $x < x' < a$, alors on a :
    $$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leqslant \frac{f(a) - f(x')}{a - x'},$$
    c'est-à-dire $\varphi_a(x) \leqslant \varphi_a(x')$.

  La fonction φ_a est donc croissante.
- Réciproquement, supposons que pour tout $a \in I$, la fonction φ_a soit croissante.
  Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$ et $\lambda \in]0, 1[$. Posons $a = \lambda x + (1-\lambda)y$. La croissance de la fonction φ_a implique alors que :
  $$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(y) - f(a)}{y - a}.$$
  Comme $x - a = (1 - \lambda)(x - y) < 0$ et $y - a = \lambda(y - x) > 0$, on a :
  $$(x - a)\,(f(y) - f(a)) \leqslant (y - a)\,(f(x) - f(a))\,.$$
  Comme $y - x > 0$, on obtient :
  $$f(a) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y);$$
  ce qui prouve la convexité de f.

Exercice 10 Si f est une fonction affine, alors pour tout $a \in I$, la fonction $\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$ est constante donc croissante et décroissante, ce qui prouve que f est à la fois convexe et concave.

Réciproquement, supposons f à la fois convexe et concave. Si l'on fixe $a \in I$, alors la fonction $\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$ est croissante et décroissante donc constante.

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x \in I \setminus \{a\} \quad f(x) = f(a) + C(x - a).$$
L'égalité étant également vraie en a, f est une fonction affine.

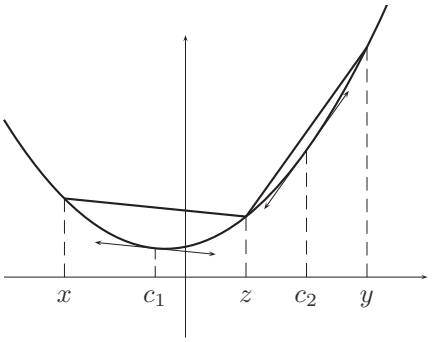
Proposition 11

- Supposons f convexe. Soit x et y deux points de I tels que $x < y$.
  - Soit $t \in]x, y[$. La proposition 7 de la page 161 donne :
$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$
    En passant à la limite lorsque t tend vers x à droite, on obtient :
$$f'(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$
  - De la même façon, grâce à l'inégalité $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(t)}{y-t}$ valable pour tout $t \in]x, y[$, on obtient :
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y).$$

  Par conséquent :
$$f'(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y);$$
  ce qui prouve la croissance de f'.
- Supposons f' croissante.

  Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$ et $\lambda \in]0, 1[$. Posons $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

  D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_1 \in]x, z[$ et $c_2 \in]z, y[$ tels que :
$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(c_1)$$
  et :
$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(c_2).$$



  Comme $x < c_1 < z < c_2 < y$, la croissance de f' implique que $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$, ce qui donne $\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$, c'est-à-dire $\frac{f(z) - f(x)}{(1 - \lambda)(y - x)} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{\lambda(y - x)}$.

  Comme λ, $1 - \lambda$ et $y - x$ sont des réels strictement positifs, on en déduit que :
$$f(z) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

  Par conséquent, f est convexe.

Exercice 11 Si a ou b est nul, alors l'inégalité est évidente.

Supposons donc a et b strictement positifs. La fonction ln étant concave, on a alors :
$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q \quad \text{soit} \quad \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \ln(ab).$$

La fonction exp étant croissante, cela entraîne l'inégalité demandée.

Exercice 12

1. Si l'un des x_i est nul, l'inégalité est évidente.
   Supposons donc les x_i strictement positifs. La concavité de la fonction logarithme permet alors d'écrire :
   $$\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,x_i\right)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ln x_i=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\lambda_i}\right)$$
   ce qui, puisque la fonction exponentielle est croissante, implique :
   $$\prod_{i=1}^{n}x_i^{\lambda_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,x_i.$$

2. En particulier, pour $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\dfrac{1}{n}$, on obtient :
   $$\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,$$
   ce que l'on peut exprimer en disant que la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique.

Exercice 13 La fonction g définie par :
$$g(x)=f(x)-M\,\frac{(x-a)\,(b-x)}{2}$$
a pour dérivée seconde $g''=f''+M$ qui est positive sur $[a,b]$. La fonction g est donc convexe et, comme elle est nulle en a et b, elle est négative sur $[a,b]$.

On prouve de même que la fonction h définie par :
$$h(x)=f(x)+M\,\frac{(x-a)\,(b-x)}{2}$$
est concave puis positive sur $[a,b]$. Au final on a donc prouvé :
$$\forall x\in[a,b]\quad\big|f(x)\big|\leqslant M\,\frac{(x-a)\,(b-x)}{2}.$$

Proposition 14 La fonction $\varphi_a:\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I\setminus\{a\}$ et tend vers $f'(a)$ en a par dérivabilité de f. On a donc, pour tout $x\in I$:
$$x<a\implies\varphi_a(x)\leqslant f'(a)\qquad\text{et}\qquad x>a\implies\varphi_a(x)\geqslant f'(a).$$
Par conséquent, $f(x)-f(a)\geqslant(x-a)\,f'(a)$ pour tout $x\in I$ (le cas $x=a$ est évident).

Exercice 14

1. Une équation de la tangente en 0 de la fonction convexe exp est :
   $$y=\exp(0)+\exp'(0)\times x=x+1,$$
   d'où l'inégalité.

2. Une équation de la tangente en 1 de la fonction concave ln est :
$$y = \ln(1) + \ln'(1) \times (x-1) = x - 1,$$
d'où l'inégalité.
3. La fonction sin est concave sur $[0, \pi/2]$. Une équation de la tangente en 0 de la fonction sin est $y = \sin(0) + \sin'(0) \times x = x$, d'où l'inégalité :
$$\forall x \in [0, \pi/2] \quad \sin x \leqslant x.$$
La corde reliant les points de coordonnées $(0, \sin(0)) = (0, 0)$ et $(\pi/2, \sin(\pi/2)) = (\pi/2, 1)$ a pour équation $y = \frac{2}{\pi}x$. La concavité de f sur $[0, \pi/2]$ implique alors que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x$.

Exercice 15

- Montrons que pour tout réel $v \in I$, on a $v \leqslant a \Rightarrow v \leqslant v - \dfrac{f(v)}{f'(v)} \leqslant a$, ce qui prouvera que la suite u est bien définie, à valeurs dans $[u_0, a]$ et croissante.
Soit $v \in I$ tel que $v \leqslant a$. La croissance de f implique alors $f(v) \leqslant f(a) = 0$. On a donc $v \leqslant v - \dfrac{f(v)}{f'(v)}$ car f' est positive.
Comme f est concave, la courbe représentative de f est en-dessous de sa tangente en v qui a pour équation $y = f(v) + f'(v)(x - v)$. Par suite :
$$0 = f(a) \leqslant f(v) + f'(v)(a - v).$$
La positivité de f' conduit alors à $v - \dfrac{f(v)}{f'(v)} \leqslant a$. Par conséquent, la suite u est bien définie et :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant a$$
- Ainsi la suite u est croissante et majorée par a. Elle converge donc vers une limite ℓ.
Comme f est concave, la fonction f' est croissante, ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \frac{f(u_n)}{f'(u_0)} \leqslant \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = u_n - u_{n+1}.$$
Par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = 0$. La continuité de f conduit alors à $f(\ell) = 0$. Enfin, la stricte monotonie de f implique que $\ell = a$.

S'entraîner et approfondir

3.1 Soit A une partie de E.

1. Montrer qu'il existe un plus petit (au sens de l'inclusion) convexe contenant A. On l'appelle l'enveloppe convexe de A et on le note $\mathrm{Conv}(A)$.
2. Montrer que $\mathrm{Conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points de A.

⋆ **3.2 Théorème de Carathéodory**

On reprend les notations de l'exercice précédent et l'on considère une partie A d'un espace vectoriel E de dimension n.

Montrer que tout élément de $\mathrm{Conv}(A)$ est un barycentre à coefficients positifs de $n+1$ points de A.

3.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Montrer que :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots x_n}{n}.$$

3.4 Soit f et g deux fonctions convexes, positives et de même monotonie sur I.

1. On suppose f et g deux fois dérivables. Montrer que fg est convexe.
2. Montrer que le résultat est conservé dans le cas général.

3.5 Une fonction f de I dans $\mathbb{R}_+^*$ est dite logarithmiquement convexe si $\ln f$ est convexe.

1. Montrer que si f est logarithmiquement convexe alors f est convexe.
   La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}_+^*$.
   Montrer que f est logarithmiquement convexe si, et seulement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto f(x)\alpha^x$ est convexe.

3.6 Soit f une fonction convexe strictement monotone d'un intervalle I sur un intervalle J.

Que peut-on dire de f^{-1} en terme de convexité ou de concavité ?

On discutera suivant que f est croissante ou décroissante.

3.7 Soit f une fonction convexe définie sur $\mathbb{R}_+^*$ croissante mais non constante.

Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

3.8 Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$.

1. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0$, montrer que f est positive.
2. On suppose que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet une asymptote $\mathcal{D}$.
   Quelles sont les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$?

3.9 1. Soit f une fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante. Le résultat est-il conservé si f est convexe et majorée sur $[A, +\infty[$?
2. En déduire que si f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ bornée et non constante, alors il existe t_1 et t_2 tels que $f''(t_1)f''(t_2) < 0$.

3.10 Soit f une fonction convexe sur un intervalle borné $]a, b[$, montrer que f est minorée.

3.11 Soit f une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
Montrer que :

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

3.12 Soit x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 > 1$ et $x_2 > 1$.
Montrer que :

$$\ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln x_1 \ln x_2}.$$

3.13 Soit p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ainsi que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des nombres réels positifs.
1. Montrer l'inégalité de **Hölder** :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. En déduire l'inégalité de **Minkowski** :

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3.14 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

3.15 Soit f une fonction convexe sur un intervalle I et a un point intérieur de I.
1. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche au point a et que :

$$f'_g(a) \leqslant f'_d(a).$$

En déduire que f est continue en tout point intérieur de I.
2. Donner un exemple de fonction convexe sur $[0,1]$ mais non continue sur $[0,1]$.
3. Donner un exemple de fonction convexe sur $[0,1]$ continue mais non dérivable (à droite) en 0.

Solution des exercices

3.1 1. Posons K l'intersection de tous les convexes contenant A. D'après l'exercice 1 de la page 158, l'ensemble K est un convexe contenant K. Si K' est un autre convexe contenant A, alors, par définition de K, on a $K \subset K'$, ce qui prouve que K est le plus petit convexe contenant A.

2. Soit B l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points de A. Il est clair que $A \subset B$ et la proposition 2 de la page 155 implique la convexité de B.

Par conséquent, $\mathrm{Conv}(A) \subset B$.

Réciproquement, tout élément de B est un barycentre à coefficients positifs des points de A donc de points de $\mathrm{Conv}(A)$. La proposition 4 de la page 158 et la convexité de $\mathrm{Conv}(A)$ implique donc que $B \subset \mathrm{Conv}(A)$ puis que $B = \mathrm{Conv}(A)$.

3.2 Soit $b \in \mathrm{Conv}(A)$. Il existe donc $a_1, \dots a_p$ éléments de A et une famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de réels positifs telle que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ et telle que b soit égal au barycentre des points pondérés $\big((a_i, \lambda_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant p}$.

Si $p \leqslant n+1$ alors le résultat est démontré.

Supposons que $p > n+1$ et montrons que b est le barycentre à coefficients positifs de $p-1$ points de A. Le résultat sera donc démontré par récurrence.

Comme E est de dimension n, les vecteurs $(a_i - a_1)_{2\leqslant i\leqslant p}$ sont liés donc il existe une famille $(\alpha_i)_{2\leqslant i\leqslant p}$ de réels non tous nuls tels que $\sum_{i=2}^{p} \alpha_i(a_i - a_1) = 0$.

On pose $\alpha_1 = -\sum_{i=2}^{p} \alpha_i$ de sorte que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$.

Ainsi, pour tout réel t, on a $b = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - t\alpha_i)\, a_i$. On cherche donc t tel que pour tout i, $\lambda_i - t\alpha_i$ soit positif et que l'un de ces coefficients soit nul.

Il existe alors un indice i tel que $\alpha_i > 0$ car sinon, comme $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$, on aurait $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$. Par suite, il existe un indice i_0 tel que $\alpha_{i_0} > 0$ et :

$$\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} = \min\left\{\frac{\lambda_k}{\alpha_k}\,;\ k \in [\![1,p]\!] \text{ et } \alpha_k > 0\right\}.$$

On prend $t_0 = \dfrac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}$. Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Si $\alpha_i > 0$, on a $\dfrac{\lambda_i}{\alpha_i} \geqslant t_0$ donc $\lambda_i - t_0\alpha_i$ positif. Sinon, $\lambda_i - t_0\alpha_i$ est positif car t_0 est positif.

Par définition, $\lambda_{i_0} - t_0\alpha_{i_0} = 0$ donc b peut s'écrire comme barycentre à coefficients positifs de $p-1$ points de A et le résultat est démontré.

3.3 La fonction $x \mapsto \ln x$ étant concave , on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right);$$

d'où :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

On remplace ensuite x_k par $\dfrac{1}{x_k}$ pour avoir la première partie de l'inégalité.

3.4 1. La fonction fg est deux foix dérivable et $(fg)'' = f''g + 2f'g' + g''f$. L'hypothèse de convexité implique $f'' \geqslant 0$ et $g'' \geqslant 0$ et celle de monotonie conduit à $f'g' \geqslant 0$. La caractérisation donnée par le corollaire 12 permet alors de conclure.

2. Soit $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$.
Comme les fonctions f et g sont positives, les inégalités de convexité conduisent à :

$$\begin{aligned}(fg)\big(\lambda x + (1-\lambda)\, y\big) &\leqslant \big(\lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y)\big)\big(\lambda g(x) + (1-\lambda)\, g(y)\big)\\ &\leqslant \lambda(fg)(x) + (1-\lambda)(fg)(y) + (\star),\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}(\star) &= (\lambda^2 - \lambda)\Big((fg)(x) + (fg)(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x)\Big)\\ &= (\lambda^2 - \lambda)\big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big).\end{aligned}$$

L'hypothèse de même monotonie implique alors que :

$$\big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big) \geqslant 0.$$

Ainsi, comme $\lambda \in [0, 1]$, on a $(\star) \leqslant 0$ donc :

$$(fg)\big(\lambda x + (1-\lambda)\, y\big) \leqslant \lambda\,(fg)(x) + (1-\lambda)\,(fg)(y),$$

ce qui prouve la convexité de la fonction fg.

3.5 1. Soit f une fonction logarithmiquement convexe.
Considérons $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a :

$$\ln f\big(\lambda x + (1-\lambda)\, y\big) \leqslant \lambda \ln f(x) + (1-\lambda) \ln f(y)$$

donc la croissance de la fonction exponentielle implique que :

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)\, y\big) \leqslant \exp\big(\lambda \ln f(x) + (1-\lambda) \ln f(y)\big).$$

Comme la fonction exponentielle est convexe, on a :

$$\exp\big(\lambda \ln f(x) + (1-\lambda) \ln f(y)\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

ce qui prouve que f est convexe sur I.
La réciproque est fausse : par exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe, mais la fonction $x \mapsto 2 \ln x$ ne l'est pas.

2. • Soit f une fonction logarithmiquement convexe. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a :
$$\forall x \in I \quad \ln(f(x)\alpha^x) = \ln f(x) + x \ln \alpha.$$
Toute fonction affine étant convexe, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\ln f_\alpha$ est convexe comme somme de deux fonctions convexes. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, la fonction f_α est donc logarithmiquement convexe puis convexe.
• Supposons que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto f(x)\alpha^x$ soit convexe. Soit $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. On cherche à prouver que :
$$(\ln f)\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda(\ln f)(x) + (1-\lambda)(\ln f)(y),$$
c'est-à-dire que :
$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant f(x)^\lambda\, f(y)^{1-\lambda}. \qquad (\star)$$
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a :
$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big)\alpha^{\lambda x + (1-\lambda)y} \leqslant \lambda f(x)\alpha^x + (1-\lambda) f(y)\alpha^y,$$
c'est-à-dire :
$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x)\alpha^{(1-\lambda)(x-y)} + (1-\lambda) f(y)\alpha^{\lambda(y-x)}.$$
Pour conclure, il suffit de prouver que pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a :
$$\alpha^{(1-\lambda)(x-y)} = f(y)^{1-\lambda} f(x)^{\lambda-1} \quad \text{et} \quad \alpha^{\lambda(y-x)} = f(y)^{-\lambda} f(x)^\lambda,$$
ce qui permettra d'obtenir :
$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x)^\lambda\, f(y)^{1-\lambda} + (1-\lambda) f(x)^\lambda\, f(y)^{1-\lambda},$$
et donc $(\star)$.
Si $x = y$, tout réel strictement positif α convient.
Si $x \neq y$, alors on peut prendre $\alpha = \left(\dfrac{f(y)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{x-y}}$.

3.6 En appliquant f^{-1} à l'inégalité de convexité :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad f\left(\lambda f^{-1}(x) + (1-\lambda) f^{-1}(y)\right) \leqslant \lambda x + (1-\lambda) y,$$
on prouve que f^{-1} est convexe si f (et donc f^{-1}) est décroissante et concave si f est croissante.

3.7 Considérons l'application :
$$\varphi_1 \ : \ x \mapsto \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$
Il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq f(1)$ (car f n'est pas constante).
De plus :
$$\forall x \in]x_0, +\infty[\quad \varphi_1(x) \geqslant \varphi_1(x_0) > 0,$$
d'où :
$$\forall x \in \left]\max(x_0, 1), +\infty\right[\quad f(x) \geqslant f(1) + \varphi_1(x_0)(x-1),$$
ce qui prouve que :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

3.8 1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Considérons la fonction :

$$\varphi_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Il s'agit d'une fonction croissante sur l'intervalle $]a, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_a(x) = 0$ puisque f est bornée au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, elle est négative sur $]a, +\infty[$, d'où :

$$\forall x \in]a, +\infty[\quad f(x) \leqslant f(a).$$

La fonction f est donc décroissante et tend vers 0 en $+\infty$, ce qui prouve sa positivité.

2. Soit $y = ax + b$ une équation de l'asymptote $\mathcal{D}$. On a alors :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax - b] = 0.$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto f(x) - ax - b$ est convexe et tend vers 0 donc, d'après ce qui précède, elle est positive.

Par conséquent, le graphe de la fonction se situe au-dessus de l'asymptote.

On peut visualiser ce résultat en considérant la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

3.9 1. Soit x et y deux réels tels que $x < y$ et M un majorant de f sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $z > y$, on a :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{M - f(x)}{z - x},$$

donc, en faisant tendre z vers $+\infty$, on obtient $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant 0$.

- Pour tout $z < x$. On a :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \geqslant \frac{f(x) - M}{x - z},$$

donc, en faisant tendre z vers $-\infty$, on obtient $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$.

Finalement $f(x) = f(y)$, ce qui montre que f est constante.

Le résultat n'est pas forcément conservé si l'on suppose f simplement convexe et majorée sur $[A, +\infty[$; il suffit de considérer la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

2. Supposons que :

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \quad f''(t_1) f''(t_2) \geqslant 0.$$

Alors, f'' garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. Quitte à changer f en $-f$ on peut supposer que f'' est positive et donc que f est convexe majorée, ce qui prouve qu'elle est constante.

3.10 Soit $(x_0, x_1, x_2) \in]a, b[^3$, tel que $x_0 < x_1 < x_2$.

On va utiliser le fait que :

- sur $]a, x_1]$, le graphe de f est au-dessus de la droite reliant les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$;
- sur $[x_1, b[$, le graphe de f est au-dessus de la droite reliant les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$.

En effet, puisque $\varphi_{x_1} : x \mapsto \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ est croissante, on a :

$$x < x_1 \Longrightarrow \varphi_{x_1}(x) \leqslant \varphi_{x_1}(x_2) \Longrightarrow f(x) \geqslant f(x_1) + (x - x_1)\varphi_{x_1}(x_2),$$

et l'inégalité est évidente si $x = x_1$. Or, la fonction affine $x \mapsto f(x_1)+(x-x_1)\varphi_{x_1}(x_2)$ étant minorée sur l'intervalle borné $]a, b[$, f est minorée sur $]a, x_1]$.
En écrivant que φ_{x_0} est croissante, on obtient :

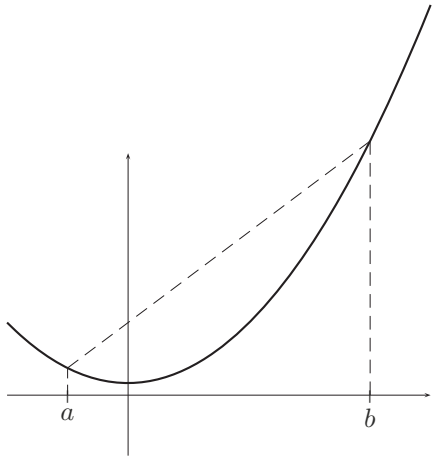
$$x \geqslant x_1 \Longrightarrow f(x) \geqslant f(x_0) + (x - x_0)\varphi_{x_0}(x_1),$$

donc f est minorée sur $[x_1, b[$.

3.11 Si l'on interprète le réel $(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$ comme l'aire d'un trapèze, la représentation graphique ci-dessous permet de comprendre que l'inégalité :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

découle de la position du graphe de f par rapport à la corde reliant les points d'abscisses a et b.



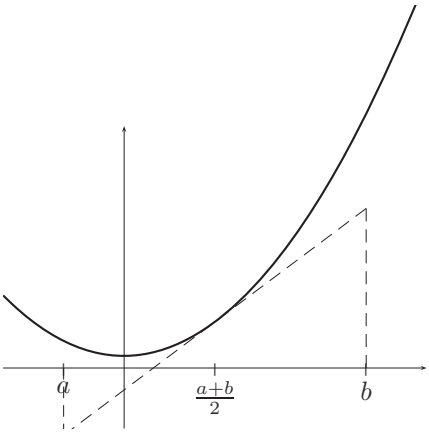
Plus précisément, considérons φ la fonction affine telle que $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$.

La fonction f étant convexe, on a :

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leqslant \varphi(x).$$

En intégrant entre a et b, on obtient l'inégalité :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$



Pour la seconde inégalité, le réel $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ qui peut être interprété comme l'aire d'un rectangle, peut également être vu comme l'aire d'un trapèze car, pour toute fonction affine ψ, on a :

$$\int_a^b \psi(t)\,dt = (b-a)\psi\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Pour montrer la deuxième inégalité, il suffit donc d'écrire que le graphe de la fonction f est au dessus de sa tangente en $\dfrac{a+b}{2}$.

Ainsi, si l'on considère la fonction affine $\psi : x \mapsto f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \left(x - \frac{a+b}{2}\right)$, alors :

$$\forall x \in [a,b] \quad \psi(x) \leqslant f(x).$$

En intégrant entre a et b, on obtient l'inégalité :

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque le résultat est vrai même si f n'est pas supposée de classe $\mathcal{C}^1$. Il suffit pour l'inégalité de gauche d'écrire que pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(a+b-x)$$

et d'intégrer cette inégalité entre a et b.

3.12 La fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$ est définie sur $]1, +\infty]$.

Elle y est dérivable et sa dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ est décroissante. On a donc :

$$\ln\left(\ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}\ln(\ln x_1) + \frac{1}{2}\ln(\ln x_2).$$

En utilisant la croissance de la fonction exponentielle, on trouve le résultat demandé.

3.13 1. La fonction $x \mapsto x^p$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$ puisque $p > 1$.
On a pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}\right)^p \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^p}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

soit :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Si les b_i sont strictement positifs, alors on prend $\lambda_i = b_i^q$ et $x_i = a_i b_i^{-\frac{q}{p}}$, ce qui donne l'inégalité cherchée.
Sinon, on pose $I = \{i \in [\![1, n]\!] \mid b_i > 0\}$, et le cas précédent donne :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i \in I} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i \in I} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i \in I} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

car les a_i^p et b_i^q sont positifs.

2. Comme $q = \frac{p}{p-1}$, on va utiliser la question précédente en écrivant que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}.$$

L'inégalité de Hölder donne alors :

$$\sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

et :

$$\sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

On en déduit que :

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \leqslant \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Si $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p > 0$, alors on obtient l'inégalité :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sinon, l'inégalité est évidente car les réels considérés sont positifs.

3.14 Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrons par récurrence la propriété suivante :

$$\mathcal{H}_n\ :\ \forall p\in[\![0,2^n]\!]\quad f\left(\frac{p}{2^n}x+\left(1-\frac{p}{2^n}\right)y\right)\leqslant\frac{p}{2^n}f(x)+\left(1-\frac{p}{2^n}\right)f(y).$$

L'assertion $\mathcal{H}_0$ est clairement vraie.

Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain entier n et considérons $p\in[\![0,2^{n+1}]\!]$.

Si p est pair, alors il existe $k\in[\![0,2^n]\!]$ tel que $p=2k$ donc, d'après $\mathcal{H}_n$, on a :

$$\begin{aligned}f\left(\frac{p}{2^{n+1}}x+\left(1-\frac{p}{2^{n+1}}\right)y\right) &= f\left(\frac{k}{2^n}x+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)y\right)\\ &\leqslant \frac{k}{2^n}f(x)+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)f(y)\\ &= \frac{p}{2^{n+1}}f(x)+\left(1-\frac{p}{2^{n+1}}\right)f(y).\end{aligned}$$

Si p est impair, alors $\frac{p}{2^{n+1}}x+\left(1-\frac{p}{2^{n+1}}\right)y=\frac{X+Y}{2}$ avec :

$$X=\frac{p-1}{2^{n+1}}x+\left(1-\frac{p-1}{2^{n+1}}\right)y\qquad\text{et}\qquad Y=\frac{p+1}{2^{n+1}}x+\left(1-\frac{p+1}{2^{n+1}}\right)y.$$

On a donc :

$$f\left(\frac{p}{2^{n+1}}x+\left(1-\frac{p}{2^{n+1}}\right)y\right)\leqslant\frac{f(X)+f(Y)}{2},$$

ce qui implique, du fait de la parité de $p-1\geqslant 0$ et $p+1\leqslant 2^{n+1}$, l'inégalité :

$$\begin{aligned}f\left(\frac{p}{2^{n+1}}x+\left(1-\frac{p}{2^{n+1}}\right)y\right) &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{p-1}{2^{n+1}}f(x)+\left(1-\frac{p-1}{2^{n+1}}\right)f(y)\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{2^{n+1}}f(x)+\left(1-\frac{p+1}{2^{n+1}}\right)f(y)\right)\\ &= \frac{p}{2^{n+1}}f(x)+\left(1-\frac{p}{2^{n+1}}\right)f(y),\end{aligned}$$

et montre $\mathcal{H}_{n+1}$.

Soit $\lambda\in[0,1]$. La suite $\left(\lambda_n=\frac{\lfloor 2^n\lambda\rfloor}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ car, pour tout entier n, on a $|\lambda-\lambda_n|\leqslant 2^{-n}$. De plus, pour tout entier n, $\lfloor 2^n\lambda\rfloor\in[\![0,2^n]\!]$ donc :

$$f(\lambda_n x+(1-\lambda_n)y)\leqslant\lambda_n f(x)+(1-\lambda_n)f(y).$$

En utilisant la continuité de f, on en déduit que :

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

3.15 1. La fonction φ_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par $\varphi_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante, donc :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad x < a < y \Longrightarrow \varphi_a(x) \leqslant \varphi_a(y).$$

Soit y tel que $y > a$ (il en existe puisque a n'est pas la borne supérieure de I). La fonction $\varphi_{a_{|I \cap]-\infty, a[}}$ est croissante majorée par $\varphi_a(y)$, donc elle possède une limite en a inférieure ou égale à $\varphi_a(y)$, ce qui entraîne que la fonction est dérivable à gauche en a et que :

$$\forall y \in I \quad y > a \Longrightarrow f'_g(a) \leqslant \varphi_a(y).$$

Ainsi, la fonction croissante $\varphi_{a_{|I \cap]a, +\infty[}}$ est minorée par $f'_g(a)$. Elle admet donc une limite en a supérieure ou égale à $f'_g(a)$, ce qui entraîne que la fonction f est dérivable à droite en a et que $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.
Soit a un point intérieur de I. Alors f est dérivable à droite et à gauche en a donc est continue à droite et à gauche en a, c'est-à-dire continue en a.

2. La fonction $\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ 2 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$ est convexe sur $[0, 1]$ et discontinue en 1.

3. La fonction $\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\sqrt{x} \end{array}$ est convexe et continue sur $[0, 1]$ mais non dérivable en 0.

Chapitre 4 : Espaces vectoriels normés

I Généralités 188
1 Définition 188
2 Inégalités triangulaires 190
3 Distance associée à une norme 191
4 Boule ouverte, boule fermée 194
5 Partie bornée, application bornée 195
6 Exemples d'espaces vectoriels normés 196
7 Obtention de nouveaux espaces vectoriels normés . 199
II Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé . . 201
1 Suite convergente 201
2 Suite à valeurs dans un espace produit 204
3 Suite extraite, valeur d'adhérence 205
4 Relations de comparaison 206
III Topologie d'un espace vectoriel normé 206
1 Parties ouvertes 206
2 Parties fermées 208
3 Voisinage d'un point 209
4 Point intérieur, intérieur d'une partie 210
5 Point adhérent, adhérence d'une partie 211
6 Densité 213
7 Frontière 214
8 Ouvert relatif, fermé relatif, voisinage relatif 215
IV Comparaison de normes 216
1 Domination de normes 216
2 Normes équivalentes 218
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 220
Exercices 242

Espaces vectoriels normés



Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tous les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels réels ou complexes.

I Généralités

1 Définition

Définition 1

Étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on appelle **norme sur E** tout application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- **homogénéité :** $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$;
- **inégalité triangulaire :** $\forall(x, y) \in E^2 \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$;
- **séparation :** $\forall x \in E \quad (N(x) = 0) \Longrightarrow (x = 0)$.

Définition 2

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé**.

Notations

- On note (E, N) l'espace vectoriel E muni de la norme N. Lorsqu'il n'y a pas risque d'ambiguïté quant à la norme utilisée, on peut ne pas la préciser et se contenter de noter E.
- Il est souvent d'usage de noter $\|\cdot\|$ la norme utilisée, et donc $\|x\|$ la norme d'un vecteur x.

Remarque Si N est une norme, alors la propriété d'homogénéité implique que $N(0) = 0$.

Exemples

1. L'application $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{K}$ (où $|x|$ désigne la valeur absolue de x si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le module de x si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
2. Les applications :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & \max\big(|x|,|y|\big) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & |x|+|y| \end{array}$$

sont des normes sur $\mathbb{K}^2$, appelées respectivement **norme infinie** et **norme un**, et notées $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$.

p.220

Exercice 1 Soit E un espace préhilbertien réel, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$. Montrer que l'application :

$$x \mapsto \sqrt{(x \mid x)}$$

est une norme sur E.

Remarque Avec les notations de l'exercice 1, la norme définie par :

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$$

est appelée **norme euclidienne** associée au produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$.

Exemples De l'exercice 1, on déduit que les espaces préhilbertiens réels suivants sont naturellement munis d'une structure d'espace vectoriel normé :

1. l'espace $\mathbb{R}^2$, muni du produit scalaire :

$$\big((x_1,y_1) \,\big|\, (x_2,y_2)\big) = x_1x_2 + y_1y_2,$$

dont la norme associée est donnée par $\big\|(x,y)\big\| = \sqrt{x^2+y^2}$;

2. plus généralement, l'espace $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique :

$$\big((x_1,\dots,x_n) \,\big|\, (y_1\dots,y_n)\big) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

dont la norme associée est donnée par $\big\|(x_1,\dots,x_n)\big\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$;

3. l'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a < b$) des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(f \mid g) = \displaystyle\int_a^b fg$, dont la norme associée est donnée par $\big\|f\big\| = \sqrt{\displaystyle\int_a^b f^2}$.

Terminologie Dans chacun des trois exemples précédents, la norme euclidienne considérée est appelée **norme deux** (*cf.* section I.6 page 196).

Dans toute la suite de ce chapitre, et sauf mention du contraire, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Vecteur unitaire

Définition 3

On dit qu'un vecteur x de E est **unitaire** si $\|x\| = 1$.

p.220 **Exercice 2** On suppose dans cet exercice que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Soit x un vecteur non nul de E. Montrer qu'il existe un unique vecteur unitaire colinéaire à x et de même sens que lui.

Terminologie Étant donné x un vecteur non nul de E, le vecteur $\dfrac{x}{\|x\|}$ est appelé **vecteur unitaire associé à x**.

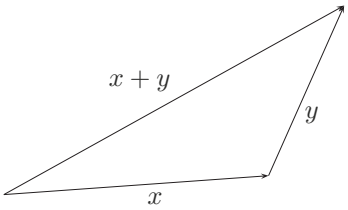
p.220 **Exercice 3** Donner une condition nécessaire et suffisante sur E pour qu'il existe dans E des vecteurs unitaires.

2 Inégalités triangulaires

Nous avons défini l'inégalité triangulaire (propriété vérifiée par toute norme d'après la définition 1 de la page 188) de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Cette inégalité s'interprète en disant que dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres.



De manière plus complète, nous regroupons sous le nom *inégalités triangulaires* les inégalités du résultat suivant :

Proposition 1 (Inégalités triangulaires)

Soit x et y des éléments de E. Alors on a :

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Principe de démonstration. Constater qu'il s'agit essentiellement de montrer que :

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Démonstration page 220

Terminologie L'inégalité $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x \pm y\|$ est parfois appelée *seconde inégalité triangulaire*.

p.221

Exercice 4 *Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire ?*

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la *norme un* définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \|(x,y)\|_1 = |x| + |y|.$$

On considère les vecteurs $u_1 = (1,0)$ et $u_2 = (0,1)$.
Bien que les vecteurs u_1 et u_2 ne soient pas colinéaires, que donne l'inégalité triangulaire appliquée avec ces vecteurs ?

Attention

- Contrairement à l'intuition géométrique, et comme le montre l'exercice précédent, dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, on ne peut, *a priori*, rien en déduire.
- En revanche, si la norme considérée est *euclidienne*, c'est-à-dire si elle est associée à un produit scalaire, alors le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire est celui où les deux vecteurs sont positivement colinéaires.

p.221

Exercice 5 *Démonstration de l'affirmation précédente.*

Rappeler pourquoi si $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne, et si x et y sont deux vecteurs, alors on a $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si, et seulement si, x et y sont positivement colinéaires.

Inégalité triangulaire généralisée La propriété d'homogénéité de la norme combinée à l'inégalité triangulaire permet, par récurrence, de montrer que si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires, alors on a :

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \, \|x_k\|.$$

Dorénavant, nous utiliserons librement ce résultat.

3 Distance associée à une norme

Définition 4

On appelle **distance associée à la norme** $\|\cdot\|$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} d & : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & (x,y) & \longmapsto & \|y-x\|. \end{array}$$

Remarques

- Avec les notations précédentes, on a $\forall x \in E \quad \|x\| = d(0,x)$.
  Autrement dit, la norme d'un vecteur x est sa distance au vecteur nul.

- Il est parfois plus naturel, lorsqu'on considère des distances entre des éléments de E, d'utiliser des notations *affines* plutôt que *vectorielles*, c'est-à-dire de voir les éléments de E comme des *points* plutôt que comme des *vecteurs*. Ainsi, avec les notations de la définition 4 de la page précédente, la distance entre deux points M et N est donnée par $d(M,N) = \|\overrightarrow{MN}\|$. L'exercice 6 utilise de telles notations.

p.221

Exercice 6 Montrer que la distance d associée à la norme $\|\cdot\|$ vérifie les propriétés suivantes :

- **séparation :** $\forall (M,N) \in E^2 \quad d(M,N) = 0 \iff M = N$;
- **symétrie :** $\forall (M,N) \in E^2 \quad d(M,N) = d(N,M)$;
- **inégalité triangulaire :** $\forall (M,N,P) \in E^3 \quad d(M,P) \leqslant d(M,N) + d(N,P)$;
- **invariance par translation :** $\forall (M,N,u) \in E^3 \quad d(M+u, N+u) = d(M,N)$.

Les propriétés de l'exercice ci-dessus seront désormais utilisées librement.

Formulation des inégalités triangulaires en terme de distance

Donnons la traduction en terme de distance de la proposition 1 de la page 190 :

Proposition 2

Si M, N et P désignent trois points de E, alors on a :

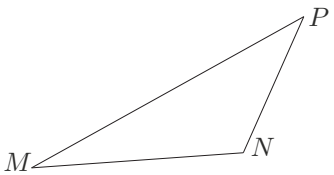
$$\big|d(M,N) - d(N,P)\big| \leqslant d(M,P) \leqslant d(M,N) + d(N,P).$$

De manière moins formelle, l'inégalité

$$d(M,P) \leqslant d(M,N) + d(N,P)$$

signifie que, dans un espace vectoriel normé, les propriétés « géométriquement intuitives » suivantes sont vraies :

- dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres ;
- *un* plus court chemin entre deux points est la ligne droite.



Attention Bien comprendre la raison du choix de l'article indéfini *un* dans la phrase « *un* plus court chemin entre deux points » : la ligne droite est *un* plus court chemin entre deux points, mais ce n'est pas nécessairement le seul (*cf.* exercice 4).

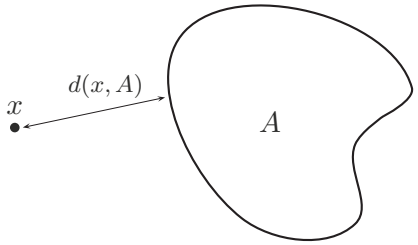
Dans la suite, et sauf mention du contraire, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et d désigne la distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

Distance à une partie

Définition 5

Étant donné une partie A non vide de E ainsi que x un élément de E, on appelle **distance de x à A**, et on note $d(x, A)$, la quantité :

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a)\,;\ a \in A\}.$$



Remarques Avec les notations de la définition précédente :

1. le caractère non vide de A implique que $\{d(x, a)\,;\ a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$, ce qui assure d'une part l'existence de sa borne inférieure $d(x, A)$, et d'autre part que $d(x, A) \geqslant 0$;
2. par définition de la distance d, on a aussi :

$$d(x, A) = \inf \{\|x - a\|\,;\ a \in A\}.$$

Proposition 3

Soit A une partie non vide de E, et x et y deux éléments de E. On a :

$$\big|d(x, A) - d(y, A)\big| \leqslant d(x, y).$$

Principe de démonstration. Commencer par démontrer l'inégalité $d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y)$, puis utiliser la symétrie en x et y.

Démonstration page 222

264

Remarque Nous verrons qu'une autre formulation possible du résultat précédent est : l'application $\begin{array}{ccc} (E, \|\cdot\|) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ x & \longmapsto & d(x, A) \end{array}$ est 1-lipschitizienne.

Attention

- Si x appartient à A, alors il est clair qu'on a $d(x, A) = 0$.
- En revanche, la réciproque est fausse. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, on a $d(0, \mathbb{R}_+^*) = 0$ et pourtant $0 \notin \mathbb{R}_+^*$. Cela prouve au passage qu'il n'existe pas toujours d'élément $a \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, a)$.
- Lorsqu'un tel élément existe, on dit que la distance de x à A est **atteinte**.

p.222 **Exercice 7** Dans $\mathbb{R}^2$, soit x le point $(-1,1)$ et A la droite d'équation $y = 2x$. Pour chacune des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, déterminer la distance de x à A.

Remarque L'exercice précédent, montre, comme on pouvait s'y attendre, que la distance d'un point à une partie dépend de la norme utilisée.

4 Boule ouverte, boule fermée

Définition 6

Soit a un élément de E et r un réel strictement positif.

- On appelle **boule ouverte de centre a et de rayon r**, et l'on note $B(a,r)$, la partie :
$$B(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) < r\}.$$
- On appelle **boule fermée de centre a et de rayon r**, et l'on note $B_f(a,r)$, la partie :
$$B_f(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) \leqslant r\}.$$
- On appelle **sphère de centre a et de rayon r**, et l'on note $S(a,r)$, la partie :
$$S(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) = r\}.$$

Remarque On constate facilement que $S(a,r) = B_f(a,r) \setminus B(a,r)$.

p.222 **Exercice 8** Dessiner les boules unités de $\mathbb{R}^2$ pour les normes infinie, un et deux.

Remarque L'exercice précédente montre que les boules dépendent de la norme considérée sur E : une partie de E peut être une boule pour une norme et ne pas l'être pour une autre. L'exercice suivant met en évidence la dépendance de la forme des boules vis-à-vis de la norme utilisée.

Notation Lorsque l'on travaille dans un espace euclidien de dimension 2, il peut être plus intuitif de parler de *disque* plutôt que de *boule*. On utilise alors respectivement les notations $D(a,r)$ et $D_f(a,r)$ au lieu de $B(a,r)$ et $B_f(a,r)$.

Proposition 4

Toute boule (ouverte ou fermée) est une partie convexe de E.

Démonstration page 222

p.223 **Exercice 9** Soit B une boule de centre a et de rayon $r > 0$, et x un élément de E. Exprimer, en fonction de a, r et x, la distance de x à B.

5 Partie bornée, application bornée

Partie bornée

Définition 7

Une partie A de E est dite **bornée** s'il existe un réel positif R tel que :

$$\forall a \in A \quad \|a\| \leqslant R.$$

Dire qu'une partie est bornée signifie donc qu'il existe une boule fermée centrée en l'origine qui la contient.

p.223

Exercice 10 Montrer que si une partie A est contenue dans une boule quelconque (non nécessairement centrée en l'origine et non nécessairement fermée), alors A est bornée.

p.224

Exercice 11 Montrer que si A est une partie non vide et bornée, alors l'ensemble :

$$\left\{d(x,y)\,;\ (x,y) \in A^2\right\}$$

possède une borne supérieure.

Remarque Si A est une partie bornée, alors la quantité

$$\sup\left\{d(x,y)\,;\ (x,y) \in A^2\right\},$$

dont l'exercice précédent justifie l'existence, est appelée **diamètre de A**.

p.224

Exercice 12 *Diamètre d'une boule*

Supposons que E ne soit pas l'espace nul. Déterminer, en fonction de son rayon r, le diamètre d'une boule B (ouverte ou fermée).

Application bornée, suite bornée

Définition 8

On dit qu'une application f d'un ensemble X dans E est **bornée** si $f(X)$ est une partie bornée de E, autrement dit s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in X \quad \|f(x)\| \leqslant M.$$

Remarques

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E n'étant rien d'autre qu'une application de $\mathbb{N}$ dans E, alors d'après la définition précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n\| \leqslant M.$$

- Il est facile de vérifier que l'ensemble des application bornées de X dans E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(X,E)$ des fonctions de X dans E.

Remarque Il est clair, d'après la définition, que la notion de partie bornée (et donc de fonction ou suite bornée), dépend de la norme utilisée. Nous verrons :

- qu'il est possible qu'une partie soit bornée pour une norme mais ne le soit pas pour une autre (*cf.* exemple 2, page 216) ;
- que, néanmoins, des normes équivalentes définissent les mêmes parties bornées (*cf.* proposition 27 de la page 218).

218

6 Exemples d'espaces vectoriels normés

L'espace $\mathbb{K}^n$

Si x désigne un vecteur de $\mathbb{K}^n$, alors on note $(x_1,\dots,x_n)$ ses composantes. L'espace $\mathbb{K}^n$ peut être muni de structures d'espaces vectoriels normés à l'aide de différentes normes, dont les trois normes classiques suivantes :

- la **norme infinie**, définie par :

$$\|x\|_\infty = \max\left(|x_1|,\dots,|x_n|\right) ;$$

- la **norme un**, définie par :

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| ;$$

- la **norme deux**, ou **norme euclidienne**, définie par :

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

Proposition 5

Les trois applications :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_\infty \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_2 \end{array}$$

sont des normes. Chacune d'entre elles munit donc $\mathbb{K}^n$ d'une structure d'espace vectoriel normé.

Démonstration page 224

Attention

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, alors on a $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, mais si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, la présence des modules est indispensable pour que la définition de $\|x\|_2$ ait un sens.

Approfondissement : norme p Pour $p \geqslant 1$, il arrive parfois de munir $\mathbb{K}^n$ de la norme suivante, appelée **norme p**, définie ainsi :

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

Pour plus de détails, voir l'exercice 4.7 de la page 242.

Généralisation à tout espace vectoriel muni d'une base

Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (u_i)_{i\in I}$, alors on dispose sur E des trois normes classiques suivantes, appelées respectivement **norme infinie**, **norme un** et **norme deux** dans la base $\mathcal{B}$:

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|\,;\ i \in I\}\ ; \quad \|x\|_1 = \sum_{i\in I} |x_i| \qquad \text{et} \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i\in I} |x_i|^2}.$$

où, étant donné x un élément de E, la famille $(x_i)_{i\in I}$ désigne la famille des composantes de x dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque Les définitions ci-dessus des normes un, deux et infinie sont licites, car, par définition, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est composantes de x dans la base $\mathcal{B}$ est à *support fini* (c'est-à-dire ne comporte qu'un nombre fini des termes non nuls).

p.226

Exercice 13 En reprenant les notations ci-dessus, justifier que les applications :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_\infty \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_2 \end{array}$$

sont bien des normes.

Espace des fonctions bornées

L'ensemble $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ des fonctions bornées d'un ensemble X non vide à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(X, E)$ des applications de X dans $\mathbb{K}$.

Définition 9

Pour $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, on appelle **norme infinie** de f, et on note $\mathcal{N}_\infty(f)$, la quantité :

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Cette définition exige quelques justifications qui sont l'objet de l'exercice suivant.

p.227

Exercice 14

1. Pour $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, justifier l'existence de $\mathcal{N}_\infty(f)$.
2. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(X,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \mathcal{N}_\infty(f) \end{array}$ est une norme.

La norme $\mathcal{N}_\infty$ munit donc l'espace $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ d'une structure d'espace vectoriel normé. Cela s'applique en particulier à l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ des suites bornées à valeurs dans E. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on a :

$$\mathcal{N}_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|.$$

Espace des fonctions continues sur un segment

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On note $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues du segment $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. On sait que $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a,b], \mathbb{K})$, et même de $\mathcal{B}([a,b], \mathbb{K})$.
Outre la norme $\mathcal{N}_\infty$, on dispose sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ des deux normes classiques suivantes :

- la **norme un**, définie par $\mathcal{N}_1(f) = \displaystyle\int_a^b |f|$;

p.228

Exercice 15 Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \mathcal{N}_1(f) \end{array}$ est une norme.

- la **norme deux**, définie par $\mathcal{N}_2(f) = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f|^2}$.
  - si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors la norme deux n'est rien d'autre que la norme euclidienne associée au produit scalaire usuel défini par $(\, f \mid g \,) = \displaystyle\int_a^b fg$;
  - en revanche, le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ est un peu plus compliqué car l'argument précédent en s'applique plus.

p.228

Exercice 16 Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \mathcal{N}_2(f) \end{array}$ est une norme.

p.228

Exercice 17 Peut-on généraliser $\mathcal{N}_\infty$, $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ à l'espace $\mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$ des fonction continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$?

Approfondissement : norme p Pour $p \geqslant 1$, on munit parfois l'espace $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ de la norme suivante, appelée **norme p**, définie ainsi :

$$\mathcal{N}_p(f) = \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p}.$$

Pour plus de détail, voir l'exercice 4.8 de la page 243.

Espace des polynômes

Sur $\mathbb{K}[X]$, on dispose des normes suivantes :

- celles qui sont définies à partir de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des coefficients d'un polynôme $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, dont on sait qu'elle est presque nulle (*i.e.* nulle à partir d'un certain rang) :

$$\|P\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|, \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2}, \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \ ;$$

- celles définies à l'aide de la fonction polynomiale $t \mapsto P(t)$; dans ce qui suit, a et b désignent deux réels vérifiant $a < b$:

$$\mathcal{N}_1(P) = \int_a^b |P(t)|\mathrm{d}t, \quad \mathcal{N}_2(P) = \sqrt{\int_a^b |P(t)|^2 \mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_\infty(P) = \max_{t\in[a,b]} |P(t)|.$$

  Dans ce cas, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire proviennent du fait que $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ et $\mathcal{N}_\infty$ définissent des normes sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. Pour la séparation, on utilise de plus le fait qu'un polynôme dont la fonction polynomiale associée est nulle sur $[a,b]$ admet une infinité de racines, donc est nul.

p.229

Exercice 18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_{n+1})$ une $(n+1)$-liste de scalaires deux à deux distincts. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$ par :

$$\|P\| = \max\big\{|P(a_1)|, \dots, |P(a_{n+1})|\big\}.$$

7 Obtention de nouveaux espaces vectoriels normés

Norme induite

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la norme $\|\cdot\|$ dont on dispose sur E induit naturellement une structure d'espace vectoriel normé sur F, par sa restriction à F :

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|. \end{array}$$

Cettte restriction est appelée **norme induite** sur F par la norme $\|\cdot\|$.

Exemples

1. La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ est la norme induite par le module sur $\mathbb{C}$.
2. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Il est clair que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$, dont on a vu que la norme infinie le munissait d'une structure d'espace vectoriel normé. La norme induite associée :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \mathcal{N}_\infty(f) \end{array}$$

   constitue alors, en plus des normes un et deux, une autre norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Utilisation d'une application linéaire injective

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si l'on dispose d'une norme $\|\cdot\|$ sur E, et si u est une application linéaire injective de F dans E, alors l'application :

$$\begin{array}{rccc} N & : & F & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \longmapsto & \|u(x)\| \end{array}$$

est une norme sur F. En effet :

- si $x \in F$ vérifie $N(x) = 0$, c'est-à-dire $\|u(x)\| = 0$, alors la propriété de séparation de $\|\cdot\|$ implique $u(x) = 0$, *i.e.*, comme u est injective, $x = 0$;
- pour $(x, \lambda) \in F \times \mathbb{K}$, on a :

$$N(\lambda\, x) = \|u(\lambda\, x)\| = \|\lambda\, u(x)\| = |\lambda|\ \|u(x)\| = |\lambda|\, N(x)\ ;$$

- pour $(x, y) \in F^2$, on a :

$$N(x+y) = \|u(x+y)\| = \|u(x)+u(y)\| \leqslant \|u(x)\| + \|u(y)\| = N(x) + N(y).$$

Exemples

1. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la norme induite sur F par celle de E n'est rien d'autre que l'application $\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|u(x)\| \end{array}$, où u est l'injection canonique de F dans E.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Notons $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.
   Si $\omega : [a, b] \to \mathbb{K}$ est une fonction continue et à valeurs strictement positives, alors l'application :

$$\begin{array}{rccc} N : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b \omega(x)\, |f(x)|\, \mathrm{d}x \end{array}$$

   est une norme sur E. En effet, on a :

$$\forall f \in E \quad N(f) = \mathcal{N}_1\big(u(f)\big),$$

   où u est l'application linéaire injective suivante :

$$\begin{array}{rccc} u : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \omega\, f. \end{array}$$

p.229

Exercice 19 Soit $E = \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'espace des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} N : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{|u_n|}{2^n}\right) \end{array}$$

est une norme sur E.

Produit fini d'espaces vectoriels normés

Proposition 6

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ ainsi que p espaces vectoriels normés $(E_1, \varphi_1), \ldots, (E_p, \varphi_p)$ sur $\mathbb{K}$. Alors l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \max\left(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_p(x_p)\right) \end{array}$$

est une norme, et munit donc l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ d'une structure d'espace vectoriel normé. Cette norme est appelée **norme produit**.

Démonstration page 229

Exemple La norme infinie sur $\mathbb{K}^n$ est la norme produit obtenue en considérant, sur $\mathbb{K}$, la norme $x \mapsto |x|$.

Remarque En plus de la norme produit présentée dans la proposition précédente, d'autres normes peuvent être construites sur un espace produit, comme le montre l'exercice suivant.

p.230

Exercice 20 *Norme un et norme deux dans un espace produit*

Avec les notations de la proposition 6, montrer que les applications N_1 et N_2 respectivement définies par :

$$\begin{array}{rcl} E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x_k) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \displaystyle\sqrt{\sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x_k)^2} \end{array}$$

sont des normes sur l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_p$.

II Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

On rappelle qu'une suite a à valeurs dans un espace vectoriel normé E est une application de $\mathbb{N}$ dans E. Une telle suite est souvent notée $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, voire plus simplement (a_n).
L'élément a_n, quant à lui, est appelé **terme général** de la suite a.

1 Suite convergente

Définition 10

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers ℓ de E si la suite réelle $\left(\|a_n - \ell\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers ℓ si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|a_n - \ell\| \leqslant \varepsilon,$$

ou encore, en terme de distance :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow d(a_n, \ell) \leqslant \varepsilon.$$

Notation Pour signifier qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ, on écrit $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou plus simplement $a_n \to \ell$.

Proposition 7 (Unicité de la limite)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E ainsi que ℓ_1 et ℓ_2 appartenant à E. Si $a_n \to \ell_1$ et $a_n \to \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant à la fois vers ℓ_1 et ℓ_2.
L'inégalité triangulaire donne :

$$0 \leqslant \|\ell_2 - \ell_1\| \leqslant \underbrace{\|a_n - \ell_1\|}_{\to 0} + \underbrace{\|a_n - \ell_2\|}_{\to 0}.$$

En passant à la limite, on obtient $\|\ell_2 - \ell_1\| = 0$, c'est-à-dire $\ell_1 = \ell_2$. □

Définition 11

- Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **convergente** s'il existe un élément ℓ de E tel que $a_n \to \ell$. Cet élément ℓ est alors appelé **limite** de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On le note $\lim a_n$.
- Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Notation Pour dire qu'une suite est convergente (respectivement divergente), on dit parfois simplement qu'elle converge (respectivement diverge).

Attention La convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé dépend par définition de la norme avec laquelle on travaille. Une suite peut en effet converger pour une norme et diverger pour une autre.
En cas d'ambiguïté, il est donc important de préciser la norme utilisée.

p.231

Exercice 21 Dans l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = x^n$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge, au sens de la norme un, vers la fonction nulle.
2. Montrons par l'absurde que la suite (f_n) n'est pas convergente au sens de la norme infinie : supposons que (f_n) converge, et notons f sa limite.
   (a) Déterminer, en fonction de $x \in [0,1]$, la valeur de $f(x)$.
   (b) Expliquer pourquoi on aboutit à une contradiction.

Remarque Nous verrons cependant que deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes (*cf.* proposition 28 de la page 218).

Opérations algébriques sur les suites convergentes

Proposition 8 (Combinaison linéaire de deux suites convergentes)

Si deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2, et si λ et μ sont deux scalaires, alors la suite de terme général $\lambda a_n + \mu b_n$ converge vers $\lambda\ell_1 + \mu\ell_2$.

Démonstration. Cela découle de l'inégalité triangulaire et de l'homogénéité de la norme :

$$\begin{aligned}\big\|(\lambda a_n + \mu b_n) - (\lambda\ell_1 + \mu\ell_2)\big\| &= \big\|\lambda(a_n - \ell_1) + \mu(b_n - \ell_2)\big\| \\ &\leqslant |\lambda| \underbrace{\|a_n - \ell_1\|}_{\to 0} + |\mu| \underbrace{\|b_n - \ell_2\|}_{\to 0}.\end{aligned}$$

□

Remarques

- Par récurrence, on généralise le résultat précédent à une combinaison linéaire quelconque de suites : si l'on dispose de p suites, de termes généraux respectifs $a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(p)}$, convergeant respectivement vers $\ell_1, \ldots, \ell_p$, et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des scalaires, alors la suite de terme général $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k a_n^{(k)}$ converge vers $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \ell_k$.
- La proposition 8 nous indique que l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$ des suites à valeurs dans E.

Proposition 9

Si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite réelle de terme général $\|a_n\|$ converge vers $\|\ell\|$.

Démonstration. Cela découle de la seconde inégalité triangulaire :

$$0 \leqslant \big|\|a_n\| - \|\ell\|\big| \leqslant \underbrace{\|a_n - \ell\|}_{\to 0}.$$

□

Corollaire 10

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Supposons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. D'après la proposition précédente, la suite *réelle* $(\|a_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente, donc bornée. D'où le résultat. □

2 Suite à valeurs dans un espace produit

Soit $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_p, \|\cdot\|_p)$ des espaces vectoriels normés. On rappelle (*cf.* proposition 6 de la page 201) que l'espace $E_1 \times \cdots \times E_p$ est muni d'une structure d'espace vectoriel normé grâce à la norme produit définie par :

$$\|(x_1, \dots, x_p)\| = \max\left(\|x_1\|_1, \dots, \|x_p\|_p\right).$$

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on considère $\left(a_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E_k, et l'on s'intéresse à la convergence, au sens de la norme produit, de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E_1 \times \cdots \times E_p$ de terme général :

$$a_n = \left(a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(p)}\right).$$

La proposition suivante énonce que la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ revient à celle de chacune des suites $\left(a_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 11

La suite de terme général $\left(a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(p)}\right)$ converge si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite de terme général $a_n^{(k)}$ converge.
De plus, en notant alors ℓ_k la limite de la suite $\left(a_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'élément $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ de $E_1 \times \cdots \times E_p$.

Démonstration.

- Supposons que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite $\left(a_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et notons ℓ_k sa limite. En notant alors $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$, alors la relation suivante, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left\|a_n - \ell\right\| &= \max\left(\left\|a_n^{(1)} - \ell_1\right\|_1, \dots, \left\|a_n^{(p)} - \ell_p\right\|_p\right)\\ &\leqslant \underbrace{\left\|a_n^{(1)} - \ell_1\right\|_1}_{\to 0} + \cdots + \underbrace{\left\|a_n^{(p)} - \ell_p\right\|_p}_{\to 0}\end{aligned}$$

  prouve la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ.
- Réciproquement, si la suite de terme général a_n converge vers un élément $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ de $E_1 \times \cdots \times E_p$, alors l'inégalité $\|a_n^{(k)} - \ell_k\|_k \leqslant \|a_n - \ell\|$, valable pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, assure la convergence de chaque suite $\left(a_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ_k. □

Exemple Une suite à valeurs dans $\mathbb{K}^p$ converge au sens de la norme infinie si, et seulement si, chacune des suites composantes converge. L'étude de la convergence d'une telle suite revient donc à l'étude de p suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

3 Suite extraite, valeur d'adhérence

Comme dans le cas des suites réelles ou complexes, on appelle **suite extraite** ou **sous-suite** d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Proposition 12

Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et a la même limite.

Démonstration. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers ℓ, et si $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en est une sous-suite, alors la suite réelle de terme général $\|a_{\varphi(n)} - \ell\|$ tend vers 0 car c'est une sous-suite de la suite réelle $\left(\|a_n - \ell\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0. □

Définition 12

On appelle **valeur d'adhérence** d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tout élément de E qui est limite d'une sous-suite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque D'après la proposition 12, une suite convergente ne possède que sa limite comme valeur d'adhérence.

Point méthode

Pour montrer qu'une suite est divergente, on peut utiliser la contraposée de la remarque précédente : il suffit de montrer que la suite considérée possède au moins deux valeurs d'adhérence.

Exemple La suite réelle de terme général $(-1)^n$ est divergente, car elle possède 1 et -1 comme valeurs d'adhérence.

p.231

Exercice 22 On considère la suite de terme général $a_n = n\big(1 + (-1)^n\big)$.

1. Montrer que 0 est la seule valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Attention Comme le montre l'exercice précédent, ce n'est pas parce qu'une suite ne possède qu'une seule valeur d'adhérence qu'elle converge !
On verra néanmoins au théorème 1 de la page 291 un cas particulier important où le résultat est vrai.

Proposition 13 (Caractérisation des valeurs d'adhérence)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans E et x un élément de E. Alors x est valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant n_0 \quad \|a_n - x\| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration page 231

p.232

Exercice 23 Montrer que tout élément du segment $[-1,1]$ est valeur d'adhérence de la suite a de terme général $a_n = \sin\sqrt{n}$.
Indication : pour $x \in [-1,1]$, on a $x = \sin\sqrt{t_k}$ avec $t_k = (2k\pi + \operatorname{Arcsin} x)^2$.

4 Relations de comparaison

On étend ici les notations o et O déjà vues en première année pour des suites à valeurs réelles ou complexes.

Définition 13

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans des espaces vectoriels normés.

1. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **dominée** par $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|a_n\| \leqslant C\,\|b_n\| \ ;$$
on note alors $a = \mathrm{O}(b)$ ou $a_n = \mathrm{O}(b_n)$.
2. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|a_n\| \leqslant \varepsilon\,\|b_n\| \ ;$$
on note alors $a = \mathrm{o}(b)$ ou $a_n = \mathrm{o}(b_n)$.

Grâce à ces définitions, on se ramène donc aux mêmes notions pour les suites réelles $(\|a_n\|)$ et $(\|b_n\|)$. On peut donc appliquer les propriétés des relations de comparaisons sur de telles suites.

III Topologie d'un espace vectoriel normé

1 Parties ouvertes

Définition 14

Soit U une partie de E. On dit que U est un **ouvert de E**, ou une **partie ouverte de E**, si l'une des deux assertions équivalentes suivantes est vraie :

(i) pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x,r) \subset U$;

(ii) pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que la boule fermée $B_f(x,r) \subset U$.

L'équivalence entre les deux assertions de la définition ci-dessus est évidente :

- si $B(x,r) \subset U$, alors $B_f\left(x, \dfrac{r}{2}\right) \subset U$;
- si $B_f(x,r) \subset U$, alors $B(x,r) \subset U$.

Remarque Il est clair, d'après la définition, que E et $\varnothing$ sont des parties ouvertes de E.

Proposition 14

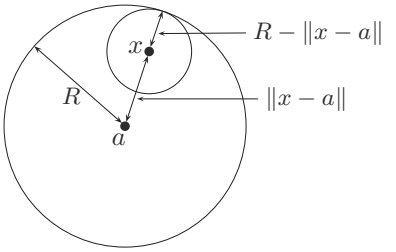
Toute boule ouverte est une partie ouverte de E.

Principe de démonstration.

Démonstration page 232

Pour x appartenant à une boule de centre a de rayon R, considérer la boule ouverte de centre x et de rayon :

$$R - \|x - a\|.$$



Remarque Le dessin fait lors de la démonstration précédente correspond à une norme euclidienne, mais nous a permis de trouver une démonstration valable pour toute norme. Cette représentation des boules n'induit en général pas de fausse intuition lors de considérations topologiques, c'est pourquoi on l'utilise couramment. [1]

p.232

Exercice 24 Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. L'intervalle ouvert $]a, b[$ est-il un ouvert de $\mathbb{R}$ (muni de la valeur absolue) ?
2. L'intervalle ouvert $]a, b[$ est-il un ouvert de $\mathbb{C}$ (muni du module) ?

Remarque Plus généralement, tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de la forme $]-\infty, b[$, $]a, b[$ ou $]a, +\infty[$, est un ouvert de $\mathbb{R}$, mais pas de $\mathbb{C}$.

Attention Comme l'illustre l'exercice précédent, le caractère ouvert ou non d'un ensemble n'est pas une notion intrinsèque à cet ensemble, mais dépend de l'espace dans lequel on le considère.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors une partie ouverte dans F n'est en général pas une partie ouverte de E.

Proposition 15

- La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert de E.
- L'intersection d'une famille finie d'ouverts est un ouvert de E.

Démonstration page 233

Remarque En particulier, une réunion quelconque de boules ouvertes est un ouvert de E. En fait, la réciproque de ceci est vraie (*cf.* exercice suivant).

1. Concrètement, le risque majeur de cette vision euclidienne concerne le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire (*cf.* le « attention » de la page 191).

p.233 **Exercice 25** Montrer que toute partie ouverte de E peut s'écrire comme une réunion de boules ouvertes.

Attention Avant d'affirmer qu'une intersection d'ouverts est un ouvert, il faut bien vérifier le caractère *fini* de cette intersection. En effet, une intersection quelconque de parties ouvertes n'est en général pas ouverte, comme l'illustre l'exercice suivant.

p.233 **Exercice 26** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. Montrer que, bien que chacun des U_n soit un ouvert de $\mathbb{R}$, leur intersection ne l'est pas.

2 Parties fermées

Définition 15

On dit qu'une partie de E est un **fermé de E**, ou une **partie fermée de E**, si son complémentaire est ouvert.

Remarque D'après la définition, il est clair que E et $\varnothing$ sont des parties fermées de E, puisque leurs complémentaires sont des ouverts de E.

p.233 **Exercice 27** Montrer que tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire tout intervalle de la forme $]-\infty, b]$, $[a, b]$ ou $[a, +\infty[$, est un fermé de $\mathbb{R}$.

Attention Il ne faut pas croire, par jeu de mots, qu'une partie qui n'est pas ouverte est nécessairement fermée. En effet, dans tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non réduit à $\{0\}$, il existe des parties ni ouvertes ni fermées.
C'est le cas, par exemple, de l'intervalle $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$.

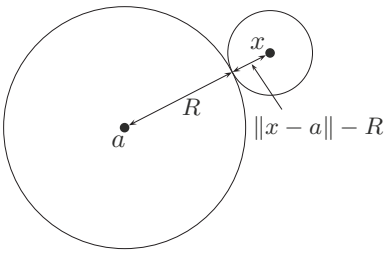
Proposition 16

Toute boule fermée est une partie fermée de E.

Principe de démonstration.

Démonstration page 233

On montre que le complémentaire de toute boule fermée est un ouvert.
Pour x n'appartenant pas à la boule fermée de centre a et de rayon R, considérer, comme y incite le dessin, la boule ouverte centrée en x et de rayon $\|x - a\| - R$.



Exemples

1. Tout singleton est un fermé de E.
2. Tout segment de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. En effet, si $a < b$, alors le segment $[a, b]$ n'est rien d'autre que la boule fermée de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $\dfrac{b-a}{2}$.

Proposition 17

- L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.
- La réunion d'une famille finie de fermés est un fermé.

Démonstration. En considérant les complémentaires, ce résultat découle de la proposition 15 de la page 207. En effet, si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés, alors on a :

$$E \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i \right) = \bigcap_{i\in I} (E \setminus A_i) \quad \text{et} \quad E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} A_i \right) = \bigcup_{i\in I} (E \setminus A_i). \qquad \square$$

Attention Avant d'affirmer qu'une réunion de fermés est fermée, il faut bien vérifier le caractère *fini* de cette réunion. En effet, une réunion quelconque de fermés n'est en général pas fermée, comme l'illustre l'exercice suivant.

p.234

Exercice 28 On se place dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $F_n = \left[\dfrac{1}{n}, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$. Déterminer l'ensemble $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Cet ensemble A est-il fermé ?

Remarque Plus généralement, toute partie A peut-être obtenue comme une réunion de fermé : il suffit d'écrire $A = \bigcup_{a\in A} \{a\}$.

p.234

Exercice 29 Montrer, en l'obtenant comme une intersection de fermés, que toute sphère est une partie fermée.

p.234

Exercice 30 *Distance à un fermé*

Soit F une partie fermée de E, et x un point de E n'appartenant pas à F. Montrer que la distance de x à F est strictement positive.

3 Voisinage d'un point

Définition 16

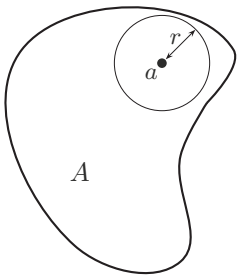
Étant donné A une partie de E et $a \in E$, on dit que A est un **voisinage de a** s'il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ soit incluse dans A.

Remarque De manière évidente, pour que A soit un voisinage de a, il est nécessaire que a appartienne à A.

Dire que A est un voisinage de a signifie qu'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in E \quad \|x - a\| < r \Longrightarrow x \in A,$$

autrement dit, être suffisamment proche du point a assure d'être dans A.



Remarque On peut, sans en changer le sens, remplacer « boule ouverte » par « boule fermée » dans la définition 16.

p.234 **Exercice 31** Montrer qu'un ouvert est un voisinage de chacun de ses points.

p.234 **Exercice 32** Montrer qu'une partie A de E est un voisinage d'un point a si, et seulement s'il existe un ouvert contenant a et inclus dans A.

Opérations sur les voisinages

Proposition 18

Soit x un élément de E.

- Une intersection finie de voisinages de x est encore un voisinage de x.
- Si A est un voisinage de x, alors toute partie de E contenant A est également un voisinage de x.

Démonstration page 234

Remarque Le deuxième point de la proposition précédente permet d'affirmer qu'une réunion quelconque de voisinages de x en est encore un.

4 Point intérieur, intérieur d'une partie

Définition 17

- On dit qu'un point x est **intérieur** à une partie A de E si A est un voisinage de x, *i.e.* s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.
- L'ensemble des points intérieurs à A est appelé **intérieur de A** ; on le note $\overset{\circ}{A}$ ou $\mathrm{Int}(A)$.

Remarques

1. On a vu que, pour que A soit un voisinage d'un point x, il est nécessaire que x appartienne à A. On en déduit que $\overset{\circ}{A} \subset A$.
2. Un ouvert étant un voisinage de chacun de ses points, il est clair qu'un ouvert est son propre intérieur.

3. La proposition 18 de la page précédente donne les résultats suivants :
   - si x est intérieur à un nombre fini de parties de E, alors x est intérieur à leur intersection ;
   - si A et B sont deux parties vérifiant $A \subset B$, alors on a $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

Attention La réciproque du dernier point évoqué est fausse : on peut trouver deux parties A et B vérifiant $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ sans pour autant avoir $A \subset B$.
On peut même trouver deux ensembles qui ne sont pas égaux mais qui ont même intérieur. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, si $A = [0,1]$ et $B = [0,1[$, alors on a $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{B} =]0,1[$, et pourtant $A \neq B$.

Proposition 19

L'intérieur d'une partie A est le plus grand ouvert qui soit inclus dans A.

Démonstration page 235

p.235 **Exercice 33** Montrer que l'intérieur d'une partie A est la réunion de tous les ouverts inclus dans A.

p.235 **Exercice 34** Montrer qu'une partie A est ouverte si, et seulement si, $\overset{\circ}{A} = A$.

5 Point adhérent, adhérence d'une partie

Définition 18

- On dit qu'un point x est **adhérent** à une partie A de E si pour tout $r > 0$, on a $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$.
- L'ensemble des points adhérents à A est appelé **adhérence** de A ; on le note $\overline{A}$ ou $\mathrm{Adh}(A)$.

Remarque

1. Il est clair que si $x \in A$, alors x est adhérent à A, puisque toute boule ouverte centrée en x contient x et donc rencontre A (c'est-à-dire a une intersection non vide avec lui). On a donc $A \subset \mathrm{Adh}(A)$.
2. Dire qu'un point x n'appartient pas à l'adhérence de A signifie qu'on peut trouver $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \varnothing$ (ou encore $B(x,r) \subset E \setminus A$), ce qui signifie que x appartient à l'intérieur de $E \setminus A$. On a donc la relation :
$$E \setminus (\mathrm{Adh}\, A) = \mathrm{Int}(E \setminus A),$$
ce qui mène également aux deux relations suivantes :
$$\mathrm{Adh}\, A = E \setminus \mathrm{Int}(E \setminus A) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Int} A = E \setminus \mathrm{Adh}(E \setminus A).$$

3. Comme l'intérieur d'une partie est toujours un ouvert, la relation ci-dessus nous assure que l'adhérence d'une partie est toujours un fermé.

p.235

Exercice 35 Soit A une partie non vide de E et $x \in E$. Montrer que :

$$x \in \mathrm{Adh}(A) \iff d(x, A) = 0.$$

Proposition 20

L'adhérence d'une partie A est le plus petit fermé contenant A.

Démonstration page 235

p.235

Exercice 36 Montrer que l'adhérence d'une partie A est l'intersection de tous les fermés contenant A.

p.236

Exercice 37 Montrer qu'une partie A est un fermé si, et seulement si, $A = \overline{A}$.

Caractérisation séquentielle des points adhérents

Le résultat suivant donne une caractérisation très importante des points adhérents à une partie A.

Proposition 21 (Caractérisation séquentielle des points adhérents)

Un point x est adhérent à une partie A si, et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Démonstration page 236

Ce résultat peut aussi s'énoncé ainsi : l'adhérence d'une partie A est l'ensemble des limites des suites convergentes à valeurs dans A.

p.236

Exercice 38 Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel de E est aussi un sous-espace vectoriel.

p.236

Exercice 39 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note A_p l'ensemble $\{u_n\,;\ n \geqslant p\}$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

$$\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}.$$

Remarque L'exercice précédent assure que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est un fermé, car il s'écrit comme une intersection de fermés.

Caractérisation séquentielle des parties fermées

Une partie étant un fermé si, et seulement si, elle est égale à sa propre adhérence (*cf.* exercice 37), on déduit de la caractérisation séquentielle des points adhérents le résultat suivant :

Proposition 22 (Caractérisation séquentielle des parties fermées)

Une partie A est un fermé si, et seulement si, la limite de toute suite convergente d'éléments de A appartient à A.

Démonstration.

- Supposons que A soit une partie fermée. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de A. Notons $\ell = \lim u_n$, et montrons que $\ell \in A$.
  D'après la caractérisation séquentielle des points adhérents, on a $\ell \in \overline{A}$. Or, A étant une partie fermée, on a $\overline{A} = A$, et donc $\ell \in A$.
- Réciproquement, supposons que la limite de toute suite convergente d'éléments de A appartienne à A, et montrons que A est fermée. Pour cela, montrons que $A = \overline{A}$, ce qui revient à montrer que $\overline{A} \subset A$ (l'autre inclusion étant évidente).
  Soit $x \in \overline{A}$. Pour montrer que $x \in A$, il suffit de prouver l'existence d'une suite à valeurs dans A qui converge vers x. Cela est immédiat par caractérisation séquentielle des points adhérents. □

6 Densité

Définition 19

Soit A une partie de E. Une partie D de A est dite **dense** dans A si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) l'adhérence de D contient A ;

(ii) pour tout $a \in A$ et pour tout $r > 0$, il existe $x \in D$ tel que $\|x-a\| \leqslant r$;

(iii) pour tout $a \in A$, il existe une suite d'éléments de D qui converge vers a.

Remarque Dans la définition précédente, les propriétés (ii) et (iii) ne sont que des reformulations de la propriété $A \subset \overline{D}$.

Exemples

1. Les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. L'ensemble des fonctions en escalier est dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ au sens de la norme infinie. C'est une reformulation du théorème d'approximation par des fonctions en escalier vu en première année.
4. Nous verrons (*cf.* le théorème 28 de la page 519) que l'ensemble des fonctions polynomiales est également dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ au sens de la norme $\mathcal{N}_\infty$.

7 Frontière

Définition 20

Soit A une partie de E. On appelle **frontière de A**, et on note $\mathrm{Fr}(A)$, l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Dire qu'un point x appartient à la frontière de A signifie donc que $x \in \overline{A}$ et $x \notin \overset{\circ}{A}$, c'est-à-dire que pour tout $r > 0$ on a :

$$B(x,r) \cap A \neq \varnothing \quad \text{et} \quad B(x,r) \cap (E \setminus A) \neq \varnothing.$$

Exemple Si B désigne une boule de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$, alors $\mathrm{Fr}(B)$ est la sphère de mêmes centre et rayon.

p.236

Exercice 40 Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Quelle est la frontière d'un intervalle dont les bornes sont a et b ?

p.237

Exercice 41 Soit A une partie de E. Montrer que :

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{(E \setminus A)}.$$

Remarque Du résultat de l'exercice précédent il résulte que :

- la frontière de A est une partie fermée (car elle est l'intersection de deux parties fermées) ;
- A et $E \setminus A$ ont même frontière.

Proposition 23

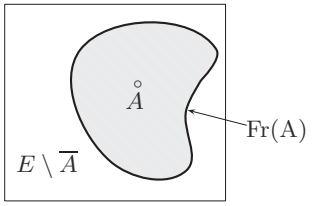
Pour toute partie A de E, les trois parties :

$$\overset{\circ}{A}, \quad \mathrm{Fr}(A) \quad \text{et} \quad E \setminus \overline{A}$$

forment une partition de E, c'est-à-dire qu'elles sont deux à deux disjointes et que leur réunion est E.

Démonstration.

Sachant que $\overset{\circ}{A} \subset \overline{A}$, la relation $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ assure que $\overset{\circ}{A}$ et $\mathrm{Fr}(A)$ forment une partition de $\overline{A}$. Les trois ensembles $\overset{\circ}{A}$, $\mathrm{Fr}(A)$ et $E \setminus \overline{A}$ forment donc une partition de E.



□

8 Ouvert relatif, fermé relatif, voisinage relatif

Définition 21

Soit A une partie de E.

- Une partie U de A est un **ouvert relatif** de A s'il existe un ouvert $\widetilde{U}$ de E tel que $U = \widetilde{U} \cap A$.
- Une partie F de A est un **fermé relatif** de A s'il existe un fermé $\widetilde{F}$ de E tel que $F = \widetilde{F} \cap A$.
- Soit a un point de A. Une partie V de A est un **voisinage relatif** de A du point a s'il existe un voisinage $\widetilde{V}$ de a dans E tel que $V = \widetilde{V} \cap A$.

On constate facilement que si A est égal à E, alors ces notions coïncident avec les notions déjà vues d'ouvert, fermé et voisinage. En revanche, ce n'est pas le cas si A est quelconque, comme l'illustrent les exercices suivants.

p.237

Exercice 42 On travaille dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'intervalle $[0,1[$, bien qu'il ne soit pas ouvert dans $\mathbb{R}$, est un ouvert relatif de $[0,1]$.

p.237

Exercice 43 On se place dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'intervalle $]0,1]$, bien qu'il ne soit pas fermé dans $\mathbb{R}$, est un fermé relatif de $]0,2]$.

p.237

Exercice 44 Montrer que toute partie A de E est à la fois un ouvert relatif de A et un fermé relatif de A.

p.237

Exercice 45 On travaille dans $\mathbb{C}$. Montrer que l'intervalle $[0,2]$, bien qu'il ne soit pas un voisinage du point 1, en est un voisinage relatif de $\mathbb{R}$.

p.237

Exercice 46 Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Soit G une partie de A. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(i) G est un ouvert relatif de A ;

(ii) pour tout $x \in G$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A \subset G$.

p.238

Exercice 47 *Caractérisation séquentielle des fermés relatifs*

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Soit G une partie de A. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(i) G est un fermé relatif de A ;

(ii) pour tout suite (x_n) d'éléments de G convergeant vers un élément $\ell \in A$, alors on a $\ell \in G$.

IV Comparaison de normes

Il est fréquent de rencontrer plusieurs normes sur un même espace vectoriel. Une question apparaît alors : si une propriété (comme la convergence d'une suite ou le caractère borné, ouvert ou fermé d'une partie) est vraie pour une norme, l'est-elle également pour les autres ?
La réponse est négative dans le cas général, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemples

1. Dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie ainsi :
$$\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) = x^n.$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\mathcal{N}_\infty(f_n) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_1(f_n) = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\cdot$$
Il en résulte que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers la fonction nulle pour la norme un, mais pas pour la norme infinie.
2. En reprenant la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ précédente, et en notant $g_n = (n+1)f_n$, on constate que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée pour la norme un (tous ses éléments sont unitaires), mais pas pour la norme infinie.

Cependant, nous allons voir ici que sous des conditions supplémentaires, certaines propriétés sont conservées lors du passage d'une norme à une autre.

1 Domination de normes

Définition 22

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 est **dominée** par N_2 s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$, ou encore :
$$\forall x \in E \quad N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x).$$

Terminologie Pour signifier que N_1 est dominée par N_2, on dit aussi que N_2 est **plus fine** que N_1.

Remarque La propriété $N_1 \leqslant \alpha N_2$ s'interprète ainsi : la boule unité pour la norme N_2 est incluse dans la boule de centre 0 et de rayon α pour la norme N_1.

Le résultat suivant assure que pour étudier le caractère dominé de la norme N_1 par la norme N_2, on peut se contenter de considérer des éléments $x \in E$ tels que $N_2(x) = 1$.

Proposition 24

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E. La norme N_1 est dominée par la norme N_2 si, et seulement s'il existe un réel α strictement positif tel que :

$$\forall x \in E \quad N_2(x) = 1 \Longrightarrow N_1(x) \leqslant \alpha.$$

Démonstration page 238

p.238 **Exercice 48** La relation de domination des normes est-elle une relation d'ordre ?

p.239 **Exercice 49** Dans l'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ (avec $a<b$), montrer que les normes un et deux sont toutes les deux dominées par la norme infinie.

Proposition 25

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E telles que N_1 soit dominée par N_2.

Si une partie de E est bornée pour la norme N_2, alors elle l'est également pour la norme N_1.

Démonstration page 239

Remarque Avec les notations de la proposition précédente, si une application f à valeurs dans E (et donc en particulier une suite d'éléments de E) est bornée pour la norme N_2, alors elle l'est également pour la norme N_1.

Proposition 26

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E telles que N_1 soit dominée par N_2.

Si une suite converge vers un élément ℓ de E pour la norme N_2, alors elle converge également vers ℓ pour la norme N_1.

Démonstration page 239

Remarque Étant donné deux normes N_1 et N_2, pour montrer que N_1 n'est pas dominée par N_2, il suffit, d'après la proposition précédente, d'exhiber une suite qui converge pour la norme N_2 mais pas pour la norme N_1.

Point méthode

Dans la pratique, pour montrer que N_1 n'est pas dominée par N_2 on cherche souvent une suite qui, au choix, tend vers 0 pour N_2 mais pas pour N_1, ou bien est bornée pour N_2 mais qui ne l'est pas pour N_1.

p.239 **Exercice 50** On travaille dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. En considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(x)=x^n$, montrer que la norme infinie n'est pas dominée par la norme un.

2 Normes équivalentes

Définition 23

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que :

$$\forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x).$$

p.239

Exercice 51 Montrer que deux normes sont équivalentes si, et seulement si, chacune est dominée par l'autre

p.240

Exercice 52

Montrer que l'équivalence des normes est une relation d'équivalence.

p.240

Exercice 53 *Équivalence des normes un, deux et infini dans* $\mathbb{K}^n$

Montrer que pour pour $x \in \mathbb{K}^n$ on a :

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty.$$

Que peut-on en déduire ?

Beaucoup de propriétés sont conservées lorsqu'on passe d'une norme à une autre qui lui est équivalente.

Donnons trois résultats, dont les deux premiers sont des conséquences immédiates de l'exercice 51 et des propositions 25 et 26.

Proposition 27 (Conservation du caractère borné d'une partie)

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E. Une partie est bornée pour la norme N_1 si, et seulement si, elle l'est pour la norme N_2.

Remarque Ce résultat s'applique en particulier aux applications bornées et aux suites bornées.

Proposition 28 (Conservation du caractère convergent d'une suite)

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E. Une suite converge vers un élément ℓ de E pour la norme N_1 si, et seulement si, elle converge vers ℓ pour la norme N_2.

Proposition 29 (Conservation des ouverts et des fermés)

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E, et A une partie de E. Alors :

- la partie A est ouverte pour N_1 si, et seulement si, elle l'est pour N_2 ;
- la partie A est fermée pour N_1 si, et seulement si, elle l'est pour N_2.

Démonstration page 240

Point méthode

Les résultats précédents nous assurent que, pour étudier la convergence d'une suite ou encore le caractère borné, ouvert ou fermé d'une partie (et donc, par extension, tout résultat reposant sur ces notions), et si l'on dispose de plusieurs normes équivalentes, alors on pourra choisir celle que l'on préfère. En particulier, dans $\mathbb{K}^n$, on se demandera régulièrement laquelle des trois normes classiques est la plus adaptée à la situation.

Comparaison de normes

Comparer deux normes est le fait de déterminer si l'une des deux est dominée par l'autre, ou si les deux sont équivalentes.

p.240

Exercice 54 Soit a, b et c trois réels vérifiant $a < b < c$. Dans $\mathbb{R}[X]$, comparer les deux normes N_1 et N_2 définies par :

$$N_1(P) = \int_a^b |P(t)|\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad N_2(P) = \int_a^c |P(t)|\mathrm{d}t$$

Indication : on pourra considérer $P_n = (n+1)\left(\frac{X-a}{c-a}\right)^n$.

Équivalence des normes en dimension finie

299

Remarque Il sera vu (*cf.* le théorème 15 de la page 299) que dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

Pour alléger l'écriture, notons $\|x\| = \sqrt{(\,x \mid x\,)}$ (même si cette notation est abusive car nous n'avons pas encore démontré qu'il s'agit d'une norme).

- L'homogénéité et la séparation sont faciles à vérifier :
  - en effet, si $x \in E$ vérifie $\|x\| = 0$, alors on a $(\,x \mid x\,) = 0$, ce qui, comme un produit scalaire est *défini positif*, entraîne que x est nul ;
  - pour $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$, le bilinéarité du produit scalaire donne :
$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\,\lambda x \mid \lambda x\,)} = \sqrt{\lambda^2\,(\,x \mid x\,)} = |\lambda|\,\sqrt{(\,x \mid x\,)} = |\lambda| \times \|x\|.$$
- Il reste à démontrer l'inégalité triangulaire. Soit $(x, y) \in E^2$. On a :
$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (\,x+y \mid x+y\,)\\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,(\,x \mid y\,) && \text{(bilinéarité et symétrie)}\\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| && \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)}\\ &= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2.\end{aligned}$$
  On obtient donc l'inégalité $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ souhaitée.

Exercice 2 Par homogénéité de la norme, on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$. Ainsi, le vecteur λx est unitaire si, et seulement si, $|\lambda| \times \|x\| = 1$, c'est-à-dire $\lambda = \pm\dfrac{1}{\|x\|}$.

Il existe donc deux vecteurs unitaires colinéaires à x qui sont $\dfrac{x}{\|x\|}$ de même sens que x et $-\dfrac{x}{\|x\|}$ qui lui est de sens opposé à x.

Exercice 3 D'après la remarque précédente, il existe des vecteurs unitaires dans E dès que E contient au moins un vecteur non nul, c'est-à-dire dès que E n'est pas l'espace nul. En revanche, si E est l'espace nul, alors E ne contient pas de vecteur unitaire puisqu'alors le seul vecteur qu'il contient est de norme nulle.

Proposition 1

- Commençons par montrer que :
$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \tag{1}$$
  ce qui se reformule ainsi :
$$\|x\| \leqslant \|x+y\| + \|y\| \qquad \text{et} \qquad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$
  Ces deux inégalités résultent de l'inégalité triangulaire de la définition 1 de la page 188 appliquée d'abord aux vecteurs $x+y$ et $-y$ et ensuite aux vecteurs x et y.
- L'encadrement (1) étant valable pour tous x et y, on peut échanger leurs rôles :
$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|y+x\| \leqslant \|y\| + \|x\|. \tag{2}$$
  Les encadrements (1) et (2) donnent alors :
$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|. \tag{3}$$

- Il reste, pour conclure, à montrer que :

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Ceci résulte de l'encadrement (3) appliqué aux vecteurs x et $-y$.

Exercice 4 On a $u_1 + u_2 = (1, 1)$, donc $\|u_1 + u_2\|_1 = 2$. Comme $\|u_1\|_1 = \|u_2\|_1 = 1$, les vecteurs u_1 et u_2 vérifient le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, bien qu'il ne soient pas colinéaires.

Exercice 5 Notons $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire considéré. Soit x et y deux vecteurs.

- D'une part, en écrivant $\|x+y\|^2 = (\,x+y \mid x+y\,)$ et grâce aux propriétés du produit scalaire (bilinéarité et symétrie), on obtient $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(\,x \mid y\,)$.
- D'autre part, on a $\big(\|x\| + \|y\|\big)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\|$.

On obtient :

$$\begin{aligned}\|x + y\| = \|x\| + \|y\| &\iff (\,x \mid y\,) = \|x\| \times \|y\| \\ &\iff (\,x \mid y\,)^2 = \|x\|^2 \times \|y\|^2 \quad \text{et} \quad (\,x \mid y\,) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Cela prouve le résultat souhaité car deux vecteurs vérifient le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz si, et seulement s'il sont colinéaires, et leur produit scalaire est alors positif si, et seulement s'il sont de même sens.

Exercice 6

- **Séparation.** C'est évident, car pour $(M, N) \in E^2$, on a $d(M, N) = 0$ si, et seulement si, $\|\overrightarrow{MN}\| = 0$, ce qui, par propriété de séparation de la norme, revient à dire que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $M = N$.
- **Symétrie.** C'est une conséquence de l'homogénéité de la norme.
  En effet, pour $(M, N) \in E^2$, on a :

$$d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\| = \|-\overrightarrow{NM}\| = \|\overrightarrow{NM}\| = d(N, M).$$

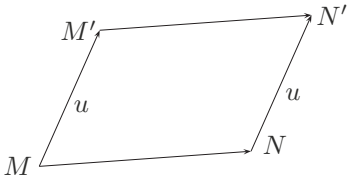
- **Inégalité triangulaire.** Pour $(M, N, P) \in E^3$, on a :

$$\begin{aligned}d(M, P) = \|\overrightarrow{MP}\| &= \|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}\| \\ &\leqslant \|\overrightarrow{MN}\| + \|\overrightarrow{NP}\| \qquad \text{(inégalité triangulaire sur } \|\cdot\|) \\ &= d(M, N) + d(N, P).\end{aligned}$$

- **Invariance par translation.**
  Pour $(M, N, u) \in E^3$, si l'on note :

$$M' = M + u \quad \text{et} \quad N' = N + u,$$

alors les vecteur $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ sont égaux.



Proposition 3 Soit $a \in A$. On a, par définition de $d(x, A)$ et par inégalité triangulaire :

$$d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a).$$

Il en résulte que $d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, a)$. Cette inégalité étant vraie pour tout $a \in A$, on en déduit que $d(x, A) - d(x, y)$ minore l'ensemble $\{d(y, a)\,;\ a \in A\}$, et donc que :

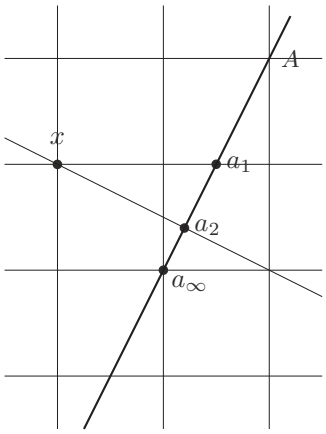
$$d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, A).$$

Cela donne $d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y)$. Un argument de symétrie du problème en x et y permet alors d'obtenir le résultat souhaité.

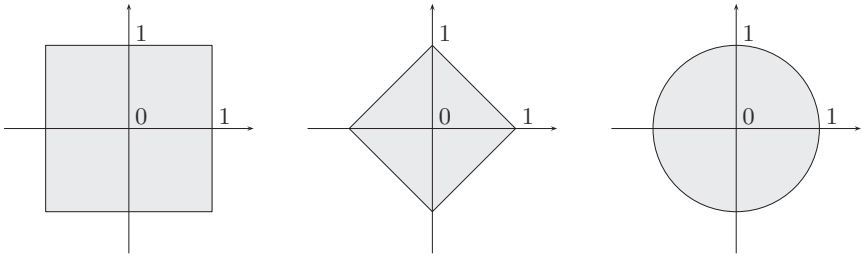
Exercice 7

Dans chaque cas, on obtient que la distance de x à A est atteinte en un unique point :

- le point $a_\infty = (0, 0)$ est le point de A le plus proche de x au sens de la norme infinie, et :
$$d_\infty(x, A) = \|x - a_\infty\|_\infty = 1\ ;$$
- le point $a_2 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ est le point de A le plus proche de x au sens de la norme deux (c'est le projeté orthogonal du point x sur la droite A), et :
$$d_2(x, A) = \|x - a_2\|_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5}\ ;$$
- le point $a_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ est le point de A le plus proche de x au sens de la norme un, et :
$$d_1(x, A) = \|x - a_1\|_1 = \frac{3}{2}.$$



Exercice 8

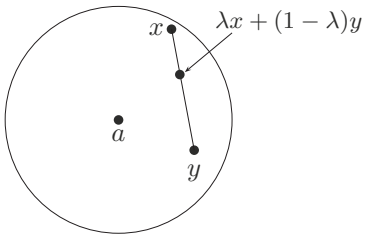


pour la norme infinie pour la norme un pour la norme deux

Proposition 4

Soit B une boule (ouverte ou fermée). Donnons-nous x en y deux éléments de B et $\lambda \in [0,1]$, et montrons que $\lambda x + (1-\lambda)y \in B$. Pour cela, il suffit de montrer qu'en notant a le centre de B, on a :

$\big\|(\lambda x+(1-\lambda)y)-a\big\| \leqslant \max\big(\|x-a\|, \|y-a\|\big)$.



Cela s'obtient en écrivant :

$$\begin{aligned}\big\|\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) - a\big\| &= \big\|\lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a)\big\| \\ &\leqslant \big\|\lambda(x-a)\big\| + \big\|(1_\lambda)(y-a)\big\| \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant \lambda\|x-a\| + (1-\lambda)\|y-a\| \qquad \text{(homogénéité)} \\ &\leqslant \max\big(\|x-a\|, \|y-a\|\big).\end{aligned}$$

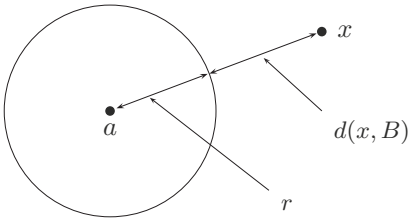
Exercice 9

Il est clair que si $x \in B$, alors $d(x,B) = 0$.

Supposons que $x \notin B$ et montrons que :

$$d(x,B) = d(x,a) - r.$$

Si l'on note A l'ensemble $\{d(x,y)\,;\ y \in B\}$, cela revient à montrer que $\inf A = d(x,a) - r$.



- La seconde inégalité triangulaire donne :

  $$\forall y \in B \quad d(x,a) - d(a,y) \leqslant d(x,y).$$

  Comme $\forall y \in B \quad d(y,a) \leqslant r$, on obtient :

  $$\forall y \in B \quad d(x,a) - r \leqslant d(x,y).$$

  Donc $d(x,a) - r$ est un minorant de A.

- Notons $u = \dfrac{x-a}{\|x-a\|}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $y_n = a + \Big(r - \dfrac{1}{n}\Big)u$.

  Alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

  * d'une part, $d(a,y_n) = r - \dfrac{1}{n} < r$, donc $y_n \in B$;
  * d'autre part :

    $$d(x,y_n) = \left\|x - a - \Big(r - \frac{1}{n}\Big)u\right\| = \left\|\Big(d(x,a) - r + \frac{1}{n}\Big)u\right\|$$

    et donc, puisque u est unitaire :

    $$d(x,y_n) = d(x,a) - r + \frac{1}{n} \to d(x,a) - r.$$

  Par caractérisation de la borne supérieure, cela montre que $\sup A = d(x,a) - r$.

Exercice 10 Soit A une partie contenue dans une boule B de centre a et de rayon r. Que le boule B soit fermée ou ouverte, on a toujours $B \subset B_f(a,r)$, et

donc $A \subset B_f(a,r)$. Alors, par l'inégalité triangulaire :

$$\forall x \in A \quad \|x\| \leqslant \|a\| + \|x-a\| \leqslant \|a\| + r,$$

donc A est bornée.

Exercice 11 Notons Γ l'ensemble $\big\{d(x,y)\,;\ (x,y) \in A^2\big\}$.

- Le caractère non vide de A assure que Γ est une partie non vide de $\mathbb{R}$.
- Montrons que Γ est majorée.
  Soit $R \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall a \in A \quad \|a\| \leqslant R$ (un tel R existe car A est bornée).
  Alors Γ est majorée par $2R$, car on a :

$$\forall (x,y) \in A^2 \quad d(x,y) = \|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant 2R.$$

Donc Γ possède une borne supérieure car c'est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée.

Exercice 12 Notons a le centre de B, et Γ l'ensemble $\{d(x,y)\,;\ (x,y) \in B^2\}$.

- L'inégalité triangulaire assure que l'ensemble Γ est majoré par $2r$. En effet, si x et y deux éléments de B, alors on a :

$$d(x,y) \leqslant d(x,a) + d(y,a) \leqslant r + r = 2r.$$

- D'autre part, soit u est un vecteur unitaire de E (un tel vecteur existe car E n'est pas l'espace nul). Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, les éléments :

$$x_n = a + r(1-2^{-n})u \quad \text{et} \quad y_n = a - r(1-2^{-n})u$$

appartiennent à B et vérifient :

$$d(x_n,y_n) = 2r(1-2^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2r.$$

Cela montre, par caractérisation de la borne supérieure, que $\sup(\Gamma) = 2r$, c'est-à-dire que B a pour diamètre $2r$.

Proposition 5

- **Norme infinie.**
  - *Séparation.* Si $x \in \mathbb{K}^n$ vérifie $\|x\|_\infty = 0$, alors on a $\max\limits_{k\in[\![1,n]\!]} |x_k| = 0$, et donc :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad x_k = 0,$$

    c'est-à-dire que x est le vecteur nul.
  - *Homogénéité.* Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}\|\lambda\, x\|_\infty &= \max\big\{|\lambda\, x_k|\,;\ k \in [\![1,n]\!]\big\}\\ &= \max\big\{|\lambda|\ |x_k|\,;\ k \in [\![1,n]\!]\big\}\\ &= |\lambda|\ \max\big\{|x_k|\,;\ k \in [\![1,n]\!]\big\} = |\lambda|\ \|x\|_\infty.\end{aligned}$$

  - *Inégalité triangulaire.* Pour $(x,y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, on a :

$$\|x+y\|_\infty = \max\big\{|x_k+y_k|\,;\ k \in [\![1,n]\!]\big\}.$$

    Comme pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a :

$$|x_k+y_k| \leqslant |x_k| + |y_k| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

    il en résulte que $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ majore l'ensemble $\{|x_k+y_k|\,;\ k \in [\![1,n]\!]\}$, et donc que $\|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

- **Norme un.**
  - ∗ *Séparation.* Si $x \in \mathbb{K}^n$ vérifie $\|x\|_1 = 0$, alors on a $\sum_{k=1}^{n} |x_k| = 0$, et donc :
  $$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad x_k = 0,$$
  c'est-à-dire que x est le vecteur nul.
  - ∗ *Homogénéité.* Pour $x \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
  $$\|\lambda\, x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda\, x_k| = \sum_{k=1}^{n} \big(|\lambda|\ |x_k|\big) = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\lambda|\ \|x\|_1.$$
  - ∗ *Inégalité triangulaire.* Pour $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, on a :
  $$\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \big(|x_k| + |y_k|\big) = \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$
- **Norme deux.**
  - ∗ *Cas* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\|_2 = \sqrt{\varphi(x, x)}$, où φ est l'application :
  $$\begin{array}{rccc} \varphi : & (\mathbb{R}^n)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k. \end{array}$$
  L'application φ est un produit scalaire, donc l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est une norme car c'est la euclidienne associée au produit scalaire φ.
  - ∗ *Cas* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. L'argument précédent ne s'applique pas.
    - ⋆ *Séparation.* Si $x \in \mathbb{C}^n$ vérifie $\|x\|_2 = 0$, alors on a $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = 0$, et donc :
    $$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad x_k = 0.$$
    - ⋆ *Homogénéité.* Pour $x \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :
    $$\|\lambda\, x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\lambda\, x_k|^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = |\lambda|\ \|x\|_2.$$
    - ⋆ *Inégalité triangulaire.* Soit $(x, y) \in (\mathbb{C}^n)^2$.
    Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ suivants :
    $$\tilde{x} = (|x_1|, \ldots, |x_n|) \qquad \text{et} \qquad \tilde{y} = (|y_1|, \ldots, |y_n|).$$
    On a :
    $$\|x + y\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \big(|x_k| + |y_k|\big)^2} = \|\tilde{x} + \tilde{y}\|_2.$$
    En appliquant avec $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ l'inégalité triangulaire déjà obtenue pour la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$, il vient :
    $$\|x + y\|_2 \leqslant \|\tilde{x}\|_2 + \|\tilde{y}\|_2.$$
    En constatant alors que $\|x\|_2 = \|\tilde{x}\|_2$ et $\|y\|_2 = \|\tilde{y}\|_2$, on obtient le résultat :
    $$\|x + y\|_2 \leqslant \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Exercice 13

- **Norme infinie.**
  - *Séparation.* Si $x \in E$ vérifie $\|x\|_\infty = 0$, alors il est clair que $\forall i \in I \quad x_i = 0$, c'est-à-dire que x est nul.
  - *Homogénéité.* Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$$\begin{aligned}\|\lambda\, x\|_\infty &= \max\{|\lambda\, x_i|\,;\ i \in I\}\\ &= \max\{|\lambda|\ |x_i|\,;\ i \in I\}\\ &= |\lambda|\ \max\{|x_i|\,;\ i \in I\} = |\lambda|\ \|x\|_\infty.\end{aligned}$$
  - *Inégalité triangulaire.* Pour $(x, y) \in E^2$, on a $\|x+y\|_\infty = \max\{|x_i+y_i|\,;\ i \in I\}$. Comme pour tout $i \in I$ on a :
$$|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$
il en résulte que $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ majore l'ensemble $\{|x_i + y_i|\,;\ i \in I\}$, et donc que $\|x + y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.
- **Norme un.**
  - *Séparation.* Si $x \in E$ vérifie $\|x\|_1 = 0$, alors il est clair que $\forall i \in I \quad x_i = 0$, c'est-à-dire que x est nul.
  - *Homogénéité.* Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$$\|\lambda\, x\|_1 = \sum_{i\in I} |\lambda\, x_i| = \sum_{i\in I} \big(|\lambda|\ |x_i|\big) = |\lambda| \sum_{i\in I} |x_i| = |\lambda|\ \|x\|_1.$$
  - *Inégalité triangulaire.* Pour $(x, y) \in E^2$, on a :
$$\|x + y\|_1 = \sum_{i\in I} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i\in I} \big(|x_i| + |y_i|\big) = \sum_{i\in I} |x_i| + \sum_{i\in I} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$
- **Norme deux.**
  - *Séparation.* Si $x \in E$ vérifie $\|x\|_2 = 0$, alors $\sum\limits_{x\in I} |x_i|^2 = 0$, et donc :
$$\forall i \in I \quad x_i = 0$$
c'est-à-dire $x = 0$.
  - *Homogénéité.* Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$$\|\lambda\, x\|_2 = \sqrt{\sum_{i\in I} |\lambda\, x_i|^2} = |\lambda|\ \sqrt{\sum_{i\in I} |x_i|^2} = |\lambda|\ \|x\|_2.$$
  - *Inégalité triangulaire.*
    - *Résultat préliminaire.* Dans l'espace $\mathbb{R}^{(I)}$ des familles presque nulles de réels indexées par I, l'application :
$$(a, b) \mapsto \sum_{i\in I} a_i b_i$$
est un produit scalaire. Sa norme euclidienne associée est donnée par :
$$\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{i\in I} a_i^2}.$$

L'inégalité triangulaire associée à cette norme donne :

$$\sqrt{\sum_{i\in I}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i\in I}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i\in I}b_i^2}\qquad(\star)$$

pour toutes familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ appartenant à $\mathbb{R}^{(I)}$.

⋆ Soit $(x,y)\in E^2$. On a :

$$\|x+y\|_2=\sqrt{\sum_{i\in I}|x_i+y_i|^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i\in I}\big(|x_i|+|y_i|\big)^2}.$$

Les familles $(|x_i|)_{i\in I}$ et $(|y_i|)_{i\in I}$ appartenant à $\mathbb{R}^{(I)}$, on peut appliquer l'inégalité $(\star)$, ce qui donne le résultat souhaité :

$$\|x+y\|_2\leqslant\sqrt{\sum_{i\in I}|x_i|^2}+\sqrt{\sum_{i\in I}|y_i|^2}=\|x\|_2+\|y\|_2.$$

Exercice 14

1. Le fait que X soit non vide et que f soit bornée assure que la partie :
$$\big\{\big|f(x)\big|\,;\ x\in X\big\}$$
possède une borne supérieure, comme toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

2. • **Séparation.** Si f vérifie $\mathcal{N}_\infty(f)=0$, alors on a $\big|f(x)\big|=0$ pour tout $x\in X$, c'est-à-dire que f est la fonction nulle.

   • **Homogénéité.** Soit $f\in\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.
   Montrons que $\mathcal{N}_\infty(\lambda f)=|\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f)$, ce qui revient à montrer qu'en notant A l'ensemble $\big\{\big|\lambda\,f(x)\big|\,;\ x\in X\big\}$, alors on a $\sup(A)=|\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f)$.
   ∗ Tout d'abord, A est majoré par $|\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f)$.
   En effet, si a appartient à A, alors on peut trouver $x\in X$ tel que $a=\big|\lambda\,f(x)\big|$. On a alors $a=|\lambda|\,\big|f(x)\big|$, et donc $a\leqslant|\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f)$.
   ∗ Il suffit alors pour conclure de montrer qu'on peut trouver une suite à valeurs dans A tendant vers $|\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f)$.
   Comme $\mathcal{N}_\infty(f)=\sup\big\{\big|f(x)\big|\,;\ x\in X\big\}$, par caractérisation de la borne supérieure, on peut trouver une suite (x_n) à valeurs dans X telle que
   $$\big|f(x_n)\big|\to\mathcal{N}_\infty(f).$$
   En notant alors $a_n=\big|\lambda\,f(x_n)\big|$, on a :
   $$a_n=|\lambda|\,\big|f(x_n)\big|\to|\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f).$$

   • **Inégalité triangulaire.** Soit $(f,g)\in\big(\mathcal{B}(X,\mathbb{K})\big)^2$. Montrons que :
   $$\mathcal{N}_\infty(f+g)\leqslant\mathcal{N}_\infty(f)+\mathcal{N}_\infty(g).$$
   En notant A l'ensemble $\big\{\big|f(x)+g(x)\big|\,;\ x\in X\big\}$, cela revient à montrer que A est majoré par $\mathcal{N}_\infty(f)+\mathcal{N}_\infty(g)$. C'est évident, car pour tout $x\in X$, on a :
   $$\big|f(x)+g(x)\big|\leqslant\underbrace{\big|f(x)\big|}_{\leqslant\mathcal{N}_\infty(f)}+\underbrace{\big|g(x)\big|}_{\leqslant\mathcal{N}_\infty(g)}.$$

Exercice 15

- **Séparation.** Si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ vérifie $\mathcal{N}_1(f)=0$, alors $|f|$ est la fonction nulle car continue, positive et d'intégrale nulle (l'intervalle d'intégration étant d'intérieur non vide), et donc f est nulle.
- **Homogénéité.** Pour $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$$\mathcal{N}_1(\lambda f)=\int_a^b |\lambda f| = \int_a^b \big(|\lambda|\,|f|\big) = |\lambda| \int_a^b |f| = |\lambda|\,\mathcal{N}_1(f).$$
- **Inégalité triangulaire.** Pour $(f,g) \in \big(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})\big)^2$, on a :
$$\mathcal{N}_1(f+g)=\int_a^b |f+g| \leqslant \int_a^b \big(|f|+|g|\big) = \int_a^b |f| + \int_a^b |g| = \mathcal{N}_1(f)+\mathcal{N}_1(g).$$

Exercice 16

- **Séparation.** Si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ vérifie $\mathcal{N}_2(f)=0$, alors $|f|^2$ est la fonction nulle, en tant que fonction continue, positive et d'intégrale nulle (l'intervalle d'intégration étant d'intérieur non vide), et donc f est la fonction nulle.
- **Homogénéité.** Pour $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :
$$\big(\mathcal{N}_2(\lambda f)\big)^2 = \int_a^b |\lambda f|^2 = \int_a^b \big(|\lambda|^2\,|f|^2\big) = |\lambda|^2 \int_a^b |f|^2 = |\lambda|^2\,\mathcal{N}_2(f)^2,$$
d'où, comme les quantités précédentes sont positives, $\mathcal{N}_2(\lambda f)=|\lambda|\,\mathcal{N}_2(f)$.
- **Inégalité triangulaire.** Soit f et g deux éléments de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$.
L'inégalité triangulaire donne $|f+g| \leqslant |f|+|g|$, et donc :
$$\mathcal{N}_2(f+g)=\sqrt{\int_a^b |f+g|^2} \leqslant \sqrt{\int_a^b (|f|+|g|)^2} = \mathcal{N}_2\big(|f|+|g|\big). \qquad (1)$$
Mais alors, comme l'application $f \mapsto \mathcal{N}_2(f)$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, nous pouvons appliquer l'inégalité triangulaire associée avec les fonctions $|f|$ et $|g|$:
$$\mathcal{N}_2\big(|f|+|g|\big) \leqslant \mathcal{N}_2(|f|)+\mathcal{N}_2(|g|). \qquad (2)$$
Comme on a $\mathcal{N}_2(|f|)=\mathcal{N}_2(f)$ et $\mathcal{N}_2(|g|)=\mathcal{N}_2(g)$, les relations (1) et (2) permettent de conclure.

Exercice 17

- Pour $\mathcal{N}_\infty$, la réponse est positive puisque $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$.
- En revanche, pour $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$, la réponse est négative car les applications :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \mathcal{N}_1(f) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \mathcal{N}_2(f) \end{array}$$
ne vérifient par la propriété de séparation. En effet, toute fonction f qui est nulle sauf en un nombre fini de points vérifie $\mathcal{N}_1(f)=\mathcal{N}_2(f)=0$.
Remarque. On peut cependant montrer que ces deux applications vérifient la propriété d'homogénéité ainsi que l'inégalité triangulaire.

Exercice 18

- **Séparation.** Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifie $\|P\| = 0$, alors il possède $n+1$ racines distinctes : $a_1, \dots, a_{n+1}$, et donc est le polynôme nul.
- **Homogénéité.** Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned}\|\lambda P\| &= \max\big\{|\lambda P(a_1)|, \dots, |\lambda P(a_{n+1})|\big\} \\ &= |\lambda| \max\big\{|P(a_1)|, \dots, |P(a_{n+1})|\big\} = |\lambda|\,\|P\|.\end{aligned}$$

- **Inégalité triangulaire.** Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$. On a :

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad |P(a_k) + Q(a_k)| \leqslant |P(a_k)| + |Q(a_k)|,$$

donc :

$$\|P+Q\| \leqslant \max_{k \in [\![1,n+1]\!]} \big(|P(a_k)| + |Q(a_k)|\big)$$

et donc *a fortiori* :

$$\|P+Q\| \leqslant \max_{k \in [\![1,n+1]\!]} |P(a_k)| + \max_{k \in [\![1,n+1]\!]} |Q(a_k)| = \|P\| + \|Q\|$$

Exercice 19 Pour tout $u \in E$, on a $N(u) = \mathcal{N}_\infty\big(\varphi(u)\big)$, où φ est l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & E \\ & u & \longmapsto & \left(\dfrac{u_n}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

dont on montre aisément qu'elle est linéaire et injective.

Proposition 6 Notons E l'espace $E_1 \times \cdots \times E_p$.

- **Séparation.** Si $x = (x_1, \dots, x_p)$ vérifie $\varphi(x) = 0$, alors, par définition de φ, on a :

$$\varphi_1(x_1) = \cdots = \varphi_p(x_p) = 0,$$

ce qui, par propriété de séparation des normes φ_k, entraîne que $x_1 = \cdots = x_p = 0$, c'est-à-dire $x = 0$.

- **Homogénéité.** Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\varphi(\lambda\, x) = \varphi\big((\lambda\, x_1, \dots, \lambda\, x_p)\big) = \max\big(\varphi_1(\lambda\, x_1), \dots, \varphi_p(\lambda\, x_p)\big)$$

L'homogénéité de chacune des normes $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ donne alors :

$$\varphi(\lambda\, x) = \max\big(\lambda\, \varphi_1(x_1), \dots, \lambda\, \varphi_p(x_p)\big) = |\lambda|\, \varphi(x).$$

- **Inégalité triangulaire.** Soit $x = (x_1, \dots, x_p)$ et $y = (y_1, \dots, y_p)$ dans E. On a :

$$\varphi(x+y) = \varphi\big((x_1+y_1, \dots, x_p+y_p)\big) = \max\big(\varphi_1(x_1+y_1), \dots, \varphi_p(x_p+y_p)\big).$$

Soit $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $\varphi(x+y) = \varphi_k(x_k + y_k)$. L'inégalité triangulaire appliquée avec la norme φ_k donne alors le résultat :

$$\varphi(x+y) \leqslant \underbrace{\varphi_k(x_k)}_{\leqslant \varphi(x)} + \underbrace{\varphi_k(y_k)}_{\leqslant \varphi(y)}.$$

Exercice 20 Dans ce qui suit, $x = (x_1, \dots, x_p)$ et $y = (y_1, \dots, y_p)$ sont deux éléments de l'espace produit, et λ est un scalaire.

- Montrons que N_1 est une norme.

  Séparation. Si $N_1(x) = 0$, alors $\sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_k = 0$, donc $\forall k \in [\![1, p]\!] \quad \varphi_k(x_k) = 0$,
  puis, par propriété de séparation des normes $\varphi_1, \dots, \varphi_p$:
  $$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad x_k = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x = 0.$$

  Homogénéité. On a :
  $$N_1(\lambda\, x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\lambda\, x_k) = \sum_{k=1}^{p} \big(|\lambda|\, \varphi_k(x_k)\big) = |\lambda| \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x_k) = |\lambda|\, N_1(x).$$

  Inégalité triangulaire. On a :
  $$\begin{aligned} N_1(x+y) = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x_k + y_k) &\leqslant \sum_{k=1}^{p} \big(\varphi_k(x_k) + \varphi_k(y_k)\big) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x_k) + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(y_k) = N_1(x) + N_1(y). \end{aligned}$$

- Montrons que N_2 est une norme.

  Séparation. Si $N_2(x) = 0$, alors $\sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x_k)^2 = 0$, donc $\forall k \in [\![1, p]\!] \quad \varphi_k(x_k) = 0$,
  puis, par propriété de séparation des normes $\varphi_1, \dots, \varphi_p$:
  $$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad x_k = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x = 0.$$

  Homogénéité. On a
  $$N_2(\lambda\, x)^2 = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\lambda\, x_k)^2 = \sum_{k=1}^{p} |\lambda|^2\, \varphi_k(x_k)^2 = |\lambda|^2\, N_2(x)^2,$$
  ce qui, les quantités précédentes étant positives, donne $N_2(\lambda\, x) = |\lambda\,| N_2(x)$.

  Inégalité triangulaire. Notons $\mathcal{N}_2$ la norme deux sur $\mathbb{R}^p$, et considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^p$ suivants :
  $$X = \big(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_p(x_p)\big) \qquad \text{et} \qquad Y = \big(\varphi_1(y_1), \dots, \varphi_p(y_p)\big).$$
  Alors, l'inégalité triangulaire avec les normes $\|\cdot\|_k$ et la norme $\mathcal{N}_2$ donne :
  $$\begin{aligned} N_2(x+y) &= \left(\sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x_k + y_k)^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{p} \big(\varphi_k(x_k) + \varphi_k(y_k)\big)^2 \right)^{1/2} && \text{(inégalité triangulaire des normes } \varphi_k\text{)} \\ &= \mathcal{N}_2(X+Y) \\ &\leqslant \mathcal{N}_2(X) + \mathcal{N}_2(Y) && \text{(inégalité triangulaire de la norme } \mathcal{N}_2\text{)} \\ &= N_2(x) + N_2(y). \end{aligned}$$

Exercice 21

1. Il suffit d'écrire $\mathcal{N}_1(f_n) = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$.

2. (a) La convergence de (f_n) vers f au sens de la norme infinie implique la convergence simple, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) \to f(x).$$

Il vient alors que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$

(b) On aboutit à une contradiction, car la fonction f obtenue n'est pas continue.

Exercice 22

1. • On voit facilement que 0 est valeur d'adhérence, car c'est la limite de la sous-suite $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   • Montrons qu'il n'y a pas d'autres valeurs d'adhérence.
   Pour cela, considérons x un réel non nul et $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et montrons que $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers x.
   ∗ Si φ prend une infinité de valeurs paires, alors $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ possède 0 comme valeur d'adhérence.
   ∗ Sinon, alors φ prend une infinité de valeurs impaires, et alors $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite tendant vers $+\infty$.
   Dans les deux cas, la sous-suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers x.

2. Il est clair que la suite diverge, car la sous-suite $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Proposition 13

• Supposons que x soit valeur d'adhérence de la suite (a_n). Soit alors $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante telle que la suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ converge vers x.
Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Montrons qu'il existe $n \geqslant n_0$ tel que $\|a_n - x\| \leqslant \varepsilon$.
Comme $a_{\varphi(n)} \to x$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad p \geqslant n_1 \Longrightarrow \left\|a_{\varphi(p)} - x\right\| \leqslant \varepsilon.$$

Comme $\varphi \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on peut trouver $p \geqslant n_1$ tel que $\varphi(p) \geqslant n_0$. En posant alors $n = \varphi(p)$, on a $n \geqslant n_0$ et $\|a_n - x\| \leqslant \varepsilon$.

• Supposons que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant n_0 \quad \|a_n - x\| \leqslant \varepsilon, \qquad (\star)$$

et montrons qu'il existe une sous-suite de (a_n) qui tend vers x.
Pour cela, construisons une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \left\|a_{\varphi(p)} - x\right\| \leqslant \frac{1}{2^p}.$$

∗ Tout d'abord, la propriété $(\star)$ assure qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|a_n - x\| \leqslant \dfrac{1}{2^0}$.
Posons $\varphi(0)$ égal à une telle valeur de n.

∗ Pour $p \in \mathbb{N}$, supposons construits $\varphi(0), \ldots, \varphi(p-1)$. La propriété $(\star)$ assure qu'il existe $n \geqslant \varphi(p-1)+1$ tel que $\|a_n - x\| \leqslant \dfrac{1}{2^p}$. Il suffit alors de poser $\varphi(p)$ égal à une telle valeur de n.

La suite $\left(a_{\varphi(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est alors une sous-suite de $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge alors vers x.

Exercice 23 Soit $x \in [-1,1]$. Montrons que x est valeur d'adhérence de la suite a à l'aide de la proposition 13. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Montrons qu'il existe un entier $n \geqslant n_0$ tel que $\|a_n - x\| \leqslant \varepsilon$.
Notons f la fonction $t \mapsto \sin\sqrt{t}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\forall t > 0 \quad f'(t) = \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}.$$

Comme $f'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut considérer $R > 0$ tel que $\forall t \geqslant R \quad |f'(t)| \leqslant \varepsilon$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, le réel $t_k = (2k\pi + \operatorname{Arcsin} x)^2$ vérifie $f(t_k) = x$. Fixons une valeur de k telle que $t_k \geqslant \max(n_0, R)$, et notons $n = \lceil t_k \rceil$. L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction f sur l'intervalle $[t_k, n]$ assure alors que :

$$|a_n - x| = |f(n) - f(t_k)| \leqslant \varepsilon(n - t_k) \leqslant \varepsilon.$$

Comme $n \geqslant t_k \geqslant n_0$, cela montre le résultat souhaité.

Proposition 14

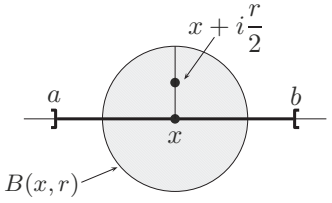
Soit B une boule ouverte. Notons a son centre et R son rayon.
Pour $x \in B$, on a $\|x - a\| < R$, et il est clair, d'après l'inégalité triangulaire, que la boule ouverte de centre x et de rayon $R - \|x - a\|$ est contenue dans B.
En effet, si u vérifie $\|u - x\| < R - \|x - a\|$, alors on a :

$$\|u - a\| \leqslant \|u - x\| + \|x - a\| < R - \|x - a\| + \|x - a\| = R.$$

Donc B est une partie ouverte.

Exercice 24

1. L'intervalle $]a, b[$ est un ouvert de R, car c'est la boule de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $\dfrac{b-a}{2}$.
2. L'intervalle ouvert $]a, b[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{C}$. En effet, pour $x \in]a, b[$ et $r > 0$, la boule ouverte de centre x de rayon $r > 0$ n'est pas incluse dans $]a, b[$. Par exemple, le nombre complexe $x + i\dfrac{r}{2}$ appartient à cette boule mais pas à l'intervalle $]a, b[$.



Proposition 15

- Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts, et U leur réunion. Pour $x \in U$, on peut trouver $i \in I$ tel que x appartienne à U_i. Comme U_i est ouvert, il existe une boule ouverte centrée en x et de rayon strictement positif qui soit contenue dans U_i, et donc dans U. Il en résulte que U est un ouvert.
- Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille finie d'ouverts, et U leur intersection.
  Soit $x \in U$. Pour tout $i \in I$, l'ensemble U_i est un ouvert, donc on peut trouver $r_i > 0$ tel que la boule ouverte de centre x et de rayon r_i soit contenue dans U_i.
  Puisque I est fini, le nombre réel :
  $$r = \min_{i\in I} r_i$$
  existe et est strictement positif. La boule ouverte centrée en x et de rayon r est alors contenue dans chacun des U_i, et donc dans leur intersection U.
  Donc U est un ouvert.

Exercice 25 Soit U une partie ouverte de E. Pour tout $x \in U$, toute boule centrée en x et de rayon suffisamment petit est incluse dans U. En notant, par exemple :
$$n_x = \min\Big\{n \in \mathbb{N}^* \;\Big|\; B\Big(x, \frac{1}{n}\Big) \subset U\Big\},$$
et en notant $r_x = \dfrac{1}{n_x}$, alors on a $B(x, r_x) \subset U$. Il est alors clair que :
$$U = \bigcup_{x\in U} B(x, r_x).$$

Exercice 26 Notons $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$. On a $A = \{0\}$, car :

- il est clair que 0 appartient à chacun des ensembles U_n, et donc à leur intersection ;
- si $x \neq 0$, alors, pour $n \geqslant \dfrac{1}{|x|}$, on a $x \notin U_n$, et donc $x \notin A$.

Il est clair que A n'est pas ouvert, car pour $r > 0$, la boule ouverte centrée en 0 et de rayon r (c'est-à-dire l'intervalle $]-r, r[$) n'est pas incluse dans A.

Exercice 27 Il suffit de constater que les complémentaires des intervalles $]-\infty, b]$, $[a, b]$ et $[a, +\infty[$ sont respectivement $]b, +\infty[$, $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ et $]-\infty, a[$, qui sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

Proposition 16 Soit B une boule fermée. Notons a son centre et R son rayon.
Pour $x \in E \setminus B$, on a $\|x - a\| > R$, et il est clair que la boule ouverte centrée en x et de rayon $\|x - a\| - R$ est incluse dans $E \setminus B$.
En effet, si u vérifie $\|u - x\| < \|x - a\| - R$, alors on a :
$$\begin{aligned}\|u - a\| &\geqslant \|x - a\| - \|u - x\| && \text{(seconde inégalité triangulaire)}\\ &> \|x - a\| - \big(\|x - a\| - R\big) = R,\end{aligned}$$
et donc $u \in E \setminus B$.
Cela montre que $E \setminus B$ est une partie ouverte, et donc que B est une partie fermée.

Exercice 28

On a $A =]0,1[$. En effet :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $F_n \subset]0,1[$, et donc $A \subset]0,1[$;
- si $x \in]0,1[$, alors on a $x \in F_n$ dès que $n \geqslant \dfrac{1}{\min(|x|,|x-1|)}$, et donc $x \in A$.

L'ensemble A n'est pas fermé car son complémentaire, $]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$, n'est pas ouvert (pour le montrer, on peut considérer des boules centrées en 0).

Exercice 29 Soit S une sphère. Notons a son centre et r son rayon. Par définition, on a $S = B_f(a,r) \setminus B(a,r)$, c'est-à-dire $S = B_f(a,r) \cap \big(E \setminus B(a,r)\big)$.
La partie S est donc une partie fermée, comme intersection deux parties fermées.

Exercice 30 Comme F est un fermé de E, son complémentaire $E \setminus F$ est un ouvert de E. Comme $x \in E \setminus F$, on en déduit l'existence de $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset E \setminus F$. On a donc :

$$\forall y \in F \quad d(x,y) \geqslant r,$$

et donc nécessairement $d(x,F) \geqslant r$.

Exercice 31 Cette propriété découle immédiatement des définitions d'un ouvert et d'un voisinage. En effet, si U est un ouvert et $a \in U$, alors le fait que U soit ouvert assure qu'il existe $r > 0$ tel que la boule $B(a,r)$ soit incluse dans U, et donc que U est un voisinage de a.

Exercice 32

- Un sens est trivial. En effet, si A est un voisinage de a, alors il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a,r)$ (qui est une partie ouverte) soit incluse dans A.
- Pour l'autre sens : si U désigne un ouvert inclus dans A et contenant un élément a, alors, comme U est ouvert, on peut trouver une boule ouverte centrée en a et de rayon strictement positif qui soit incluse dans U et donc dans A.

Proposition 18

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A_1, \dots, A_n$ sont des voisinages de x, alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on peut trouver $r_k > 0$ tel que $B(x,r_k) \subset A_k$.
  Il est alors clair qu'en notant $r = \min(r_1, \dots, r_n)$, on a $r > 0$ et $B(x,r) \subset \bigcap_{k=1}^{n} A_k$.
  Cela montre que $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ est un voisinage de x.
- Le deuxième point est évident, car si A est un voisinage de x, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$. Si $\widetilde{A}$ est une partie contenant A, alors on a $B(x,r) \subset \widetilde{A}$, ce qui montre que $\widetilde{A}$ est un voisinage de x.

Proposition 19

Remarque

La relation d'ordre utilisée ici sur les parties de E est évidemment la relation d'inclusion.

On sait déjà que $\overset{\circ}{A} \subset A$. Il suffit donc de montrer que $\overset{\circ}{A}$ est ouvert, et que tout ouvert inclus dans A l'est aussi dans $\overset{\circ}{A}$.

- Soit $x \in \overset{\circ}{A}$. On peut trouver $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$. On a alors $B(\overset{\circ}{x},r) \subset \overset{\circ}{A}$. Or, $B(x,r)$ étant ouvert, il est son propre intérieur. Il en résulte que $B(x,r) \subset \overset{\circ}{A}$. Cela montre que $\overset{\circ}{A}$ est ouvert.
- Soit U un ouvert inclus dans A. On a alors $\overset{\circ}{U} \subset \overset{\circ}{A}$. Or, U étant ouvert, on a $\overset{\circ}{U} = U$. Cela montre que $U \subset \overset{\circ}{A}$, et donne le résultat souhaité.

Exercice 33 C'est immédiat d'après la proposition 19. En effet, la réunion de tous les ouverts inclus dans A est un ouvert (d'après la proposition 15 de la page 207), il est inclus dans A, et il contient de manière évidente tout ouvert inclus dans A.

Exercice 34 Les deux sens sont évidents. On a déjà dit qu'un ouvert était égal à son propre intérieur. Réciproquement, comme, d'après la proposition 19, l'intérieur d'une partie est toujours un ouvert, une partie égale à son intérieur est nécessairement ouverte.

Exercice 35

- Supposons $d(x,A) = 0$. Alors, pour tout $r > 0$, il existe $a \in A$ vérifiant $d(x,a) < r$, et donc $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$. On en déduit $x \in \mathrm{Adh}(A)$.
- Réciproquement, supposons $x \in \mathrm{Adh}(A)$. Pour tout $r > 0$, on a $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$, ce qui assure l'existence de $a \in A$ vérifiant $d(x,a) < r$. On a donc $d(x,A) < r$. Ceci étant vrai pour tout $r > 0$, on a bien $d(x,A) = 0$.

Proposition 20 D'après les remarques faites précédemment, on sait déjà que l'adhérence de A est un fermé contenant A. Il reste à démontrer que c'est le plus petit, c'est-à-dire que tout fermé contenant A contient aussi son adhérence.
Soit F un fermé contenant A. Alors $E \setminus F$ est un ouvert inclus dans $E \setminus A$, ce qui entraîne $E \setminus F \subset \mathrm{Int}(E \setminus A)$ puisque $\mathrm{Int}(E \setminus A)$ est le plus grand ouvert inclus dans $E \setminus A$. En prenant le complémentaire de chacun des ensembles, on obtient :

$$\underbrace{E \setminus \big(\mathrm{Int}(E \setminus A)\big)}_{=\mathrm{Adh}(A)} \subset F,$$

ce qui donne le résultat souhaité.

Exercice 36 C'est une conséquence de la proposition 20 de la page 212. En effet, l'intersection de tous les fermés contenant A est un fermé, il contient A, et il est contenu dans tout fermé qui contient A.

Exercice 37 Comme l'adhérence d'un ensemble est toujours un fermé, il est clair que si $A = \overline{A}$, alors A est un fermé.

Réciproquement, si A est un fermé, alors A est évidemment le plus petit fermé qui contient A, et donc $A = \overline{A}$.

Proposition 21

- Soit x un point adhérent à A. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $B(x, 2^{-n}) \cap A$ est non vide, ce qui nous permet d'y choisir un élément a_n. On construit ainsi une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.
- Réciproquement, supposons que x soit limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, et montrons que x est adhérent à A. Soit $r > 0$. Montrons que $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$. Comme $a_n \to x$, on peut trouver un entier n_0 tel que $\|a_{n_0} - x\| < r$. Alors, a_{n_0} appartient à la fois à A et à $B(x, r)$, ce qui prouve que $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$.

Exercice 38 Soit F un sous-espace vectoriel de E.

- Tout d'abord, $\overline{F}$ est non vide car il contient F et donc le vecteur nul.
- Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times \overline{F}^2$; montrons que $\lambda x + y \in \overline{F}$. Comme x et y appartiennent à $\overline{F}$, il existe des suites (x_n) et (y_n) d'éléments de F convergeant vers x et y respectivement. La suite $(\lambda x_n + y_n)$ est une suite d'éléments de F convergeant vers $\lambda x + y$; cela prouve, par caractérisation séquentielle, que $\lambda x + y \in \overline{F}$.

Exercice 39

- Soit a une valeur d'adhérence de la suite (u_n). Montrons que a est adhérent à chacunes des parties A_p. Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme a est valeur d'adhérence de (u_n), on peut considérer une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers a.
  De plus, pour tout $n \geqslant p$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant p$, et donc $u_{\varphi(n)} \in A_p$.
  La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant p}$ est donc une suite à valeurs dans A_p qui tend vers a, ce qui montre que a est adhérent à A_p.
- Réciproquement, donnons-nous $a \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$ et montrons que a est valeur d'adhérence de la suite (u_n). Pour cela, utilisons la caractérisation de la proposition 13 de la page 205 : soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$; montrons qu'il existe $n \geqslant n_0$ tel que $\|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$.
  Comme $a \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$, on a $a \in \overline{A_{n_0}}$. Il existe donc $b \in A_{n_0}$ tel que $\|b - a\| \leqslant \varepsilon$, ce qui, par définition de A_{n_0}, revient à dire qu'il existe $n \geqslant n_0$ tel que $\|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$.
  D'où le résultat.

Exercice 40 Si I désigne un intervalle d'extrémités a et b, alors on a :

$$\mathrm{Int}(I) =]a, b[\qquad \text{et} \qquad \mathrm{Adh}(I) = [a, b].$$

Il en résulte que la frontière de I est l'ensemble $[a, b] \setminus]a, b[$, c'est-à-dire $\{a, b\}$.

Exercice 41

Nous savons (*cf.* remarque de la page 211) que :

$$\forall B \in \mathcal{P}(E) \quad \overline{B} = E \setminus \mathrm{Int}(E \setminus B).$$

En utilisant cette relation avec $B = E \setminus A$, on obtient :

$$\overline{(E \setminus A)} = E \setminus \mathrm{Int}(A).$$

Comme par définition on a $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \big(E \setminus \mathrm{Int}(A)\big)$, on obtient bien :

$$\overline{A} \cap \overline{(E \setminus A)} = \mathrm{Fr}(A).$$

Exercice 42 L'intervalle $[0,1[$ est un ouvert relatif de $[0,1]$ car on peut écrire :

$$[0,1[=]-1,1[\cap [0,1].$$

Exercice 43 Il suffit d'écrire $]0,1] = [-1,1] \cap]0,2]$.

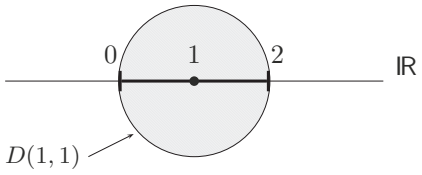
Exercice 44 L'écriture $A = E \cap A$ donne le résultat, car E est à la fois un ouvert et un fermé de E.

Exercice 45

Il suffit d'écrire :

$$[0,2] = D_f(1,1) \cap \mathbb{R},$$

où $D_f(1,1)$ désigne le disque fermé de centre 1 et de rayon 1.



Exercice 46

- $(i) \Rightarrow (ii)$**.** Supposons que G soit un ouvert relatif. Alors il existe un ouvert U de E tel que $G = U \cap A$. Alors, pour tout $x \in G$, on a $x \in U$ et donc, puisque U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$.
  On a alors $B(x,r) \cap A \subset U \cap A = G$.
- $(ii) \Rightarrow (i)$**.** Supposons (ii). Inspirons-nous de la méthode utilisée pour résoudre l'exercice 25 de la page 208. Pour tout $x \in G$, notons

  $$n_x = \min \left\{ n \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \left(B\Big(x, \frac{1}{n}\Big) \cap A \right) \subset G \right\} \qquad \text{et} \qquad r_x = \frac{1}{n_x}.$$

  On constate alors que :

  $$\forall x \in G \quad \big(B(x, r_x) \cap A\big) \subset G.$$

  puis que :

  $$G = U \cap A \quad \text{avec} \quad U = \bigcup_{x \in G} B(x, r_x).$$

Exercice 47

- $(i) \Rightarrow (ii)$**.** Supposons que G soit un fermé relatif de A. Alors, il existe un fermé F de E tel que $G = A \cap F$. Si (x_n) est une suite d'éléments de G qui converge vers $\ell \in A$, alors, comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in F$ le caractère fermé de F assure que $\ell \in F$. Par suite, on a $\ell \in A \cap F = G$.
- $(ii) \Rightarrow (i)$**.** Supposons (ii) et montrons que $G = A \cap \mathrm{Adh}(G)$. Comme $\mathrm{Adh}(G)$ est un fermé de E, cela prouvera (i).
  - ∗ L'inclusion $G \subset A \cap \mathrm{Adh}(G)$ est immédiate, puisque $G \subset A$ et $G \subset \mathrm{Adh}(G)$.
  - ∗ Pour prouver l'autre inclusion, donnons-nous $\ell \in A \cap \mathrm{Adh}(G)$, et montrons que $\ell \in G$. Comme $\ell \in \mathrm{Adh}(G)$, il existe une suite $(x_n) \in G^{\mathbb{N}}$ convergeant vers ℓ. Comme $\ell \in A$, la propriété (i) nous assure que $\ell \in G$.

Proposition 24 Un des sens découle directement de la définition 22 de la page 216.
Montrons l'autre : supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in E \quad N_2(x) = 1 \Longrightarrow N_1(x) \leqslant \alpha, \qquad (\star)$$

et montrons que N_1 est dominée par N_2. Plus précisément, montrons que :

$$\forall y \in E \quad N_1(y) \leqslant \alpha N_2(y).$$

Soit $y \in E$. Si y est nul, alors l'inégalité $N_1(y) \leqslant \alpha N_2(y)$ évidente. Si y est non nul, alors $N_2(y) \neq 0$, et la propriété $(\star)$ appliquée à $\dfrac{y}{N_2(y)}$ donne :

$$N_1\left(\frac{y}{N_2(y)}\right) \leqslant \alpha,$$

ce qui, par homogénéité de N_1, donne le résultat.

Exercice 48

- **Antisymétrie.**
  - ∗ Si E est l'espace nul, alors il existe une unique norme sur E : l'application nulle (et dans ce cas la relation de domination est une relation d'ordre).
  - ∗ En revanche, si E n'est pas l'espace nul et que l'on dispose d'au moins une norme N sur E, alors en considérant l'application $\widetilde{N} : x \mapsto 2N(x)$, on constate que N et $\widetilde{N}$ sont deux normes distinctes et dominées l'une par l'autre. L'antisymétrie est alors mise en défaut.

L'exercice est résolu. Constatons tout de même que les propriétés de réflexivité et transitivité sont quant à elles vérifiées :

- **Refléxivité.** Il est clair que toute norme est dominée par elle-même (prendre $\alpha = 1$ dans la définition).
- **Transitivité.** Si N_1 est dominée par N_2 et si N_2 est dominée par N_3, alors on peut trouver des constantes $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ telles que :

$$\forall x \in E \quad \big(N_1(x) \leqslant \alpha_1 N_2(x) \quad \text{et} \quad N_2(x) \leqslant \alpha_2 N_3(x)\big).$$

La norme N_1 est alors dominée par la norme N_3, car on a :

$$\forall x \in E \quad N_1(x) \leqslant \alpha_1 \alpha_2 N_3(x).$$

Exercice 49 Soit f est une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.
On a, par positivité de l'intégrale :

$$\mathcal{N}_1(f) = \int_a^b |f| \leqslant \int_a^b \mathcal{N}_\infty(f) = (b-a)\,\mathcal{N}_\infty(f),$$

ce qui montre que la norme un est dominée par la norme infinie.
De même, on a :

$$\mathcal{N}_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f|^2} \leqslant \sqrt{\int_a^b \mathcal{N}_\infty(f)^2} = \sqrt{(b-a)\,\mathcal{N}_\infty(f)^2} = \sqrt{b-a}\,\mathcal{N}_\infty(f),$$

ce qui montre que la norme deux est dominée par le norme infinie.

Proposition 25 Soit $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$ et A une partie bornée pour la norme N_2.
Comme A est bornée pour la norme N_2, on peut considérer M un réel positif vérifiant :

$$\forall a \in A \quad N_2(a) \leqslant M.$$

Alors, la relation suivante, valable pour tout $a \in A$:

$$N_1(a) \leqslant \alpha N_2(a) \leqslant \alpha M,$$

montre que A est également bornée pour la norme N_1.

Proposition 26 Soit $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$.
Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite tendant vers ℓ pour la norme N_2, alors l'encadrement :

$$0 \leqslant N_1(a_n - \ell) \leqslant \alpha \underbrace{N_2(a_n - \ell)}_{\to 0}$$

montre qu'il en est de même pour la norme N_1.

Exercice 50
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathcal{N}_\infty(f_n) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_1(f_n) = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\cdot$$

Il en résulte que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers la fonction nulle pour la norme un mais pas pour la norme infinie.
La norme infinie n'est donc pas dominée par la norme un.

Exercice 51 Soit N_1 et N_2 deux normes.

- Si N_1 et N_2 sont équivalentes, alors on peut trouver deux réels α et β strictement positifs tels que :

  $$\forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x),$$

  On a alors :
  - $\forall x \in E \quad N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$, ce qui montre que N_2 est dominée par N_1 ;
  - $\forall x \in E \quad N_1(x) \leqslant \dfrac{1}{\alpha} N_2(x)$, ce qui montre que N_1 est dominée par N_2.

- Réciproquement, si chacune des normes est dominée par l'autre, alors on peut trouver α_1 et α_2 deux réels strictement positifs tels que :
$$\forall x \in E \quad \big(N_1(x) \leqslant \alpha_1 N_2(x) \quad \text{et} \quad N_2(x) \leqslant \alpha_2 N_1(x)\big).$$
Pour tout $x \in E$, on a alors $\dfrac{1}{\alpha_1} N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \alpha_2 N_1(x)$, ce qui montre que N_1 et N_2 sont équivalentes.

Exercice 52 • La réflexivité est évidente (prendre $\alpha = \beta = 1$ dans la définition 23 de la page 218).
- La symétrie résulte de l'exercice 51 : la propriété « chacune est dominée par l'autre » est manifestement symétrique.
- La transitivité résulte également de l'exercice 51 ainsi que du caractère transitif de la relation de domination (*cf.* exercice 48) : si N_1 et équivalente à N_2 et si N_2 est équivalente à N_3, alors :
  * N_1 est dominée par N_2, qui est dominée par N_3, donc N_1 est dominée par N_3 ;
  * N_3 est dominée par N_2, qui est dominée par N_1, donc N_3 est dominée par N_1.

  Par suite, N_1 et N_3 sont équivalentes.

Exercice 53 Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$.

- On a $\max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2$. Cela donne $\|x\|_\infty^2 \leqslant \|x\|_2^2$, et donc $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2$.
- On a $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leqslant \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|\Big)^2$. Cela donne $\|x\|_2^2 \leqslant \|x\|_1^2$, et donc $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$.
- Enfin, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \Big(\max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|\Big)$, c'est-à-dire $\|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$.

Le résultat obtenu nous donne directement l'équivalence des trois normes considérées.

Proposition 29 Soit α et β deux réels strictement positifs tels que :
$$\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1. \qquad (\star)$$

- Supposons A ouvert pour une des deux normes, par exemple N_1, et montrons que A est l'également pour N_2.
  Soit $a \in A$. Comme A est ouvert pour N_1, il existe $r > 0$ tel que :
$$\forall x \in E \quad N_1(x - a) < r \Longrightarrow x \in A.$$
  Mais alors, d'après la relation $(\star)$, si $x \in E$ vérifie $N_2(x - a) < \alpha r$, alors on a $N_1(x - a) < r$ et donc $x \in A$. Autrement dit, la boule ouverte centrée en a et de rayon αr au sens de la norme N_2 est incluse dans A. Donc A est ouvert pour N_2.
- Le deuxième point s'obtient à partir du premier, par passage aux complémentaires : la partie A est fermée si, et seulement si, son complémentaire est ouvert, ce qui, d'après le premier point, ne dépend pas de la norme choisie.

Exercice 54 Tout d'abord, il facile de voir que N_1 et N_2 sont bien des normes sur $\mathbb{R}[X]$. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont évidentes, quant à la propriété de séparation, il suffit, par exemple pour N_1, de constater que si $P \in \mathbb{R}[X]$

vérifie $N_1(P) = 0$, alors, la fonction $t \mapsto |P(t)|$ étant continue, positive et d'intégrale nulle, on a :

$$\forall t \in [a,b] \quad P(t) = 0,$$

ce qui assure que P est le polynôme nul (car admettant une infinité de racines).

- Il est clair, comme $[a,b] \subset [a,c]$, que $N_1 \leqslant N_2$, et donc N_1 est dominée par N_2.
- Montrons que N_2 n'est pas dominée par N_1. Pour cela, considérons la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_n = (n+1)\left(\dfrac{X-a}{c-a}\right)^n$. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$N_1(P_n) = (n+1)\int_a^b \left(\frac{t-a}{c-a}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{(b-a)^{n+1}}{(c-a)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et

$$N_2(P_n) = (n+1)\int_a^c \left(\frac{t-a}{c-a}\right)^n \mathrm{d}t = c-a > 0.$$

Il en résulte que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers le polynôme nul pour la norme N_1 mais pas pour la norme N_2 : cela justifie que N_2 n'est pas dominée par N_1.

S'entraîner et approfondir

4.1 Montrer que l'application $N : P \mapsto \sup_{t\in[0,1]} \left|P(t) - P'(t)\right|$ est une norme sur $\mathbb{K}[X]$.

4.2 Soit E un espace vectoriel normé, et F un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que si F est un ouvert de E, alors $F = E$.

4.3 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On munit $E\times F$ de la norme produit.
Soit A et B deux parties de E et F respectivement.

1. Montrer que $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$.
   En déduire que le produit cartésien de deux ouverts est un ouvert.
2. Montrer que $\mathrm{Adh}(A \times B) = \mathrm{Adh}(A) \times \mathrm{Adh}(B)$.
   En déduire que le produit cartésien de deux fermés est un fermé.
3. Montrer que $\mathrm{Fr}(A \times B) = \big(\mathrm{Adh}(A) \times \mathrm{Fr}(B)\big) \cup \big(\mathrm{Fr}(A) \times \mathrm{Adh}(B)\big)$.

4.4 Montrer que l'adhérence et l'intérieur d'une partie convexe sont convexes.

4.5 Soit n un entier au moins égal à 2. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour laquelle deux matrices semblables quelconques aient même norme ?

4.6 On se place dans l'espace des suites réelles bornées, que l'on munit de la norme infinie.
Notons $a = (a_n)$ la suite constante égale à 1 et $\mathcal{C}_0$ le sous-espace vectoriel des suites tendant vers 0. Déterminer la distance de a à $\mathcal{C}_0$.

4.7 *Norme p sur $\mathbb{K}^n$*
Soit n et p deux entiers valant au moins 1 On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|_p : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \|x\|_p = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \end{array}$$

Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Indication : pour l'inégalité triangulaire, on pourra utiliser la convexité de la fonction $u \mapsto u^p$.

⋆ **4.8** *Norme p sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$*
Soit a et b deux réels vérifiant $a<b$, et $p\geqslant 1$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{N}_p & : & \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \longmapsto & \left(\displaystyle\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}.\end{array}$$

1. Montrer que pour tout $p\geqslant 1$, $\mathcal{N}_p$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.
   Indication : pour l'inégalité triangulaire, on pourra utiliser la convexité de la fonction $x\mapsto x^p$.
2. Pour $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, montrer que $\mathcal{N}_p(f)\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}\mathcal{N}_\infty(f)$.
3. Le résultat de la question précédente subsiste-t-il si f est seulement supposée continue par morceaux ?

⋆ **4.9** On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall P=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kX^k\in\mathbb{R}[X]\quad \|P\|_\infty=\max_{k\in\mathbb{N}}|a_k|.$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ des polynômes unitaires est un fermé.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des polynômes unitaires et scindés dans $\mathbb{R}[X]$ est un fermé.

⋆ **4.10** Soit E un espace vectoriel normé.

1. Quelles sont les parties de E dont la frontière est vide ?
2. Quelles sont les parties de E qui sont à la fois des ouverts et des fermés de E ?

4.11 Soit $E=\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On note F le sous-espace vectoriel de E formé par les fonctions s'annulant en 0 et en 1.

Déterminer l'intérieur et l'adhérence de F pour les normes un et infinie :

$$\mathcal{N}_\infty(f)=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|\qquad\text{et}\qquad\mathcal{N}_1(f)=\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t.$$

⋆ **4.12** Montrer qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé E est soit un fermé de E, soit dense dans E.

4.13 *(Polytechnique 2015)*

On pose :

$$E = \big\{ f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \;\big|\; f(0) = f'(0) = 0 \big\}.$$

1. Montrer que $f \mapsto \mathcal{N}_\infty(f'' + 2f' + f)_\infty$ est une norme sur E, que l'on notera N.
2. Montrer que N domine $\mathcal{N}_\infty$, et préciser la plus petite constante $a > 0$ telle que $\mathcal{N}_\infty \leqslant aN$.
3. Les normes N et $\mathcal{N}_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Solution des exercices

4.1 • Comme la fonction $t \mapsto P(t) - P'(t)$ est continue, elle est bornée sur le segment $[0,1]$; l'application N est donc bien définie.

• Notons $\mathcal{N}_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$.

∗ **Homogénéité.** Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On a, par homogénéité de $\mathcal{N}_\infty$:

$$N(\lambda P) = \mathcal{N}_\infty(\lambda P - \lambda P') = \mathcal{N}_\infty\big(\lambda(P - P')\big) = \lambda\, \mathcal{N}_\infty(P - P') = \lambda N(P).$$

∗ **Inégalité triangulaire.** Pour $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, on a, via l'inégalité triangulaire de $\mathcal{N}_\infty$:

$$\begin{aligned} N(P+Q) &= \mathcal{N}_\infty\big((P+Q) - (P'+Q')\big) \\ &= \mathcal{N}_\infty\big((P-P') + (Q-Q')\big) \\ &\leqslant \mathcal{N}_\infty(P-P') + \mathcal{N}_\infty(Q-Q') = N(P) + N(Q). \end{aligned}$$

∗ **Séparation.** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $N(P) = 0$. La fonction $t \mapsto P(t) - P'(t)$ est alors nulle sur $[0,1]$, et donc le polynôme $P - P'$, admettant une infinité de racines, est le polynôme nul. On a donc $P = P'$, ce qui prouve que P est le polynôme nul (pour le justifier proprement, dire par exemple que P et P', étant égaux, ont même degré).

Cela prouve que N est une norme sur $\mathbb{K}[X]$.

Remarque Pour cet exercice, on aurait aussi pu remarquer que $N = \mathcal{N}_\infty \circ u$ avec :

• $\mathcal{N}_\infty$ la norme infinie sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$;

• $u : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$ l'application qui à $P \in \mathbb{K}[X]$ associe la fonction

$$\begin{array}{rccc} u(P) \ : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & P(t) - P'(t) \end{array}$$

Comme u est une application linéaire injective (à justifier), cela permet d'affirmer que N est une norme.

4.2 Supposons que F soit un ouvert de E. Étant donné que $0 \in F$ (car F est un sous-espace vectoriel) et que F est ouvert, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset F$.

Soit x est un vecteur non nul de E. Alors le vecteur $u = \dfrac{r}{2\|x\|}x$ appartient à $B(0,r)$ et donc à F. Comme F est un sous-espace vectoriel et que $x = \dfrac{2\|x\|}{r}u$, on a $x \in F$. D'où $F = E$.

4.3 On note indifféremment $\|\cdot\|$ les normes de E, F et $E \times F$. Rappelons que, par définition de la norme produit, on a :

$$\forall (x,y) \in E \times F \quad \big\|(x,y)\big\| = \max\big(\|x\|, \|y\|\big).$$

1. • **Inclusion** $\mathrm{Int}(A\times B)\subset \mathrm{Int}(A)\times\mathrm{Int}(B)$**.**
   Soit $(a,b)\in\mathrm{Int}(A\times B)$. Montrons que $a\in\mathrm{Int}(A)$ et $b\in\mathrm{Int}(B)$.
   Comme $(a,b)\in\mathrm{Int}(A\times B)$, on peut trouver $r>0$ tel que :
   $$\forall (x,y)\in E\times F\quad \big\|(x,y)-(a,b)\big\|<r\Longrightarrow (x,y)\in A\times B.$$
   Par définition de la norme produit, cela s'écrit :
   $$\forall (x,y)\in E\times F\quad \big(\|x-a\|<r\quad\text{et}\quad \|y-b\|<r\big)\Longrightarrow (x,y)\in A\times B,$$
   d'où l'on déduit que :
   $$\big(\forall x\in E\quad \|x-a\|<r\Longrightarrow x\in A\big)\quad\text{et}\quad\big(\forall y\in F\quad \|y-b\|<r\Longrightarrow y\in B\big),$$
   ce qui prouve que $a\in\mathrm{Int}(A)$ et $b\in\mathrm{Int}(B)$.
   • **Inclusion** $\mathrm{Int}(A)\times\mathrm{Int}(B)\subset\mathrm{Int}(A\times B)$**.**
   Soit $(a,b)\in\mathrm{Int}(A)\times\mathrm{Int}(B)$. Comme $a\in\mathrm{Int}(A)$ et $b\in\mathrm{Int}(B)$, on peut trouver $r_1>0$ et $r_2>0$ tels que :
   $$\big(\forall x\in E\quad \|x-a\|<r_1\Longrightarrow x\in A\big)\quad\text{et}\quad\big(\forall y\in F\quad \|y-b\|<r_2\Longrightarrow y\in B\big).$$
   En posant $r=\min(r_1,r_2)$, on a alors, par définition de la norme produit :
   $$\forall (x,y)\in E\times F\quad \big\|(x,y)-(a,b)\big\|<r\Longrightarrow (x,y)\in A\times B,$$
   ce qui prouve que $(a,b)\in\mathrm{Int}(A\times B)$. D'où l'inclusion.

   Il résulte de l'égalité $\mathrm{Int}(A\times B)=\mathrm{Int}(A)\times\mathrm{Int}(B)$ que si A et B sont ouverts, alors $\mathrm{Int}(A\times B)=A\times B$, ce qui signifie que $A\times B$ est ouvert.

2. • Soit $(x,y)\in\mathrm{Adh}(A\times B)$. Il existe alors une suite $\big((a_n,b_n)\big)$ d'éléments de $A\times B$ qui converge vers (x,y). Mais alors, par définition de la norme produit, on a $a_n\to x$ et $b_n\to y$, ce qui prouve que $x\in\mathrm{Adh}(A)$ et $y\in\mathrm{Adh}(B)$ (car les suites (a_n) et (b_n) sont à valeurs respectivement dans A et B).
   • Réciproquement, soit $(x,y)\in\mathrm{Adh}(A)\times\mathrm{Adh}(B)$. Alors on peut considérer (a_n) et (b_n) des suites d'éléments de A et B convergeant respectivement vers x et y. Mais alors, par définition de la norme produit, la suite $\big(a_n,b_n)\big)$, à valeurs dans $A\times B$, converge vers (x,y). On a donc $(x,y)\in\mathrm{Adh}(A\times B)$.

   Il en résulte que si A et B sont des fermés, alors :
   $$\mathrm{Adh}(A\times B)=\mathrm{Adh}(A)\times\mathrm{Adh}(B)=A\times B,$$
   et donc $A\times B$ est un fermé.

3. Par définition, on a :
   $$\mathrm{Fr}(A\times B)=\mathrm{Adh}(A\times B)\setminus\mathrm{Int}(A\times B).$$
   En utilisant les deux premières questions, il vient :
   $$\begin{aligned}\mathrm{Fr}(A\times B)&=\big(\mathrm{Adh}(A)\times\mathrm{Adh}(B)\big)\setminus\big(\mathrm{Int}(A)\times\mathrm{Int}(B)\big)\\&=\Big(\big(\mathrm{Adh}(A)\setminus\mathrm{Int}(A)\big)\times\mathrm{Adh}(B)\Big)\cup\Big(\mathrm{Adh}(A)\times\big(\mathrm{Adh}(B)\setminus\mathrm{Int}(B)\big)\Big)\\&=\big(\mathrm{Fr}(A)\times\mathrm{Adh}(B)\big)\cup\big(\mathrm{Adh}(A)\times\mathrm{Fr}(B)\big)\end{aligned}$$

4.4 Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

- Montrons que $\mathrm{Adh}(C)$ est convexe. Soit $(x, y, \lambda) \in \mathrm{Adh}(C)^2 \times [0,1]$; montrons que $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathrm{Adh}(C)$.
  Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, on peut trouver deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de C convergeant vers x et y respectivement. Par convexité de C, on a :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda x_n + (1-\lambda)y_n \in C.$$
  Comme de plus $\lambda u_n + (1-\lambda)y_n \to \lambda x + (1-\lambda)y$, on a bien $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathrm{Adh}(C)$.
- Montrons que $\mathrm{Int}(C)$ est convexe. Soit $(x, y, \lambda) \in \mathrm{Int}(C)^2 \times [0,1]$; montrons que $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in \mathrm{Int}(C)$. Puisque x et y appartiennent à l'intérieur de C, il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que :
  $$B(x, r_1) \subset C \quad \text{et} \quad B(y, r_2) \subset C.$$
  Posons $r = \min(r_1, r_2)$; on a alors :
  $$B(x, r) \subset C \quad \text{et} \quad B(y, r) \subset C.$$
  Montrons alors qu'on a $B(z, r) \subset C$, ce qui prouvera que $z \in \mathrm{Int}(C)$. Soit $u \in E$ vérifiant $\|u\| < r$; montrons que $z + u \in C$.
  En notant $\tilde{x} = x + u$ et $\tilde{y} = y + u$, on a :
  $$z + u = \lambda\tilde{x} + (1-\lambda)\tilde{y}.$$
  Comme $B(x, r) \subset C$ et $B(y, r) \subset C$, on a $\tilde{x} \in C$ et $\tilde{y} \in C$. Puis, comme C est convexe, on a $z + u \in C$. D'où le résultat.

4.5 • **Commençons par le cas $n = 2$.**
Supposons qu'une telle norme $\|\cdot\|$ existe.
Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices A et $2A$ sont semblables car si u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé à A, et si (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{K}^2$, alors la matrice de u dans la base $(e_1, 2e_2)$ est $2A$.
Par suite, on a $\|A\| = \|2A\|$. Par propriété d'homogénéité, on a alors $\|A\| = 2\|A\|$, et donc $\|A\| = 0$. Comme $A \neq 0$, cela contredit la propriété de séparation.

- **Cas général.** Ce qui précède s'étend pour $n \geqslant 2$ quelconque en considérant la matrice $A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & (0) \\ \hline & (0) & (0) \end{array}\right)$, dont on montre qu'elle est semblable à $2A$.
  En effet, si u est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, et si l'on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors la matrice de u dans la base $(e_1, 2e_2, e_3, \ldots, e_n)$ est $2A$.

4.6 • La suite nulle appartient à $\mathcal{C}_0$, et est à une distance 1 de la suite (a_n).
On a donc $d(a, \mathcal{C}_0) \leqslant 1$.

- D'autre part, si $u=(u_n)$ est une suite tendant vers 0, alors on a :
$$|a_n-u_n|=|1-u_n|\to 1,$$
et donc $\|a-u\|_\infty=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|a_n-u_n|\geqslant 1$. Cela prouve que $d(a,\mathcal{C}_0)\geqslant 1$.

Par double inégalité, on a donc $d(a,\mathcal{C}_0)=1$.

4.7 Les propriétés d'homogénéité et de séparation sont faciles à vérifier.
Montrons l'inégalité triangulaire. Soit $(x,y)\in\mathbb{K}^n$. Montrons que :
$$\|x+y\|_p\leqslant\|x\|_p+\|y\|_p.$$
Si l'un des deux vecteurs est le vecteurs nul, alors c'est évident. Supposons donc $x\neq 0$ et $y\neq 0$; on a alors $\|x\|_p>0$ et $\|y\|_p>0$.
Notons $\lambda=\|x\|_p$ et $\mu=\|y\|_p$ et posons :
$$\widetilde{x}=\frac{x}{\lambda}\qquad\text{et}\qquad\widetilde{y}=\frac{y}{\mu}.$$
Soit $k\in[\![1,n]\!]$. On a, par inégalité triangulaire et croissance de $u\mapsto u^p$ sur $\mathbb{R}_+$;
$$\begin{aligned}|x_k+y_k|^p&\leqslant\big(|x_k|+|y_k|\big)^p\\&=\big(\lambda\,\widetilde{x}_k+\mu\,\widetilde{y}_k\big)^p\\&=(\lambda+\mu)^p\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,\widetilde{x}_k+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\widetilde{y}_k\right)^p.\end{aligned}$$
Par convexité de la fonction $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+&\longrightarrow&\mathbb{R}\\u&\longmapsto&u^p\end{array}$, on a alors :
$$|x_k+y_k|^p\leqslant(\lambda+\mu)^p\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}|\widetilde{x}_k|^p+\frac{\mu}{\lambda+\mu}|\widetilde{y}_k|^p\right).\qquad(\star)$$
Comme $\|\widetilde{x}\|_p=\|\widetilde{y}\|_p=1$, on a :
$$\sum_{k=1}^n|\widetilde{x}_k|^p=\sum_{k=1}^n|\widetilde{y}_k|^p=1.$$
En sommant la relation $(\star)$ pour $k\in[\![1,n]\!]$, on obtient donc :
$$\sum_{k=1}^n|x_k+y_k|^p\leqslant(\lambda+\mu)^p,$$
c'est-à-dire :
$$\big(\|x+y\|_p\big)^p\leqslant\big(\|x\|_p+\|y\|_p\big)^p.$$
Par croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x\mapsto x^{1/p}$ cela donne le résultat souhaité.

Remarque L'inégalité triangulaire associé à la norme p :
$$\left(\sum_{k=1}^n|x_k+y_k|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^n|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n|y_k|^p\right)^{1/p}$$
est appelée **inégalité de Minkowski**.

4.8 1. Les propriétés d'homogénéité et de séparation sont faciles à vérifier.
Montrons l'inégalité triangulaire. Soit $(f,g) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})^2$. Montrons que :

$$\mathcal{N}_p(f+g) \leqslant \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g).$$

Si l'une des deux fonctions est la fonction nulle, alors c'est évident. Supposons donc $f \neq 0$ et $g \neq 0$; on a alors $\mathcal{N}_p(f) > 0$ et $\mathcal{N}_p(g) > 0$.
Notons $\lambda = \mathcal{N}_p(f)$ et $\mu = \mathcal{N}_p(g)$ et posons :

$$f_0 = \frac{f}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad g_0 = \frac{g}{\mu}\cdot$$

Pour $x \in [a,b]$, on a, par inégalité triangulaire et croissance sur $\mathbb{R}_+$ de $u \mapsto u^p$:

$$\begin{aligned}\big|f(x)+g(x)\big|^p &\leqslant \big(|f(x)|+|g(x)|\big)^p \\ &= \big(\lambda\,|f_0(x)| + \mu\,|g_0(x)|\big)^p \\ &= (\lambda+\mu)^p\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\big|f_0(x)\big| + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\big|g_0(x)\big|\right)^p\end{aligned}$$

Par convexité de la fonction $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^p\end{array}$, on a alors :

$$\big|f(x)+g(x)\big|^p \leqslant (\lambda+\mu)^p\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\big|f_0(x)\big|^p + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\big|g_0(x)\big|^p\right) \qquad (\star)$$

Par définition des fonctions f_0 et g_0, on voit que $\displaystyle\int_a^b |f_0|^p = \int_a^b |g_0|^p = 1$.
En intégrant l'inégalité $(\star)$ entre a et b, on obtient donc :

$$\int_a^b \big|f(x)+g(x)\big|^p \leqslant (\lambda+\mu)^p,$$

autrement dit :

$$\big(\mathcal{N}_p(f+g)\big)^p \leqslant \big(\mathcal{N}_p(f)+\mathcal{N}_p(g)\big)^p,$$

ce qui, par croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^{1/p}$ donne le résultat.

2. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. Pour montrer que $\mathcal{N}_p(f) \to \mathcal{N}_\infty(t)$, fixons $\varepsilon > 0$ et montrons qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \geqslant p_0 \quad \mathcal{N}_\infty(f) - \varepsilon \leqslant \mathcal{N}_p(f) \leqslant \mathcal{N}_\infty(f) + \varepsilon. \qquad (1)$$

Si $\mathcal{N}_\infty(f) = 0$, alors $f = 0$ et $\mathcal{N}_p(f) = 0$. Sinon, alors $\mathcal{N}_\infty(f) > 0$, et ce n'est alors pas une restriction de supposer $\varepsilon < 2\mathcal{N}_\infty(f)$, ce que nous faisons.

- On a tout d'abord :

$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x)|^p \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)^p,$$

puis on obtient la majoration suivante :

$$\mathcal{N}_p(f) \leqslant (b-a)^{1/p}\mathcal{N}_\infty(f). \qquad (2)$$

- De plus, comme f est continue sur le segment $[a,b]$, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $|f(x_0)| = \mathcal{N}_\infty(f)$. Par continuité de f, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b] \cap]x_0-\eta, x_0+\eta[\quad |f(x)| \geqslant \mathcal{N}_\infty(f) - \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Notons I l'intervalle $[a,b]\cap]x_0-\eta, x_0+\eta[$. En minorant $|f|$ par la fonction en escalier valant $\mathcal{N}_\infty(f)-\dfrac{\varepsilon}{2}$ sur I et 0 ailleurs, on obtient, en notant ℓ la longueur de I :

$$\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t \geqslant \ell\left(\mathcal{N}_\infty(f)-\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

puis :

$$\mathcal{N}_p(f) \geqslant \ell^{1/p}\Big(\mathcal{N}_\infty(f)-\frac{\varepsilon}{2}\Big). \tag{3}$$

- Les inégalités (2) et (3) donnent l'encadrement suivant :

$$\ell^{1/p}\Big(\mathcal{N}_\infty(f)-\frac{\varepsilon}{2}\Big) \leqslant \mathcal{N}_p(f) \leqslant (b-a)^{1/p}\mathcal{N}_\infty(f).$$

  * Comme $\ell>0$, on a $\ell^{1/p}\to 1$, et donc $\ell^{1/p}\Big(\mathcal{N}_\infty(f)-\dfrac{\varepsilon}{2}\Big)\to \mathcal{N}_\infty(f)-\dfrac{\varepsilon}{2}$. Il existe donc $p_1\in\mathbb{N}$ tel que :

$$p\geqslant p_1 \Longrightarrow \ell^{1/p}\Big(\mathcal{N}_\infty(f)-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\geqslant \mathcal{N}_\infty(f)-\varepsilon.$$

  * Comme $b-a>0$, on a $(b-a)^{1/p}\to 1$, et donc $(b-a)^{1/p}\mathcal{N}_\infty(f)\to\mathcal{N}_\infty(f)$. Il existe donc $p_2\in\mathbb{N}$ tel que :

$$p\geqslant p_2 \Longrightarrow (b-a)^{1/p}\mathcal{N}_\infty(f)\leqslant \mathcal{N}_\infty(f)+\varepsilon.$$

  * En notant alors $p_0=\max(p_1,p_2)$, la propriété (1) est vérifiée. D'où le résultat.

3. Le résultat ne subsiste pas si f est seulement supposée continue par morceaux. N'importe quelle fonction nulle sauf en un nombre fini de points fait office de contre-exemple, par exemple f définie par :

$$f(a)=1 \qquad \text{et} \qquad \forall x\in\,]a,b] \quad f(x)=0.$$

Remarque L'inégalité triangulaire associé à la norme p :

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}$$

est appelée **inégalité de Minkowski**.

4.9 1. Utilisons la caractérisation séquentielle des fermés. Soit (P_n) une suite de polynômes unitaires convergeant vers P. Montrons que P est unitaire.

- Tout d'abord, comme les P_n sont unitaires, et par définition de $\|\cdot\|_\infty$, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \|P_n\|_\infty \geqslant 1,$$

  et donc, puisque $\|P_n\|\to\|P\|$, on a $\|P\|_\infty\geqslant 1$. En particulier, P est non nul.
- Notons r le degré de P et c le coefficient dominant de P. Comme $P_n\to P$, il existe un rang $n_0\in\mathbb{N}$ tel que :

$$n\geqslant n_0 \Longrightarrow \big\|P_n-P\big\|_\infty \leqslant \frac{\min(|c|,1)}{2}.$$

Pour $n \geqslant n_0$, on a donc nécessairement $\deg(P_n) = r$ car :

* si $\deg(P_n) < r$, alors le coefficient devant le terme de degré r de $P_n - P$ vaut c, et alors $\|P_n - P\|_\infty \geqslant |c| > \dfrac{\min(|c|, 1)}{2}$.
* si $\deg(P_n) > r$, alors le polynôme $P_n - P$ est unitaire, et par conséquent $\|P_n - P\|_\infty = 1 > \dfrac{\min(|c|, 1)}{2}$.

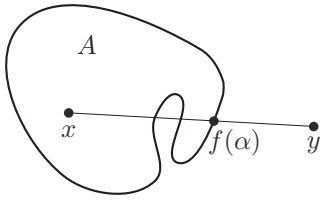
- Pour $n \geqslant n_0$, comme P_n est de degré r et unitaire, on a alors :
$$\|P_n - P\|_\infty \geqslant |1 - c|.$$
Comme $\|P_n - P\|_\infty \to 0$, on a nécessairement $c = 1$.

2. Procédons par caractérisation séquentielle. Soit (P_n) une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ convergeant vers $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrons que $P \in \mathcal{S}$. D'après la question précédente, on sait déjà que P est unitaire. Il s'agit donc de montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire que P ne possède pas de racine complexe non réelle. Donnons-nous donc $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et prouvons que $P(z) \neq 0$.

- Tout d'abord, il a été vu à la question précédente que si l'on note $r = \deg P$, alors il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad \deg P_n = r$.
- Ensuite, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme unitaire et scindé de degré r, alors, en notant $z_1, \ldots, z_r$ ses racines réelles, on a :
$$P = \prod_{k=1}^{r} (X - z_k) \quad \text{et donc} \quad |P(z)| = \prod_{k=1}^{r} |z - z_k|.$$
Comme pour tout $k \in [\![1, r]\!]$ on a
$$|z - z_k| = \sqrt{(\operatorname{Im} z)^2 + (\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_k)^2} \geqslant |\operatorname{Im} z|,$$
on obtient :
$$|P(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^r.$$
Cette inégalité s'applique en particulier aux polynômes P_n pour $n \geqslant n_0$:
$$\forall n \geqslant n_0 \quad |P_n(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^r. \qquad (\star)$$
- Il suffit alors de montrer que $P_n(z) \to P(z)$. En effet, comme $|\operatorname{Im} z|^r > 0$, un passage à la limite dans la relation $(\star)$ donnera que $|P(z)| > 0$, *i.e.* $P(z) \neq 0$. Pour $n \geqslant n_0$, on a $\deg P_n = r$ et donc on peut écrire :
$$P_n = \sum_{k=0}^{r} a_k^{(n)} X^k \qquad \text{et} \qquad P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k.$$
Ainsi, on a :
$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{r} a_k^{(n)} z^k \qquad \text{et} \qquad P(z) = \sum_{k=0}^{r} a_k z^k.$$
Par définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$, la convergence $P_n \to P$ donne la convergence de chacune des suites de coefficients : $\forall k \in [\![0, r]\!] \quad a_k^{(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a_k$. La convergence $P_n(z) \to P(z)$ résulte alors simplement d'opérations sur les limites.

4.10 1. Il est clair que E et $\varnothing$ ont une frontière vide. Montrons que ce sont les seules. Soit A une partie vérifiant $A \neq E$ et $A \neq \varnothing$.
Montrons que la frontière de A est non vide, *i.e.* $\overline{A} \cap \overline{E \setminus A} \neq \varnothing$.
Comme $A \neq E$ et $A \neq \varnothing$, on peut prendre $x \in A$ et $y \in E \setminus A$.
Considérons alors l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & E \\ & \lambda & \longmapsto & (1-\lambda)\,x + \lambda\,y. \end{array}$$



L'ensemble $\Gamma = \big\{\lambda \in [0,1] \mid f(\lambda) \in A\big\}$ et non vide (car contient 0) et majoré (par 1) ; notons α sa borne supérieure. Prouvons alors que $f(\alpha) \in \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$, ce qui terminera le raisonnement.

- Par définition de la borne supérieure, on peut trouver une suite (λ_n) d'éléments de Γ qui converge vers α. Par opérations sur les limites, on a $f(\lambda_n) \to f(\alpha)$. Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(\lambda_n) \in A$, on obtient $f(\alpha) \in \overline{A}$.
- $*$ Si $\alpha = 1$, alors $f(\alpha) = y \in E \setminus A \subset \overline{E \setminus A}$.
  $*$ Si $\alpha \in [0,1[$, alors on peut considérer (λ_n) une suite à valeurs dans $]\alpha, 1]$ tendant vers α. On alors $f(\lambda_n) \to f(\alpha)$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(\lambda_n) \in E \setminus A$.
  Il en résulte que $f(\alpha) \in \overline{E \setminus A}$.

2. On sait que les parties E et $\varnothing$ sont à la fois des ouverts et des fermés de E. Montrons que ce sont les seules. Soit A une partie qui soit à la fois un ouvert et un fermé de E.
- Comme A est un fermé, on a $\overline{A} = A$.
- Comme A est un ouvert, $E \setminus A$ est un fermé et donc $\overline{E \setminus A} = E \setminus A$.

On a alors :

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = A \cap (E \setminus A) = \varnothing.$$

D'après la question précédente, on a $A = E$ ou $A = \varnothing$.

4.11 • **Intérieur au sens de la norme infinie.** Montrons que, pour la norme infinie, l'intérieur de F est vide. Pour cela, donnons-nous $f \in F$ et $\varepsilon > 0$, et montrons que $B(f, \varepsilon) \not\subset F$. C'est évident car, tout simplement, la fonction $g = f + \dfrac{\varepsilon}{2}$ vérifie $\mathcal{N}_\infty(f - g) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $g \notin F$.

• **Intérieur au sens de la norme un.** Puisque la norme $\mathcal{N}_1$ et dominée par la norme $\mathcal{N}_\infty$, si l'intérieur de F est vide au sens de $\mathcal{N}_\infty$, il l'est également au sens de $\mathcal{N}_1$.

• **Adhérence au sens de la norme infinie.** Montrons qu'au sens de la norme infinie, F est un fermé, et donc égal à son adhérence. Par caractérisation séquentielle : soit $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $f \in E$; montrons que $f \in F$.
La convergence uniforme de la suite (f_n) vers f (*i.e.* au sens de la norme $\mathcal{N}_\infty$) entraîne la convergence simple, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) \to f(x).$$

En particulier, on a $f_n(0) \to f(0)$ et $f_n(1) \to f(1)$.
Cela assure que $f(0) = f(1) = 0$, *i.e.* $f \in F$.

267

Remarque Pour montrer que F est un fermé au sens de la norme infinie, on peut aussi utiliser la proposition 15 de la page 267 en remarquant que F est l'image réciproque de $\{(0,0)\}$ par l'application continue $f \mapsto \big(f(0), f(1)\big)$.

- **Adhérence au sens de la norme un.** Montrons qu'au sens de la norme un, F est dense dans E, *i.e.* $\mathrm{Adh}(F) = E$. Soit $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons f_n l'unique fonction égale à f sur $\left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$, nulle en 0 et en 1, et affine sur les intervalles $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $\left[1 - \frac{1}{n}, 1\right]$. On a alors :

$$f_n \in F \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_1(f_n - f) \leqslant \frac{2}{n}\mathcal{N}_\infty(f).$$

La suite (f_n) est donc une suite d'éléments de F qui converge vers f (au sens de la norme $\mathcal{N}_1$). D'où le résultat.

4.12 Soit H un hyperplan de E. Supposons que H n'est pas fermé et montrons que H est dense dans E, autrement dit que $\overline{H} = E$.

- Tout d'abord, comme H est un sous-espace vectoriel, $\overline{H}$ l'est également (*cf.* exercice 38 de la page 212).
- Comme H n'est pas fermé, l'inclusion $H \subset \overline{H}$ est stricte. Cela prouve que $H = E$ car, comme H est un hyperplan de E, le seul sous-espace vectoriel qui contienne strictement H est l'espace E lui-même. Justifions-le. Considérons $a \in \overline{H} \setminus H$. Comme $a \notin H$ et que H est un hyperplan de E, les sous-espaces H et $\mathrm{Vect}(a)$ sont supplémentaires dans E. Comme de plus on a $H \subset \overline{H}$ et $a \in \overline{H}$, on obtient :

$$E = H \oplus \mathrm{Vect}(a) \subset \overline{H}.$$

L'inclusion $\overline{H} \subset E$ étant évidemment vraie, cela prouve que $\overline{H} = E$.

4.13 1. Il est clair que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$.On a $N = \mathcal{N}_\infty \circ \varphi$ où φ est l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & f'' + 2f' + f \end{array}$$

Pour prouver que N est une norme, il suffit de prouver que φ est injective (*cf.* page 200). C'est évident car le noyau de φ est l'ensemble des solutions du problème de Cauchy :

$$f'' + 2f' + f = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = f'(0) = 0$$

dont on sait que l'unique solution est la fonction nulle.

2. Remarquons que, pour tout $f \in \mathcal{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\big(e^x\, f(x)\big) = e^x\,\big(f''(x) + 2f'(x) + f(x)\big).$$

- Soit $f \in E$. Pour $x \in [0,1]$, la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre 1, à la fonction $x \mapsto f(x)e^x$, entre les points 0 et x, donne :

$$f(x)\,e^x = \int_0^x (x-t)\,\big(f''(t) + 2f'(t) + f(t)\big)\,e^t\,\mathrm{d}t,$$

et donc :

$$f(x) = e^{-x}\int_0^x (x-t)\,\big(f''(t) + 2f'(t) + f(t)\big)\,e^t\,\mathrm{d}t.$$

Comme :

$$\forall t \in [0,x] \quad \big|f''(t) + 2f'(t) + f(t)\big| \leqslant N(f),$$

on obtient :

$$|f(x)| \leqslant e^{-x}N(f)\int_0^x (x-t)e^t\mathrm{d}t$$

ce qui donne, après une intégration par parties :

$$|f(x)| \leqslant g(x)\,N(f) \qquad \text{avec} \qquad g(x) = 1 - (x+1)e^{-x}.$$

On a :

$$\forall x \in [0,1] \quad g'(x) = x\,e^{-x}$$

donc g est croissante sur $[0,1]$ et atteint ainsi son maximum en 1, maximum qui vaut $a = 1 - 2e^{-2}$.
On a donc $\mathcal{N}_\infty \leqslant a\,N$.

- On obtient, après calculs, que l'unique solution du problème de Cauchy :

$$y'' + 2y' + y = 1 \qquad \text{et} \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

est la fonction g introduite précédemment. Cette fonction appartient à E et l'on a :

$$\mathcal{N}_\infty(g) = g(1) = a = a\,N(g).$$

Cela prouve que la constante a obtenue est optimale.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = x^2\sin(2\pi nx)$. La fonction f_n est deux fois dérivable et l'on a :

$$f_n'(x) = 2x\sin(2\pi nx) + 2\pi nx^2\cos(2\pi nx)$$

et

$$f_n''(x) = 2\sin(2\pi nx) + 8\pi nx\cos(2\pi nx) - 4\pi^2n^2x^2\sin(2\pi nx).$$

On a $f_n(0) = f_n'(0) = 0$, donc $f_n \in E$. On a $\mathcal{N}_\infty(f_n) \leqslant 1$ et pourtant :

$$f_n''(1) + 2f_n'(1) + f_n(1) = 12\pi n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Cela prouve que N n'est pas dominée par $\mathcal{N}_\infty$.

Chapitre 5 : Étude locale d'une application, continuité

I Limite d'une application 256
1 Définitions, généralités 256
2 Cas d'une application à valeurs réelles : limites infinies 258
3 Limites en l'infini 259
4 Application à valeurs dans un espace produit . . . 260
5 Prolongement par continuité 260
6 Relation de comparaison 261
II Opérations sur les limites 262
III Continuité globale 263
1 Applications continues 263
2 Application lipschitzienne 264
3 Opérations sur les applications continues 265
4 Continuité et densité 266
5 Images réciproques d'ouverts et de fermés par une application continue 267
6 Continuité uniforme 268
IV Continuité des applications linéaires 269
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 271
Exercices 279

Étude locale d'une application, continuité



Dans tout le chapitre :

- $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- en l'absence de précision supplémentaire, E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et A désigne une partie de E ;
- les normes sur E et F sont toutes deux notées $\|\cdot\|$.

I Limite d'une application

1 Définitions, généralités

Définition 1

Soit $f : A \to F$ une application, ainsi que a un point adhérent à A et $\ell \in F$.
On dit que f **tend vers ℓ en a** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\|f(x) - \ell\big\| \leqslant \varepsilon.$$

Notation Pour signifier que f tend vers ℓ en a, on note :

$$f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ou encore} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Remarque La définition précédente peut s'écrire :

- en terme de distance :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad d(x, a) \leqslant \eta \Longrightarrow d\big(f(x), \ell\big) \leqslant \varepsilon.$$

- en terme de boules :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in B_f(a, \eta) \cap A \quad f(x) \in B_f(\ell, \varepsilon),$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad f\big(B_f(a, \eta) \cap A\big) \subset B_f(\ell, \varepsilon).$$

Attention Ne pas confondre les notations dans ce qui précède : la notation B_f est utilisée pour désigner une boule fermée et n'a aucun lien avec le nom f de l'application considérée.

Dans ce qui suit, afin d'alléger les énoncés, nous convenons qu'en l'absence de précision supplémentaire :

- f désigne une application de A dans F
- a un point adhérent à A
- ℓ un élément de F.

Lemme 1

Si $f : A \to F$ tend vers ℓ en a, alors ℓ est adhérent à $f(A)$.

Démonstration page 271

Remarque Si a appartient à A et si f admet une limite en a, alors celle-ci vaut nécessairement $f(a)$. Cela conduit à la définition suivante :

Définition 2

On dit que f est continue en $a \in A$ si f admet une limite en a.

Caractérisation séquentielle de la limite

La proposition suivante va nous permettre d'utiliser les résultats déjà obtenus sur les suites au chapitre précédent pour établir rapidement de nombreuses propriétés sur les limites d'applications.

Proposition 2 (Caractérisation séquentielle de la limite)

L'application f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tendant vers a, on a $f(u_n) \to \ell$.

Démonstration page 271

p.271

Exercice 1 *Stabilité par restriction*

Supposons que $f : A \to F$ admette une limite ℓ en a. Si B est une partie de A telle que a soit adhérent à B, montrer que la restriction $f_{|_B}$ de f à B tend également vers ℓ en a.

Corollaire 3 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

L'application f est continue en $a \in A$ si, et seulement si, pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tendant vers a, on a $f(u_n) \to f(a)$.

Unicité de la limite

Proposition 4 (Unicité de la limite)

Si deux éléments ℓ_1 et ℓ_2 de F vérifient $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration. Supposons que ℓ_1 et ℓ_2 soient tels que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui tend vers a (une telle suite existe car a est adhérent à A). D'après la proposition 2, on a alors $f(u_n) \to \ell_1$ et $f(u_n) \to \ell_2$. Par unicité de la limite d'une suite, il en résulte que $\ell_1 = \ell_2$. □

Définition 3

On dit que f admet une limite en a s'il existe $\ell \in F$ tel que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.

Cet unique élément ℓ s'appelle alors la **limite de f en a** et se note $\lim\limits_{a} f$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

2 Cas d'une application à valeurs réelles : limites infinies

Pour une application à valeurs réelles, on introduit la notion de limites infinies.

Définition 4

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application, et a un point adhérent à A.

- On dit que f **tend vers $+\infty$ en a** si :
$$\forall R \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant R.$$
- On dit que f **tend vers $-\infty$ en a** si :
$$\forall R \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant R.$$

Notation On note $f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$ ou encore $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ pour signifier que f tend vers $+\infty$ en a. On dit également que f admet $+\infty$ comme limite en a, et l'on note $\lim\limits_{a} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
Même principe pour $-\infty$.

p.271

Exercice 2 Montrer que la caractérisation séquentielle de la limite (proposition 2 de la page précédente), donnée dans le cas où $\ell \in F$, s'étend naturellement aux cas $\ell = \pm\infty$.

3 Limites en l'infini

Limite lorsque $\|x\| \to +\infty$

Définition 5

Soit $f : A \to F$ une application. Supposons que A ne soit pas bornée.
On dit que tend vers ℓ lorsque $\|x\| \to +\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad \|x\| \geqslant M \Longrightarrow \big\|f(x) - \ell\big\| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Cas de la variable réelle : limites en $-\infty$ et $+\infty$

Pour une application définie sur une partie de $\mathbb{R}$, on introduit la notion de limite en $-\infty$ et $+\infty$.

Pour une partie A de $\mathbb{R}$, on étend la définition 18 de la page 211 de point adhérent de la manière suivante : on dit qu'un élément $x \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à A s'il existe une suite d'élément de A qui tend vers x.
Ainsi, on dit que $-\infty$ (respectivement $+\infty$) est adhérent à A s'il existe une suite d'éléments de A tendant vers $-\infty$ (respectivement $+\infty$).

On constate rapidement que :

- $-\infty$ est adhérent à A si, et seulement si, A n'est pas minorée ;
- $+\infty$ est adhérent à A si, et seulement si, A n'est pas majorée.

Définition 6

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $f : A \to F$ une application et $\ell \in F$.

- Si $-\infty$ est adhérent à A, alors on dit que f tend vers ℓ en $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad x \leqslant M \Longrightarrow \big\|f(x) - \ell\big\| \leqslant \varepsilon.$$

- Si $+\infty$ est adhérent à A, alors on dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad x \geqslant M \Longrightarrow \big\|f(x) - \ell\big\| \leqslant \varepsilon.$$

Exemple Dans le cas d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, qui est une application de $\mathbb{N}$ dans E, la définition précédente permet d'envisager la convergence de la suite en $+\infty$. On constate que cette définition est alors la même que celle déjà vue de la convergence d'une suite (définition 10 de la page 201).

Proposition 5 (Caractérisation séquentielle dans le cas $a = \pm\infty$)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $f : A \to F$ une application, et $\ell \in F$.

- Si A est non minorée, alors f tend vers ℓ en $-\infty$ si, et seulement si, pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tendant vers $-\infty$, on a $f(u_n) \to \ell$.
- Si A est non majorée, alors f tend vers ℓ en $+\infty$ si, et seulement si, pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A tendant vers $+\infty$, on a $f(u_n) \to \ell$.

Démonstration page 272

Dans toute la suite du chapitre, en l'absence de précision supplémentaire, a désigne un point adhérent à A en l'un des sens suivants :

- **1er sens :** a est un élément de E appartenant à $\mathrm{Adh}(A)$;
- **2er sens :** A est une partie non majorée de $\mathbb{R}$ et $a = +\infty$;
- **3er sens :** A est une partie non minorée de $\mathbb{R}$ et $a = -\infty$;

4 Application à valeurs dans un espace produit

Dans la proposition suivante, on considère p espaces vectoriels normés $E_1, \dots, E_p$, et l'on munit l'espace $E_1 \times \cdots \times E_p$ de la norme produit.

Proposition 6

Si l'application f est à valeurs dans $E_1 \times \cdots \times E_p$, et si $f_1, \dots, f_p$ désignent les applications composantes de f, alors f tend vers

$$\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$$

en a si, et seulement si, chacune des applications f_k tend vers ℓ_k en a.

Principe de démonstration. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite et le résultat sur la convergence d'une suite à valeurs dans un espace produit. Démonstration page 272

5 Prolongement par continuité

Définition 7

Si f possède une limite $\ell \in F$ en un point $a \in \overline{A} \setminus A$, alors l'application :

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} A \cup \{a\} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ \ell & \text{si} \quad x = a \end{cases} \end{array}$$

est continue en a, et s'appelle **prolongement de f par continuité en a**.

Remarque L'unicité de la limite entraîne que l'application $\widetilde{f}$ de la définition précédente est l'*unique* prolongement de f à $A \cup \{a\}$ qui soit continu en a.

p.273

Exercice 3 *Approfondissement*

Soit X une partie de A dense dans A, et $f : X \to F$ une application continue en tout point de X. On suppose que f admet une limite finie en tout point de $A \setminus X$. Montrer que f admet un prolongement $\tilde{f} : A \to F$ continu en tout point de A.

6 Relation de comparaison

On étend ici les notations o et O déjà vues en première année pour des fonctions de la variable réelle et à valeurs réelles ou complexes.

Définition 8

Soit $f : A \to F$ et $\varphi : A \to F$ deux applications. On dit que f est **dominée** par φ au voisinage de a s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que :

- *Cas* $a \in \mathrm{Adh}(A)$: il existe $r > 0$ tel que :
$$\forall x \in A \cap B(a,r) \quad \|f(x)\| \leqslant C\,\|\varphi(x)\| \ ;$$
- *Cas* $a = +\infty$: il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in A \quad x \geqslant r \Longrightarrow \|f(x)\| \leqslant C\,\|\varphi(x)\| \ ;$$
- *Cas* $a = -\infty$: il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in A \quad x \leqslant r \Longrightarrow \|f(x)\| \leqslant C\,\|\varphi(x)\|.$$

On note alors $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$.

Définition 9

Soit $f : A \to F$ et $\varphi : A \to F$ deux applications. On dit que f est **négligeable** devant φ au voisinage de a si pour tout $\varepsilon > 0$:

- *Cas* $a \in \mathrm{Adh}(A)$: il existe $r > 0$ tel que :
$$\forall x \in A \cap B(a,r) \quad \|f(x)\| \leqslant \varepsilon\,\|\varphi(x)\| \ ;$$
- *Cas* $a = +\infty$: il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in A \quad x \geqslant r \Longrightarrow \|f(x)\| \leqslant \varepsilon\,\|\varphi(x)\| \ ;$$
- *Cas* $a = -\infty$: il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in A \quad x \leqslant r \Longrightarrow \|f(x)\| \leqslant \varepsilon\,\|\varphi(x)\|.$$

On note alors $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$.

Remarque D'après la définition précédente :

- il est équivalent de dire $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$ et $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\|\varphi\|)$;
- il est équivalent de dire $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$ et $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\|\varphi\|)$.

C'est pourquoi dans la pratique, dans une relation de domination ou de négligeabilité, on se limite souvent à une fonction φ à valeurs réelles positives.

II Opérations sur les limites

Proposition 7 (Limite d'une combinaison linéaire)

Soit f_1 et f_2 deux applications de A dans F ainsi que λ_1 et λ_2 deux scalaires. Si l'on a $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1 \in F$ et $f_2 \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2 \in F$, alors :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{a}{\longrightarrow} \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2.$$

Principe de démonstration. Par caractérisation séquentielle de la limite, et par opérations sur les suites convergentes.

Démonstration page 274

Proposition 8 (Produit par une fonction à valeurs scalaires)

Si $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in F$ et si φ est une fonction de A dans $\mathbb{K}$ tendant en a vers $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\varphi \times f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \varphi(x) f(x) \end{array}$ tend en a vers $\lambda \ell$.

Principe de démonstration. Par caractérisation séquentielle de la limite, et par opérations sur les suites convergentes (produit d'une suite convergente par une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$).

Démonstration page 274

Proposition 9 (Inverse)

Soit $f : A \to \mathbb{K}$ une fonction ne s'annulant pas.

Si $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors on a $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$.

Démonstration page 274

Remarque Dans la proposition 9, si la fonction f s'annule sur A, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ n'est pas définie sur A tout entier. En revanche, si $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors il existe un voisinage V de a tel que la restriction de f à $V \cap A$ ne s'annule pas. C'est à cette restriction que le résultat s'applique.

Quotient d'applications à valeurs scalaires Il résulte des deux résultats précédents que si $f_1 : A \to \mathbb{K}$ et $f_2 : A \to \mathbb{K}$ sont deux applications vérifiant $f_1 \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f_2 \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2 \neq 0$, et si f_2 ne s'annule pas, alors :

$$\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\longrightarrow} \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

Proposition 10 (Limite d'une fonction composée)

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, ainsi que $A \subset E$ et $B \subset F$.
Soit $f : A \to F$ et $g : B \to G$ deux applications, avec $f(A) \subset B$.

- Si $f \underset{a}{\longrightarrow} b$, alors b est adhérent à B.
- Si de plus on a $g \underset{b}{\longrightarrow} \ell$, alors $g \circ f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.

Principe de démonstration. Par caractérisation séquentielle. Démonstration page 274

Conséquence en terme de continuité ponctuelle

Les résultat précédents sur les limites donnent immédiatement des résultats analogues sur les applications continues en un point :

- toute combinaison linéaire d'applications continues en a est également continue en a ;
- tout produit d'une fonction continue en a par une fonction scalaire continue en a est également continue en a ;
- si f est continue en a avec $f(a) \neq 0$ et si f ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue en a ;
- si f et g sont continues en a avec $g(a) \neq 0$ et si de plus g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a ;
- si $f : A \to B$ est continue en a et $g : B \to G$ continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

III Continuité globale

1 Applications continues

Définition 10

On dit qu'une application est **continue** si elle est continue en tout point de son domaine de définition.

Remarque La continuité de f s'écrit ainsi :

$$\forall a \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| \leqslant \varepsilon.$$

p.274 **Exercice 4** Soit $f : A \to F$ une application continue. Montrer que si $B \subset A$, alors la restriction $f_{|_B}$ est continue.

2 Application lipschitzienne

Définition 11

- Soit $k \geqslant 0$. On dit que l'application f est **k-lipschitzienne** ou **lipschitzienne de rapport k** si :

$$\forall (x,y) \in A^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k \|x - y\|.$$

- Dire f est **lipschitzienne** signifie qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Remarques

1. Si f est k-lipschitzienne, alors f est k'-lipschitzienne pour tout $k' \geqslant k$.
2. L'ensemble des applications lipschitziennes de A dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A,E)$: en effet, la fonction nulle est lipschitzienne, et si f_1 et f_2 sont lipschitziennes de rapports respectifs k_1 et k_2 et si λ_1 et λ_2 sont deux scalaires, alors l'application $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est lipschitzienne de rapport $|\lambda_1|\, k_1 + |\lambda_2|\, k_2$.
3. La composée d'une application k_1-lipschitzienne et d'une application k_2-lipschitzienne est une application $k_1\, k_2$-lipschitzienne.

Proposition 11

Toute application lipschitzienne est continue.

Démonstration page 274

Point méthode

Pour montrer qu'une application est continue, on commence souvent par regarder si elle est lipschitzienne car, si c'est le cas, c'est en général la manière la plus rapide de justifier la continuité.

Exemples Les applications suivantes sont 1-lipschitziennes, donc continues :

1. l'application *norme* : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$
2. pour A une partie de E, l'application *distance à A* : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x,A) \end{array}$
3. l'application *distance* : $\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) \end{array}$

   (E^2 étant muni de la norme produit)
4. pour $k \in [\![1,n]\!]$, l'application *k-ième composante* :

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & E_k \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_k \end{array}$$

   où $E_1 \times \cdots \times E_n$ est un espace produit muni de la norme produit.

p.274

Exercice 5 Soit $u : E \to F$ une application linéaire.
Montrer que u est k-lipschitzienne si, et seulement si :

$$\forall x \in E \quad \big\|u(x)\big\| \leqslant k\|x\|.$$

p.275

Exercice 6 Montrer que si l'on dispose de deux normes équivalentes sur E et de deux normes équivalentes sur F, alors la notion d'application lipschitzienne ne dépend pas des normes choisies.

3 Opérations sur les applications continues

Les résultats suivants sont les versions globales des propositions 7 à 10.

Proposition 12 (Combinaison linéaire, produit, composée)

- Une combinaison linéaire de deux applications continues est continue.
- Le produit d'une application continue avec une application continue à valeurs dans $\mathbb{K}$ est continue.
- La composée de deux applications continues est continue.

Remarque L'ensemble des applications continues de A dans F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$. On le note $\mathcal{C}(A, F)$.

Exemples

1. On munit E^2 de la norme produit. L'application $f : \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$ est continue, comme sommes des applications *composantes* de E^2 dans E : $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ (continues car lipschitziennes).
2. On munit $\mathbb{K} \times E$ de la norme produit. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha\, x \end{array}$ est continue, comme produit des applications *composantes* (continues car lipschitziennes) $(\alpha, x) \mapsto \alpha$ de $\mathbb{K} \times E$ dans $\mathbb{K}$ et $(\alpha, x) \mapsto x$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E.

Remarque Dans les deux exemples précédents, si l'on ne veut pas utiliser le caractère lipschitzien, alors on peut utiliser la caractérisation séquentielle et se ramener aux résultats déjà connus sur les suites. Dans le cas du premier exemple, si (x, y) est un élément de E^2, et si $(u_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E^2 qui tend vers (x, y), alors on a $u_n \to x$ et $v_n \to y$, et donc, par somme de deux suites convergentes, on a :

$$f(u_n, v_n) = u_n + v_n \to x + y = f(x, y).$$

p.275

Exercice 7

Justifier que si f est continue, alors l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ est continue.

Proposition 13 (Inverse)

Soit $f : A \to \mathbb{K}$ une application continue ne s'annulant pas.
L 'application *inverse* de f :

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{1}{f} & : & A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{f(x)} \end{array}$$

est continue.

Démonstration. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est continue, comme composée des deux applications continues f et $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \dfrac{1}{\lambda}. \end{array}$ □

Conséquence Si $f : A \to \mathbb{K}$ et $g : A \to \mathbb{K}$ sont deux applications continues à valeurs scalaires, et si de plus g ne s'annule pas, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue, comme produit des deux applications continues f et $\dfrac{1}{g}$.

4 Continuité et densité

Proposition 14

Si $f : A \to F$ et $g : A \to F$ sont deux applications continues coïncidant sur une partie dense dans A, alors elles sont égales.

Principe de démonstration. Si D est une partie dense dans A, alors tout élément de D est limite d'une suite d'éléments de A. Démonstration page 275

p.275

Exercice 8 On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Montrer qu'une application continue $f : E \to F$ est linéaire si, et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

5 Images réciproques d'ouverts et de fermés par une application continue

Proposition 15

Soit $f : A \to F$ une application continue.

1. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif de A.
2. L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A.

Démonstration page 276

p.277

Exercice 9 *Réciproque du résultat précédent*

Soit $f : A \to F$ une application.

1. Montrer que si l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A, alors f est continue.
2. Montrer que si l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif de A, alors f est continue.

La proposition 15 s'utilise principalement dans la situation où f est définie sur E tout entier. Dans ce cas, les notions d'ouvert et fermé relatifs coïncident avec les notions d'ouvert et fermé de E, ce qui donne le résultat suivant.

Corollaire 16

Étant donné $f : E \to F$ une application continue.

1. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé.
2. L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert.

Remarque Ce résultat peut être utilisé pour montrer qu'une partie est un ouvert ou un fermé. Par exemple, si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue, alors :

- les ensembles $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ et $\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}$ sont des ouverts ;
- les ensembles $\{x \in E \mid f(x) \geqslant 0\}$ et $\{x \in E \mid f(x) = 1\}$ sont des fermés.

Exemples

1. Une manière élégante de justifier que le demi-plan $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ consiste à le voir comme l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ par l'application continue
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x. \end{array}$$
2. L'ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, car c'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ par l'application continue $M \mapsto \det(M)$.

p.277

Exercice 10 Soit A et B deux fermés disjoints de E. Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & d(x,A) - d(x,B). \end{array}$$

1. Montrer que $\forall x \in A \quad \varphi(x) < 0$ et que $\forall x \in B \quad \varphi(x) > 0$.
2. En déduire qu'il existe deux ouverts disjoints U et V vérifiant $A \subset U$ et $B \subset V$.

6 Continuité uniforme

La définition suivante généralise la notion de continuité uniforme déjà vue pour les fonctions d'une variable réelle.

Définition 12

On dit que l'application f est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x,y) \in A^2 \quad \|x-y\| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 17

Si f est uniformément continue, alors f est continue.

Démonstration. Supposons f uniformément continue. Pour $a \in A$ fixé, la définition de l'uniforme continuité de f, dans laquelle on fixe à a la variable quantifiée y, donne :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x-a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve que f est continue au point a.
Ceci étant valable pour tout $a \in A$, f est continue. □

Proposition 18

Si f est lipschitzienne, alors f est uniformément continue.

Démonstration. Supposons que f soit k-lipschitzienne, avec $k > 0$. Alors, pour $\varepsilon > 0$, le réel $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ est tel que pour tout $(x,y) \in A^2$ vérifiant $\|x-y\| \leqslant \eta$, on a :

$$\big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant k\,\|x-y\| \leqslant k \times \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$ □

Attention Les réciproques des résultats des deux exercices précédents sont fausses ! Par exemple :

- $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$ est continue, mais pas uniformément continue ;
- $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est uniformément continue, mais pas lipschitzienne.

p.277

Exercice 11 *Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité*

1. Montrer que f est uniformément continue si, et seulement si, pour toutes suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telles que $\|a_n - b_n\| \to 0$, on a $\big\|f(a_n) - f(b_n)\big\| \to 0$.
2. En déduire que la fonction $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2\end{array}$ n'est pas uniformément continue.

IV Continuité des applications linéaires

Proposition 19

Une application *linéaire* $u : E \to F$ est continue si, et seulement s'il existe $k \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in E \quad \big\|u(x)\big\| \leqslant k\,\|x\|.$$

Démonstration page 278

Remarque Une application linéaire est donc continue si, et seulement si, elle est lipschitzienne (*cf.* exercice 5 de la page 265).

p.278

Exercice 12 Montrer qu'une application linéaire $u : E \to F$ est continue si, et seulement s'il existe $k \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in E \quad \|x\| = 1 \Longrightarrow \big\|u(x)\big\| \leqslant k.$$

Remarque D'après l'exercice précédent, pour prouver qu'une application linéaire est continue, il suffit de prouver qu'elle est bornée sur la sphère unité.

Exemples

1. On munit $\mathbb{K}^n$ de la norme infinie. Considérons l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} u : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & (x_1, x_1+x_2, \dots, x_1+x_2+\cdots+x_n). \end{array}$$

   Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a $\big\|u(x)\big\|_\infty \leqslant n\,\|x\|_\infty$, donc u est continue.

2. Munissons $\mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{K})$ de la norme infinie. L'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t \end{array}$$

   est continue puisque, pour $f \in \mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{K})$, l'inégalité de la moyenne donne :

$$\big|\varphi(f)\big| \leqslant \left(\int_0^\pi |\sin t|\,\mathrm{d}t\right) \times \mathcal{N}_\infty(f) = 2\mathcal{N}_\infty(f).$$

Remarque Les résultats déjà vus sur les applications continues donnent que :

- l'ensemble des applications linéaires continues est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$; il est noté $\mathcal{L}_c(E,F)$;
- la composée de deux applications linéaires continues est continue.

301

Nous verrons dans le chapitre suivant que toute application linéaire dont l'espace de départ est de dimension finie est continue. L'exercice suivant montre que ce n'est *a priori* pas vrai sans l'hypothèse « dimension finie ».

p.278

Exercice 13 Dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$ muni de la norme un $\mathcal{N}_1$, considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{C}([0,1],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & f(1). \end{array}$$

En considérant les fonctions $f_n : t \mapsto t^n$, montrer que φ n'est pas continue.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Lemme 1 Supposons que f tende vers ℓ en a et montrons que ℓ est adhérent à $f(A)$. Il s'agit, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, de montrer que $f(A) \cap B_f(\ell, \varepsilon) \neq \varnothing$.
Comme $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

Il suffit donc de trouver au moins un élément $x \in A$ tel que $\|x - a\| \leqslant \eta$. Un tel x existe car a est adhérent à A.

Proposition 2

- Supposons que f tende vers ℓ en a. Soit (u_n) une suite tendant vers a. Montrons que $f(u_n) \to \ell$. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$, et montrons qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \big\|f(u_n) - \ell\big\| \leqslant \varepsilon. \qquad (\star)$$
Comme $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\|f(x) - \ell\big\| \leqslant \varepsilon.$$
La convergence de la suite (u_n) vers a assure alors l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|u_n - a\| \leqslant \eta.$$
Ce rang n_0 vérifie la propriété $(\star)$.
- Montrons l'autre implication par la contraposée : supposons que f ne tende pas vers ℓ en a, et construisons une suite (u_n) d'éléments de A tendant vers a telle que la suite $\big(f(u_n)\big)$ ne tende pas vers ℓ. Le fait que f ne tende pas vers ℓ en a s'écrit :
$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad \|f(x) - \ell\| > \varepsilon.$$
Cela nous assure de pouvoir trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un élément $u_n \in A$ vérifiant :
$$\|u_n - a\| \leqslant 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad \|f(u_n) - \ell\| \geqslant \varepsilon.$$
On construit ainsi une suite (u_n) d'éléments de A qui tend vers a et telle que la suite $\big(f(u_n)\big)$ ne tende pas vers ℓ.

Exercice 1 C'est immédiat par caractérisation séquentielle. En effet, si (u_n) est une suite d'éléments de B tendant vers a, alors en voyant (u_n) comme une suite à valeurs dans A, et comme $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, on a $f(u_n) \to \ell$, et donc $f_{|B}(u_n) \to \ell$.

Exercice 2 Soit $f : A \to \mathbb{R}$, et a adhérent à A. Contentons-nous de traiter le cas $+\infty$, le cas $-\infty$ s'en déduisant en considérant $-f$.

- Supposons que $f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$, et montrons que pour toute suite (u_n) d'éléments de A tendant vers a, on a $f(u_n) \to +\infty$. Soit (u_n) une telle suite.
Donnons-nous $M > 0$ et montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow f(u_n) \geqslant M.$$

Comme $f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$, on peut considérer $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant M.$$

Comme $u_n \to a$, on peut considérer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|u_n - a\| \leqslant \eta.$$

Il est alors clair que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $f(u_n) \geqslant M$.

- Réciproquement, supposons que f ne tende pas vers $+\infty$ en a. Cela signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \eta > 0 \quad \exists x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad f(x) < M.$$

Pour un tel M, on peut donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, trouver un élément $u_n \in A$ vérifiant $\|u_n - a\| \leqslant 2^{-n}$ et $f(u_n) < M$. On construit ainsi une suite (u_n) d'éléments de A tendant vers a et telle que la suite $\big(f(u_n)\big)$ soit majorée par M et donc ne tende pas vers $+\infty$.

Proposition 5 Traitons le cas « A non majorée » ; l'autre cas se traite de manière analogue. Supposons que A ne soit pas majorée.

- Supposons que $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$, et montrons que pour toute suite (u_n) d'éléments de A tendant vers $+\infty$, on a $f(u_n) \to \ell$. Soit (u_n) une telle suite.
Donnons-nous $\varepsilon > 0$ et montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \big\|f(u_n) - \ell\big\| \leqslant \varepsilon.$$

Comme $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on peut considérer $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in A \quad x \geqslant M \Longrightarrow \big\|f(x) - \ell\big\| \leqslant \varepsilon.$$

Comme $u_n \to +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \geqslant M.$$

Il est alors clair que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\big\|f(u_n) - \ell\big\| \leqslant \varepsilon$.

- Réciproquement, supposons que f ne tend pas vers ℓ en $+\infty$.
Cela signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in A \quad x \geqslant M \quad \text{et} \quad \|f(x) - \ell\| > \varepsilon.$$

Pour un tel ε, on peut donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, trouver un élément $u_n \in A$ vérifiant $u_n \geqslant n$ et $\big\|f(u_n) - \ell\big\| > \varepsilon$. On construit ainsi une suite (u_n) d'éléments de A tendant vers $+\infty$ et telle que la suite $\big(f(u_n)\big)$ ne tende pas vers ℓ.

Proposition 6

- Supposons que f tende en a vers $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$.
Soit (u_n) une suite à valeurs dans A tendant vers a. La suite $\big(f(u_n)\big)$, à valeurs dans l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_p$, converge alors vers ℓ.
D'après la proposition 11 de la page 204, il en résulte que les suites $\big(f_1(u_n)\big), \dots, \big(f_p(u_n)\big)$ tendent vers $\ell_1, \dots, \ell_p$ respectivement. Par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que les applications $f_1, \dots, f_p$ tendent respectivement vers $\ell_1, \dots, \ell_p$ en a.

- Réciproquement, supposons que $f_1, \dots, f_p$ tendent en a vers $\ell_1, \dots, \ell_p$ respectivement. Montrons que pour toute suite (u_n) d'éléments de A tendant vers a, on a $f(u_n) \to \ell$. Soit (u_n) une telle suite. Alors, les suites
$$\big(f_1(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, \big(f_p(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$
tendent respectivement vers $\ell_1, \dots, \ell_p$, ce qui entraîne (proposition 11 de la page 204) que la suite $\big(f(u_n)\big)$ tend vers ℓ.
D'où le résultat, par caractérisation séquentielle de la limite.

Exercice 3 Par hypothèse, f possède une limite finie en tout point de $A \setminus X$. Comme de plus f est continue sur X, f possède en tout $x \in X$ une limite finie égale à $f(x)$. L'application :
$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} : & A & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & \lim\limits_{x} f \end{array}$$
est donc un prolongement de f à A.
Montrons, par caractérisation séquentielle, que $\tilde{f}$ est continue en tout point de A. Soit (x_n) une suite d'éléments de A tendant vers x. Montrons que $\tilde{f}(x_n) \to \tilde{f}(x)$.

- Tout d'abord, justifions l'existence d'une suite (y_n) d'éléments de X vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|y_n - x_n\| \leqslant \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \big\|\tilde{f}(y_n) - \tilde{f}(x_n)\big\| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme X est dense dans A, on peut considérer une suite $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X tendant vers x_n. Comme $\tilde{f}(x_n) = \lim\limits_{x_n} f$, on a $f(z_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}(x_n)$, et donc, comme f et $\tilde{f}$ coïncident sur X, on a $\tilde{f}(z_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}(x_n)$. Les limites
$$z_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x_n \qquad \text{et} \qquad \tilde{f}(z_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}(x_n)$$
assurent alors l'existence d'un rang p_0 tel que :
$$p \geqslant p_0 \Longrightarrow \|z_p - x_n\| \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \big\|\tilde{f}(z_p) - \tilde{f}(x_n)\big\| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
Il suffit alors de choisir un $p \geqslant p_0$ (par exemple p_0) et de fixer $y_n = z_p$.
- $*$ Comme $x_n \to x$, la propriété
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|y_n - x_n\| \leqslant \frac{1}{n+1}$$
assure que la suite (y_n) tend également vers x. Par définition de $\tilde{f}$, on a donc $f(y_n) \to \tilde{f}(x)$.
  $*$ De plus, comme (y_n) est à valeurs dans X et que f et $\tilde{f}$ coïncident sur X, les suites $\big(f(y_n)\big)$ et $\big(\tilde{f}(y_n)\big)$ sont égales. On a donc $\tilde{f}(y_n) \to \tilde{f}(x)$.
  $*$ Enfin, la propriété
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big\|\tilde{f}(y_n) - \tilde{f}(x_n)\big\| \leqslant \frac{1}{n+1}$$
assure que la suite $\big(\tilde{f}(x_n)\big)$ converge également vers $\tilde{f}(x)$, ce qui est le résultat souhaité.

Proposition 7 Supposons que $f_1 \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f_2 \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2$. Soit (u_n) une suite d'éléments de A tendant vers a. Alors on a $f_1(u_n) \to \ell_1$ et $f_2(u_n) \to \ell_2$. Donc, par opérations sur les suites convergentes, la suite de terme général $\lambda_1 f(u_n)+\lambda_2 f_2(u_n)$ tend vers $\lambda_1 \ell_1+\lambda_2 \ell_2$. Par caractérisation séquentielle de la limite, on a donc :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{a}{\longrightarrow} \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2.$$

Proposition 8 Supposons que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ et $\varphi \underset{a}{\longrightarrow} \lambda$. Soit (u_n) une suite d'éléments de A tendant vers a. Alors on a $f(u_n) \to \ell$ et $\varphi(u_n) \to \lambda$. Donc, par produit d'une suite convergentes avec une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{K}$, la suite de terme général $\varphi(u_n)f(u_n)$ tend vers $\lambda \ell$. Par caractérisation séquentielle de la limite, on a donc :

$$\varphi \times f \underset{a}{\longrightarrow} \lambda \ell.$$

Proposition 9 Soit (u_n) une suite d'éléments de A tendant vers a.
On a alors $f(u_n) \to \ell$ et donc, comme $\ell \neq 0$, on a $\dfrac{1}{f(u_n)} \to \dfrac{1}{\ell}$.
Par caractérisation séquentielle de la limite, cela prouve que $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$.

Proposition 10 Soit (u_n) une suite d'éléments de A qui tend vers a. Alors, comme $f \underset{a}{\longrightarrow} b$, la suite $\big(f(u_n)\big)$ tend vers b. Au passage, cela montre que b est un point adhérent à $f(A)$, et donc à B. Puis, comme $g \underset{b}{\longrightarrow} \ell$, la suite de terme général $g\big(f(u_n)\big)$ tend vers ℓ.
Par caractérisation séquentielle de la limite, on a donc :

$$g \circ f \underset{a}{\longrightarrow} \lambda \ell.$$

Exercice 4 Pour tout $b \in B$, comme f est continue, donc en particulier continue en b, on a $f \underset{b}{\longrightarrow} f(b)$. Par stabilité de la limite par restriction (*cf.* exercice 1 de la page 257), on a donc également $f_{|B} \underset{b}{\longrightarrow} f(b) = f_{|B}(b)$. Par suite, $f_{|B}$ est continue en b.

Proposition 11 Soit $f : A \to F$ une application k-lipschitzienne ; d'après la première remarque ci-dessus on peut supposer $k > 0$. Montrons que f est continue. Pour cela, fixons $a \in A$ et $\varepsilon > 0$, et montrons qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\|f(x) - f(a)\big\| \leqslant \varepsilon.$$

Comme f est k-lipschitzienne, il est clair que $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ convient.

Exercice 5

- Il est clair que si u est k-lipschitzienne, alors pour tout $x \in E$ on a

$$\big\|u(x) - u(0)\big\| \leqslant k\|x - 0\|,$$

c'est-à-dire $\big\|u(x)\big\| \leqslant k\|x\|$.

- Réciproquement, supposons que : $\forall x \in E \quad \big\|u(x)\big\| \leqslant k\|x\|$.
  Pour x et y dans E, on a :

$$\begin{aligned}\big\|u(x)-u(y)\big\| &= \big\|u(x-y)\big\| && \text{(linéarité de } u\text{)}\\ &\leqslant k\|x-y\| && \text{(par hypothèse sur } u\text{)}\end{aligned}$$

  ce qui montre que u est k-lipschitzienne.

Exercice 6 Soit φ_1 et φ_2 deux normes équivalentes sur E, et ψ_1 et ψ_2 deux normes équivalentes sur F. Supposons que $f : A \subset E \to F$ soit lipschitzienne pour les normes φ_1 et ψ_1, et montrons que c'est également le cas pour les normes φ_2 et ψ_2.

Soit $k \geqslant 0$ tel que $\forall (x,y) \in A^2 \quad \psi_1\big(f(x)-f(y)\big) \leqslant k\,\varphi_1(x-y)$.

Soit α_1, α_2, β_1 et β_2 des réels strictement positifs vérifiant :

$$\alpha_1\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \alpha_2\varphi_1 \qquad \text{et} \qquad \beta_1\psi_1 \leqslant \psi_2 \leqslant \beta_2\psi_1.$$

Pour $(x,y) \in A^2$, on a :

$$\begin{aligned}\psi_2\big(f(x)-f(y)\big) \leqslant \beta_2\,\psi_1\big(f(x)-f(y)\big) &\leqslant \beta_2\,k\,\varphi_1(x-y)\\ &\leqslant \beta_2\,k\,\frac{1}{\alpha_1}\,\varphi_2(x-y),\end{aligned}$$

ce qui montre que f est lipschitzienne pour les normes φ_2 et ψ_2, de rapport $\dfrac{k\,\beta_2}{\alpha_1}$.

Exercice 7 Il suffit de constater que l'application $x \mapsto \big\|f(x)\big\|$ est la composée des deux applications continues f et $y \mapsto \|y\|$.

Proposition 14 Soit D une partie dense dans A.

Supposons que f et g coïncident sur D, c'est-à-dire vérifient :

$$\forall x \in D \quad f(x) = g(x),$$

et montrons que f et g sont égales, c'est-à-dire :

$$\forall x \in A \quad f(x) = g(x).$$

Soit $x \in A$. Par densité de D dans A, on peut considérer une suite (u_n) d'éléments de A qui tend vers x. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) = g(u_n).$$

Or, par continuité de f et g sur A et donc au point x, on a :

$$f(u_n) \to f(x) \qquad \text{et} \qquad g(u_n) \to g(x).$$

Par unicité de la limite d'une suite, on a donc $f(x) = g(x)$.

Exercice 8 Un sens étant évident, il suffit de montrer l'autre.

Supposons que $f : E \to F$ soit continue et vérifie :

$$\forall (x,y) \in E \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (\star)$$

et montrons que f est linéaire. Comme f vérifie $(\star)$, il suffit de montrer que :

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Fixons $x \in E$ et montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

- Tout d'abord, on remarque $f(0) = 0$, car $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$.
  On remarque également que f vérifie $\forall y \in E \quad f(-y) = -f(y)$, car :
  $$f(y) + f(-y) = f(y - y) = f(0) = 0.$$
- Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(nx) = nf(x)$.
- Le résultat précédent s'étend :
  - d'abord pour $p \in \mathbb{Z}$, en notant $n = -p$ et en écrivant :
    $$f(px) = -f(nx) = -\big(nf(x)\big) = pf(x) \ ;$$
  - ensuite pour $q \in \mathbb{Q}$, en notant $q = \dfrac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et en écrivant :
    $$bf(qx) = f(bqx) = f(ax) = af(x).$$

  À ce stade, on a donc :
  $$\forall q \in \mathbb{Q} \quad f(qx) = qf(x).$$
- Un argument de continuité permet alors d'étendre le résultat précédent à $\mathbb{R}$ tout entier. Pour cela, il suffit de constater que les applications :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & f(\lambda x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array}$$
  sont continues et coïncident sur $\mathbb{Q}$; comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, elles coïncident donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Proposition 15

1. Supposons f continue. Soit Y un fermé de F. Montrons que $f^{-1}(Y)$ est un fermé relatif de A, c'est-à-dire peut s'écrire comme l'intersection de A avec un fermé de E. Montrons qu'en notant X l'adhérence de $f^{-1}(Y)$, on a $f^{-1}(Y) = A \cap X$.
   - L'inclusion $f^{-1}(Y) \subset A \cap X$ est évidente, car les deux inclusions $f^{-1}(Y) \subset A$ et $f^{-1}(Y) \subset X$ le sont.
   - Montrons l'autre inclusion. Soit $x \in A \cap X$. Comme $x \in X$ et par définition de X, il existe une suite (u_n) d'éléments de $f^{-1}(Y)$ qui tend vers x. Par définition de $f^{-1}(Y)$, on peut alors considérer une suite (b_n) d'éléments de Y vérifiant :
     $$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) = b_n.$$
     Comme $u_n \to x$, et par continuité de f au point x, on a alors $b_n \to f(x)$. Comme Y est un fermé, il en résulte que $f(x) \in Y$, et donc $x \in f^{-1}(Y)$.
2. Soit U un ouvert de F. Montrons que $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif de A.
   Soit Y le complémentaire de U dans F. D'après le premier point déjà démontré, l'image réciproque par de Y par f est un fermé relatif de A, c'est-à-dire qu'il existe un fermé X de E tel que :
   $$f^{-1}(Y) = A \cap X.$$
   On a alors :
   $$f^{-1}(U) = f^{-1}(F \setminus Y) = A \setminus f^{-1}(Y) = A \setminus (A \cap X) = A \cap (E \setminus X).$$
   Comme $E \setminus X$ est un ouvert, cela montre le résultat souhaité.

Exercice 9

1. Supposons que l'image par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A, et montrons que f est continue en tout point de A.
   Pour cela, donnons-nous $a \in A$ et $\varepsilon > 0$, et montrons qu'il existe $\eta > 0$ tel que :
   $$\forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\|f(x) - f(a)\big\| \leqslant \varepsilon. \qquad (\star)$$
   Soit $\varepsilon > 0$. La boule $B\big(f(a), \varepsilon\big)$ est un ouvert de F, donc son image réciproque par f est un ouvert relatif de A, donc s'écrit sous la forme $A \cap U$, avec U un ouvert de E. Comme U est ouvert et que $a \in U$, on peut considérer $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset U$. Il est alors clair que η vérifie la propriété $(\star)$.
2. Il a été vu dans la démontration du second point de la proposition 15 de la page 267 que si l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif de A, alors l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A. On est alors ramené au premier point déjà démontré.

Exercice 10

1. Pour $x \in A$, on a $d(x, A) = 0$, et, comme $x \notin B$ et que B est fermé, on a $d(x, B) > 0$ (*cf.* exercice 30 de la page 209), et donc $\varphi(x) < 0$. De même, pour $x \in B$, on a $\varphi(x) > 0$.
2. D'après la première question, on a $A \subset \varphi^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ et $B \subset \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$. De plus, par opérations sur les applications continues, la fonction φ est continue sur E. Il en résulte que $U = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ et $V = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ sont des ouverts.
   Ils sont disjoints et contiennent respectivement A et B.

Exercice 11

1. • Supposons f uniformément continue. Soit (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments de A telles que $\|a_n - b_n\| \to 0$. Montrons que $\big\|f(a_n) - f(b_n)\big\| \to 0$ en revenant à la définition de la convergence vers 0 d'une suite : fixons $\varepsilon > 0$ et montrons qu'il existe un rang n_0 tel que :
   $$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \big\|f(a_n) - f(b_n)\big\| \leqslant \varepsilon.$$
   Comme f est uniformément continue, on peut considérer $\eta > 0$ tel que :
   $$\forall (x, y) \in A^2 \quad \|x - y\| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant \varepsilon.$$
   Comme $\|a_n - b_n\| \to 0$, on peut considérer un rang n_0 tel que :
   $$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|a_n - b_n\| \leqslant \eta.$$
   Cela fournit le résultat, car, pour $n \geqslant n_0$, il est clair que $\big\|f(a_n) - f(b_n)\big\| \leqslant \varepsilon$.
   • Réciproquement, supposons que f ne soit pas uniformément continue. Cela signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :
   $$\forall \eta > 0 \quad \exists (x, y) \in A^2 \quad \big(\|x - y\| < \eta \quad \text{et} \quad \|f(x) - f(y)\| > \varepsilon\big).$$
   En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut considérer $(a_n, b_n) \in A^2$ vérifiant :
   $$\|a_n - b_n\| \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \big\|f(a_n) - f(b_n)\big\| > \varepsilon.$$
   On peut ainsi construire deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de A vérifiant $\|a_n - b_n\| \to 0$ avec $\big\|f(a_n) - f(b_n)\big\|$ ne tendant pas vers 0.

2. En posant $a_n = n + \dfrac{1}{n}$ et $b_n = n$, on a $|a_n - b_n| \to 0$ et :
$$\left|a_n^2 - b_n^2\right| = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0,$$
ce qui prouve que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue.

Proposition 19

- Supposons qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que :
$$\forall x \in E \quad \big\|u(x)\big\| \leqslant k\,\|x\|.$$
Alors, pour tout $(x, y) \in E^2$, on a, par linéarité de u :
$$\big\|u(x) - u(y)\big\| = \big\|u(x-y)\big\| \leqslant k\|x-y\|.$$
Cela prouve que u est k-lipschitzienne donc continue.
- Réciproquement, supposons u continue. En particulier, u est continue en 0, donc il existe $\eta > 0$ vérifiant :
$$\forall x \in E \quad \|x\| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\|u(x)\big\| \leqslant 1.$$
Pour tout vecteur $x \in E$ non nul, on a alors $u\left(\dfrac{\eta}{\|x\|}\,x\right) \leqslant 1$ puis par linéarité de u :
$$\big\|u(x)\big\| \leqslant k\,\|x\| \quad \text{avec} \quad k = \frac{1}{\eta}\cdot$$
Cette inégalité étant aussi vérifiée pour $x = 0$, cela prouve le résultat.

Exercice 12

- Si u est continue, alors, d'après la proposition 19 de la page 269, il existe $k \geqslant 0$ telle que :
$$\forall x \in E \quad \big\|u(x)\big\| \leqslant k\,\|x\|.$$
On a alors immédiatement :
$$\forall x \in E \quad \|x\| = 1 \Longrightarrow \big\|u(x)\big\| \leqslant k.$$
- Réciproquement, supposons qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que :
$$\forall x \in E \quad \|x\| = 1 \Longrightarrow \big\|u(x)\big\| \leqslant k.$$
Alors, pour tout vecteur x non nul, on a $u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \leqslant k$, ce qui, par linéarité de u, donne :
$$\big\|u(x)\big\| \leqslant k\,\|x\|.$$
Cette dernière inégalité étant aussi vérifiée pour $x = 0$, cela prouve, grâce à la proposition 19 de la page 269, que u est continue.

Exercice 13 Il est clair que l'application φ est linéaire. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\varphi(f_n) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_1(f_n) = \frac{1}{n+1}\cdot$$
S'il existait une constante $k \geqslant 0$ telle que $\forall f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K}) \quad \big|\varphi(f)\big| \leqslant k\mathcal{N}_1(f)$, alors on aurait : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leqslant \dfrac{k}{n+1}$, ce qui est faux. Donc φ n'est pas continue.

S'entraîner et approfondir

5.1 On se place dans l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{K}$. Les applications suivantes :

$$\varphi_1 : f \mapsto f(1) \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : f \mapsto \int_0^1 f$$

sont-elles continues pour la norme $\mathcal{N}_\infty$? pour la norme $\mathcal{N}_1$?

5.2 Soit E et F deux espaces vectoriels normés et $f : A \to F$ une application continue, où A est une partie de E. Montrer que l'image par f d'une partie dense dans A est dense dans $f(A)$.

5.3 *Séparation de fermés disjoints*
Soit E un espace vectoriel normé. On considère A et B deux fermés de E.

1. Montrer qu'il existe une fonction continue $f : E \to [0,1]$ vérifiant :

$$\forall x \in A \quad f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in B \quad f(x) = 1.$$

Indication : définir f à l'aide des applications $x \mapsto d(x,A)$ et $x \mapsto d(x,B)$.

2. En déduire qu'il existe deux ouverts U et V de E vérifiant :

$$A \subset U, \quad B \subset V \quad \text{et} \quad U \cap V = \varnothing.$$

5.4 Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E. Montrer que u est continue si, et seulement si, la partie $A = \{x \in E \mid \|u(x)\| = 1\}$ est un fermé de E.

⋆ **5.5** Soit φ une forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E. Montrer que φ est continue si, et seulement si, son noyau est un fermé de E.

5.6 *Norme subordonnée*
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{LC}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F, dont on a vu que c'était un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

Pour $u \in \mathcal{LC}(E,F)$, on définit :

$$\|u\| = \sup\big\{\|u(x)\| \,;\, x \in B_f(0,1)\big\}.$$

1. Justifier que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{LC}(E,F) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ u & \longmapsto & \|u\| \end{array}$ est bien définie et que c'est une norme sur $\mathcal{LC}(E,F)$.

Cette norme est appelée **norme subordonnée** aux normes de E et F.

2. Montrer que $\|u\|$ est le plus petit élément de l'ensemble des réels $k \geqslant 0$ vérifiant $\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leqslant k\|x\|$.
3. Soit $u \in \mathcal{LC}(E,F)$ et $v \in \mathcal{LC}(F,G)$. Montrer que :
$$\|v \circ u\| \leqslant \|u\| \times \|v\|.$$
4. Donner un exemple où l'inégalité précédente est stricte.

★ **5.7** On note ℓ^1 l'espace des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum x_n$ converge absolument. On munit ℓ^1 de la norme :
$$\|x\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $e^{(n)}$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice n qui vaut 1. Montrer que :
$$F = \text{Vect}\left(e^{(n)}\,;\ n \in \mathbb{N}\right)$$
est dense dans ℓ^1.
2. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Montrer que l'application :
$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & \ell^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n \end{array}$$
est une forme linéaire continue sur ℓ^1.
3. Réciproquement, montrer que toute forme linéaire continue sur ℓ^1 est de la forme φ_a avec a une suite réelle bornée.

★ **5.8** Soit $n \geqslant 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme infinie. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'on note u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Montrer que u est continu et exprimer, en fonction des coefficients de A, la constante k minimale vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \left\|u(x)\right\|_\infty \leqslant k\,\|x\|_\infty.$$

5.9 Munissons $\mathbb{R}^2$ d'une de ses normes usuelles.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note f_x et f_y les applications partielles :
$$\begin{array}{rccc} f_x : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} f_y : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(t,y) \end{array}$$

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que si f est continue en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors ses applications partielles f_x et f_y sont continues respectivement en y et en x.

L'objectif de la suite de l'exercice est de montrer que la réciproque du résultat précédent est fausse. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(0,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

2. Vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les applications partielles f_x et f_y sont continues.
3. Montrer que, pourtant, l'application f n'est pas continue.

5.10 *Une limite dans chaque direction, mais pas de limite*
Munissons $\mathbb{R}^2$ d'une de ses normes usuelles. Notons Δ la première bissectrice, *i.e.* :

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

et considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \quad f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right\}$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} f_\theta & : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & r & \longmapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}$$

possède une limite en 0.
2. Montrer que, pourtant, f ne possède pas de limite en $(0,0)$.

Solution des exercices

5.1 Les applications φ_1 et φ_2 sont linéaires. On peut donc utiliser la caractérisation de la continuité des applications linéaires (*cf.* la proposition 19 de la page 269).

- **Pour la norme $\mathcal{N}_\infty$.** Les applications φ_1 et φ_2 considérées sont continues car, pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$:

$$\big|\varphi_1(f)\big| = \big|f(1)\big| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f) \qquad \text{et} \qquad \big|\varphi_2(f)\big| = \left|\int_0^1 f\right| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f).$$

- **Pour la norme $\mathcal{N}_1$.**
  - L'application φ_2 est continue car, pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$, on a :

$$\big|\varphi_2(f)\big| = \left|\int_0^1 f\right| \leqslant \mathcal{N}_1(f).$$

  - En revanche, en posant $f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{K}, \\ x & \longmapsto & (n+1)x^n \end{array}$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{N}_1(f_n) = 1 \quad \text{et} \quad \big|\varphi_1(f_n)\big| = n+1.$$

  Cela prouve que φ_1 n'est pas continue.

5.2 Soit D une partie dense dans A. Montrer par caractérisation séquentielle que $f(D)$ est dense dans $f(A)$. Soit $y \in f(A)$. Considérons $a \in A$, un antécédent de y par f. Comme D est dense dans A, il existe une suite (u_n) d'éléments de D convergeant vers a. Comme f est continue et par composition de limites, on a alors

$$f(u_n) \to f(a) = y.$$

Comme $\big(f(u_n)\big)$ est une suite d'éléments de $f(D)$, cela prouve la densité de $f(D)$ dans $f(A)$.

5.3 1. Puisque A et B sont des fermés, on sait, d'après l'exercice 30 de la page 209, que :

$$\forall x \in E \setminus A \quad d(x,A) > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in E \setminus B \quad d(x,B) > 0.$$

Comme A et B sont disjoints, il en résulte que :

$$\forall x \in E \quad d(x,A) + d(x,B) > 0.$$

On peut alors considérer l'application $f : E \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E \quad f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Cette application est continue (comme quotient d'application continues) et vérifie :

$$\forall x \in A \quad f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in B \quad f(x) = 1.$$

2. Reprenons l'application précédente et posons :

$$U = f^{-1}\Big(\Big]-\infty, \frac{1}{2}\Big[\Big) \qquad \text{et} \qquad V = f^{-1}\Big(\Big]\frac{1}{2}, +\infty\Big[\Big).$$

Les ensembles U et V ainsi définis sont disjoints, contiennent respectivement A et B, et sont des ouverts de E (comme images réciproques d'ouverts de $\mathbb{R}$ par l'application continue f).

5.4 • Si u est continue, alors A est un fermé de E, comme image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue
$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|u(x)\|. \end{array}$$

• Réciproquement, supposons que u ne soit pas continue. Alors, u n'est pas bornée sur la boule $B_f(0,1)$ (*cf.* exercice 12 de la page 269). Cela signifie qu'on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $B_f(0,1)$ telle que $\|u(x_n)\| \to +\infty$.
En posant alors (pour n assez grand de telle sorte que $u(x_n) \neq 0$) :

$$y_n = \frac{x_n}{\|u(x_n)\|},$$

on obtient une suite (y_n) d'éléments de A tendant vers 0. Comme $0 \notin A$, cela prouve que A n'est pas un fermé de E.

5.5 Si φ est l'application nulle, alors elle est continue et son noyau est un fermé (car c'est l'espace E lui-même). Supposons désormais φ non nulle.

• On a $\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}\big(\{0\}\big)$ donc, si φ est continue, alors son noyau est un fermé en tant qu'image réciproque par φ du fermé $\{0\}$.

• Réciproquement, supposons que φ ne soit pas continue. Cela signifie que φ n'est pas bornée sur la boule unité $B_f(0,1)$ de E (*cf.* exercice 12 de la page 269).
Il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $B_f(0,1)$ telle que $\big\|\varphi(x_n)\big\| \to +\infty$.
Comme $\big\|\varphi(x_n)\big\| \to +\infty$, on peut considérer un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \varphi(x_n) \notin \operatorname{Ker}\varphi.$$

Pour $n \geqslant n_0$, posons alors $y_n = x_{n_0} - \dfrac{\varphi(x_{n_0})}{\varphi(x_n)} x_n$.
On constate alors que la suite $(y_n)_{n\geqslant n_0}$ est à valeurs dans $\operatorname{Ker}\varphi$ et converge vers $x_{n_0} \notin \operatorname{Ker}\varphi$. Cela prouve que $\operatorname{Ker}\varphi$ n'est pas un fermé de E.

5.6 1. • Pour $u \in \mathcal{LC}(E,F)$, la continuité de u assure que u est bornée sur $B_f(0,1)$; cela justifie la définition de $\|u\|$ (comme borne supérieure d'une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$).

• **Séparation.** Si $\|u\| = 0$, alors on a :

$$\forall x \in B_f(0,1) \quad u(x) = 0,$$

ce qui, par linéarité de u, entraîne que u est nulle.

- **Homogénéité.** Pour $u \in \mathcal{LC}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$$\begin{aligned}\|\lambda u\| &= \sup\big\{\|(\lambda u)(x)\|\,;\ x \in B_f(0,1)\big\}\\ &= \sup\big\{|\lambda|\,\|u(x)\|\,;\ x \in B_f(0,1)\big\}\\ &= |\lambda|\,\sup\big\{\|u(x)\|\,;\ x \in B_f(0,1)\big\} = |\lambda|\,\|u\|.\end{aligned}$$
- **Inégalité triangulaire.** Soit $(u,v) \in \mathcal{LC}(E,F)^2$. Par inégalité triangulaire sur la norme de F, on a :
$$\forall x \in B_f(0,1) \quad \|u(x)+v(x)\| \leqslant \|u(x)\| + \|v(x)\|,$$
et donc :
$$\|u+v\| = \sup_{x\in B_f(0,1)} \big\{\|u(x)+v(x)\|\big\} \leqslant \sup_{x\in B_f(0,1)} \big\{\|u(x)\| + \|v(x)\|\big\}$$
Cela donne le résultat souhaité car on a d'autre part :
$$\begin{aligned}\sup_{x\in B_f(0,1)} \big\{\|u(x)\| + \|v(x)\|\big\} &\leqslant \sup_{x\in B_f(0,1)} \big\{\|u(x)\|\big\} + \sup_{x\in B_f(0,1)} \big\{\|v(x)\|\big\}\\ &= \|u\| + \|v\|.\end{aligned}$$

2. • Tout d'abord, montrons que l'on a :
$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leqslant \|u\| \times \|x\|. \qquad (\star)$$
Soit $x \in E$.
  * Si $x = 0$, alors l'inégalité ci-dessus est trivialement vérifiée.
  * Si $x \neq 0$, alors, comme $\dfrac{x}{\|x\|}$ est unitaire et par définition de $\|u\|$, on a :
$$u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leqslant \|u\|.$$
En multipliant par $\|x\|$ et par linéarité de u, on obtient $(\star)$.
  * Considérons maintenant k vérifiant :
$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leqslant k\,\|x\|,$$
et montrons que $k \geqslant \|u\|$. La propriété vérifiée par k donne *a fortiori* :
$$\forall x \in B_f(0,1) \quad \|u(x)\| \leqslant k.$$
Le réel k majore donc l'ensemble $\big\{\|u(x)\|\,;\ x \in B_f(0,1)\big\}$ dont la borne supérieure est $\|u\|$. Donc $k \geqslant \|u\|$.

3. Le résultat de la question 2 appliquée à $v \circ u$ nous dit qu'il suffit de montrer que le réel $\|u\| \times \|v\|$ vérifie :
$$\forall x \in E \quad \|v \circ u(x)\| \leqslant \big(\|u\| \times \|v\|\big)\,\|x\|.$$
Soit $x \in E$. D'après la question 2 (appliquée successivement à v et u), on a :
$$\begin{aligned}\|v \circ u(x)\| = \big\|v\big(u(x)\big)\big\| &\leqslant \|v\| \times \big\|u(x)\big\|\\ &\leqslant \|v\| \times \|u\| \times \|x\|,\end{aligned}$$
d'où le résultat.

4. Si l'on prend u nilpotent d'indice 2 et $v = u$, alors on a :
$$\|v \circ u\| = 0 \quad \text{bien que} \quad \|v\| \times \|u\| \neq 0.$$

5.7 1. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Pour $N \in \mathbb{N}$, notons $u^{(N)} = \sum_{n=0}^{N} x_n e^{(n)}$.

On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\left\|x - u^{(N)}\right\| = \left\|x - \sum_{n=0}^{N} x_n e_n\right\| = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|$$

Comme la série $\sum |x_n|$ converge, on en déduit que $\left\|x - u^{(N)}\right\| \to 0$. L'élément x est donc limite de la suite $\left(u^{(N)}\right)$ d'éléments de F.
Cela prouve que F est dense dans ℓ^1.

2. Comme a est une suite bornée, on peut considérer $M \geqslant 0$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant M.$$

Soit $x \in \ell^1$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n x_n| \leqslant M|x_n|.$$

Comme la série $\sum |x_n|$ converge, l'inégalité précédente assure, par comparaison, que la série $\sum |a_n x_n|$ converge également ; l'application φ_a est donc bien définie. On a de plus :

$$\left|\varphi_a(x)\right| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} M|x_n| = M\|x\|.$$

D'où la continuité de φ_a (*cf.* la proposition 19 de la page 269).

3. Soit φ une forme linéaire continue sur ℓ^1. Soit $x \in \ell^1$. Reprenons les notations $e^{(n)}$ introduites à la question 1. On a, d'après la réponse à cette même question :

$$u^{(N)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} x \quad \text{avec} \quad u^{(N)} = \sum_{n=0}^{N} x_n e^{(n)}.$$

Comme φ est continue, on a donc :

$$\varphi\left(u^{(N)}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x). \tag{1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \varphi(e_n)$. On a, par linéarité de φ :

$$\varphi\left(u^{(N)}\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n x_n.$$

Comme les suites $e^{(n)}$ sont toutes de norme 1 et que φ est continue, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc, par comparaison, la convergence absolue de la série $\sum x_n$ donne la convergence absolue de la série $\sum a_n x_n$ et donc sa convergence. On a ainsi :

$$\varphi\left(u^{(N)}\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n x_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n = \varphi_a(x). \tag{2}$$

D'après (1) et (2) et par unicité de la limite, on obtient $\varphi(x) = \varphi_a(x)$.
Cela étant vrai pour tout $x \in \ell^1$, on a $\varphi = \varphi_a$.

5.8 Notons $a_{i,j}$ les coefficients de A.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a, par définition de la norme infinie :

$$\big\|u(x)\big\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right|.$$

Par inégalité triangulaire puis en majorant $|x_j|$ par $\|x\|_\infty$, on a, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right) \times \|x\|_\infty.$$

On a donc :

$$\big\|u(x)\big\|_\infty \leqslant k\,\|x\|_\infty, \quad \text{avec} \quad k = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Cela prouve que u est continue (*cf.* la proposition 19 de la page 269).

- Montrons maintenant que la constante k obtenue précédemment est optimale. Pour cela, montrons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\big\|u(x)\big\|_\infty = k\,\|x\|_\infty.$$

Par définition de k, il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que :

$$k = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|.$$

En considérant alors le vecteur x dont les composantes valent ± 1, les signes étant choisis de telle sorte que la j-ème composante de x soit de même signe que $a_{i_0,j}$, on constate que la i_0-ème composante du vecteur $u(x)$ vaut k, ce qui assure que :

$$\big\|u(x)\big\|_\infty \geqslant k.$$

Puisque $\|x\|_\infty = 1$, on obtient $\big\|u(x)\big\|_\infty \geqslant k\|x\|_\infty$.
L'inégalité $\big\|u(x)\big\|_\infty \leqslant k\|x\|_\infty$ étant vérifiée d'après la première partie du raisonnement, on obtient :

$$\big\|u(x)\big\|_\infty = k\|x\|_\infty.$$

5.9 1. • Constatons que :

$$f_x = f \circ \varphi_1 \quad \text{avec} \quad \varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x,t). \end{array}$$

La continuité de φ_1 est évidente (par exemple, au sens de chacune des normes usuelles de $\mathbb{R}^2$, φ_1 est 1-lipschitzienne). Par continuité de φ_1 en y et de f en $\varphi_1(y) = (x,y)$, l'application f_x est continue en y.

- Pour justifier la continuité de f_y en x, on procède de même en constatant que :

$$f_y = f \circ \varphi_2 \quad \text{avec} \quad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t,y). \end{array}$$

2. Les cas de f_x et f_y se traitent de la même manière. Intéressons-nous à f_x.
   - Pour $x \in \mathbb{R}^*$, la continuité de f_x s'obtient par opérations sur les fonctions continues, puisque :
   $$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_x(t) = \frac{xt}{x^2+t^2}.$$
   - Pour la continuité de f_0, constatons que :
   $$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad f_0(t) = \frac{0 \times t}{0^2 + yt^2} = 0 = f(0,0) = f_0(0).$$
   L'application f_0 est donc l'application nulle ; par suite, elle est continue.
3. Montrons que f n'est pas continue au point $(0,0)$.
   Remarquons que :
   $$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad f(t,t) = \frac{t \times t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}.$$
   En notant g la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (t,t) \end{array}$, on constate que la fonction $f \circ g$ n'est pas continue puisqu'elle vaut $\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^*$, et 0 en 0.
   Comme g est continue, il en résulte que f ne peut pas l'être. Plus précisément, comme la fonction $f \circ g$ n'est pas continue 0, la fonction f n'est pas continue au point $g(0)$, *i.e.* au point $(0,0)$.

5.10 1. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \right\}$. Pour $r \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$f_\theta(r) = \frac{r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta}{r\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{r}{\cos\theta - \sin\theta}.$$
Il en résulte que la fonction f_θ tend vers 0 en 0.

2. - De la question précédente, il résulte que si f admet une limite en $(0,0)$, celle-ci vaut nécessairement 0.
   - D'autre part, on constate qu'en posant $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \\ t & \longmapsto & (t+t^2, t) \end{array}$, on a :
   $$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad (f \circ g)(t) = \frac{(t+t^2)^2 + t^2}{(t+t^2) - t} = 2 + 2t + t^2.$$
   La fonction $f \circ g$ tend donc vers 2 en 0. Comme g tend vers $(0,0)$ en 0, il s'ensuit que si f admet une limite en $(0,0)$, alors celle-ci vaut nécessairement 2.

Des deux points précédents on déduit que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

Chapitre 6 : Compacité, connexité par arcs, dimension finie

I Compacité 290
1 Définition 290
2 Applications continues sur une partie compacte . . 293
II Connexité par arcs 295
1 Chemins 295
2 Composantes connexes par arcs 296
3 Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ 297
4 Image continue d'un connexe par arcs 298
III Espaces vectoriels normés de dimension finie . . . 299
1 Équivalence des normes 299
2 Utilisation des coordonnées dans une base 299
3 Parties compactes en dimension finie 301
4 Continuité des applications linéaires, polynomiales et multilinéaires 301
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 306
Exercices 319

Compacité, connexité par arcs, dimension finie



Ce chapitre présente les notions de compacité et de connexité par arcs. En particulier, il propose des généralisations des deux résultats suivants vus en première année :

- le théorème affirmant que l'image d'un segment par une application continue est un segment (généralisé via la notion de compacité) ;
- le théorème des valeurs intermédiaires (généralisé via la notion de connexité par arcs).

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

I Compacité

1 Définition

Définition 1

Une partie A de E est dite **compacte** si toute suite d'éléments de A possède au moins une valeur d'adhérence dans A.

Terminologie On dit aussi que A est un **compact** de E.

En d'autres termes, une partie A est compacte si toute suite d'éléments de A possède une sous-suite convergente dont la limite appartient à A.

Remarque La définition d'une partie compacte s'appuie sur la convergence de suites. Elle dépend donc de la norme utilisée. Cependant, deux normes équivalentes définissent les mêmes parties compactes (ainsi, si E est dimension finie, il n'est pas nécessaire de préciser la norme utilisée).

Attention Pour montrer qu'une partie est compacte, il ne suffit pas de montrer que toute suite possède une sous-suite convergente, il faut aussi montrer que la limite de cette sous-suite appartient à A.

Exemples

1. L'ensemble vide est compact. En effet, comme il n'existe aucune suite à valeurs dans cet ensemble, une telle suite possède toutes les propriétés que l'on veut, en particulier celle d'admettre une valeur d'adhérence appartenant à l'ensemble vide.
2. Tout singleton est compact. Plus généralement, tout partie finie est compacte.
3. Tout segment de $\mathbb{R}$ est compact : c'est ce qu'affirme le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites à valeurs réelles.
4. Plus généralement, toute partie fermée bornée de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ est compacte. En effet, si A est une partie bornée et si (a_n) est une suite d'éléments de A, alors le théorème de Bolzano-Weierstrass assure que l'on peut extraire de (a_n) une sous-suite convergente. Si de plus A est un fermé, alors la limite de cette sous-suite appartient nécessairement dans A.

p.306

Exercice 1 Soit F un sous-espace vectoriel de E, et A une partie de F. Montrer que A est un compact de E si, et seulement si, A est un compact de F.

Remarque L'exercice précédent met en évidence le caractère intrinsèque de la notion de compact : le caractère compact d'une partie ne dépend que de la norme utilisée, et non de l'espace vectoriel normé E dans lequel on se place. Sur ce point, la notion de compact diffère de la notion d'ouvert et de fermé. Par exemple :

- étant donnés deux réels a et b vérifiant $a < b$, l'intervalle ouvert $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors que ce n'est pas un ouvert de $\mathbb{C}$ (*cf.* exercice 24 de la page 207) ;
- l'exercice 18 de la page 301 fournit un exemple de sous-espace vectoriel de E qui n'est pas un fermé de E (et qui est pourtant évidemment un fermé de lui-même !)

Théorème 1

Une suite à valeurs dans une partie compacte est convergente si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.

Principe de démonstration. Pour le sens non trivial : si une suite possède une unique valeur d'adhérence a mais ne converge pas, alors on peut en extraire une sous-suite ne possédant pas a comme valeur d'adhérence, et donc qui en possède une autre...

Démonstration page 306

Proposition 2

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Principe de démonstration. Par l'absurde...

Démonstration page 306

Attention La réciproque de la proposition 2 est vraie si E est de dimension finie (*cf.* le théorème 19 de la page 301), mais fausse dans le cas général, comme le montre l'exercice 2.

Remarque Dans l'énoncé de la proposition 2, il faudrait en toute rigueur préciser « fermée *dans* E », puisque la notion de fermé dépend a priori de l'espace vectoriel dans lequel on travaille. Cependant, puisque la notion de compact, elle, n'en dépend pas, la conclusion est valable quel que soit l'espace vectoriel : ainsi, une partie compacte est un fermé de n'importe quel espace vectoriel qui la contient.

Point méthode

Si une suite (u_n) est telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \neq p \Longrightarrow \|u_n - u_p\| \geqslant \alpha,$$

alors (u_n) ne possède aucune sous-suite convergente. Ainsi, pour montrer qu'une partie A n'est pas compacte, il suffit d'exhiber une suite d'éléments de A vérifiant la propriété ci-dessus (*cf.* exercice 2).

p.306

Exercice 2 *Une partie fermée et bornée mais non compacte*

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right\|_\infty = \max_{k \in [\![0,n]\!]} |a_k|$.

Notons $A = B_f(0,1)$ la boule unité fermée de E. Justifier que A, bien qu'étant une partie fermée et bornée, n'est pas compacte.

Proposition 3

Toute partie fermée d'une partie compacte est compacte.

Principe de démonstration. Rappelons qu'un fermé (relatif) de A est de la forme $A \cap F$ avec F un fermé de E.

Démonstration page 307

Proposition 4

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Si A et B sont respectivement des parties compactes de E et F, alors $A \times B$ est une partie compacte de l'espace produit $E \times F$ (muni de la norme produit).

Principe de démonstration. Étant donné une suite à valeurs dans $A \times B$, on procède à deux extractions successives.

Démonstration page 307

Une récurrence permet de généraliser le résultat précédent à un nombre fini quelconque de parties compactes :

Corollaire 5

Soit $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels normés. Si $A_1, \dots, A_p$ sont des parties compactes de $E_1, \dots, E_p$ respectivement, alors le produit $A_1 \times \cdots \times A_p$ est une partie compacte de l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ (muni de la norme produit).

Exemple Si $\left(u_n^{(1)}\right), \dots, \left(u_n^{(p)}\right)$ sont p suites respectivement à valeurs dans des compacts $A_1, \dots, A_n$, alors le résultat précédent appliqué à la suite (v_n) de terme général

$$v_n = \left(u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(p)}\right)$$

assure l'existence d'une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $\left(v_{\varphi(n)}\right)$ converge, c'est-à-dire telle que les suites $\left(u_{\varphi(n)}^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, \left(u_{\varphi(n)}^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

p.307

Exercice 3 *Parties compactes de $\mathbb{K}^n$ muni la norme infinie*

Montrer qu'une partie de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte si, et seulement si, c'est une partie fermée bornée.

Remarque Comme toutes les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes, le résultat de l'exercice précédent est valable quelle que soit la norme considérée (on obtient ainsi un cas particulier du théorème 19 de la page 301).

p.307

Exercice 4 *Application de l'exercice précédent*

Montrer que l'ensemble suivant est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$:

$$K = \left\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \;\middle|\; \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\right\}$$

2 Applications continues sur une partie compacte

Proposition 6 (Image d'un compact par une application continue)

L'image d'un compact par une application continue est un compact.

Démonstration page 307

Exemple : enveloppe convexe d'une famille finie

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie d'éléments de E. L'enveloppe convexe de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est, par définition, l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de $x_1, \dots, x_n$, *i.e.* les combinaisons linéaires $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ à coefficients positifs de somme 1 (*cf.* exercice 3.1 de la page 176).

Autrement dit, l'enveloppe convexe de $(x_1, \dots, x_n)$ est l'image du sous-ensemble :

$$K = \left\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \;\middle|\; \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\right\}$$

par l'application :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E \\ & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n. \end{array}$$

Étant donné que K est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ d'après l'exercice 4 de la page précédente) et que l'application f est continue, on en déduit que l'enveloppe convexe de $(x_1, \dots, x_n)$ est une partie compacte de E.

p.308

Exercice 5 Soit A une partie compacte de E, et $f : A \to F$ une application continue et injective. Notons $B = f(A)$ et considérons l'application $g : B \to E$ qui à un élément de B associe son unique antécédent par f.

1. Montrer que pour toute partie X de E, on a $g^{-1}(X) = f(X \cap A)$.
2. En déduire que g est continue.

Cas des fonctions à valeurs réelles

Corollaire 7 (Théorème des bornes atteintes)

Soit A une partie compacte non vide. Alors, toute application continue de A dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration page 308

Exemples

1. Soit A une partie compacte non vide de E, et $f : A \to F$ une application continue. Alors l'application $\|f\|$ est bornée et atteint ses bornes.
2. *Distance à un compact*
   Soit A une partie compacte non vide de E, et $x_0 \in E$. L'application $x \mapsto d(x_0, x)$ est continue, donc sa restriction à A est bornée et atteint ses bornes ; en particulier cette restriction est minorée et atteint sa borne inférieure. Cela assure l'existence de $a \in A$ tel que la distance de x_0 à A soit atteinte en a, *i.e.* :
   $$d(x_0, a) = \inf_{x \in A} d(x_0, x) = d(x_0, A).$$
3. *Distance entre deux compacts*
   Soit A et B deux compacts non vides de E. L'application :
   $$\begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & d(x, y) \end{array}$$
   est continue. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, cela assure l'existence d'un couple $(a, b) \in A \times B$ *réalisant la distance entre* A *et* B, c'est-à-dire tel que :
   $$d(a, b) = \inf_{(x,y) \in A \times B} d(x, y) = d(A, B).$$

p.308 **Exercice 6** Soit A un compact non vide. Montrer l'existence de $(a_1, a_2) \in A^2$ tel que le diamètre de A, noté $\delta(A)$, soit la distance de a_1 à a_2, c'est-à-dire tel que :

$$d(a_1, a_2) = \sup_{(x,y)\in A^2} d(x, y) = \delta(A).$$

p.308 **Exercice 7** Considérons la fonction g : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}. \end{array}$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $R > 0$ tel que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_f(0, R) \quad \big|f(x, y)\big| > a.$$
2. En utilisant alors le corollaire 7 de la page précédente, justifier que g possède un minimum global.

Uniforme continuité de toute application continue sur un compact

Théorème 8 (Théorème de Heine)

Toute application continue sur un compact est uniformément continue.

Démonstration page 309

II Connexité par arcs

1 Chemins

Définition 2

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé, ainsi que $x \in A$ et $y \in A$.

- Un **chemin joignant x à y dans A** est une application continue p, définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans A et telle que $p(a) = x$ et $p(b) = y$.
- Si un tel chemin existe, on dit que les points x et y sont **reliés par un chemin dans A**.

Exemple Si A est une partie convexe, alors deux points quelconques x et y de A sont reliés dans A par le chemin $\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & (1-t)\,x + t\,y. \end{array}$

p.309 **Exercice 8** *Changement de paramétrage*

Soit x et y deux points d'une partie A. Supposons qu'il existe un chemin $p : [a, b] \to A$ reliant x à y. Montrer que pour tout segment $[c, d]$ avec $c < d$, il existe un chemin $\widetilde{p} : [c, d] \to A$ reliant x à y.

Remarques Il résulte de l'exercice précédent que, lorsque deux points sont reliés par un chemin, on peut considérer un chemin défini sur n'importe quelle segment non réduit à un point. Il est assez courant de considérer un chemin défini sur le segment $[0,1]$.

2 Composantes connexes par arcs

Proposition 9

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé. La relation « x et y sont reliés par un chemin dans A » est une relation d'équivalence sur A.

Ses classes d'équivalences sont appelées les **composantes connexes par arcs de A**.

Démonstration page 309

Remarques

1. Par transitivité, pour montrer que deux points x et y de A sont reliés par un chemin dans A, il suffit de trouver une suite finie $(u_0,\dots,u_n)$ de points de A avec $u_0=x$, $u_n=y$ et telle que pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, u_k et u_{k+1} sont reliés par un chemin dans A.
2. Toute partie est la réunion de ses composantes connexes par arcs.
3. Les composantes connexes par arcs d'une partie sont deux à deux disjointes.

p.310

Exercice 9

Montrer que les composantes connexes par arcs d'un ouvert sont des ouverts.

Définition 3

On dit que A est **connexe par arcs** s'il n'a qu'une seule composante connexe par arcs, ou, de manière équivalente, si deux éléments quelconques de A sont reliés par un chemin dans A.

Exemples

1. Toute composante connexe par arcs est connexe par arcs.
2. Toute partie convexe est connexe par arcs.
3. Tout sous-espace affine d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.
4. Tout espace vectoriel normé est connexe par arcs.

p.310

Exercice 10 Soit $a\in\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ est-il connexe par arcs ? Quelles sont ses composantes connexes par arcs ?

p.310 **Exercice 11** Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ est connexe par arcs.

Remarque En particulier, l'ensemble $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.

p.310 **Exercice 12** Soit E un espace vectoriel normé de dimension au moins 2.

1. Montrer que $E \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.
2. En déduire que pour tout $a \in E$, l'ensemble $E \setminus \{a\}$ est connexe par arcs.

Attention En général, la réunion ou l'intersection de parties connexes par arcs ne sont pas connexes par arcs.

p.311 **Exercice 13** Soit A_1 et A_2 deux connexes par arcs d'intersection non vide. Montrer que $A_1 \cup A_2$ est connexe par arcs.

Définition 4

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé.

- Étant donné $a \in A$, on dit que est **étoilée par rapport à a** si :
$$\forall x \in A \quad [a, x] \subset A.$$
- On dit que A est **étoilée** s'il existe $a \in A$ tel que A soit étoilée par rapport à a.

p.311 **Exercice 14** Montrer que toute partie étoilée est connexe par arcs.

Remarque La réciproque du résultat de l'exercice précédent est fausse ; par exemple, dans $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 est connexe par arcs mais n'est pas étoilé.

3 Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$

Proposition 10

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Principe de démonstration. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont ses parties convexes. Il reste donc à montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs si, et seulement si, elle est convexe.

Démonstration page 311

p.311 **Exercice 15** Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux.

4 Image continue d'un connexe par arcs

Proposition 11

L'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Démonstration page 312

Exemple Si E est un espace vectoriel normé réel de dimension (éventuellement infinie) au moins 2, la sphère unité de E est connexe par arcs.
C'est en effet l'image de $E \setminus \{0\}$ (qui est connexe par arcs, d'après l'exercice 12 de la page précédente) par l'application continue :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E\setminus\{0\} & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{\|x\|}. \end{array}$$

Corollaire 12

Si f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors l'image par f de toute partie connexe par arcs est un intervalle.

Démonstration. C'est immédiat d'après la proposition 11 puisque les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. □

Remarque Ce résultat est une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires vu en première année disant que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

p.312 **Exercice 16** Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$.

p.312 **Exercice 17** Soit A une partie connexe par arcs de E.

1. Soit B une partie de A. Montrer que si B est à la fois un ouvert relatif à A et un fermé relatif à A, alors on a $B = \varnothing$ ou $B = A$.
2. Montrer que A ne peut pas s'écrire comme la réunion de deux ouverts relatifs non vides et disjoints.

III Espaces vectoriels normés de dimension finie

1 Équivalence des normes

Nous allons d'abord démontrer l'équivalence des normes dans $\mathbb{K}^p$, puis la généraliser à tout espace de dimension finie.

Énonçons tout d'abord le lemme suivant, qui a déjà été démontré précédemment (*cf.* exercice 3 de la page 293).

Lemme 13

Dans $\mathbb{K}^p$ muni de la norme infinie, toute partie fermée bornée est compacte.

Théorème 14

Toutes les normes de $\mathbb{K}^p$ sont équivalentes.

Principe de démonstration. Par transitivité, il suffit de montrer que toutes les normes sur $\mathbb{K}^p$ sont équivalentes à la norme infinie.

Démonstration (non exigible) page 313

Théorème 15

Dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration page 314

Remarque Le fait que dans un espace de dimension finie toutes les normes soient équivalentes entraîne que beaucoup de notions sont indépendantes de la norme choisie :

- caractère ouvert, fermé, borné d'une partie ;
- intérieur, adhérence, frontière d'une partie ;
- limites de suites, limites de fonctions, continuité ;
- parties compactes, connexes par arcs.

Pour évoquer ces notions, il n'est pas nécessaire de préciser la norme choisie. Ainsi, la phrase « Soit E un espace de dimension finie et A une partie bornée de E » a un sens : le caractère borné de A ne dépend pas de la norme dont E est muni.

2 Utilisation des coordonnées dans une base

Le résultat suivant indique que, dans un espace de dimension finie, la convergence d'une suite est équivalente à celle de ses suites coordonnées dans une base.

Proposition 16

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$. Soit (a_n) une suite à valeurs dans E. Notons $\left(a_n^{(1)}\right), \dots, \left(a_n^{(p)}\right)$ les suites « coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ », c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \sum_{k=1}^{p} a_n^{(k)}\, e_k.$$

Étant donné $\ell = \sum_{k=1}^{p} \ell_k\, e_k$ appartenant à E, il est équivalent de dire :

(*i*) la suite (a_n) converge vers ℓ ;

(*ii*) pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite $\left(a_n^{(k)}\right)$ converge vers ℓ_k.

Principe de démonstration. Démonstration page 314

Utiliser la norme infinie dans la base $\mathcal{B}$.

De la même façon, si f est une application à valeurs dans un espace de dimension finie, alors l'étude de la limite de f en un point, ou encore l'étude de la continuité de f, se ramène à celle de ses applications coordonnées dans une base.

Proposition 17

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, ainsi que A une partie de E. Soit $f : A \to E$ une application à valeurs dans E (A étant une partie quelconque d'un espace vectoriel normé). Notons $(f_1, \dots, f_p)$ les applications « coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}$ », c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall x \in A \quad f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x)\, e_k.$$

Pour $a \in A$ et $\ell = \sum_{k=1}^{p} \ell_k\, e_k$ appartenant à E, il est équivalent de dire :

(*i*) l'application f admet ℓ comme limite en a ;

(*ii*) pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, l'application f_k tend vers ℓ_k en a.

Principe de démonstration. Démonstration page 314

Utiliser la norme infinie dans la base $\mathcal{B}$.

3 Parties compactes en dimension finie

Théorème 18 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence, *i.e.* admet au moins une sous suite convergente.

Principe de démonstration. Démonstration page 314

Travailler avec la norme infinie dans une base et utiliser les suites coordonnées.

Théorème 19

Les parties compactes d'un espace vectoriel de dimension finie sont ses parties fermées bornées.

Principe de démonstration. Démonstration page 315

Un sens a déjà été prouvé. Pour l'autre, utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Proposition 20

Dans un espace vectoriel normé, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est un fermé.

Principe de démonstration. Par caractérisation séquentielle. Démonstration page 315

L'exercice suivant donne l'exemple d'un sous-espace vectoriel non fermé, ce qui justifie l'importance de l'hypothèse « F est de dimension finie » dans la proposition 20.

p.315

Exercice 18 *Un sous-espace vectoriel non fermé*

Soit E le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de la norme infinie $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

Montrer que l'ensemble F des suites presque nulles (*i.e.* nulles à partir d'un certain rang) est un sous-espace vectoriel de E qui n'est pas un fermé de E.

4 Continuité des applications linéaires, polynomiales et multilinéaires

Applications linéaires

Théorème 21

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.

Principe de démonstration. Utiliser la caractérisation de la continuité d'une application linéaire donnée par la proposition 19 de la page 269. Démonstration page 315

Exemple Si E est de dimension finie, alors toute forme linéaire est continue ; en particulier, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la forme linéaire « i-ème coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ » est continue :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k & \longmapsto & x_i. \end{array}$$

Fonctions polynomiales

On appelle fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$ toute application $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ s'écrivant comme une combinaison linéaire d'applications qui sont elles-mêmes des produits de fonctions coordonnées. Plus précisément :

Définition 5

Une application $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est dite **polynomiale** s'il existe une famille presque nulle de scalaires $(\lambda_{k_1,\dots,k_n})_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n}$ telle que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_{k_1,\dots,k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

Terminologie Avec les notations ci-dessus, si $f \neq 0$, le **degré** de f est :

$$\max\{k_1 + \cdots + k_n \mid \lambda_{k_1,\dots,k_n} \neq 0\}.$$

Par convention, le degré de l'application nulle vaut $-\infty$.

Exemple L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & xy - x^3z^4 + 4xyz^2 \end{array}$ est polynomiale de degré 7.

La notion de fonction polynomiale se généralise à n'importe quel espace de dimension finie :

Définition 6

Supposons E de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Une application $f : E \to \mathbb{K}$ est dite **polynomiale** s'il existe une famille presque nulle de scalaires $(\lambda_{k_1,\dots,k_n})_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n}$ telle que :

$$\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E \qquad f(x) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_{k_1,\dots,k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

Remarques

1. Reprenons les notations de la définition précédente. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons π_i la forme linéaire k-ième coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire :

$$\pi_i : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \sum_{k=1}^{n} x_k e_k & \longmapsto & x_i. \end{array}$$

Alors, l'application f s'exprime à l'aide des formes linéaires $\pi_1, \dots, \pi_n$:

$$f = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_{k_1,\dots,k_n} \pi_1^{k_1} \cdots \pi_n^{k_n}. \qquad (\star)$$

2. La définition précédente ne dépend pas de la base choisie. En effet, si $\widetilde{\mathcal{B}}$ désigne une autre base de E, et si $\widetilde{\pi_1}, \dots, \widetilde{\pi_n}$ désignent les formes linéaires coordonnées dans cette base, alors on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \pi_k \in \operatorname{Vect}\left(\widetilde{\pi_1}, \dots, \widetilde{\pi_n}\right).$$

Donc, si f vérifie une relation de la forme $(\star)$, en écrivant chaque π_k comme combinaison linéaire de $\widetilde{\pi_1}, \dots, \widetilde{\pi_n}$, on peut montrer que f vérifie encore une relation de la forme $(\star)$ vis-à-vis des $\widetilde{\pi_k}$ (évidement, avec a priori d'autres valeurs pour les $\lambda_{k_1,\dots,k_n}$).

3. Une application $f : E \to \mathbb{K}$ est polynomiale si, et seulement si, on peut l'écrire sous la forme :

$$f = g \circ \varphi,$$

avec $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ polynomiale et $\varphi : E \to \mathbb{K}^n$ l'application qui à un vecteur de E associe la n-liste de ses composantes dans une base $\mathcal{B}$ de E.

Toute fonction polynomiale s'obtient donc, par produits et combinaisons linéaires, à partir des formes linéaires coordonnées. Comme celles-ci sont continues (comme toute application linéaire en dimension finie), on obtient le résultat suivant :

Proposition 22

Toute application polynomiale est continue.

Corollaire 23

L'application $\det : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array}$ continue.

Démonstration page 316

p.316 **Exercice 19**

1. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \operatorname{Com} A \end{array}$ est continue.
2. En déduire que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$ est continue.

p.316 **Exercice 20** Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Remarque Sur la connexité par arcs et les ensembles $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, on pourra regarder les exercices 6.19 et 6.18.

Applications multilinéaires

Théorème 24

Soit $E_1, \dots, E_p$ et F des espaces vectoriels normés. Si $E_1, \dots, E_p$ sont de dimension finie, alors toute application p-linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F est continue.

Principe de démonstration. Si $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est p-linéaire, alors f s'exprime à l'aide des applications coordonnées dans une base. Démonstration page 317

Exemple Si E est de dimension finie, et si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors l'application

$$\begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & (u_1, \dots, u_n) \\ \mathbb{K} & \longmapsto & \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \end{array}$$

est continue.

p.317

Exercice 21

1. Justifier la continuité de l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto & {}^tA\,A. \end{array}$$

2. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 25

Soit $E_1, \dots, E_p$ et F des espaces vectoriels normés. Si $E_1, \dots, E_p$ sont de dimension finie et si f est une application p-linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F, alors il existe une constante positive C vérifiant :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \quad \|f(x_1, \dots, x_p)\| \leqslant C\|x_1\| \times \cdots \times \|x_p\|.$$

Principe de démonstration. Se ramener à étudier f sur la boule unité de $E_1 \times \cdots \times E_p$ muni de la norme produit. Démonstration page 318

Remarque Dans le corollaire 25, les normes choisies sur $E_1, \dots, E_p$ ont peu d'importance puisque $E_1, \dots, E_p$ sont supposés de dimension finie. En revanche, il est à noter que, bien que F ne soit pas supposé de dimension finie, le résultat est vrai quelle que soit la norme choisie.

p.318

Exercice 22 *Norme sous-multiplicative*

Soit $(E, +, \cdot, \times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie. En considérant l'application qui à un couple de deux éléments de E associe leur produit :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E^2 & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & x \times y, \end{array}$$

montrer qu'il existe une norme N sur E qui soit sous-multiplicative, c'est-à-dire vérifiant :

$$N(x \times y) \leqslant N(x)\, N(y).$$

Remarque Le résultat de cet exercice assure, en particulier, l'existence d'une norme sous-multiplicative sur les $\mathbb{K}$-algèbres de dimension finie suivantes :

$$\mathbb{K}_n[X], \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \mathcal{L}(\mathbb{K}^n).$$

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 C'est évident d'après la définition 1 de la page 290 : le fait que toute suite d'éléments de A possède une valeur d'adhérence dans A ne dépend pas du fait que l'on considère A comme une partie de E ou de F.

Théorème 1

- Un sens est évident : si (a_n) est une suite convergente, alors elle possède sa limite comme unique valeur d'adhérence.
- Montrons l'autre sens. Soit (a_n) une suite d'éléments de A possédant une unique valeur d'adhérence α ; montrons que (a_n) converge vers α.
  Par l'absurde : supposons que (a_n) ne converge pas vers α.
  Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que :
  $$\forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant n_0 \quad \|a_n - \alpha\| > \varepsilon.$$
  Cela permet de construire une sous-suite $(b_n) = \left(a_{\varphi(n)}\right)$ vérifiant :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|b_n - \alpha\| > \varepsilon. \qquad (\star)$$
  La suite (b_n) étant à valeurs dans le compact A, elle possède au moins une valeur d'adhérence β. La propriété $(\star)$ assure que $\beta \neq \alpha$. Comme β est valeur d'adhérence d'une sous-suite de (a_n), β est également valeur d'adhérence de (a_n). La suite (a_n) possède donc au moins deux valeurs d'adhérence, ce qui contredit l'hypothèse initiale. D'où le résultat.

Proposition 2

- Supposons que A ne soit pas une partie fermée. Alors on peut trouver une suite (a_n) d'éléments de A qui converge mais dont la limite n'appartient pas à A. L'unique valeur d'adhérence d'une suite convergente étant sa limite, la suite (a_n) ne possède pas de valeur d'adhérence dans A. Donc A n'est pas compacte.
- Supposons que A ne soit pas bornée. Alors on a :
  $$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad \|a\| > M.$$
  En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un élément a_n de A vérifiant $\|a_n\| > n$. On construit ainsi une suite (a_n) d'éléments de A vérifiant :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|a_n\| > n.$$
  Il est clair qu'une telle suite n'admet aucune sous-suite convergente : si $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ est une sous-suite de (a_n), alors on a :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|a_{\varphi(n)}\| \geqslant \varphi(n) \geqslant n,$$
  La sous-suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ n'est donc pas bornée, elle est donc divergente.

Exercice 2

- Tout d'abord, A est une boule fermée, donc A est une partie fermée et bornée.
- Considérons la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tous les éléments de la suite sont de norme 1, donc appartiennent à A. En revanche, pour tout $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_1 \neq n_2$, on a $\left\|X^{n_1} - X^{n_2}\right\| = 1$. Il est donc impossible d'extraire de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente. Donc A n'est pas compacte.

Proposition 3 Soit A une partie compacte, et B une partie fermée de A. On peut trouver F un fermé de E tel que $B = A \cap F$. Si (b_n) est une suite d'éléments de B, alors, étant donné que $B \subset A$ et que A est compacte, on peut extraire de (b_n) une sous-suite convergeant vers un élément de A. Comme (b_n) est une suite à valeurs dans F que F est un fermé, la limite de (b_n) appartient aussi à F. Comme $B = F \cap A$, la limite de (b_n) appartient finalement à B, ce qui prouve que B est compacte.

Proposition 4 Soit $\big((x_n, y_n)\big)$ une suite d'éléments de $A \times B$.

- Comme A est compacte, on peut extraire de (x_n) une sous-suite $\big(x_{\varphi_1(n)}\big)$ convergeant vers un élément a de A.
- Puis, comme B est compacte, on peut extraire de $\big(y_{\varphi_1(n)}\big)$ une sous-suite $\big(y_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}\big)$ convergeant vers un élément b de B.
- Comme $\big(x_{\varphi_1(n)}\big)$ converge vers a, il en est de même pour sa sous-suite $\big(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}\big)$. La suite de terme général $\big(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}, y_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}\big)$ est alors une sous-suite de $\big((x_n, y_n)\big)$ qui converge vers l'élément (a, b) de $A \times B$.

Cela montre que $A \times B$ est une partie compacte.

Exercice 3

- Un des sens est donné par la proposition 2 de la page 291 : pour qu'une partie soit compacte, il est nécessaire qu'elle soit fermée et bornée.
- Réciproquement, soit A est une partie fermée et bornée de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$.
  Alors, en considérant M un réel vérifiant :
  $$\forall a \in A \quad \|a\|_\infty \leqslant M,$$
  et en notant $D_f(0, M) = \{x \in \mathbb{K} \mid |x| \leqslant M\}$, on a $A \subset D_f(0, M)^n$. Comme $D_f(0, M)$ est un compact (en tant que partie fermée et bornée de $\mathbb{K}$), on en déduit que le produit $D_f(0, M)^n$ est un compact de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$.
  Alors, en tant que partie fermée d'une partie compacte, A est compacte.

Exercice 4 Travaillons avec la norme $\|\cdot\|_\infty$.

- L'ensemble K est borné car :
  $$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K \quad \big\|(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\big\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda_i| \leqslant 1.$$
- D'autre, part K est un fermé relatif de $(\mathbb{R}_+)^n$ car il s'écrit $\varphi^{-1}(\{1\})$ où φ est l'application continue :
  $$\begin{array}{rccc} \varphi & : & (\mathbb{R}_+)^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \longmapsto & \lambda_1 + \cdots + \lambda_n. \end{array}$$
  Comme $(\mathbb{R}_+)^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, il en résulte que K est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Donc, d'après l'exercice précédent, K est une partie compacte de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 6 Soit X une partie de E, $f : X \to F$ une application continue et A une partie compacte incluse dans X. Montrons que $f(A)$ est une partie compacte de F. Soit (b_n) une suite d'éléments de $f(A)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $a_n \in A$

tel que $f(a_n) = b_n$. Puisque A est compact, on peut extraire de (a_n) une sous-suite convergente $\big(a_{\varphi(n)}\big)$. Notons α la limite de $\big(a_{\varphi(n)}\big)$; alors, par continuité de f, on a $f\big(a_{\varphi(n)}\big) \to f(\alpha)$, c'est-à-dire $b_{\varphi(n)} \to f(\alpha)$. La suite (b_n) possède donc une valeur d'adhérence dans $f(A)$. Cela montre que $f(A)$ est compacte.

Exercice 5

1. Soit $X \subset E$. Montrer que $g^{-1}(X) = f(X \cap A)$ par double inclusion :
   - Soit $y \in g^{-1}(X)$. On a alors $g(y) \in X$. Par définition de g, on a aussi $g(y) \in A$, et donc $g(y) \in X \cap A$. Puis, comme $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f, on a $f\big(g(y)\big) = y$. Comme $g(y) \in X \cap A$, on a donc bien $y \in f(X \cap A)$.
   - Soit $y \in f(X \cap A)$. L'unique antécédent de y par f se situe alors dans $X \cap A$, donc dans X. On a donc $g(y) \in X$, c'est-à-dire $y \in g^{-1}(X)$.
2. Soit X une partie fermée de E. Montrons que $g^{-1}(X)$ est un fermé relatif de B. En tant que fermé relatif de A, l'intersection $X \cap A$ est compacte (*cf.* la proposition 3 de la page 292). Comme f est continue, la proposition 6 de la page 293 assure alors que $f(X \cap A)$ est une partie compacte de F, donc un fermé de F, donc un fermé de B. L'égalité obtenue à la question précédente :
$$g^{-1}(X) = f(X \cap A).$$
donne alors que $g^{-1}(X)$ est un fermé relatif de B. D'où la continuité de g.

Corollaire 7 Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue, où A est une partie compacte. D'après la proposition 6 de la page 293, l'image de A par f est un compact, donc :

- $f(A)$ est bornée, ce qui assure que f est bornée ;
- $f(A)$ est fermée, ce qui assure que les bornes de f sont atteintes.

Exercice 6 Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} A^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y). \end{array}$ La fonction f est continue et définie sur une partie compacte (comme A est compacte, A^2 l'est aussi).
Elle est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle admet un maximum, ce qui justifie l'existence d'un couple $(x,y) \in A^2$ tel que $\delta(A) = d(x,y)$.

Exercice 7

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On remarque que $g(x,y) = \varphi\big(\big\|(x,y)\big\|_2\big)$ avec $\varphi : r \mapsto \dfrac{e^{r^2}}{1+r^2}$.
   Par croissances comparées, on a $\varphi(r) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   On en déduit qu'il existe $R > 0$ tel que :
$$r > R \Longrightarrow \big|\varphi(r)\big| > a,$$
   et donc :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_f(0,R) \quad \big|g(x,y)\big| > a.$$

2. D'après la question précédente (pour $a = g(0,0)$), il existe $R > 0$ tel que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_f(0,R) \quad \big|g(x,y)\big| > g(0,0). \qquad (\star)$$
Comme g est continue et que le disque fermé $D_f(0,R)$ est compact, le corollaire 7 de la page 294 assure que la restriction de g à $D_f(0,R)$ est bornée et atteint ses bornes ; notons m son minimum.
Comme $(0,0) \in D_f(0,R)$, on a $m \leqslant g(0,0)$, et donc $(\star)$ donne :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_f(0,R) \quad \big|g(x,y)\big| > m.$$
Il en résulte que m est le minimum global de la fonction g.

Théorème 8 Soit A une partie compacte de E et $f : A \to F$ une application continue. Raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas uniformément continue. En niant la définition de l'uniforme continuité, on obtient l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que :
$$\forall \eta > 0 \quad \exists (x,y) \in A^2 \quad \|x-y\| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad \|f(x) - f(y)\| > \varepsilon.$$
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple $(x_n, y_n) \in A^2$ vérifiant :
$$\|x_n - y_n\| \leqslant 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad \|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon. \qquad (\star)$$
On construit ainsi deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de A. Par compacité de A, on peut extraire de (x_n) une sous-suite $\big(x_{\varphi(n)}\big)$ convergeant vers un élément α de A. L'inégalité suivante, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\big\|y_{\varphi(n)} - \alpha\big\| \leqslant \underbrace{\big\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\big\|}_{\leqslant 2^{-\varphi(n)} \to 0} + \underbrace{\big\|x_{\varphi(n)} - \alpha\big\|}_{\to 0}$$
montre alors que la suite $\big(y_{\varphi(n)}\big)$ converge également vers α.

Par continuité de f, on a alors $f\big(x_{\varphi(n)}\big) \to f(\alpha)$ et $f\big(y_{\varphi(n)}\big) \to f(\alpha)$. Il en résulte que $\big\|f\big(x_{\varphi(n)}\big) - f\big(y_{\varphi(n)}\big)\big\| \to 0$, ce qui est une contradiction car la propriété $(\star)$ impose que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big\|f\big(x_{\varphi(n)}\big) - f\big(y_{\varphi(n)}\big)\big\| > \varepsilon.$$

Exercice 8 Il suffit de considérer l'application $\widetilde{p} : [c,d] \to A$ définie par :
$$\widetilde{p}(t) = p\Big(a + \frac{t-c}{d-c}\,(b-a)\Big).$$

Proposition 9

- **Réflexivité.** Soit $x \in A$. La fonction constante $\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & x \end{array}$ est un chemin reliant x à lui-même.
- **Symétrie.** Si $p : [a,b] \to A$ est un chemin reliant deux points x à y de A, alors
$$\begin{array}{rccc} \widetilde{p} : & [a,b] & \longrightarrow & A \\ & t & \longmapsto & p\big(a+b-t\big) \end{array}$$
est un chemin reliant y à x.
- **Transitivité.** Soit x, y et z trois points de A tels que :
  - il existe un chemin p_1 reliant x à y dans A ;
  - il existe un chemin p_2 reliant y à z dans A.

Quitte à changer de paramétrage (*cf.* exercice 8 de la page 295), on peut supposer que p_1 et p_2 sont définis respectivement sur $[0,1]$ et $[1,2]$.
Considérons l'application $p : [0,2] \to A$ définie par :

$$p(t) = \begin{cases} p_1(t) & \text{si} \quad t \in [0,1] \\ p_2(t) & \text{si} \quad t \in]1,2] \end{cases}$$

Cette application p est continue en 1 car $p_1(1) = p_2(1) = y$. Elle constitue donc un chemin reliant x à z dans A.

Exercice 9 Soit A une partie ouverte d'un espace vectoriel normé, et C une composante connexe par arcs de A. Soit $x \in C$. Montrons qu'il existe $r > 0$ tel que la boule $B(x,r)$ soit incluse dans C.
Comme A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$. Soit alors $y \in B(x,r)$. Le segment $[x,y]$, étant inclus dans $B(x,r)$, l'est aussi dans A. Par suite x et y sont reliés par un chemin dans A, donc appartiennent à la même composante connexe. On a donc $y \in C$.
Cela montre que $B(x,r) \subset C$, et prouve le résultat souhaité.

Exercice 10 L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ n'est pas connexe par arcs.
En effet, pour $x > a$ et $y < a$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que toute application continue $p : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ vérifiant $p(\alpha) = x$ et $p(\beta) = y$ prend au moins une fois la valeur a (et ne peut donc pas être à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{a\}$).

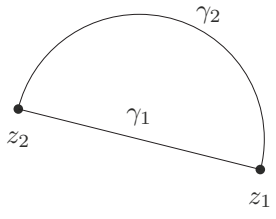
En revanche, les deux ensembles $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ sont connexes par arcs car convexes. Comme ils sont disjoints et que leur réunion vaut $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, ce sont les deux composantes connexes par arcs de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Exercice 11 Soit z_1 et z_2 sont deux éléments de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.
Considérons les deux chemins suivants :

$$\begin{array}{rccl} \gamma_1 : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & t & \longmapsto & (1-t)z_1 + tz_2 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \gamma_2 : & [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & \theta & \longmapsto & \dfrac{z_1+z_2}{2} + \dfrac{z_1-z_2}{2} e^{i\theta}. \end{array}$$



Le chemin γ_1 a pour image le segment reliant z_1 à z_2, et le chemin γ_2 a pour image le demi-cercle de diamètre $[z_1 z_2]$.

Comme les seuls points communs à γ_1 et γ_2 sont z_1 et z_2, il est clair qu'au moins un de ces deux chemins ne passe pas par a, et permet donc relier z_1 à z_2 dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Cela prouve la connexité par arcs de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Exercice 12

1. Soit x et y appartenant à $E \setminus \{0\}$. Montrons que x et y sont reliés par un chemin dans $E \setminus \{0\}$.
   - Si la famille (x,y) est libre, alors on a :

$$\forall \lambda \in [0,1] \quad (1-\lambda)x + \lambda y \neq 0,$$

et alors l'application $\begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & E\setminus\{0\} \\ \lambda & \longmapsto & (1-\lambda)x+\lambda y\end{array}$ est un chemin reliant x à y.

- Sinon, alors prenons $z \in E \setminus \text{Vect}(x,y)$ (un tel z existe car E est de dimension au moins 2). Alors, les familles (x,z) et (y,z) sont libres. D'après le premier point, x et z d'une part, et y et z d'autre part, sont reliés par un chemin dans $E\setminus\{0\}$. On conclut par transitivité.

2. Soit $a \in E$ ainsi que x et y deux points de $E\setminus\{a\}$. Comme $x-a$ et $y-a$ appartiennent à $E\setminus\{0\}$, la première question assure l'existence d'un chemin :
$$\varphi : [0,1] \to E\setminus\{0\}$$
reliant x à y. Alors, l'application $\psi : t \mapsto \varphi(t)+a$ est un chemin reliant x à y dans $E\setminus\{a\}$.

Exercice 13 Soit $(x,y) \in (A_1 \cup A_2)^2$. Montrons que x et y sont reliés par un chemin dans $A_1 \cup A_2$.

- Si x et y appartiennent tous les deux à A_1, c'est évident car A_1 est connexe par arcs. De même, si x et y appartiennent tous les deux à A_2, c'est évident.
- Supposons l'un des deux points dans A_1 et l'autre dans A_2. Par symétrie en x et y, on peut supposer $x \in A_1$ et $y \in A_2$. Comme A_1 et A_2 sont d'intersection non vide, il existe $z \in A_1 \cap A_2$.
  - Comme A_1 est connexe par arcs, x et z sont reliés par un chemin dans A_1, donc dans $A_1 \cup A_2$.
  - Comme A_2 est connexe par arcs, z et y sont reliés par un chemin dans A_2, donc dans $A_1 \cup A_2$.

  Donc, par transitivité, on peut affirmer que x et y sont reliés par un chemin dans $A_1 \cup A_2$.

Exercice 14 Soit A une partie étoilée. Il existe donc $a \in A$ tel que A soit étoilée par rapport à a. Si x et y sont deux points de A, alors :

- comme $[a,x] \subset A$, a et x sont reliés par un chemin dans A ;
- comme $[a,y] \subset A$, a et y sont reliés par un chemin dans A.

Donc, par transitivité, x et y sont reliés par un chemin dans A.

Proposition 10

- Un intervalle de $\mathbb{R}$ est convexe donc connexe par arcs.
- Réciproquement soit I un connexe par arcs de $\mathbb{R}$. Si x et y sont deux points de I, alors il existe un chemin joignant x et y dans I, et par le théorème des valeurs intermédiaires, ce chemin prend toutes les valeurs entre x et y. Cela assure que toutes les valeurs comprises entre x et y appartiennent à I, et donc que I est un intervalle.

Exercice 15 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Les composantes connexes par arcs de U :

- d'une part, sont connexes par arcs, donc sont des intervalles (d'après la proposition 10 de la page 297) ;
- d'autre part, sont des ouverts de $\mathbb{R}$ (car U est ouvert, et d'après l'exercice 9 de la page 296).

On en déduit que U s'écrit comme une réunion d'intervalles ouverts :

$$U = \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I,$$

où $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des composantes connexes par arcs de U.

Il reste à démontrer que cette réunion est dénombrable, c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ est dénombrable. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, tout intervalle ouvert contient au moins un rationnel. L'application qui à un rationnel de U associe l'unique composante connexe par arcs de U à laquelle il appartient constitue donc une application surjective de $U \cap \mathbb{Q}$ vers $\mathcal{C}$. Comme $U \cap \mathbb{Q}$ est dénombrable, cela assure que $\mathcal{C}$ est dénombrable.

Proposition 11 Soit A une partie connexe par arcs, F un espace vectoriel normé, ainsi que $f : A \to F$ une application continue. Montrons que $f(A)$ est connexe par arcs. Soit $(y_1, y_2) \in \big(f(A)\big)^2$. On peut considérer $(x_1, x_2) \in A^2$ tel que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Comme A est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma : [a, b] \to A$ reliant x_1 à x_2.
Alors, l'application $f \circ \gamma$:

- est continue, comme composée de deux applications continues ;
- est à valeurs dans $f(A)$;
- vérifie $(f \circ \gamma)(a) = f(x_1) = y_1$ et $(f \circ \gamma)(b) = f(x_2) = y_2$;

c'est donc un chemin reliant y_1 à y_2 dans $f(A)$. Donc $f(A)$ est connexe par arcs.

Exercice 16 Supposons que $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ soit une bijection continue. Alors, l'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{C} \setminus \{\varphi^{-1}(0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ & z & \longmapsto & \varphi(z) \end{array}$$

est également bijective et continue. Or, l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{\varphi^{-1}(0)\}$ est connexe par arcs (*cf.* exercice 11 de la page 297) alors que $\mathbb{R}^*$ ne l'est pas. Ceci est en contradiction avec la proposition 11 de la page 298 ; cela prouve le résultat.

Exercice 17

1. Considérons la restriction à A de la fonction indicatrice de B :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

   - Tout d'abord, montrons que la fonction φ est continue. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$.
     * Si $0 \in U$ et $1 \in U$, alors $\varphi^{-1}(U) = A$; c'est un ouvert relatif de A.
     * Si $0 \in U$ et $1 \notin U$, alors $\varphi^{-1}(U) = B$; c'est un ouvert relatif de A par hypothèse sur B.
     * Si $0 \notin U$ et $1 \in U$, alors $\varphi^{-1}(U) = A \setminus B$; c'est un ouvert relatif de A car par hypothèse B est un fermé de A.
     * Si $0 \notin U$ et $1 \notin U$, alors $\varphi^{-1}(U) = \varnothing$; c'est un ouvert relatif de A.

     Dans tous les cas, $\varphi^{-1}(U)$ est donc un ouvert relatif de A. Cela prouve que φ est continue.

- Comme φ est continue et que A est connexe par arcs, le corollaire 12 de la page 298 nous assure que $\varphi(A)$ est un intervalle. Comme $\varphi(A) \subset \{0,1\}$, il en résulte que :
  - ou bien φ est constante égale à 0, c'est-à-dire $B = \varnothing$;
  - ou bien φ est constante égale à 1, c'est-à-dire $B = A$.

2. Par l'absurde : supposons qu'il existe U_1 et U_2 deux ouverts relatifs de A, disjoints, non vides et tels que $U_1 \cup U_2 = A$.
Montrons que U_1 est un fermé relatif de A. Comme U_2 est un ouvert relatif de A, on peut trouver O un ouvert de E tel que $U_2 = A \cap O$. On a alors :
$$\begin{aligned} U_1 &= A \cap (E \setminus U_2) \\ &= A \cap \big(E \setminus (A \cap O)\big) \\ &= A \cap \big((E \setminus A) \cup (E \setminus O)\big) \\ &= \big(\underbrace{A \cap (E \setminus A)}_{=\varnothing}\big) \cup \big(A \cap (E \setminus O)\big) = A \cap (E \setminus O). \end{aligned}$$
Comme O est un ouvert de E, $E \setminus O$ est un fermé de E. Par suite, U_1 est fermé relatif de A.
Ainsi, U_1 est à la fois un ouvert relatif de A et un fermé relatif de A.
Comme $U_1 \neq \varnothing$ et $U_1 \neq A$ (car $U_2 \neq \varnothing$), cela est en contradiction avec le résultat de la première question.

Théorème 14 Soit N une norme sur $\mathbb{K}^p$.

- Tout d'abord, pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on a, en notant $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$:
$$N(x) = N\left(\sum_{k=1}^{p} x_k e_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} |x_k|\, N(e_k) \leqslant M\, \|x\|_\infty, \quad \text{avec} \quad M = \sum_{k=1}^{p} N(e_k).$$
Cela montre que N est dominée par la norme infinie.
- D'autre part, la seconde inégalité triangulaire donne, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{K}^p)^2$:
$$\big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x - y) \leqslant M\, \|x - y\|_\infty.$$
Il en résulte que l'application N est M-lipschitzienne, donc continue.
La sphère unité fermée $S_\infty(0,1)$ de $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_\infty)$ étant fermée et bornée, elle est compacte (*cf.* lemme 13). La restriction de N à $S_\infty(0,1)$ est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint sa borne inférieure m en un point x_m de $S_\infty(0,1)$.
Puisque x_m est non nul, la propriété de séparation de N assure que $m > 0$.
Pour tout vecteur non nul x, on a $\dfrac{x}{\|x\|_\infty} \in S_\infty(0,1)$, et donc :
$$m \leqslant N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) = \frac{N(x)}{\|x\|_\infty},$$
ce qui donne
$$\|x\|_\infty \leqslant \frac{1}{m}\, N(x).$$
Cela prouve que la norme infinie et dominée par N, et termine la preuve.

Théorème 15 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension p. On sait que E est isomorphe à $\mathbb{K}^p$. On peut donc considérer $u : \mathbb{K}^p \to E$ un isomorphisme.

Étant donné N_1 et N_2 deux normes sur E, et comme u est une application linéaire injective, les applications $N_1 \circ u$ et $N_2 \circ u$ sont des normes sur $\mathbb{K}^p$ (*cf.* page 200). D'après le théorème 14 de la page 299, ces deux normes sont équivalentes, donc il existe deux constantes $a > 0$ et $b > 0$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{K}^p \quad a\,N_1\big(u(x)\big) \leqslant N_2\big(u(x)\big) \leqslant bN_1\big(u(x)\big),$$

ce qui donne :

$$\forall y \in \operatorname{Im} u \quad a\,N_1(y) \leqslant N_2(y) \leqslant b\,N_1(y).$$

Comme u est un isomorphisme, on a $\operatorname{Im} u = E$. On a donc $a\,N_1 \leqslant N_2 \leqslant b\,N_1$, ce qui prouve que N_1 et N_2 sont équivalentes.

Proposition 16 Comme E est de dimension finie, on peut le munir de la norme que l'on souhaite. Munissons E de la « norme infinie dans la base $\mathcal{B}$ », c'est-à-dire la norme N_∞ définie par :

$$N_\infty(x) = \max_{k\in[\![1,p]\!]} |x_k|,$$

où $(x_1, \dots, x_p)$ désignent les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Il est alors clair qu'au sens de la norme N_∞, la convergence vers ℓ de la suite (a_n) revient à la convergence de chacune des suites $\big(a_n^{(k)}\big)$ vers ℓ_k, puisque l'on a :

$$N_\infty(a_n - \ell) = \max_{k\in[\![1,p]\!]} \big|a_n^{(k)} - \ell_k\big|.$$

Proposition 17 Comme E est de dimension finie, on peut le munir de la norme que l'on souhaite. Munissons E de la « norme infinie dans la base $\mathcal{B}$ » :

$$N_\infty(x) = \max_{k\in[\![1,p]\!]} |x_k|,$$

où $(x_1, \dots, x_p)$ désignent les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

L'équivalence souhaitée résulte alors de la relation suivante :

$$\forall x \in A \quad N_\infty\big(f(x) - \ell\big) = \max_{k\in[\![1,p]\!]} \big|f_k(x) - \ell_k\big|.$$

Théorème 18 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Munissons E d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, ainsi que de la norme infinie dans la base $\mathcal{B}$:

$$N_\infty(x) = \max_{k\in[\![1,p]\!]} |x_k| \quad \text{où} \quad x = \sum_{k=1}^{p} x_k\,e_k.$$

Soit (u_n) est une suite bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(p)}$ les coordonnées de u_n dans la base $\mathcal{B}$, de sorte que $u_n = \sum_{k=1}^{p} u_n^{(k)}\,e_k$.

Soit $R \geqslant 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad N_\infty(u_n) \leqslant R$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in [\![1,p]\!] \quad \big|u_n^{(k)}\big| \leqslant R.$$

Il en résulte que la suite de terme général $\big(u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(p)}\big)$ est à valeurs dans le compact $[-R, R]^p$, et donc admet une sous-suite convergente ; il en est donc de même pour la suite (u_n) (*cf.* la proposition 16 de la page 300).

Théorème 19 Il a déjà été dit qu'une partie compacte était nécessairement fermée et bornée (*cf.* la proposition 2 de la page 291).
Réciproquement, soit A une partie fermée et bornée d'un espace de dimension finie. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, toute suite à valeurs dans A admet au moins une valeur d'adhérence qui, puisque A est fermée, appartient nécessairement à A. Donc A est compacte.

Proposition 20 Soit E un espace vectoriel normée et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Soit (u_n) une suite convergente à valeurs dans F. Notons ℓ la limite de (u_n), et montrons que $\ell \in F$.

Comme la suite (u_n) converge, elle est bornée. Comme (u_n) est une suite bornée à valeurs dans F et que F est de dimension finie, la suite (u_n) possède au moins une valeur d'adhérence dans F. Comme la seule valeur d'adhérence d'une suite convergente est sa limite, on en déduit que $\ell \in F$.

Exercice 18 Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E ne pose pas de difficultés (F est non vide et stable par combinaisons linéaires).

Pour montrer que F n'est pas un fermé de E, exhibons une suite d'éléments de F qui converge vers un élément de $E \setminus F$.

Notons u la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ puis, pour $p \in \mathbb{N}$, notons $u^{(p)}$ la suite de terme général :

$$u_n^{(p)} = \begin{cases} u_n & \text{si } n \leqslant p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cet exemple prouve le résultat souhaité, car :

- pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\left\|u^{(p)} - u\right\|_\infty = \dfrac{1}{p+2} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u^{(p)} \to u$;
- pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $u^{(p)}$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, donc appartient à F ;
- la suite u n'appartient pas à F, car elle possède une infinité de termes non nuls.

Théorème 21 Supposons E de dimension finie. Munissons E d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, et travaillons avec la norme infinie associée à cette base :

$$N_\infty(x) = \max_{k\in[\![1,n]\!]} |x_k| \quad \text{avec} \quad x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Pour montrer que u est continue, il suffit, d'après la proposition 19 de la page 269, de montrer qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que :

$$\forall x \in E \quad N_\infty\big(u(x)\big) \leqslant C \times N_\infty(x).$$

Pour $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ appartenant à E, on a, par linéarité de u :

$$u(x) = u\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k u(e_k)$$

puis, par inégalité triangulaire :

$$N_\infty\big(u(x)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|\, N_\infty\big(u(e_k)\big)$$
$$\leqslant C \times N_\infty(x), \quad \text{avec} \quad C = \sum_{k=1}^{n} N_\infty\big(u(e_k)\big).$$

D'où le résultat.

Corollaire 23 L'application $\det : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array}$ est polynomiale car $\det(M)$ apparaît comme une expression polynomiale des coefficients de M, c'est-à-dire des composantes de M dans la base canonique. Donc, d'après la proposition 22 de la page 303, elle est continue.

Exercice 19

1. Prouvons que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \operatorname{Com} A \end{array}$ est polynomiale, ce qui assurera sa continuité. Travaillons dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient d'indice (i,j) de $\operatorname{Com} A$ vaut :

   $$(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

   où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j : il s'agit donc d'une expression polynomiale en les coefficients de A. Cela prouve le résultat souhaité.
2. Pour $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, on a :

   $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^t(\operatorname{com} A).$$

   - L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{array}$ est continue et ne s'annule pas.
   - D'autre part, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^t(\operatorname{Com} A) \end{array}$ est continue comme composée des deux applications continues $A \mapsto \operatorname{Com} A$ et $M \mapsto {}^t M$.

   Donc, par quotient d'applications continues, l'application :

   $$\begin{array}{ccc} \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

   est continue.

Exercice 20 L'application $\det : \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est surjective et continue. Si $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ était connexe par arcs, alors $\mathbb{R}^*$ le serait aussi, ce qui n'est pas le cas.

Théorème 24 Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ une application p-linéaire.

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, notons $n_k = \dim E_k$ ainsi que $\mathcal{B}_k = (e_1^{(k)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)})$ une base de E_k. En notant alors $g_{k,i}$ l'élément de $E_1 \times \cdots \times E_p$:

$$g_{k,i} = \big(0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-ième place}}}{e_i^{(k)}}, 0, \ldots, 0\big),$$

la famille $\mathcal{B} = \big(g_{k,i}\big)_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ 1 \leqslant i \leqslant n_k}}$ est une base de $E_1 \times \cdots \times E_p$.

Soit $u = (u_1, \ldots, u_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$. En écrivant chaque u_k dans la base $\mathcal{B}_k$:

$$u_k = \sum_{i=1}^{n_k} x_i^{(k)} e_i^{(k)},$$

il vient, par p-linéarité de f :

$$\begin{aligned} f(u) &= f\Big(\sum_{i_1=1}^{n_1} x_{i_1}^{(1)} e_{i_1}^{(1)}, \ldots, \sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_p}^{(p)} e_{i_p}^{(p)} \Big) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_p}^{(p)} f\big(e_{i_1}^{(1)}, \ldots, e_{i_p}^{(p)}\big). \end{aligned}$$

Si pour $k \in [\![1, p]\!]$ et $i \in [\![1, n_k]\!]$, on note $\pi_{k,i}$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} \pi_{k,i} : & E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & u_k = \sum\limits_{i=1}^{n_k} x_i^{(k)} e_i^{(k)} & \longmapsto & x_i^{(k)} \end{array}$$

alors f s'écrit à l'aide des $\pi_{k,i}$:

$$f = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} f\big(e_{i_1}^{(1)}, \ldots, e_{i_p}^{(p)}\big)\, \pi_{1,i_1} \cdots \pi_{p,i_p}.$$

Comme les $\pi_{k,i}$ sont des formes linéaires sur l'espace de dimension finie $E_1 \times \cdots \times E_p$, elles sont continues. L'expression obtenue pour f assure alors, par opérations sur les applications continues, que f est continue.

Remarques

1. En fait, les formes linéaires $\pi_{k,i}$ considérées ici ne sont rien d'autre que les formes linéaires coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $E_1 \times \cdots \times E_p$.
2. L'expression obtenue pour f lors du calcul précédent permet de montrer que, dans le cas où F est de dimension finie, si l'on en considère une base, alors les applications composantes de f sont des fonctions polynomiales.

Exercice 21

1. On a $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ avec :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & (M, N) & \longmapsto & MN \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} \varphi_1 : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \\ & A & \longmapsto & ({}^tA, A). \end{array}$$

   - L'application φ_1 est bilinéaire donc, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, φ_1 est continue.

- L'application φ_2 est linéaire donc, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, φ_2 est continue.

Donc, comme composée d'applications continues, φ est continue.

2. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, il suffit de montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Tout d'abord, une matrice A est orthogonales si, et seulement si, ${}^tA\,A = I_n$. L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ apparaît donc comme l'image réciproque de $\{I_n\}$ par l'application continue φ et donc est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - D'autre part, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par exemple au sens de la norme infinie, puisque chaque coefficient d'une matrice orthogonale est inférieur à 1 en valeur absolue.

Corollaire 25 Supposons $E_1, \dots, E_p$ de dimension finie et munissons $E_1 \times \cdots \times E_p$ de la norme :

$$\big\|(x_1, \dots, x_p)\big\| = \max\big(\|x_1\|, \dots, \|x_p\|\big).$$

Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ une application p-linéaire. D'après le théorème 24 de la page 304, l'application f est continue. Elle est donc bornée sur toute partie compacte, et en particulier sur la sphère unité $S(0,1)$ de $E_1 \times \cdots \times E_p$. Il existe donc $C \geqslant 0$ vérifiant :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in S(0,1) \quad \big\|f(x_1, \dots, x_p)\big\| \leqslant C.$$

Mais alors, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$, comme :

$$\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_p}{\|x_p\|}\right) \in S(0,1),$$

on a :

$$\left\|f\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_p}{\|x_p\|}\right)\right\| \leqslant C,$$

puis, par p-linéarité de f :

$$\big\|f(x_1, \dots, x_p)\big\| \leqslant C\|x_1\| \times \cdots \times \|x_p\|.$$

Exercice 22 Notons $\|\cdot\|$ une norme sur E. L'application φ est clairement bilinéaire. Comme E est de dimension finie, elle est continue et le corollaire 25 de la page 304 nous assure l'existence d'une constante $C \geqslant 0$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \big\|x \times y\big\| \leqslant C\,\|x\| \times \|y\|.$$

En considérant alors l'application $N : x \mapsto C\|x\|$, il est clair que N est une norme sur E vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad N(x \times y) \leqslant N(x)\,N(y).$$

Remarque Le résultat de cet exercice assure, en particulier, l'existence d'une norme sous-multiplicative sur les $\mathbb{K}$-algèbres de dimension finie suivantes :

$$\mathbb{K}_n[X], \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \mathcal{L}(\mathbb{K}^n).$$

S'entraîner et approfondir

6.1 Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{U}$ vers $[0,1]$, où $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

6.2 Soit X une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus X$ est connexe par arcs.

On pourra se contenter de raisonner géométriquement.

6.3 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés ainsi que A et B deux parties respectivement de E et F. On munit $E \times F$ de la norme produit. Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs si, et seulement si, A et B le sont.

6.4 Soit E un espace vectoriel normé, et F un fermé dont la frontière $\mathrm{Fr}(F)$ est connexe par arcs. Montrer que F est connexe par arcs.

6.5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et H un hyperplan de E.

1. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.
2. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $E \setminus H$ est connexe par arcs.
   On pourra utiliser la connexité par arcs de $\mathbb{C}^*$.

6.6 *Théorème des compacts emboîtés*

On se place dans un espace vectoriel normé E. Pour tout compact K, on note $\delta(K)$ le diamètre de K défini par (*cf.* exercice 6 de la page 295) :

$$\delta(K) = \max_{(x,y)\in K^2} d(x,y).$$

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts emboîtés, non vides et dont le diamètre tend vers 0, *i.e.* :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (K_n \neq \varnothing \quad \text{et} \quad K_{n+1} \subset K_n) \qquad \text{et} \qquad \delta(K_n) \to 0.$$

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \{x\}$.

★ **6.7** *Théorème de Riesz*

On souhaite démontrer le théorème de Riesz. Celui-ci affirme qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie si, et seulement si, sa boule unité fermée est compacte.

1. Justifier le sens « facile » du théorème.
2. Réciproquement, supposons que E soit un espace vectoriel normé de dimension infinie, et montrons que sa boule unité fermée $B_f(0,1)$ n'est pas compacte.
   (a) Soit F un sous-espace de E de dimension finie et $x \in E \setminus F$.
      i. Justifier l'existence de $y \in F$ tel que $d(x,F) = \|x - y\|$.
      ii. En déduire qu'il existe un vecteur unitaire u vérifiant :
      $$d(u,F) = 1.$$
   (b) Conclure alors en construisant une suite d'éléments de $B_f(0,1)$ ne possédant pas de valeur d'adhérence.

⋆ **6.8** *Compact/fermé versus fermé/fermé*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace normé de dimension finie. Étant donné A et B deux parties non vides de E, on note :

$$A+B=\big\{a+b\,;\ (a,b)\in A\times B\big\},$$

et on appelle distance de A à B la quantité :

$$d(A,B)=\inf_{(a,b)\in A\times B} d(a,b).$$

1. On suppose dans cette question que A est un compact et B est un fermé.
   (a) Montrer que $A+B$ est un fermé de E.
   (b) Montrer que la distance de A à B est atteinte, *i.e.* :
   $$\exists (a_0,b_0)\in A\times B\quad d(A,B)=d(a_0,b_0).$$
2. Montrer que, sous la seule hypothèse que A et B sont des fermés, alors :
   - $A+B$ n'est pas nécessairement un fermé ;
   - la distance de A à B n'est pas nécessairement atteinte.

   On pourra expliciter deux parties A et B pertinentes, par exemple dans $\mathbb{R}^2$.

6.9 Soit K un compact non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, et $f : K \to K$ une application vérifiant :

$$\forall (x,y)\in K^2\quad x\neq y \Longrightarrow \|f(x)-f(y)\|<\|x-y\|. \qquad (\star)$$

1. Montrer que f possède un unique point fixe.
   Indication : on pourra introduire la fonction $\varphi : x \mapsto \|f(x)-x\|$.
2. Soit $x\in K$. Montrer que la suite récurrente (x_n) définie par :
   $$x_0=x \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N}\quad x_{n+1}=f(x_n)$$
   converge vers l'unique point fixe de f.

6.10 Soit C un compact convexe non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E et f un endomorphisme continu de E laissant stable C.
Le but est de montrer que f possède au moins un point fixe.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :
   $$f_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k.$$
   Prouver que f_n est un endomorphisme continu de E laissant stable C.
2. Montrer qu'il existe une constante M telle que :
   $$\forall y\in f_n(C)\quad \big\|f(y)-y\big\|\leqslant\frac{2M}{n}.$$
3. Prouver alors que f possède au moins un point fixe.

⋆ **6.11** *Procédé diagonal*
On note ℓ^1 l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes telles que la série $\sum u_n$ converge absolument. On munit ℓ^1 de la norme :

$$\|u\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Soit A l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant \frac{1}{2^n}. \qquad (\star)$$

1. Justifier que A est une partie de ℓ^1.
2. Soit $\ell = (\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et $\left(u^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u^{(p)}$ est donc un élément de A ; son n-ième terme est noté $u_n^{(p)}$. Montrer que $u^{(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si, et seulement si,
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|u_n^{(p)} - \ell_n\right| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
3. Montrer que A est compact.

⋆ **6.12** *Théorème de Baire*
On se place dans un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'un intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.
On pourra utiliser le théorème des compacts emboîtés (exercice 6.6).

⋆ **6.13** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices de rang au plus r est un fermé.

⋆ **6.14** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des matrices inversibles $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

⋆ **6.15** Soit $n \in \mathbb{N}$ valant au moins 2.
1. Montrer que l'application :
$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ & A & \longmapsto & \chi_A \end{array}$$
qui à une matrice associe son polynôme caractéristique est continue.
2. Montrer qu'en revanche l'application :
$$\begin{array}{rccc} \Pi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ & A & \longmapsto & \pi_A \end{array}$$
qui à une matrice associe son polynôme minimal n'est pas continue.

★ **6.16** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonalisables est dense.
   Indication : dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice est trigonalisable.
2. Justifier que ce résultat est faux si l'on se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

★ **6.17** *Intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables.

1. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ convergeant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que :
$$d\big(\lambda, \mathrm{sp}(A_p)\big) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. Montrer que l'intérieur de $\mathcal{D}$ est l'ensemble des matrices possédant n valeurs propres distinctes.

★ **6.18** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit T une matrice triangulaire inversible. Montrer que T peut être reliée à I_n par un chemin continu à valeurs dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

★ **6.19** *Composantes connexes par arcs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but est de démontrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs :
$$\mathcal{C}_+ = \det^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}_- = \det^{-1}(\mathbb{R}_-^*).$$
Notons $\mathcal{C}_0$ la composante connexe par arcs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant I_n.

1. (a) *On note $E_{i,j}$ l'élément d'indice (i,j) de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
   Soit T une matrice de transvection, *i.e.* une matrice de la forme :
$$T = I_n + \lambda E_{i,j} \quad \text{avec} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
   Montrer que $T \in \mathcal{C}_0$.
   (b) Soit D une matrice de dilatation de déterminant positif, *i.e.* une matrice de la forme :
$$D = I_n + (\mu - 1)E_{i,i} \quad \text{avec} \quad i \in [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \mu > 1.$$
   Montrer que $D \in \mathcal{C}_0$.
   (c) En déduire que tout élément $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ peut être relié, par un chemin continue à valeurs dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, à une matrice diagonale dont la diagonale est constituée de ± 1.
2. Montrer que si A et B sont semblables et si B appartient à $\mathcal{C}_0$, alors A également.

3. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $p+2q=n$. On note :

$$J_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{2q} \end{pmatrix}$$

Montrer que $J_{p,q} \in \mathcal{C}_0$.
Indication : utiliser les matrices de rotation de taille 2.

4. Déduire des trois questions précédentes que si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\det A > 0$, alors $A \in \mathcal{C}_0$.
5. Conclure.

6.20 *(Polytechnique 2015)*

On note T_n l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et D_n l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que T_n est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis que c'est l'adhérence de D_n.

6.21 *(Centrale 2015)*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid P(M) = 0\}$.
Le but de l'exercice est d'étudier les points isolés de E_P, c'est-à-dire les $M \in E_p$ pour lesquels il existe un voisinage V de M tel que $E_p \cap V = \{M\}$.

1. Déterminer E_P et ses points isolés lorsque $n=1$.
2. Montrer qu'il existe un voisinage V_0 de 0 tel que :

$$\forall H \in V_0 \quad I_n + H \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}).$$

3. Soit M un point isolé de E_P. Montrer qu'il existe un voisinage V_1 de 0 tel que :

$$\forall H \in V_1 \quad (I_n+H)^{-1} M (I_n+H) = M.$$

Montrer que M commute avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Conclure.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver une suite $(M_k)_{k\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ distincts deux à deux telle que :

$$M_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda I_n \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (M_k - \lambda I_n)^2 = 0$$

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λI_n est un point isolé de E_P si, et seulement si, λ est une racine simple de P.

Solution des exercices

6.1 Supposons qu'une telle bijection $\varphi : \mathbb{U} \to [0,1]$ existe.

Alors, en notant $a = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, on constate que

$$\varphi\big(\mathbb{U} \setminus \{a\}\big) = [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Ceci contredit la continuité de φ puisque l'ensemble $\mathbb{U} \setminus \{a\}$ est connexe par arcs alors que $[0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ne l'est pas.

Remarque La connexité par arcs de $\mathbb{U} \setminus \{a\}$ s'obtient ainsi : si l'on considère deux points de $\mathbb{U} \setminus \{a\}$, ils peuvent s'écrivent sous la forme $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$ avec $\theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \theta_1 + 2\pi$. Alors, les deux chemins :

$$\begin{array}{ccccc} [\theta_1,\theta_2] & \longrightarrow & \mathbb{U} & \quad\text{et}\quad & [\theta_2,\theta_1+2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} & & \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

n'ayant en commun que les points $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$, l'un des deux ne contient pas a.

6.2 Soit A_1 et A_2 deux points de $\mathbb{R}^2 \setminus X$. Montrons que l'on peut relier A_1 et A_2 par un chemin continu ne rencontrant pas X.
Raisonnons géométriquement.

- Il y a une infinité non dénombrable de droites passant par le point A_1. Ces droites ne se rencontrant qu'au point A_1, et comme $A_1 \notin X$, il est possible d'en sélectionner une qui ne rencontre pas X ; soit $\mathcal{D}_1$ une telle droite.
- De même, parmi l'infinité non dénombrable de droites passant par le point A_2, il est possible d'en sélectionner une qui ne rencontre pas X et qui ne soit pas parallèle à $\mathcal{D}_1$; soit $\mathcal{D}_2$ une telle droite.

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ n'étant pas parallèles, elles se croisent en un point B ; en parcourant alors de manière continue les segments $[A_1B]$ puis $[BA_2]$, on passe de A_1 à A_2 sans rencontrer X.

6.3 • Supposons $A \times B$ connexe par arcs. Alors A et B sont connexes par arcs, comme images respectives de $A \times B$ par les applications continues :

$$\begin{array}{ccccc} E \times F & \longrightarrow & E & \quad\text{et}\quad & E \times F & \longrightarrow & F \\ (x,y) & \longmapsto & x & & (x,y) & \longmapsto & y. \end{array}$$

• Réciproquement, supposons A et B connexes par arcs.
Soit (a_1,b_1) et (a_2,b_2) deux éléments de $A \times B$.
Comme A et B sont connexes par arcs, il existe deux chemins $\gamma_1 : [0,1] \to A$ et $\gamma_2 : [0,1] \to B$ reliant respectivement a_1 à a_2 et b_1 à b_2. L'application :

$$t \mapsto \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$$

est alors un chemin reliant (a_1,b_1) à (a_2,b_2) dans $A \times B$.

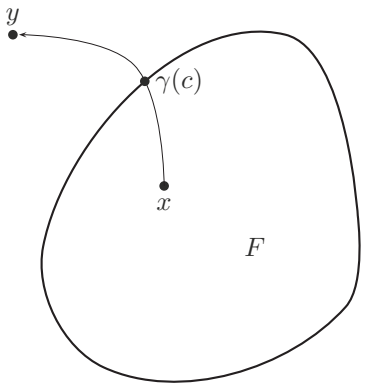
6.4 Le cas $F = E$ étant évident, nous supposons $F \neq E$.

Intéressons-nous aux composantes connexes par arcs de F. Comme $\mathrm{Fr}(F) \subset F$ est connexe par arcs, tous les points de $\mathrm{Fr}(F)$ appartiennent à la même composante connexe par arcs de F. Par transitivité, il nous suffit donc de montrer que tous les autres points de F, c'est-à-dire ceux de $\mathrm{Int}(F)$, appartiennent à la même composante connexe par arcs que ceux de $\mathrm{Fr}(F)$. Concrètement, montrons que tout point de $\mathrm{Int}(F)$ est relié, par un chemin à valeurs dans F, à un point de $\mathrm{Fr}(F)$.

Soit $x \in \mathrm{Int}(F)$ et $y \in E \setminus F$. Soit $\gamma : [0,1] \to E$ une application continue vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$ (une telle application existe car l'espace E est connexe par arcs). Posons :

$$c = \inf \big\{ t \in [0,1] \mid \gamma(t) \notin F \big\}.$$

Le réel c est bien défini car l'ensemble $\big\{ t \in [0,1] \mid \gamma(t) \notin F \big\}$ est non vide (car il contient 1) et minoré.



Si l'on montre que $\gamma(c) \in \mathrm{Fr}(F)$, alors c'est terminé car alors la restriction de γ à l'intervalle $[0, t_0]$ constituera un chemin de F reliant x à un point de $\mathrm{Fr}(F)$. Montrer que $\gamma(c) \in \mathrm{Fr}(F)$ revient à montrer que :

$$\gamma(c) \in \mathrm{Adh}(F) \cap \mathrm{Adh}(E \setminus F).$$

- Tout d'abord, par définition de c comme borne inférieure, on peut trouver une suite (t_n) à valeurs dans $[c, 1]$ tendant vers c et telle que

  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \gamma(t_n) \notin F.$$

  Comme γ est continue, on a $\gamma(t_n) \to \gamma(c)$, ce qui montre que $\gamma(c) \in \mathrm{Adh}(E \setminus F)$.
- Étant donné que $\gamma(c) \in \mathrm{Adh}(E \setminus F)$ et que $x = \gamma(0) \in \mathrm{Int}(F)$, on est assuré que $c > 0$. Soit (t_n) une suite à valeurs de $[0, c[$ tendant vers c. Alors la suite $\big(\gamma(t_n)\big)$ est à valeurs dans F et, par continuité de γ, tend vers $\gamma(c)$. On a donc $\gamma(c) \in \mathrm{Adh}(F)$.

D'où le résultat.

6.5 1. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Comme H est un hyperplan, il existe une forme linéaire non nulle f dont H est le noyau. On a alors, par surjectivité de f :

$$f(E \setminus H) = \mathbb{R}^*.$$

Comme f est continue (car c'est une application linéaire et que E est de dimension finie) et que $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs, cela prouve que $E \setminus H$ ne l'est pas non plus.

2. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit u un vecteur de E n'appartenant pas à H. Les sous-espaces H et $\mathrm{Vect}(u)$ sont alors supplémentaires dans E. Soit x et y deux vecteurs appartenant à $E \setminus H$. Ces vecteurs s'écrivent :

$$x = x_1 + \alpha\, u \quad \text{et} \quad y = y_1 + \beta\, u \quad \text{avec} \quad (x_1, y_1) \in H^2 \quad \text{et} \quad (\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2.$$

- Comme H est un sous-espace vectoriel, il est connexe par arcs. Il existe donc un chemin $\gamma_1 : [0,1] \to H$ reliant x_1 à y_1.
- Comme $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs (*cf.* exercice 11 de la page 297), il existe un chemin $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ reliant α à β.

L'application :

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,1] & \longrightarrow & E \setminus H \\ & t & \longmapsto & \gamma_1(t) + \gamma_2(t)\, u \end{array}$$

est alors un chemin reliant x à y.

6.6 Comme les K_n sont tous non vides, on peut considérer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in K_n.$$

- Comme le compact K_0 contient tous les autres, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en particulier une suite à valeurs dans K_0. Par compacité de K_0, on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$; notons x la limite de cette sous-suite.

  Soit $p \in \mathbb{N}$. Le caractère emboîté de la suite (K_n) assure que la suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est à valeurs dans K_p ; il en est donc *a fortiori* de même pour la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant p}$; le caractère fermé de K_p assure alors que $x \in K_p$.
  On a donc $\forall p \in \mathbb{N} \quad x \in K_p$, c'est-à-dire $\{x\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

- Pour l'autre inclusion, considérons $\widetilde{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$; on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (x \in K_n \quad \text{et} \quad \widetilde{x} \in K_n),$$

ce qui implique

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(x, \widetilde{x}) \leqslant \delta(K_n).$$

Comme $\delta(K_n) \to 0$, on a nécessairement $\widetilde{x} = x$.

6.7 1. Il est clair que si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors sa boule unité fermée est compacte, comme toute partie fermée et bornée (*cf.* le théorème 19 de la page 301).

2. (a) **Remarque** L'existence de $x \in E \setminus F$ vient du fait que, comme F est de dimension finie et que E ne l'est pas, F est nécessairement un sous-espace strict de E.

i. Comme F est un sous-espace vectoriel, on a $0 \in F$, et donc :

$$d(x,F) \leqslant d(x,0) = \|x\|.$$

D'autre part, par inégalité triangulaire, on a, pour tout $y \in E$:

$$d(x,y) \geqslant d(y,0) - d(x,0),$$

et donc :

$$\|y\| > 2\|x\| \Longrightarrow d(x,y) > \|x\|.$$

Des deux points précédent il résulte que :

$$d(x,F) = d(x,K) \quad \text{avec} \quad K = F \cap B_f(0, 2\|x\|).$$

La partie K est une partie fermée et bornée de F. Comme F est de dimension finie, K est un compact. Par suite, la distance de x à K est atteinte (*cf.* exemple de la page 294). Il existe donc $y \in K$ tel que $d(x,K) = \|x-y\|$, ce qui prouve le résultat puisque $K \subset F$ et $d(x,K) = d(x,F)$.

ii. Comme $x \notin F$, on a $y \neq x$. Posons $u = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$. On constate que :

- le vecteur u est unitaire donc $d(u,F) \leqslant \|u\| = 1$;
- pour tout $z \in F$, on a :

$$\|u - z\| = \frac{1}{\|x-y\|} \times \big\|x - \big(y + \|x-y\|z\big)\big\|$$

Comme $y + \|x-y\|z \in F$, on a :

$$\big\|x - \big(y + \|x-y\|z\big)\big\| \geqslant d(x,F) = \|x-y\|,$$

et donc $\|u-z\| \geqslant 1$; on a donc $d(u,F) \geqslant 1$.

On a donc $d(u,F) = 1$.

(b) Construisons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $B_f(0,1)$ vérifiant :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \neq p \Longrightarrow d(u_n,u_p) \geqslant 1. \qquad (\star)$$

Cela donnera le résultat car une telle suite ne peut pas posséder de valeur d'adhérence. Construisons-la terme à terme.

- Fixons u_0 à un élément unitaire quelconque de E.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $u_0, \ldots, u_{n-1}$ sont déjà construits. L'espace

$$F_n = \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_{n-1})$$

étant de dimension finie, la question 2(a)ii assure que l'on peut choisir u_n un vecteur unitaire tel que $d(u_n, F_n) = 1$. Cet élément u_n vérifie alors :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad d(u_n,u_k) \geqslant 1.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite vérifie la propriété $(\star)$.

6.8 1. (a) Soit (u_n) une suite à valeurs dans $A+B$. Supposons (u_n) convergente et montrons que sa limite ℓ appartient à $A+B$.
Puisque (u_n) est à valeurs dans $A+B$, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = a_n + b_n \quad \text{avec} \quad (a_n, b_n) \in A \times B.$$

La suite (a_n) étant à valeurs dans le compact A, on peut en extraire une sous-suite convergente $\big(a_{\varphi(n)}\big)$. Alors, la sous-suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)$ converge également, en tant que sous-suite d'une suite convergente. La relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_{\varphi(n)} = u_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}$$

prouve alors que la suite $\big(b_{\varphi(n)}\big)$ converge elle aussi. Alors :

- puisque A est compact donc fermé, en notant $\ell_1 = \lim a_{\varphi(n)}$, on a $\ell_1 \in A$;
- puisque B est fermé, en notant $\ell_2 = \lim b_{\varphi(n)}$, on a $\ell_2 \in B$;
- puisque $\ell = \lim u_n$, on a aussi $\ell = \lim u_{\varphi(n)}$.

En passant à la limite dans la relation $u_{\varphi(n)} = a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)}$, on obtient alors $\ell = \ell_1 + \ell_2$, ce qui prouve que $\ell \in A+B$.

Remarque On constate que l'hypothèse « E de dimension finie » n'a pas été utilisée dans le raisonnement précédent. Le résultat reste donc vrai sans cette hypothèse.

(b) Fixons $\alpha \in A$ et $\beta \in B$. On a alors $d(A,B) \leqslant d(\alpha,\beta)$.
Comme A est compact, c'est une partie bornée, donc il existe M tel que :

$$A \subset B_f(\alpha, M).$$

Par inégalité triangulaire, on obtient que pour tout $y \in B \backslash B_f\big(\alpha, M+d(\alpha,\beta)\big)$:

$$\forall x \in A \quad d(x,y) \geqslant \underbrace{d(y,\alpha)}_{>M+d(\alpha,\beta)} - \underbrace{d(\alpha,x)}_{\leqslant M} > d(\alpha,\beta) \geqslant d(A,B).$$

On en déduit qu'en notant $\widetilde{B} = B \cap B_f\big(\alpha, M+d(\alpha,\beta)\big)$, on a :

$$d(A,B) = d(A,\widetilde{B}).$$

Comme $\widetilde{B}$ est fermé (car intersection de deux fermés) et borné, il est compact (car E est dimension finie). Puisque A et $\widetilde{B}$ sont compacts, il en est de même pour $A \times \widetilde{B}$. Il en résulte que l'application continue :

$$\begin{array}{ccc} A \times \widetilde{B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) \end{array}$$

est bornée et atteint ses bornes, donc en particulier possède un minimum. Cela prouve l'existence d'un couple $(a_0,b_0) \in A \times \widetilde{B}$ tel que :

$$d(a_0,b_0) = d(A,\widetilde{B}).$$

Comme $\widetilde{B} \subset B$, ce couple (a_0,b_0) appartient à $A \times B$. D'où le résultat.

2. Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$, et posons :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \qquad \text{et} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}.$$

Les parties A et B sont fermées car sont respectivement les images réciproques du fermé $\{0\}$ par les applications continues :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy-1 \end{array}$$

Les parties A et B s'écrivent également :

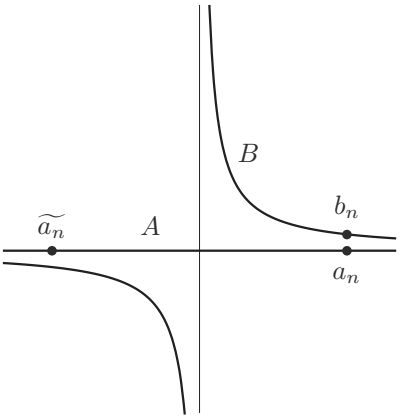
$$A = \big\{(a,0)\,;\ a \in \mathbb{R}\big\}$$

et

$$B = \left\{\left(b, \frac{1}{b}\right)\,;\ b \in \mathbb{R}^*\right\}.$$

On constate que A et B sont disjoints et que $(0,0) \notin A+B$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$a_n = (n,0) \in A\ ;$$
$$\widetilde{a_n} = (-n,0) \in A\ ;$$
$$b_n = \left(n, \frac{1}{n}\right) \in B.$$



- Comme $b_n - a_n \to 0$, on a $d(A,B) = 0$. Comme A et B sont disjoints, cela prouve que la distance de A à B n'est pas atteinte.
- De plus, la suite de terme général $\widetilde{a_n} + b_n$ tend vers 0. Comme $(0,0) \notin A+B$, cela prouve que $A+B$ n'est pas fermé.

6.9 1. • **Existence.** Soit $\varphi : K \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(x) = \|f(x) - x\|$. Étant donné que φ est continue et que K est compact, φ admet un minimum. Notons α un point de K en lequel ce minimum est atteint. Si $f(\alpha) \neq \alpha$, alors, d'après la propriété $(\star)$ vérifiée par f :

$$\varphi\big(f(\alpha)\big) = \big\|f(f(\alpha)) - f(\alpha)\big\| < \big\|f(\alpha) - \alpha\big\| = \varphi(\alpha),$$

ce qui est absurde. On a donc $f(\alpha) = \alpha$, *i.e.* α est un point fixe de f.

• **Unicité.** Si l'on suppose que α et β sont deux points fixes distincts, alors, d'après la propriété $(\star)$ vérifiée par f :

$$\|\beta - \alpha\| = \big\|f(\beta) - f(\alpha)\big\| < \|\beta - \alpha\|,$$

ce qui est absurde.

2. Notons $d_n = \|x_n - \alpha\|$, où α est le point fixe de f. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$d_{n+1} = \|x_{n+1} - \alpha\| = \|f(x_n) - f(\alpha)\| \leqslant \|x_n - \alpha\| = d_n.$$

La suite (d_n), étant décroissante et minorée par 0, converge vers une limite $a \geqslant 0$.
Soit $\big(x_{\varphi(n)}\big)$ une sous-suite convergente de (x_n). En notant $\ell = \lim x_{\varphi(n)}$, on a :

$$d_{\varphi(n)} = \big\|x_{\varphi(n)} - \alpha\big\| \to \|\ell - \alpha\|.$$

Puisque d'autre part $d_{\varphi(n)} \to a$, on a, par unicité de la limite :

$$a = \|\ell - \alpha\|. \tag{1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)+1}$. Donc, par continuité de f, la suite $\big(f(x_{\varphi(n)+1})\big)$ tend vers $f(\ell)$. On a alors :

$$d_{\varphi(n)+1} = \big\|x_{\varphi(n)+1} - \alpha\big\| \to \|f(\ell) - \alpha\| = \|f(\ell) - f(\alpha)\|.$$

Puisque d'autre part $d_{\varphi(n)+1} \to a$, on a par unicité de la limite :

$$a = \|f(\ell) - f(\alpha)\|. \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) donnent $\big\|f(\ell)-f(\alpha)\big\| = \|\ell-\alpha\|$. La propriété $(\star)$ vérifiée par f donne alors nécessairement $\ell = \alpha$.

On a ainsi obtenu que toute sous-suite convergente de (x_n) converge vers α. Comme K est compact, cela assure que la suite (x_n) converge vers α.

6.10 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque f_n est un polynôme en f, c'est un endomorphisme continu de E. Soit $x \in C$. Comme f laisse stable C, il en est de même pour ses itérés, et donc :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad f^k(x) \in C.$$

Ainsi, puisque C est convexe, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x)$ appartient à C.

2. Comme C est compact, il est borné donc inclus dans une boule $B_f(0, M)$.

Soit $y \in f_n(C)$. On a, en notant x un antécédent de y par f_n :

$$f(y) - y = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1}(x) - \sum_{k=0}^{n} f^k(x)\right) = \frac{1}{n}\big(f^n(x) - x\big).$$

Comme x et $f^n(x)$ sont dans C, et par définition de M, on a $\big\|f^n(x)-x\big\| \leqslant 2M$, et donc :

$$\big\|f(y) - y\big\| \leqslant \frac{2M}{n}.$$

3. Comme C est non vide, les ensembles $f_n(C)$ sont tous non vides. On peut donc considérer $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \in f_n(C).$$

Comme C est stable par chaque f_n, la suite (x_n) est à valeurs dans C.

Comme C est compact, on peut en extraire une sous-suite convergente $\big(x_{\varphi(n)}\big)$.

D'après la question 2, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \big\|f(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\big\| \leqslant \frac{2M}{\varphi(n)} \to 0.$$

Notons $\ell = \lim x_{\varphi(n)}$. Comme f est continue, on a $f\big(x_{\varphi(n)}\big) \to f(\ell)$, puis :

$$\big\|f(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\big\| \to \|f(\ell) - \ell\|.$$

Il en résulte que $\|f(\ell) - \ell\| = 0$, *i.e.* $f(\ell) = \ell$.

6.11 1. Tout d'abord, puisque la série $\sum 2^{-n}$ converge et par théorème de comparaison, la condition $(\star)$ d'appartenance à A assure que A est une partie de ℓ^1.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left\|u^{(p)} - \ell\right\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|u_n^{(p)} - \ell_n\right|. \qquad (\star\star)$$

- Un sens est évident : si $u^{(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|u_n^{(p)} - \ell_n\right| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|u_n^{(p)} - \ell_n\right| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Réciproquement, supposons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|u_n^{(p)} - \ell_n\right| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et montrons que $\left\|u^{(p)} - \ell\right\| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  À n fixé, le terme $\left|u_n^{(p)} - \ell_n\right|$ apparaissant dans la somme de la relation $(\star\star)$:
  * tend vers 0 quand $p \to +\infty$;
  * est majoré par $\dfrac{2}{2^n}$, terme général d'une série convergente.

  Cela nous permet d'obtenir le résultat souhaité en procédant ainsi : fixons $\varepsilon > 0$, puis $n_0 \in \mathbb{N}$ un rang vérifiant :

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{2}{2^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

  et enfin $p_0 \in \mathbb{N}$ un rang vérifiant :

$$p \geqslant p_0 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{n_0} \left|u_n^{(p)} - \ell_n\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

  On constate alors que pour tout $p \geqslant p_0$, on a :

$$\left\|u^{(p)} - \ell\right\| \leqslant \varepsilon.$$

  Cela prouve le résultat attendu.

3. Pour montrer que A est compact, donnons-nous $\left(u^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A et montrons qu'il est possible d'en extraire une sous-suite convergeant vers un élément de A.

   Pour extraire de $\left(u^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente, nous allons procéder par extractions successives ; cette démarche s'appelle « procédé diagonal ».

   Tout d'abord, on constate que la condition $(\star)$ d'appartenance à A entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(u_n^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, car majorée en module par $\dfrac{1}{2^n}$.

- La suite $(u_0^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il est possible d'en extraire une sous-suite convergente $\left(u_0^{(\varphi_0(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$.

- La suite $\left(u_1^{(\varphi_0(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente $\left(u_1^{(\varphi_0\circ\varphi_1(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$. On constate alors que la suite $\left(u_0^{(\varphi_0\circ\varphi_1(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est également convergente, comme sous-suite de la suite convergente $\left(u_0^{(\varphi_0(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$.
- On poursuit ainsi de suite : pour chaque $n\in\mathbb{N}$, on dispose ainsi d'une fonction extractrice φ_n telle que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, la suite $\left(u_n^{(\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge.
- Considérons alors la fonction ψ définie par :
$$\forall p\in\mathbb{N}\quad \psi(p)=\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p(p).$$
On constate que :
  - la fonction ψ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$;
  - pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite $\left(u_n^{(\psi(p))}\right)_{p\geqslant n}$ est une sous-suite de la suite convergente $\left(u_n^{(\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$; donc la suite $\left(u_n^{(\psi(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- Soit alors ℓ la suite définie par :
$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \ell_n=\lim_{p\to+\infty}u_n^{(\psi(p))}.$$
Prouvons que $u^{(\psi(p))}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}\ell$, ce qui donnera le résultat souhaité. On a :
  - pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\left|u_n^{(\psi(p))}-\ell_n\right|\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0$;
  - pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a $\forall n\in\mathbb{N}\quad \left|u_n^{(\psi(p))}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$, ce qui donne, en passant à la limite, $|\ell_n|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$, et assure que $\ell\in A$.

  Le résultat de la question 2 appliqué à la suite $\left(u^{(\psi(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ permet alors de conclure.

6.12 *Dans la suite, si B désigne une boule, nous notons $\delta(B)$ son diamètre.*

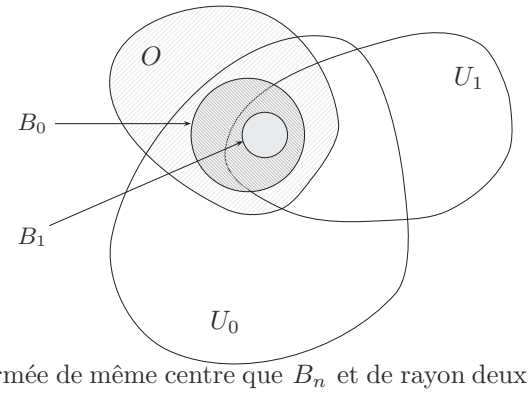
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses. Montrons que leur intersection :
$$A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$$
est dense. Une partie est dense si, et seulement si, elle rencontre tout ouvert non vide. Considérons donc une partie ouverte O et montrons que :
$$A\cap O\neq\varnothing.$$
Construisons dans un premier temps une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de boules ouvertes emboîtées vérifiant :
$$B_0\subset O\qquad\text{et}\qquad\forall n\in\mathbb{N}\quad B_n\subset U_n. \tag{$\star$}$$

- **Construction de B_0.** Comme U_0 est dense, l'ensemble $U_0\cap O$ est non vide ; comme c'est un ouvert (car intersection de deux ouverts), il est d'intérieur non vide, *i.e.* contient au moins une boule ouverte B_0.

- **Construction de B_n.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons $B_0, \dots, B_{n-1}$ construites.
  Comme U_n est dense et B_{n-1} ouverte, l'ensemble $U_n \cap B_{n-1}$ est non vide, donc, étant ouvert, il contient au moins une boule ouverte B_n. Lors du choix de B_n, on peut sans difficulté imposer $\delta(B_n) \leqslant \dfrac{\delta(B_{n-1})}{2}$.

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite est bien une suite de boules ouvertes emboîtées vérifiant la condition $(\star)$.

Le dessin ci-contre illustre la construction des deux premières boules B_0 et B_1 (bien-sûr, il n'est pas réaliste car ne retranscrit pas le caractère dense des ouverts U_0 et U_1.)



En notant alors F_n la boule fermée de même centre que B_n et de rayon deux fois plus petit, on obtient une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de boules fermées emboîtées dont le rayon tend vers 0. Toute boule fermée étant compacte en dimension finie, on peut appliquer le théorème des compacts emboîtés (*cf.* exercice 6.6 de la page 319). Il existe donc $x \in E$ tel que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}\cdot$$

Cet élément x appartient alors :

- à chacun des ouverts U_n puisque $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n \subset B_n \subset U_n$;
- à O puisque $F_0 \subset B_0 \subset O$.

Cela prouve que $A \cap O \neq \varnothing$.

6.13 Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Supposons que les matrices A_p sont toutes de rang au plus r et montrons qu'il en est de même pour A.

Pour cela, montrons qu'aucune sous-matrice carrée de A de taille $r+1$ n'est inversible. Sélectionnons $r+1$ indices de lignes et $r+1$ indices de colonnes ; notons respectivement $\widetilde{A}$ et $\widetilde{A_p}$ les sous-matrices de A et A_p associées. En travaillant avec la norme infinie, il est évident que la suite de matrices $(\widetilde{A_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $\widetilde{A}$ dans $\mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{K})$.

Puisque les matrices A_p sont de rang au plus r, aucune des matrices $\widetilde{A_p}$ n'est inversible. On a donc :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \det(\widetilde{A_p}) = 0.$$

En passant à la limite et par continuité du déterminant, on obtient $\det(\widetilde{A}) = 0$, ce qui donne le résultat.

6.14 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrons qu'il existe une suite (A_p) de matrices inversibles qui converge vers A.

L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \det(xI_n + A) \end{array}$ est polynomiale de degré n (c'est la fonction polynomiale associée au polynôme caractéristique de $-A$) ; elle s'annule donc en un nombre fini de points. Pour $p \in \mathbb{N}$, notons :

$$A_p = 2^{-p} I_n + A.$$

Les matrices A_p sont inversibles car de déterminant non nul, sauf éventuellement un nombre fini d'entre elles. On peut donc trouver un rang $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant p_0$, la matrice A_p soit inversible.

La suite $(A_p)_{p \geqslant p_0}$ est alors une suite de matrices inversibles qui convergeant vers A.

6.15 1. L'espace $\mathbb{K}_n[X]$ étant de dimension finie, toutes ses normes sont équivalentes ; donnons-nous $n+1$ scalaires deux à deux distincts $x_1, \ldots, x_{n+1}$ et munissons $\mathbb{K}_n[X]$ de la norme (la justification du fait c'est une norme est laissée au lecteur) :

$$\|P\| = \max\big\{|P(x_1)|, \ldots, |P(x_{n+1})|\big\}.$$

Alors, une suite $(P_p)_{p\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$ converge vers $P \in \mathbb{K}_n[X]$ si, et seulement si, :

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad P_p(x_k) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} P(x_k).$$

Montrons la continuité de Ψ par caractérisation séquentielle.

Étant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et (A_p) une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tendant vers A, montrons que $\Psi(A_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \Psi(A)$.

Compte tenu de la remarque précédente, il suffit de montrer que :

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad \Psi(A_p)(x_k) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \Psi(A)(x_k),$$

ou encore :

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad \det(x_k I_n - A_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \det(x_k I_n - A). \qquad (\star)$$

Comme $A_p \to A$, on a :

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad x_k I_n - A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x_k I_n - A.$$

La propriété $(\star)$ est alors une conséquence de la continuité du déterminant.

2. Pour prouver que l'application Π n'est pas continue, exhibons un exemple.
Pour $p \in \mathbb{N}$, posons :

$$A_p = \begin{pmatrix} 2^{-p} & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

Alors :

- la suite (A_p) converge vers la matrice nulle dont le polynôme minimal est X ;
- pourtant, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\pi_{A_p} = X(X - 2^{-p}) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} X^2$.

6.16 1. Montrons que toute matrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est la limite d'une suite (A_p) de matrices diagonalisables. C'est évident si A est diagonalisable ; supposons donc que A ne l'est pas. Toute matrice étant trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut écrire $A = P^{-1}\,T\,P$ avec P inversible et T triangulaire supérieure.
Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les termes diagonaux de T, ie :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont donc les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, notons T_p la matrice triangulaire supérieure obtenue à partir de T en modifiant uniquement sa diagonale de la manière suivante :

$$T_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{p} & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n + \frac{n}{p} \end{pmatrix}$$

Justifions que, pour p assez grand, la matrice T_p possède la propriété que ses termes diagonaux sont deux à deux distincts :

- si les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tous égaux, alors c'est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$;
- sinon, alors en δ l'écart minimal entre deux valeurs propres distinctes de A, *i.e.* :

$$\delta = \min_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ \lambda_i \neq \lambda_j}} |\lambda_i - \lambda_j|,$$

alors la propriété est vérifiée dès que $\dfrac{n}{p} < \delta$.

Ainsi, pour p assez grand, la matrice $A_p = P^{-1}\,T_p\,P$ est diagonalisable.
Enfin, puisque $T_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} T$ et que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & P^{-1}\,M\,P \end{array}$ est continue car linéaire, on a $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$.

2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrons que la matrice diagonale par blocs :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & (0) \\ \hline (0) & I_{n-2} \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ne peut pas être obtenue comme limite d'une suite de matrices diagonalisables. Cela est du au fait que i est valeur propre de A. Raisonnons par l'absurde : supposons que (A_p) soit une suite de matrices diagonalisables tendant vers A.
Notons χ et χ_p les polynômes caractéristiques de A et A_p respectivement.
En se plaçant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad zI_n - A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} zI_n - A.$$

Donc, par continuité du déterminant :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \chi_p(z) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \chi(z).$$

En appliquant cela pour $z = i$, et puisque i est valeur propre de A, obtient :

$$\chi_p(i) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (\star)$$

Or, pour $p \in \mathbb{N}$, puisque la matrice A_p est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$, *i.e.* de la forme :

$$\chi_p = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k) \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ ;$$

on a alors $\chi_p(i) = \prod_{k=1}^{n}(i - \lambda_k)$, et en particulier :

$$\big|\chi_p(i)\big|^2 = \prod_{k=1}^{n}\big|i - \lambda_k\big|^2 = \prod_{k=1}^{n}(\lambda_k^2 + 1) \geqslant 1. \qquad (\star\star)$$

Les propriétés $(\star)$ et $(\star\star)$ sont contradictoires.

6.17 1. Puisque $A_p \to A$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad xI_n - A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} xI_n - A,$$

et donc, par continuité du déterminant :

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad \chi_{A_p}(x) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_A(x).$$

En particulier, pour $x = \lambda$, cela donne :

$$\chi_{A_p}(\lambda) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (\star)$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A_p, comptées avec multiplicités. On a alors :

$$\chi_{A_p} = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k) \quad \text{et donc} \quad \chi_{A_p}(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda - \lambda_k).$$

En passant au module, on obtient :

$$\big|\chi_{A_p}(\lambda)\big| = \prod_{k=1}^{n}|\lambda - \lambda_k| \geqslant d\big(\lambda, \mathrm{sp}(A_p)\big)^n.$$

La limite $(\star)$ assure alors que $d\big(\lambda, \mathrm{sp}(A_p)\big) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. • Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possédant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrons que $A \in \mathrm{Int}(\mathcal{D})$. Pour cela, considérons $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tendant vers A et montrons que pour p assez grand, A_p est diagonalisable.
Puisque $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distinctes, il existe $\varepsilon > 0$ tel que les boules $B(\lambda_1, \varepsilon), \dots, B(\lambda_n, \varepsilon)$ soient deux à deux disjointes ($\mathbb{K}$ étant naturellement muni de la valeur absolue ou du module).

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, le résultat de la question 1 nous dit que :

$$d\big(\lambda_k, \mathrm{sp}(A_p)\big) \to 0$$

ce qui assure l'existence d'un rang $r_k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad p \geqslant r_k \Longrightarrow B(\lambda_k, \varepsilon) \cap \mathrm{sp}(A_p) \neq \varnothing.$$

Posons $r = \max\{r_1, \dots, r_n\}$ et prenons $p \geqslant r$. Il existe au moins une valeur propre de A_p dans chacune des n boules $B(\lambda_1, \varepsilon), \dots, B(\lambda_n, \varepsilon)$. Comme ces boules sont deux à deux disjointes, cela nous fournit n valeurs propres deux à deux distinctes pour A_p. La matrice A_p est alors diagonalisable.

- Considérons maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dont les valeurs propres ne sont pas deux à deux distinctes, et montrons que $A \notin \mathrm{Int}(\mathcal{D})$ en prouvant que A est la limite d'une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrice non diagonalisables.
  L'hypothèse faite sur A assure l'existence d'une valeur propre λ d'ordre de multiplicité au moins 2. La matrice A peut alors s'écrire :

$$A = P^{-1} D P \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & & & (0) \\ & \lambda & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

  Posons alors, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$D_p = \begin{pmatrix} \lambda & 2^{-p} & & (0) \\ 0 & \lambda & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_p = P^{-1} D_p P.$$

  Les matrices D_p ne sont pas diagonalisables, donc les matrices A_p non plus. De plus, on a $D_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} D$ et donc $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$.

6.18 1. Notons $t_{i,j}$ les coefficients de T.

- Comme T est triangulaire inversible, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Comme $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs (*cf.* exercice 11 de la page 297), on peut considérer, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, un chemin continu $\gamma_k : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ reliant 1 à $t_{k,k}$.
- Pour $x \in [0,1]$, notons $M(x)$ la matrice suivante :

$$M(x) = \begin{pmatrix} \gamma_1(x) & x\,t_{1,2} & \cdots & x\,t_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x\,t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_n(x) \end{pmatrix}$$

  * Pour tout $x \in [0,1]$, la matrice $M(x)$ est inversible car triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls.

∗ On a $M(0) = I_n$ et $M(1) = T$.
∗ Enfin, l'application $x \mapsto M(x)$ est continue, puisque chacune des ses applications composantes sont continues.

L'application

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & M(x) \end{array}$$

est donc un chemin continu reliant I_n à T dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. Montrons que tout élément de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ peut être relié à I_n par un chemin continu à valeurs dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Toute matrice étant trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut considérer P inversible et T triangulaire supérieure telles que :

$$A = P^{-1}\,T\,P.$$

D'après la question précédente, il existe $M : [0,1] \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ reliant I_n à T. Il est alors facile de constater que l'application

$$x \mapsto P^{-1}\,M(x)\,P$$

est un chemin continu reliant I_n à A dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

6.19 1. (a) Il suffit de poser, pour tout $t \in [0,1]$: $\gamma(t) = I_n + \lambda\,t\,E_{i,j}$, car alors :
- pour tout $t \in [0,1]$, la matrice $\gamma(t)$ est inversible, car triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls ;
- l'application $t \mapsto \gamma(t)$ est continue ;
- on a $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = T$.

(b) Il suffit cette fois de poser, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\gamma(t) = I_n + t(\mu - 1)E_{i,i}.$$

(c) Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
Grâce à l'algorithme du pivot on peut, en opérant sur les lignes :
- via des transvections, transformer A en une matrice diagonale inversible ;
- puis, grâce à des dilatations de déterminant positif, transformer A en une matrice diagonale $\widetilde{A}$ dont la diagonale est constituée de ± 1.

En notant $M_1, \ldots, M_N$ les matrices d'opérations élémentaires associées à ces transformations, on a :

$$\widetilde{A} = M_N \cdots M_1 A.$$

Les questions précédentes nous permettent alors de considérer des chemins continus $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$, définis sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, reliant I_n à $M_1, \ldots, M_N$ respectivement. L'application continue définie sur $[0,1]$:

$$t \mapsto \gamma_N(t) \cdots \gamma_1(t) A$$

permet alors de relier A et $\widetilde{A}$ dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. Supposons A et B semblables. On peut alors écrire :

$$A = P^{-1}\,B\,P \quad \text{avec} \quad P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Si γ est un chemin reliant B à I_n dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, alors l'application

$$t \mapsto P^{-1}\,\gamma(t)\,P$$

est continue, à valeurs dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, et relie A à I_n.

3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, notons $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On constate alors que l'application définie sur $[0,\pi]$:

$$\theta \mapsto \begin{pmatrix} I_p & & & (0) \\ & R_\theta & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R_\theta \end{pmatrix} \text{ (avec } q \text{ blocs } R_\theta\text{)}$$

est continue, à valeurs dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, et relie I_n à $J_{p,q}$.

4. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\det A > 0$. D'après la question 1c, A est reliée dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ à une matrice diagonale avec une diagonale constituée de ± 1 ; notons $\widetilde{A}$ une telle matrice et γ un chemin associé.

   L'application $t \mapsto \det\big(\gamma(t)\big)$ est alors continue et ne s'annule pas, donc est de signe constant. On en déduit que $\det A$ et $\det \widetilde{A}$ sont de même signe, et donc $\det \widetilde{A} > 0$.

   Il en résulte que la diagonale de $\widetilde{A}$ est constitué par un nombre pair de -1, donc que $\widetilde{A}$ est semblable à une matrice de la forme $J_{p,q}$.

   Les questions 2 et 3 assurent alors que $\widetilde{A} \in \mathcal{C}_0$, puis, par transitivité, que $A \in \mathcal{C}_0$.

5. • Il résulte de la question précédente que l'ensemble $\mathcal{C}_+$ est connexe par arcs.

   • En notant alors A la matrice diagonale $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, on constate que $\mathcal{C}_-$ est l'image de $\mathcal{C}_+$ par l'application continue :

$$M \mapsto A\,M.$$

   La connexité par arcs de $\mathcal{C}_+$ donne alors celle de $\mathcal{C}_-$.

   • Puisque $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_-$, cet ensemble apparaît comme la réunion de deux parties connexes par arcs. Comme il n'est lui-même pas connexe par arcs (*cf.* exercice 20 de la page 303), on en déduit le résultat souhaité : $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs : $\mathcal{C}_+$ et $\mathcal{C}_-$.

6.20 • Procédons par caractérisation séquentielle. Soit (A_p) une suite d'éléments de T_n convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $A \in T_n$.
Pour cela, montrons que $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Comme $A_p \to A$, on a, d'après la première question de l'exercice 6.17 :

$$d\big(\lambda, \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A_p)\big) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (1)$$

Or, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A_p est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A_p) \subset \mathbb{R}$.
On a donc $d(\lambda, \mathbb{R}) \leqslant d\big(\lambda, \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A_p)\big)$, puis, d'après la limite (1), on a $d(\lambda, \mathbb{R}) = 0$.
Comme $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{C}$, on en déduit $\lambda \in \mathbb{R}$. D'où $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$.
D'où le résultat.

- Prouvons désormais que $T_n = \mathrm{Adh}(D_n)$. Puisque T_n est un fermé contenant D_n, on a $\mathrm{Adh}(D_n) \subset T_n$. Il reste à prouver l'autre inclusion.
  Soit $A \in T_n$. Montrons que $A \in \mathrm{Adh}(D_n)$ en prouvant que A est limite d'une suite (A_p) à valeurs dans D_n.
  Cela se fait par la même méthode que celle utilisée à la première question de l'exercice 6.16. Comme A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire :

$$A = P^{-1}\,T\,P \quad \text{avec} \quad P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

  Les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont donc les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.
  Pour $p \in \mathbb{N}^*$, notons T_p la matrice triangulaire supérieure obtenue à partir de T en modifiant uniquement sa diagonale de la manière suivante :

$$T_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{p} & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n + \frac{n}{p} \end{pmatrix}$$

  On justifie alors que, pour p assez grand, les coefficients diagonaux de la matrice T_p sont deux à deux distincts (*cf.* corrigé de l'exercice 6.16).
  On obtient alors, en posant $A_p = P^{-1}\,T_p\,P$:

$$\big(\forall p \in \mathbb{N}^* \quad A_p \in D_n\big) \qquad \text{et} \qquad A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A.$$

6.21 1. Supposons $n = 1$. Identifions $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$. L'ensemble E_P est l'ensemble des racines du polynôme P, c'est donc un ensemble fini. Par suite, tous ses points sont isolés. En effet, si l'on note :

$$\delta = \min\{|x-y|\,;\ (x,y) \in (E_P)^2 \quad \text{avec} \quad x \neq y\},$$

alors, pour tout $a \in E_P$, on a $E_P \cap B(a,\delta) = \{a\}$.

2. L'ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, apparaissant comme l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par l'application continue det, est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, comme $I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(I_n, r) \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
   En notant alors $V_0 = B(0,r)$, V_0 est un voisinage de 0 vérifiant :

$$\forall H \in V_0 \quad I_n + H \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}).$$

3. • Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi\ : & V_0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & H & \longmapsto & (I_n+H)^{-1}\,M\,(I_n+H). \end{array}$$

   Par opérations sur les fonctions continues, l'application φ est continue (la continuité de l'application $\begin{array}{rccc} & \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$ a été obtenue à l'exercice 19 de la page 303).

Comme M est un point isolé de E_P, on peut considérer un voisinage V de M tel que $E_P \cap V = \{M\}$.
Par continuité de φ en 0, et comme $\varphi(0) = M$, il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall H \in B(0,r) \cap V_0 \quad \varphi(H) \in V.$$

En notant $V_1 = B(0,r) \cap V_0$ (qui est un voisinage de 0 car intersection de deux voisinages de 0), et comme $E_P \cap V = \{M\}$, on obtient :

$$\forall H \in V_1 \quad \varphi(H) = M,$$

autrement dit, par définition de φ :

$$\forall H \in V_1 \quad (I_n + H)^{-1} M (I_n + H) = M.$$

- En multipliant à gauche par $I_n + H$ et en développant, la relation obtenue précédemment donne :

$$\forall H \in V_1 \quad MH = HM.$$

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour $\alpha > 0$ assez petit, on a $\alpha A \in V_1$. On a alors $\alpha MA = \varepsilon AM$, et donc $MA = AM$.
Par suite, M commute avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il en résulte que M est une matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Il suffit de poser $M_k = \lambda I_n + \dfrac{1}{k} N$ où N est la matrice dont le seul coefficient non nul est celui d'indice $(1,n)$ qui vaut 1.
5. Notons $M = \lambda I_n$.
   - On a $P(M) = P(\lambda I_n) = P(\lambda) I_n$. Donc, pour que M appartienne à E_P, il est nécessaire que λ soit racine de P.
   - Si λ est racine de P d'ordre au moins 2, alors on peut écrire :

$$P = (X - \lambda)^2 Q \quad \text{avec} \quad Q \in \mathbb{R}[X].$$

Une suite $(M_k)_{k \geqslant 1}$ telle qu'exhibée à la question précédente constitue alors une suite d'éléments deux à deux distincts, tendant vers M, et à valeurs dans E_p car vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(M_k) = (M_k - \lambda I_n)^2 Q(M_k) = 0.$$

Cela contredit le fait que M soit un point isolé de E_P.

   - Pour finir, supposons que λ soit racine simple de P et montrons que M est un point isolé de E_P. Comme λ est racine simple de P, on peut écrire :

$$P = (X - \lambda) Q \quad \text{avec} \quad Q \in \mathbb{R}[X] \text{ dont } \lambda \text{ n'est pas racine.}$$

Alors $Q(M) = Q(\lambda) I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ donc, par continuité de $N \mapsto Q(N)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de M tel que $Q(N) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ pour tout $N \in \mathcal{V}$. On a donc pour tout $N \in \mathcal{V} \cap E_P$:

$$0 = P(N) = (N - \lambda I_n) Q(N)$$

ce qui donne $N = \lambda I_n$ par inversibilité de $Q(N)$.
Donc $E_P \cap \mathcal{V} = \{\lambda I_n\}$ ce qui prouve que λI_n est isolé.

Chapitre 7 : Fonctions vectorielles de la variable réelle

I Dérivation 344
1 Dérivée en un point 344
2 Caractérisation des fonctions constantes 347
3 Opérations sur les fonctions dérivables 347
4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ 349
5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ 351
II Intégration sur un segment 353
1 Fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ 353
2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux . . 354
3 Propriétés de l'intégrale 355
4 Extension 357
III Primitives et intégrales 358
1 Primitives des fonctions continues 358
2 Théorème fondamental 359
3 Inégalité des accroissements finis 359
IV Formules de Taylor 360
1 Formule de Taylor avec reste intégral 360
2 Inégalité de Taylor-Lagrange 360
3 Développements limités 361
4 Formule de Taylor-Young 361
V Arcs paramétrés 362
1 Généralités 362
2 Tangente à un arc paramétré 363
3 Étude d'un arc paramétré 365
4 Approfondissement : interprétation géométrique de la tangente 366
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 368
Exercices 378

Fonctions vectorielles de la variable réelle

7

Le but de ce chapitre est de généraliser aux fonctions vectorielles les notions de dérivation, d'intégration sur un segment et d'intégrale fonction de sa borne supérieure déjà vues en première année pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes.
Pour cela, on considère des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide de et à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), munis d'une norme $\|\ \|$. Le cas trivial $E = \{0\}$ étant sans intérêt, on supposera $E \neq \{0\}$.
Le cas où $E = \mathbb{K}$ a déjà été vu en première année ; c'est essentiellement celui-là qui sera utilisé dans la pratique.
L'espace E étant de dimension finie n, on peut le munir d'une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Une fois une base fixée, on peut ramener l'étude d'une fonction $f : I \to E$ à l'étude de ses n **fonctions composantes**, c'est-à-dire aux fonctions f_i à valeurs dans $\mathbb{K}$ définies par :

$$\forall t \in I \quad f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, e_i.$$

I Dérivation

1 Dérivée en un point

Dans cette section f est une fonction définie sur I à valeurs dans E et $a \in I$.

Définition 1

L'application f est **dérivable** en a si le **taux d'accroissement en a** :

$$\begin{array}{rccc} \tau_a(f) : & I \setminus (a) & \longrightarrow & E \\ & t & \longmapsto & \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} \end{array}$$

admet une limite $\ell \in E$ en a.

Cette limite est alors appelée **dérivée** de f en a et se note :

$$f'(a)\ , \quad Df(a) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a).$$

Remarque La dérivée de f en a est parfois appelée **vecteur dérivé en a** lorsque E est différent de $\mathbb{K}$.

Proposition 1

La fonction f est dérivable en $a \in I$ si, et seulement s'il existe un vecteur $\ell \in E$ une fonction $\alpha : I \to E$ tels que :

- $\forall t \in I \quad f(t) = f(a) + (t-a)\,\ell + (t-a)\;\alpha(x)$,
- et $\lim\limits_{t \to a} \alpha(t) = 0$.

On a alors $f'(a) = \ell$.

Démonstration page 368

Remarque Comme on le verra, cette propriété signifie que f possède un développement limité à l'ordre 1 en a.

Interprétation cinématique Lorsque $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et que la fonction f représente le mouvement d'un point matériel en fonction du temps, le vecteur $f'(t_0)$ représente la **vitesse instantanée** du point à l'instant t_0.

Proposition 2

Si la fonction f est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Démonstration page 368

La réciproque de la proposition précédente est fausse (elle est déjà fausse lorsque $E = \mathbb{K}$).

p.368 **Exercice 1** Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to E$ qui soit continue en 0 et non dérivable en 0.

Proposition 3

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, chacune de ses fonctions composantes f_i dans la base $\mathcal{B}$ est dérivable en $a$et l'on a alors :

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a)\, e_i.$$

Principe de démonstration.

Démonstration page 368

Écrire les fonctions composantes du taux d'accroissement de f en a.

Remarque On retrouve ainsi qu'une fonction f de I dans $\mathbb{C}$ est dérivable en a si, et seulement si, les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont puisque ces dernières sont les applications composantes de f dans la base $(1, i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exemple On définit l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{pmatrix}. \end{array}$$

Les quatre fonctions composantes dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ($t \mapsto \cos t$, $t \mapsto \sin t$, $t \mapsto \cos t$ et $t \mapsto \sin 2t$) étant dérivables en tout point a de $\mathbb{R}$, φ est dérivable en tout point et l'on a :

$$\varphi'(a) = \begin{pmatrix} -\sin a & \cos a \\ -2\sin 2a & 2\cos 2a \end{pmatrix}.$$

Dérivabilité à droite et à gauche

Définition 2

La fonction f a une **limite à droite** (respectivement **à gauche**) en a si la fonction $f_{|I\cap]a,+\infty[}$ (respectivement $f_{|I\cap]-\infty,a[}$) admet une limite en a.

Définition 3

La fonction f est **dérivable à droite** (respectivement **à gauche**) en a si la fonction $\tau_a(f)$ admet une limite à droite (respectivement à gauche) en a.

Cette limite est alors appelée **dérivée** de f **à droite** (respectivement **à gauche**) en a. On la note $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$).

Remarques

- Si I est minoré et $a = \inf I$, la notion de dérivabilité à gauche n'a pas de sens, puisque $I \cap]-\infty, a[$ est vide. En revanche, la dérivabilité à droite de f en a d'une fonction f définie sur I est équivalente à sa dérivabilité en a et l'on a alors $f'_d(a) = f'(a)$.
- De la même façon, si I est majoré et $a = \sup I$, seule la dérivabilité à gauche a un sens et elle est équivalente à la dérivabilité.

Ainsi, les notions de dérivabilité latérale n'ont d'intérêt que si a est un point intérieur à I.

Résultats Soit a un point intérieur à I.

- Une fonction $f : I \longrightarrow F$ est dérivable à droite (respectivement à gauche) en $a \in I$ si, et seulement si, sa restriction à $[a, +\infty[\cap I$ (respectivement à $]-\infty, a] \cap I$) est dérivable en a.
- La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche et que ses dérivées à droite et à gauche sont égales.
- Une fonction dérivable à droite et à gauche en a est continue en a, car elle admet alors une limite à droite et à gauche en a, égale à $f(a)$.

Fonction dérivée

Définition 4

On dit que f est **dérivable** sur I si elle est dérivable en tout point t de I. On note alors f' ou Df ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, l'application qui à tout $t \in I$ associe le vecteur dérivé de f en t. On l'appelle **l'application dérivée** de f, ou plus simplement la **dérivée de f**.

Proposition 4

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. La fonction $f : I \to E$ est dérivable sur I si, et seulement si, ses fonctions composantes dans $\mathcal{B}$ sont dérivables sur I.

Les fonctions composantes de f' sont alors les dérivées des fonctions composantes de f.

Démonstration. C'est la version globale de la proposition 3 de la page 345. □

2 Caractérisation des fonctions constantes

Théorème 5

Une application est constante sur l'intervalle I si, et seulement si, elle est dérivable et de dérivée nulle en tout point de I.

Démonstration. Le résultat est déjà connu pour les fonctions numériques (conséquence de l'égalité des accroissements finis pour les fonctions réelles dérivables). Donc lorsque E est de dimension finie, le résultat s'obtient en utilisant les fonctions composantes. □

3 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 6

Une combinaison linéaire d'applications dérivables en $a \in I$ est dérivable en a.

Démonstration. Il suffit de considérer les fonctions composantes et d'utiliser le résultat analogue vu pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$. □

Corollaire 7

Une combinaison linéaire d'applications dérivables sur I est dérivable sur I.

Proposition 8

Soit L une application linéaire de E dans un espace vectoriel F. Si f est dérivable en $a \in I$ alors $L \circ f$ est dérivable en $a \in I$ et :

$$(L \circ f)'(a) = L\big(f'(a)\big).$$

Démonstration. Comme E est de dimension finie, l'application linéaire L est continue. Si $\tau_a(f)$ est le taux d'accroissement de f en a, alors, puisque L est linéaire, $L \circ \tau_a(f)$ est le taux d'accroissement de $L \circ f$ en a. La dérivabilité de $L \circ f$ en a est donc une conséquence de la continuité de L et du théorème de composition des limites. □

Corollaire 9

Soit L une application linéaire de E dans un espace vectoriel F. Si f est dérivable sur I alors $L \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(L \circ f)' = L \circ f'.$$

Proposition 10

Soit E, F et G des espaces vectoriels normés de dimension finie et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.

Si $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont dérivables en $a \in I$, alors $B(f,g)$ est dérivable en $a \in I$ et $B(f,g)'(a) = B\big(f'(a), g(a)\big) + B\big(f(a), g'(a)\big)$.

Démonstration page 369

Corollaire 11

Soit E, F et G des espaces vectoriels normés de dimension finie et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.

Si $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont dérivables sur I, alors $B(f,g)$ est dérivable sur I et $B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g')$.

Exemples

1. Si φ est dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et si f est dérivable sur I à valeurs dans E, alors φf est dérivable sur I et :
$$(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'.$$
2. Soit E un espace vectoriel euclidien.
   - Si f et g sont dérivables sur I, alors $(f \mid g)$ est dérivable sur I et :
   $$(f \mid g)' = (f' \mid g) + (f \mid g').$$
   - En particulier, si f est dérivable sur I, l'application $\|f\|_2^2$ est dérivable sur I et l'on a :
   $$\big(\|f\|_2^2\big)' = 2\,(f \mid f').$$
   - Si f est dérivable sur I et à valeurs non nulles, alors la fonction $\|f\|$ est dérivable et :
   $$\|f\|' = \frac{(f \mid f')}{\|f\|}.$$
   - Si f est dérivable et si $f(t)$ est normé pour tout $t \in I$, alors les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux pour tout $t \in I$.

p.369

Exercice 2 Soit $M : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & M(t) \end{array}$ une application dérivable.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto {}^tM(t)M(t)$ est dérivable.
2. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $M(t)$ est orthogonale. Montrer alors que ${}^tM(t)M'(t)$ est une matrice antisymétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 12

Soit I et J deux intervalles ainsi que deux fonctions $f : I \to E$ et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ telles que $\varphi(J) \subset I$. Si la fonction φ est dérivable en $a \in J$ et la fonction f est dérivable en $b = \varphi(a)$, alors la fonction $f \circ \varphi$ est dérivable en a et l'on a :

$$(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a)\ f'(\varphi(a)).$$

Démonstration page 369

Corollaire 13

Étant donnés deux intervalles I et J, ainsi que deux fonctions $f : I \to E$ dérivable sur I et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ dérivable sur J telles que $\varphi(J) \subset I$, la fonction $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et l'on a :

$$(f \circ \varphi)' = \varphi'.(f' \circ \varphi).$$

Attention Bien écrire $(f \circ \varphi)' = \varphi'.(f' \circ \varphi)$ lorsque f est une fonction vectorielle, le point désignant la multiplication d'un vecteur par un scalaire (scalaires devant les vecteurs). Le produit $(f' \circ \varphi).\varphi'$ n'a de sens que lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{K}$.

4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 5

Une application est de **classe $\mathcal{C}^1$ sur I** si elle est dérivable en tout point de I et que sa fonction dérivée est continue sur I.

Notation On note $\mathcal{C}^1(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur I à valeurs dans E.

Proposition 14

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. La fonction $f : I \to E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si, et seulement si, ses fonctions composantes dans $\mathcal{B}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 4 de la page 347 et du fait qu'une fonction à valeurs dans E est continue si, et seulement si, toutes ses applications composantes le sont. □

Proposition 15

L'ensemble $\mathcal{C}^1(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, E)$ et la dérivation

$$D : \mathcal{C}^1(I, E) \to \mathcal{C}(I, E)$$

est une application linéaire.

Démonstration.

Conséquence immédiate de la linéarité de la limite et de le corollaire 7 de la page 347. □

Proposition 16

Soit L une application linéaire de E dans un espace vectoriel F de dimension finie. Si $f \in \mathcal{C}^1(I,E)$ alors $L \circ f \in \mathcal{C}^1(I,F)$.

Démonstration page 370

Proposition 17

Soit E, F et G des espaces vectoriels normés de dimension finie et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.

Si $f \in \mathcal{C}^1(I,E)$ et $g \in \mathcal{C}^1(I,F)$, alors $B(f,g) \in \mathcal{C}^1(I,G)$

Démonstration. Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On sait d'après le corollaire 11 de la page 348 que la fonction $B(f,g)$ est dérivable sur I et que sa dérivée est $B(f',g)+B(f,g')$, fonction qui est continue par les théorèmes généraux. □

Exemples

1. Si $\varphi \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{C}^1(I,F)$, alors $\varphi f \in \mathcal{C}^1(I,F)$.
2. Soit E un espace vectoriel euclidien.
   - Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $(f \mid g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
   - En particulier, si $f \in \mathcal{C}^1(I,F)$, l'application $\|f\|_2^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. En adaptant la démonstration de la dérivabilité de $B(f,g)$ lorsque f et g sont des fonctions dérivables et B est une application bilinéaire (*cf.* la proposition 10 de la page 348), on démontre si φ est une application p-linéaire sur $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$, et f_1, f_2,..., f_p des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I respectivement à valeurs dans E_1, E_2,..., E_p, alors $\varphi(f_1,f_2,\dots,f_p)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :
$$\big(\varphi(f_1,f_2,\dots f_p)\big)' = \varphi(f_1',f_2,\dots f_p)+\varphi(f_1,f_2',\dots f_p)+\cdots+\varphi(f_1,f_2,\dots f_p').$$
4. En particulier, si $\mathcal{B}$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension p et si f_1, f_2,..., f_p sont des éléments de $\mathcal{C}^1(I,E)$, alors $\det_{\mathcal{B}}(f_1,f_2,\dots f_p)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :
$$\begin{aligned}\big(\det_{\mathcal{B}}(f_1,f_2,\dots f_p)\big)' = \det_{\mathcal{B}}(f_1',f_2,\dots f_p) &+ \det_{\mathcal{B}}(f_1,f_2',\dots f_p)\\ &+\cdots+\det_{\mathcal{B}}(f_1,f_2,\dots f_p').\end{aligned}$$

p.370

Exercice 3 Soit f une fonction complexe.

Montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

(i) $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{C})$

(ii) $\operatorname{Re} f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $\operatorname{Im} f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$.

(iii) $\bar{f} \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{C})$

Que vaut alors $D(\bar{f})$?

Proposition 18

Étant donnés deux intervalles I et J, ainsi que deux fonctions $f \in \mathcal{C}^1(I,F)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$ telles que $\varphi(J) \subset I$, la fonction $f \circ \varphi$ est élément de $\mathcal{C}^1(J,F)$.

Démonstration. D'après le corollaire 13 de la page 349, la fonction $f \circ \varphi$ est dérivable sur I, de dérivée $(f \circ \varphi)' = \varphi' . f' \circ \varphi$, fonction qui est continue en tant que composée et produit de telles fonctions. □

5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 6

Une fonction est **de classe** :

- $\mathcal{C}^0$ sur I si elle est continue sur I ;
- $\mathcal{C}^k$ sur I, avec $k \in \mathbb{N}^*$, si elle est dérivable sur I et que sa dérivée est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I ;
- $\mathcal{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathcal{C}^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque Toute fonction de classe $\mathcal{C}^k$ est évidemment de classe $\mathcal{C}^\ell$ pour tout entier naturel $\ell \leqslant k$.

Notation Pour $k \in \mathbb{N}$, on note :

- $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et à valeurs dans E ;
- $f^{(k)}$, $D^k f$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}t^k}$ la **dérivée k-ième** d'une fonction $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$; elle est définie par récurrence par :
$$f^{(0)} = f \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, k]\!] \quad f^{(i)} = \left(f'\right)^{(i-1)} = \left(f^{(i-1)}\right)'.$$
- $\mathcal{C}^\infty(I, E) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et à valeurs dans E.

Remarques

- Les dérivées secondes, troisièmes,... se notent aussi $f'', f''', \ldots$
- Pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$, il suffit de montrer qu'elle admet des dérivées successives à tout ordre (il est inutile de montrer leur continuité puisqu'elles sont dérivables).
- Lorsque la fonction f représente le mouvement d'un point matériel en fonction du temps, le vecteur $f''(t_0)$ représente le **vecteur accélération** du point à l'instant t_0.

Proposition 19

- Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{C}^k(I, E)$ est un espace vectoriel.
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, la dérivation est une application linéaire de $\mathcal{C}^k(I, E)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(I, E)$.

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 15 de la page 349. □

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Dans cette section $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Proposition 20

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimension finie et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.

Si $f \in \mathcal{C}^k(I,E)$ et $g \in \mathcal{C}^k(I,F)$, alors $B(f,g) \in \mathcal{C}^k(I,G)$. De plus, si n est un entier inférieur à k, la dérivée d'ordre n de $B(f,g)$ est donnée par la *formule de Leibniz* :

$$\big(B(f,g)\big)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} B(f^{(p)}, g^{(n-p)}).$$

Démonstration page 370

Corollaire 21

L'ensemble $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})$ est une algèbre pour les lois usuelles.

Proposition 22

Soit L une application linéaire de E dans un espace vectoriel de dimension finie F. Si $f \in \mathcal{C}^k(I,E)$ alors $L \circ f \in \mathcal{C}^k(I,F)$.

Démonstration page 371

Proposition 23

Soit I et J deux intervalles ainsi que $f \in \mathcal{C}^k(I,E)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^k(J,\mathbb{R})$ telles que $\varphi(J) \subset I$.
La fonction $f \circ \varphi$ est élément de $\mathcal{C}^k(J,E)$.

Démonstration page 371

Théorème de limite de la dérivée

Proposition 24

Soit f une application continue sur I et a un point de I tel que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$.
Si $f'_{|I\setminus\{a\}}$ a une limite finie ℓ en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

Principe de démonstration. Utiliser les fonctions composantes. Démonstration page 371

Corollaire 25

Soit f une application continue sur I et a un point de I tel que f soit de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$. Si pour tout $r \leqslant k$, la dérivée $f^{(r)}$ a une limite en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Principe de démonstration.

Démonstration page 372

Il suffit d'appliquer la proposition précédente, successivement aux fonctions f, f',...

II Intégration sur un segment

Dans cette section, les fonctions seront définies sur un segment $[a,b]$ (avec $a<b$) et à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie.

1 Fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$

Définition 7

Soit $f:[a,b]\to E$ une fonction. On dit qu'elle est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $\sigma=(a_0,\dots,a_p)$ de $[a,b]$ telle que :

1. pour tout $i\in[\![0,p-1]\!]$, la restriction $f_i=f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ soit continue,
2. pour tout $i\in[\![0,p-1]\!]$, on puisse prolonger f_i en une fonction $\widetilde{f_i}$, continue sur $[a_i,a_{i+1}]$.

Une telle subdivision est dite **adaptée** à f.

Remarques

- On peut reformuler cette définition : la fonction f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma=(a_0,\dots,a_p)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i\in[\![0,p-1]\!]$:
  1. pour tout $i\in[\![0,p-1]\!]$, la fonction $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ soit continue,
  2. pour tout $i\in[\![0,p-1]\!]$, la fonction $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ admette des limites finies en a_i et a_{i+1}.
- Toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à une fonction continue par morceaux f est encore adaptée à f.
- Si f est une fonction continue par morceaux définie sur $[a,b]$ et si $[c,d]$ est inclus dans $[a,b]$, alors $f_{|[c,d]}$ est encore continue par morceaux.

Notation On note $\mathcal{CM}([a,b],E)$ l'ensemble des fonctions réelles continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans E.

Exemples

1. Toute fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans E est continue par morceaux.
2. On dit qu'une fonction f définie sur $[a,b]$ à valeurs dans E est **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma=(a_0,\dots,a_p)$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i\in[\![0,p-1]\!]$, la fonction $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ soit constante. Une telle fonction est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

Proposition 26

Une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans E est une fonction continue par morceaux si, et seulement si, chacune de ses fonctions composantes dans une base est une fonction continue par morceaux à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Démonstration page 372

Proposition 27

Toute fonction continue par morceaux définie sur $[a,b]$ à valeurs dans E est bornée.

Démonstration page 372

Proposition 28

L'ensemble $\mathcal{CM}([a,b],E)$ est un espace vectoriel.

Démonstration page 372

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Lemme 29

Soit f une fonction continue par morceaux définie sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans E.
Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On note $(f_1,\dots,f_n)$ les fonctions composantes de f dans la base $\mathcal{B}$. Le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i$ ne dépend pas de la base de E choisie.

Principe de démonstration. Utiliser la linéarité de l'intégrale des fonctions scalaires et utiliser la formule de changement de base pour donner les composantes du vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i$ dans une nouvelle base $\mathcal{B}'$.

Démonstration page 372

Définition 8

Soit f une fonction continue par morceaux définie sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans E. On appelle **intégrale de f sur [a,b]** le vecteur de E égal à $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i$ où $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.

Notation Cette intégrale est notée $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque On retrouve que, pour une fonction continue par morceaux à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}\left(f(t)\right)\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}\left(f(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Exemples

1. Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction en escalier et $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ une subdivision adaptée. En notant u_i la valeur de f sur $]a_i, a_{i+1}[$, pour $i \in [\![0, p-i]\!]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1}(a_{i+1}-a_i)\,u_i.$$

2. Soit $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{t-a} = \frac{t-\mathrm{Re}\,a + i\,\mathrm{Im}\,a}{(t-\mathrm{Re}\,a)^2+(\mathrm{Im}\,a)^2},$$

et puisque $\mathrm{Im}\,a \neq 0$, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t-a}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{t-\mathrm{Re}\,a}{(t-\mathrm{Re}\,a)^2+(\mathrm{Im}\,a)^2}\,\mathrm{d}t + i\int_0^x \frac{\mathrm{Im}\,a}{(t-\mathrm{Re}\,a)^2+(\mathrm{Im}\,a)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|x-a|}{|a|}\right) + i\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-\mathrm{Re}\,a}{\mathrm{Im}\,a}\right)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{Re}\,a}{\mathrm{Im}\,a}\right)\right).\end{aligned}$$

3 Propriétés de l'intégrale

Linéarité

Proposition 30

L'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f$ définie sur $\mathcal{CM}([a,b],E)$ à valeurs dans E est linéaire.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la linéarité de l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$, appliquée aux applications composantes. □

Corollaire 31

Deux fonctions continues par morceaux coïncidant sauf sur une partie finie de $[a,b]$ ont des intégrales égales.

Démonstration page 373

Relation de Chasles

Proposition 32 (Relation de Chasles)

Étant donné une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$ ainsi que c un point de $]a,b[$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

On utilise encore une fois le théorème analogue appliqué aux fonctions composantes. □

Sommes de Riemann

Définition 9

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **somme de Riemann d'ordre n associée à f** le vecteur :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right).$$

Rappel Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ un segment. Alors :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$

En appliquant ce résultat à chacune des fonctions composantes d'une fonction continue par morceaux, on obtient le théorème suivant.

Théorème 33 (Convergence des sommes de Riemann)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$. Alors :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$

Inégalités

Proposition 34

On a pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$:

$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Principe de démonstration. D'abord démontrer le résultat pour les fonctions en escalier. Étendre ensuite le résultat aux fonctions continues par morceaux à l'aide de sommes de Riemann.

Démonstration page 373

Puisqu'une fonction continue par morceaux $f : [a,b] \to E$ est bornée, on peut définir :

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|.$$

Corollaire 35

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$. Alors :

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant (b-a)\,\mathcal{N}_\infty(f).$$

Démonstration. En effet :

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \mathcal{N}_\infty(f)\,\mathrm{d}t = (b-a)\,\mathcal{N}_\infty(f). \qquad \square$$

4 Extension

Comme pour les fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{K}$, on peut étendre la notion d'intégrale de façon à ne pas avoir à tenir compte de l'ordre des bornes d'intégration a et b.

Définition 10

Une fonction $f : I \to E$ est **continue par morceaux** si pour tout segment $[a,b] \subset I$, avec $a < b$, la restriction $f_{|_{[a,b]}}$ est continue par morceaux.

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I. Si a et b sont deux éléments de I, on note $\displaystyle\int_a^b f$ le vecteur :

$$\begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b\,; \\ -\int_{[b,a]} f & \text{si } b < a\,; \\ 0 & \text{si } a = b. \end{cases}$$

Propriétés

- Si $\mathcal{B} = (e_, \ldots, e_n)$ est une base de E, en notant $(f_1,\ldots,f_n)$ les applications composantes de $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$, pour tout $(a,b) \in I^2$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \right) e_i.$$

- Pour tout $(a,b) \in I^2$ et $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$ on a :

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- L'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une application linéaire de $\mathcal{CM}(I,E)$ dans E.

Attention La relation :

$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\mathrm{d}t$$

n'est valable que si $a \leqslant b$. Sans hypothèse sur a et b, on peut écrire :

$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_I \|f\|$$

où I représente le segment d'extrémités a et b

On obtient alors la proposition suivante.

Proposition 36 (Relation de Chasles)

Étant donné une fonction f continue par morceaux sur I ainsi que a, b et c trois points de I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

III Primitives et intégrales

1 Primitives des fonctions continues

Définition 11

Soit $f \in \mathcal{C}(I,E)$. Une application g de I dans E est une **primitive** de f si g est dérivable sur I avec $g' = f$.

Proposition 37

Soit $f \in \mathcal{C}(I,E)$. Deux primitives sur I de f diffèrent d'une constante.

Démonstration. En effet, la dérivée de leur différence est nulle sur l'intervalle I. □

Remarque La réciproque est immédiate : si F est une primitive de f et $G = F + a$, où $a \in E$, alors G est une primitive de f.

2 Théorème fondamental

Théorème 38

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et $a \in I$.

1. L'application :
$$\begin{array}{rccc} g_a : & I & \longrightarrow & E \\ & t & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s \end{array}$$
est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
2. Pour toute primitive g de f, et tout couple (α, β) de I^2, on a :
$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = g(\beta) - g(\alpha).$$

Démonstration page 374

Remarque Si la fonction f est seulement continue par morceaux sur I, l'application g_a du théorème précédent est encore continue puisque localement lipschitzienne comme on peut le vérifier en utilisant l'inégalité :
$$\|g_a(x) - g_a(y)\| \leqslant |x - y| \sup_J \|f\|,$$
où J est un segment contenant a, x et y.
La démonstration précédente donne en outre la dérivabilité de g_a en tout point x de continuité de f avec $g_a'(x) = f(x)$. On dit encore par extension que g_a est une primitive de f (ainsi que toutes les fonctions $g_a + \mathrm{Cte}$).

Corollaire 39

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on a, pour tout $(a, b) \in I^2$:
$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

3 Inégalité des accroissements finis

Théorème 40

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de I.

S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \overset{\circ}{I} \quad \|f'(t)\| \leqslant \lambda$, alors on a :
$$\forall (a, b) \in I^2 \quad \|f(b) - f(a)\| \leqslant \lambda\,|b - a|.$$

Démonstration page 374

Interprétation cinématique Un mobile qui se déplace à une vitesse instantanée de norme inférieure à v pendant un temps t, se trouve au maximum à une distance $v\,t$ de son point de départ.

IV Formules de Taylor

Dans cette section, n est un entier naturel.

1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 41 (formule de Taylor avec reste intégral)

Étant donné une fonction $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$, on a pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n$$

avec :

$$\begin{aligned} R_n &= \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}\big(a + t\,(b-a)\big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Démonstration page 375

Exemple Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction :

$$g : x \mapsto \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a $g^{(n+1)} = f$.
En effet, on a :

$$g : x \mapsto F(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} F^{(k)}(a),$$

où F est une primitive $(k+1)$-ième de f, ce qui démontre, par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. La relation $g^{(n+1)} = f$ vient de ce que la dérivée $(k+1)$-ième d'une fonction polynomiale de degré au plus k est la fonction nulle.

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 42

Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$, on a pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\, M_{n+1}$$

où M_{n+1} est un majorant de $\|f^{(n+1)}\|$ entre a et b.

Démonstration page 375

Remarque On voit dans la démonstration du théorème précédent, l'intérêt, dans la formule de Taylor, de la deuxième expression du reste intégral qui évite la discussion suivant les positions relatives de a et b.

3 Développements limités

Proposition 43

Si $f \in \mathcal{C}(I,E)$ admet un développement limité à l'ordre n en $a \in I$:

$$f(x) = \alpha_0 + (x-a)\,\alpha_1 + \cdots + (x-a)^n\,\alpha_n + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big),$$

toute primitive g de f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en a, obtenu en intégrant terme à terme le développement limité de f, c'est-à-dire :

$$g(x) = g(a) + (x-a)\,\alpha_0 + \frac{(x-a)^2}{2}\,\alpha_1 + \cdots + \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\,\alpha_n + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big).$$

Démonstration page 375

4 Formule de Taylor-Young

Théorème 44

Toute fonction $f \in \mathcal{C}^n(I,E)$ admet un développement limité à l'ordre n en $a \in I$ donné par la formule de Taylor–Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big).$$

Démonstration page 375

Remarque On notera bien la différence entre d'un côté la formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange et de l'autre la formule de Taylor-Young. Cette dernière donne un résultat local, sur le comportement de la fonction lorsque t tend vers a. Les deux premières sont des résultats globaux, donnant des informations sur les valeurs prises par la fonction sur la totalité de l'intervalle.

Exemple On peut dériver terme à terme le développement limité à l'ordre n d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.
En effet, d'après l'unicité du développement limité, il s'agit du développement de Taylor–Young de f, dont la dérivée est le développement de f'.

V Arcs paramétrés

1 Généralités

Définition 12

- Un **arc paramétré** est la donnée de $\Gamma = (I, \gamma)$, où I est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et γ une fonction de I dans E.
- Le **support** de Γ est l'ensemble $\gamma(I)$.
- Un **point de l'arc** est la donnée d'un couple $\big(t, \gamma(t)\big)$, où $t \in I$.

  Le point $\big(t, \gamma(t)\big)$ est le **point de paramètre t**.
- L'arc $\Gamma = (I, \gamma)$ est de **classe $\mathcal{C}^1$** si f l'est.

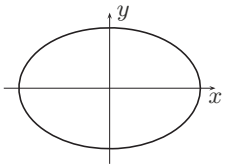
Remarques

- Un point (t, M) de l'arc Γ est **simple** si t est l'unique élément de I tel que $f(t) = M$. Il est **multiple** sinon. On dit que l'arc est simple si tous ses points sont simples, ou, ce qui revient au même, si γ est une application injective.
- Un point $M \in E$ est un **point géométrique** de l'arc s'il existe $t \in I$ tel que $\gamma(t) = M$.
- Lorsque $\dim E = 2$, on parle parfois d'**arc plan**.

Exemples

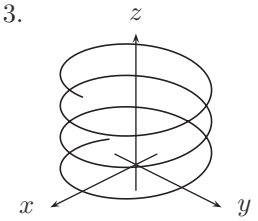
1. Soit $(a, u) \in E \times \big(E \setminus \{0\}\big)$ et $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & a + tu. \end{array}$

   L'arc $\Gamma = (I, \gamma)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et tous les points sont simples. Le support de Γ est la droite affine $a + \mathbb{R}u$.

2. 

   Soit $(a, b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Le support de l'arc $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$, où $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$ est une **ellipse**.
   L'arc est de classe $\mathcal{C}^1$.

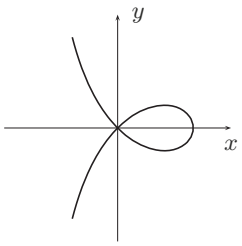
Remarque Si l'on se restreint à $[0, 2\pi[$, on obtient un arc qui a le même support, dont tous les points sont simples.

3. 

   Soit $(r, k) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$. L'arc (I, γ), où

   $$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (r\cos t, r\sin t, kt) \end{array}$$

   est une **hélice**. Cet arc est de classe $\mathcal{C}^1$ et tous ses points sont simples.

4. 

Considérons l'arc paramétré $(\mathbb{R}, f)$, où f est définie par :

$$f(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, t\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right).$$

Le point $\big(1,(0,0)\big)$ est multiple, car $\big(-1,(0,0)\big)$ est également un points de l'arc. On le voit sur cet exemple, la notion de point d'un arc est plus précise que celle de point géométrique : elle permet de distinguer les différents passages par un point du support.

2 Tangente à un arc paramétré

Il a été vu en première année que la tangente au graphe d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ en un point t_0 où f est dérivable est la droite affine d'équation :

$$\mathcal{T} :\ y = f'(t_0)(x - t_0) + f(t_0).$$

À la fonction f on peut associer de manière naturelle l'arc paramétré $\Gamma = (I, \gamma)$, où $\gamma : t \mapsto \big(t, f(t)\big)$. Cela étant posé, on peut remarquer que $\gamma'(t_0) = \big(1, f'(t_0)\big)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{T}$, c'est-à-dire que $\gamma'(t_0)$ dirige la tangente. Cela conduit aux définitions suivantes.

Définition 13

Soit $\Gamma = (I, \gamma)$ un arc paramétré.

- On dit que $t_0 \in I$ est un **paramètre régulier** si γ est dérivable en t_0 et si $\gamma'(t_0) \neq 0$.
- On dit que Γ est un **arc paramétré régulier** si tous les points de Γ sont des points de paramètres réguliers.

Définition 14

Soit $\Gamma = (I, \gamma)$ un arc paramétré et t_0 un paramètre régulier. La **tangente au point de paramètre t_0** est la droite affine $f(t_0) + \mathbb{R}f'(t_0)$.

Remarque Conformément au programme, la tangente à un arc paramétré n'est définie qu'en un point de paramètre régulier. Voir page 366 une interprétation géométrique de la tangente.

Exemples

1. Droite. Soit $(a,u) \in E \times \big(E \setminus \{0\}\big)$ et $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & a + tu. \end{array}$

   Tous les points sont réguliers. En tout point, la tangente est la droite affine $a + \mathbb{R}u$, c'est-à-dire la tangente et le support de l'arc sont confondus.

2. Hélice. Soit $(r,k) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$. L'arc (I, γ), où $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (r\cos t, r\sin t, kt) \end{array}$

   est régulier. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la tangente au point de paramètre t est la droite :

   $$f(t) + \mathbb{R}(-r\sin t, r\cos t, k).$$

Détermination pratique d'une tangente, d'une normale pour un arc plan

Dans cette section, E est de dimension 2, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. On note $M(\alpha, \beta)$ l'élément de E de coordonnées (α, β) dans cette base.
De plus, $\Gamma = (I, \gamma)$ est un arc paramétré.
D'après la définition 14 de la page précédente, un point $M(x, y) \in E$ est un point de la tangente à Γ au point de paramètre régulier t_0 si, et seulement si :

$$\boxed{\det_{\mathcal{B}}(M - \gamma(t_0), \gamma'(t_0)) = 0.}$$

Ainsi, en notant $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ et $\gamma'(t_0) = (x'_0, y'_0)$, une équation de la tangente à Γ au point de paramètre t_0 est donnée par :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x'_0 \\ y - y_0 & y'_0 \end{vmatrix} = y'_0\,(x - x_0) - x'_0\,(y - y_0) = 0.$$

Exemple Soit $(a, b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ et $\gamma : t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$.
Tous les points de l'arc $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$ sont réguliers et une équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ au point de paramètre t_0 est donnée par :

$$\begin{vmatrix} x - a\cos t_0 & -a\sin t_0 \\ y - b\sin t_0 & b\cos t_0 \end{vmatrix} = b\cos(t_0)x + a\sin(t_0)y - ab = 0.$$

On suppose dans la suite E muni d'un produit scalaire.

Définition 15

Soit $\Gamma = (I, \gamma)$ un arc paramétré et t_0 un paramètre régulier. La **normale au point de paramètre t_0** est la perpendiculaire à la tangente au point de paramètre t_0 passant par $\gamma(t_0)$

D'après la définition 14 de la page précédente, un point $M(x, y) \in E$ est un point de la normale à Γ au point de paramètre régulier t_0 si, et seulement si :

$$\boxed{(\,M - \gamma(t_0) \mid \gamma'(t_0)\,) = 0.}$$

Ainsi, en notant $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ et $\gamma'(t_0) = (x'_0, y'_0)$, une équation de la normale à Γ au point de paramètre t_0 est donnée par :

$$x'_0(x - x_0) + y'_0(y - y_0) = 0.$$

p.375

Exercice 4

Considérons l'arc $\Gamma = (\mathbb{R}, f)$, où $f(t) = (t, t^2/2p)$ et $p \in \mathbb{R}_+^*$. Le support de l'arc est une **parabole**.

1. Déterminer les normales à l'arc.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points par lesquels passent trois normales à l'arc Γ.

3 Étude d'un arc paramétré

Un exemple

On munit $\mathbb{R}^2$ de la base canonique (e_1, e_2).
Considérons l'arc paramétré par :

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$$

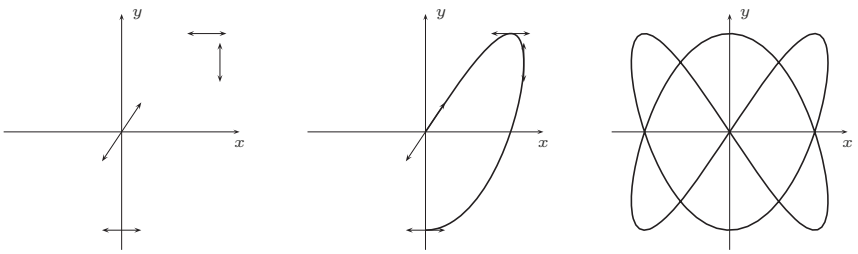
- Le domaine de définition de cet arc est $\mathbb{R}$. Cherchons à restreindre le domaine d'étude de $\Gamma = (\mathbb{R}, \gamma)$, où $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$.
  - Puisque les fonctions x et y sont 2π-périodiques, on peut restreindre l'étude à $[-\pi, \pi]$.
  - Les fonctions x et y étant toutes les deux impaires, on peut restreindre l'étude à $[0, \pi]$. En effet, $\gamma(-t) = -\gamma(t)$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$ et donc l'ensemble $\gamma([-\pi, 0])$ peut être déduit de $\gamma([0, \pi])$ par une symétrie par rapport à 0 (une rotation d'angle π).
  - Pour tout $t \in [0, \pi]$, on a :
    $$x(\pi - t) = -x(t) \qquad \text{et} \qquad y(\pi - t) = y(t).$$
    On peut ainsi restreindre l'étude à $[0, \pi/2]$. En effet l'ensemble $\gamma([0, \pi])$ peut être déduit de $\gamma([0, \pi/2])$ par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, c'est-à-dire la droite $\mathrm{Vect}(e_2)$.
- Étudions les fonctions x et y sur $[0, \pi/2]$.

  L'arc est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ et :
  $$\forall t \in [0, \pi/2] \quad \begin{cases} x'(t) = 2\cos(2t) \\ y'(t) = 3\cos(3t). \end{cases}$$
  On peut ainsi facilement obtenir les tableaux de variations suivant.

t	0		$\pi/6$		$\pi/4$		$\pi/2$
$x'(t)$		$+$		0		$-$	
x	0	↗		1		↘	0
$y'(t)$	$+$		0		$-$		0
y	0	↗		1		↘	-1

- Il ne reste plus qu'à tracer le support. Pour cela on commence souvent par dessiner quelques points remarquables avec leur tangente (en particulier

les points ayant une tangente horizontale (les points de paramètres t tels que $y'(t) = 0$) et les points ayant une tangente verticale (les points de paramètres t tels que $x'(t) = 0$). Ensuite, on tracer la partie de l'arc correspondant au domaine d'étude puis on complète à l'aide des symétries observées.



Plan d'étude d'un arc plan

Pour étudier un arc paramétré par γ, où l'on note $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, on procède général comme suit.

- On commence par préciser le domaine de définition.
- On peut chercher à réduire le domaine d'étude en mettant en évidence des symétries.
- On précise la classe et on étudie les fonctions x et y.
- On trace enfin le support de l'arc.

4 Approfondissement : interprétation géométrique de la tangente

Considérons un arc paramétré $\Gamma = (I, \gamma)$ et $t_0 \in I$.
Si t_0 est un paramètre régulier, on peut interpréter la tangente à Γ au point de paramètre t_0 comme étant la position limite des cordes $\big(\gamma(t_0)\gamma(t)\big)$ lorsque t tend vers t_0. Mais que signifie exactement « position limite » ?
On dira qu'une droite $D = a_0 + \mathbb{R}u_0$, avec $u_0 \in E \setminus (0)$, est une position limite lorsque t tend vers t_0 de la famille de droites $(D_t)_{t\in J}$, où J est un intervalle d'intérieur non vide ou un intervalle d'intérieur non vide privé d'un point, s'il existe deux fonctions $u : J \to E$ et $a : J \to E$ telles que :

- pour tout $t \in J$ on a $D_t = a(t) + \mathbb{R}\, u(t)$;
- les fonctions a et u ont pour limites a_0 et u_0 en t_0.

On peut vérifier que si la famille $(D_t)_{t\in J}$ admet une position limite en t_0, celle-ci est unique (*cf.* l'exercice 5 de la page ci-contre).

Si $\gamma'(t_0)$ est non nul il est aisé de vérifier qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$ pour tout $t \in J = I \cap ([t_0 - \eta[\cup]t_0, t_0 + \eta])$ (*cf.* l'exercice 6). La fonction constante $\gamma(t_0)$ et la fonction $u : t \mapsto \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$ permettent alors facilement de démontrer que la position limite de la famille des cordes $\Big((\gamma(t_0)\gamma(t))\Big)_{t\in J}$ est la tangente $\gamma(t_0) + \mathbb{R}\gamma'(t_0)$.

Remarques

- La famille de cordes $\Big((\gamma(t_0)\gamma(t))\Big)_{t\in J}$ peut avoir une position limite en t_0 sans que γ soit dérivable en t_0.
  Par exemple, si $I = \mathbb{R}_+$ et $\gamma(t) = (t, \sqrt{t}) = \sqrt{t}\,(\sqrt{t}, 1)$, la position limite de la famille des cordes $(\gamma(t)\gamma(0))$ est la droite $(0,0) + \mathbb{R}(0,1)$.
- La famille de cordes $\Big((\gamma(t_0)\gamma(t))\Big)_{t\in J}$ peut avoir une position limite en t_0 même lorsque $\gamma'(t_0) = 0$.
  Par exemple, si $I = \mathbb{R}$ et $\gamma(t) = (t^2, t^3) = t^2\,(1, t)$, la position limite de la famille des cordes $(\gamma(t)\gamma(0))$ est la droite $(0,0) + \mathbb{R}(1,0)$.

p.377

Exercice 5 Démontrer que si la famille de droites $(D_t)_{t\in J}$ admet une position limite en t_0, celle ci est unique.

p.377

Exercice 6 Soit $\Gamma(I, \gamma)$ un arc paramétré et t_0 un paramètre régulier.
Démontrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in I \cap \big([t_0 - \eta, t_0[\cup]t_0, t_0 + \eta]\big)$ on ait $f(t) \neq f(t_0)$.

p.377

Exercice 7 Soit $\Gamma = (I, \gamma)$ est un arc paramétré plan et $t_0 \in I$. On note x_1 et x_2 les applications composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Démontrer que si la fonction $t \mapsto \dfrac{x_2(t) - x_2(t_0)}{x_1(t) - x_1(t_0)}$ admet une limite finie ℓ en t_0, alors la droite d'équation :

$$y = \ell\big(x - x_1(t_0)\big) + x_2(t_0)$$

est la position limite de la famille des cordes $\Big((\gamma(t_0)\gamma(t))\Big)_{t\in I\setminus(t_0)}$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1

- Supposons qu'il existe $\ell \in E$ et $\alpha : I \to E$ tels que $\alpha(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} 0$ et :
$$\forall t \in I \quad f(t) = f(a) + \ell\,(t-a) + (t-a)\,\alpha\,(t)$$
Alors, pour tout $t \in I \setminus \{a\}$, on a $\alpha(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} - \ell$ et donc :
$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \underset{t\to a}{\longrightarrow} \ell.$$
- Réciproquement, supposons f dérivable en a.
Posons $\alpha : I \to E$ l'application définie par :
$$\alpha(t) = \begin{cases} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} - f'(a) & \text{si } t \neq a\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition du vecteur dérivé, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall t \in I \setminus \{a\} \quad \Big(\big(|t-a| \leqslant \eta\big) \Longrightarrow \big|\big|\alpha(t)\big|\big| \leqslant \varepsilon\Big),$$
et donc, puisque $\alpha\,(t) = 0$ si $t = a$, on a :
$$\forall t \in I \quad \Big(|t-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|\big|\alpha(h)\big|\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$
La fonction α a bien 0 pour limite en a.

Proposition 2 On prolonge la fonction $\tau_a(f)$ en a en posant $\tau_a(f)(a) = f'(a)$. Puisque f est dérivable en a, ce prolongement est continu en a et l'on a :
$$\forall t \in I \quad f(t) = f(a) + (t-a)\,\tau_a(f)(t),$$
ce qui prouve la continuité de f en a.

Exercice 1 Pour $x \in E \setminus \{0\}$, la fonction $f : t \mapsto |t|\,x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle n'est pas dérivable en 0 car :
$$\forall t > 0 \quad \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = x \qquad \text{et} \qquad \forall t < 0 \quad \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = -x,$$
et donc les limites à droite et à gauche du taux d'accroissement ne coïncident pas.

Proposition 3 Soit $t \in I \setminus \{a\}$. On a :
$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(t)-f_i(a)}{t-a}\,e_i.$$
Le résultat attendu découle du fait que l'existence d'une limite pour une fonction équivaut à l'existence d'une limite pour chacune de ses fonctions composantes.

De plus, si f est dérivable en a, par définition, on a bien :
$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a)\,e_i.$$

Proposition 10 Si a et t sont deux points distincts de I, alors on a :

$$\frac{B\big(f(t),g(t)\big)-B\big(f(a),g(a)\big)}{t-a}=B\left(\frac{f(t)-f(a)}{t-a},g(t)\right)+B\left(f(a),\frac{g(t)-g(a)}{t-a}\right).$$

Puisque les espaces considérés sont de dimension finie, l'application bilinéaire B est continue. De plus, la fonction g étant dérivable en a, elle est continue. Enfin, puisque les taux d'accroissement $\tau_a(f)$ et $\tau_a(g)$ ont des limites en a, on déduit de l'expression ci-dessus que $\tau_a\big(B(f,g)\big)$ a une limite finie en a et :

$$\tau_a\big(B(f,g)\big)(t)\underset{t\to a}{\longrightarrow}B\big(f'(a),g(a)\big)+B\big(f(a),g'(a)\big),$$

ce qui prouve la dérivabilité de $B(f,g)$ en a et l'égalité :

$$B(f,g)'(a)=B\big(f'(a),g(a)\big)+B\big(f(a),g'(a)\big).$$

Exercice 2

1. L'application $A\mapsto {}^tA$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est linéaire, par conséquent la fonction $f:t\mapsto {}^tM(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(t)={}^t(M'(t))$, pour tout $t\in\mathbb{R}$ (*cf.* le corollaire 9 de la page 348). On a ainsi $\big({}^tM\big)'={}^t(M')$

   Le produit matriciel définit une application bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Il vient alors du corollaire 11 de la page 348 que $\varphi:t\mapsto {}^tM(t)M(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus :

   $$\forall t\in\mathbb{R}\quad \varphi'(t)={}^tM'(t)M(t)+{}^tM(t)M'(t).$$

2. Si pour tout $t\in\mathbb{R}$ la matrice $M(t)$ est orthogonale, alors la fonction φ est la fonction constante I_n et donc $\varphi'=0$. Ainsi :

   $$\forall t\in\mathbb{R}\quad {}^tM'(t)M(t)+{}^tM(t)M'(t)=0. \qquad (*)$$

   D'autre part, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

   $${}^t\big({}^tM(t)M'(t)\big)={}^tM'(t){}^t\big({}^tM(t)\big)={}^tM'(t)M(t).$$

   Ainsi, d'après $(*)$:

   $${}^t\big({}^tM(t)M'(t)\big)=-{}^tM(t)M'(t),$$

   donc ${}^tM(t)M'(t)$ est une matrice antisymétrique.

Proposition 12 Prolongeons le taux d'accroissement $\tau_b(f)$ de f en b en posant :

$$\tau_b(f)(b)=f'(b).$$

On a :

$$\forall x\in I\quad f(x)=f(b)+(x-b)\,\tau_b(f)(x).$$

On en déduit :

$$\forall t\in J\quad f\big(\varphi(t)\big)=f(b)+\big(\varphi(t)-b\big)\,\tau_b(f)\big(\varphi(t)\big).$$

En d'autres termes :

$$\forall t\in J\setminus\{a\}\quad \frac{f\big(\varphi(t)\big)-f\big(\varphi(a)\big)}{t-a}=\tau_a(\varphi)(t)\;\tau_b(f)\big(\varphi(t)\big). \qquad (*)$$

Puisque f est dérivable en b, la fonction $\tau_b(f)$ est continue en b. Par continuité de $\tau_b(f)$ en b et de φ en a, on obtient :

$$\tau_b(f)\big(\varphi(x)\big) \underset{t\to a}{\longrightarrow} \tau_b(f)(b) = f'(b).$$

De plus, la dérivabilité de φ en a entraîne $\tau_a(\varphi)(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} \varphi'(a)$. Finalement, de la relation $(*)$ on déduit :

$$\frac{f\big(\varphi(t)\big) - f\big(\varphi(a)\big)}{t-a} \underset{t\to a}{\longrightarrow} \varphi'(a)\, f'(b),$$

c'est-à-dire la dérivabilité de $f\circ\varphi$ en a, avec :

$$(f\circ\varphi)'(a) = \varphi'(a)\, f'(b) = \varphi'(a)\, f'\big(\varphi(a)\big).$$

Proposition 16 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. D'après le corollaire 9 de la page 348, on sait que la fonction $L\circ f$ est dérivable sur I et que $(L\circ f)' = L\circ f'$, fonction qui est continue comme composée de fonctions continues.

Exercice 3 On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ de la base $(1,i)$.

- Les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont les applications composantes de f dans la base $(1,i)$. Ainsi, d'après la proposition 14 de la page 349, f est de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si, les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont, ce qui démontre l'équivalence entre (i) et (ii). Les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $-\operatorname{Im} f$ étant les applications composantes de $\bar{f}$ dans la base $(1,i)$, on obtient l'équivalence entre (i) et (iii).
- On a immédiatement :

$$D(\bar{f}) = \overline{Df}.$$

Proposition 20 Démontrons ce résultat par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$. Il sera alors vrai de façon immédiate pour $k=\infty$.

- La propriété est évidente pour $k=0$.
- Supposons le résultat vrai pour un certain $k\in\mathbb{N}$ et considérons deux fonctions $f\in\mathcal{C}^{k+1}(I,E)$ et $g\in\mathcal{C}^{k+1}(I,F)$, ainsi qu'un entier $n\leqslant k+1$. Ces fonctions sont donc de classe $\mathcal{C}^k$ et l'hypothèse de récurrence permet d'écrire, pour $n\leqslant k$:

$$\big(B(f,g)\big)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} B(f^{(p)}, g^{(n-p)}).$$

La fonction $\big(B(f,g)\big)^{(n)}$ est une combinaison linéaire d'images par B de couples de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, donc est de classe $\mathcal{C}^1$. Par suite $B(f,g)$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et l'on a, à l'aide de l'hypothèse de récurrence et de la formule de Pascal sur les coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}\big(B(f,g)\big)^{(n+1)} &= \left(\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}B\big(f^{(p)},g^{(n-p)}\big)\right)'\\ &= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\Big(B\big(f^{(p)},g^{(n-p+1)}\big)+B\big(f^{(p+1)},g^{(n-p)}\big)\Big)\\ &= \binom{n}{0}B\big(f,g^{(n+1)}\big)+\binom{n}{n}B\big(f^{(n+1)},g\big)\\ &\quad+\sum_{p=1}^{n}\left(\binom{n}{p}+\binom{n}{p-1}\right)B\big(f^{(p)},g^{(n-p+1)}\big)\\ &= \sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}B\big(f^{(p)},g^{(n+1-p)}\big)\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat pour $k+1$.

Proposition 22 Démontrons ce résultat par récurrence pour $k \in \mathbb{N}$, le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ s'en déduisant immédiatement.

- Pour $k=0$, c'est le résultat sur la composition d'une application linéaire et d'une application continue.
- Supposons le résultat vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et considérons $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I,E)$.

  Alors f est dérivable et, par le corollaire 9 de la page 348, $L\circ f$ est dérivable avec $(L\circ f)' = L\circ f'$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à f', la fonction $L\circ f'$ est de classe $\mathcal{C}^k$, puisque f' est de classe $\mathcal{C}^k$. Cela prouve que $L\circ f$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

  D'où le résultat pour $k+1$.

Proposition 23 Démontrons ce résultat par récurrence pour $k \in \mathbb{N}$, le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ s'en déduisant immédiatement.

- Pour $k=0$, c'est le résultat sur la composition des applications continues.
- Supposons le résultat vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et considérons $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I,E)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^{k+1}(J,\mathbb{R})$ telles que $\varphi(J)\subset I$.

  Alors f et φ sont dérivables et, par le corollaire 13 de la page 349, $f\circ\varphi$ est dérivable avec $(f\circ\varphi)' = \varphi'.f'\circ\varphi$. L'hypothèse de récurrence implique que $f'\circ\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$, puisque f' et φ sont de classe $\mathcal{C}^k$. D'autre part, φ' est de classe $\mathcal{C}^k$ et, par produit, $(f\circ\varphi)'$ est de classe $\mathcal{C}^k$, ce qui prouve que $f\circ\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

  D'où le résultat pour $k+1$.

Proposition 24 Fixons une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E.

Supposons que $f'_{|_{I\setminus\{a\}}}$ ait une limite finie ℓ en a.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. La fonction composante f_i dans la base $\mathcal{B}$ est dérivable sur $I\setminus(a)$,

continue sur I. L'hypothèse $f' \underset{\substack{t\to a\\ t\neq a}}{\longrightarrow} \ell$ implique :

$$f'_i \underset{\substack{t\to a\\ t\neq a}}{\longrightarrow} \ell_i.$$

Le théorème de la limite de la dérivée pour les fonctions scalaires donne que f_i est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'_i(a) = \ell_i$. Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(a) = \ell$.

Corollaire 25 Montrons la proposition par récurrence.
Lorsque $k = 0$, le résultat est immédiat.
Supposons le résultat vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction continue sur I, de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $I \setminus \{a\}$ et telle que toutes les dérivées $f^{(r)}$ aient une limite en a, pour $r \in [\![0, k+1]\!]$. L'hypothèse de récurrence donne que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. La fonction $f^{(k)}$ vérifie les hypothèses de la proposition 24 de la page 352. Par conséquent, la fonction $f^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, ce qui démontre le résultat.

Proposition 26 Munissons E d'une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $\sigma = (a_0, \ldots, a_p)$ une subdivision adaptée. Puisqu'une fonction à valeurs dans E est continue si, et seulement si, toutes ses applications composantes le sont, pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$, les fonctions $f_{j|_{]a_i,a_{i+1}[}}$ sont continues. Puisque qu'une fonction dans E admet une limite en un point si, et seulement si, toutes les applications composantes ont des limites en ce point, on en déduit que pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$, les fonctions $f_{j|_{]a_i,a_{i+1}[}}$ ont des limites en a_i et a_{i+1}. Par suite, toutes les applications composantes f_j sont continues par morceaux.
- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que toutes les applications composantes f_j soient continues par morceaux. Pour chacune de ces fonctions f_j il existe une subdivision σ_j qui lui est adaptée. En prenant une subdivision σ plus fine que chacune d'entre elles, celle ci est adaptée à toutes les applications f_j. Toujours en utilisant la caractérisation de la limite et de la continuité en termes d'applications composantes, il vient que f est une fonction en escalier et que σ lui est adaptée.

Proposition 27 Cela résulte immédiatement du fait que toutes les fonctions composantes dans une base de E donnée étant des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ sont bornées.

Proposition 28 Le fait qu'une combinaison linéaire de fonctions continues par morceaux soit une fonction continue par morceaux repose sur la propriété analogue vérifiée par les fonctions composantes.

Lemme 29 Soit $f : [a, b] \to E$ une fonction continue par morceaux et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On note $(f_1, \ldots, f_n)$ les fonctions composantes de f dans la base $\mathcal{B}$ et l'on pose :

$$I = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \right) e_i.$$

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base de E. Posons $P = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On note également $(g_1, \dots, g_n)$ les fonctions composantes de f dans la base $\mathcal{B}'$. Montrons que :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \right) e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b g_i(t)\,\mathrm{d}t \right) e'_i.$$

La formule de changement de bases donne :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} g_j.$$

Par conséquent, par linéarité de l'intégrale (des fonctions scalaires) :

$$\begin{aligned} I = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \right) e_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} g_j(t)\,\mathrm{d}t \right) e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \int_a^b g_j(t)\mathrm{d}t \right) e_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b g_j(t)\,\mathrm{d}t \right) \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b g_j(t)\,\mathrm{d}t \right) e'_j, \end{aligned}$$

ce qui démontre la formule annoncée.

Corollaire 31 Leur différence est une fonction en escalier nulle sauf en un nombre fini de points, donc, en revenant à la définition, qui a une intégrale nulle.

Proposition 34

- Pour une fonction en escalier φ, le résultat découle de l'inégalité triangulaire :

$$\left\| \sum_i (a_i - a_{i-1})\, c_i \right\| \leqslant \sum_i (a_i - a_{i-1})\, \|c_i\|,$$

où $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ est une subdivision adaptée à f et, pour $i \in [\![0, p-1]\!]$, on note c_i valeur prise par f sur $]a_i, a_{i+1}[$.

- Démontrons le résultat dans le cas général. Soit donc $f \in \mathcal{CM}\big([a,b], E\big)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ posons φ_n la fonction définie sur $[a,b]$ par

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) & \text{si } t \in \left[a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right[\\ f(b) & \text{si } t = b. \end{cases}$$

La fonction φ_n est en escalier et :

$$\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

est une somme de Riemann de la fonction f. De même $\|\varphi_n\|$ est une fonction en escalier et $\displaystyle\int_a^b \|\varphi_n\|$ est une somme de Riemann pour la fonction $\|f\|$. On a donc d'après le premier point, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\| \int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^b \big\|\varphi_n(t)\big\|\,\mathrm{d}t, \qquad (*)$$

et d'après le théorème 33 de la page 356 :

$$\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \big\|\varphi_n(t)\big\|\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \big\|f(t)\big\|\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, par passage à la limite dans l'inégalité $(*)$, en utilisant la continuité de la norme, on obtient :

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^b \big\|f(t)\big\|\,\mathrm{d}t.$$

Remarque La démonstration de la convergence des sommes de Riemann est, selon le programme, admise en première année. Le résultat, dont la démonstration est exigible en seconde année est donné page 518.

Théorème 38

1. L'unicité est une conséquence de la proposition 37 de la page 358.
   Sachant que pour une fonction continue $\varphi : I \to \mathbb{K}$, l'application définie sur I par $t \to \displaystyle\int_a^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s$ est une primitive de φ, on vérifie à l'aide des fonctions composantes, que g_a est dérivable et que sa dérivée est f.
2. Le résultat est évident pour l'application g_a d'après la relation de Chasles. Il est vrai pour toute primitive, puisque les primitives de f diffèrent toutes de g_a d'une constante.

Théorème 40

- Si a et b sont à l'intérieur de I, on a :
$$\big\|f(b) - f(a)\big\| = \left\| \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f'\| \leqslant \lambda\,|b-a|.$$
- Dans le cas général, on écrit, pour $(x,y) \in]a,b[^2$:
$$\big\|f(y) - f(x)\big\| \leqslant \lambda\,|y-x|$$
et l'on passe à la limite quand x et y tendent respectivement vers a et b. La fonction f étant continue en a et b, on obtient le résultat annoncé.

Théorème 41 Les deux expressions de R_n sont égales grâce au changement de variable $x = a + t\,(b-a)$.

La formule s'obtient en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ aux fonctions composantes de f.

Théorème 42 Puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment d'extrémités a et b, et donc la fonction $\left\|f^{(n+1)}\right\|$ l'est également. Cela justifie l'existence de M_{n+1}.

Pour établir le résultat, il suffit de majorer le reste intégral :

$$\|R_n\| \leqslant |b-a|^{n+1} \int_0^1 M_{n+1}\,\frac{(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\,M_{n+1}.$$

Proposition 43 Comme :

$$g(x) = g(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

il suffit de montrer que si $h(x) = \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$, alors :

$$\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in I \quad |t-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \|h(t)\| \leqslant \varepsilon\,|t-a|^n.$$

Pour $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$, on a :

$$\left\|\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant |x-a| \sup_{[a,x]} \|h\| \leqslant \varepsilon\,|x-a|^{n+1}$$

ce qui prouve le résultat.

Théorème 44 Démontrons le résultat par récurrence.

- Si $n = 0$, la continuité de f donne $f(x) = f(a) + \mathrm{o}(1)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$. Considérons une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$. On a $f' \in \mathcal{C}^{n-1}$ et :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) + \mathrm{o}\big((x-a)^{n-1}\big),$$

soit par intégration (*cf.* la proposition 43 de la page 361) :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big).$$

Exercice 4

1. L'arc Γ est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ car les applications composantes sont polynomiales. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f'(t) = (1, t/p)$. Il s'ensuit que l'arc est régulier et la normale au point de paramètre t a pour équation :

$$x - t + \frac{t}{p}\left(y - \frac{t^2}{2p}\right) = x + \frac{t}{p}\,y - \left(t + \frac{t^3}{2p^2}\right) = 0$$

2. Il s'agit de déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquelles il existe (au moins) trois réels distincts t_1, t_2, t_3 tels que :

$$x + \frac{t}{p}\, y - \left(t + \frac{t^3}{2p^2}\right) = 0.$$

En d'autres termes, on cherche à quelle(s) conditions le polynôme :

$$P = \frac{X^3}{2p^2} - \left(\frac{y}{p} - 1\right) X - x$$

admet admet trois racines réelles distinctes. Commençons par remarquer que :

$$P' = \frac{3}{2p^2} X^2 - \left(\frac{y}{p} - 1\right)$$

Cas $y/p \leqslant 1$ La fonction polynomiale P' est alors à valeurs positive et s'annule au plus une fois. Ainsi, la fonction P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et, puisqu'elle est continue, elle admet au plus (exactement) un zéro.

Cas $y/p > 1$ En posant $t_0 = \sqrt{\frac{2p}{3}\,(y-p)}$, on obtient le tableau de variations suivant.

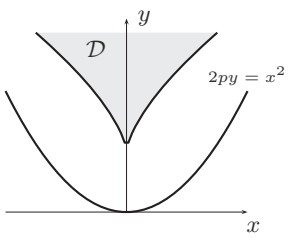
t	$-\infty$		$-t_0$		t_0		$+\infty$
$P'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
P	$-\infty$	↗	$P(-t_0)$	↘	$P(t_0)$	↗	$+\infty$

L'étude du tableau de variations montre que P admet trois racines réelles distinctes si, et seulement si, $P(t_0)P(-t_0) < 0$. Le calcul donne :

$$\begin{aligned}
P(t_0)P(-t_0) &= \left(\frac{t_0^3}{2p^2} - \left(\frac{y}{p} - 1\right) t_0 - x\right)\left(-\frac{t_0^3}{2p^2} + \left(\frac{y}{p} - 1\right) t_0 - x\right) \\
&= x^2 - \left(\frac{t_0^3}{2p^2} - \left(\frac{y}{p} - 1\right) t_0\right)^2 \\
&= x^2 - t_0^2 \left(\frac{t_0^2}{2p^2} - \frac{y}{p} + 1\right)^2 \\
&= x^2 - \frac{8}{27p}(y-p)^3
\end{aligned}$$

En remarquant que $x^2 - \frac{8}{27p}(y-p)^3 \geqslant 0$ lorsque $y \leqslant p$, on en déduit qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $M(x, y)$ soit un point par lequel passe trois normales à Γ est :

$$27px^2 - 8(y-p)^3 < 0.$$



En conclusion :

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 27px^2 < 8(y-p)^3\right\}$$

Exercice 5 Soit D et Δ deux positions limites. Il existe donc des fonctions $a : J \to E$, $b : J \to E$, $u : J \to E$ et $v : J \to E$ telles que :

- $D_t = a(t) + \mathbb{R}u(t) = b(t) + \mathbb{R}v(t)$ pour tout $t \in J$;
- $a(t) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} a_0$, $b(t) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} b_0$, $u(t) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} u_0$ et $v(t) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} v_0$ et u_0 et v_0 sont non nuls ;
- $D = a_0 + \mathbb{R}u_0$ et $\Delta = b_0 + \mathbb{R}v_0$.

Remarquons que pour tout $t \in J$, il existe $\lambda(t) \in \mathbb{R}^*$ tel que $v(t) = \lambda(t)\, u(t)$.
Puisque u_0 est non nul, il existe une composante u_{0i} non nulle de u. Puisque $v_i = \lambda\, u_i$, il vient que λ admet une limite finie λ_0 en t_0 et donc, en passant à la limite, $v_0 = \lambda_0 u_0$.
Par ailleurs, pour $t \in J$, il existe un réel $\mu(t)$ tel que $b(t) = a(t) + \mu(t)u(t)$. Toujours en considérant les applications composantes, il vient que μ admet une limite finie μ_0 en t_0 et donc, en passant à la limite, $b_0 = a_0 + \mu_0 u_0$. Il s'ensuit que $b_0 \in D$ et puisque $v_0 = \lambda_0 u_0$, il vient que $D = \Delta$.

Exercice 6
Puisque $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(t_0) \neq 0$, il existe un voisinage V de t_0 tel que :

$$\forall t \in V \quad t \neq t_0 \implies \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \neq 0.$$

La conclusion est alors immédiate.

Exercice 7 Par hypothèse, $t \mapsto \frac{x_2(t)-x_2(t_0)}{x_1(t)-x_1(t_0)}$ est définie au voisinage de 0. Par ailleurs, pour $t \neq t_0$, la corde $\big(\gamma(t_0)\gamma(t)\big)$ est dirigé par le vecteur :

$$\Big(1, \frac{x_2(t) - x_2(t_0)}{x_1(t) - x_1(t_0)}\Big),$$

du moins si t est suffisamment proche de t_0. La conclusion s'ensuit.

Remarque Si $\frac{x_1(t)-x_1(t_0)}{x_2(t)-x_2(t_0)}$ admet une limite finie ℓ en t_0, alors la droite d'équation :

$$x = \ell\big(y - x_2(t_0)\big) + x_1(t_0)$$

est une position limite de la famille des cordes $\Big(\big(\gamma(t_0)\gamma(t)\big)\Big)_{t\in I\setminus(t_0)}$.

S'entraîner et approfondir

Parmi les exercices qui suivent, certains traitent de fonctions scalaires et non de fonctions vectorielles. Ils sont donnés à titre de révision du cours de première année.

7.1 Soit f une fonction à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie et g une fonction à valeurs réelles positives. On suppose f et g dérivables sur un intervalle I et $\|f'\| \leqslant g'$ sur I.

Si a et b sont deux points de I tels que $a < b$, en considérant l'ensemble :

$$A = \big\{x \in [a,b] \;\big|\; \|f(x) - f(a)\| \leqslant g(x) - g(a) + \varepsilon\,(x-a)\big\},$$

où $\varepsilon > 0$, montrer :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a).$$

7.2 Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$ et telle qu'il existe x_0 vérifiant $f(x_0)\,f'(x_0) \geqslant 0$.

1. Prouver l'existence de $x_1 \geqslant x_0$ tel que $f'(x_1) = 0$.
2. Prouver l'existence d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad f^{(k)}(x_k) = 0.$$

7.3 Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans E telle que les fonctions $\|f\|$ et $\|f''\|$ soient majorées respectivement par M_0 et M_2.

1. Montrer que pour tout $h > 0$, la fonction $\|f'\|$ est majorée par $\dfrac{2M_0}{h} + \dfrac{h\,M_2}{2}$.
2. En déduire que la fonction $\|f'\|$ est majorée par $2\sqrt{M_0\,M_2}$.
3. Soit f définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = 2(x-1)^2 - 1.$$

Quelles sont les bornes de f, f' et f'' sur $[0,1]$?

En utilisant la fonction cosinus, prolonger f en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ pour laquelle la majoration de la question précédente est optimale.

7.4 Soit $t \mapsto X(t)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $X(0)$ soit une matrice de rotation. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout t, $X(t)$ est une matrice de rotation ;

(ii) il existe une application continue A de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n telle que $\forall t \in \mathbb{R} \quad X'(t) = A(t)\,X(t)$.

7.5 Soit $f \in \mathcal{C}^1\big([0,1]\mathbb{R}\big)$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. On note cotan la fonction $\cos / \sin$.

1. Existence et comparaison de :

$$I_1 = \int_0^1 f(t)\,f'(t)\,\operatorname{cotan}(\pi t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_0^1 f(t)^2\left(1 + \operatorname{cotan}^2(\pi t)\right)\mathrm{d}t.$$

2. Montrer :
$$\int_{[0,1]} f'^2 \geqslant \pi^2 \int_{[0,1]} f^2$$
en précisant les cas d'égalité.

7.6 Montrer qu'il existe des constantes A et B telles que pour toute fonction 2π-périodique f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on ait :
$$\sup_{\mathbb{R}} |f| \leqslant A \int_{[0,2\pi]} |f'| + B \int_{[0,2\pi]} |f|.$$
Le résultat subsiste-t-il pour les fonctions complexes ?

★ **7.7** *(Polytechnique 2015)*
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.
Pour toute fonction $f : [0,1] \to E$ et subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ de $[0,1]$, on note :
$$V(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{p-1} \big\| f(a_{i+1} - f(a_i) \big\| \qquad \text{et} \qquad \mathcal{V}(f) = \sup_{\sigma} V(f,\sigma) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

1. Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et f est monotone, calculer $\mathcal{V}(f)$.
2. Donner un exemple où $\mathcal{V}(f) = +\infty$.
3. Si f est continue, a-t-on nécessairement $\mathcal{V}(f) < +\infty$?
4. Démontrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\mathcal{V}(f) = \displaystyle\int_0^1 \|f'\|$.
5. Lorsque $E = \mathbb{R}$ démontrer que $\mathcal{V}(f)$ est fini si, et seulement si, f est la différence de deux applications croissantes.

7.8 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ strictement croissante et continue. Montrer que :
$$\inf_{\mu} \int_a^b \big| f(t) - \mu \big| \, \mathrm{d}t$$
est atteint pour l'unique valeur $\mu = f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

★ **7.9** Soit f une fonction continue et concave sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 1$. On veut montrer :
$$\int_0^1 x\, f(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3} \left(\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x \right)^2. \qquad (*)$$

1. Vérifier le résultat lorsque f est affine, et trouver l'unique fonction affine φ qui réalise l'égalité.
2. En posant $f = g + \varphi$, trouver une condition équivalente à $(*)$ portant sur g.
3. Conclure.

7.10 1. Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$ telle que :

$$\forall x \in [a,b] \quad f(a+b-x) = f(x).$$

Montrer :

$$\int_a^b x\, f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Calculer :

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

7.11 *(Centrale 2015)*

Soit $f \in \mathcal{C}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$ à valeurs positives et dont l'ensemble des zéros est d'intérieur vide.

1. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une unique subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit $g \in \mathcal{C}\big([a,b], E\big)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} g(a_i)$.

7.12 *Théorème du relèvement*

Soit $f : I \to \mathbb{C}^*$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Démontrer qu'il existe une fonction $g : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f = \exp \circ g$. *On donnera une équation différentielle vérifiée par f.*
2. On suppose de plus que $I = \mathbb{R}$ et f est 2π-périodique. Montrer :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(u)}{f(u)}\,\mathrm{d}u \in \mathbb{Z}.$$

7.13 *Spirale logarithmique*

On se place dans le plan euclidien orienté, muni d'un repère orthonormé direct (O, e_1, e_2).

Déterminer les arcs plans réguliers $(\mathbb{R}, \gamma)$ tels que l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{O\gamma(t)}$ et $\gamma'(t)$ soit constant.

7.14 On se place dans un espace euclidien.

Soit (I, γ) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ ne passant pas par 0.

1. On pose $f : t \mapsto \dfrac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$.

Démontrer que $f'(t)$ est orthogonal à $f(t)$, pour tout $t \in I$.

2. Déterminer les arcs paramétrés (I, γ) de classe $\mathcal{C}^1$ ne passant pas par 0, tels que la famille $\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)$ soit liée pour tout t.

7.15 *Mouvement à accélération centrale*
Soit $f : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f''(t)$ soit colinéaire à $f(t)$ pour tout $t \in I$. On note x, y et z les applications composantes.

1. Démontrer que $y'z - yz'$ est une fonction constante.
2. On suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $\big(f(t_0), f'(t_0)\big)$ soit libre. Démontrer que f est à valeurs dans un plan vectoriel.

7.16 1. Étudier l'arc défini par $\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3. \end{cases}$

2. Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à cet arc.

7.17 Soit Γ la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

1. Montrer que toute droite du plan coupe cette courbe en au plus trois points.
2. Réciproquement, on se donne trois points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$. Donner une condition nécéssaire et suffisante portant sur t_1, t_2 et t_3 pour que les trois points soient alignés.
3. La tangente en $M(t)$ recoupe la courbe en $M(t')$. Exprimer t' en fonction de t.
4. Soit $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ trois points alignés de la courbe. Les tangentes en ces points recoupent la courbe respectivement en $M(t'_1)$, $M(t'_2)$ et $M(t'_3)$. Montrer que ces trois points sont alignés.

7.18 1. Étudier et tracer l'arc défini par :

$$\begin{cases} x(t) = t + \dfrac{1}{2t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{t}. \end{cases}$$

Montrer en particulier que l'arc admet un axe de symétrie.

2. Montrer que l'ensemble des points par lesquels passent deux tangentes à l'arc orthogonales entre elles est une droite dont on donnera une équation.

Solution des exercices

7.1 Lorsque f est g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, le résultat est une conséquence immédiate de la proposition 34 de la page 356.

Soit $\varepsilon > 0$. L'ensemble A est non vide puisqu'il contient a et est majoré par b. Par continuité de f et g, il est fermé, donc contient sa borne supérieure, notée c.

Supposons $c < b$. Comme :

$$\lim_{t\to c}\left(\left\|\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\right\| - \frac{g(t)-g(c)}{t-c}\right) = \|f'(c)\| - g'(c) \leqslant 0,$$

on a, au voisinage de c l'inégalité $\left\|\dfrac{f(t)-f(c)}{t-c}\right\| - \dfrac{g(t)-g(c)}{t-c} \leqslant \varepsilon$.

Pour $t > c$ suffisamment proche de c, on en déduit :

$$\begin{aligned}\|f(t)-f(a)\| &\leqslant \|f(t)-f(c)\| + \|f(c)-f(a)\|\\ &\leqslant g(t)-g(c)+\varepsilon\,(t-c)+g(c)-g(a)+\varepsilon\,(c-a)\\ &= g(t)-g(a)+\varepsilon\,(t-a)\end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que c soit la borne supérieure de A.

Donc $c = b$ et $\|f(b)-f(a)\| \leqslant g(b)-g(a)+\varepsilon\,(b-a)$.

En passant à la limite quand ε tend vers 0, on en déduit l'inégalité demandée.

7.2 1. • Si $f'(x_0) = 0$ il suffit de prendre $x_1 = x_0$.

• Si $f(x_0) = 0$ et $f'(x_0) \neq 0$, on peut supposer sans perte de généralité que que $f'(x_0) > 0$, quitte à remplacer f par $-f$. Par conséquent, il existe $\eta > 0$ tel que la fonction f prenne des valeurs strictement positives sur $]x_0, x_0+\eta]$. Par ailleurs, puisque $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $x' > x_0+\eta$ tel que $f(x') < f(x_0+\eta)$. Il s'ensuit que la fonction f ne peut pas être croissante sur $[x_0, x_0+\eta]$; ainsi, il existe $x'' \in [x_0, x_0+\eta]$ tel que $f'(x'') \leqslant 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors, du fait que f' est une fonction continue sur l'intervalle $[x_0, x']$ et $f'(x_0) > 0$, l'existence d'un $x_1 \geqslant x_0$ tel que $f'(x_1) = 0$.

• Si $f(x_0)\,f'(x_0) > 0$, supposons $f(x_0) > 0$ et $f'(x_0) > 0$, ce que l'on peut faire quitte à changer f en $-f$. La fonction f étant continue et tendant vers $0 < f(x_0)$ en $+\infty$, elle admet un maximum en $x_1 \in [x_0, +\infty[$. Ce maximum ne peut pas être atteint en x_0, car $f'(x_0) > 0$, donc $f'(x_1) = 0$.

2. Supposons, pour $k \geqslant 1$, l'existence de x_k tel que $f^{(k)}(x_k) = 0$. Si la fonction $f^{(k+1)}$ ne s'annulait pas sur $]x_k, +\infty[$, elle garderait un signe constant puisqu'elle est continue. La fonction $f^{(k)}$ serait alors strictement monotone sur $[x_k, +\infty[$, et comme elle est nulle en x_k elle aurait une limite (éventuellement infinie) non nulle en $+\infty$. Alors :

$$f^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(x_k) + \int_{x_k}^{x} f^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t$$

tendrait vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, et par récurrence f tendrait vers $\pm\infty$ en $+\infty$, ce qui est contradictoire.

Donc il existe $x_{k+1} > x_k$ tel que $f^{(k+1)}(x_{k+1}) = 0$.

7.3 Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

1. En écrivant l'inégalité de Taylor-Lagrange :
$$\|f(x+h) - f(x) - h\,f'(x)\| \leqslant \frac{h^2}{2}\,M_2,$$
on obtient, à l'aide de l'inégalité triangulaire :
$$\|f'(x)\| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{h\,M_2}{2}\cdot$$
2. Le minimum de $h \mapsto \dfrac{2M_0}{h} + \dfrac{h\,M_2}{2}$ est atteint pour $h = 2\sqrt{M_0/M_2}$, et l'inégalité ci-dessus donne alors :
$$\|f'(x)\| \leqslant 2\sqrt{M_0\,M_2}.$$
3. On a immédiatement :
$$m_0 = \max_{[0,1]} |f| = 1 \qquad m_1 = \max_{[0,1]} |f'| = 4 \quad \text{et} \quad m_2 = \max_{[0,1]} |f''| = 4.$$
On remarque que l'on a $m_1 = 2\sqrt{m_0\,m_2}$. Il suffit donc prolonger f en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ de façon à conserver ces bornes, ce que l'on peut réaliser en posant :
$$\forall x > 1 \quad f(x) = -\cos\bigl(2(x-1)\bigr).$$
Les restrictions de f à chacun des intervalles $[0,1]$ et $[1,+\infty[$ sont effectivement de classe $\mathcal{C}^2$ et l'on a :
$$f'_g(1) = 0 = f'_d(1) \qquad \text{et} \qquad f''_g(1) = 4 = f''_d(1)$$
ce qui prouve que f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

7.4 Rappelons (*cf.* l'exercice 2 de la page 348) que si $t \mapsto M(t)$ est une fonction dérivable à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie sur I, alors ${}^tM : t \mapsto {}^tM(t)$ est dérivable et :
$$\forall t \in I \quad {}^t\bigl(M'(t)\bigr) = \bigl({}^tM\bigr)'(t).$$

- Supposons que $X(t)$ soit une matrice de rotation pour tout t. Puisque $X(t)$ est une matrice orthogonale, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$X'(t) = X'(t)\,{}^tX(t)\,X(t) = A(t)\,X(t),$$
où l'on a posé $A(t) = X'(t)\,{}^tX(t)$.
Les règles de calcul de la transposée donnent :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad {}^tA(t) = X(t)\,{}^tX'(t) \qquad (*)$$
Par ailleurs, toujours du fait que $X(t)$ est une matrice orthogonale, on a :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X(t)\,{}^tX(t) = I_n.$$
En dérivant cette relation, il vient que :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X'(t)\,{}^tX(t) + X(t)\,{}^tX'(t) = 0.$$
On en déduit, pour $t \in \mathbb{R}$:
$$X(t)\,{}^tX'(t) = -X'(t)\,{}^tX(t) = -A(t).$$
De la relation $(*)$ on obtient alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, que $A(t)$ est une matrice antisymétrique.

- Supposons qu'il existe une fonction continue $t \mapsto A(t)$ à valeurs dans l'ensemble des matrices antisymétriques telle que $X'(t) = A(t)X(t)$ pour tout t.

  Posons $f(t) = {}^tX(t)X(t)$ pour t réel. Les règles de dérivation donnent, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= {}^tX'(t)X(t) + {}^tX(t)X'(t) \\ &= {}^t\big(A(t)X(t)\big)X(t) + {}^tX(t)A(t)X(t) \\ &= {}^tX(t){}^tA(t)X(t) + {}^tX(t)A(t)X(t) \end{aligned}$$

  Puisque $A(t)$ est antisymétrique, il vient que $f'(t) = 0$. Il s'ensuit que f est une fonction constante. Puisque $X(0)$ est une matrice de rotation, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = {}^tX(t)X(t) = I_n.$$

  En d'autres termes, $X(t)$ est une matrice orthogonale pour tout t. Par conséquent, l'application $g : t \mapsto \det\big(X(t)\big)$ est à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Par ailleurs, par continuité du déterminant, la fonction g est continue. En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g est constante et puisque $g(0) = 1$, on en conclut que $X(t)$ est une matrice de rotation, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

7.5 1. La fonction $\varphi(t) = f(t)\,\operatorname{cotan}(\pi t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ et se prolonge en une fonction (encore notée φ) continue sur $[0, 1]$ puisque :

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \frac{f'(0)}{\pi} \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 1} \varphi(t) = \frac{f'(1)}{\pi}.$$

   Ainsi les intégrales $I_1 = \displaystyle\int_{[0,]} f'\,\varphi$ et $I_2 = \displaystyle\int_{[0,1} f\,\varphi$ sont définies.

   Par une intégration par parties, pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$2\int_{1/2}^{x} f(t)\,f'(t)\,\operatorname{cotan}(\pi t)\,\mathrm{d}t = f(x)^2\,\operatorname{cotan}(\pi x) + \pi \int_{1/2}^{x} f(t)^2\,\big(1 + \operatorname{cotan}^2(\pi t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

   et comme $f(x)^2\,\operatorname{cotan}(\pi x) = \varphi(x)\,f(x)$ tend vers 0 en 0 et 1, on en déduit $2I_1 = \pi I_2$ c'est-à-dire :

$$\pi \int_{[0,1]} \varphi^2 + \pi \int_{[0,1]} f^2 = 2\int_{[0,1]} \varphi\,f'.$$

2. En prenant le produit scalaire $(\,u \mid v\,) = \displaystyle\int_{[0,1]} u\,v$, cela s'écrit :

$$\pi(\,\varphi \mid \varphi\,) - 2(\,\varphi \mid f'\,) + \pi(\,f \mid f\,) = 0,$$

   soit :

$$(\,\pi\varphi \mid \pi\varphi\,) - 2(\,\pi\varphi \mid f'\,) + \pi^2\,(\,f \mid f\,) = 0$$

   ce qui est équivalent à :

$$(\,\pi\varphi - f' \mid \pi\varphi - f'\,) + \pi^2\,(\,f \mid f\,) - (\,f' \mid f'\,) = 0$$

   d'où l'inégalité $(\,f' \mid f'\,) \geqslant \pi^2\,(\,f \mid f\,)$ demandée.

Les cas d'égalité correspondent aux fonctions f telles que $\pi\varphi - f' = 0$, c'est-à-dire aux fonctions f vérifiant l'équation différentielle $\pi\,\cos(\pi t)\,y - \sin(\pi t)\,y' = 0$ dont les solutions sont de la forme :

$$f(t) = \lambda\,\sin(\pi t) \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

7.6 Soit $f \in \mathcal{C}\big([0,2\pi\big)$. Comme la valeur moyenne de f est comprise entre ses bornes, il existe un réel $x_0 \in [0,2\pi]$ tel que :

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} f.$$

Alors, pour tout $x \in [0,2\pi]$:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui implique :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \big|f(x_0)\big| + \left|\int_{[x,x_0]} f'\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} |f| + \int_{[0,2\pi]} |f'|.$$

Si $f = g + ih$, avec g et h réelles, en appliquant ce qui précède aux fonctions g et h, il vient :

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbb{R}} |f| &\leqslant \sup_{\mathbb{R}} |g| + \sup_{\mathbb{R}} |h| \\ &\leqslant A\int_{[0,2\pi]} \big(|g'| + |h'|\big) + B\int_{[0,2\pi]} \big(|g| + |h|\big) \\ &\leqslant 2A\int_{[0,2\pi]} |f'| + 2B\int_{[0,2\pi]} |f|.\end{aligned}$$

Le résultat est donc conservé, mais avec d'autres constantes.

7.7 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Quitte à prendre $-f$, on peut supposer f croissante car il est clair que $\mathcal{V}(f) = \mathcal{V}(-f)$.
Pour toute subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_p)$ de $[0,1]$ on a :

$$V(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{p-1} \big|f(a_{i+1} - f(a_i)\big| = \sum_{i=0}^{p-1} \big(f(a_{i+1} - f(a_i)\big) = f(1) - f(0).$$

Par conséquent :

$$\mathcal{V}(f) = \big|f(1) - f(0)\big|.$$

2. Considérons f la fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ sur $[0,1]$. Pour toute subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_{2p})$ de $[0,1]$ telle que $a_{2i} \in \mathbb{Q}$ et $a_{2i+1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a :

$$V(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{2p-1} \big|f(a_{i+1} - f(a_i)\big| = \sum_{i=0}^{2p-1} 1 = 2p.$$

Il est clair que pour tout p, il existe de telles subdivisions.
Par conséquent $\mathcal{V}(f) \geqslant 2p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, et donc $\mathcal{V}(f) = +\infty$.

3. La réponse est non. Pour construire un exemple, on soupçonne qu'il est nécessaire de prendre une fonction qui « change une infinité de fois de monotonie ».

   Soyons plus précis. Posons f l'application définie sur $[0,1$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t \sin \frac{\pi}{t} & \text{si } t \in]0,1] ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Il est immédiat que $\big|f(t)\big| \leqslant |t|$ et donc que f est continue en 0. La continuité sur $]0,1]$ étant immédiate, on en conclut que f est continue.
   Soit $p \in \mathbb{N}$ et considérons la subdivision σ_p définie par 0, 1 et les $2/(2k+1)$ pour $k \in [\![1,p]\!]$. On a alors, pour $k \in [\![1,p]\!]$:

$$f\left(\frac{2}{2k+1}\right) = \frac{2}{2k+1}(-1)^k,$$

   et donc, pour $k \in [\![1,p-1]\!]$:

$$\left|f\left(\frac{2}{2k+3}\right) - f\left(\frac{2}{2k+1}\right)\right| = \frac{2}{2k+3} + \frac{2}{2k+1} \geqslant \frac{4}{2k+3}.$$

   Par conséquent :

$$V(f,\sigma_p) \geqslant \sum_{k=1}^{p-1} \left|f\left(\frac{2}{2k+3}\right) - f\left(\frac{2}{2k+1}\right)\right| \geqslant \sum_{k=1}^{p-1} \frac{4}{2k+3}.$$

   Par comparaisons aux séries de Riemann, puisque $\frac{4}{2k+3} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2}{k}$, la série $\sum \frac{4}{2k+3}$ est divergente. Puisqu'elle est à termes positifs, on a :

$$V(f,\sigma_p) \geqslant \sum_{k=1}^{p-1} \frac{4}{2k+3} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

   Ainsi $\mathcal{V}(f) = +\infty$.

Remarque La fonction définie sur $[0,1]$ par $g(t) = f(t^2)$ est dérivable sur $[0,1]$ (elle est dérivable en 0 puisque $g(t) = \mathrm{o}(t)$ au voisinage de 0). Il est immédiat que $\mathcal{V}(g) = \mathcal{V}(f)$ (l'image d'une subdivision de $[0,1]$ par les bijections strictement croissantes $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ est une subdivision). Donc $\mathcal{V}(g) = +\infty$.

- Lorsque $g : [a,b] \to E$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

  Par suite :

$$\big\|g(b) - g(a)\big\| = \left\|\int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_a^b \big\|g'(t)\big\|\,\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Soit $f \in \mathcal{C}^1\big([0,1],E\big)$.

- Pour toute subdivision $\sigma = (a_0,\dots,a_p)$ de $[0,1]$, on déduit de $(*)$:

$$V(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{p-1} \big\|f(a_{i+1}) - f(a_i)\big\| = \sum_{i=0}^{p-1} \left\| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t \right\|$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{p-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \big\|f'(t)\big\|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big\|f'(t)\big\|\,\mathrm{d}t,$$

  la dernière égalité étant une conséquence de la relation de Chasles. Il s'ensuit que $\mathcal{V}(f)$ est finie et :

$$\mathcal{V}(f) \leqslant \int_0^1 \big\|f'(t)\big\|\,\mathrm{d}t.$$

- Lorsque $f : [a,b] \to E$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$(b-a)f(a) = \int_a^b \big(f(a) - f(t)\big)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

  et par l'inégalité triangulaire :

$$(b-a)\big\|f(a)\big\| \leqslant \left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| + \left\| \int_a^b \big(f(a) - f(t)\big)\,\mathrm{d}t \right\|,$$

  ce qui implique :

$$(b-a)\big\|f(a)\big\| \leqslant \left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| + \int_a^b \big\|f(a) - f(t)\big\|\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

  Soit $\varepsilon > 0$ et $f : [0,1] \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque f' est continue sur le segment $[0,1]$, la fonction f' est uniformément continue d'après le théorème de Heine. Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (t,t') \in [0,1]^2 \quad |t - t'| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f'(t) - f'(t')\big| \leqslant \varepsilon.$$

  Fixons un tel η. Choisissons un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que pour $n \geqslant n_0$ la subdivision régulière $\sigma_n = (a_0,\dots a_n)$ soit de pas $\delta_n = \frac{1}{n} \leqslant \eta$, où $a_i = a + i\delta_n$ pour $i \in [\![0,n]\!]$. Pour un tel entier n, du fait que :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \big\|f'(a) - f'(t)\big\|\mathrm{d}t \leqslant \delta_n\,\varepsilon,$$

  on obtient en appliquant $(*)$ à f' entre a_i et a_{i+1},

$$\delta_n\big\|f'(a_i)\big\| \leqslant \left\| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t \right\| + \int_{a_i}^{a_{i+1}} \big\|f'(a) - f'(t)\big\|\mathrm{d}t \leqslant \left\| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t \right\| + \delta_n\varepsilon.$$

  En additionnant ces inégalités, on obtient :

$$\delta_n \sum_{i=0}^{n-1} \big\|f'(a_i)\big\| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t \right\| + \varepsilon. \qquad (**)$$

On reconnaît à gauche une somme de Riemann pour la fonction $\|f'\|$. On peut donc réécrire l'inégalité $(**)$ comme suit :

$$S_n\big(\|f'\|\big) \leqslant V(f,\sigma_n) + \varepsilon.$$

La convergence des sommes de Riemann pour les fonctions continues donne l'existence d'un entier $n \geqslant n_0$ tel que :

$$\int_0^1 \big\|f'(t)\big\|\,\mathrm{d}t - \varepsilon \leqslant S\big(\|f'\|\big),$$

et donc pour un tel entier n :

$$\int_0^1 \big\|f'(t)\big\|\,\mathrm{d}t - 2\,\varepsilon \leqslant V(f,\sigma_n),$$

et donc, par définition :

$$\int_0^1 \big\|f'(t)\big\|\,\mathrm{d}t - 2\,\varepsilon \leqslant \mathcal{V}(f),$$

ce qui implique $\displaystyle\int_0^1 \big\|f'(t)\big\|\,\mathrm{d}t \leqslant \mathcal{V}(f)$ et donc l'égalité d'après le premier point.

4. On peut naturellement définir $\mathcal{V}(f)$ pour toute fonction définie sur un segment $[a,b]$; il n'est pas nécessaire de ce cantonner à $[0,1]$.
   - Si $f = g - h$, où f et g sont croissantes, alors $\mathcal{V}(f) \leqslant \mathcal{V}(g) + \mathcal{V}(h)$ est fini d'après la question 1.
   - Il est immédiat que pour tout $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 1$ on a :
   $$\mathcal{V}(f_{|[a,c]}) \leqslant \mathcal{V}(f_{|[a,b]}) + \mathcal{V}(f_{|[b,c]})$$
   Il s'ensuit que $g : x \mapsto \mathcal{V}\big(f_{|[0,x]}\big)$ est une fonction croissante.
   Soit $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$. En considérant une subdivision σ de $[0,x]$, il vient :
   $$V(f_{|[0,x]},\sigma) + \big|f(y) - f(x)\big| \leqslant \mathcal{V}(f_{|[0,y]}).$$
   Par conséquent :
   $$g(x) + \big|f(y) - f(x)\big| \leqslant g(y).$$
   Ainsi, en posant $h = g - f$, on a donc :
   $$h(y) - h(x) = g(y) - g(x) + f(x) - f(y) \geqslant \big|f(y) - f(x)\big| + f(x) - f(y) \geqslant 0.$$
   La fonction h est donc croissante sur $[0,1]$ et $f = g - h$, ce qui prouve le résultat demandé.

7.8 Évidemment, il suffit de se limiter à $\mu \in [f(a), f(b)]$, c'est-à-dire à $\mu = f(x)$ pour un certain $x \in [a,b]$. Posons donc :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_{[a,b]} \big|f - f(x)\big| \\
&= \int_{[a,x]} \big(f(x) - f\big) + \int_{[x,b]} \big(f - f(x)\big) \\
&= (2x - a - b)\,f(x) - \int_{[a,x]} f + \int_{[x,b]} f
\end{aligned}$$

En utilisant cette égalité pour x et $c = \dfrac{a+b}{2}$, on obtient par différence :

$$\varphi(x) - \varphi(c) = 2\left((x-c)\,f(x) - \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = 2\int_c^x \big(f(x) - f(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

- Si $x \geqslant c$, alors $f \leqslant f(x)$ sur $[c, x]$ et donc $\varphi(x) - \varphi(c) \geqslant 0$.
- Si $x \leqslant c$, alors $f \geqslant f(x)$ sur $[x, c]$ et donc $\varphi(x) - \varphi(c) \geqslant 0$.

De plus, par continuité stricte croissance de la fonction à intégrer, ces inégalités sont strictes pour $x \neq c$, ce qui prouve l'unicité de x, et donc de μ minimisant l'intégrale donnée.

7.9 1. Vérifions le résultat si f est affine.
Soit $a \in \mathbb{R}$.
Pour $f(x) = 1 + a\,x$, on a :

$$\int_0^1 x\,f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{a}{3} \qquad \text{et} \qquad \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2$$

ce qui fait que l'inéquation $(*)$ est équivalente à :

$$\frac{1}{2} + \frac{a}{3} \leqslant \frac{2}{3}\left(1 + \frac{a}{2}\right)^2$$

soit à $(a+1)^2 \geqslant 0$, ce qui est toujours vérifié.
On remarque au passage, que l'égalité a lieu si, et seulement si, $a = -1$.

2. Posons $f = \varphi + g$, où $\varphi(x) = 1 - x$ est la fonction affine qui réalise l'égalité comme nous venons de le voir, et g une fonction concave nulle en 0. L'inégalité $(*)$ est équivalente à :

$$\int_0^1 x\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x + \left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\right)$$

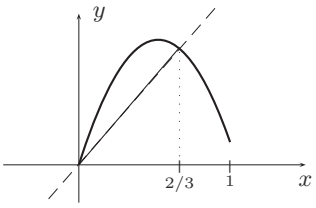
c'est-à-dire à :

$$\int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right) g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \qquad (**)$$

3. Cette inégalité $(**)$ ne peut avoir lieu pour toute fonction g concave nulle en 0 que si le membre de gauche est toujours négatif ou nul, car s'il était strictement positif pour une certaine fonction g, en multipliant g par une réel $\lambda > 0$ suffisamment petit, l'inégalité ne serait plus satisfaite (la fonction $\lambda\,g$ est toujours concave et nulle en 0).
Il ne reste donc plus qu'à montrer que si g est concave nulle en 0, alors :

$$\int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right) g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

Pour cela, on considère la corde passant par les deux points du graphe de g d'abscisses 0 et $2/3$. Sa pente est un certain réel α.



Par concavité de g, on a :

$$\begin{cases} g(x) \geqslant \alpha\, x & \text{si } x \leqslant 2/3 \\ g(x) \leqslant \alpha\, x & \text{si } x \geqslant 2/3 \end{cases}$$

et donc :

$$\forall x \in [0,1] \quad \left(x - \frac{2}{3}\right) g(x) \leqslant \alpha\, x \left(x - \frac{2}{3}\right).$$

On a ainsi $\displaystyle\int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right) g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \alpha \int_0^1 \left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) \mathrm{d}x = 0.$

7.10 1. Par le changement de variable affine $x = a + b - t$, on obtient :

$$I = \int_a^b x\, f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (a+b-t)\, f(t)\,\mathrm{d}t = (a+b) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - I$$

ce qui donne le résultat.

2. Donc :

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

et :

$$I = \int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}.$$

En posant $t = \tan(x/2)$, on obtient :

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = 2$$

soit $I = \pi$.

7.11 1. • Posons pour $x \in [a,b]$: $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

On définit ainsi une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, car f est continue, et croissante, du fait que f est à valeurs positives.
Par ailleurs, puisque $F' = f$, l'ensemble des zéros de F' est d'intérieur vide. Par suite, la fonction F est strictement croissante. Puisqu'elle est strictement croissante et continue sur l'intervalle $[a,b]$, elle définie une bijection de $[a,b]$ sur $\big[0, F(b)\big]$.

• S'il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

alors :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad F(a_{i+1}) - F(a_i) = \frac{1}{n} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En additionnant, en remarquant que $F(a_0) = 0$, on obtient :

$$\forall i \in [\![0, n]\!] \quad F(a_i) = \frac{i}{n} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cela implique, du fait que $\frac{i}{n} \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in \big[0, F(b)\big]$:

$$\forall i \in [\![0, n]\!] \quad a_i = F^{-1}\left(\frac{i}{n} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Cela démontre l'unicité de la subdivision.
Il est clair que la subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ ainsi définie convient.

2. Avec les notations précédentes, on a, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\frac{F(b)}{n} g(a_i) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t) g(a_i)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

- Puisque la fonction g est continue, définie sur segment $[a, b]$ à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie, elle est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2 \quad |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\|g(x) - g(y)\big\| \leqslant \varepsilon.$$

Fixons un tel η.

- Puisque F est une bijection continue de $[a, b]$ sur $[0, F(b)]$, son application réciproque F^{-1} est continue. Elle est également uniformément continue. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \big[0, F(b)\big]^2 \quad |x - y| \leqslant \alpha \Longrightarrow \big|F^{-1}(x) - F^{-1}(y)\big| \leqslant \eta.$$

Fixons un tel α.

- Ainsi, pour entier n vérifiant $\frac{F(b)}{n} \leqslant \alpha$, *i.e.* $n \geqslant F(b)/\alpha$, on a :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad 0 \leqslant a_{i+1} - a_i = F^{-1}\left((i+1)\frac{F(b)}{n}\right) - F^{-1}\left(i\frac{F(b)}{n}\right) \leqslant \eta.$$

Par conséquent, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\left\|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\big(g(a_i) - g(t)\big)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\big\|g(a_i) - g(t)\big\|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{F(b)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(a_i) - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right\| &= \left\|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\big(g(a_i) - g(t)\big)\,\mathrm{d}t\right\| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left\|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\big(g(a_i) - g(t)\big)\,\mathrm{d}t\right\| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \varepsilon\,F(b).\end{aligned}$$

Ainsi, par définition :

$$\frac{F(b)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(a_i) - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par suite :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(a_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

7.12 1. On remarque que :

$$\forall t\in I \quad f'(t) = \left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right) f(t).$$

Donc, f est solution de l'équation différentielle :

$$\mathcal{E} : y' = \left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right) y.$$

Ainsi, il existe $A\in\mathbb{C}$ tel que :

$$\forall t\in I \quad f(t) = A\exp\left(\int_{t_0}^t \frac{f'(s)}{f(s)}\,\mathrm{d}s\right),$$

où $t_0\in I$. Or, $A\neq 0$ puisque f ne s'annule pas et par surjectivité de la fonction exp sur $\mathbb{C}^*$, il existe $B\in\mathbb{C}$ tel que $A=\exp(B)$. Par suite, $f=\exp\circ g$ avec :

$$\forall t\in I \quad g(t) = \int_{t_0}^t \frac{f'(s)}{f(s)}\,\mathrm{d}s + B.$$

Il est clair que la fonction g ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. D'après ce qui précède, $\frac{f'}{f} = g'$. Ainsi :

$$g(2\pi) - g(0) = \int_0^{2\pi} \frac{f'(u)}{f(u)}\,\mathrm{d}u.$$

Par ailleurs, la fonction f étant 2π-périodique :

$$\exp\big(g(2\pi)\big) = f(2\pi) = f(0) = \exp\big(g(0)\big)$$

et donc $g(2\pi)-g(0) = i2\pi\mathbb{Z}$.

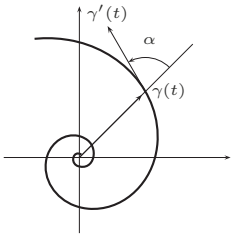
La conclusion est alors immédiate.

7.13 On identifie le plan au plan complexe, orienté par la base $(1,i)$.

Pour que le problème ait un sens, l'arc ne peut pas passer par l'origine. On cherche donc les fonctions $f : I\to\mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $t\in I$, il existe un réel $\lambda(t)>0$ tel que

$$f'(t) = \lambda(t)f(t)e^{i\alpha}.$$

Supposons que f soit une solution du problème. La fonction λ est continue puisque f ne s'annule pas et que l'on a donc :



$$\forall t \in I \quad \lambda(t) = e^{-i\alpha}\,\frac{f'(t)}{f(t)}\cdot$$

Alors f est solution de l'équation différentielle :

$$y' = \lambda(t)e^{i\alpha}y.$$

et par conséquent il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que :

$$\forall t \in I \quad f(t) = a\exp\left(\Lambda(t)e^{i\alpha}\right).$$

où Λ est une primitive de λ. On remarque que l'application Λ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et sa dérivée ne s'annule pas.

Réciproquement, si $\Lambda : I \to \mathbb{R}$ est strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$ et que sa dérivée ne s'annule pas alors, pour $a \in \mathbb{C}^*$, il est facile de vérifier que l'application f définie par :

$$f(t) = a\exp\big(\Lambda(t)e^{i\alpha}\big)$$

est une solution du problème.

7.14 1. La fonction $f : t \mapsto \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$ est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ car γ ne s'annule pas. On a, pour $t \in I$:

$$f'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma(t)\|} - \frac{(\,\gamma'(t)\mid\gamma(t)\,)}{\|\gamma(t)\|^3}\,\gamma(t). \qquad (*)$$

Par produit scalaire avec γ de cette dernière relation, il vient $(\,f'(t)\mid\gamma(t)\,) = 0$ et donc :

$$\forall t \in I \quad f'(t) \in \mathrm{Vect}(\gamma(t))^{\perp}.$$

2. Par ailleurs, puisque $(\gamma'(t), \gamma(t))$ est liée et $\gamma(t) \neq 0$, pour tout $t \in I$, la relation $(*)$ donne :

$$\forall t \in I \quad f'(t) \in \mathrm{Vect}(\gamma(t)).$$

Ainsi $f' = 0$ et f est constante, car elle définie sur un intervalle. Par conséquent, il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas et $a \in E \setminus \{0\}$ tel que :

$$\forall t \in I \quad f(t) = \varphi(t)\,a.$$

Réciproquement, il est clair que toute fonction de cette forme est solution du problème.

7.15 Par hypothèse, il existe une fonction $\lambda : I \to \mathbb{R}$ telle que $f'' = \lambda f$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Les règles de calcul donnent :

$$\begin{aligned}(y'z - yz')' &= y''z + y'z' - y'z' - yz'' \\ &= y''z - yz'' = \lambda\, y\, z - y\,\lambda\, z = 0\end{aligned}$$

Ainsi la fonction $y'z - yz'$ est une fonction constante A.

2. On démontre de même que la fonction $z'x - zx'$ est une fonction constante B et $x'y - xy'$ est une fonction constante C.

Soit $t \in I$. On a :

$$0 = \det_{\mathcal{B}}\big(f(t), f'(t), f(t)\big) = \begin{vmatrix} x(t) & x'(t) & x(t) \\ y(t) & y'(t) & y(t) \\ z(t) & z'(t) & z(t) \end{vmatrix} = x(t)A + y(t)B + z(t)C.$$

Puisque $\big(f(t_0), f'(t_0)\big)$ est libre, les trois valeurs :

$$A = y'(t_0)z(t_0) - y(t_0)z'(t_0)$$
$$B = x'(t_0)z(t_0) - x(t_0)z'(t_0)$$
$$C = x'(t_0)y(t_0) - x(t_0)y'(t_0)$$

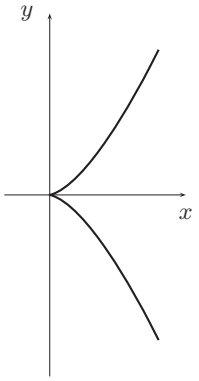
ne peuvent pas être toutes nulles. En d'autres termes $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Ainsi, f est à valeurs dans le plan vectoriel d'équation $Ax + By + Cz = 0$.

7.16 1. L'arc est défini sur $\mathbb{R}$. Puisque x est une fonction paire et y est une fonction impaire, on peut restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+$, le support de l'arc étant symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
L'arc est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$x'(t) = 6t \qquad \text{et} \qquad y'(t) = 6t^2$$

On obtient immédiatement le tableau de variations et la courbe.

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
x	0	↗	$+\infty$
$y'(t)$	0	$+$	
y	0	↗	$+\infty$



On remarque que tous les points sauf celui de paramètre 0 sont réguliers.

Remarque En remarquant que $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, on obtient que l'axe des abscisses est la position limite de la famille des droites $\big(\gamma(t)\gamma(0)\big)$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Le vecteur $(1, t)$ est proportionnel à $\gamma'(t)$. Une équation de la tangente au point de paramètre t est donc :

$$\begin{vmatrix} x - 3t^2 & 1 \\ y - 2t^3 & t \end{vmatrix} = tx - y - t^3 = 0$$

Une équation de la normale est donnée par :

$$x + ty - 3t^2 - 2t^4 = 0.$$

La tangente au point de paramètre t sera la normale au point de paramètre t' si, et seulement si, les équations :

$$\begin{cases} tx - y &= t^3 \\ x + t'y &= 3t'^2 + 2t'^4 \end{cases}$$

sont proportionnelles. Cela impose que le déterminant du système soit nul, c'est-à-dire $tt' = -1$. Si c'est le cas, alors $t^3 = t(3t'^2 + 2t'^4)$.
Réciproquement, si $tt' = -1$ et $t^3 = t(3t'^2 + 2t'^4)$ les deux équations sont proportionnelles.
Les conditions imposent $t^2 = 3t'^2 + 2t'^4$, et donc, puisque $t' = -1/t$:

$$t^6 = 3t^2 + 2. \qquad (*)$$

Introduisons $P = X^3 - 3X - 2$. Il est immédiat que -1 et 2 sont des racines de P, puis que $P = (X-2)(X+1)^2$. La condition $(*)$ donne $t = \pm\sqrt{2}$. En conclusion, les tangentes aux points de paramètres $\pm\sqrt{2}$ sont les seules tangentes qui soient également normales à Γ.

7.17 1. Soit D une droite d'équation $ax + by + c = 0$. Le point $M(t)$ est sur D si et seulement si $at + bt^2 + c(1+t^3) = 0$. Cette équation est au plus du troisième degré en t donc ne peut avoir plus de trois racines réelles.

2. Si les trois points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ sont alignés alors il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ tels que t_1, t_2 et t_3 soient racines de l'équation :

$$ct^3 + bt^2 + at + c = 0,$$

d'où $c \neq 0$ et $ct^3 + bt^2 + at + c = c(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)$ ce qui donne $t_1t_2t_3 = -1$.
Réciproquement si $t_1t_2t_3 = -1$, posons :

$$b = -t_1 - t_2 - t_3 \qquad \text{et} \qquad a = t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3.$$

On a $(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3) = t^3 + bt^2 + at + 1$ et les trois points sont sur la droite d'équation $ax + by + 1 = 0$.

3. Soit $M(t)$ et $M(t+h)$, la droite $\Big(M(t)M(t+h)\Big)$ coupe la courbe en $M\Big(t'(h)\Big)$ avec $t(t+h)t'(h) = -1$.
Lorsque h tend vers 0, la droite $\Big(M(t)M(t+h)\Big)$ tend vers la tangente en $M(t)$ et $M\Big(t'(h)\Big)$ vers $M(t')$ d'où $t^2t' = -1$. La tangente en $M(t)$ recoupe la courbe si $t \neq 0$ au point $M(-\frac{1}{t^2})$.

4. Si $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ sont alignés, alors $t_1t_2t_3 = -1$ d'où $\dfrac{-1}{t_1^2}\dfrac{-1}{t_1^2}\dfrac{-1}{t_1^2} = -1$ donc les points $M(t'_1)$, $M(t'_2)$ et $M(t'_3)$ sont alignés.

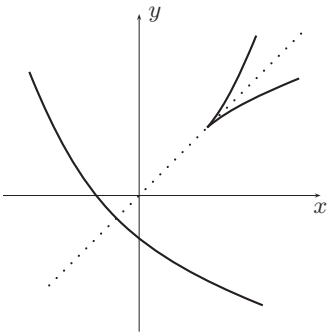
7.18 1. Les relations $x(\frac{1}{t}) = y(t)$ et $y(\frac{1}{t}) = x(t)$ montrent que la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = y$ et qu'il suffit d'étudier la courbe sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$. De plus l'arc est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - \frac{1}{t^3} \\ y'(t) = t - \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

ce qui conduit au tableau de variations suivant :

t	-1		0		1
$x'(t)$	$+$		$\|\|$	$-$	0
x	$-1/2$	$\nearrow$ $+\infty$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$3/2$
$y'(t)$	$-$		$\|\|$	$-$	0
y	$-1/2$	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$3/2$

Le point de paramètre $t = 1$ n'est pas régulier.
En remarquant que $\frac{y(t)-y(1)}{x(t)-x(1)} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1$, on appréhende le comportement de l'arc au voisinage de ce point.



2. La tangente au point $M(t)$ a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x - t - \frac{1}{2t^2} & 1 \\ y - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{t} & t \end{vmatrix} = 0$$

soit $-2t^2x + 2ty + t^3 - 1 = 0$. Soit Γ le lieu cherché. Le point (x, y) est dans Γ si, et seulement s'il existe $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $t_1t_2 = -1$ (orthogonalité des deux vecteurs tangents en $M(t_1)$ et en $M(t_2)$), tels que t_1 et t_2 soient racines du polynôme $X^3 - 2xX^2 + 2yX - 1 = 0$.
Il suffit donc de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $P = X^3 - 2xX^2 + 2yX - 1 = 0$ ait deux racines réelles dont le produit est -1.

Supposons que deux racines vérifient la condition et appelons t_3 la troisième racine, on a alors :

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 2x \\ t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = 2y \\ t_1t_2t_3 = 1 \\ t_1t_2 = -1. \end{cases}$$

On a alors $t_3 = -1$ puis $x+y = -1$ qui est une condition nécessaire au problème. Réciproquement, supposons que $x + y = -1$, alors -1 est une racine de P. On peut factoriser P : $P = (X + 1)Q$, où

$$X^2 + (2y + 1)X - 1 = 0$$

est de discriminant strictement positif, donc possède deux racines non nulles t_1 et t_2 dont le produit vaut -1. Ce qui montre que le point (x, y) est dans Γ et que la condition $x + y + 1 = 0$ est une condition suffisante.

Chapitre 8 : Séries numériques et vectorielles

I Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie 400

1 Généralités 400

2 Propriétés immédiates 402

3 Séries absolument convergentes 403

II Compléments sur les séries numériques 405

1 Règle de d'Alembert 405

2 Critère des séries alternées 407

3 Comparaison avec une intégrale 408

4 Sommation des relations de domination 410

5 Applications 412

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 417

Exercices 427

Séries numériques et vectorielles



Le but de ce chapitre est de consolider les acquis de première année relatifs aux séries numériques et d'étendre la notion de série convergente au cadre des espaces vectoriels de dimension finie.
Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou le corps des complexes et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie.
L'espace vectoriel E est muni d'une norme qu'on notera $\|\ \|$.

I Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie

1 Généralités

Les définitions et notations sont les mêmes que celles introduites en première année pour les séries à termes réels ou complexes. Rappelons-les brièvement.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes dans E, on note $\sum u_n$ la série de terme général u_n. Sa somme partielle d'ordre n est $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$.

  Si le terme général n'est défini qu'à partir du rang n_0, la série peut être notée $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$. Sa somme partielle d'ordre n, avec $n \geqslant n_0$, est $S_n = \sum_{p=n_0}^{n} u_p$.

- Lorsque la série $\sum u_n$ converge, c'est-à-dire lorsque la suite (S_n) a une limite dans E, le vecteur $\lim_{n\to+\infty} S_n$ est appelé **somme de la série** et est noté $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

  La somme d'une série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ convergente est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

p.417

Exercice 1

Déterminer la nature et, en cas de convergence, la somme de la série $\sum A^n$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1 (Condition nécessaire de convergence)

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Démonstration. Supposons la série $\sum u_n$ convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est la différence de deux suites ayant la même limite dans E. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. □

Remarque Si l'on n'a pas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\sum u_n$ est divergente ; on dit alors que la série est **grossièrement divergente** et l'on parle de **divergence grossière**.

Attention Comme dans le cas des séries numériques, la convergence vers 0 du terme général est une condition nécessaire mais non suffisante de convergence.

Définition 1

Si la série $\sum u_n$ converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{p\geqslant n+1} u_p$ converge ; le vecteur de E :

$$R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$$

est appelé **reste d'ordre n** de la série $\sum u_n$.

Attention

- On ne peut parler de reste que pour une *série convergente*.
- On notera bien que, pour $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n est la somme $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} u_p$, et non $\sum\limits_{p=n}^{+\infty} u_p$, afin que l'on dispose pour toute série convergente de la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S = S_n + R_n \quad \text{avec} \quad S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Proposition 2

La suite des restes d'une série convergente tend vers zéro.

Démonstration. Il suffit de voir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = S - S_n$, avec $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$. □

On revient ici sur la notion de sommes télescopiques introduite en première année.

Définition 2

Une **série télescopique** est une série dont le terme général peut s'écrire sous la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

La convergence d'une série n'est rien d'autre que la convergence d'une suite. Réciproquement, dans certains cas, on ramène l'étude de la convergence d'une suite à l'étude de la convergence d'une série télescopique en utilisant la proposition suivante.

Proposition 3 (Lien suite-série)

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

On a alors $\sum_{n=0}^{+\infty}(v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0$.

Autrement dit, la série $\sum_{n\geqslant 0}(v_{n+1} - v_n)$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

Démonstration.

Les sommes partielles d'une série télescopique de terme général $u_n = v_{n+1} - v_n$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = v_{n+1} - v_0,$$

on obtient immédiatement le résultat demandé. □

2 Propriétés immédiates

Les résultats qui suivent ne sont qu'une reformulation, dans le langage des séries, des résultats correspondant sur les suites.

Proposition 4

- L'ensemble des séries convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des séries à termes dans E.
- L'application qui, à une série convergente, associe sa somme est linéaire.

Attention Comme pour des séries numériques, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries convergentes, alors $\sum(u_n + v_n)$ l'est aussi. Mais $\sum(u_n + v_n)$ peut très bien être une série convergente lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes.

On ne peut donc pas écrire $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$ sans s'être préalablement assuré de l'existence de ces sommes.

p.417

Exercice 2 Étudier la convergence de la série de terme général A^n où :

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{où} \quad a\in\mathbb{C}.$$

Proposition 5 (Utilisation d'une base)

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On lui associe les suites coordonnées $(u_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $j\in[\![1,p]\!]$. La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, les séries $\sum u_n^{(j)}$ convergent pour tout $j\in[\![1,p]\!]$ et l'on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,j}\right)e_j.$$

Démonstration. Ce résultat découle immédiatement du lien entre la convergence d'une suite vectorielle, ici la suite des sommes partielles, et celle des ses suites composantes dans une base donnée. □

Exemples

1. On retrouve ici le lien entre la convergence d'une série $\sum u_n$ à termes complexes et celle des séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$
2. Une série matricielle de terme général $A_n\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est convergente si, et seulement si, les p^2 séries de termes généraux les coefficients de la matrice A_n sont convergentes.

p.417

Exercice 3 Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que :

$$\forall\lambda\in\mathrm{sp}(A)\quad |\lambda|<1.$$

Quelle est la nature de la série $\sum n^\alpha A^n$?

3 Séries absolument convergentes

Définition 3

On dit que la série $\sum u_n$ à termes dans E est **absolument convergente**, ou **converge absolument**, si la série à termes réels positifs $\sum\|u_n\|$ est convergente.

Remarque Les normes dans un espace de dimension finie étant toutes équivalentes, on déduit du critère de majoration des séries à termes positifs que la notion de convergence absolue d'une série ne dépend pas de la norme choisie.

Théorème 6

Toute série absolument convergente est convergente.

Principe de démonstration. Utiliser les séries composantes et se ramener au cas scalaire.

Démonstration page 417

Proposition 7

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série absolument convergente à termes dans E. Alors, on a :

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$. L'inégalité triangulaire nous permet d'écrire :

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{N} \|u_n\|.$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ étant absolument convergente est aussi convergente. Un passage à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente donne alors la relation cherchée. □

Point méthode

Comme $\|u_n\| \in \mathbb{R}_+$, on peut utiliser tous les résultats sur les séries à termes réels positifs pour démontrer la **convergence absolue** d'une série. En particulier, la comparaison de $\|u_n\|$ ($\leqslant$, O, o, $\sim$) avec une série convergente **à termes positifs** permet de montrer la convergence absolue de $\sum u_n$, donc sa convergence.

La comparaison avec des séries à termes positifs divergentes pourra uniquement montrer que la série n'est pas absolument convergente.

Exemple : série géométrique

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On choisit ici une norme sous-multiplicative (voir l'exercice 22 de la page 305) ; elle vérifie donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|A^n\| \leqslant \|A\|^n.$$

On suppose $\|A\| < 1$. Montrons que la **série géométrique** $\sum_n A^n$ est absolument convergente, que la matrice $(I_p - A)$ est inversible et que $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_p - A)^{-1}$.

- Comme $\|A\| < 1$, la série géométrique $\sum \|A\|^n$ converge. Par comparaison, on en déduit la convergence de $\sum \|A^n\|$, c'est-à-dire la convergence absolue de $\sum A^n$.

- La série $\sum A^n$ étant absolument convergente, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$. L'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (I_p - A)\left(A^0 + \cdots + A^n\right) = I_p - A^{n+1}$$

prouve, par passage à la limite (continuité du produit), la relation :

$$(I_p - A)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A^n\right) = I_p.$$

On en déduit que les matrices $I_p - A$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A^n$ sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Remarquons qu'on aurait pu montrer de même l'égalité :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A^n\right)(I_p - A) = I_p.$$

On peut vérifier le résultat ici démontré sur l'exemple de l'exercice 1 de la page 401.

p.418

Exercice 4 Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que $\sum \dfrac{A^n}{n!}$ est absolument convergente. Sa somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A^n}{n!}$ est appelée **exponentielle** de A et est notée e^A ou $\exp(A)$. Nous étudierons certaines propriétés de l'application exponentielle dans le chapitre 10 consacré aux suites et séries de fonctions et nous verrons une application dans le chapitre 17 consacré aux équations différentielles linéaires.

II Compléments sur les séries numériques

Dans cette section, les séries considérées sont des séries à termes réels.

1 Règle de d'Alembert

Proposition 8 (Comparaison logarithmique)

Si, à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont strictement positifs et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et donc :

- la convergence de $\sum v_n$ entraîne la convergence de $\sum u_n$;
- la divergence de $\sum u_n$ entraîne la divergence de $\sum v_n$.

Principe de démonstration. Remarquer que $\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \leqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n$.

Démonstration page 418

Corollaire 9

Soit (u_n) une suite à valeurs strictement positives.

1. S'il existe $k \in [0,1[$ tel qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration. Dans le premier cas, on choisit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = k^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et l'on applique la proposition 8 de la page précédente.

Dans le second cas, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante à partir d'un certain rang, strictement positive, ne converge pas vers 0. □

Corollaire 10 (Règle de d'Alembert)

Soit (u_n) une suite à valeurs strictement positives telle que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration.

1. On se ramène au premier point du corollaire 9, en choisissant $k \in]\ell, 1[$.
2. On se ramène au deuxième point du corollaire 9. □

Remarque La règle de d'Alembert est parfois utilisée pour prouver qu'une série de terme général non nul est absolument convergente.

Exemple Montrons que $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x = 0$, le résultat est évident.
- si $x \neq 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{|x^n|}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite strictement positive et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{n+1}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. On en déduit que la série est absolument convergente, par application de la règle de d'Alembert.

Attention Dans le cas où $\ell = 1$, on ne peut pas conclure directement, comme on le verra dans l'exercice qui suit.

p.418

Exercice 5 Déterminer deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes strictement positifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1$, l'une étant convergente, l'autre divergente.

Remarque La règle de d'Alembert utilise une comparaison aux séries géométriques. Elle est donc inefficace pour l'étude des séries à convergence « moins forte », comme le montre l'exercice précédent.

p.418

Exercice 6 Donner la nature, selon $x \in \mathbb{R}$, de la série $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

Attention Il existe des séries convergentes qui ne convergent pas absolument. On dit qu'une telle série est **semi-convergente**. Nous verrons des exemples de séries semi-convergentes dans II.2 et dans II.5 de la page 412.

2 Critère des séries alternées

Définition 4 (Série alternée)

On dit que la série réelle $\sum u_n$ est **alternée** si la suite $\left((-1)^n u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant, c'est-à-dire s'il existe une suite (v_n) positive telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n v_n \qquad \text{ou} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^{n+1} v_n.$$

Proposition 11 (Critère des séries alternées)

Une série alternée dont le terme général décroît en valeur absolue et tend vers 0 est convergente et sa somme est toujours comprise entre deux sommes partielles consécutives.

De plus, le reste :

$$R_n = S - S_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$$

est du signe de u_{n+1} et vérifie $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

En particulier, la somme de la série est du signe de u_0.

Principe de démonstration. Montrer que les suites $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Démonstration page 418

Exemple Pour $\alpha > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge, d'après le critère des séries alternées ; en effet, elle est alternée et la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ décroît et tend vers zéro.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ n'est absolument convergente que pour $\alpha > 1$.

p.419

Exercice 7 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que le reste d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ est le terme général d'une série convergente.

Attention Une série alternée ne converge pas nécessairement, même si son terme général tend vers 0. La décroissance de la valeur absolue de son terme général est essentielle.
Montrons par exemple que la série $\sum u_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{2n} = \frac{1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad u_{2n+1} = -\frac{1}{n+1}$$

est divergente. Ses sommes partielles S_n sont telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{2n} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.$$

La série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, alors que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge et est à termes positifs ; on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = -\infty$, ce qui prouve la divergence de la série $\sum u_n$.

Remarque La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{|n-a|+1}$ (a réel non entier naturel) est une série alternée, mais si $a > 1$, la valeur absolue v_n de son terme général ne tend en décroissant vers 0 qu'au-delà d'un certain rang. On pourra lui appliquer le théorème de convergence ci-dessus, puisque la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. Mais on ne peut écrire les encadrements du théorème qu'à partir des indices pour lesquels (v_n) décroît.

3 Comparaison avec une intégrale

Définition 5

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

Remarques

- Cette notion sera reprise et développée plus loin (voir le chapitre 12 traitant l'intégration sur un intervalle quelconque).
- Lorsque f est continue, cela équivaut, si F est une primitive de f, à l'existence de de $\lim\limits_{+\infty} F$.

Théorème 12

Soit f une fonction continue par morceaux positive **décroissante** sur $[n_0, +\infty[$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

Alors la série $\sum_{n \geqslant n_0+1} \left(\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \right)$ converge.

Principe de démonstration. Pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, on a : Démonstration page 419

$$0 \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \leqslant f(n-1) - f(n).$$

Exemple La convergence de la série $\sum \left(\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{1}{n} \right)$ permet de retrouver l'existence de la constante d'Euler :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle d'ordre n de cette série est :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{1}{k} \right) = \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 1$$

qui constitue le terme général d'une suite convergente, de limite $1 - \gamma$.

Corollaire 13

Soit f une fonction continue par morceaux positive **décroissante** sur $[n_0, +\infty[$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

Alors la série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge si, et seulement si, l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Principe de démonstration. On prouve d'abord que la série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \right)$ a une limite finie.

On conclut, en utilisant la croissance de $x \mapsto \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Démonstration page 420

p.420

Exercice 8

1. Donner, selon $\alpha > 0$, la nature de la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$.
2. Lorsqu'elle diverge, donner un équivalent simple de ses sommes partielles.
3. Lorsqu'elle converge, donner un équivalent simple de ses restes.

4 Sommation des relations de domination

Si $\sum u_n$ est une série, on note $S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k$ sa somme partielle partielle d'ordre n et, lorsque la série est convergente, $R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ son reste d'ordre n.

Cas convergent

Proposition 14

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries numériques convergentes, la série $\sum v_n$ étant à termes positifs.

- Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $R_n(u) = \mathrm{O}\big(R_n(v)\big)$.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $R_n(u) = \mathrm{o}\big(R_n(v)\big)$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $R_n(u) \sim R_n(v)$.

Principe de démonstration. Traduire chacune des relations pour u_n, puis sommer pour faire apparaître les restes d'ordre n des deux séries. Démonstration page 421

Attention Ne pas oublier de vérifier la caractère positif (au moins à partir d'un certain rang) de la série de référence $\sum v_n$.

p.421

Exercice 9 On prend $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$, si bien que $u_n = \mathrm{o}\,(v_n)$.

1. Utiliser l'équivalent $u_n \sim \frac{1}{n(n+1)}$, pour déterminer un équivalent simple de $R_n\,(u)$.
2. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\big|R_n\,(v)\big| = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p-1)\,(n+2p)} \geqslant \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p-1)\,(n+2p+1)}.$$
3. A-t-on $R_n\,(u) = \mathrm{o}\big(R_n\,(v)\big)$? Commenter ce résultat.

p.422

Exercice 10 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k}$.

Déterminer un équivalent simple, puis un développement asymptotique à deux termes de S_n.

Cas divergent

Proposition 15

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries numériques, la série $\sum v_n$ étant divergente et à termes positifs.

- Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $S_n(u) = \mathrm{O}\big(S_n(v)\big)$.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $S_n(u) = \mathrm{o}\big(S_n(v)\big)$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $S_n(u) \sim S_n(v)$.

Principe de démonstration. Traduire chacune des relations pour u_n, puis sommer en coupant la somme en deux pour faire apparaître les sommes partielles d'ordre n des deux séries.

Démonstration page 423

Exemples

1. Si (u_n) converge vers ℓ, alors $u_n - \ell = \mathrm{o}(1)$. La série de terme général constant 1 étant une série divergente de terme général positif, on obtient par sommation :
$$\sum_{p=0}^{n}(u_p - \ell) = \mathrm{o}(n+1).$$
On en déduit que la suite (u_n) converge vers ℓ *au sens de Cesàro* :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \ell.$$

2. Cherchons le développement asymptotique à trois termes de $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

Considérons la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$; de l'équivalent :
$$\frac{1}{n} \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n,$$
on déduit, par sommation de séries divergentes de terme général positif :
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sim \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln n.$$
Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$ puisque $\displaystyle\frac{1}{n} = \mathrm{o}(\ln n)$.

Précisons la différence :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \ln\Big(1 + \frac{1}{k}\Big)\right) + \frac{1}{n}.$$
Comme $\displaystyle\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \sim \frac{1}{2k^2}$, la série converge et l'on dispose de la *constante d'Euler* :
$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

On a alors : $\gamma = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)$ et par suite :

$$1 + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n - \gamma = -\sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)$$

et les équivalents entre termes généraux positifs de séries convergentes :

$$\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \sim \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

donnent un équivalent du reste de la série :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2n}.$$

On en déduit que :

$$1 + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc le développement asymptotique à trois termes vaut :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

p.424

Exercice 11 Soit (u_n) une suite telle que $u_n \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha < 1$.

Montrer qu'alors $S_n(u) \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Attention Ne pas oublier de vérifier la caractère positif (au moins à partir d'un certain rang) de la série de référence $\sum v_n$.

5 Applications

Étude asymptotique des suites récurrentes

Exemple Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sin u_n.$$

- On a $u_1 \in]0,1]$ ou $u_1 \in]-1,0]$, le deuxième cas se ramenant au premier en changeant (u_n) en $(-u_n)$; pour simplifier, nous supposerons $u_0 \in]0,1]$.

  On a l'encadrement suivant :

  $$\forall x \in]0,1] \quad 0 < \sin x < x,$$

  la deuxième inégalité se déduisant de la formule des accroissements finis appliquée à la fonction $t \mapsto t - \sin t$; en effet :

  $$\forall x \in]0,1] \quad \exists c \in]0,x[\quad x - \sin x = x\,(1 - \cos c) > 0.$$

  On en déduit, par récurrence, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes dans $]0,1]$, puis qu'elle est décroissante. Elle a donc une limite $\ell \in [0,1]$ vérifiant $\ell = \sin \ell$, puisque la fonction sin est continue ; d'après l'encadrement obtenu plus haut, on a $\ell = 0$.

- Cherchons $\alpha > 0$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha}\right)$ existe dans $\mathbb{R}_+^*$ et déterminons cette limite. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} &= u_n^{-\alpha}\Big(1 - \frac{u_n^2}{6} + \mathrm{o}\left(u_n^2\right)\Big)^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} \\ &= \frac{\alpha}{6}\, u_n^{2-\alpha} + \mathrm{o}\left(u_n^{2-\alpha}\right). \end{aligned}$$

  Avec $\alpha = 2$, on a établi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}\right) = \frac{1}{3}$.

- Le résultat précédent peut s'écrire :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \sim \frac{1}{3}.$$

  La série de terme général constant égal à $\frac{1}{3}$ diverge et est à termes positifs. Les hypothèses de la proposition 15 de la page 411 étant vérifiées, on en déduit :

$$\sum_{p=0}^{n-1}\Big(\frac{1}{u_{p+1}^2} - \frac{1}{u_p^2}\Big) \sim \frac{n}{3},$$

  c'est-à-dire $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \sim \frac{n}{3}$.

  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^2} = +\infty$, il vient $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$ et, comme $u_n > 0$, on a $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

- Pour obtenir un équivalent de $u_n - \sqrt{\frac{3}{n}}$, cherchons un deuxième terme du développement limité de $f : x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x} &= \frac{\Big(\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\Big)\Big(2x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\Big)}{x^2\Big(x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\Big)} \\ &= \frac{\Big(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\Big)\Big(2 - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\Big)}{\Big(1 - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\Big)} \\ &= \Big(\frac{1}{3} - \frac{2x^2}{45} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\Big) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + \mathrm{o}\left(x^2\right). \end{aligned}$$

  On en déduit l'équivalent suivant :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} \sim \frac{u_n^2}{15} \sim \frac{1}{5n} \sim \frac{\ln(n+1) - \ln n}{5}.$$

  La série à termes positifs $\sum \frac{1}{5n}$ étant divergente, la proposition 15 de la page 411 s'applique à nouveau et fournit :

$$\sum_{p=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{u_{p+1}^2} - \frac{1}{u_p^2} - \frac{1}{3}\Big) \sim \frac{\ln n}{5},$$

c'est-à-dire : $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_1^2} - \frac{n-1}{3} \sim \frac{\ln n}{5}$.

On en déduit $\frac{1}{u_n^2} = \frac{n}{3} + \frac{\ln n}{5} + \mathrm{o}(\ln n)$, puis :

$$u_n = \frac{\sqrt{3}}{n^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{3\ln n}{5\,n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{n^{\frac{1}{2}}} - \frac{3\sqrt{3}\ln n}{10\,n^{\frac{3}{2}}} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

p.424

Exercice 12 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,(u_n)\,.$$

On pose $v_n = 2^n u_n$.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la série $\sum\left(\frac{1}{v_{n+1}^2} - \frac{1}{v_n^2}\right)$ converge.
3. En déduire l'existence d'un réel $\ell > 0$, qu'on ne cherchera pas à calculer, tel que $u_n \sim \frac{\ell}{2^n}$.
4. Déterminer un développement à deux termes de u_n.

Études de séries semi-convergentes

Utilisation d'un développement

Point méthode

Pour étudier une série à termes réels non absolument convergente, on pourra faire (si c'est possible !) un développement asymptotique du terme général, le dernier terme écrit étant :

- ou bien le terme général d'une série absolument convergente,
- ou bien de signe fixe.

Exemples

1. Étudions la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3}+\cos n}$.

   On a $|u_n| \sim \frac{1}{n^{2/3}}$; d'après le théorème de comparaison, la série $\sum u_n$ ne converge pas absolument, puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{2/3}}$ diverge. Effectuons un développement de u_n :

   $$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3}}\frac{1}{1+\frac{\cos n}{n^{2/3}}} = \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} + \frac{(-1)^{n+1}\cos n}{n^{4/3}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} + v_n.$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{2/3}}$ converge d'après le critère des séries alternées (elle est alternée et la suite $\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)$ tend vers 0 en décroissant).

La série $\sum v_n$ converge absolument puisque $|v_n| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$ et que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{4/3}}$ converge.

En conclusion, la série $\sum u_n$ converge, comme somme de deux séries convergentes. D'après l'étude initiale, elle est donc semi-convergente.

2. Étudions, selon $\alpha > 0$, la série $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ avec $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Un développement de u_n donne :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n.$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge d'après le critère des séries alternées (elle est alternée et la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ tend vers 0 en décroissant).

On a $v_n \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$; par suite on a $v_n < 0$ pour n assez grand et, d'après le théorème de comparaison, la série $\sum v_n$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$, donc convergente si, et seulement si, $\alpha > 1/2$.

En conclusion, la série $\sum u_n$, somme d'une série convergente et de la série $\sum v_n$, converge si, et seulement si, $\alpha > 1/2$.

On notera, sur cet exemple, l'intérêt d'avoir arrêté le développement après obtention d'un terme de signe fixe et la difficulté, selon α, de poursuivre ce développement jusqu'à obtention du terme général d'une série absolument convergente.

Attention À la lumière de l'exemple précédent avec $\alpha = 1/2$, notons deux grosses fautes à éviter dans l'étude des séries à termes quelconques.
Posons $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

- On a $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, puisqu'elle vérifie les hypothèses du critère des séries alternées, mais la série $\sum u_n$ diverge. Ainsi, dans le *théorème de comparaison*, le fait que les séries soient à *termes réels positifs* est essentiel.
- On a $|u_n| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$; la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ décroît mais pas la suite $(|u_n|)$, sinon la série $\sum u_n$ vérifierait les hypothèses du critère des séries alternées et convergerait, ce qui n'est pas le cas.

Transformation d'Abel

p.426

Exercice 13

Soit $\sum u_n$ une série dont le terme général est de la forme $u_n = a_n\, x_n$, où (a_n) et (x_n) sont deux suites complexes. On note A_n les sommes partielles de la série $\sum a_n$ et l'on pose $A_{-1} = 0$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{p=0}^{n} a_p\, x_p = A_n\, x_n + \sum_{p=0}^{n-1} A_p\,(x_p - x_{p+1})$.
2. On fait les hypothèses suivantes :
   - la suite (x_n) est réelle décroissante et tend vers 0,
   - la suite (A_n) des sommes partielles de la série $\sum a_n$ est bornée.

   Montrer que la série $\sum a_n x_n$ converge.
3. *Application* : pour $\alpha > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 On vérifie facilement que $A^n = 0$, pour $n \geqslant 3$. On en déduit la convergence de la série $\sum A^n$. Comme $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = I_3 + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 En décomposant la matrice A sous la forme :

$$A = \frac{1}{2} I_2 + \frac{a}{2} J \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on calcule A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la formule du binôme (les deux matrices $\frac{1}{2}I_2$ et $\frac{a}{2}J$ commutent). On obtient alors :

$$A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n I_2 + \frac{n}{2^n}(aJ).$$

La série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ est convergente.

Par croissances comparées, on a $\frac{n}{2^n} = \mathrm{o}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$; comme la série géométrique de raison $\frac{3}{4}$ converge, on en déduit, par comparaison de séries à termes positifs, la convergence de la série $\sum \frac{n}{2^n}$.

La série $\sum A^n$ est donc convergente, comme somme de deux séries convergentes.

Exercice 3 Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable. Soit $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$; on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P^{-1}A^nP = \mathrm{Diag}\left(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_p^n\right).$$

Les coefficients de $P^{-1}A^nP$ étant les coordonnées de A^n dans une base de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, la convergence de la série $\sum n^\alpha A^n$ équivaut à la convergence de chaque série $\sum n^\alpha \lambda_i^n$, avec $1 \leqslant i \leqslant p$.

Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Comme $|\lambda_i| < 1$, on a, par croissances comparées, $n^\alpha \lambda_i^n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$; on en déduit, par comparaison, la convergence absolue, donc la convergence, de $\sum n^\alpha \lambda_i^n$.

En conclusion, la série $\sum n^\alpha A^n$ converge, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 6 Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n a pour composantes $(u_n^{(j)})_{1\leqslant j\leqslant p}$ dans la base $\mathcal{B}$.

En utilisant la norme infinie dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n^{(j)}| \leqslant \|u_n\|_\infty.$$

La convergence absolue de la série $\sum u_n$ entraîne alors la convergence absolue des séries réelles ou complexes de termes généraux $u_n^{(j)}$ pour tout $j \in [\![1,p]\!]$. On en déduit alors que chacune des séries composantes est convergente ; donc la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 4 On choisit une norme sous-multiplicative (voir l'exercice 22 de la page 305).

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\| \dfrac{A^n}{n!} \right\| \leqslant \dfrac{\|A\|^n}{n!}$.

La série à termes réels positifs $\displaystyle\sum \frac{\|A\|^n}{n!}$ converge, comme on le verra dans l'exemple de la page 406. On en déduit, par comparaison, la convergence absolue de $\displaystyle\sum \frac{A^n}{n!}$.

Proposition 8 Par une récurrence immédiate, on prouve que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \leqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}\, v_n.$$

Les séries considérées étant à termes positifs, on peut utiliser les relations de comparaison vues en première année. Ce qui donne les résultats demandés.

Exercice 5 Pour une série de Riemann $\sum u_n$, avec $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, et ceci pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, alors que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge sinon.

Exercice 6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$; pour $x \neq 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\,|x| = \frac{n+1}{4n+2}\,|x|.$$

- Pour $|x| < 4$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|}{4} < 1$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
- Pour $|x| \geqslant 4$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n+1}{4n+2}\,|x| \geqslant \frac{4n+4}{4n+2} \geqslant 1.$$

La suite strictement positive $\big(|u_n|\big)$ étant croissante, on en déduit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

La convergence pour $x = 0$ étant évidente, on peut conclure que la série $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ converge si, et seulement si, $x \in]-4,4[$.

Proposition 11 Quitte à changer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer $u_n = (-1)^n\, v_n$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive.

Les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{2n+2} = S_{2n} + u_{2n+2} + u_{2n+1} = S_{2n} + v_{2n+2} - v_{2n+1}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{2n+3} = S_{2n+1} + u_{2n+3} + u_{2n+2} = S_{2n+1} - v_{2n+3} + v_{2n+2}$$

ainsi que la décroissance de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entraînent que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{2n+2} \leqslant S_{2n} \quad \text{et} \quad S_{2n+1} \leqslant S_{2n+3}.$$

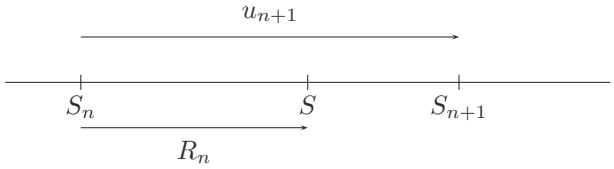
La suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par ailleurs, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1};$$

donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$.

Les suites $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. Cela prouve la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc de la série $\sum u_n$.

De plus, sa somme S est toujours comprise entre deux termes consécutifs S_n et S_{n+1}, ce qui donne le schéma suivant :



(l'axe des réel étant orienté vers la droite si n est impair et vers la gauche sinon).

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

En particulier, $|R_0| \leqslant |u_1| \leqslant |u_0|$; donc $S = u_0 + R_0$ est du signe de u_0.

Exercice 7 La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ est une série alternée et la suite $\left(\dfrac{1}{(n+x)^2}\right)$ décroît et tend vers 0. D'après le critère des séries alternées, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ converge et que son reste d'ordre n vérifie :

$$|R_n| = \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(n+x)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1+x)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Cette majoration permet d'affirmer que la série de terme général R_n est absolument convergente, donc convergente.

Théorème 12 Pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, on a $0 \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \leqslant f(n-1) - f(n)$.

La série télescopique $\sum \big(f(n-1) - f(n)\big)$ est convergente puisque, f étant positive et décroissante, elle admet une limite finie en $+\infty$. Cela prouve le résultat.

Corollaire 13

- Pour tout entier $N \geqslant n_0+1$, la somme partielle d'ordre N de la série du théorème 12 de la page 409 est égale à :
$$\sum_{n=n_0+1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) = \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=n_0+1}^{N} f(n).$$
On déduit alors du théorème 12 de la page 409 que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ a une limite finie.
- Comme f est positive, la fonction $x \mapsto \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante sur $[n_0, +\infty[$. Cette fonction positive possède donc en $+\infty$ une limite $\ell \in [0, +\infty]$. On a alors :
$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \ell.$$
L'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\ell < +\infty$, c'est-à-dire si, et seulement si, la série $\sum f(n)$ converge, d'après le premier point.

Exercice 8

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$. D'après le corollaire 13 de la page 409, la série $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Si l'on note u la fonction $\ln$, on a $f = u'u^{-\alpha}$; par suite, une primitive de f est $\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ si $\alpha \neq 1$ et $\ln u$ si $\alpha = 1$.
En conclusion, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
2. Appliquons le théorème 12 de la page 409. Si l'on pose $u_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$, la série $\sum u_n$ converge et l'on a :
$$\forall n \geqslant 2 \quad \sum_{k=3}^{n} u_k = \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=3}^{n} f(k).$$
Comme la série à termes positifs $\sum f(n)$ diverge, ses sommes partielles tendent vers $+\infty$; on en déduit :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \sim \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \sim \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(\ln t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_2^n.$$
Utilisons le calcul de primitive de la première question.
   - Pour $\alpha = 1$, on obtient $\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(\ln t)\Big]_2^n$, d'où l'on tire :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \sim \ln(\ln n).$$
   - Pour $\alpha \in]0, 1[$, on obtient $\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(\ln t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_2^n$, d'où l'on tire :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \sim \frac{(\ln n)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

3. Par décroissance de f, on peut écrire, pour tout entier $k \geqslant 3$:
$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Pour $\alpha > 1$, on en déduit, par sommation :
$$\forall n \geqslant 2 \quad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\alpha},$$
c'est-à-dire, en utilisant la primitive déjà calculée de f :
$$\forall n \geqslant 2 \quad \frac{1}{(\alpha-1)\big(\ln(n+1)\big)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)(\ln n)^{\alpha-1}}.$$
Comme $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \ln n$, on en déduit :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)(\ln n)^{\alpha-1}}.$$

Proposition 14 Dans chacun des cas, la série $\sum u_n$ converge absolument, d'après la comparaison des séries à termes positifs.

- Si u_n est dominée par v_n, il existe un rang n_0 et une constante K tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $|u_n| \leqslant K\,v_n$ d'où la majoration pour $n \geqslant n_0$:
$$|R_n(u)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leqslant K\,R_n(v).$$
Cela donne $R_n(u) = \mathrm{O}\big(R_n(v)\big)$.
- Si u_n est négligeable devant v_n, il suffit de remplacer la constante K ci-dessus par n'importe quel $\varepsilon > 0$ pour aboutir à :
$$|R_n(u)| \leqslant \varepsilon\,R_n(v)$$
pour n assez grand.
- Si u_n est équivalente à v_n, on applique le point précédent à $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$.

Exercice 9

1. On prend $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$.
Les hypothèses de la proposition 14 de la page 410 sont vérifiées, puisque la série de Riemann à termes positifs $\sum v_n$ converge.
Comme $u_n \sim v_n$, on peut écrire $R_n(u) \sim \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p(p+1)}$.
De $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$, on déduit, par télescopage :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{p=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{n+1}.$$
On a donc :
$$R_n(u) \sim \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} R_n(v) &= \sum_{q=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q} \\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{q=n+1}^{n+2N} \frac{(-1)^q}{q} \\ &= (-1)^{n+1} \lim_{N\to+\infty} \sum_{p=1}^{N} \left(\frac{1}{n+2p-1} - \frac{1}{n+2p} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p-1)(n+2p)}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left|R_n(v)\right| = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p-1)(n+2p)} \geqslant \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p-1)(n+2p+1)}.$$

3. Par télescopage, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p-1)(n+2p+1)} &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2p-1} - \frac{1}{n+2p+1} \right) \\ &= \frac{1}{2n+2}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left|R_n(v)\right| \geqslant \frac{1}{2n+2}.$$

Comme $R_n(u) \sim \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$, on n'a pas $R_n(u) = \mathrm{o}\big(R_n(v)\big)$.

Ainsi la proposition 14 de la page 410 ne s'applique pas ici, car la série $\sum v_n$ n'est pas à termes positifs.

Exercice 10 En posant $u_k = \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{k}$, on a l'équivalent suivant :

$$u_k = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{k} \sim \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)}.$$

Cherchons maintenant un équivalent de $u_k - \frac{1}{k(k+1)}$:

$$\begin{aligned} u_k - \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{k} - \frac{1}{k^2\left(1+\frac{1}{k}\right)} \\ &= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2k^3} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{k^3}\right) \\ &= \frac{1}{2k^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{k^3}\right) \\ &\sim \frac{1}{2k^3} \sim \frac{1}{2k(k+1)(k+2)}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, on a, par télescopage :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n}\cdot$$

En utilisant la proposition 14 de la page 410, on obtient alors :

$$S_n - \frac{1}{n} \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k\,(k+1)\,(k+2)}\cdot$$

Comme $\frac{1}{2k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4k(k+1)} - \frac{1}{4(k+1)(k+2)}$, on a, comme plus haut, par télescopage :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k\,(k+1)\,(k+2)} = \frac{1}{4n\,(n+1)}\cdot$$

On en déduit :

$$S_n - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{4n\,(n+1)} \sim \frac{1}{4n^2},$$

c'est-à-dire :

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$

Proposition 15 La série $\sum v_n$ étant divergente et à termes positifs, la suite $(S_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ en croissant.

- Si u_n est dominée par v_n, il existe un rang n_0 et une constante $K > 0$ tels que, pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, on ait $|u_n| \leqslant K\,v_n$; il existe ensuite un rang $n_1 > n_0$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, on ait $|S_{n_0}(u)| \leqslant K\,S_n(v)$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(v) = +\infty$.

  On a alors pour tout $n \geqslant n_1$:

$$\begin{aligned}
|S_n(u)| &= \left| S_{n_0}(u) + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \right| \\
&\leqslant |S_{n_0}(u)| + \sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k| \\
&\leqslant K\,S_n(v) + K \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k \\
&\leqslant K\,S_n(v) + K\,\left(S_n(v) - S_{n_0}(v)\right) \\
&\leqslant 2K\,S_n(v).
\end{aligned}$$

  On en déduit la domination annoncée.
- Si u_n est négligeable devant v_n, il suffit de remplacer la constante K ci-dessus par n'importe quel $\varepsilon > 0$ pour aboutir à $|S_n(u)| \leqslant 2\varepsilon S_n(v)$ pour n assez grand.
- Si u_n est équivalente à v_n, on applique le point précédent à $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$.

Exercice 11 Utilisons un télescopage, pour déterminer un équivalent simple de $S_n(u)$.
Par développement limité, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{(p+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}&=\frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1-\alpha}-\frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}\\&=\frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(1+\frac{1-\alpha}{p}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{p}\right)\right)-\frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}\\&=p^{-\alpha}+\mathrm{o}\left(p^{-\alpha}\right)\sim\frac{1}{p^{\alpha}}\cdot\end{aligned}$$

Comme la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge et est à termes positifs, la proposition 15 de la page 411 permet d'écrire :

$$S_n(u)\sim\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{(p+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)=\frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha},$$

d'où l'on déduit $S_n(u)\sim\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\cdot$

Exercice 12

1. Par concavité sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction Arctan, on a l'encadrement suivant :

$$\forall x>0\quad 0<\operatorname{Arctan}(x)\leqslant x. \tag{1}$$

On en déduit, par récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_n\leqslant\frac{u_0}{2^n},$$

et, par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

2. Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{v_{n+1}^2}-\frac{1}{v_n^2}&=\frac{1}{2^{2n+2}u_{n+1}^2}-\frac{1}{2^{2n}u_n^2}\\&=\frac{u_n^2-4u_{n+1}^2}{2^{2n+2}u_n^2u_{n+1}^2}\\&=\frac{u_n^2-\operatorname{Arctan}(u_n)^2}{2^{2n+2}u_n^2u_{n+1}^2}\\&=\frac{(u_n-\operatorname{Arctan}u_n)(u_n+\operatorname{Arctan}u_n)}{2^{2n}u_n^2(\operatorname{Arctan}u_n)^2}\qquad(2)\\&\sim\frac{\frac{2u_n^4}{3}}{2^{2n}u_n^4}\sim\frac{1}{3}\frac{1}{2^{2n-1}}\cdot\end{aligned}$$

L'équivalent obtenu est le terme général d'une série à termes positifs convergente (série géométrique de raison $1/4$) ; on en déduit, par comparaison, la convergence de la série $\sum\left(\frac{1}{v_{n+1}^2}-\frac{1}{v_n^2}\right)\cdot$

3. D'après le lien suites-séries, on déduit de la question précédente la convergence de de la suite $\left(\frac{1}{v_n^2}\right)$.

   Posons $a = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n^2}$; l'encadrement (1) et l'égalité (2) permettent d'établir la croissance de la suite $\left(\frac{1}{v_n^2}\right)$, d'où l'on déduit $a \geqslant \frac{1}{v_0^2} > 0$.

   On a donc l'équivalent suivant :

$$u_n \sim \frac{\ell}{2^n} \quad \text{avec} \quad \ell = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a - \frac{1}{v_n^2} = \sum_{p=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{v_{p+1}^2} - \frac{1}{v_p^2} \right).$$

   Comme $\frac{1}{v_{p+1}^2} - \frac{1}{v_p^2} \sim \frac{1}{3}\frac{1}{2^{2p-1}}$, la proposition 14 de la page 410 permet d'écrire :

$$a - \frac{1}{v_n^2} \sim \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{3}\frac{1}{2^{2p-1}} = \frac{1}{3}\frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = \frac{1}{9}\frac{1}{2^{2n-3}}.$$

   On en déduit :

$$v_n^{-2} = a\left(1 - \frac{1}{9a}\frac{1}{2^{2n-3}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right)$$

   d'où :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{\sqrt{a}}\left(1 - \frac{1}{9a}\frac{1}{2^{2n-3}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\left(1 + \frac{1}{9a}\frac{1}{2^{2n-2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right) \\ &= \ell + \frac{\ell^3}{9}\frac{1}{2^{2n-2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^{2n}}\right) \qquad \text{en utilisant } \ell = \frac{1}{\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

   On obtient finalement le développement :

$$u_n = \frac{\ell}{2^n} + \frac{\ell^3}{9}\frac{1}{2^{3n-2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^{3n}}\right).$$

Exercice 13

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n} a_p\, x_p &= \sum_{p=0}^{n} (A_p - A_{p-1})\, x_p \\ &= \sum_{p=0}^{n} A_p\, x_p - \sum_{p=0}^{n-1} A_p\, x_{p+1} \qquad \text{puisque } A_{-1} = 0 \\ &= A_n\, x_n + \sum_{p=0}^{n-1} A_p\, (x_p - x_{p+1}).\end{aligned}$$

2. La série à termes positifs $\sum (x_n - x_{n+1})$ converge, d'après le lien suites-séries.
   Comme $A_n\,(x_n - x_{n+1}) = \mathrm{O}(x_n - x_{n+1})$, la série $\sum A_n\,(x_n - x_{n+1})$ converge absolument.
   Comme la suite (A_n) est bornée et que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n\, x_n = 0$.
   Puisqu'en outre la série $\sum A_n(x_n - x_{n+1})$ converge, on déduit de la première question la convergence de la série $\sum a_n\, x_n$.

3. Montrons que, pour $\alpha > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

   Les sommes partielles A_n de la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{in\theta}$ de raison $e^{i\theta} \neq 1$ se calculent facilement :

$$A_n = \sum_{p=1}^{n} e^{ip\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\, e^{i(n+1)\theta/2}$$

   et l'on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |A_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin(\theta/2)\right|}.$$

   Comme d'autre part la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ tend vers 0 en décroissant, on en déduit la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

   Remarque Comme $\left|\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right| = \dfrac{1}{n^\alpha}$, la convergence est absolue si, et seulement si, $\alpha > 1$, d'où l'intérêt de la transformation d'Abel pour $\alpha \in]0, 1]$.

S'entraîner et approfondir

8.1 *(Centrale 2015)*

Soit $\sum_{n\geqslant 2} a_n$ une série convergente à termes strictement positifs. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $b_n = -a_n \frac{\ln(a_n)}{\ln n}$.

1. Par une étude de $x \mapsto -x\ln x$, montrer qu'il existe $k_0 \geqslant 2$ tel que :
$$\forall k \geqslant k_0 \quad a_k \leqslant \frac{1}{k^3} \Rightarrow b_k \leqslant \frac{3}{k^3}.$$
2. Montrer que la série $\sum b_n$ converge.
3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ une suite à termes dans $]0,1[$ telle que la série $\sum \frac{u_n}{\ln(u_n)}$ converge. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{\ln n}$ converge.

8.2 Soit $\sum u_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. On suppose $\sum u_n$ divergente. Montrer l'existence d'une suite positive (a_n) de limite nulle telle que $\sum a_n u_n$ diverge.
2. On suppose $\sum u_n$ convergente. Montrer l'existence d'une suite positive (b_n) de limite infinie telle que $\sum b_n u_n$ converge.

8.3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$ de limite nulle telle que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{\ln u_n}{\ln n}\right)$ existe.

1. On suppose $\ell \neq 1$. Donner, selon ℓ, la nature de la série $\sum u_n$.
2. À l'aide d'exemples, montrer que, pour $\ell = 1$, la série $\sum u_n$ peut converger ou diverger.

8.4 Soit $\sum u_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + v_n$, où la série $\sum v_n$ converge absolument.

1. On pose $a_n = n^\alpha u_n$. Montrer que la série $\sum \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ converge.
2. En déduire la nature, selon le réel α, de la série $\sum u_n$.

8.5 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

1. Calculer u_n pour $b = a+1$.
Quelle est la nature de la série $\sum u_n$ pour $b \leqslant a+1$?
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (b-a-1)\sum_{k=0}^{n+1} u_k = (b-1)\,u_0 - (n+a+1)\,u_{n+1}.$$
En déduire que, pour $b > a+1$, la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

8.6 Soit (u_n) une suite complexe et (v_n) une suite réelle positive telles que $u_n \sim v_n$.
Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont-elles de même nature ?

8.7 Nature des séries :

1. $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n \ln n}$, selon $\alpha \in \mathbb{R}$;
2. $\sum u_n$ avec $u_n = \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n}}{k} \right)^{\ln n}$;
3. $\sum u_n$ avec $u_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{n\pi+\frac{\pi}{4}} \frac{\tan t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, selon $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\sum u_n$ avec $u_n = \cos\left(\pi n^2 \ln \frac{n}{n-1}\right)$;
5. $\sum u_n$ avec $u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^\alpha}$, selon $\alpha \in \mathbb{R}$;
6. $\sum u_n$ avec $u_n = \ln\left(\tan\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right)$;
7. $\sum u_n$ avec $u_n = x^{\lfloor \ln n \rfloor}$, selon $x \in \mathbb{R}$;
8. $\sum u_n$ avec $u_n = \sin \pi \sqrt[3]{n^3 + \lambda n^\alpha}$, selon $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in [0,2]$.

★ **8.8** Soit $\mathcal{P}$ la parabole de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y^2 = 2px$ avec $p > 0$.
Soit $\left(M_n(x_n, y_n)\right)_{n \geqslant 0}$ une suite de points de $\mathcal{P}$ définie par :

- M_0 est un point de $\mathcal{P}$ différent du sommet,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_{n+1} est le point d'intersection autre que M_n de $\mathcal{P}$ avec la normale à $\mathcal{P}$ en M_n.

Nature de la série $\sum \dfrac{1}{y_n}$? de la série $\sum \frac{1}{x_n}$? (étudier $x_{n+1} - x_n$)

8.9 Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite définie par :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
2. Montrer que $\frac{\ln u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\ln u_n}{2^n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.
3. En déduire qu'il existe $K > 1$ tel que $u_n \sim K^{2^n}$.

8.10 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels positifs telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k} \sim \ln u_n$.

8.11 Soit $\sum u_n$ une série divergente à termes positifs, avec $u_0 > 0$; on note S_n sa somme partielle d'ordre n. Étudier, pour $\alpha > 0$, la nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

8.12 Soit $\alpha > 0$. Étudier la série $\sum u_n$, avec $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

⋆ **8.13** 1. Nature de la série $\sum \frac{i^n}{\sqrt[3]{n}}$?

2. Trouver une série convergente $\sum u_n$ à termes réels telle que la série $\sum u_n^3$ diverge.

⋆ **8.14** Soit (z_n) une suite complexe ne prenant pas la valeur -1. On dit que le produit infini $\prod(1+z_n)$ converge si la suite $\left(\prod_{k=0}^{n}(1+z_k)\right)$ admet une limite finie *non nulle*.
On dit qu'il converge absolument si le produit infini $\prod\big(1+|z_n|\big)$ converge.

1. Soit (x_n) une suite réelle.
   (a) On suppose (x_n) à valeurs dans $]-1,+\infty[$. Montrer que le produit infini $\prod(1+x_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum \ln(1+x_n)$ converge.
   (b) Montrer que si (x_n) est positive, le produit infini $\prod(1+x_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum x_n$ converge.
   (c) Montrer que la convergence absolue du produit infini $\prod(1+x_n)$ entraîne sa convergence.
   (d) Donner un exemple de produit infini convergeant mais pas absolument.
2. Soit (z_n) une suite complexe ne prenant pas la valeur -1 telle que le produit infini $\prod(1+z_n)$ converge absolument.
   (a) Montrer que la suite $\left(\prod_{k=0}^{n}(1+z_k)\right)$ a une limite dans $\mathbb{C}$.
   (b) Montrer que le produit infini $\prod(1+z_n)$ converge.
   On pourra utiliser le produit infini $\prod \frac{1}{1+z_n}$.

8.15 Soit (u_n) une suite décroissante de réels tendant vers 0 telle que :

$$u_n - u_{n+1} \sim u_{n+1} - u_{n+2}.$$

1. Montrer que :
$$r_n = \sum_{p=n}^{+\infty} (-1)^p\, u_p \sim (-1)^n u_n/2.$$

2. *Application* : déterminer un équivalent de $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

Solution des exercices

8.1 1. La fonction $f : x \mapsto -x \ln x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = -\ln x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant \frac{1}{e}.$$

Avec $k_0 = 2$, on a $\frac{1}{k_0^3} \leqslant \frac{1}{e}$; par croissance de f sur $]0, 1/e]$, on en déduit :

$$\forall k \geqslant k_0 \quad a_k \leqslant \frac{1}{k^3} \Rightarrow -a_k \ln(a_k) \leqslant \frac{3 \ln k}{k^3},$$

ce qui prouve :

$$\forall k \geqslant k_0 \quad a_k \leqslant \frac{1}{k^3} \Rightarrow b_k \leqslant \frac{3}{k^3}.$$

2. Soit $k \geqslant k_0$.
   - Si $a_k \leqslant \frac{1}{k^3}$, on a $b_k \leqslant \frac{3}{k^3}$, d'après la première question.
   - Si $a_k \geqslant \frac{1}{k^3}$, on a $-\ln(a_k) \leqslant 3 \ln k$ et donc $b_k \leqslant 3a_k$.

   On a ainsi établi :

$$\forall k \geqslant k_0 \quad b_k \leqslant \frac{3}{k^3} + 3a_k.$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente (somme de deux séries convergentes). Comme b_k est positif à partir d'un certain rang, car $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = 0$, la série $\sum b_k$ converge, par comparaison de séries à termes positifs.

3. Pour tout $n \geqslant 2$, posons $a_n = -\frac{u_n}{\ln(u_n)}$ et $b_n = -a_n \frac{\ln(a_n)}{\ln n}$.

D'après la question précédente, la série $\sum b_n$ converge ; or :

$$b_n = \frac{u_n}{\ln(u_n)} \frac{\ln\left(\frac{u_n}{-\ln(u_n)}\right)}{\ln n} = \frac{u_n}{\ln(u_n)} \frac{\ln(u_n) - \ln\big(-\ln(u_n)\big)}{\ln n}.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = -\infty$, on a $\ln\big(-\ln(u_n)\big) = \mathrm{o}\big(\ln(u_n)\big)$; on en déduit :

$$b_n \sim \frac{u_n}{\ln(u_n)} \frac{\ln(u_n)}{\ln n} \sim \frac{u_n}{\ln n}.$$

Comme la série $\sum b_n$ converge, la série $\sum \frac{u_n}{\ln n}$ est donc convergente, par comparaison de séries à termes positifs.

8.2 1. Posons $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} u_p$ et $a_n = \frac{1}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}}$.

Comme la série à termes positifs $\sum u_n$ diverge, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty, \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$

Or :

$$a_n u_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} = \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}.$$

Par suite, $\sum\limits_{p=1}^{n} a_p u_p = \sqrt{S_n} - \sqrt{S_0}$.

La série $\sum a_n u_n$ est donc divergente, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

2. Posons $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{R_{n-1}}+\sqrt{R_n}}$.

On a $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Or :

$$b_n u_n = \frac{R_{n-1} - R_n}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}} = \sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}.$$

Par suite, $\sum_{p=1}^{n} b_p u_p = \sqrt{R_0} - \sqrt{R_n}$.

La série $\sum b_n u_n$ est donc convergente, puisque $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

8.3 1. • Si $\ell > 1$, il existe un réel $\alpha > 1$ et un entier n_0 tels que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad -\frac{\ln u_n}{\ln n} \geqslant \alpha.$$

Pour $n \geqslant n_0$, on a donc $\ln u_n \leqslant -\alpha \ln n$, c'est-à-dire $u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$.
La série à termes positifs $\sum u_n$ est convergente, par comparaison aux séries de Riemann.

• Si $\ell < 1$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad -\frac{\ln u_n}{\ln n} \leqslant 1.$$

Cela équivaut à :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant \frac{1}{n}.$$

La série $\sum u_n$ est donc divergente, par comparaison à la série harmonique.

2. • Pour $u_n = \frac{1}{n}$, on a $-\frac{\ln u_n}{\ln n} = 1$, d'où $\ell = 1$ et la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

• On établit facilement, avec le corollaire 13 de la page 409, que la série de Bertrand $\sum u_n$, avec $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge. Or :

$$-\frac{\ln u_n}{\ln n} = \frac{\ln n + 2\ln(\ln n)}{\ln n} \sim \frac{\ln n}{\ln n}.$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{\ln u_n}{\ln n}\right) = 1$.

8.4 1. Effectuons un développement de $w_n = \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$:

$$\begin{aligned} w_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + v_n\right) + \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{\alpha}{n} + v_n + \mathrm{O}\left(-\frac{\alpha}{n} + v_n\right)^2 + \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= v_n + v'_n, \end{aligned}$$

avec $v'_n = \mathrm{O}\left(-\frac{\alpha}{n} + v_n\right)^2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

La série $\sum \left(-\frac{\alpha}{n} + v_n\right)^2$ converge, car :

- $\sum \frac{\alpha^2}{n^2}$ converge,
- $\sum \left(-2\,\frac{\alpha v_n}{n}\right)$ converge absolument, puisque $\frac{v_n}{n} = \mathrm{O}\,(v_n)$,
- $\sum v_n^2$ converge, puisque $v_n^2 = \mathrm{O}\,(v_n)$.

On en déduit la convergence absolue de la série $\sum v'_n$ et, par suite, la convergence de la série $\sum w_n$.

2. Comme $w_n = \ln a_{n+1} - \ln a_n$, on déduit du lien suites-séries que la suite $(\ln a_n)$ a une limite finie ℓ. Si l'on pose $k = e^\ell$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = k$ et, comme on a $k > 0$, on peut écrire $u_n \sim \frac{k}{n^\alpha}$.

   En conclusion, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$, par comparaison aux séries de Riemann.

8.5 1. • Pour $b = a+1$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+a+1)\,u_{n+1} = (n+a)\,u_n.$$

La suite $\big((n+a)\,u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante et l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{au_0}{n+a} \sim \frac{au_0}{n}.$$

Par comparaison aux séries de Riemann, la série à termes positifs $\sum u_n$ diverge.

• Pour $b \leqslant a+1$, établissons par récurrence sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant \frac{au_0}{n+a}.$$

∗ Le résultat est immédiat pour $n = 0$.

∗ Supposons le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}$; on a alors :

$$u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b}\,u_n \geqslant \frac{au_0}{n+b} \geqslant \frac{au_0}{n+1+a},$$

puisque $b \leqslant a+1$.

On déduit du premier cas, par comparaison, que la série $\sum u_n$ diverge.

2. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(k+a)\,u_k - (k+a+1)\,u_{k+1} = (b-a-1)\,u_{k+1}.$$

En sommant pour $k \in [\![0, n]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\begin{aligned}(b-a-1)\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} &= \sum_{k=0}^{n}\big((k+a)\,u_k - (k+a+1)\,u_{k+1}\big)\\ &= au_0 - (n+a+1)\,u_{n+1},\end{aligned}$$

ou encore :

$$(b-a-1)\sum_{k=0}^{n+1} u_k = (b-1)\,u_0 - (n+a+1)\,u_{n+1}.$$

On en déduit, pour $b > a+1$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n+1} u_k \leqslant \frac{(b-1)\,u_0}{b-a-1}.$$

La série à termes positifs $\sum u_n$ est donc convergente, puisque ses sommes partielles sont majorées.

Cela équivaut à l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n+1} u_k$. L'égalité établie plus haut entraîne alors l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+a+1)\,u_{n+1}$.

Supposons cette dernière limite, notée ℓ, non nulle ; on aurait $u_{n+1} \sim \frac{\ell}{n}$ et, par comparaison aux séries de Riemann, la série à termes positifs $\sum u_n$ serait divergente. C'est une contradiction ; on a donc, en fait, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+a+1)\,u_{n+1} = 0$.

En faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité établie plus haut, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{b-1}{b-a-1}\,u_0.$$

8.6 Notons que le théorème de comparaison ne s'applique pas ici, puisque les séries ne sont pas à termes réels.

- Si la série $\sum v_n$ converge, comme $|u_n| \sim v_n$, la série $\sum u_n$ converge absolument, par comparaison, donc converge.
- Supposons la série $\sum v_n$ divergente. Comme $u_n \sim v_n$, il existe une suite complexe $(a_n + ib_n)$ de limite 1 telle que $u_n = (a_n + ib_n)\,v_n$. La suite (v_n) étant réelle, on a $\mathrm{Re}\,(u_n) = a_n v_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, c'est-à-dire $\mathrm{Re}\,(u_n) \sim v_n$. La série $\sum \mathrm{Re}\,(u_n)$ est donc divergente, par comparaison (on a deux séries à termes réels et $\sum v_n$ est à termes positifs) ; par suite, la série $\sum u_n$ diverge.

En conclusion, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

8.7 1. • Pour $\alpha \leqslant 0$, on a $n^\alpha = \mathrm{o}\,(\ln n)$, d'où $u_n \sim \frac{1}{\ln n}$.
Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = +\infty$ et la série à termes positifs $\sum u_n$ diverge, par comparaison aux séries de Riemann.

• Pour $\alpha > 0$, on a $\ln n = \mathrm{o}\,(n^\alpha)$; effectuons un développement de u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\,\frac{1}{1+(-1)^n\,\frac{\ln n}{n^\alpha}} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{\ln n}{n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

Posons $v_n = u_n - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$; comme la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ vérifie les hypothèses du critère des séries alternées (elle est alternée et la valeur absolue de son terme général décroît et tend vers 0), elle converge et la série $\sum u_n$ est de même nature que la série $\sum v_n$. De $v_n \sim -\frac{\ln n}{n^{2\alpha}}$ on déduit que $\sum v_n$ est de même nature que $\sum \left(-\frac{\ln n}{n^{2\alpha}}\right)$ puisque cette dernière série est à termes négatifs.

∗ Pour $\alpha \leqslant 1/2$, on a $\frac{1}{n} = \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n^{2\alpha}}\right)$; la série $\sum \frac{\ln n}{n^{2\alpha}}$ diverge, par comparaison à la série harmonique divergente.

∗ Pour $\alpha > 1/2$, si $\beta \in]1, 2\alpha[$, on a $\frac{\ln n}{n^{2\alpha}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right)$; la série $\sum \frac{\ln n}{n^{2\alpha}}$ converge, par comparaison aux séries de Riemann.

En conclusion $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1/2$.

2. Comme $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n}}{k}$ est la somme d'une série alternée de terme général strictement décroissant en valeur absolue, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1/n$.

   Donc $u_n^{\ln n} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ pour $n \geqslant 8$ et $\sum w_n$ converge.

3. Pour $n \geqslant 1$, le changement de variable $t = u + n\pi$ donne :

$$|u_n| = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan u}{(u + n\pi)^{\alpha}} \, \mathrm{d}u.$$

   - Pour $\alpha \leqslant 0$, on a $|u_n| \geqslant \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\tan u}{\pi^{\alpha}} \, \mathrm{d}u$ et la série $\sum u_n$ diverge, puisque son terme général ne tend pas vers zéro.
   - Pour $\alpha > 0$, la série $\sum u_n$ est alternée, la suite $(|u_n|)$ décroît et elle tend vers zéro, puisque :

$$|u_n| \leqslant \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(n\pi)^{\alpha}} \, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{4\,(n\pi)^{\alpha}}.$$

     La série $\sum u_n$ est donc convergente, d'après le critère des séries alternées.

4. Un développement du terme général u_n donne :

$$\begin{aligned} u_n = \cos\left(-\pi n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) &= \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{3n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^{n+1} \, \frac{\pi}{3n} + v_n, \end{aligned}$$

   avec $v_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum v_n$ est absolument convergente.

   La série alternée $\sum (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3n}$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées car son terme général décroît en valeur absolue et tend vers zéro ; elle est donc convergente.

   En conclusion, la série $\sum u_n$, somme de deux séries convergentes, est convergente.

5. On a $|u_n| = \frac{2}{n^{\alpha}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)} \sim \frac{1}{n^{\alpha + \frac{1}{2}}}$.

   - Pour $\alpha \leqslant -\frac{1}{2}$, la série $\sum u_n$ diverge, puisque son terme général ne tend pas vers zéro.

- Pour $\alpha > -\frac{1}{2}$, effectuons un développement de u_n :

$$u_n = \frac{2(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} = \frac{2(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(2+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} + v_n,$$

avec $v_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+\frac{3}{2}}}\right)$.

La série $\sum v_n$ converge absolument, par comparaison aux séries de Riemann, puisque $\alpha + \frac{3}{2} > 1$.

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ converge, d'après le théorème des séries alternées.

La série $\sum u_n$ est donc convergente, car somme de deux séries convergentes.

6. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \left(-t^2\right)^k \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \left(-t^2\right)^k \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Posons $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. On a :

$$0 \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}.$$

On en déduit, en particulier, $a_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Un développement de u_n donne :

$$\begin{aligned}u_n &= \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + (-1)^n a_n\right) \\ &= \ln\frac{1+(-1)^n \tan a_n}{1+(-1)^{n+1}\tan a_n} \\ &= \ln\left(1+(-1)^n \tan a_n\right) - \ln\left(1+(-1)^{n+1}\tan a_n\right) \\ &= \ln\left(1+(-1)^n a_n + \mathrm{O}\left(a_n^2\right)\right) - \ln\left(1+(-1)^{n+1} a_n + \mathrm{O}\left(a_n^2\right)\right) \\ &= 2(-1)^n a_n + \mathrm{O}\left(a_n^2\right) = 2(-1)^n a_n + v_n,\end{aligned}$$

avec $v_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum v_n$ converge absolument, donc converge.

Par suite, la série $\sum u_n$ est de même nature que la série alternée $\sum (-1)^n a_n$.

- Comme $a_{n+1} - a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t \leqslant 0$, la suite (a_n) est décroissante.
- On a déjà établi que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, puisque $a_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

La série $\sum (-1)^n a_n$, vérifiant les hypothèses du critère des séries alternées, est donc convergente.

En conclusion, la série $\sum u_n$ converge.

7. - Pour $|x| \geqslant 1$, on a $|u_n| \geqslant 1$. La série $\sum u_n$ diverge, puisque son terme général ne tend pas vers 0.
   - Pour $x = 0$, la série $\sum u_n$ converge, puisque $u_n = 0$ pour $n \geqslant 3$.
   - Pour $x \in]0,1[$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :
   $$x^{\ln n} \leqslant x^{\lfloor \ln n \rfloor} \leqslant x^{\ln n - 1}.$$
   Comme $\ln\left(x^{\ln n}\right) = \ln n \ln x = \ln\left(n^{\ln x}\right)$, cet encadrement peut s'écrire :
   $$n^{\ln x} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^{\ln x}}{x}.$$
   On a donc $u_n = \mathrm{O}\left(n^{\ln x}\right)$ et $n^{\ln x} = \mathrm{O}\left(u_n\right)$. D'après le théorème de comparaison, les séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum n^{\ln x}$ sont de même nature. D'après la nature des séries de Riemann, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\ln x < -1$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x < 1/e$.
   - Pour $x \in]-1/e, 0[$, on a $|u_n| = |x|^{\lfloor \ln n \rfloor}$ et, d'après l'étude précédente, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
   - Pour $x \in]-1, -1/e]$, posons, pour tout $p \in \mathbb{N}$:
   $$\sigma_p = \sum_{p \leqslant \ln n < p+1} u_n = \sum_{e^p \leqslant n < e^{p+1}} x^p = \sum_{n=n_p}^{m_p} (-1)^p |x|^p$$
   $$= (-1)^p |x|^p (m_p - n_p + 1),$$
   où n_p et m_p désignent respectivement le plus petit et le plus grand élément de $\mathbb{N} \cap \left[e^p, e^{p+1}\right[$.
   On en déduit :
   $$|\sigma_p| \geqslant |x|^p \left(\left(e^{p+1}-1\right) - \left(e^p+1\right) + 1\right) = |x|^p \left(e^{p+1} - e^p - 1\right).$$
   Comme $|x| \geqslant 1/e$, il vient :
   $$|\sigma_p| \geqslant e - 1 - \frac{1}{e^p} \geqslant e - 1 - \frac{1}{e} > 0.$$
   Donc la série $\sum \sigma_p$ diverge, puisque son terme général ne tend pas vers 0. Comme la suite des sommes partielles de cette série est une suite extraite de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, cette dernière série diverge.

8. • Étudions le cas $\alpha = 2$. Un développement limité de u_n donne :

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(n\pi\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{1/3}\right) \\ &= \sin\left(n\pi + \frac{\lambda\pi}{3} - \frac{\lambda^2\pi}{9n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{\lambda\pi}{3} - \frac{\lambda^2\pi}{9n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \end{aligned}$$

∗ Si $\lambda \notin 3\mathbb{Z}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = \left|\sin\frac{\lambda\pi}{3}\right| \neq 0$, donc $\sum u_n$ diverge.

∗ Si $\lambda = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a $u_n = (-1)^{n+k+1}\left(\frac{\lambda^2\pi}{9n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

La série $\sum u_n$ est la somme d'une série vérifiant les hypothèses du critère des séries alternées et d'une série absolument convergente ; elle est donc convergente.

• Étudions le cas $\alpha < 2$.
Posons $x_n = \pi\sqrt[3]{n^3+\lambda n^\alpha} - n\pi$; on a donc $u_n = (-1)^n \sin x_n$, avec :

$$x_n = n\pi\Big(\left(1+\lambda n^{\alpha-3}\right)^{1/3} - 1\Big) \sim \frac{\lambda\pi}{3}\, n^{\alpha-2}.$$

On en déduit que x_n est de signe constant (celui de λ) à partir d'un certain rang et que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Nous allons établir que la série $\sum u_n$ vérifie les hypothèses du critère des séries alternées à partir d'un certain rang ; pour cela, il suffit donc de montrer que la suite $(|x_n|)$ est décroissante à partir d'un certain rang.
Utilisons la fonction f définie par $f(t) = \pi\sqrt[3]{t^3+\lambda t^\alpha} - \pi t$; la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $+\infty$ et :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\pi}{3}\left(3t^2 + \lambda\alpha t^{\alpha-1}\right)\left(t^3+\lambda t^\alpha\right)^{-2/3} - \pi \\ &= \pi\left(1+\frac{\lambda\alpha}{3}\, t^{\alpha-3}\right)\left(1+\lambda t^{\alpha-3}\right)^{-2/3} - \pi \\ &= \pi\left(1+\frac{\lambda\alpha}{3}\, t^{\alpha-3}\right)\left(1-\frac{2\lambda}{3}\, t^{\alpha-3} + \mathrm{o}\left(t^{\alpha-3}\right)\right) - \pi \\ &= \pi(\alpha-2)\,\frac{\lambda}{3}\, t^{\alpha-3} + \mathrm{o}\left(t^{\alpha-3}\right). \end{aligned}$$

Comme $\alpha - 2 < 0$, $f'(t)$ est du signe de $-\lambda$ au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve, en distinguant $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$, la décroissance à partir d'un certain rang de la suite $(|x_n|)$.
En conclusion la série $\sum u_n$ converge.

8.8 Paramétrons $\mathcal{P}$ à l'aide de l'ordonnée et notons $M(t)$ le point de $\mathcal{P}$ d'ordonnée t. On a $M(t) = \left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$ et $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}(t) = \left(\dfrac{t}{p}, 1\right)$; une équation cartésienne de la normale

en $M(t)$ à $\mathcal{P}$ est donc :

$$\frac{t}{p}\left(x-\frac{t^2}{2p}\right)+(y-t)=0.$$

Un point $M\left(\frac{y^2}{2p},y\right)$ de $\mathcal{P}$ appartient à cette normale si, et seulement si :

$$\frac{ty^2}{2p^2}+y-\frac{t^3}{2p^2}-t=0.$$

Ce polynôme en y admet la racine t (la normale en M à $\mathcal{P}$ passe par M !) et, pour $t\neq 0$, la somme des racines étant $-\dfrac{2p^2}{t}$, il admet aussi la racine :

$$-\frac{2p^2}{t}-t=-t\left(1+\frac{2p^2}{t^2}\right)$$

qui est non nulle. On en déduit que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $y_0\in\mathbb{R}^*$ et la relation de récurrence :

$$y_{n+1}=-y_n\left(1+\frac{2p^2}{y_n^2}\right).$$

- La série $\sum\frac{1}{y_n}$ est alternée et la suite (u_n) , où $u_n=\frac{1}{|y_n|}$, vérifie :

  $$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\frac{u_n}{1+2p^2u_n^2}.$$

  Ainsi la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc convergente.
  Soit $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$; en faisant tendre n vers l'infini dans la relation précédente, on obtient $\ell=\frac{\ell}{1+2p^2\ell^2}$, qui équivaut à $2p^2\ell^3=0$, c'est-à-dire à $\ell=0$.
  En conclusion, la série $\sum\frac{1}{y_n}$ vérifie les hypothèses du critère des séries alternées et est donc convergente.
- On a :

  $$\begin{aligned}2p(x_{n+1}-x_n)&=y_{n+1}^2-y_n^2\\&=y_n^2\left(1+\frac{2p^2}{y_n^2}\right)^2-y_n^2\\&=4p^2+\frac{4p^4}{y_n^2}.\end{aligned}$$

  Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=2p>0$. La série à termes positifs $\sum(x_{n+1}-x_n)$ est donc divergente et, par sommation d'équivalents, on en déduit :

  $$\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\sim 2pn,$$

  c'est-à-dire $x_n-x_0\sim 2pn$, d'où $x_n\sim 2pn$.
  En conclusion, comme $x_n\sim\frac{1}{2pn}$, la série $\sum x_n$ diverge, par comparaison aux séries de Riemann.

8.9 1. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. Supposons-la majorée. Alors elle converge et, si l'on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient $\ell = \ell + \ell^2$, c'est-à-dire $\ell = 0$; c'est impossible, puisque $\ell \geqslant u_0 > 0$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. On a $\frac{\ln u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\ln u_n}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n^2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\cdot$

3. Posons $v_n = \frac{\ln u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\ln u_n}{2^n}$; comme $v_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ la série $\sum v_n$ converge absolument, donc converge, ce qui équivaut à l'existence de $a = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{2^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$\forall N > n \quad \sum_{p=n}^{N} v_p = \frac{\ln u_{N+1}}{2^{N+1}} - \frac{\ln u_n}{2^n}\cdot$$

En faisant tendre N vers l'infini, on en déduit $\sum\limits_{p=n}^{+\infty} v_p = a - \frac{\ln u_n}{2^n}$.

Comme $v_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right)$, avec $\sum \frac{1}{2^n}$ série convergente à termes positifs, on a, par sommation des relations de comparaison, $\sum\limits_{p=n}^{+\infty} v_p = \mathrm{o}\left(\sum\limits_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{2^p}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{2}{2^n}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right)\cdot$

Si l'on pose $K = e^a$, on peut écrire $\frac{\ln u_n}{2^n} = a + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right)$, soit $\ln u_n = 2^n \ln K + \mathrm{o}(1)$, ou encore $u_n = K^{2^n} e^{\mathrm{o}(1)}$.

On a donc établi $u_n \sim K^{2^n}$, avec $K > 1$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

8.10 Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{u_k}{u_{k-1}} = 1$, on a $\ln \frac{u_k}{u_{k-1}} \sim \frac{u_k}{u_{k-1}} - 1 \sim \frac{u_k - u_{k-1}}{u_{k-1}} \sim \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k}$.

Par comparaison, les séries à termes négatifs $\sum \ln \frac{u_k}{u_{k-1}}$ et $\sum \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k}$ sont de même nature. Or :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{u_k}{u_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} (\ln u_k - \ln u_{k-1}) = \ln u_n - \ln u_0.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, la série $\sum \ln \frac{u_k}{u_{k-1}}$ diverge. Par sommation des relations de comparaison, on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k} \sim \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{u_k}{u_{k-1}}\cdot$$

On a $\ln u_n - \ln u_0 \sim \ln u_n$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty$.

On peut donc conclure que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k} \sim \ln u_n$.

8.11 Notons que $u_0 > 0$ garantit l'existence, pour tout n, de u_n/S_n^α.

- Examinons le cas $\alpha = 1$.
  - Si l'on n'a pas $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{S_n} = 0$, la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.
  - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{S_n} = 0$, on peut écrire :

$$\frac{u_n}{S_n} \sim -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) = \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right).$$

  Par comparaison, les séries à termes positifs $\sum \frac{u_n}{S_n}$ et $\sum \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$ sont de même nature. Or :

$$\sum_{p=1}^{n} \ln\left(\frac{S_p}{S_{p-1}}\right) = \sum_{p=1}^{n} \ln S_p - \sum_{p=0}^{n-1} \ln S_p = \ln S_n - \ln S_0.$$

  Comme la série à termes positifs $\sum u_n$ diverge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Par suite, la série $\sum \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$ diverge, ainsi donc que la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$.

- Pour $\alpha < 1$, comme $\sum u_n$ diverge, il existe n_0 tel que $S_{n_0} > 1$ (donc $S_n > 1$, pour $n > n_0$). On en déduit :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \frac{u_n}{S_n^\alpha} \geqslant \frac{u_n}{S_n}.$$

  La série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ est donc divergente, par comparaison, d'après le cas précédent.

- Pour $\alpha > 1$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{S_{n-1}^{1-\alpha}}{\alpha - 1} - \frac{S_n^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

  La suite $\left(S_n^{1-\alpha}\right)$ est convergente (de limite nulle). On déduit alors du lien suites-séries que la série $\sum \left(S_{n-1}^{1-\alpha} - S_n^{1-\alpha}\right)$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ est donc convergente.

8.12 La série $\sum \dfrac{(-1)^k}{k^\alpha}$ vérifie les hypothèses du critère des séries alternées, donc converge ; cela justifie la définition de u_n. D'après le même critère, on a de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (-1)^{n+1} u_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad |u_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

On en déduit que, pour $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.
Pour $\alpha \in]0, 1]$, la série $\sum u_n$ est alternée et son terme général tend vers 0, d'après ce qui précède. Pour établir sa convergence, il suffit d'établir la décroissance de la suite $\left(|u_n|\right)$, d'après le critère des séries alternées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{n+2m} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \\ &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{p=1}^{m} \left(\frac{(-1)^{n+2p-1}}{(n+2p-1)^\alpha} + \frac{(-1)^{n+2p}}{(n+2p)^\alpha} \right) \\ &= (-1)^{n-1} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+2p-1)^\alpha} - \frac{1}{(n+2p)^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, définissons la fonction $f_p : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$f_p(t) = \frac{1}{(t+2p-1)^\alpha} - \frac{1}{(t+2p)^\alpha}.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| = \sum_{p=1}^{+\infty} f_p(n)$.

La fonction f_p est dérivable et l'on a :

$$\forall t \geqslant 1 \quad f_p'(t) = -\alpha \left((t+2p-1)^{-\alpha-1} - (t+2p)^{-\alpha-1} \right) \leqslant 0.$$

On en déduit, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_p(n) \geqslant f_p(n+1)$. La suite $\left(|u_n|\right)$ est donc décroissante.

En conclusion, la série $\sum u_n$ est convergente, d'après le critère des séries alternées.

8.13 1. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{j^k}{\sqrt[3]{k}}$ et $v_p = \frac{j^{3p-2}}{\sqrt[3]{3p-2}} + \frac{j^{3p-1}}{\sqrt[3]{3p-1}} + \frac{j^{3p}}{\sqrt[3]{3p}}$; on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{3n} = \sum_{p=1}^{n} v_p.$$

Pour étudier la série $\sum v_p$ faisons un développement de son terme général :

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{j}{\sqrt[3]{3p}} \left(1 - \frac{2}{3p}\right)^{-1/3} + \frac{j^2}{\sqrt[3]{3p}} \left(1 - \frac{1}{3p}\right)^{-1/3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3p}} \\ &= \frac{j + j^2 + 1}{\sqrt[3]{3p}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{p^{4/3}}\right) \\ &= \mathrm{O}\left(\frac{1}{p^{4/3}}\right). \end{aligned}$$

La série $\sum v_p$ est absolument convergente, par comparaison aux séries de Riemann, donc convergente ; d'où l'existence de $S = \lim_{n\to+\infty} S_{3n}$.

Comme $S_{3n+1} = S_{3n} + \frac{j^{3n+1}}{\sqrt[3]{3n+1}}$ et $S_{3n+2} = S_{3n+1} + \frac{j^{3n+2}}{\sqrt[3]{3n+2}}$, on a aussi :

$$\lim_{n\to+\infty} S_{3n+1} = S \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} S_{3n+2} = S.$$

Les trois suites extraites (S_{3n}), (S_{3n+1}) et (S_{3n+2}) de la suite (S_n) étant convergentes et ayant même limite, la suite (S_n) est convergente.

Ainsi la série $\sum \frac{j^n}{\sqrt[3]{n}}$ converge, alors que la série $\sum \left(\frac{j^n}{\sqrt[3]{n}}\right)^3$ diverge, puisque c'est la série harmonique.

2. Définissons la série $\sum u_n$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \mathrm{Re}\left(\frac{j^n}{\sqrt[3]{n}}\right)$.
   - D'après la première question, la série $\sum u_n$ converge.
   - Posons $w_p = u_{3p-2}^3 + u_{3p-1}^3 + u_{3p}^3$. On a :
   $$w_p = -\frac{1}{8}\frac{1}{3p-2} - \frac{1}{8}\frac{1}{3p-1} + \frac{1}{3p}.$$
   Par suite $\lim\limits_{p\to+\infty} pw_p = \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $w_p \sim \frac{1}{4p}$.
   On en déduit que la série $\sum w_p$ diverge, par comparaison de séries à termes de signe constant. Comme $\sum\limits_{p=1}^{n} w_p = \sum\limits_{k=1}^{3n} u_k^3$, la série $\sum u_n^3$ diverge.

8.14 1. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n} (1+z_k)$.

(a) On a, dans ce cas : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + x_n > 0$. La convergence du produit infini $\prod(1+x_n)$ équivaut donc à l'existence dans $\mathbb{R}_+^*$ de $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$, c'est-à-dire à l'existence dans $\mathbb{R}$ de $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(P_n)$.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(P_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1+x_k)$, la convergence du produit infini $\prod(1+x_n)$ équivaut à la convergence de la série $\sum \ln(1+x_n)$.

(b) Comme les deux suites (x_n) et $\big(\ln(1+x_n)\big)$ tendent vers 0 simultanément, on peut se limiter au cas où les deux tendent vers 0, puisque, dans le cas contraire, les deux séries $\sum x_n$ et $\sum \ln(1+x_n)$ divergent grossièrement.
On a alors $\ln(1+x_n) \sim x_n$. Par comparaison de séries à termes positifs, les deux séries $\sum x_n$ et $\sum \ln(1+x_n)$ sont de même nature. On conclut à l'aide de la question précédente.

(c) Notons que les deux premières questions s'appliquent à toute suite $(x_n)_{n\geqslant n_0}$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$; on étudie alors l'existence dans $\mathbb{R}^*$ de $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=n_0}^{n} (1+x_k)$ et l'on dit, lorsqu'elle existe, que le produit infini $\prod\limits_{n\geqslant n_0} (1+x_n)$ converge.

Si le produit infini $\prod(1+x_n)$ converge absolument, la série $\sum x_n$ converge absolument, d'après la question précédente. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$; on peut donc choisir $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geqslant n_0 \quad x_n > -1$.
Pour $n \geqslant n_0$, on peut écrire :

$$P_n = P_{n_0-1} Q_n \quad \text{avec} \quad Q_n = \prod_{k=n_0}^{n} (1+x_k).$$

La convergence du produit infini $\prod(1+x_n)$ équivaut à l'existence dans $\mathbb{R}^*$ de $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n$, c'est-à-dire à la convergence du produit infini $\prod\limits_{n\geqslant n_0}(1+x_n)$.
Cela équivaut à la convergence de la série $\sum \ln(1+x_n)$, d'après la première question. Or cette série converge absolument, puisque $\left|\ln(1+x_n)\right| \sim |x_n|$ et que la série $\sum x_n$ converge absolument ; d'où la conclusion.

(d) Prenons la suite (x_n), avec : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > -1$. On peut donc appliquer le résultat de la première question. Pour cela, effectuons un développement :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right) = \frac{(-1)^n}{n+1} + u_n \quad \text{avec} \quad u_n \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge, d'après le critère des séries alternées (elle est alternée et la valeur absolue de son terme général tend vers 0 en décroissant). La série $\sum u_n$ converge, par comparaison aux séries de Riemann (son terme général étant négatif à partir d'un certain rang, le théorème de comparaison s'applique).
La série $\sum \ln(1+x_n)$ est donc convergente, comme somme de deux séries convergentes, ce qui prouve, d'après la première question, la convergence du produit infini $\prod(1+x_n)$.
En revanche le produit infini $\prod(1+x_n)$ ne converge pas absolument, puisque $|x_n| \sim \frac{1}{n}$; cela prouve, par comparaison aux séries de Riemann, la divergence de la série $\sum |x_n|$ et, d'après la deuxième question, la non convergence absolue du produit infini $\prod(1+x_n)$.

- Montrons par une autre méthode la convergence, et déterminons la valeur, du produit infini $\prod(1+x_n)$.
On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$(1+x_{2p})(1+x_{2p+1}) = \left(1+\frac{1}{2p+1}\right)\left(1-\frac{1}{2p+2}\right) = 1.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_{2n+1} = 1 \quad \text{et} \quad P_{2n+2} = 1 + \frac{1}{2n+3}.$$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{2n+1} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{2n+2} = 1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 1$. Cela prouve la convergence du produit infini $\prod(1+x_n)$ et fournit, en outre :

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{k+1}\right) = 1.$$

2. (a) Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$ existe dans $\mathbb{C}$, où $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n}(1+z_k)$, utilisons le

lien suites-séries. En notant $P = \lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} (1+|z_k|)$, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad |P_{n+1} - P_n| &= |z_{n+1} P_n| \\ &\leqslant |z_{n+1}| \prod_{k=0}^{n} (1+|z_k|) \\ &\leqslant P\,|z_{n+1}|\,.\end{aligned}$$

Cela prouve, par comparaison, la convergence absolue, donc la convergence de la série $\sum (P_{n+1} - P_n)$ et, par suite, l'existence dans $\mathbb{C}$ de $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $z'_n \in \mathbb{C}$ tel que $1 + z'_n = \frac{1}{1+z_n}$ qui vérifie évidemment $z'_n \neq -1$. On a de plus $z'_n = -\frac{z_n}{1+z_n}$.

- Comme le produit infini $\prod(1+z_n)$ converge absolument, la série $\sum z_n$ converge absolument, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$. On en déduit $|z'_n| \sim |z_n|$, ce qui prouve, par comparaison, la convergence absolue de la série $\sum z'_n$ et, par suite, la convergence absolue du produit infini $\prod(1+z'_n)$.
- D'après ce qui précède, on en déduit que la suite $(P_n^{-1}) = \left(\prod\limits_{k=0}^{n} (1+z'_k)\right)$ converge, donc est bornée, ce qui prouve que (P_n) ne peut pas tendre vers 0. La suite (P_n) converge ainsi vers un nombre complexe non nul, et l'on a établi la convergence du produit infini $\prod(1+z_n)$.

8.15 1. La suite (u_n) étant décroissante et de limite nulle, la série $\sum u_n$ vérifie les hypothèses du critère des séries alternées, ce qui justifie la définition de r_n.

- Soit $n \in \mathbb{N}$; pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{p=2n}^{2n+2N+1} (-1)^p\, u_p = \sum_{k=n}^{n+N} (u_{2k} - u_{2k+1})\,.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad r_{2n} = \sum_{p=n}^{+\infty} (u_{2p} - u_{2p+1})\,.$$

On établit de même :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad r_{2n+1} = -\sum_{p=n}^{+\infty} (u_{2p+1} - u_{2p+2})\,.$$

Comme $u_{2p} - u_{2p+1} \sim u_{2p+1} - u_{2p+2}$ et que la série $\sum (u_{2p} - u_{2p+1})$ à termes positifs converge, il vient, par sommation d'équivalents :

$$r_{2n} = \sum_{p=n}^{+\infty} (u_{2p} - u_{2p+1}) \sim \sum_{p=n}^{+\infty} (u_{2p+1} - u_{2p+2}) = -r_{2n+1}.$$

Comme $r_{2n} = u_{2n} + r_{2n+1}$, on peut écrire :

$$u_{2n} = r_{2n} - r_{2n+1} = r_{2n} + r_{2n} + \mathrm{o}\,(r_{2n}) \sim 2r_{2n},$$

c'est-à-dire $r_{2n} \sim \dfrac{u_{2n}}{2}$.

- En partant de $r_{2n+1} = -\sum_{p=n}^{+\infty} (u_{2p+1} - u_{2p+2})$, on obtient de la même manière l'équivalent $r_{2n+1} \sim \dfrac{u_{2n+1}}{2}$.

On a donc établi $r_n \sim (-1)^n \dfrac{r_n}{2}$.

2. Le lecteur vérifiera que la suite de terme général $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$ décroît à partir du rang 3 et que $u_n - u_{n+1} \sim u_{n+1} - u_{n+2}$. En appliquant la question précédente, on obtient :

$$r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k} \sim (-1)^n \frac{\ln n}{2n}.$$

Chapitre 9 : Familles sommables

I Dénombrabilité 448
1 Parties de $\mathbb{N}$ 448
2 Ensembles dénombrables 448
3 Opérations sur les ensembles dénombrables 450
4 Exemples d'ensembles infinis non dénombrables . . 451
II Familles sommables de réels positifs 452
1 Définitions, propriétés élémentaires 453
2 Changement d'indice, commutativité 455
3 Sommation par paquets 456
III Familles sommables de nombres complexes 459
1 Définition 459
2 Somme d'une famille sommable 459
3 Propriétés 460
IV Applications 463
1 Sommes doubles 463
2 Produit de Cauchy 466
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 468
Exercices 477

Familles sommables



I Dénombrabilité

1 Parties de $\mathbb{N}$

Par définition, les parties finies de $\mathbb{N}$ sont en bijection avec un intervalle entier de la forme $[\![1, n]\!]$, pour un certain entier n (son cardinal).
Voyons ce qu'il en est des parties infinies de $\mathbb{N}$.

Proposition 1

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Principe de démonstration. Si A est une partie infinie de $\mathbb{N}$, on construit par récurrence une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = \min A$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \min\{x \in A \mid x > a_n\}$$

et l'on vérifie que $n \mapsto a_n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur A.

Démonstration page 468

2 Ensembles dénombrables

Définition 1

Un ensemble est **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Il est **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

Un ensemble est donc au plus dénombrable si, et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Exemples

1. D'après la proposition 1, les parties de $\mathbb{N}$ sont au plus dénombrables.
2. $\mathbb{Z}$ est dénombrable : en effet, on peut définir une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ par :

   $$f(n) = n/2 \quad \text{si } n \text{ est pair} \qquad \text{et} \qquad f(n) = -(n+1)/2 \quad \text{si } n \text{ est impair,}$$

   et cette application est bijective de réciproque g définie par :

   $$g(k) = 2k \quad \text{si } k \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad g(k) = -1 - 2k \quad \text{si } k \in \mathbb{Z}_-^* .$$

Remarque Exhiber une bijection entre $\mathbb{N}$ et un ensemble dénombrable A revient à numéroter les éléments de A, ou encore à les énumérer. Par exemple, la bijection ci-dessus entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ revient à énumérer les éléments de $\mathbb{Z}$ de la façon suivante :

$$0, -1, \quad 1, -2, \quad 2, -3, \quad 3, -4, \quad 4, \ldots$$

Proposition 2

Un ensemble A est au plus dénombrable si, et seulement s'il existe une injection de A dans $\mathbb{N}$.

Démonstration. C'est la traduction de la définition. □

Corollaire 3

Toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

Exemple L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. En effet, il est infini et l'application $(p, q) \mapsto 2^p 3^q$ est injective de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ par unicité de la décomposition en facteurs premiers.

p.468

Exercice 1 En s'inspirant de l'exemple précédent, montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ des suites presque nulles d'entiers naturels est dénombrable.

Proposition 4

Soit A un ensemble *non vide*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(*i*) A est au plus dénombrable,

(*ii*) il existe une surjection d'un ensemble au plus dénombrable X sur A,

(*iii*) il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur A.

Principe de démonstration. Pour $(iii) \Rightarrow (i)$, on prend une surjection f de $\mathbb{N}$ sur A et l'on montre que l'application $a \mapsto \min f^{-1}\big(\{a\}\big)$ est une injection de A dans $\mathbb{N}$.

Démonstration page 468

Point méthode

Pour montrer qu'un ensemble infini A est dénombrable, on peut :

- exhiber une bijection de $\mathbb{N}$ sur A, ce qui revient à numéroter les éléments de A en une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- exhiber une injection de A dans $\mathbb{N}$ (ou dans un ensemble dénombrable),
- exhiber une surjection de $\mathbb{N}$ (ou d'un ensemble dénombrable) sur A.

p.469 **Exercice 2** Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, en mettant en évidence une numérotation sur un dessin, puis en explicitant la bijection f de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ correspondante.

3 Opérations sur les ensembles dénombrables

p.469 **Exercice 3**

1. Montrer qu'une réunion de deux ensembles dénombrables est dénombrable.
2. Qu'en est-il pour une réunion d'une famille finie non vide d'ensembles dénombrables ?

Proposition 5

Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

Démonstration. Soit A et B deux ensembles dénombrables ainsi que f, une bijection de A dans $\mathbb{N}$ et g, une bijection de B dans $\mathbb{N}$.

Alors $h : (x,y) \mapsto \big(f(x), g(y)\big)$ est une bijection de $A \times B$ dans $\mathbb{N}^2$, de réciproque $(p,q) \mapsto \big(f^{-1}(p), g^{-1}(q)\big)$. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on en déduit que $A \times B$ est dénombrable. □

Exemple : $\mathbb{Q}$ est dénombrable

En effet, on a vu que $\mathbb{Z}$ était dénombrable, ainsi que $\mathbb{N}^*$ comme partie infinie de $\mathbb{N}$ dénombrable (*cf.* le corollaire 3 de la page précédente), donc $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable. Ainsi $\mathbb{Q}$ est au plus dénombrable (donc dénombrable puisqu'infini) comme image de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par l'application $(p,q) \mapsto p/q$.

p.470 **Exercice 4** Que peut-on dire du produit cartésien de deux ensembles au plus dénombrables ? À quelle condition est-il dénombrable ?

Corollaire 6

Le produit cartésien d'une famille finie non vide d'ensembles dénombrables est dénombrable.

p.470 **Exercice 5**

Montrer qu'un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de dimension finie non nulle est dénombrable.

Corollaire 7

La réunion d'une famille au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est un ensemble au plus dénombrable.

Si l'un est dénombrable, la réunion est alors dénombrable.

Démonstration. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles au plus dénombrables indexée par un ensemble I non vide au plus dénombrable. Quitte à supprimer les A_i qui sont vides (ce qui ne change pas la réunion), on peut supposer tous les A_i non vides. En considérant, pour tout $i \in I$, une surjection f_i de $\mathbb{N}$ sur A_i, on construit une surjection de $f : I \times \mathbb{N}$ sur $\bigcup_{i\in I} A_i$ en posant :

$$\forall (i,n) \in I \times \mathbb{N} \quad f(i,n) = f_i(n).$$ □

Comme $I \times \mathbb{N}$ est au plus dénombrable, il en est de même de $\bigcup_{i\in I} A_i$ d'après la proposition 4 de la page 449.

Remarque

On retrouve ainsi les résultats de l'exercice 3 de la page ci-contre.

p.470 **Exercice 6** Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.

4 Exemples d'ensembles infinis non dénombrables

Le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels est dénombrable, comme on l'a vu précédemment. Le fait que $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure, fait qu'il ne peut pas être dénombrable. Rappelons, pour commencer, que le théorème de la limite monotone, et par conséquent aussi celui sur les suites adjacentes, découlent de cette propriété.

Lemme 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
Il existe au moins un réel n'appartenant pas à $\{u_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Principe de démonstration. On construit par récurrence deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \notin [a_n, b_n]$.

Leur limite commune ne peut être égale à aucun des u_n. Démonstration page 470

Proposition 9

Le corps $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration. En effet, on ne peut trouver aucune suite (u_n) telle que $\mathbb{R} = \{u_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$. □

Le résultat classique suivant prouve que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Proposition 10

Soit E un ensemble. Il n'existe aucune surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Principe de démonstration. Si f est une application de E dans $\mathcal{P}(E)$, on montre que $X := \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$ n'a pas d'antécédent par f. Démonstration page 470

p.470

Exercice 7 Montrer que si A est un ensemble possédant au moins deux éléments, alors $A^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Remarques

- On a vu, dans la solution de l'exercice précédent, que les deux ensembles non dénombrables $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ étaient en bijection. On peut montrer qu'ils sont également en bijection avec $\mathbb{R}$.
- En revanche, $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ne sont pas en bijection d'après la proposition 10 de la page précédente, alors qu'ils ne sont ni l'un ni l'autre dénombrables.

II Familles sommables de réels positifs

Dans la suite de ce chapitre, I est un ensemble, et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes. On cherche à donner un sens, lorsque c'est possible, à la somme :

$$\sum_{i\in I} a_i$$

en conservant les propriétés de commutativité et d'associativité existant pour les sommes finies.
Les cas où I est fini est déjà connu ; nous pouvons donc supposer que I est infini. Conformément au programme, nous nous limitons au cas où I est dénombrable.
L'idée de départ de la notion de somme d'une famille sommable indexée par I, est de considérer les sommes indexées par une partie finie de I. Lorsque $I = \mathbb{N}$, la relation d'ordre nous incite à considérer seulement les parties finies de la forme $[\![0,n]\!]$, ce qui conduit naturellement à la notion de série et de sommes partielles étudiée au chapitre 8. Cependant cette notion n'est pas satisfaisante, car on ne peut pas permuter les termes d'une série convergente quelconque (voir l'exercice 9.16 de la page 479).
Dans toute la suite de ce chapitre, I désigne un ensemble au plus dénombrable.

Remarques

- L'hypothèse de dénombrabilité de I n'est indispensable, ni pour les définitions, ni pour les résultats énoncés, mais simplifie certaines démonstrations.
- On peut d'ailleurs toujours s'y ramener grâce au résultat de l'exercice 9.10 de la page 478 qui montre que pour toute famille sommable $(a_i)_{i\in I}$, l'ensemble des $i \in I$ tels que $a_i \neq 0$ est au plus dénombrable.
- Tout ce qui suit sera utilisé essentiellement dans les chapitres de probabilité, où l'hypothèse de dénombrabilité sera de toute façon indispensable.

1 Définitions, propriétés élémentaires

Définition 2

Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs est **sommable** si l'ensemble :

$$\left\{\sum_{i\in J} a_i\,;\ J\subset I\,,\ J \text{ fini}\right\}$$

est majoré.

Sa borne supérieure s'appelle alors **somme de la famille**, et se note $\sum\limits_{i\in I} a_i$.

Remarques

- La somme d'une famille sommable de réels positifs est donc le plus petit réel M tel que pour toute sous-famille finie J de I on ait :

$$\sum_{i\in J} a_i \leqslant M.$$

- La somme d'une famille sommable de réels positifs est un réel positif. Il est nul si, et seulement si, la famille est nulle.

Exemples

1. Lorsque I est fini, toute famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs indexée par I est sommable et sa somme est égale à sa somme au sens usuel. Pour le voir, il suffit de considérer le cas particulier $J = I$ dans la définition.
2. La suite $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable puisque pour toute partie J finie de $\mathbb{N}$, on a, en notant n un majorant de J :

$$\sum_{i\in J}\frac{1}{2^i} \leqslant \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i} = 2-\frac{1}{2^n} \leqslant 2.$$

   On a ainsi :

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \leqslant 2$$

   et comme pour $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{i\in[\![0,n]\!]}\frac{1}{2^i} = 2-\frac{1}{2^n},$$

   on a $S \geqslant 2-2^{-n}$, ce qui prouve finalement $S = 2$.
3. Soit E un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée de E.

   Pour toute partie finie J de I, on sait (voir le cours de première année ou la proposition 6 de la page 799) que $y = \sum\limits_{i\in J}(\,e_i \mid x\,)\,e_i$ est le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Vect}\big((e_i)_{i\in J}\big)$, donc $\|y\| \leqslant \|x\|$.

Comme $\|y\|^2 = \sum_{i\in J} (\,e_i \mid x\,)^2$, on en déduit $\sum_{i\in J} (\,e_i \mid x\,)^2 \leqslant \|x\|^2$. Cela prouve que la famille $\left((\,e_i \mid x\,)^2\right)_{i\in I}$ est sommable ainsi que **l'inégalité de Bessel** :

$$\sum_{i\in I} (\,e_i \mid x\,)^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Convention Si une famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels *positifs* n'est pas sommable, on dit que sa somme est infinie et l'on note $\sum_{i\in I} a_i = +\infty$.

Cela correspond à la convention usuelle concernant la borne supérieure des parties non majorées de $\mathbb{R}$.

On a donc, pour toute famille $(a_i)_{i\in I}$ de réel positifs :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup\left\{ \sum_{i\in J} a_i \,;\; J \subset I\,,\; J \text{ fini} \right\}.$$

Proposition 11

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. La famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum a_n$ converge et l'on a alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Principe de démonstration. D'après les conventions concernant les séries divergentes à terme général positif et les familles de réels positifs non sommables, cela revient donc à montrer, pour toute suite positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Pour cela, on utilise le fait que les intervalles $[\![0, n]\!]$ sont des parties finies de $\mathbb{N}$ et que toute partie finie de $\mathbb{N}$ est contenue dans un tel intervalle.

Démonstration page 471

Proposition 12

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de réels vérifiant :

$$\forall i \in I \quad 0 \leqslant a_i \leqslant b_i.$$

Si la famille $(b_i)_{i\in I}$ est sommable, il en est de même de la famille $(a_i)_{i\in I}$ et l'on a :

$$\sum_{i\in I} a_i \leqslant \sum_{i\in I} b_i.$$

Démonstration. Si J est une partie finie de I, on a $\sum_{i\in J} a_i \leqslant \sum_{i\in J} b_i \leqslant \sum_{i\in I} b_i$. □

2 Changement d'indice, commutativité

Proposition 13

Soit σ une bijection d'un ensemble J sur I. Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs est sommable si, et seulement si, la famille $(a_{\sigma(j)})_{j\in J}$ est sommable et l'on a alors :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_{\sigma(j)}.$$

Principe de démonstration. La bijection σ induit une bijection de l'ensemble des parties finies de J sur l'ensemble des parties finies de I. Démonstration page 471

Corollaire 14 (Commutativité)

Soit σ une permutation de I. Une famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(a_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable et l'on a alors :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_{\sigma(i)}.$$

Remarque L'ensemble I étant supposé au plus dénombrable, lorsqu'il est infini, il est en bijection avec $\mathbb{N}$. À l'aide d'une telle bijection σ de $\mathbb{N}$ sur I, on se ramène à une famille $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$ indexée par $\mathbb{N}$ dont la somme est la somme de la série $\sum\limits_n a_{\sigma(n)}$ correspondante. On peut ainsi utiliser les propriétés démontrées pour les séries, en particulier, la linéarité de la somme, qui donne la proposition suivante (le cas où I est fini est déjà connu).

Proposition 15

- Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables de réels positifs, la famille $(a_i + b_i)_{i\in I}$ est sommable et l'on a :

$$\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i.$$

- Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels positifs et si λ est un réel positif, la famille $(\lambda\, a_i)_{i\in I}$ est sommable et l'on a :

$$\sum_{i\in I}(\lambda\, a_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i.$$

p.471

Exercice 8 Démonstration directe du premier point de la proposition précédente.
Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles sommables de réels positifs.

1. Montrer que $(a_i+b_i)_{i\in I}$ est sommable et que l'on a :
$$\sum_{i\in I}(a_i+b_i)\leqslant\sum_{i\in I}a_i+\sum_{i\in I}b_i.$$
2. Montrer que pour tout $\varepsilon>0$, il existe une partie finie J de I telle que :
$$\sum_{i\in J}(a_i+b_i)\geqslant\sum_{i\in I}a_i+\sum_{i\in I}b_i-\varepsilon.$$
3. Conclure.

3 Sommation par paquets

Le résultat suivant est immédiat.

Proposition 16

Soit J une partie de I. Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors la sous-famille $(a_i)_{i\in J}$ est également sommable et l'on a $\sum\limits_{i\in J}a_i\leqslant\sum\limits_{i\in I}a_i$.

Remarque L'égalité $\sum\limits_{i\in J}a_i\leqslant\sum\limits_{i\in I}a_i$ reste évidemment vraie sans hypothèse de sommabilité grâce à la convention $\sum\limits_{i\in I}a_i=+\infty$.

Lemme 17

Soit I et J deux ensembles disjoints. Une famille $(a_i)_{i\in I\cup J}$ de réels positifs est sommable si, et seulement si, les deux sous-familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(a_i)_{i\in J}$ sont sommables et l'on a :
$$\sum_{i\in I\cup J}a_i=\sum_{i\in I}a_i+\sum_{i\in J}a_i.$$

Démonstration page 472

Exemple En admettant l'égalité classique $S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$, calculons $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$.

Posons $I=2\mathbb{N}+1=\{2k+1\,;\ k\in\mathbb{N}\}$ et $J=2\mathbb{N}^*=\{2k\,;\ k\in\mathbb{N}^*\}$ de telle sorte que :
$$S=\sum_{n\in I}\frac{1}{n^2}+\sum_{n\in J}\frac{1}{n^2}.$$
Par la bijection $k\mapsto 2k$ de $\mathbb{N}^*$ sur J, on a :
$$\sum_{n\in J}\frac{1}{n^2}=\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{4k^2}=\frac{S}{4}.$$
Finalement, $\sum\limits_{n\in I}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{3S}{4}=\dfrac{\pi^2}{8}$.

Le théorème qui suit est très puissant, car il permet de découper une somme d'une famille indexée par I en plusieurs sommes grâce à une partition $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de I. En fait, il est même inutile de supposer les I_λ non vides [1], ce qui donne l'énoncé suivant.

Théorème 18 (Sommation par paquets)

Soit $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille au plus dénombrable de parties deux à deux disjointes de I dont la réunion est égale à I. Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs est sommable si, et seulement si, on a les deux propriétés suivantes :

- pour tout $\lambda\in\Lambda$, la famille $(a_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable de somme notée σ_λ ;
- la famille $(\sigma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable.

On a alors :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\sigma_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda}\Big(\sum_{i\in I_\lambda} a_i\Big).$$

Démonstration (non exigible) page 473

Remarques

- Ce résultat sera utilisé fréquemment en probabilité, notamment en utilisant un système complet d'événements.
- En prenant $\Lambda=\mathbb{N}$, on obtient l'énoncé suivant.

Corollaire 19

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I. Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs est sommable si, et seulement si, on a les deux propriétés suivantes :

- pour tout $n\in\mathbb{N}$, la famille $(a_i)_{i\in I_n}$ est sommable de somme notée σ_n ;
- la série $\sum\sigma_n$ est convergente.

On a alors :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\sigma_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i\in I_n} a_i\Big).$$

Exemple Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite positive telle que la série $\sum\alpha_n$ converge. Montrons que la série de terme général :

$$u_k = k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\alpha_n}{n(n+1)}$$

est convergente, et calculons sa somme.
On note tout d'abord que les inégalités :

$$0\leqslant\frac{\alpha_n}{n(n+1)}\leqslant\alpha_n$$

prouvent l'existence de u_k par convergence de la série $\sum_{n\geqslant k}\alpha_n$.

1. Rappelons qu'une partition de I est une famille de parties *non vides* de I disjointes deux à deux et dont la réunion est égale à I.

Considérons l'ensemble :

$$I = \left\{(k,n) \in \mathbb{N}^{*2} \;\middle|\; k \leqslant n\right\}$$

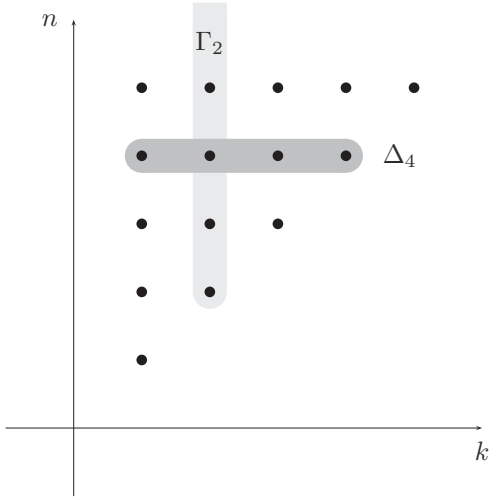
et la famille réelle positive :

$$\left(k\,\frac{\alpha_n}{n(n+1)}\right)_{(k,n)\in I}. \qquad (*)$$

Nous allons utiliser deux partitions de I :

$$I = \bigcup_{n\geqslant 1} \Delta_n \qquad \text{avec, pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ fixé,} \qquad \Delta_n = \left\{(k,n)\,;\; k \leqslant n\right\}$$

$$I = \bigcup_{k\geqslant 1} \Gamma_k \qquad \text{avec, pour } k \in \mathbb{N}^* \text{ fixé,} \qquad \Gamma_k = \left\{(k,n)\,;\; n \geqslant k\right\}.$$



- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(k\,\frac{\alpha_n}{n(n+1)}\right)_{(k,n)\in\Delta_n}$ est sommable puisque Δ_n est fini et sa somme vaut :

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} k\,\frac{\alpha_n}{n(n+1)} = \frac{\alpha_n}{2}.$$

  Comme $\sum \alpha_n$ converge, la famille $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, donc la famille $(*)$ est sommable et :

$$\sum_{(k,n)\in I} k\,\frac{\alpha_n}{n(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n.$$

- On en déduit que pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, la famille $\left(k\,\frac{\alpha_n}{n(n+1)}\right)_{(k,n)\in\Gamma_k}$ est sommable (ce qui prouve à nouveau l'existence de u_k), et que sa somme u_k constitue une famille sommable de somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{(k,n)\in I} k\,\frac{\alpha_n}{n(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n.$$

p.473

Exercice 9 Montrer qu'une famille $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de réels positifs est sommable si, et seulement si, on a l'une des propriétés équivalentes suivantes :

(i) les séries $\sum a_n$ et $\sum a_{-n}$ convergent,

(ii) la série $\sum(a_n + a_{-n})$ converge,

(iii) la suite $\sum_{p=-n}^{n} a_p$ possède une limite lorsque n tend vers $+\infty$,

et que sa somme est alors :

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + a_{-n}) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=-n}^{n} a_p.$$

III Familles sommables de nombres complexes

1 Définition

On considère maintenant des familles de nombres complexes indexées par I.

Définition 3

Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de nombre complexes est **sommable** si la famille de réels positifs $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Exemple Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum a_n$ est absolument convergente.

Ainsi, par exemple, la famille $\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ n'est pas sommable même si elle correspond à une série convergente.

2 Somme d'une famille sommable

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Les relations :

$$\forall i \in I \quad 0 \leqslant a_i^+ \leqslant |a_i| \qquad \text{et} \qquad \forall i \in I \quad 0 \leqslant a_i^- \leqslant |a_i|$$

montrent, d'après la proposition 12 de la page 454, que si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, alors il en est de même de $(a_i^+)_{i\in I}$ et $(a_i^-)_{i\in I}$. On peut donc poser la définition suivante.

Définition 4 (Somme d'une famille réelle sommable)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels. On appelle **somme** de la famille le réel :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-.$$

Remarque Évidemment, cette définition prolonge la définition de la somme d'une famille de réels positifs, puisque si $a_i \geqslant 0$, on a $a_i^+ = a_i$ et $a_i^- = 0$.

Soit $(a_k)_{k\in I}$ une famille de complexes. Les relations :

$$\forall k \in I \quad 0 \leqslant |\mathrm{Re}(a_k)| \leqslant |a_k| \qquad \text{et} \qquad \forall k \in I \quad 0 \leqslant |\mathrm{Im}(a_k)| \leqslant |a_k|$$

montrent, d'après la proposition 12 de la page 454, que si $(a_k)_{k\in I}$ est sommable, alors il en est de même de $(\mathrm{Re}\, a_k)_{k\in I}$ et $(\mathrm{Im}\, a_k)_{k\in I}$. On peut donc poser la définition suivante.

Définition 5 (Somme d'une famille complexe sommable)

Soit $(a_k)_{k\in I}$ une famille sommable de complexes. On appelle **somme** de la famille le complexe :

$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}(a_k) + i \sum_{k\in I} \mathrm{Im}(a_k).$$

Remarque Évidemment, cette définition prolonge la définition de la somme d'une famille de réels.

3 Propriétés

On peut, en utilisant les parties positives et négatives, généraliser les propriétés concernant les familles sommables de nombres réels positifs à n'importe quelles familles sommables de réels puis, à l'aide des parties réelles et imaginaires à n'importe quelles familles sommables de nombres complexes.

On conserve ainsi les propriétés de changement d'indice (proposition 13 de la page 455) et de commutativité (proposition 14 de la page 455). Le cas des suites (proposition 13 de la page 455) se généralise aussi immédiatement.

Proposition 20

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. La famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum a_n$ est absolument convergente et l'on a alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Démonstration.

- L'équivalence est le résultat de la proposition 11 de la page 454 appliqué à $|a_n|$.
- On a alors, pour une suite réelle :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^+ - \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

et de même pour une suite complexe en utilisant les parties réelle et imaginaire. □

Corollaire 21 (Inégalité triangulaire)

Si $(a_k)_{k\in I}$ est une famille sommable de complexes, on a :

$$\left|\sum_{k\in I} a_k\right| \leqslant \sum_{k\in I} |a_k|.$$

Principe de démonstration. Lorsque I est infini dénombrable, on utilise une bijection de $\mathbb{N}$ sur I et la proposition 20.

Démonstration page 473

Corollaire 22

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum a_{\sigma(n)}$ converge absolument et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Démonstration. Par changement d'indice, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$$

ce qui donne le résultat d'après la proposition 20 de la page ci-contre. □

Remarque Pour une série semi-convergente, le résultat est faux. L'exercice 9.16 de la page 479 montre qu'en permutant les terme d'une série réelle semi-convergente, on peut obtenir :

- pour tout réel ℓ, une série convergente de somme ℓ,
- une série divergente dont les sommes partielles tendent vers $+\infty$.

On peut de même obtenir une série divergente dont les sommes partielles tendent vers $-\infty$, et même, pour tout intervalle fermé non vide I de $\mathbb{R}$, une série divergente dont les sommes partielles admettent pour valeurs d'adhérence exactement les éléments de I.

Proposition 23 (Linéarité)

L'ensemble des des familles sommables à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application $(a_k)_{k\in I} \mapsto \sum\limits_{k\in I} a_k$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Démonstration. Le cas fini est connu. Sinon, puisque I est dénombrable, on peut, par un changement d'indice se ramener au cas d'une suite et la proposition 20 de la page ci-contre permet d'utiliser la linéarité de la somme d'une série. □

Théorème 24 (Sommation par paquets)

Soit $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille au plus dénombrable de parties deux à deux disjointes de I dont la réunion est égale à I. Étant donné une famille $(a_i)_{i\in I}$ de nombres complexes sommable :

- pour tout $\lambda \in \Lambda$, la famille $(a_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable de somme notée σ_λ ;
- la famille $(\sigma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable ;
- $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\lambda\in\Lambda} \sigma_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} \left(\sum_{i\in I_\lambda} a_i \right)$.

Démonstration (non exigible) page 474

Exemple Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles sommables. Montrons que la famille $(a_i\,b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et que l'on a :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i\,b_j = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{j\in J} b_j.$$

Posons, pour simplifier les notations, $A=\sum\limits_{i\in I} a_i$ et $B=\sum\limits_{j\in J} b_j$.

- Supposons pour commencer les familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ réelles positives. Pour tout $i\in I$, la famille $(a_i\,b_j)_{j\in J}$ est sommable de somme $a_i\,B$.

  En utilisant la partition $I\times J=\bigcup\limits_{i\in I}\big(\{i\}\times J\big)$, on en déduit par le théorème de sommation par paquets (cas réel positif) :

  $$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i\,b_j = \sum_{i\in I} a_i\,B = A\,B < +\infty$$

  ce qui prouve la sommabilité de $(a_i\,b_j)_{(i,j)\in I\times J}$.

- Dans le cas général, la sommabilité de $(a_i\,b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ découle de ce qui précède appliqué aux familles réelles positives $\big(|a_i|\big)_{i\in I}$ et $\big(|b_j|\big)_{j\in J}$. En appliquant alors le théorème de sommation par paquets (version complexe), on en déduit, en utilisant la même partition que précédemment :

  $$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i\,b_j = \sum_{i\in I} a_i\,B = A\,B.$$

p.474

Exercice 10 Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Corollaire 25

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I. Étant donné une famille $(a_i)_{i\in I}$ de nombres complexes sommable :

- pour tout $n\in\mathbb{N}$, la famille $(a_i)_{i\in I_n}$ est sommable de somme notée σ_n ;
- la série $\sum\sigma_n$ est absolument convergente ;
- $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\sigma_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} a_i\right)$.

Attention dans ces deux théorèmes à l'hypothèse de sommabilité. Par exemple, dans le corollaire 25, la convergence, même absolue, de la série $\sum\sigma_n$ ne suffit pas pour obtenir la sommabilité de la famille $(a_i)_{i\in I}$, contrairement à ce que l'on avait dans le cas de familles de réels positifs.

Exemple La famille $(n)_{n\in\mathbf{Z}}$ n'est évidemment pas sommable (par exemple, parce que la sous-famille $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas, par divergence de $\sum_{n\geqslant 0} n$). Pourtant, en prenant $I_n = \{-n, n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n = 0$ et la série $\sum \sigma_n$ est absolument convergente.

Point méthode

Pour appliquer le théorème de sommation par paquets, il faut donc vérifier la sommabilité de la famille. Pour ce faire, on appliquera en général le théorème de sommation par paquets (version réels positifs) à la famille $\left(|a_i|\right)_{i\in I}$ en exhibant une partition bien choisie de I.

p.474

Exercice 11 Soit z un nombre complexe de module strictement inférieur à 1.

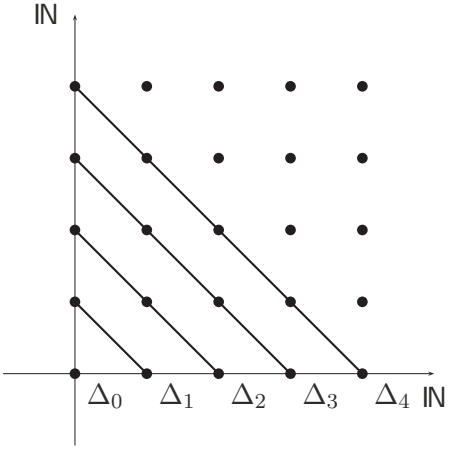
1. Montrer que la famille $(z^{2p+3q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme $S(z)$.
2. Montrer que $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n\, z^n$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d_n est le nombre de façons d'écrire $n = 2p + 3q$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

IV Applications

1 Sommes doubles

On dispose des trois partitions classiques de $\mathbb{N}^2$:

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{p\} \times \mathbb{N} = \bigcup_{q\in\mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{q\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q = n\}}_{\Delta_n}.$$



En appliquant le théorème de sommation par paquets, on obtient les théorèmes suivants.

Théorème 26

Une suite double $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs est sommable si, et seulement si, on a l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_q a_{p,q}$ est convergente et la série de terme général $\alpha_p = \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}$ est convergente ;
- pour tout $q \in \mathbb{N}$, la série $\sum_p a_{p,q}$ est convergente et la série de terme général $\beta_q = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}$ est convergente ;
- la série de terme général $\sigma_n = \sum_{p+q=n} a_{p,q}$ est convergente.

On a alors :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_{p,q}\right).$$

Exemples Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Étudions la sommabilité de la suite double :
$$a_{p,q} = \frac{1}{(p+q+1)^\alpha}.$$
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\sigma_n = \sum_{p+q=n} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$
La famille est donc sommable si, et seulement si, la série $\sum \sigma_n$ converge, c'est-à-dire si, et seulement si, $\alpha > 2$. On a alors :
$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

2. De la même façon en travaillant sur $\mathbb{N}^{*2}$, la suite double :
$$\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$$
est sommable si, et seulement si, $\alpha > 2$.
Par équivalence des normes $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_1$ sur $\mathbb{R}^2$, il existe deux constantes m et M strictement positives telles que :
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \quad m\,(p+q)^{2\alpha} \leqslant (p^2+q^2)^\alpha \leqslant M\,(p+q)^{2\alpha}$$
ce qui prouve que la famille :
$$\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$$
est sommable si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Corollaire 27

Si une famille $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes est sommable sa somme est donnée par :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_{p,q}\right).$$

Démonstration.

C'est une conséquence du corollaire 25 du théorème de sommation par paquets. □

p.474

Exercice 12

Montrer l'existence et donner la valeur de $S = \displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{(-1)^{p+q}}{2^p\, 3^q\, (p+q+1)}$.

On pourra utiliser le résultat suivant : si x est un réel strictement compris entre -1 et 1, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x)$.

Exemple Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrons l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n-1}}{1-z^{2n-1}}.$$

Chacune des deux séries converge absolument, puisque :

$$\frac{z^n}{1-z^{2n}} \sim z^n \qquad \text{et} \qquad \frac{z^{2n-1}}{1-z^{2n-1}} \sim z^{2n-1}$$

avec $|z| < 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a :

$$\frac{z^n}{1-z^{2n}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^n \left(z^{2n}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{n(2k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} z^{n(2k-1)}.$$

Considérons donc la série double :

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^{*2}} z^{n(2k-1)}$$

et montrons que la famille des modules est sommable :

- pour n fixé, la série $\sum_k |z|^{n(2k-1)}$ est convergente puisque $|z|^{2n} < 1$, de somme :

$$\sigma_n = \frac{|z|^n}{1-|z|^{2n}}.$$

- la famille (σ_n) est sommable (remplacer z par $|z|$ dans l'existence des sommes de l'énoncé).

On a alors :

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^{*2}} z^{n(2k-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \left(\sum_{k=1}^{+\infty} z^{2n(k-1)}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^{2n}}$$

et :

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^{*2}} z^{n(2k-1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (z^{2k-1})^n\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k-1}}{1-z^{2k-1}}$$

ce qui prouve le résultat.

p.475

Exercice 13 Soit la suite double :

$$u_{p,q} = \frac{2(p-q)}{(p+q+1)(p+q+2)(p+q+3)}.$$

Calculer $\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$, $\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p+q=n} u_{p,q}$.

Que peut-on en conclure ?

2 Produit de Cauchy

Théorème 28

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries complexes absolument convergentes. La série de terme général :

$$\sum_{p+q=n} a_p\, b_q,$$

appelée série **produit de Cauchy** de $\sum a_n$ et $\sum b_n$, est absolument convergente, et l'on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_p\, b_q\right).$$

Principe de démonstration. Il suffit de montrer que la famille $(a_p\, b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et d'appliquer le corollaire 27 de la page précédente.

Démonstration page 476

Exemple Sachant que pour $|z|<1$ on a :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

la série étant absolument convergente, on en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} z^p\, z^q\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\, z^n.\end{aligned}$$

Attention Dans le théorème 28 de la page précédente, les hypothèses de convergence absolue des deux séries est essentielle, comme le montre l'exercice ci-dessous.
On verra néanmoins dans l'exercice 9.12 de la page 478 que la convergence d'une des deux séries et la convergence absolue de l'autre suffisent.

p.476

Exercice 14 Soit $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $c_n = \sum_{p+q=n} a_p\, a_q$.

Étudier la convergence des séries $\sum a_n$ et $\sum c_n$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1 Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Commençons par remarquer que A est non vide (l'ensemble vide est fini) et non majorée. En effet, si elle était majorée par un certain entier n, alors elle serait contenue dans l'ensemble fini $[\![0,n]\!]$ donc également finie.

Construisons par récurrence une suite strictement croissante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $A=\{a_n\,;\,n\in\mathbb{N}\}$.

- Comme A est non vide, elle possède un plus petit élément que l'on note a_0.
- Soit $n\in\mathbb{N}$; supposons $a_0,\dots,a_n$ construits. Alors A n'est pas majorée par a_n, donc l'ensemble $\{x\in A\mid x>a_n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet par conséquent un plus petit élément que l'on note a_{n+1} qui vérifie donc $a_{n+1}>a_n$.

Par construction, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est strictement croissante, donc l'application $n\mapsto a_n$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans A. Montrons qu'elle est surjective.

Soit $x\in A$. La partie $\{a_{n+1}\,;\,n\in\mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$ étant infinie, elle n'est pas majorée par x. Il existe donc des entiers naturels k tels que $a_{k+1}>x$; notons n le plus petit d'entre eux. Alors $a_n\leqslant x$: si $n=0$, cela vient de la définition de a_0, sinon, cela vient du caractère minimal de n. On a donc $a_n\leqslant x<a_{n+1}$.

Or, $a_{n+1}=\min\{y\in A\mid y>a_n\}$ et $x\in A$. Donc on ne peut pas avoir $a_n<x<a_{n+1}$. Il s'ensuit que $x=a_n$. D'où la surjectivité requise.

L'application $n\mapsto a_n$ est donc une bijection de $\mathbb{N}$ sur A.

Exercice 1 Soit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers. L'application :

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} & \longrightarrow & \mathbb{N}\\ (v_k)_{k\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\prod_{k\in\mathbb{N}} p_k^{v_k}\end{array}$$

est bien définie (si $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est presque nulle, $\displaystyle\prod_{k\in\mathbb{N}} p_k^{v_k}$ peut être vu comme un produit fini puisqu'un nombre fini de ses terme est différent de 1) et est injective par unicité de la décomposition en facteurs premiers.

Remarque C'est même une bijection de $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ sur $\mathbb{N}^*$ par existence et unicité de la décomposition.

Proposition 4

$(i)\Rightarrow(ii)$**.** Prendre $X=A$ et l'identité.

$(ii)\Rightarrow(iii)$**.** Soit f une surjection d'un ensemble au plus dénombrable X sur A.

- Si X est infini, il existe une bijection g de $\mathbb{N}$ sur X.
- Sinon, notons n son cardinal. Comme A est non vide, il en est de même de X, donc $n\geqslant 1$ et l'on peut fixer un élément x_0 de X.
  Considérons une bijection g de $[\![0,n-1]\!]$ dans X et prolongeons g à $\mathbb{N}$ en posant :
  $$\forall k\in\mathbb{N}\setminus[\![0,n-1]\!]\quad g(k)=x_0$$
  On obtient ainsi une application de $\mathbb{N}$ sur X, surjective puisque sa restriction à $[\![0,n-1]\!]$ est déjà surjective.

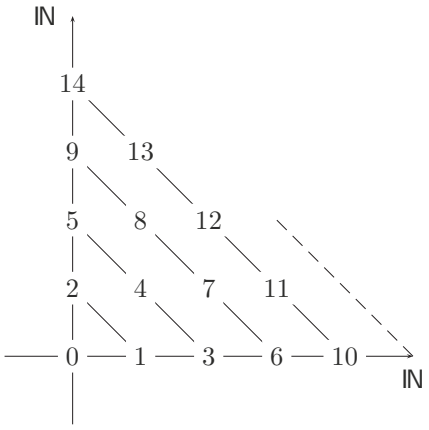
Dans les deux cas, $f \circ g$ est une application de $\mathbb{N}$ sur A, surjective comme composée de deux surjections.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Soit f une surjection de $\mathbb{N}$ sur A. Par surjectivité, $f^{-1}\big(\{a\}\big) \neq \varnothing$ pour tout $a \in A$. On peut donc définir :

$$\begin{array}{rccl} g: & A & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & a & \longmapsto & \min f^{-1}\big(\{a\}\big). \end{array}$$

Par définition de g, on a $\forall a \in A \quad f\big(g(a)\big) = a$, ce qui entraîne classiquement l'injectivité de g. D'après la proposition 2 de la page 449, on en déduit que A est au plus dénombrable.

Exercice 2 Une solution possible est la suivante :



Soit $k \in \mathbb{N}$. L'image du couple $(k, 0)$ par f est $1 + 2 + \cdots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

On en déduit l'image de tous les couples (p, q) tels que $p+q = k$: $f(p, q) = f(k, 0)+q$. Finalement :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad f(p, q) = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q.$$

Exercice 3

1. Soit F et G deux ensembles dénombrables. Prenons f (respectivement g) une bijection de $\mathbb{N}$ sur F (respectivement sur G). L'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & F \cup G \\ n & \longmapsto & \begin{cases} f(p) & \text{si } n = 2p \\ g(p) & \text{si } n = 2p+1 \end{cases} \end{array}$$

est surjective ce qui prouve que $F \cup G$ est au plus dénombrable d'après la proposition 4 de la page 449, donc dénombrable puisqu'infini (il contient F qui est infini).

2. Par récurrence immédiate, on en déduit que la réunion d'une famille finie non vide d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 4 Reprenons le principe de la démonstration précédente, en considérant cette fois-ci des injections $f : A \to \mathbb{N}$ et $g : B \to \mathbb{N}$. L'application $h : (x, y) \mapsto \big(f(x), g(y)\big)$ est alors une injection de $A \times B$ dans $\mathbb{N}^2$, donc $A \times B$ est au plus dénombrable.

Il est dénombrable si, et seulement si, l'un des ensembles est dénombrable et l'autre non vide. En effet :

- si par exemple A est non vide et B est infini, alors en fixant $a \in A$, l'ensemble $A \times B$ est infini puisqu'il contient $\{a\} \times B$ qui est en bijection avec B, donc infini ;
- si A et B sont finis, alors $A \times B$ est fini et si l'un ou l'autre est vide, alors $A \times B$ est vide donc fini.

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors E est isomorphe à $\mathbb{Q}^n$, donc en particulier en bijection avec $\mathbb{Q}^n$, qui est dénombrable d'après le corollaire précédent.

Exercice 6 $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$ est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables d'après l'exercice 5 de la page 450.

Lemme 8 On construit par récurrence deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \notin [a_n, b_n]$.

- Posons, par exemple, $a_0 = u_0 + 1$ et $b_0 = u_0 + 2$.
- Supposons construits $a_n < b_n$ tels que $u_n \notin [a_n, b_n]$.

  Posons $c_n = \frac{2a_n+b_n}{3}$ et $d_n = \frac{a_n+2b_n}{3}$; au moins l'un des trois segments $[a_n, c_n]$, $[c_n, d_n]$ et $[d_n, b_n]$ ne contient pas u_{n+1}.

  Cela permet de définir $a_{n+1} < b_{n+1}$ tels que $u_{n+1} \notin [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ et $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/3$.

Les inégalités $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ montrent que la suite (a_n) est croissante, que la suite (b_n) est décroissante et les relations $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/3$ donnent $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$.

Donc les suite (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Leur limite commune ℓ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \ell \in [a_n, b_n] \qquad \text{donc} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \ell \neq u_n$$

Proposition 10 Soit f une application de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Posons $X := \big\{x \in E \;\big|\; x \notin f(x)\big\}$ et supposons que X admette un antécédent a par f.

- Si $a \in X$, alors $a \notin f(a) = X$, ce qui est contradictoire.
- Si $a \notin X$, alors $a \in f(a) = X$, ce qui est également contradictoire.

Ce raisonnement par l'absurde montre ainsi que X n'admet pas d'antécédent par f et donc que f n'est pas surjective.

Exercice 7

- Commençons par le cas où $A = \{0, 1\}$. On a vu en première année que, pour tout ensemble E, $\mathcal{P}(E)$ est en bijection avec $\{0, 1\}^E$ par l'application qui associe à toute partie de E sa fonction indicatrice.

  Donc $A^{\mathbb{N}}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui n'est pas dénombrable.

- Lorsque A est un ensemble à deux éléments, en considérant une bijection φ de $\{0,1\}$ sur A, l'application $f \mapsto \varphi \circ f$ réalise une bijection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sur $A^{\mathbb{N}}$. Donc $A^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.
- Soit A un ensemble possédant au moins deux éléments distincts a et b. En considérant une application de $\mathbb{N}$ dans $\{a,b\}$ comme une application de $\mathbb{N}$ dans A, on obtient une inclusion de $\{a,b\}^{\mathbb{N}}$ dans $A^{\mathbb{N}}$ qui n'est donc pas dénombrable d'après le point précédent.

Proposition 11 Utilisons les conventions concernant la somme des familles non sommables positives et des séries divergentes à termes positifs.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $[\![0,n]\!]$ est une partie finie de $\mathbb{N}$, on a $\sum_{p=0}^{n} a_p \leqslant \sum_{p\in\mathbb{N}} a_p$. On en déduit :
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \qquad (*)$$
- Soit J une partie finie de $\mathbb{N}$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $J \subset [\![0,n]\!]$, et donc :
$$\sum_{p\in J} a_p \leqslant \sum_{p=0}^{n} a_p \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} a_p.$$
On en déduit :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n. \qquad (**)$$

Des deux inégalités $(*)$ et $(**)$ on en déduit que les deux sommes sont égales et donc, en particulier, simultanément finies.

Proposition 13 Notons S et S' les sommes (éventuellement infinies) respectivement des familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(a_{\sigma(j)})_{j\in J}$.

- Supposons $(a_i)_{i\in I}$ sommable. Pour toute partie finie J' de J, l'ensemble $I' = \sigma(J')$ est une partie finie de I. Donc, par changement d'indice dans une somme finie, σ réalisant une bijection de J' sur I' :
$$\sum_{j\in J'} a_{\sigma(j)} = \sum_{i\in I'} a_i \leqslant S.$$
On en déduit que $(a_{\sigma(j)})_{j\in J}$ est sommable et $S' \leqslant S$.
- Remarquons qu'en notant $(b_j)_{j\in J} = (a_{\sigma(j)})_{j\in J}$, on a $(a_i)_{i\in I} = (b_{\sigma^{-1}(i)})_{i\in I}$. On déduit donc de ce qui précède que si $(a_{\sigma(j)})_{j\in J}$ est sommable, alors $(a_i)_{i\in I}$ l'est également avec $S \leqslant S'$.

D'où l'équivalence annoncée et l'égalité des sommes.

Exercice 8

1. Soit J une partie finie de I. Par linéarité des sommes finies puis par définition de la somme, on a :
$$\sum_{i\in J}(a_i + b_i) = \sum_{i\in J} a_i + \sum_{i\in J} b_i \leqslant \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i.$$
On en déduit, en particulier, que $(a_i + b_i)_{i\in I}$ est sommable.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une partie finie J_1 de I telle que $\sum\limits_{i\in J_1} a_i \geqslant \sum\limits_{i\in I} a_i - \varepsilon/2$. De même, il existe une partie finie J_2 de I telle que $\sum\limits_{i\in J_2} b_i \geqslant \sum\limits_{i\in I} b_i - \varepsilon/2$. En posant $J = J_1 \cup J_2$, on a alors :
$$\sum_{i\in J}(a_i+b_i) = \sum_{i\in J} a_i + \sum_{i\in J} b_i \geqslant \sum_{i\in J_1} a_i + \sum_{i\in J_2} b_i \geqslant \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i - \varepsilon.$$
3. La somme de la famille $(a_i+b_i)_{i\in I}$ est donc comprise entre $\sum\limits_{i\in I} a_i + \sum\limits_{i\in I} b_i - \varepsilon$ et $\sum\limits_{i\in I} a_i + \sum\limits_{i\in I} b_i$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui prouve :
$$\sum_{i\in J}(a_i+b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i.$$

Lemme 17

- Supposons les deux sous-familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(a_i)_{i\in J}$ sommables. Soit K une partie finie de $I\cup J$. Notons $I' = K\cap I$ et $J' = K\cap J$. Ce sont deux ensembles finis disjoints dont la réunion est égale à K, donc :
$$\sum_{i\in K} a_i = \sum_{i\in I'} a_i + \sum_{i\in J'} a_i \leqslant \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in J} a_i.$$
On en déduit que $(a_i)_{i\in I\cup J}$ est sommable avec $\sum\limits_{i\in I\cup J} a_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} a_i + \sum\limits_{i\in J} a_i$.
- Réciproquement, supposons $(a_i)_{i\in I\cup J}$ sommable. Soit I' (respectivement J') une partie finie quelconque de I (respectivement de J). Comme I et J sont disjoints, il en est de même de I' et J', donc :
$$\sum_{i\in I'} a_i + \sum_{i\in J'} a_i = \sum_{i\in I'\cup J'} a_i \leqslant \sum_{i\in I\cup J} a_i.$$
Fixons I'. On a alors, pour toute partie finie J' de J :
$$\sum_{i\in J'} a_i \leqslant \sum_{i\in I\cup J} a_i - \sum_{i\in I'} a_i$$
ce qui donne :
$$\sum_{i\in J} a_i \leqslant \sum_{i\in I\cup J} a_i - \sum_{i\in I'} a_i.$$
On a donc pour toute partie finie I' de I :
$$\sum_{i\in I'} a_i \leqslant \sum_{i\in I\cup J} a_i - \sum_{i\in J} a_i$$
ce qui donne $\sum\limits_{i\in I} a_i \leqslant \sum\limits_{i\in I\cup J} a_i - \sum\limits_{i\in J} a_i$ et finalement :
$$\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in J} a_i \leqslant \sum_{i\in I\cup J} a_i.$$

En rassemblant les deux inégalités obtenues, on a bien le résultat annoncé.

Théorème 18

- Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, la sommabilité des sous-familles $(a_i)_{i\in I_\lambda}$ est une conséquence de la proposition 16 de la page 456.
  Soit Γ une partie finie de Λ. La sous-famille $(a_i)_{i\in \bigcup\limits_{\lambda\in\Gamma} I_\lambda}$ de $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et, par récurrence à partir du lemme précédent, on en déduit :
  $$\sum_{\lambda\in\Gamma}\sigma_\lambda = \sum_{i\in \bigcup\limits_{\lambda\in\Gamma} I_\lambda} a_i \leqslant \sum_{i\in I} a_i.$$
  D'où la sommabilité de $(\sigma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et l'inégalité :
  $$\sum_{\lambda\in\Lambda}\sigma_\lambda \leqslant \sum_{i\in I} a_i.$$
- Supposons, pour tout λ, la famille $(a_i)_{i\in I_\lambda}$ sommable, de somme σ_λ, et la famille $(\sigma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sommable.
  Soit J une partie finie de I. Il n'existe qu'un nombre fini de $\lambda\in\Lambda$ tels que $J\cap I_\lambda$ soit non vide ; désignons-les par λ_1, λ_2,..., λ_p. Alors :
  $$\begin{aligned}\sum_{i\in J} a_i &= \sum_{i\in J\cap I_{\lambda_1}} a_i + \sum_{i\in J\cap I_{\lambda_2}} a_i + \cdots + \sum_{i\in J\cap I_{\lambda_p}} a_i \\ &\leqslant \sigma_{\lambda_1} + \sigma_{\lambda_2} + \cdots + \sigma_{\lambda_p} \leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda}\sigma_\lambda.\end{aligned}$$
  La famille $(a_i)_{i\in I}$ est donc sommable et l'on a l'inégalité :
  $$\sum_{i\in I} a_i \leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda}\sigma_\lambda.$$

Exercice 9 L'équivalence entre la sommabilité et (i) vient du fait que $(\mathbb{Z}_-^*, \mathbb{N})$ est une partition de $\mathbb{Z}$ et l'on obtient ainsi la première égalité.

Les propriétés (ii) et (iii) sont équivalentes puisque, au terme a_0 près, les sommes partielles de la série $\sum(a_n + a_{-n})$ sont $\sum\limits_{p=-n}^{n} a_p$. Cela donne en particulier la dernière égalité.

Les inégalités $0 \leqslant a_n \leqslant a_n + a_{-n}$ et $0 \leqslant a_{-n} \leqslant a_n + a_{-n}$ montrent l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$, la réciproque et l'égalité médiane provenant de la linéarité de la somme des séries.

Corollaire 21 Lorsque I est fini, le résultat est déjà connu. Lorsqu'il est dénombrable, au moyen d'une bijection de $\mathbb{N}$ sur I, on peut supposer $I = \mathbb{N}$. Grâce à la proposition 20 de la page 460, le résultat est alors une conséquence de l'inégalité triangulaire sur les sommes de séries absolument convergentes :
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|.$$

Théorème 24

- Soit $\lambda \in \Lambda$. La famille $(a_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable comme sous-famille de la famille sommable $(a_i)_{i\in I}$. Par inégalité triangulaire, sa somme σ_λ vérifie : $|\sigma_\lambda| \leqslant \sum\limits_{i\in I_\lambda} |a_i|$.
- La sommabilité de $(a_i)_{i\in I}$, c'est-à-dire de $\big(|a_i|\big)_{i\in I}$, donne donc, avec le théorème 18 de la page 457, la sommabilité de $(\sigma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.
- Enfin, les applications $(a_i)_{i\in I} \mapsto \sum\limits_{i\in I} a_i$ et $(a_i)_{i\in I} \mapsto \sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum\limits_{i\in I_\lambda} a_i\right)$ sont linéaires par linéarité de la somme et coïncident sur l'ensemble des suites réelles positives.
  En écrivant $a_k = a_k^+ - a_k^-$ pour des familles réelles, puis $a_k = \operatorname{Re} a_k + i \operatorname{Im} a_k$, on en déduit que ces deux applications sont égales.

Exercice 10 La série converge absolument, donc la famille est sommable. Utilisons les résultats de l'exemple de la page 456 en séparant les termes d'indice pair de ceux d'indice impair :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 11

1. Comme $|z| < 1$, les séries géométriques $\sum\limits_p z^{2p}$ et $\sum\limits_q z^{3q}$ sont absolument convergentes. L'exemple de la page 462 donne alors la sommabilité de la famille $(z^{2p+3q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ et sa somme :
$$S(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} z^{2p} \times \sum_{q=0}^{+\infty} z^{3q} = \frac{1}{1-z^2} \times \frac{1}{1-z^3}.$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $I_n = \big\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \;\big|\; 2p+3q = n\big\}$. Ce sont des parties de $\mathbb{N}^2$ disjointes deux à deux et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \mathbb{N}^2$. Le théorème de sommation par paquets donne donc :
$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{(p,q)\in I_n} z^{2p+3q}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{(p,q)\in I_n} z^n\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{card} I_n)\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n\, z^n.$$
Cela prouve, au passage, que la série $\sum d_n\, z^n$ converge absolument.

Exercice 12 Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, notons $u_{p,q} = \dfrac{(-1)^{p+q}}{2^p\, 3^q\, (p+q+1)}$.

- La majoration $|u_{p,q}| \leqslant 2^{-p}3^{-q}$ montre que la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable puisque :
$$\sum_{q=0}^{+\infty} 2^{-p}3^{-q} = 2^{-p}\,\frac{1}{1-1/3} \quad \text{est le terme général d'une série convergente.}$$

- Pour la somme, calculons :

$$\sigma_n = \sum_{p+q=n} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^n}{2^p 3^{n-p}\,(n+1)}.$$

Cette dernière somme est constituée des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $2/3$, ce qui donne, après calcul :

$$\sigma_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^n}\right) = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{6}{2^{n+1}} - \frac{6}{3^{n+1}}\right).$$

En utilisant le résultat rappelé, on obtient donc :

$$S = 6\left(\ln\Big(1+\frac{1}{2}\Big) - \ln\Big(1+\frac{1}{3}\Big)\right) = 12\ln 3 - 18\ln 2.$$

Exercice 13

- La décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} u_{p,q} &= -\frac{2q+1}{p+q+1} + 2\frac{2q+2}{p+q+2} - \frac{2q+3}{p+q+3} \\ &= (2q+3)\left(\frac{1}{p+q+2} - \frac{1}{p+q+3}\right) - (2q+1)\left(\frac{1}{p+q+1} - \frac{1}{p+q+2}\right) \end{aligned}$$

montre que la série $\sum\limits_p u_{p,q}$ est convergente de somme :

$$\alpha_q = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = \frac{2q+3}{q+2} - \frac{2q+1}{q+1} = \frac{1}{q+1} - \frac{1}{q+2}.$$

La série $\sum \alpha_q$ est donc convergente de somme 1, ce qui donne :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = 1.$$

- Puisque $u_{q,p} = -u_{p,q}$, on a donc aussi :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = -1.$$

- Enfin, pour tout n :

$$\sum_{p+q=n} u_{p,q} = 0,$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p+q=n} u_{p,q} = 0.$$

Cet exemple montre qu'évidemment la suite double $u_{p,q}$ n'est pas sommable, mais aussi que la condition de sommabilité est indispensable pour pouvoir échanger l'ordre des sommations.

Théorème 28 Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la famille $(|a_p\, b_q|)_{q\in\mathbb{N}}$ est sommable de somme :

$$\alpha_p = |a_p| \sum_{q=0}^{+\infty} |b_q|.$$

La famille $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est alors sommable puisque proportionnelle à la famille $\big(|a_p|\big)_{p\in\mathbb{N}}$. Cela prouve la sommabilité de la famille $(a_p\, b_q)$ et donc le théorème.

Exercice 14

- La série $\sum a_n$ converge d'après le théorème des séries alternées puisque la suite $(\frac{1}{\sqrt{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.
- On a $c_n = (-1)^n \sum\limits_{p+q=n} \frac{1}{\sqrt{(p+1)(q+1)}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  Les variations sur $[0, n]$ de la fonction $t \mapsto (t+1)(n-t+1)$ montrent qu'elle admet un maximum en $n/2$ qui vaut $(\frac{n+2}{2})^2$, et l'on a donc :

  $$|c_n| = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(p+1)(n-p+1)}} \geqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2n}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

  La série $\sum c_n$ diverge donc puisque son terme général ne tend pas vers 0.

S'entraîner et approfondir

9.1 1. Montrer qu'un ensemble est infini si, et seulement s'il contient une partie dénombrable.
2. Montrer que si A est un ensemble au plus dénombrable et B un ensemble infini, alors $A \cup B$ est en bijection avec B.

★ **9.2** Soit E un espace vectoriel muni d'une base dénombrable $\mathcal{B} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrer que toute base de E est dénombrable.

9.3 *(Polytechnique 2015)*
On appelle **nombre algébrique** tout nombre complexe racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels.
1. Montrer que l'ensemble des nombres algébrique est dénombrable.
2. Existe-t-il des réels non algébriques ?

9.4 Montrer directement l'inégalité triangulaire du corollaire 21 de la page 460 sans utiliser la proposition 20 et préciser les cas d'égalité. *Indication : on pourra utiliser un nombre complexe ω de module 1 tel que $\overline{\omega}\sum\limits_{k\in I} u_k \in \mathbb{R}_+$.*

9.5 Sommabilité et somme de $\left(\dfrac{(-1)^p}{q^p}\right)_{\substack{p\geqslant 2\\ q\geqslant 2}}$.

9.6 Sommabilité et somme de $\left(r^{|n|}\,e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, pour $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$.

9.7 Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels décroissante et de limite nulle. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\Delta_n := a_n - a_{n+1}$. Montrer que la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge si et seulement si la série $\sum \Delta_n \ln(n)$ converge.

★ **9.8** Montrer l'existence et calculer $S = \displaystyle\sum_{p\wedge p=1} \frac{1}{p^2q^2}$, la somme étant étendue à tous les couples d'entiers naturels non nuls et premiers entre eux.

Indication. On donne $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

9.9 Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même.
1. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$ converge.
2. Montrer que la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.
3. Que peut-on dire de la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^3}$?

9.10 Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes, où I est un ensemble non nécessairement dénombrable. On suppose qu'il existe un réel M tel que pour toute partie finie J et I, on ait $\sum_{i\in J} |a_i| \leqslant M$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\left\{ i \in I \;\middle|\; |a_i| \geqslant \varepsilon \right\}$ est fini.
2. En déduire que l'ensemble $\left\{ i \in I \;\middle|\; a_i \neq 0 \right\}$ (**support** de la famille $(a_i)_{i\in I}$) est au plus dénombrable.

9.11 Soit f une fonction monotone d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

On pourra utiliser le résultat l'exercice 9.10.

⋆ **9.12 Théorème de Maertens**

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente et $\sum b_n$ une série convergente.

Montrer que la série de terme général $c_n = \sum_{p+q=n} a_p\, b_q$ est convergente et que :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_p\, b_q\right).$$

Indication. On pourra écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{p=0}^{n} a_p\, B_{n-p},$$

où (B_n) est la suite des sommes partielles de $\sum b_n$ et utiliser le théorème de la double limite.

9.13 Produit de Dirichlet de deux séries

1. Soit $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ deux séries absolument convergentes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$c_n = \sum_{d|n} a_d\, b_{n/d}$$

(la somme est étendue à tous les diviseurs de n).

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ est absolument convergente et que l'on a :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n.$$

2. On pose, pour $\alpha > 1$:
$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\cdot$$
   (a) Si $N(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n, montrer que la série de terme général $N(n)/n^\alpha$ converge pour $\alpha > 1$ et déterminer sa somme.
   (b) Si $\varphi(n)$ représente le nombre d'éléments de $[\![1, n]\!]$ premiers avec n (indicatrice d'Euler, voir page 12), montrer que pour tout $\alpha > 2$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha}$ converge et déterminer sa somme.

9.14 Soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de I dont la réunion est égale à I.

1. Montrer qu'une famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs est sommable si, et seulement si, la suite $\left(\sum\limits_{i\in J_n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes sommable.
   Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{i\in J_n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que l'on a :
$$\sum_{i\in I} a_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} a_i.$$

★★ **9.15** Soit α un réel strictement positif et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers : $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5\ldots$
Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note A_N l'ensemble des entiers naturels dont les diviseurs premiers sont tous dans $\{p_1, \ldots, p_N\}$.

1. Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i^\alpha}} = \sum_{n\in A_N} \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire que :
$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i^\alpha}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$
   (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 9.14).
3. Montrer que $\sum \dfrac{1}{p_n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

★★ **9.16** Soit $\sum u_n$ une série semi convergente à terme général réel. On note A l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \geqslant 0$ et $B = \mathbb{N} \setminus A$.

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on peut trouver une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum\limits_n u_{\sigma(n)}$ converge vers ℓ.
   Indication : on prendra alternativement des termes d'indices dans A puis dans B.
2. Montrer que l'on peut trouver une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum\limits_n u_{\sigma(n)}$ diverge vers $+\infty$.

Solution des exercices

9.1 1. Un ensemble qui contient une partie dénombrable est évidemment infini. Réciproquement, soit E un ensemble infini. Construisons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E distincts deux à deux.
   - Comme E est infini, il est non vide, ce qui permet de choisir un élément a_0 de E.
   - Supposons construits $(a_0,\dots,a_n)$ des éléments de E distincts deux à deux. Comme E est infini, il n'est pas égal à $\{a_0,\dots,a_n\}$, ce qui permet de construire un élément $a_{n+1}\in E$ différent des précédents.

   L'ensemble $A=\{a_n\,;\ n\in\mathbb{N}\}$ est alors une partie dénombrable de E : elle est en bijection avec $\mathbb{N}$ par l'application $n\mapsto a_n$ qui est injective par construction et surjective par définition de A.

2. Soit A un ensemble au plus dénombrable et B un ensemble infini. D'après la première question, il existe une partie C de B qui est dénombrable. Alors, $A\cup C$ est également dénombrable comme réunion de deux ensembles au plus dénombrables, dont l'un au moins est infini.

   Considérons donc une bijection de C sur $A\cup C$ et prolongeons-la à B par l'identité sur $B\setminus C$. On obtient alors une bijection de B sur $A\cup B$.

9.2 Soit $\mathcal{B}=(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de E et $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre. Montrons que I est au plus dénombrable.

Soit $n\in\mathbb{N}$; posons $I_n=\{i\in I\mid x_i\in\operatorname{Vect}(e_0,\dots,e_n)\}$. Il s'agit d'un ensemble fini, car $(x_i)_{i\in I_n}$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\operatorname{Vect}(e_0,\dots,e_n)$ de dimension finie. De plus, comme $\mathcal{B}$ est une base de E, tout vecteur de E appartient à un des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Vect}(e_0,\dots,e_n)$. On en déduit que $I=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et donc que I est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis.

En particulier, toute base de E est au plus dénombrable et par suite dénombrable puisque E n'est pas de dimension finie.

9.3 Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres algébriques.

1. On a $\mathcal{A}=\bigcup\limits_{P\in\mathbb{Q}[X]\setminus\{0\}} P^{-1}\big(\{0\}\big)$ qui est donc une réunion dénombrable (*cf.* l'exercice 6 de la page 451) d'ensembles finis (tout polynôme non nul a un nombre fini de racines). De plus, $\mathcal{A}$ est infini puisqu'il contient $\mathbb{Q}$: tout rationnel r est racine de $X-r\in\mathbb{Q}[X]\setminus\{0\}$.
2. Comme $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, on en déduit que $\mathcal{A}\cap\mathbb{R}\subsetneq\mathbb{R}$ et donc qu'il existe au moins un réel non algébrique (et même une infinité non dénombrable).

   Remarque Cette existence a ainsi été montrée de façon non constructive. Il est possible d'en exhiber explicitement : par exemple la **constante de Liouville** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 10^{-n!}$ est non algébrique (*cf.* l'exercice 1.15 de la page 53).

9.4 • Commençons par supposer que $\sum_{k\in I} u_k \in \mathbb{R}_+$.

Pour tout $k \in I$, posons $u_k = x_k + iy_k$, avec $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\left|\sum_{k\in I} u_k\right| = \mathrm{Re}\left(\sum_{k\in I} u_k\right) = \sum_{k\in I} x_k.$$

Or, pour tout $k \in I$, on a $x_k \leqslant |x_k| \leqslant |u_k|$, ce qui donne donc :

$$\left|\sum_{k\in I} u_k\right| \leqslant \sum_{k\in I} |u_k|.$$

S'il y a égalité, la famille $\big(|u_k| - x_k\big)_{k\in I}$ est positive et de somme nulle. On en déduit qu'elle est nulle, ce qui donne, pour tout $k \in I$, $x_k = |x_k| = |u_k|$ et donc $u_k \in \mathbb{R}_+$.

• Revenons au cas général et posons $S = \sum_{k\in I} u_k$. Il existe un nombre complexe ω de module 1 tel que $\overline{\omega} \sum_{k\in I} u_k \in \mathbb{R}_+$: si $S = 0$, il suffit de prendre $\omega = 1$ et sinon $\omega = e^{i\theta}$, où θ est un argument de S.
En posant $z_k = \overline{\omega}\, u_k$ pour tout $k \in I$, on a :

$$\left|\sum_{k\in I} u_k\right| = \left|\sum_{k\in I} z_k\right| \qquad \text{et} \qquad \sum_{k\in I} |u_k| = \sum_{k\in I} |z_k|.$$

L'inégalité triangulaire est alors une conséquence du premier point.
D'autre part, si l'on a l'égalité dans l'inégalité triangulaire, alors :

$$\forall k \in I \quad z_k \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad u_k = \omega\, z_k.$$

La réciproque étant évidente, on a donc montré que $\left|\sum_{k\in I} u_k\right| = \sum_{k\in I} |u_k|$ si, et seulement s'il existe une famille réelle positive $(z_k)_{k\in I}$ et un nombre complexe de module 1 tels que $\forall k \in I \quad u_k = \omega\, z_k$.

9.5 • Commençons par montrer la sommabilité de la famille en montrant :

$$\sum_{q=2}^{+\infty} \left(\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{q^p}\right) < +\infty.$$

Pour tout $q \geqslant 2$, la série $\sum_p q^{-p}$ est une série géométrique de raison $1/q < 1$, donc absolument convergente, et de somme :

$$\sigma_q = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{q^p} = \frac{1/q^2}{1 - 1/q} = \frac{1}{q(q-1)}.$$

Comme $\sigma_q \sim \frac{1}{q^2}$, la série $\sum_q \sigma_q$ est convergente, ce qui prouve le résultat.

- On fait le même calcul pour trouver la somme, la série géométrique étant maintenant de raison $-1/q$. Cela donne :

$$\sum_{q=2}^{+\infty}\left(\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{q^p}\right)=\sum_{q=2}^{+\infty}\frac{(-1/q)^2}{1+1/q}=\sum_{q=2}^{+\infty}\frac{1}{q(q+1)}=\frac{1}{2}$$

la dernière égalité provenant, par télescopage, de la décomposition en éléments simples $\frac{1}{q(q+1)}=\frac{1}{q}-\frac{1}{q+1}$.

9.6 • Supposons que la famille soit sommable. On utilise la partition suivante : $\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}_-^*$, ce qui ramène le calcul de la somme à celui de deux séries géométriques de raisons $r\,e^{i\theta}$ et $r\,e^{-i\theta}$. Comme ces séries divergent lorsque $r\geqslant 1$, on en déduit que $r<1$. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\,e^{in\theta}&=\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\,e^{in\theta}+\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\,e^{-in\theta}\\&=\frac{1}{1-r\,e^{i\theta}}+\frac{r\,e^{-i\theta}}{1-r\,e^{-i\theta}}=\frac{1-r^2}{1-2r\,\cos\theta+r^2}.\end{aligned}$$

• Soit $r\in[0,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Notons $u_n(r,\theta)=r^{|n|}\,e^{in\theta}$, pour tout $n\in\mathbb{Z}$.
Comme $\big|u_n(r,\theta)\big|=r^{|n|}=u_n(r,0)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, pour montrer la sommabilité de la famille, il suffit de montrer que la famille $\big(u_n(r,0)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. Puisqu'il s'agit d'une famille réelle positive, on peut calculer sa somme (éventuellement infinie) en utilisant n'importe quelle partition de $\mathbb{Z}$. Le calcul précédent est donc valide et donne :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}=\frac{1-r^2}{1-2r+r^2}=\frac{1+r}{1-r}<+\infty$$

ce qui montre la sommabilité de la famille $\big(u_n(r,0)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$.

En conclusion, la famille $\big(u_n(r,\theta)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si, et seulement si, $r<1$ et sa somme est alors $\dfrac{1-r^2}{1-2r\,\cos\theta+r^2}$.

9.7 La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente, donc la série télescopique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\Delta_n$ converge. On a de plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=n}^{+\infty}\Delta_p=a_n.$$

Considérons donc la famille $\left(\frac{\Delta_p}{n}\right)_{1\leqslant n\leqslant p}$. Par décroissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, elle est positive. On peut donc intervertir l'ordre des sommations, ce qui donne (avec un ésultat

éventuellement infini) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=n}^{+\infty}\frac{\Delta_p}{n}\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{p}\frac{\Delta_p}{n}\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\Bigg(\Delta_p\underbrace{\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}}_{H_p}\Bigg).$$

Les séries $\sum\frac{a_n}{n}$ et $\sum\Delta_p H_p$ convergent donc simultanément. De plus, l'équivalent classique $H_p\sim\ln p$ montre que les séries à termes positifs $\sum\Delta_p H_p$ et $\sum\Delta_p\ln p$ sont de même nature. D'où le résultat.

9.8 Puisque la série $\sum\frac{1}{n^2}$ converge, de somme $S_2=\pi^2/6$, la famille $(\frac{1}{p^2q^2})_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable de somme S_2^2 (voir l'exemple de la page 462). On en déduit en particulier la sommabilité de la sous-famille $(\frac{1}{p^2q^2})_{p\wedge q=1}$.

Calculons la somme $\sum\limits_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}\frac{1}{p^2q^2}$ en utilisant la partition suivante de $\mathbb{N}^{*2}$:

$$\mathbb{N}^{*2}=\bigcup_{d\in\mathbb{N}^*}A_d\qquad\text{où}\qquad A_d=\big\{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}\;\big|\;p\wedge q=d\big\}.$$

Comme la famille est positive, le calcul suivant est justifié par le théorème 18 de la page 457.

Soit $d\in\mathbb{N}^*$. L'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{N}^{*2}&\longrightarrow&\mathbb{N}^{*2}\\(p,q)&\longmapsto&(dp,dq)\end{array}$ induit une bijection de A_1 sur A_d de réciproque $\begin{array}{ccc}A_d&\longrightarrow&A_1\\(p,q)&\longmapsto&(p/d,q/d).\end{array}$

Par changement d'indice, on en déduit :

$$\sum_{(p,q)\in A_d}\frac{1}{p^2q^2}=\sum_{(p,q)\in A_1}\frac{1}{(dp)^2(dq)^2}=\frac{1}{d^4}\sum_{(p,q)\in A_1}\frac{1}{p^2q^2}.$$

En notant $S=\sum\limits_{(p,q)\in A_1}\frac{1}{p^2q^2}$, on en déduit :

$$\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2=\sum_{d\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{(p,q)\in A_d}\frac{1}{p^2q^2}\right)=\sum_{d\in\mathbb{N}^*}\frac{S}{d^4}=S\,\frac{\pi^4}{90}.$$

Finalement, $S=\dfrac{\pi^4/36}{\pi^4/90}=\dfrac{5}{2}$.

9.9 1. On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad 0\leqslant\frac{1}{n\sigma(n)}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{\sigma(n)^2}\right).$$

La série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{1}{n^2}$ converge, donc la famille $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable. Par permutation, la famille $(\frac{1}{\sigma(n)^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est également sommable, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{1}{\sigma(n)^2}$ converge.

Par comparaison, on en déduit que la série à termes positifs $\sum\frac{1}{n\sigma(n)}$ converge.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{\sigma(p)}{p^2} \geqslant \frac{1}{4n^2} \sum_{p=n+1}^{2n} \sigma(p)$.

   Comme $\sigma(n+1), \ldots, \sigma(2n)$ sont n entiers deux à deux distincts de $\mathbb{N}^*$, on peut écrire :

   $$\sum_{p=n+1}^{2n} \sigma(p) \geqslant \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \geqslant \frac{n^2}{2}\cdot$$

   Par suite, $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{\sigma(p)}{p^2} \geqslant \frac{1}{8}$ et l'on en déduit $\displaystyle\sum_{p=1}^{2^k} \frac{\sigma(p)}{p^2} \geqslant \frac{k}{8} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   Donc la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

3. • Pour $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^*}$, la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^3}$ est bien sûr convergente.
   • Notons $A = \left\{n^3 ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et $B = \mathbb{N}^* \backslash A$. Comme B est une partie infinie de $\mathbb{N}^*$, elle est dénombrable et l'on peut donc écrire $B = \{b_n ;\ n \in \mathbb{N}^*\}$.
   Définissons $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$\left|\begin{array}{l} \sigma(2n) = n^3 \\ \sigma(2n-1) = b_n. \end{array}\right.$$

   Il est immédiat que σ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$.
   Comme $\frac{\sigma(2n)}{(2n)^3} = \frac{1}{8}$, la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^3}$ diverge, puisque son terme général ne tend pas vers 0.

9.10 1. Soit $\varepsilon > 0$ et J une partie finie de l'ensemble $I_\varepsilon = \left\{i \in I \;\middle|\; |a_i| \geqslant \varepsilon\right\}$. On a :

   $$M \geqslant \sum_{i\in J} |a_i| \geqslant \varepsilon \text{ card } J.$$

   On en déduit que toutes les parties finies de I_ε ont au maximum M/ε éléments, ce qui prouve que I_ε est fini (et de cardinal inférieur à M/ε).

2. Le support de $(a_i)_{i\in I}$ est la réunion des $I_{1/n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. En tant que réunion dénombrable d'ensembles finis, il est donc au plus dénombrable.

9.11 Soit en effet une fonction monotone d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quitte à considérer $\pm \mathrm{Arctan} \circ f$, on peut supposer f croissante et bornée.

Pour chaque x de l'intérieur de I, on peut poser :

$$\delta_x = f(x^+) - f(x^-)$$

(une fonction monotone sur I admet une limite à droite et à gauche en tout point intérieur à I). Les points de discontinuité de f à l'intérieur de I sont ceux pour lesquels $\delta_x > 0$.

Si J est une partie finie de l'intérieur de I, on a :

$$\sum_{x\in J} \delta_x \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \sup_I f - \inf_I f.$$

Le résultat de l'exercice 9.10 nous dit que l'ensemble des points x intérieurs à I pour lesquels $\delta_x > 0$ est au plus dénombrable. Comme il y a au maximum deux points de discontinuité non intérieurs à I, on en déduit que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

9.12 Posons $B_n = \sum_{p=0}^{n} b_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (B_n) est convergente par hypothèse et donc bornée. Notons B sa limite et $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n|$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{p+q\leqslant n} a_p\, b_q = \sum_{p=0}^{n} a_p \sum_{q=0}^{n-p} b_q = \sum_{p=0}^{n} a_p\, B_{n-p}.$$

Posons alors, pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$:

$$u_p(n) = \begin{cases} a_p\, B_{n-p} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_p u_p(n)$ est évidemment convergente de somme $\sum_{k=0}^{n} c_k$. D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $u_p(n) = a_p\, B_{n-p}$ pour $n \geqslant p$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_p(n) = a_p\, B$. On en déduit le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{p=0}^{P} u_p(n) & \xrightarrow[n\to+\infty]{} & B \displaystyle\sum_{p=0}^{P} a_p \\ (*)\ \Big\downarrow P\to+\infty & & \Big\downarrow P\to+\infty \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k & & B \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} a_p \end{array}$$

Pour prouver la convergence de $\sum c_k$ et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \times \sum_{q=0}^{+\infty} b_q$$

montrons que la limite $(*)$ est uniforme par rapport à n. Il suffit, pour cela, que la série $\sum_p u_p(n)$ converge normalement par rapport à n, ce qui est une conséquence immédiate de la relation :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big|u_p(n)\big| \leqslant M\,|a_p|$$

(le cas $p > n$ étant trivial) et de la convergence absolue de $\sum a_p$.

9.13 1. En utilisant la partition suivante de $\mathbb{N}^{*2}$:

$$\mathbb{N}^{*2} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \big\{(p,q) \;\big|\; p\,q = n\big\}$$

on obtient que si les séries :

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 1} b_n$$

convergent absolument, alors la série de terme général :

$$\sum_{d|n} a_d\, b_{n/d}$$

est absolument convergente et que l'on a :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{d|n} a_d\, b_{n/d}\right).$$

2. (a)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{N(n)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p\,q=n} \frac{1}{p^\alpha}\,\frac{1}{q^\alpha}\right) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\right)^2 = \zeta(\alpha)^2.$$

(b) On a (voir par exemple l'exercice 14 de la page 12) :

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)}.$$

9.14 Notons $I_0 = J_0$ et $I_n = J_n \setminus J_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que les I_n sont des parties disjointes deux à deux et que leur réunion est égale à I.

- Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p < q$, on a $I_p \subset J_p \subset J_{q-1}$, donc $I_p \cap I_q = \varnothing$.
- Soit $i \in I$. Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $i \in J_n$. Prenons le plus petit entier n vérifiant cette propriété. Alors, en posant $J_{-1} = \varnothing$, on a $i \in J_n \setminus J_{n-1} = I_n$.

Dans les deux questions, on peut donc appliquer les théorèmes de sommation par paquets à la famille $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs ou une famille sommable de nombres complexes. Alors les sommes $\sigma_n = \sum\limits_{i\in I_n} a_i$ existent et l'on remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i\in J_n} a_i = \sum_{p=0}^{n} \sigma_p \qquad (*)$$

puisque J_n est la réunion disjointes de $I_0, \ldots, I_n$.

1. Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs est sommable si, et seulement si, la famille $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, c'est-à-dire si, et seulement si, la série à terme général positif $\sum\limits_n \sigma_n$ converge, ce qui donne l'équivalence annoncée d'après la relation $(*)$.

2. Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, alors, par le théorème 24 de la page 461, la famille $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ également, donc la série $\sum\sigma_n$ est convergente et :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \sigma_p = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} a_i.$$

9.15 1. Montrons le résultat par récurrence sur N.

- Pour $N = 1$, on a :

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i^\alpha}} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_1^\alpha}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_1^{k\alpha}} = \sum_{n\in A_1} \frac{1}{n^\alpha}.$$

- Soit $N \geqslant 2$. Supposons le résultat vrai pour $N-1$. Partitionnons A_N en regroupant ses éléments suivant leur valuation p_N-adique. On peut ainsi écrire :

$$A_N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{N,k} \qquad \text{avec} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad A_{N,k} = \left\{ n\, p_N^k \,;\; n \in A_{N-1} \right\}.$$

Par le théorème de regroupement par paquets pour une famille de réels positifs, on obtient :

$$\sum_{n\in A_N} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n\in A_{N-1}} \frac{1}{n^\alpha\, p_N^{k\alpha}} = \left(\sum_{n\in A_{N-1}} \frac{1}{n^\alpha} \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_N^{k\alpha}} \right).$$

L'hypothèse de récurrence nous donne :

$$\sum_{n\in A_{N-1}} \frac{1}{n^\alpha} = \prod_{i=1}^{N-1} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i^\alpha}}$$

tandis que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_N^{k\alpha}} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_N^\alpha}}$.

D'où le résultat au rang N.

2. La suite $(A_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de parties de $\mathbb{N}^*$ dont la réunion est égale à $\mathbb{N}^*$. D'après le résultat de l'exercice 9.14 appliqué à la famille de réels positifs $(1/n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on en déduit :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n\in A_N} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

d'où le résultat demandé d'après la question précédente.

3. On en déduit que $\displaystyle\prod_{i=1}^{N-1} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i^\alpha}}$ tend vers $+\infty$ lorsque N tend vers $+\infty$ si $\alpha \leqslant 1$ et vers $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty$ si $\alpha > 1$. On en déduit, pa composition avec la fonction logarithme, que la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 1} -\ln(1-\tfrac{1}{p_i^\alpha})$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ et comme $-\ln(1-\frac{1}{p_i^\alpha}) \sim \frac{1}{p_i^\alpha}$, que la série $\sum \frac{1}{p_n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

9.16 Commençons par remarquer qu'aucune des deux familles $(u_n)_{n\in A}$ et $(u_n)_{n\in B}$ n'est sommable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = A \cap [\![0, n]\!]$. On définit ainsi ue suite croissante de parties de A dont la réunion est égale à A. Le résultat de l'exercice 9.14 montre que $(u_k)_{k\in A}$ est sommable si, et seulement si, la suite $\left(\sum\limits_{k\in A_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puisque la famille $(a_k)_{k\in A}$ est positive.

On procède de la même façon avec $B_n = B \cap [\![0, n]\!]$ la famille négative $(a_k)_{k\in B}$. Or, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k\in A_n} u_k + \sum\limits_{k\in B_n} u_k$. Les deux suites $\left(\sum\limits_{k\in A_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum\limits_{k\in B_n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes. Or, les deux familles $(u_n)_{n\in A}$ et $(u_n)_{n\in B}$ ne peuvent pas être toutes les deux sommables sinon, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le serait également et cela contredirait l'hypothèse de semi-convergence de la série $\sum u_n$. Donc, aucune des deux n'est sommable.

En particulier, les ensembles A et B sont infinis. On peut donc ré-indexer les deux familles $(u_n)_{n\in A}$ et $(u_n)_{n\in B}$ en des suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, les deux séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$ étant divergentes, la première à termes positifs tendant vers $+\infty$ et la deuxième à terme négatifs tendant vers $-\infty$.

Comme la série $\sum u_n$ converge, son terme général tend vers 0. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un nombre fini de termes strictement supérieurs à ε, donc la suite (a_k) est inférieure à ε à partir d'une certain rang. On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$. De le même façon, $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k = 0$.

1. Réordonnons les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour en faire les termes d'une série convergeant vers ℓ.
   - Comme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty$, il existe un entier p tel que $\sum\limits_{k=0}^{p} a_k \geqslant \ell$. Posons $\varphi(0)$ le premier tel p et notons $S_0 = \sum\limits_{k=0}^{\varphi(0)} a_k$.
   - Comme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k = -\infty$, il existe un entier p tel que $S_0 + \sum\limits_{k=0}^{p} b_k \leqslant \ell$. Posons $\psi(0)$ le premier tel p et notons $T_0 = S_0 + \sum\limits_{k=0}^{\psi(0)} b_k$.
   - De même, prenons $\varphi(1)$ le premier entier p tel que $T_0 + \sum\limits_{k=\varphi(0)+1}^{p} a_k \geqslant \ell$ et notons S_1 cette somme, puis $\psi(1)$ le premier entier p tel que $S_1 + \sum\limits_{k=\psi(0)+1}^{p} b_k \leqslant \ell$ et notons T_1 cette somme.
   - On continue ainsi en prenant des termes de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jusqu'à dépasser ℓ puis des termes de la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jusqu'à redescendre en dessous.
   - On obtient ainsi deux extractions φ et ψ et l'on considère la suite :
   $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, \ldots, a_{\varphi(0)}, b_0, \ldots, b_{\psi(0)}, a_{\varphi(0)+1}, \ldots, a_{\varphi(1)}, b_{\psi(0)+1}, \ldots, b_{\psi(1)}, \ldots)$.

Notons $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum v_n$.
Chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a ainsi été pris une et une seule fois puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\psi(n)=+\infty$. Il existe donc une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=u_{\sigma(n)}$.

- Montrons que la série $\sum v_n$ converge vers ℓ. Notons :
  * $\theta(0)=\varphi(0)$;
  * $\theta(1)=\theta(0)+\psi(0)+1$;
  * $\theta(2)=\theta(1)+\varphi(1)-\varphi(0)$;
  * $\theta(3)=\theta(2)+\psi(1)-\psi(0)\ldots$

  les indices qui précèdent les changements de signe de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Soit $\varepsilon>0$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de module inférieur à ε. Soit k tel que $\theta(k)\geqslant n_0$. Par définition de la suite, le réel ℓ est compris entre $V_{\theta(k)-1}$ et $V_{\theta(k)}$. Comme $|V_{\theta(k)}-V_{\theta(k)-1}|=|v_{\theta(k)}|\leqslant\varepsilon$, on en déduit que $|V_{\theta(k)}-\ell|\leqslant\varepsilon$. On a donc aussi $|V_{\theta(k+1)}-\ell|\leqslant\varepsilon$ et puisque tous les termes de $(v_n)_{\theta(k)<n\leqslant\theta(k+1)}$ sont de même signe, les sommes partielles $(V_n)_{\theta(k)<n\leqslant\theta(k+1)}$ sont dans le segment $[V_{\theta(k)},V_{\theta(k+1)}]$, donc vérifient également $|V_n-\ell|\leqslant\varepsilon$. On a ainsi :

  $$\forall n\geqslant n_0\quad |V_n-\ell|\leqslant\varepsilon,$$

  ce qui prouve le résultat.

2. Le principe est le même. Nous donnons les grandes lignes sans formaliser complètement la construction.

   On prend des termes positifs de la suite jusqu'à ce que la somme dépasse 1, puis des termes négatifs jusqu'à redescendre en dessous de 0. On recommence avec 2 et 1, puis 3 et $2,\ldots$, n et $n-1,\ldots$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, on montre alors facilement que les sommes partielles de la série permutée ainsi construite tendent vers $+\infty$.

Chapitre 10 : Suites et séries de fonctions

I Modes de convergence des suites 492
1 Convergence simple 492
2 Convergence uniforme 494
3 Convergence uniforme sur une partie 499
II Convergence uniforme et limites 500
1 Un exemple d'interversion de limites 500
2 Convergence uniforme et continuité 500
3 Théorème de la double limite 501
III Intégration, dérivation d'une limite 502
1 Intégration d'une limite 502
2 Primitivation d'une limite 503
3 Dérivation d'une limite 504
IV Séries de fonctions 505
1 Les modes de convergence 505
2 Limite sous le signe $\sum$ 511
3 Intégration terme à terme sur un segment 512
4 Dérivation terme à terme 513
5 Comportement asymptotique 516
V Approximation uniforme 518
1 Approximation par des fonctions en escalier 518
2 Approximation par des polynômes 519
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 521
Exercices 546

Suites et séries de fonctions



Dans tout ce qui suit, E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, munis de normes notées $\|\ \|$ et A est une partie non vide de E. Dans de nombreux cas pratiques, on aura $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{K}$.
On s'intéresse dans ce chapitre aux suites et séries de fonctions de A dans F, c'est-à-dire aux suites et séries à valeurs dans $\mathcal{F}(A, F)$.

I Modes de convergence des suites

Au chapitre 5 nous avons défini la convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé. En ce qui concerne les suites de fonctions, il existe plusieurs manières « naturelles » de définir la convergence. Ces modes de convergence ne sont pas en général définis directement en termes de normes et sont fondamentalement différents entre eux.
Dans toute cette section, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans F.

1 Convergence simple

Définition 1

Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.

- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement vers f** si, pour tout $x \in A$, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** si elle converge simplement vers une fonction.

Remarques

- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement si, et seulement si, pour tout $x \in A$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur $B \subset A$** si la suite $\big(f_{n|_B}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
- Il est clair qu'il y a unicité de la limite simple.

- *A priori* ces définitions dépendent de la norme sur F. Puisque F est de dimension finie et qu'en dimension finie les normes sont équivalentes, ces définitions sont de fait indépendantes de la norme choisie.
- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Pour $f : A \to F$ on note f_i les applications composantes de f dans cette base.
  Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur A à valeurs dans F converge simplement vers g si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ la suite $(f_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g_i. Il s'agit d'une conséquence immédiate du fait qu'une suite à valeurs dans F converge si, et seulement si, toutes les composantes convergent, ce qui est une propriété des espaces de dimension finie.

p.521

Exercice 1 Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec :

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^n. \end{array}$$

p.521

Exercice 2 Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] ; \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n}, +\infty\right[. \end{cases}$$

Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Remarques

- Certaines propriétés algébriques « passent à la limite simple ».
  Par exemple si les suites de fonctions à valeurs scalaires $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers f et g, alors la suite $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f+g$ et la suite $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers fg.
- Beaucoup de propriétés analytiques ne passent pas « à la limite simple ».
  Par exemple, comme le montre l'exercice précédent,
  - une limite simple de fonctions continues n'est pas nécessairement continue.
  - une limite simple de fonctions bornées n'est pas nécessairement bornée.
- Certaines propriétés liées à l'ordre passent « à la limite simple ».
  Par exemple la limite simple d'une suite de fonctions croissantes est une fonction croissante. De même, la limite simple d'une suite de fonctions convexes est une fonction convexe. Pour le démontrer, il suffit de se ramener à la définition et passer à la limite dans les inégalités.

Attention La notion de convergence simple n'est pas stable par composition par une fonction continue. Par exemple, si f_n est la fonction constante sur $\mathbb{R}$ égale à $\frac{1}{n}$ et φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = 1/x$, il est clair que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle, alors que la suite $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas simplement.

2 Convergence uniforme

Dans la section qui suit, les résultats sont donnés dans le cadre général. En revanche, il est sans doute utile de traduire dans un premier temps ces résultats en se ramenant aux fonctions à valeurs réelles. C'est très souvent le cas dans la pratique et ce cadre favorise indéniablement l'intuition.

Norme de la convergence uniforme

- L'ensemble $\mathcal{B}(A, F)$ est l'espace des fonctions bornées définies sur A à valeurs dans F.
- Pour tout $f \in \mathcal{B}(A, F)$, on note $\mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{x\in A} \|f(x)\|$.

  L'application $\mathcal{N}_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(A, F)$, dite de la **convergence uniforme** associée à la norme $\|\ \|$.

Remarque

- Puisque F est de dimension finie et que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, l'ensemble $\mathcal{B}(A, F)$ ne dépend pas du choix de la norme sur F.
- Si $\|\ \|$ et $\|\ \|'$ sont deux normes sur F, elles induisent deux normes de convergence uniforme $\mathcal{N}_\infty$ et $\mathcal{N}'_\infty$. Les deux normes $\mathcal{N}_\infty$ et $\mathcal{N}'_\infty$ sont équivalentes ; il s'agit d'une conséquence immédiate de l'équivalence des normes $\|\ \|$ et $\|\ \|'$.

Définitions, premiers exemples

Dire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f signifie :

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Il faut bien garder en mémoire que le « n_0 » dépend non seulement de ε, mais également de x. Lorsque l'on peut choisir n_0 indépendamment de x, on parle de convergence uniforme.

Définition 2

Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$.

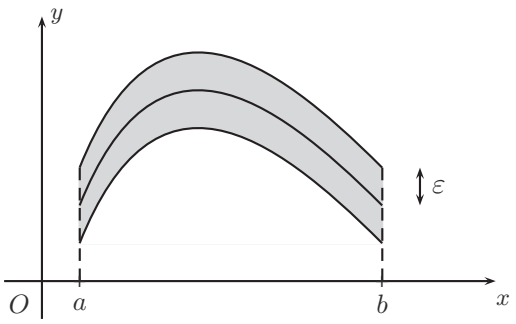
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers f** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in A \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

- On dit que la suite **converge uniformément** si elle converge uniformément vers une fonction.

Remarques

- Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in \mathcal{F}(A,F)$, si, et seulement s'il existe une suite de réels positifs $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'à partir d'un certain rang :
$$(\forall x \in A \qquad \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \alpha_n) \qquad \text{et} \qquad \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
- En d'autres termes, pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, il faut et il suffit qu'à partir d'un certain rang la fonction $f_n - f$ soit bornée et que $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $F = \mathbb{R}$ et A est un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut associer à chaque fonction f_n son graphe dans le plan xOy. La convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel, le graphe de f_n est contenu dans la partie du plan xOy définie par :
$$x \in A \quad \text{et} \quad y \in [f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon].$$



p.521

Exercice 3 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Pour $f : A \to F$ on note f_i les applications composantes de f dans cette base.
Démontrer qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur A à valeurs dans F converge uniformément vers g si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ la suite $(f_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g_i.

Proposition 1

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors elle converge simplement vers f.

Démonstration. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, pour n suffisamment grand, on a :
$$\forall x \in A \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
La conclusion est alors immédiate. □

Remarque Il y a donc unicité de la limite uniforme.

Point méthode

- Pour établir la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on commence par établir la convergence simple. Si elle converge effectivement simplement vers f, on cherche alors à montrer qu'elle converge uniformément vers f.
- Pour montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, on cherche à majorer à partir d'un certain rang $|f_n(x)-f(x)|$ indépendamment de $x\in A$ par un terme α_n tel que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Lorsque A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que l'on ne trouve pas de majoration simple de $|f_n(x)-f(x)|$ indépendante de $x\in A$, on peut éventuellement faire une étude de fonction.

Exemples

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $f_n : \begin{array}{ccc}\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n\end{array}$ pour tout entier naturel n, converge uniformément vers 0. En effet, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :
$$\forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \quad |f_n(x)|\leqslant\frac{1}{2^n}.$$
Puisque $\frac{1}{2^n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergence uniformément vers la fonction nulle.
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x)=\sqrt{x+\frac{1}{n}}$ converge uniformément vers la fonction $f : x\mapsto\sqrt{x}$. En effet, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a :
$$\forall x\in\mathbb{R}_+ \quad 0\leqslant f_n(x)-\sqrt{x}=\frac{1}{n}\,\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}}}\leqslant\frac{1}{n}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$
Puisque $\frac{1}{\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergence uniformément vers la fonction f.

p.521

Exercice 4 On pose, pour tout entier $n\geqslant 1$, la fonction
$$f_n : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(x+\frac{1}{n}\right).\end{array}$$
Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

p.522

Exercice 5 Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où f_n est la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(x)=x^n(1-x)$.

Attention Une suite qui converge simplement ne converge pas nécessairement uniformément.

Point méthode

Pour démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers une fonction f ne converge pas uniformément, on peut :

- chercher à vérifier que la fonction $f_n - f$ n'est pas bornée pour une infinité d'entiers n,
- ou plus généralement chercher à exhiber une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que la suite $\Big(|f_n(x_n) - f(x_n)|\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

p.522

Exercice 6 Montrer que la suite étudiée à l'exercice 2 de la page 493 n'est pas uniformément convergente.

p.522

Exercice 7 Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par :

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{nx}{1+n^2x^2}. \end{array}$$

Étudier les convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

p.523

Exercice 8 Étudier les convergences simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ dans les cas suivants :

1. $f_n(x) = \left(x + \dfrac{1}{n}\right)^2$;
2. $f_n(x) = \left(x + \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^2$.

Linéarité de la convergence uniforme

La notion de convergence uniforme est stable par combinaison linéaire.

Proposition 2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions définies sur A à valeurs dans F convergeant uniformément respectivement vers f et g, ainsi que $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. La suite $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors uniformément vers $\lambda f + \mu g$.

Démonstration page 523

En revanche, la notion de convergence uniforme n'est pas en général stable par produit.

p.523

Exercice 9 Donner un exemple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, convergeant toutes deux uniformément, telles que $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément.

Cas des fonctions bornées

Proposition 3

Supposons que les fonctions f_n soient bornées.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément si, et seulement si, elle converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(A,F),\mathcal{N}_\infty)$.

Principe de démonstration. Démontrer que la limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Démonstration page 524

p.524

Exercice 10 On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+x^4} \end{array}$.

1. Calculer $\mathcal{N}_\infty(f)$.
2. On pose $f_n : x \mapsto f(nx)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Que dire des convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous avons vu que le produit de suites de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément n'est pas en général uniformément convergente (*cf.* l'exercice 9). En revanche, la notion de convergence uniforme est stable par produit lorsqu'il s'agit de suites de fonctions bornées.

p.524

Exercice 11

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathcal{B}(A,\mathbb{K})$ convergeant uniformément respectivement vers f et g. Montrer que la suite $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors uniformément vers $f\, g$.
2. On suppose que F est muni d'une structure d'algèbre.
   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathcal{B}(A,F)$ convergeant uniformément respectivement vers f et g. Montrer que la suite $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors uniformément vers $f\, g$.

3 Convergence uniforme sur une partie

Dans bien des cas, la convergence uniforme sur tout le domaine n'est pas vérifiée ou n'est pas simple à établir. En revanche, il arrive fréquemment que la convergence uniforme soit vérifiée localement. On le verra, la convergence uniforme locale permet d'établir d'autres propriétés locales : limite, continuité, dérivabilité, etc.

Définition 3

- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** $\boldsymbol{B} \subset A$ si la suite $\left(f_{n|_B}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément au voisinage de** $\boldsymbol{a} \in A$ s'il existe un voisinage de a dans A sur lequel elle converge uniformément.
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément au voisinage de tout point de** $\boldsymbol{A}$ si elle converge uniformément au voisinage de a, pour tout $a \in A$.

Remarques

- S'il n'y a pas ambiguïté, on parle plus simplement de « convergence uniforme au voisinage de tout point ».
- Il est immédiat que la convergence uniforme implique la convergence uniforme au voisinage de tout point.
- Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément au voisinage de tout point, elle converge simplement.

Pratique de la convergence uniforme au voisinage de tout point

Pour établir la convergence uniforme au voisinage de tout point, on peut se restreindre à certains sous-ensemble de A.

Proposition 4 (Convergence uniforme sur tout segment)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Si pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, la suite converge uniformément sur $[a,b]$, alors la suite converge uniformément au voisinage de tout point.
On parle alors de **convergence uniforme sur tout segment de** $\boldsymbol{I}$.

Démonstration page 525

Point méthode

Pour établir la convergence uniforme au voisinage de tout point de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit :

1. d'exhiber une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de A telle que pour tout $a \in A$, il existe $i \in I$ tel que A_i soit un voisinage de a,
2. puis d'établir la convergence uniforme sur tous les A_i.

Remarque

Il est souvent utile de prendre des parties A_i fermées, voire compactes.

p.525

Exercice 12 On pose, pour tout entier $n > 0$, la fonction f_n définie par

$$\begin{array}{rccc} f_n : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{nx^2+1}{nx+1}. \end{array}$$

Étudier les convergences simple, uniforme, uniforme au voisinage de tout point.

II Convergence uniforme et limites

Dans toute cette section, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans F.

1 Un exemple d'interversion de limites

p.526

Exercice 13 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A convergeant vers $x \in \overline{A}$.

1. Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et si f admet une limite finie ℓ en a, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.
2. Le résultat précédent est-il encore vrai si l'on suppose seulement que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f ?

2 Convergence uniforme et continuité

On sait que la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas en général une fonction continue (*cf.* l'exercice 2 de la page 493). Si la convergence est plus forte, par exemple si elle est uniforme ou uniforme au voisinage de tout point, alors f « hérite » de la continuité des fonctions f_n.

Lemme 5

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f et si les f_n sont continues en $a \in A$, alors f est continue en a.

Principe de démonstration.

Pour tout $\varepsilon > 0$, fixer une fonction f_n telle que $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Ensuite, remarquer que :

$$f(x) - f(a) = \big(f(x) - f_n(x)\big) + \big(f_n(x) - f_n(a)\big) + \big(f_n(a) - f(a)\big)$$

et conclure à l'aide de la continuité de f_n en a.

Démonstration page 526

Proposition 6

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues converge uniformément sur A vers f, alors f est continue.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme précédent. □

Théorème 7

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément au voisinage de a vers f et si les f_n sont continues en $a \in A$, alors f est continue en a.

Démonstration. Il existe un voisinage V de a sur lequel la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément. Par caractère local de la continuité, il suffit d'appliquer le lemme 5 de la page précédente à la suite $\left(f_{n|_V}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Théorème 8

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément au voisinage de tout point vers f, alors la fonction f est continue.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème précédent. □

p.527

Exercice 14 On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

1. Démontrer que si les fonctions f_n sont k-lipschitziennes, alors f est k-lipschitzienne.
2. Démontrer que si les fonctions f_n sont lipschitziennes, alors f n'est pas nécessairement lipschitzienne.
3. Démontrer que si les fonctions f_n sont uniformément continues, alors f est uniformément continue.

3 Théorème de la double limite

On suppose ici que a est adhérent à A, c'est-à-dire (*cf.* page 260) que $a \in \overline{A}$ ou que $a = +\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$ non majorée ou que $a = -\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$ non minorée.

Lemme 9 (d'interversion des limites)

Supposons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n ait une limite finie $\ell_n \in F$ en a adhérent à A.

Si l'une des deux limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe dans F, alors l'autre existe et elles sont égales, *i.e.* :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Démonstration (non exigible) page 527

Théorème 10 (de la double limite)

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n a une limite fine en $a \in \overline{A}$ ou $a = \pm\infty$, alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la fonction f a une limite en a et l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Démonstration (non exigible) page 528

Remarque Pour ce résultat, une convergence uniforme au voisinage de a suffit évidemment.

Attention En revanche, il n'y a évidemment pas de version « convergence uniforme au voisinage de tout point » de ce théorème, comme le montre l'exercice suivant.

p.529

Exercice 15 Soit $A = [0,1[$. Donner un exemple de suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui converge uniformément au voisinage de tout point de A et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\lim\limits_{x\to1} f_n(x)\right) \neq \lim\limits_{x\to1} \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$.

p.529

Exercice 16 Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double à valeurs dans F. On suppose :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{p\to+\infty} u_{n,p} = \alpha_n \qquad \text{et} \qquad \forall p \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{n,p} = \beta_p,$$

l'une de ces limites étant uniforme par rapport à l'autre variable.

Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent et que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{p\to+\infty} \beta_p.$$

Vérifier de plus que cette limite est aussi la limite de la suite $(u_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$.

III Intégration, dérivation d'une limite

Dans cette section, I est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans F.

1 Intégration d'une limite

Théorème 11

On suppose que $I = [a,b]$ avec $a < b$ et que les fonctions f_n sont continues. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors :

$$\int_{[a,b]} f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f.$$

Principe de démonstration.

Démonstration page 529

Majorer $\left\| \int_{[a,b]} (f_n - f) \right\|$ à l'aide de $\int_{[a,b]} \|f_n - f\|$.

Remarques

- L'inégalité $\left\| \int_{[a,b]} (f_n - f) \right\| \leqslant (b-a)\,\mathcal{N}_\infty(f_n - f)$ est d'un usage courant.
- L'hypothèse de convergence uniforme est capitale.

p.530

Exercice 17

1. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)\,\mathrm{d}x$, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner un exemple de suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues définies sur $[0,1]$ convergeant simplement vers 0 et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{[0,1]} f_n = +\infty$.

Remarque On ne peut pas remplacer dans le théorème 11 de la page ci-contre l'hypothèse que les f_n sont continues par l'hypothèse que les f_n sont continues par morceaux. Cela tient au fait qu'une limite uniforme de fonctions continues par morceaux n'est pas continue par morceaux en général. En revanche, si la limite f est continue par morceaux, alors la conclusion du théorème 11 de la page précédente est vérifiée, comme le montre l'exercice suivant.

p.530

Exercice 18 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues par morceaux définies sur $[0,1]$ convergeant uniformément vers f.

1. Démontrer que si f est continue par morceaux, la conclusion du théorème 11 de la page ci-contre est vérifiée, *i.e.* $\displaystyle\int_{[0,1]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n$.
2. La fonction g définie sur $[0,1]$ par :
$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}^* \quad g\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}\ ; \\ \forall x \in [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{k}\ ;\ k \in \mathbb{N}^*\right\} \quad g(x) = 0 \end{cases}$$
est-elle continue par morceaux ?
3. Est-il vrai qu'en général $\displaystyle\int_{[0,1]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n$?

2 Primitivation d'une limite

Le théorème suivant établit que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment de I vers f, alors, pour tout $(a,x) \in I^2$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t.$$

Théorème 12

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de I dans F convergeant uniformément sur tout segment de I vers une fonction f continue. Soit $a \in I$. On note Φ et Φ_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications définies sur I par :

$$\Phi_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La suite $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors uniformément sur tout segment de I vers Φ.

Principe de démonstration. Pour tout segment $[\alpha,\beta] \subset I$, que l'on peut supposer contenir a, et pour $x \in [\alpha,\beta]$, majorer $\left\|\Phi_n(x) - \Phi(x)\right\|$ en fonction de $\mathcal{N}_\infty\left((f_n - f)_{|[\alpha,\beta]}\right)$.

Démonstration page 531

Remarque

L'hypothèse de convergence uniforme sur tout segment de I est capitale.

3 Dérivation d'une limite

Théorème 13

Supposons que les fonctions f_n soient de classe $\mathcal{C}^1$.

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f et si la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, alors :

- la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et :
$$\forall x \in I \quad f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x)\ ;$$
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Principe de démonstration. Appliquer le théorème de primitivation de la limite d'une suite de fonctions continues (le théorème 12) à la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration page 531

Attention Une limite uniforme d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ n'est pas en général de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$ converge uniformément vers la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ (*cf.* page 496).

On établit sans difficulté par récurrence le théorème suivant.

Théorème 14

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons que les fonctions f_n soient de classe $\mathcal{C}^p$. Si

- pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement ;
- la suite $\left(f_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$:

$$\forall x \in I \quad f^{(k)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(x).$$

Démonstration page 531

Point méthode

Supposons que les fonctions f_n soient de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Si pour tout $p \in \mathbb{N}$ la suite $\left(f_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in I \quad f^{(p)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(p)}(x).$$

IV Séries de fonctions

1 Les modes de convergence

Dans cette section, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans F.

Convergence simple

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ **converge simplement** si pour tout $x \in A$, la série $\sum u_n(x)$ converge et l'on note alors :

$$\begin{array}{rccc} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \ : & A & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x). \end{array}$$

Remarques

- Souvent on parle de la série de fonctions $\sum e_n(x)$, où $e_n(x)$ est une expression qui dépend d'une variable x. Par exemple, on parlera de la série de fonctions $\sum e^{-n^2x}$ sur $\mathbb{R}$. Il s'agit bien évidemment d'un abus. Il faut entendre par « *série de fonctions* $\sum e^{-n^2x}$ *sur* $\mathbb{R}$ » : la série de fonctions $\sum u_n$, où, pour tout entier naturel n, la fonction u_n est définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = e^{-n^2x}$. Cela étant, cet abus est à la fois très répandu et très pratique.
- Pour $a \in \mathbb{N}$, on note $\displaystyle\sum_{n\geqslant a} u_n$ la série où l'indexation commence à a.
- L'étude des suites de fonctions montre que certaines propriétés vérifiées par les u_n ne « passent pas à la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ » en général. Par exemple, si les u_n sont continues, la somme n'est pas toujours continue. Cependant, on peut démontrer que si les u_n sont des fonctions croissantes, alors la somme est croissante. De même si les fonctions sont convexes.

Convergence uniforme

Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. En appliquant à la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les définitions vues plus haut, on définit :

- la **convergence uniforme** de la série $\sum u_n$;
- la **convergence uniforme sur** $\boldsymbol{B}$ de la série $\sum u_n$;
- la **convergence uniforme au voisinage de** $\boldsymbol{a \in A}$ de la série $\sum u_n$;
- la **convergence uniforme au voisinage de tout point** de la série $\sum u_n$;
- la **convergence uniforme sur tout segment** de la série $\sum u_n$.

La proposition suivante est une simple reformulation de la définition de la convergence uniforme. Elle peut, bien entendu, s'adapter à tous les types, détaillés ci-dessus, de convergence uniforme sur des parties de A.

Proposition 15

La série $\sum u_n$ converge uniformément si, et seulement si :

- la série converge simplement et
- la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Exemples

1. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}\, x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$. En effet, pour $x \in [0,1]$, la suite $\left(\frac{1}{n}\, x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle. D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}\, x^n$ est convergente. Toujours d'après ce théorème, en notant $R_n(x)$ le reste d'ordre n de la série :
$$\forall x \in [0,1] \quad \left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{n+1} x^{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}\cdot$$
La convergence uniforme est ainsi démontrée.
2. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{x+n^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La série $\sum f_n$ converge simplement puisque, pour tout $x > 0$, on a $\dfrac{1}{x+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et que $\dfrac{1}{n^2}$ est le terme général positif d'une série convergente.
Montrons la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout entier naturel n, on a par définition :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 \leqslant R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{x+k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2},$$
et donc $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions bornées qui vérifie :
$$\mathcal{N}_\infty\left(R_n\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
ce qui démontre l'assertion.

Convergence normale

La convergence normale, lorsqu'elle est vérifiée, fournit un moyen simple et efficace pour établir la convergence uniforme d'une série.

Définition 4

La série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement** si

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est bornée et si
2. la série $\sum \mathcal{N}_\infty(u_n)$ est convergente.

Point méthode

Pour établir que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, il suffit d'exhiber une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que :

- la série $\sum \alpha_n$ converge ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in A \quad \big|u_n(x)\big| \leqslant \alpha_n.$$

Exemples

1. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nx}}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

   En effet, en notant f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}$, cela pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a immédiatement :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
   Puisque la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

2. La série $\sum\big(x(1-x)\big)^n$ converge normalement sur $[0,1]$.

   En effet la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ définie sur le segment $[0,1]$ est continue, positive. Une brève étude de f définie sur $[0,1]$ montre que son maximum est atteint en $\frac{1}{2}$ et vaut $\frac{1}{4}$. Par conséquent, pour tout entier n et $x \in [0,1]$, on a :
   $$0 \leqslant \big(x(1-x)\big)^n \leqslant \frac{1}{4^n}.$$
   La convergence de la série géométrique $\sum \frac{1}{4^n}$ assure la convergence normale sur $[0,1]$ de la série $\sum f^n$.

p.532

Exercice 19

1. Étudier la convergence (simple/normale/uniforme) sur $\mathbb{R}$ de :
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+x^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+x^2}.$$
2. Étudier la convergence (simple/uniforme) de $\sum x\,e^{-nx}$ (sur $\mathbb{R}_+$).

Définition 5

- La série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement sur** $B \subset A$ si la série de fonctions $\sum u_{n|_B}$ converge normalement.
- La série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement au voisinage de** $a \in A$ s'il existe une voisinage V de a tel que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur V.
- La série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement au voisinage de tout point de** A si elle converge normalement au voisinage de a, pour tout $a \in A$.
- La série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement sur tout segment** si la série de fonctions $\sum u_{n|_{[a,b]}}$ converge normalement pour tout $[a,b]$ inclus dans A.

Exemples

1. La série géométrique complexe $\sum z^n$ converge simplement sur $D_O(0,1)$. La convergence est normale au voisinage de tout point. En effet, il est clair que pour tout $r \in [0,1[$, la convergence est normale sur $D_F(0,r)$, puisque $|z^n| \leqslant r^n$ pour tout $z \in D_F(0,r)$. De plus, pour tout $z \in D_O(0,1)$, le disque $D_F\left(0, \frac{1+|z|}{2}\right)$ est un voisinage de z, ce qui assure la conclusion.
2. La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{1}{x+n^2}$ converge normalement au voisinage de tout point de $]0,+\infty[$.

   En effet, pour tout $x > 0$, l'intervalle $I_x = \left[\frac{x}{2}, +\infty\right[$ est un voisinage de x. De plus :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I_x \quad 0 \leqslant \frac{1}{t+n^2} \leqslant \frac{1}{x/2+n^2}.$$
   De la convergence de la série $\sum \frac{1}{x/2+n^n}$, qui est obtenue par comparaison aux séries de Riemann, on déduit la convergence normale de la série $\sum \frac{1}{n^2+t}$ sur I_x.

p.533

Exercice 20 Fonction ζ de Riemann

Montrer que la série $\sum \frac{1}{n^z}$ converge normalement au voisinage de tout point du demi-plan $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\right\}$

Convergence normale et convergence uniforme

Proposition 16

- Si la série $\sum u_n$ converge normalement sur A, alors, pour tout $a \in A$, la série $\sum u_n(a)$ est absolument convergente.
- Si la série $\sum u_n$ converge normalement au voisinage de $a \in A$, alors la série $\sum u_n(a)$ est absolument convergente.

Principe de démonstration. Utiliser le théorème de comparaison. Démonstration page 533

Théorème 17

- Si la série $\sum u_n$ converge normalement sur A, alors elle converge uniformément sur A.
- Si la série $\sum u_n$ converge normalement au voisinage de $a \in A$, alors elle converge uniformément au voisinage de a.

Démonstration page 533

Attention Une série de fonctions peut converger uniformément sur A sans pour autant converger normalement sur A.

Exemple La série $\sum \frac{(-1)}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ (*cf.* page 506), mais elle ne converge pas normalement sur $[0,1]$. En effet, en notant, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n} x^n$ définie sur $[0,1]$, on a $\mathcal{N}_\infty(u_n) = \frac{1}{n}$ et la série harmonique est divergente.

Point méthode

Pour démontrer la convergence uniforme d'une série, on commence par examiner la convergence normale.

p.534 **Exercice 21** Étudier les convergences simple, normale et uniforme sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\sum x^n(1-x)$.

Exemple Étudions la nature de la convergence de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n}$ sur l'intervalle $]0,2\pi[$.

Comme il est clair que $\displaystyle\sup_{x\in]0,2\pi[} \left|\frac{\cos(nx)}{n}\right| = \frac{1}{n}$, la divergence de la série harmonique implique que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n}$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

Posons, pour $x \in]0,2\pi[$, la somme $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$. Puisque $\exp(ix) \neq 1$, le calcul donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(x) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \frac{\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0,2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|S_n(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}$.

Par ailleurs, toujours pour $x \in]0,2\pi[$ et $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(nx)}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\big(S_n(x) - S_{n-1}(x)\big)$$
$$= \sum_{n=1}^{N-1} \left(S_n(x) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) + \frac{S_N(x)}{N} - 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons u_n la fonction définie sur $]0,2\pi[$ par $u_n(x) = S_n(x)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$. Montrons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, et donc uniformément, sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, pour tout $\alpha \in]0,\pi[$. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ est décroissante sur $]0,\pi]$, par symétrie :

$$\forall x \in [\alpha, 2\pi - \alpha] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \big|S_n(x)\big| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Il s'ensuit que :

$$\forall x \in [\alpha, 2\pi - \alpha] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \big|u_n(x)\big| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Par ailleurs, la série télescopique $\sum \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est convergente ; par théorème la série $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$. Par ailleurs, il est clair que la suite de fonctions $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$. Par suite la série de fonctions $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ converge uniformément sur tout segment de la forme $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ et donc elle converge uniformément au voisinage de tout point de $]0,2\pi[$.

Point méthode

Pour démontrer que suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, il est souvent pratique de démontrer que la série télescopique $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge uniformément.

p.534

Exercice 22 Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad f_{n+1}(x) = g(x) + \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue f vérifiant :

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = g(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2 Limite sous le signe $\sum$

Continuité

Proposition 18

Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur A et si toutes les fonctions u_n sont continues sur A, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur A.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la proposition 6 de la page 501. □

Exemple La fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

En effet, en notant u_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \left|u_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{n^2+1}.$$

Comme $\frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$, par comparaison aux séries de Riemann, la série numérique $\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge et par conséquent la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. Puisque les fonctions u_n sont continues, la proposition 18 permet d'affirmer que f est continue.

Théorème 19

Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément au voisinage de $a \in A$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue en a, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue en a.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème 7 de la page 501. □

Corollaire 20

Supposons que les fonctions u_n soient continues. Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément au voisinage de tout point, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue.

Exemple La fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n}$ est définie sur $I =]0, 2\pi[$. Nous avons vu que la série $\sum \dfrac{\cos(nx)}{n}$ converge uniformément au voisinage de tout point de $]0, 2\pi[$ (*cf.* page 509). Puisque les fonctions $x \mapsto \frac{\cos(nx)}{n}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $]0, 2\pi[$.

p.535

Exercice 23 Démontrer que la fonction $\zeta : H \to \mathbb{C}$ définie par $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^z}$ est continue sur $H = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\right\}$.

p.535 **Exercice 24** Démontrer que exp : $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{M^k}{k!} \end{array}$ est continue.

p.536 **Exercice 25** Démontrer que exp : $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ a & \longmapsto & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a^k}{k!} \end{array}$ est continue.

Interversion somme/limite

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 10 de la page 502.

Théorème 21

Si la série $\sum u_n$ converge uniformément au voisinage de a adhérent à A, et si pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n a une limite finie ℓ_n en a alors, la série $\sum \ell_n$ converge et :

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} u_n(x)\right)$$

Exemple Nous avons vu page 509 que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n}$ ne convergeait pas normalement sur l'intervalle $]0, 2\pi[$ mais qu'elle convergeait uniformément au voisinage de tout point de $]0, 2\pi[$.
Le théorème précédent montre qu'elle ne converge pas uniformément sur $]0, 2\pi[$, sinon elle convergerait uniformément au voisinage de 0 et, par passage à la limite, la série $\sum \frac{1}{n}$ convergerait.

p.537 **Exercice 26** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2+n^2}$.

p.537 **Exercice 27** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{x+n^2}$.

3 Intégration terme à terme sur un segment

Dans la suite de cette section, I est un intervalle d'intérieur non vide et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans F.

Théorème 22

Soit $a \in I$. Supposons que les fonctions u_n soient continues.
Si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de I, alors

$$\forall x \in I \quad \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème 12 de la page 504. □

Corollaire 23

Supposons que les fonctions u_n soient continues sur le segment $[a,b]$. Si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors

$$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} u_n.$$

p.537

Exercice 28 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\sum a_n$ soit convergente.

1. Démonter que l'application f définie sur $[0,2\pi]$ par $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin(kx)$ est continue.
2. Calculer $\int_{[0,2\pi]} f$.

p.537

Exercice 29 Soit $(z,r) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^*$, avec $r \neq |z|$.

1. Pour tout $t \in [0,2\pi]$, exprimer $\dfrac{1}{z - re^{it}}$ sous la forme de la somme d'une série géométrique.
2. Calculer $I(r,z) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z - re^{it}}$

4 Dérivation terme à terme

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 13 de la page 504.

Théorème 24 (dérivation terme à terme)

Supposons que les fonctions u_n soient de classe $\mathcal{C}^1$. Si

- la série $\sum u_n$ converge simplement,
- la série $\sum u'_n$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n.$$

Exemples

1. Pour tout $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. On a :

$$\forall x > 1 \quad \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}.$$

En effet, posons $u_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$. Nous savons que la série de fonction $\sum u_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$. De plus, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$. Pour tout réel $a > 1$, démontrons la convergence normale de la série $\sum u'_n$ sur $[a,+\infty[$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leqslant -u'_n(x) = \frac{\ln n}{n^x} \leqslant \frac{\ln n}{n^a}\cdot$$

De plus, au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{\ln n}{n^a} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^b}\right)$ pour tout $a > b > 1$. En choisissant un tel réel b, par comparaison aux séries de Riemann, la série numérique $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ est convergente. Cela nous permet d'affirmer la convergence normale de la série $\sum u'_n$ sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a > 1$, et donc qu'il y a convergence uniforme sur tout segment de $]1,+\infty[$. La conclusion suit.

2. La fonction définie sur $]0,2\pi[$ par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,2\pi[$. En effet, en posant $u_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in]0,2\pi[\quad |u_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2},$$

ce qui démontre, du fait de la convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$, la convergence normale (et donc simple) de la série de fonctions $\sum u_n$.

Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour $x \in]0,2\pi[$, on a $u'_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n}$. Nous avons vu que la série $\sum u'_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0,2\pi[$ (*cf.* page 509). Par conséquent, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,2\pi[$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \exp(tM) \end{array}$, où, rappelons le, la fonction exp est définie par :

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour cela, notons u_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u_k(t) = t^k \frac{M^k}{k!}$. Les fonctions u_k sont de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $u'_k(t) = Mu_{k-1}$ et $u'_0 = 0$, ceci pour $t \in \mathbb{R}$. En notant $v_k : N \mapsto \frac{N^k}{k!}$, nous avons vu que la série $\sum v_k$ converge normalement au voisinage de tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (*cf.* exercice 24 de la page 512). Il s'ensuit que la série $\sum u_k$ converge normalement au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$. De même, en utilisant la continuité du produit matriciel, la série $\sum u'_k = \sum_{k \geqslant 1} Mu_{k-1}$ converge normalement au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$.

Par conséquent, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = Mf$. On peut retenir ce résultat sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tM) = M \exp(tM).$$

Rappelons que E est un espace vectoriel de dimension finie. Comme à l'exercice 25 de la page 512, on déduit de ce qui précède que l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{L}(E), \\ t & \longmapsto & \exp(ta) \end{array}$ où $a \in \mathcal{L}(E)$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp(ta) = a\,\exp(ta).\right.$$

Le théorème 14 de la page 504 se traduit pour les séries comme suit.

Théorème 25 (dérivation terme à terme)

Supposons que les fonctions u_n soient de classe $\mathcal{C}^p$ avec $p \geqslant 1$. Si :

- pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge simplement,
- la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur tout segment de I,

alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout $k \in [\![0, p]\!]$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}.$$

Point méthode

Pour démontrer que la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut chercher à démontrer que :

- toutes les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$;
- pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément au voisinage de tout point.

Dans ce cas, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}.$$

Exemple La fonction $\zeta : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons u_n la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$.
Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x > 1$ on a :

$$u_n^{(p)}(x) = (-1)^p \frac{\ln^p n}{n^x}.$$

Soit $1 < b < a$. Puisque $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \geqslant a \quad 0 \leqslant \frac{\ln^p n}{n^x} \leqslant \frac{\ln^p n}{n^a}.$$

Par ailleurs, par croissance comparées, $\frac{\ln^p n}{n^a} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^b}\right)$.
La convergence de la série $\sum \frac{1}{n^b}$, donne par comparaison que la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Puisque tout $x \in]1, +\infty[$ a un voisinage de cette forme, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément au voisinage de tout point.
En conclusion, la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]1, +\infty[\quad \zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln^p n}{n^x}.$$

En particulier, la fonction ζ est décroissante, convexe, mais ces deux propriétés peuvent être établies par des méthodes plus élémentaires (*cf.* page 505).

p.538

Exercice 30 Montrer que la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ sur $\mathbb{R}_+$ est continue. Démontrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Est-elle dérivable en 0 ?

p.540

Exercice 31 Démontrer que la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5 Comportement asymptotique

Dans cette section, les fonctions u_n sont à valeurs réelles.
Notons $]\alpha, \beta[$ l'intérieur de I. Il est fréquent de chercher le comportement asymptotique de $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ au voisinage de α ou β (limites, équivalents, etc.) Il s'agit là de problèmes qui peuvent être extrêmement délicats. Il existe cependant quelques situations « typiques ».

Équivalent à l'aide d'une autre série

Une première méthode consiste à chercher un équivalent sous la forme de somme de séries.

Point méthode

S'il existe une suite de fonctions $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I telle que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \underset{\beta}{\sim} v_n$;
- la série $\sum v_n$ est convergente au voisinage de β et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ admet un équivalent « simple » g au voisinage de β,

on peut chercher à démontrer que $f \underset{\beta}{\sim} g$. Pour cela, on pourra revenir à la définition de l'équivalence et utiliser le théorème de la double limite, appliqué à la série de fonctions $\sum \frac{u_n}{g}$.

p.540

Exercice 32 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x}$.
Donner un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$.

Comparaison série/intégrale

Une seconde méthode possible consiste à comparer avec une intégrale.
Rappelons que si $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue par morceaux décroissante, alors la série $\sum \left(\varphi(n) - \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right)$ est convergente (*cf.* page 409). Détaillons à nouveau. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant \varphi(n) - \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} (\varphi(n) - \varphi(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(n) - \varphi(n+1).$$

La fonction φ étant décroissante positive, elle admet une limite en $+\infty$, celle-ci ne peut être que nulle. Par suite la série télescopique $\sum (\varphi(n) - \varphi(n+1))$ est convergente et :

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\varphi(n) - \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (\varphi(n) - \varphi(n+1)) = \varphi(0).$$

Supposons de plus que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente (voir le corollaire 13 de la page 409). Dans ces conditions, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{N+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

La convergence de la série $\sum \varphi(n)$ en découle et :

$$\boxed{0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(n) - \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(0).}$$

Point méthode

Soit $u : I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction telle que pour tout $x \in I$, l'application partielle $t \mapsto u(x,t)$ soit décroissante et l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

Pour obtenir un équivalent en β de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u(x,n)$ on pourra :

1. établir la majoration $\left| f(x) - \int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant u(x,0)$;
2. démontrer que $u(x,0) = \mathrm{o}\left(\int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t \right)$ au voisinage de β.

p.540

Exercice 33

Suite de l'exercice 32. Donner un équivalent simple de f au voisinage de 0.

V Approximation uniforme

Dans la suite a et b sont deux réels, avec $a < b$.

Nous présentons dans cette section deux théorèmes d'approximation uniforme.

Définition 6

Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{B}(I,F)$. On dit que $f \in \mathcal{B}(I,F)$ peut être **approchée uniformément** par des éléments de $\mathcal{F}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{N}_\infty(f-g) \leqslant \varepsilon$.

Proposition 26

Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{B}(I,F)$ et $f \in \mathcal{F}(I,F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) La fonction f peut être approchée uniformément par des éléments de $\mathcal{F}$.

(ii) La fonction f est la limite uniforme d'une suite à valeurs dans $\mathcal{F}$.

(iii) La fonction f est un élément de $\overline{\mathcal{F}}$.

Démonstration page 541

1 Approximation par des fonctions en escalier

Lors de la construction de l'intégrale des fonctions continues par morceaux en première année, il a été établi que toute fonction continue par morceaux à valeurs dans $\mathbb{K}$ peut être approchée par des fonctions en escalier. Nous allons le généraliser à des fonctions vectorielles.

En termes topologiques, ce résultat signifie que l'ensemble $\mathcal{E}([a,b],F)$ des fonctions en escalier de $[a,b]$ dans F est dense dans $\Big(\mathcal{CM}([a,b],F),\mathcal{N}_\infty\Big)$.

Théorème 27

Soit f une fonction de $\mathcal{CM}([a,b],F)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $g \in \mathcal{E}([a,b],F)$ telle que $\mathcal{N}_\infty(f-g) \leqslant \varepsilon$.

Principe de démonstration. Dans le cas où f est continue, utiliser l'uniforme continuité pour construire une fonction g telle que $\mathcal{N}_\infty(f-g) \leqslant \varepsilon$.
Dans le cas où f est continue par morceaux, écrire $f = f_1 + \varphi$, avec f_1 continue et φ est en escalier.

Démonstration page 541

2 Approximation par des polynômes

Le théorème de Weierstrass établit que toute fonction continue à valeurs dans $\mathbb{K}$ définie sur un segment peut être approchée uniformément par des fonctions polynomiales. On donne ici une démonstration, non exigible, due à Henri Lebesgue. D'autres sont proposées en exercice. La démonstration repose sur plusieurs lemmes donnés sous forme d'exercices.

Définition 7

Une fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est **affine par morceaux** s'il existe une subdivision $\sigma = (u_0,\dots,u_n)$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, la restriction de f à $]u_i,u_{i+1}[$ soit une fonction affine. La subdivision σ est dite **adaptée** à f.

p.542

Exercice 34 Démontrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ peut être approchée uniformément par des fonctions affines par morceaux continues.

p.543

Exercice 35 On note, pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f_a : t \mapsto |t-a|$ définie sur $[0,1]$. Démontrer que la famille $(f_a)_{a\in[0,1]}$ est génératrice de l'espace des fonctions continues affines par morceaux définies sur $[0,1]$.

p.543

Exercice 36 Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynomiales sur $[0,1]$ définies par

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1] & P_0(t) = 0 \\ \forall t \in [0,1] & \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1}(t) = \frac{1}{2}\left(P_n(t)^2 + t\right) \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
2. Démontrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.
   Indication. Démontrer que les fonctions P_n et $P_{n+1}-P_n$ sont croissantes.
3. Démontrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[-1,1]$.

p.544

Exercice 37 Démontrer que si l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est dense dans $\left(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K}),\mathcal{N}_\infty\right)$, alors l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a,b]$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est dense dans $\left(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),\mathcal{N}_\infty\right)$.

Théorème 28 (de Weierstrass)

Soit a et b deux réels, avec $a<b$. Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Démonstration (non exigible) page 545

Remarque En d'autres termes, l'ensemble des fonctions polynomiale sur $[a,b]$ est dense dans l'espace vectoriel normé $\Big(\mathcal{C}(a,b),\mathbb{R}),\mathcal{N}_\infty\Big)$.

p.545

Exercice 38 Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que f est la fonction nulle.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\,; \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f qui vaut 1 en 1 et qui est nulle sur $[0,1[$.

Exercice 2 Il est clair que $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit $x \in]0,+\infty[$. On constate que la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. En effet, lorsque $n \geqslant \lceil \frac{1}{x} \rceil$, on a $x \geqslant \frac{1}{n}$ et donc $f_n(x) = \frac{1}{x}$.
Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0\,; \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

Exercice 3 Puisque que la convergence uniforme ne dépend pas du choix de la norme sur E, on peut fixer arbitrairement une norme.

L'application $\|\ \|_\infty$ définie pour tout $x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$ par $\|x\|_\infty = \max_{i\in[\![1,p]\!]} \big\{|x_i|\big\}$ est une norme sur F. On considère la norme $\mathcal{N}_\infty$ sur $\mathcal{B}(A,F)$ associée à $\|\ \|_\infty$.

- Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g alors, il existe un rang à partir duquel la fonction $g - f_n$ est bornée. À partir d'un tel rang, pour $i \in [\![1,p]\!]$:

$$\forall x \in A \quad \big|g_i(x) - f_{n,i}(x)\big| \leqslant \big\|g(x) - f_n(x)\big\|_\infty \leqslant \mathcal{N}_\infty(g - f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  Par conséquent, les suites $(f_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers g_i.
- Supposons que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ la suite $(f_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g_i. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, il existe un rang n_i tel que :

$$\forall x \in A \quad \forall n \geqslant n_i \quad \big|f_{n,i}(x) - g_i(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

  Ainsi, en posant $n_0 = \max\{n_1,\dots,n_p\}$, on a :

$$\forall x \in A \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \big\|f_n(x) - g(x)\big\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

  Par suite, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g.

Exercice 4 Puisque $\sin' = \cos$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction sinus sur $\mathbb{R}$ donne :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |\sin y - \sin x| \leqslant |y - x|\,.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \big|f_n(x) - \sin(x)\big| = \Big|\sin\Big(x + \frac{1}{n}\Big) - \sin(x)\Big| \leqslant \frac{1}{n}.$$

En conclusion : la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $\sin$.

Exercice 5 Il est facile de vérifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x \in [0,1] \quad f_n'(x) = nx^{n-1}\left(1 - \frac{n+1}{n}\,x\right).$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↗	$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	↘	0

On déduit du tableau de variations que :

$$\mathcal{N}_\infty(f_n) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Puisque $0 \leqslant \frac{n}{n+1} \leqslant 1$, on a $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leqslant 1$ et donc :

$$0 \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leqslant \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 6 À l'exercice 2, nous avons démontré que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] ; \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n}, +\infty\right[, \end{cases}$$

converge simplement vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1/x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f(x) - f_n(x) = \begin{cases} \frac{1-n^2x^2}{x} & \text{si } x \in \left]0, \dfrac{1}{n}\right[; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0^+}\big(f(x) - f_n(x)\big) = +\infty$ et donc la fonction $f - f_n$ n'est pas bornée. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément vers f.

Exercice 7

- Étudions la convergence simple.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(0) = 0$ et donc $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé, d'après les théorèmes généraux :

  $$\frac{nx}{1+n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx}{n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  Il s'ensuit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

- Étudions la convergence uniforme.
  En posant g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la relation $f_n(x) = g(nx)$. En particulier :
  $$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = g(1) = \frac{1}{2}\cdot$$
  La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément vers 0.

Exercice 8

1. - Étudions la convergence simple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a selon les théorèmes généraux $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^2$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto x^2$.
   - On a $\big|f_n(x) - f(x)\big| = \big|\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\big|$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. En particulier :
   $$\big|f_n(n^2) - f(n^2)\big| = \big|2n + \frac{1}{n^2}\big| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
   et donc la convergence n'est pas uniforme.
2. - Étudions la convergence simple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a selon les théorèmes généraux $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^2$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto x^2$.
   - On a $\big|f_n(x) - f(x)\big| = \big|2\frac{xe^{-x}}{n} + \frac{e^{-2x}}{n^2}\big|$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
   L'étude de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g : x \mapsto x\,e^{-x}$ montre que
   $$0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-1}.$$
   Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
   $$\big|f_n(x) - f(x)\big| = 2\,\frac{xe^{-x}}{n} + \frac{e^{-2x}}{n^2} \leqslant 2\,\frac{e^{-1}}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
   et donc la convergence est uniforme.

Proposition 2 Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de fonctions définies sur A à valeurs dans F convergeant uniformément respectivement vers f et g et si λ et μ sont deux scalaires, alors, pour tout $x \in A$ et n suffisamment grand :
$$\begin{aligned}\big\|\big(\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)\big) - \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\big\| &= \|\lambda\big(f_n(x) - f(x)\big) + \mu\big(g_n(x) - g(x)\big)\| \\ &\leqslant |\lambda|\,\|f_n(x) - f(x)\| + |\mu|\,\|g_n(x) - g(x)\| \\ &\leqslant |\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f_n - f) + |\mu|\,\mathcal{N}_\infty(g_n - g).\end{aligned}$$
Ainsi, pour n suffisamment grand, la fonction $(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)$ est bornée et :
$$\mathcal{N}_\infty\big((\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
En d'autres termes la suite $\big(\lambda f_n + \mu g_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$.

Exercice 9 Posons, pour tout entier n non nul, la fonction $f_n : x \mapsto x + \frac{1}{n+1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Il est facile de justifier que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers l'identité de $\mathbb{R}$. En revanche la suite $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément d'après l'exercice 8.

Proposition 3 Supposons que les fonctions f_n soient bornées et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f.

On sait alors qu'il existe un entier n_0 tel que $f-f_{n_0}$ est bornée et donc, du fait que f_{n_0} est bornée, $f=(f-f_{n_0})+f_{n_0}$ est bornée. Il vient alors immédiatement de la définition de la convergence uniforme que f est la limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace vectoriel normé $\big(\mathcal{B}(A,F),\mathcal{N}_\infty\big)$.

Exercice 10

1. La fonction f est impaire, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\frac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
On en déduit le tableau de variations ci-dessous.

x	0		$3^{-1/4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$3^{3/4}/4$	↘	0

Par conséquent $\mathcal{N}_\infty(f)=\frac{3^{3/4}}{4}$.

2. • La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
En effet, puisque $\lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{-\infty} f=0$, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a :
$$f_n(x)=f(nx)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$
Par ailleurs, $f_n(0)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et donc $f_n(0)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Par suite, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
• Il est immédiat que $\mathcal{N}_\infty(f_n)=\mathcal{N}_\infty(f)=\frac{3^{3/4}}{4}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. La convergence n'est donc pas uniforme.

Exercice 11

1. Si $(f,g)\in\mathcal{B}(A,\mathbb{K})$, alors :
$$\forall x\in A\quad \big|f(x)g(x)\big|=\big|f(x)\big|\,\big|g(x)\big|\leqslant\mathcal{N}_\infty(f)\,\mathcal{N}_\infty(g),$$
et donc fg est une fonction bornée et :
$$\mathcal{N}_\infty(f\,g)\leqslant\mathcal{N}_\infty(f)\,\mathcal{N}_\infty(g).$$
Par ailleurs, du fait que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\big(\mathcal{B}(A,\mathbb{K}),\mathcal{N}_\infty\big)$, la suite $\big(\mathcal{N}_\infty(f_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par une constante M.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $f_ng_n-fg=f_n(g_n-g)+g(f_n-f)$ et donc :
$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\infty(f_ng_n-fg)&\leqslant\mathcal{N}_\infty\big(f_n(g_n-g)\big)+\mathcal{N}_\infty\big(g(f_n-f)\big)\\&\leqslant M\mathcal{N}_\infty(g_n-g)+\mathcal{N}_\infty(g)\,\mathcal{N}_\infty(f_n-f)\end{aligned}$$
Puisque $\mathcal{N}_\infty(g_n-g)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $\mathcal{N}_\infty(f_n-f)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on obtient :
$$0\leqslant\mathcal{N}_\infty(f_ng_n-fg)\leqslant M\mathcal{N}_\infty(g_n-g)+\mathcal{N}_\infty(g)\,\mathcal{N}_\infty(f_n-f)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$
En conclusion, $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg.

2. Par définition d'une algèbre, le produit de F est bilinéaire. Ainsi, puisque F est de dimension finie, il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall (y, y') \in F^2 \quad \|yy'\| \leqslant C\|y\|\,\|y'\|.$$

Quitte à remplacer la norme $\|\ \|$ par l'application $x \mapsto C\|x\|$, qui est également une norme sur F, on peut supposer $C = 1$. On en déduit que si $(f, g) \in \mathcal{B}(A, F)$, alors :

$$\mathcal{N}_\infty(f\,g) \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)\,\mathcal{N}_\infty(g).$$

On adapte alors le raisonnement ci-dessus pour démontrer que $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg.

Proposition 4 Supposons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur tout segment de I. Soit $x \in I$.

- Si $x \in \overset{\circ}{I}$, alors il existe $h > 0$ tel que $[x-h, x+h] \subset I$. Par suite, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[x-h, x+h]$, qui est un voisinage de x.
- Si x est l'extrémité gauche de I, puisque $x \in I$, il existe $h > 0$ tel que $[x, x+h] \subset I$, et donc la la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[x, x+h]$, qui est un voisinage de x dans I.
- Il en est de même dans l'éventualité où x est l'extrémité droite de I.

Exercice 12

- Étudions la convergence simple. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, d'après les théorèmes généraux :

$$f_n(x) = \frac{nx^2+1}{nx+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx^2}{nx} \underset{n\to+\infty}{\sim} x.$$

Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$.

- Étudions la convergence uniforme. Pour cela, étudions, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x \mapsto x - f_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $g_n(x) = \frac{x-1}{nx+1}$.
La fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $g_n'(x) = \frac{n+1}{(nx+1)^2}$.
On en déduit la tableau de variations de g_n.

x	0		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	
g_n	-1	↗	$1/n$

Il s'ensuit, pour tout entier $n > 0$, que g_n est bornée et que

$$\mathcal{N}_\infty(f_n - f) = \mathcal{N}_\infty(g_n) = 1.$$

La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

- Montrons qu'il y a convergence uniforme au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+^*$. Pour cela, il suffit d'établir qu'il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. En effet pour tout $x \in]0, +\infty[$ l'intervalle $\left[\frac{x}{2}, +\infty\right[$ est un voisinage de x.

Soit donc $a > 0$. L'étude précédente montre, pour tout entier $n > 0$, que g_n est bornée sur $I = [a, +\infty[$ et

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} \left|g_n(x)\right| = \max\left\{\left|g_n(a)\right|, \frac{1}{n}\right\} = \max\left\{\frac{|a-1|}{na+1}, \frac{1}{n}\right\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En conclusion, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 13

1. À partir d'un certain rang, la fonction $f - f_n$ est bornée. À partir d'un tel rang :

   $$0 \leqslant \left\|f_n(x_n) - \ell\right\| = \left\|f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - \ell\right\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f) + \left\|f(x_n) - \ell\right\|.$$

   Par composition des limites, on a $\left\|f(x_n) - \ell\right\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, par convergence uniforme :

   $$0 \leqslant \left\|f_n(x_n) - \ell\right\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f) + \left\|f(x_n) - \ell\right\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   La conclusion est alors immédiate.
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ introduite à l'exercice 10 de la page 498 converge simplement vers la fonction nulle, mais pas uniformément. Toujours d'après l'étude menée lors de cet exercice :

   $$f_n\left(\frac{1}{n\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{3^{3/4}}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n\sqrt[4]{3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   En conclusion, l'hypothèse de convergence simple n'est pas suffisante pour établir le résultat de la question précédente.

   Remarque On peut se passer de l'étude de la fonction pour établir le résultat. Il suffit de remarquer que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ avec $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Lemme 5 Soit $\varepsilon > 0$. L'hypothèse de convergence uniforme donne l'existence d'un entier n tel que $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Fixons un tel entier.

Par continuité de f_n en a, il existe un réel $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in A$ vérifiant $\|x - a\| \leqslant \eta$, on a $|f_n(x) - f_n(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

Par conséquent, pour tout $x \in A$ vérifiant $\|x - a\| \leqslant \eta$, on a :

$$\begin{aligned}\left\|f(x) - f(a)\right\| &= \left\|f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)\right\| \\ &\leqslant \left\|f(x) - f_n(x)\right\| + \left\|f_n(x) - f_n(a)\right\| + \left\|f_n(a) - f(a)\right\| \\ &\qquad\qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant \mathcal{N}_\infty(f - f_n) + \left\|f_n(x) - f_n(a)\right\| + \mathcal{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

La continuité de f en a est donc démontrée.

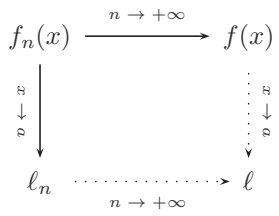
Exercice 14

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in A$, on a :
$$\big\|f_n(x) - f_n(y)\big\| \leqslant k\|x - y\|.$$
En passant à la limite dans cette dernière inégalité, il vient que pour tout $(x, y) \in A$:
$$\big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant k\|x - y\|.$$
Par suite f est k-lipschitzienne.

   Remarque La convergence simple suffit.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$. Nous avons vu que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$, qui n'est pas lipschitzienne. Cependant, les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis, elles sont lipschitziennes.
3. Soit $\varepsilon > 0$.
Par convergence uniforme, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N}_\infty(f - f_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
Fixons n_0. Puisque f_{n_0} est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que :
$$\forall (x, y) \in A^2 \quad \Big(\|y - x\| \leqslant \eta \Longleftrightarrow \big|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\Big).$$
Par conséquent, pour tout $(x, y) \in A^2$ tel que $\|y - x\| \leqslant \eta$, on a :
$$\begin{aligned}\big\|f(x) - f(y)\big\| &\leqslant \big\|f(x) - f_{n_0}(x)\big\| + \big\|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\big\| + \big\|f_{n_0}(y - f(y)\big\| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$
Par suite, f est uniformément continue.

Lemme 9 On peut illustrer la situation à l'aide du schéma ci-dessous.



Par hypothèse les flèches pleines sont données et il s'agit de démontrer que si une flèche en pointillé est valable, alors l'autre l'est.

Afin d'unifier la démonstration, on dira que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $[\alpha, +\infty[\subset V$. On définit de manière analogue un voisinage de $-\infty$.

- Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
Pour n suffisamment grand, on a :
$$\forall x \in A \quad \big\|f_n(x) - f(x)\big\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f).$$

En faisant tendre x vers a dans cette inégalité à n fixé, il vient :

$$\big\|\ell_n - \ell\big\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f).$$

Par convergence uniforme, on a :

$$0 \leqslant \big\|\ell_n - \ell\big\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = \ell$.

- Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = \ell$.

  Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un entier n_0 tel que :

  $$\forall n \geqslant n_0 \quad \|\ell_n - \ell\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

  Par définition de la convergence uniforme, il existe un entier n_1 tel que :

  $$\forall n \geqslant n_1 \quad \mathcal{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

  Posons $n = \max\{n_0, n_1\}$. Puisque $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \ell_n$, il existe un voisinage V de a tel que :

  $$\forall x \in V \cap A \quad \big\|f_n(x) - \ell_n\big\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

  Ainsi, pour $x \in V \cap A$, on a :

  $$\begin{aligned}\big\|f(x) - \ell\big\| &= \big\|\big(f(x) - f_n(x)\big) + \big(f_n(x) - \ell_n\big) + \big(\ell_n - \ell\big)\big\| \\ &\leqslant \mathcal{N}_\infty(f - f_n) + \big\|f_n(x) - \ell_n\big\| + \|\ell_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

  Par suite, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Théorème 10

- Montrons que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il existe n_0 tel que la fonction $f_n - f_{n_0}$ est bornée pour $n \geqslant n_0$.

  En faisant tendre x vers a dans l'inégalité $\big\|f_n(x) - f_{n_0}(x)\big\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f_{n_0})$, il vient que :

  $$\|\ell_n - \ell_{n_0}\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f_{n_0}).$$

  La suite $(\mathcal{N}_\infty(f_n - f_{n_0}))_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, donc bornée, $\big(\|\ell_n - \ell_{n_0}\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il s'ensuit que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- Le théorème de Bolzano-Weierstrass donne l'existence d'une extraction φ et d'un $\ell \in F$ tels que $\ell_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. En appliquant le lemme 9 de la page 501 à la suite $\big(f_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f, il vient que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
- Puisque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, le lemme 9 de la page 501 donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = \ell$. Cela termine la démonstration.

Exercice 15 Posons, pour tout entier n, la fonction $f_n : \begin{array}{ccc}[0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n.\end{array}$

Pour tout $a \in [0,1[$, on a $\sup\limits_{x\in[0,a]} \big|f(x)\big| = a^n$. Il s'ensuit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément au voisinage de tout point vers la fonction nulle. Par ailleurs

- pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = 1$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\lim\limits_{x\to 1} f_n(x)\Big) = 1$;
- pour $x \in [0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, et donc $\lim\limits_{x\to 1}\Big(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\Big) = 0$.

Exercice 16

- Supposons que $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n,p} = \alpha_n$ uniformément par rapport n. Cela signifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_0 \geqslant 0 \quad \forall p \geqslant p_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n,p} - \alpha_n| \leqslant \varepsilon.$$

  En d'autres termes, en posant $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$ et en introduisant pour $p \in \mathbb{N}$ les applications :

$$f_p : \begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \longrightarrow & F \\ n & \longmapsto & u_{n,p}\end{array} \qquad \text{et} \qquad f : \begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \longrightarrow & F \\ n & \longmapsto & \alpha_n\end{array}$$

  les hypothèses que nous avons sont :
  - ∗ la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f ;
  - ∗ pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $f_p(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta_p$.

  Ainsi, d'après le théorème de la double limite, la suite $(\beta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et :

$$\lim_{p\to+\infty} \beta_p = \lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n.$$

  Notons ℓ cette limite commune.
- Par convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$f_n(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} f(n),$$

  cf. l'exercice 13 de la page 500. En d'autres termes, $u_{n,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 11 Puisque les fonctions f_n sont continues et que la convergence est uniforme, la fonction f est continue (*cf.* le théorème 8 de la page 501). Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est définie.

Pour tout entier n on a, par convergence uniforme :

$$\left\|\int_{[a,b]} (f_n - f)\right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f_n - f\| \leqslant \int_{[a,b]} \mathcal{N}_\infty(f_n - f) = (b-a)\,\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par conséquent :

$$\left\|\int_{[a,b]} f_n \int_{[a,b]} f\right\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et la conclusion en découle.

Exercice 17

1. La fonction $x \mapsto x^n(1-x)$ est continue sur le segment $[0,1]$. Un calcul simple donne :
$$I_n = \int_0^1 \left(x^n - x^{n+1}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^{n+1} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$
et donc $I_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.
2. Posons $f_n : x \mapsto n^3 x^n(1-x)$.
Les fonctions f_n sont continues. Pour tout $x \in]0,1[$, par croissances comparées, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus on a $f_n(0) = f_n(1) = 0$. Par conséquent la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. Cependant par linéarité :
$$\int_{[0,1]} f_n = \frac{n^3}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 18

1. Supposons que la fonction f soit continue par morceaux. Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_{[0,1]} f$ est définie. Pour tout entier n on a :
$$0 \leqslant \left\| \int_{[0,1]} (f_n - f) \right\| \leqslant \int_{[0,1]} \|f_n - f\|.$$
Puisque la convergence est uniforme :
$$0 \leqslant \int_{[0,1]} \|f_n - f\| \leqslant \int_{[0,1]} \mathcal{N}_\infty(f_n - f) = \mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
par conséquent :
$$\left\| \int_{[0,1]} (f_n - f) \right\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
et la conclusion en découle.
2. Les $1/k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$ sont des points de discontinuité pour g. Par conséquent, g ayant une infinité de points de discontinuité, la fonction g n'est pas continue par morceaux sur le segment $[0,1]$.
3. Posons $f = g$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :
$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]1/n, 1] \,; \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1/n]. \end{cases}$$
Il est facile d'établir que $0 \leqslant f(x) \leqslant 1/n$, pour tout $x \in [0,1/n]$. On en déduit, en distinguant les cas $x \leqslant 1/n$ et $x > 1/n$, que pour tout $x \in [0,1]$:
$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \frac{1}{n}.$$
Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est en escalier, donc continue par morceaux.

En conclusion, lorsqu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{CM}\big([a,b]\,K\big)$ converge uniformément vers une fonction $f\in\mathcal{F}\big([a,b]\,K\big)$, l'égalité $\displaystyle\int_{[0,1]} f=\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]} f_n$ n'a pas toujours de sens.

Théorème 12 Par convergence uniforme sur tout segment de I, la fonction f est continue (*cf.* le théorème 8 de la page 501). Soit $[\alpha,\beta]$ un segment inclus dans I. On peut supposer, sans perte de généralité, que $a\in[\alpha,\beta]$. Pour tout entier n et $x\in[a,\beta]$:

$$\begin{aligned}\big\|\Phi_n(x)-\Phi(x)\big\|&=\left\|\int_a^x\big(f_n(t)-f(t)\big)\,\mathrm{d}t\right\|\\&\leqslant(x-a)\,\mathcal{N}_\infty\big((f_n-f)_{|_{[\alpha,\beta]}}\big)\leqslant(\beta-\alpha)\,\mathcal{N}_\infty\big((f_n-f)_{|_{[\alpha,\beta]}}\big)\end{aligned}$$

De même, pour $x\in[\alpha,a]$ et $n\in\mathbb{N}$, on a $\|\Phi_n(x)-\Phi(x)\|\leqslant(\beta-\alpha)\,\mathcal{N}_\infty\big((f_n-f)_{|_{[\alpha,\beta]}}\big)$. Ainsi :

$$\forall x\in[\alpha,\beta]\quad\big\|\Phi_n(x)-\Phi(x)\big\|\leqslant(\beta-\alpha)\,\mathcal{N}_\infty\big((f_n-f)_{|_{[\alpha,\beta]}}\big),$$

ce qui établit la convergence uniforme sur tout segment de I de la suite $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers Φ.

Théorème 13 Soit $a\in I$. La suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g.

D'après le théorème 12 de la page 504, pour tout $x\in I$, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t&=\lim_{n\to+\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t\\&=\lim_{n\to+\infty}\big(f_n(x)-f_n(a)\big)\\&=f(x)-f(a).\end{aligned}$$

En d'autres termes, pour tout $x\in I$:

$$f(x)=f(a)+\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il s'ensuit, du fait que g est une fonction continue (d'après le théorème 8 de la page 501), que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $f'=g$.

Théorème 14 Démontrons par récurrence l'assertion $\mathcal{H}_p$:

« Si les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^p$ et

- *pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]$ la suite $\big(f_n^{(k)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement ;*
- *la suite $\big(f_n^{(p)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I,*

alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et, pour tout $k\in[\![0,p]\!]$ on a : $\forall x\in I\quad f^{(k)}(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n^{(k)}(x)$. »

Le cas $p=1$ correspond au théorème 13 de la page 504.

Supposons $\mathcal{H}_p$ vraie pour un $p\in\mathbb{N}^*$.

Supposons que les fonctions f_n soient de classe $\mathcal{C}^{p+1}$, que pour tout $k \in [\![0,p]\!]$ la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et que la suite $\left(f_n^{(p+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I. Le théorème 13 de la page 504 appliqué à la suite $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ donne que $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ et que :

$$\forall x \in I \quad f_n^{(p+1)}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g'(x)$$

Puisque la suite $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, l'hypothèse de récurrence donne que la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et, pour tout $k \in [\![0,p]\!]$ on a : $\forall x \in I \quad f^{(k)}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(x)$. En particulier :

$$\forall x \in I \quad f^{(p)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(p)}(x) = g(x).$$

Par conséquent, $f^{(p)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x \in I \quad f^{(p+1)}(x) = g'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(p+1)}(x).$$

Cela termine la démonstration.

Exercice 19

1. • Posons $u_n : x \mapsto \frac{1}{n^2+x^2}$. La fonction u_n est définie, bornée sur $\mathbb{R}$ lorsque $n \geqslant 1$. De plus $\mathcal{N}_\infty(u) = \frac{1}{n^2}$. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement, donc uniformément et simplement.

   • La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^*$, car u_0 n'est pas bornée.
   La convergence normale de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ montre que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes converge uniformément vers 0. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^*$, et donc simplement.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons v_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $v_n(x) = x\,e^{-nx}$.

   • Pour $x = 0$, la série $\sum v_n(0)$ est la série nulle et elle est convergente.
   Pour $x > 0$, puisque $0 \leqslant e^{-x} < 1$, la série géométrique $\sum (e^{-x})^n$ est convergente et donc la série $\sum v_n(x)$ est convergente.
   Ainsi, la série $\sum v_n$ converge simplement.

   • Pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

   $$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x\,\left(e^{-x}\right)^k = \frac{x\,e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$$

   et il s'ensuit que la suite (R_n) ne peut pas converger uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$, donc qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème 17 de la page 509 nous montrera que la convergence ne peut, *a fortiori*, par être normale, mais ici il est facile de le voir puisque :

$$\mathcal{N}_\infty(v_n) \geqslant v_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{en}$$

et que la série $\sum \frac{1}{en}$ diverge.

Exercice 20 Rappelons que si x est un réel strictement positif et si z est un nombre complexe, par définition $x^z = \exp(z \ln x)$. En particulier $|x^z| = x^{\operatorname{Re} z}$.

Il suffit d'établir la convergence normale de la série $\sum \frac{1}{n^z}$ sur tout demi-plan :

$$H_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geqslant a\},$$

avec $a > 1$. On constate que pour tout $z \in H_a$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)}} \leqslant \frac{1}{n^a}\cdot$$

La convergence normale sur H_a est alors une conséquence immédiate de la nature des séries de Riemann et du théorème de comparaison.

Proposition 16

- Supposons que la série de fonction $\sum u_n$ converge normalement sur A. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A$ on a :

  $$\big\|u_n(x)\big\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(u_n)$$

  et puisque la série numérique de terme général positif $\sum \mathcal{N}_\infty(u_n)$ est convergente, par le théorème de comparaison, la série $\sum \big\|u_n(x)\big\|$ est convergente.
- Si la série de fonction $\sum u_n$ converge normalement sur un voisinage V de a, on applique le premier point à la série de fonctions $\sum u_{n|_V}$ pour établir que la série $\sum \big\|u_n(a)\big\|$ est convergente.

Théorème 17

- Supposons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement.

  Soit $x \in A$. Puisque la série $\sum u_n$ converge normalement, la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité :

  $$\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \big\|u_k(x)\big\|$$

  Ainsi, par définition de la norme de la convergence uniforme :

  $$\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathcal{N}_\infty\left(u_k\right).$$

  du fait que cette inégalité est valable pour tout $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, le reste R_n de la série est borné et

  $$\mathcal{N}_\infty(R_n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathcal{N}_\infty(u_k).$$

  Il suffit pour conclure de remarquer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathcal{N}_\infty(u_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

- Supposons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur un voisinage V de a. En appliquant le premier point à la série $\sum u_{n|_V}$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur V.

Exercice 21 Notons $u_n(x) = x^n(1-x)$, pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Montrons que la série $\sum u_n$ converge simplement.
  Pour $x = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n(1) = 0$ et donc la série $\sum u_n(1)$ est convergente.
  Soit $x \in [0,1[$. La série $\sum u_n(x)$ est convergente, puisqu'il s'agit d'une série géométrie de raison x.
- La série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$. L'étude de la fonction u_n montre que :
$$\mathcal{N}_\infty(u_n) = u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n.$$
  Puisque
$$\ln\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right) = n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{n}{n+1} + \mathrm{o}(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1,$$
  on a $\mathcal{N}_\infty(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n}$ et donc la série $\sum \mathcal{N}_\infty(u_n)$ diverge.
  En effet, pour tout $x \in [0,1[$, on a
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k(1-x) = x^{n+1},$$
  et donc $\mathcal{N}_\infty(R_n) = 1$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On retrouve le fait que la série ne converge pas normalement.

  Remarque On peut également remarquer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f = \mathbb{1}_{[0,1[}$. Cette fonction étant discontinue et les fonctions u_n étant toutes continues, la convergence ne saurait être uniforme.

- En revanche, la série $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment $[0,a]$ de $[0,1[$, avec $a \in]0,1[$. En remarquant que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,a] \quad \big|u_n(x)\big| \leqslant a^n,$$
  on obtient la convergence normale de $\sum u_n$ sur le segment $[0,a]$.

Exercice 22

- Il est clair que l'application :
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big) & \longrightarrow & \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big) \\ f & \longmapsto & x \mapsto g(x) + \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$
  est à valeurs dans $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Par conséquent la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et toutes les fonctions f_n sont continues.

- Par récurrence, démontrons que :

$$\forall x \in [0,1] \quad \forall n \in N \quad \big|f_{n+1}(x) - f_n(x)\big| \leqslant \frac{x^n}{n!}\,\mathcal{N}_\infty(g).$$

L'inégalité est immédiate pour $n = 0$ car $f_1 = g$.
Supposons l'inégalité vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}\big|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)\big| &= \left|\int_0^x f_{n+1}(t) - f_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^x \big|f_{n+1}(t) - f_n(t)\big|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^x \frac{t^n}{n!}\,\mathcal{N}_\infty(g)\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathcal{N}_\infty(g),\end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat par récurrence.

- Il s'ensuit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{N}_\infty(f_{n+1} - g_n) \leqslant \frac{\mathcal{N}_\infty(g)}{n!}$$

et, par comparaison, du fait que la série $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente, la série de fonctions $\sum(f_{n+1} - f_n)$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[0,1]$. Il s'ensuit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue f. D'après le théorème 12 de la page 504 on a :

$$\forall x \in [0,1] \quad f_{n+1}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ce qui implique que f vérifie :

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = g(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 23 D'après l'exercice 20 de la page 508, la série $\sum \frac{1}{n^z}$ converge normalement et donc uniformément au voisinage de tout point. Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $z \mapsto \frac{1}{n^z} = \exp(-z\ln n)$ est continue sur $\mathbb{C}$ et donc sur H. Le corollaire précédent permet de conclure.

Exercice 24 Pour $k \in \mathbb{N}$ posons :

$$\begin{array}{rccc} u_k : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \longmapsto & \dfrac{M^k}{k!}\cdot \end{array}$$

Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série numérique $\sum \frac{x^k}{k!}$ est absolument convergente et que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la série à valeurs vectorielle $\sum \frac{M^k}{k!}$ est absolument convergente (*cf.* l'exercice 4 de la page 405). La fonction $\exp = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\ \|$ sous-multiplicative, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \|A\,B\| \leqslant \|A\|\,\|B\| \qquad (*)$$

(*cf.* l'exercice 22 de la page 305).

Montrons que la série converge normalement au voisinage de tout point.
Soit $r > 0$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall M \in B_F(0,r) \quad \big\|u_k(M)\big\| \leqslant \frac{r^k}{k!}\cdot$$

Puisque la série numérique $\sum \frac{r^k}{k!}$ converge, la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur $B_F(0,r)$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En prenant $r = \|M\|+1$, on a $M \in B_O(0,r)$. Cette boule ouverte, et *a fortiori* $B_F(0,r)$, est donc un voisinage de M. On en conclut que la série $\sum u_k$ converge normalement au voisinage de tout point.
Par ailleurs les fonctions u_k sont polynomiales, donc continues. Par conséquent, la fonction exp est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 25

Première méthode On peut munir $\mathcal{L}(E)$ d'une norme $\|\ \|$ telle que :

$$\forall (a,b) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad \|a\,b\| \leqslant \|a\|\,\|b\|, \qquad (*)$$

(*cf.* l'exercice 22 de la page 305) et ainsi adapter le raisonnement de l'exercice précédent.

Seconde méthode Afin d'éviter les confusions, notons :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ a & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \end{array} \cdot$$

Il a été vu à l'exercice précédent que f est bien définie et continue.

Fixons une base $\mathcal{B}$ de E. L'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ a & \longmapsto & M(a,\mathcal{B}) \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbre. Puisque E est de dimension fini, Φ et Φ^{-1}, qui sont linéaires, sont continues. Puisque, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathcal{L}(E)$:

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{a^k}{k!} = \Phi^{-1}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\big(\Phi(a)\big)^k}{k!}\right),$$

en faisant tendre N vers $+\infty$, on retrouve par continuité de Φ et Φ^{-1} la convergence de $\sum \frac{a^k}{k!}$ et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = \Phi^{-1}\Big(f\big(\Phi(a)\big)\Big).$$

Par conséquent, l'application $g = \Phi^{-1} \circ f \circ \Phi$ est continue. En d'autres termes, l'application exp définie sur $\mathcal{L}(E)$ est continue.

Exercice 26 Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{x^2+n^2}$ définie sur $[1, +\infty[$. Il est clair que :

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2+1}\cdot$$

On déduit de la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2+1}$ que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est immédiat que $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème précédent :

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} = 0.$$

Exercice 27 Montrons que la série de fonctions $\sum \frac{x}{x+n^2}$ converge normalement sur $]0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1]$, on a :

$$0 \leqslant \frac{x}{x^2+n^2} \leqslant \frac{x}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}\cdot$$

Ainsi, $\sum \frac{x}{x+n^2}$ est normalement convergente sur $[0, 1]$. Par conséquent, du fait que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{x}{x+n^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0\,; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on déduit du théorème 21 de la page 512 que la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{x+n^2}$ tend vers 1 en 0.

Exercice 28

1. Notons u_n l'application définie sur $[0, 2\pi]$ par $u_n : x \mapsto a_n \sin(nx)$. Il est clair que u_n est bornée. Du fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{N}_\infty(u_n) \leqslant a_n$, on déduit que la série $\sum u_n$ converge normalement. De la continuité de tous les u_n et du corollaire 20 de la page 511, on conclut que la fonction f est continue.
2. Puisque la série $\sum u_n$ converge normalement, et puisque les fonctions u_n sont continues, on déduit du théorème 22 de la page 512 :

$$\begin{aligned} \int_{[0,2\pi]} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[0,2\pi]} u_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_0^{2\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 29 Soit $(z, r) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^*$. Notons $f(t) = \frac{1}{z-re^{it}}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Nous traitons les deux questions en même temps.

- Supposons $r < |z|$. Puisque $\left|\frac{r}{z}e^{it}\right| = \frac{r}{|z|} < 1$, la série géométrique $\sum \left(\frac{r}{z}e^{it}\right)^n$ est convergente et :

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad \frac{1}{z-re^{it}} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{r}{z}e^{it}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$

où $u_n : t \mapsto \left(\frac{r}{z}e^{it}\right)^n$. Puisque la série $\sum \left|\frac{r}{z}\right|^n$ est convergente, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. Puisque les fonctions u_n sont continues, on peut intégrer terme à terme, ce qui donne :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, un calcul immédiat donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{2\pi} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 2\pi & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{z}\cdot$$

- Supposons $|z| < r$. Alors :

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad \frac{1}{z - re^{it}} = -\frac{1}{r}\frac{e^{-it}}{1 - \frac{z}{r}e^{-it}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t),$$

où $v_n(t) = \left(\frac{z}{r}\right)^n e^{-i(n+1)t}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 2\pi]$. Il est immédiat que $|v_n(t)| = \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$. La série géométrique $\sum \left(\frac{|z|}{|r|}\right)^n$ étant convergente, la série de fonctions $\sum v_n$ converge donc normalement sur le segment $[0, 2\pi]$.
Puisque les fonctions v_n sont continues et que la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement, on peut intégrer terme à terme, ce qui donne :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} v_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, un calcul immédiat donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{2\pi} v_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Par conséquent :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0\cdot$$

Exercice 30 Notons u_n l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}\cdot$

- Il est clair que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2+1}\cdot$$

La convergence de la série numérique $\sum \frac{1}{n^2+1}$ montre que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est donc définie sur $\mathbb{R}_+$.
- Les fonctions u_n sont continues. La convergence normale implique donc que f est continue.

- Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad u_n^{(p)}(x) = (-1)^p \frac{n^p}{n^2+1} e^{-nx}.$$
Pour $x > 0$, par croissances comparées, on a $n^p e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Il s'ensuit que :
$$\frac{n^p}{n^2+1} e^{-nx} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
On en déduit la convergence simple de la série $\sum u_n^{(p)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $a > 0$. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on a donc par décroissance de la fonction $x \mapsto e^{-x}$:
$$\forall x \in [a, +\infty[\quad \left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{n^p}{n^2+1} e^{-na}.$$
Puisque la série $\sum u_n^{(p)}(a)$ est absolument convergente, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+^*$, ceci pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par suite, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction f n'est pas dérivable en 0.
Pour le démontrer, il suffit de démontrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$, le théorème de la limite de la dérivée assurant alors, du fait que f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, que $\frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.
Pour $x > 0$ on a $f''(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} e^{-nx} > 0$.
Par conséquent, f' est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et f' admet une limite ℓ en 0 dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} \ell \leqslant f'(x) &= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^2+1} e^{-kx} && (f' \text{ décroissante}) \\ &\leqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1} e^{-kx} && (\text{terme général négatif}). \end{aligned}$$
En faisant tendre x vers 0 dans cette inégalité, on obtient :
$$\ell \leqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1}. \qquad (*)$$
D'autre part, la série $\sum \frac{k}{k^2+1}$ est divergente car son terme général est positif et équivalent à $\frac{1}{k}$.
Toujours du fait que le terme général est positif, on en déduit que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Par passage à la limite dans les inégalités, il vient de $(*)$ que $\ell = -\infty$. Par suite, f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 31 Notons u_n l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$.

- Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ la série $\sum u_n(x)$ est une série alternée vérifiant $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la suite $\big(|u_n(x)|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par suite la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad u_n^{(p)}(x) = (-1)^{n+p}\frac{p!}{(x+n)^{p+1}}.$$
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$. Pour $x \geqslant a$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| = \frac{p!}{(x+n)^{p+1}} \leqslant \frac{p!}{(a+n)^{p+1}}.$$
Puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{p+1}}$ est convergente, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ et donc au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+^*$.
- Puisque la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la série $\sum u_n'$ converge normalement au voisinage de tout point de $]0, +\infty[$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$. Puisque toutes les séries dérivées de la série de fonction $\sum u_n'$ convergent normalement au voisinage de tout point de $]0, +\infty[$, la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, *i.e.* f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 32 Pour $n \in \mathbb{N}$, notons u_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u_n : x \mapsto \frac{1}{1+n^2x}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\,n^2}$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xu_n(x) = \frac{1}{n^2}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$0 \leqslant xu_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
Il s'ensuit que la série de fonctions $\sum \frac{x}{1+n^2x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Par suite, le théorème 21 de la page 512 permet d'affirmer :
$$xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$
et donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 33 Notons $u : (x,t) \mapsto \frac{1}{1+xt^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.

Soit $x > 0$. L'application $t \mapsto \frac{1}{1+xt^2}$ est décroissante, positive. Calculons, pour $y > 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2}$. Pour cela, posons le changement de variable $t = \frac{u}{\sqrt{x}}$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$. On a :
$$\int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{y\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\Big[\operatorname{Arctan} u\Big]_0^{y\sqrt{x}}.$$

Ainsi, en faisant tendre y vers $+\infty$, il vient que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2}$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent :

$$0 \leqslant f(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2} \leqslant 1 \qquad (*)$$

et donc :

$$0 \leqslant \sqrt{x}f(x) - \frac{\pi}{2} = \sqrt{x}\left(f(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2}\right) \leqslant \sqrt{x}.$$

Par suite $\sqrt{x}f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{2\sqrt{x}}.$$

Proposition 26

$(i) \Rightarrow (ii)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{N}_\infty(f - f_n) \leqslant \frac{1}{n+1}$ et donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ C'est immédiat.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Considérons une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \varepsilon$.
Par conséquent, f peut être approchée uniformément par des éléments de $\mathcal{F}$.

Théorème 27

- Supposons que f soit continue. D'après le théorème de Heine, la fonction f est uniformément continue sur le segment $[\alpha, \beta]$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\big|f(y) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon$ pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$ tel que $|x - y| \leqslant \eta$. Fixons un tel η et considérons un entier $n > 0$ tel que $\frac{b-a}{n} \leqslant \eta$ et la subdivision régulière $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ définie par $a_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$. Posons la fonction en escalier g définie sur $[a, b]$ par :
  $$g(x) = \begin{cases} f(a_i) & \text{si } a_i \leqslant x < a_{i+1}\ ; \\ f(b) & \text{si } x = b. \end{cases}$$
  Soit $x \in [a, b[$. Il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $a_i \leqslant x < a_{i+1}$ et donc :
  $$\big|f(x) - g(x)\big| \leqslant \big|f(x) - f(a_i)\big| \leqslant \varepsilon$$
  et il est immédiat que $\big|f(b) - g(b)\big| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent $\mathcal{N}_\infty(f - g) \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre le résultat.
- Démontrons que toute fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$ est la somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier.
  Pour cela, on va raisonner par récurrence sur le nombre de points de discontinuité de f.

Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $[a,b]$, discontinue en c. Supposons d'abord que $c \in]a,b[$. Puisque f est continue par morceaux, elle admet des limites à droite et à gauche en c ; notons :

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \alpha \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = \beta.$$

Posons alors φ la fonction en escalier définie sur $[a,b]$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [a,c[\ ; \\ f(c)-\alpha & \text{si } x = c\ ; \\ \beta-\alpha & \text{si } x \in]c,b]. \end{cases}$$

Il est alors facile de vérifier que $f-\varphi$ est continue en c, ainsi qu'en tous les points de continuité de f. En d'autres termes, $f-\varphi$ a exactement un point de discontinuité de moins que f. Si le point c est une extrémité de $[a,b]$, on adapte la construction précédente.
En se souvenant qu'une combinaison linéaire de fonctions en escalier est une fonction en escalier, il est maintenant aisé de démontrer par récurrence sur k l'assertion : « si $f \in \mathcal{CM}\big([a,b],F\big)$ a exactement k points de discontinuité, alors il existe une fonction en escalier φ telle que $f-\varphi$ est continue ».

Exercice 34 Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le compact $[a,b]$. Elle est donc uniformément continue. Il existe ainsi $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [a,b]$:

$$|x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x)-f(y)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Fixons un tel η. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{n} \leqslant \eta$ et $\sigma = (u_0,\dots,u_n)$ la subdivision régulière de $[a,b]$ de pas $\delta = \frac{b-a}{n}$, c'est-à-dire $u_i = a + i\delta$ pour $i \in [\![0,n]\!]$.

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction affine par morceaux qui interpole les valeurs $f(u_i)$. Plus précisément posons g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f(u_i) & \text{si } x = u_i \text{ pour } i \in [\![0,n]\!]\ ; \\ f(u_i) + \frac{f(u_{i+1})-f(u_i)}{u_{i+1}-u_i}\,(x-u_i) & \text{si } u_i < x < u_{i+1} \text{ pour } i \in [\![0,n-1]\!]. \end{cases}$$

Il est clair que pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$ et $x \in [u_i,u_{i+1}]$, on a :

$$g(x) = \left(1 - \frac{x-u_i}{u_{i+1}-u_i}\right) f(u_i) + \frac{x-u_i}{u_{i+1}-u_i}\, f(u_{i+1})$$

et donc g est une fonction affine par morceaux.

Toujours pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$ et $x \in [u_i,u_{i+1}]$, on a :

$$g(x)-f(x) = \left(1 - \frac{x-u_i}{u_{i+1}-u_i}\right) \big(f(u_i)-f(x)\big) + \frac{x-u_i}{u_{i+1}-u_i}\,\big(f(u_{i+1})-f(x)\big).$$

Puisque $0 \leqslant \frac{x-u_i}{u_{i+1}-u_i} \leqslant 1$, on a :

$$\big|g(x)-f(x)\big| \leqslant \left(1 - \frac{x-u_i}{u_{i+1}-u_i}\right) \big|f(u_i)-f(x)\big| + \frac{x-u_i}{u_{i+1}-u_i}\,\big|f(u_{i+1})-f(x)\big|,$$

et, du fait que $|x-u_i| \leqslant |u_{i+1}-u_i| \leqslant \eta$ et $|x-u_{i+1}| \leqslant |u_{i+1}-u_i| \leqslant \eta$, il vient :

$$\big|g(x)-f(x)\big| \leqslant \left(1-\frac{x-u_i}{u_{i+1}-u_i}\right)\varepsilon + \frac{x-u_i}{u_{i+1}-u_i}\,\varepsilon = \varepsilon.$$

Par conséquent f peut être approchée uniformément par des fonctions affines par morceaux.

Exercice 35 Soit f une fonction affine par morceaux et $\sigma(a_0,\dots,a_n)$ une subdivision adaptée à f.

La fonction f est entièrement déterminée les pentes $\frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{a_{i+1}-a_i}$, avec $i \in [\![0,n-1]\!]$ et par $f(a_0)$.

Soit $g = \lambda_0 f_{a_0} + \cdots + \lambda_n f_{a_n}$, avec $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. La fonction g est affine par morceaux et la subdivision σ lui est adaptée. On aura $f=g$ si, et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rl}
\lambda_1 f_{a_1}(a_0) + \cdots + \lambda_n f_{a_n}(a_0) & = f(a_0) \qquad L_0 \\
\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_{n-1} - \lambda_n & = \frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0} \qquad L_1 \\
\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_{n-1} - \lambda_n & = \frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1} \qquad L_2 \\
\vdots & \vdots \\
\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} - \lambda_n & = \frac{f(a_n)-f(a_{n-1})}{a_n-a_{n-1}} \qquad L_n
\end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rll}
\lambda_1 f_{a_1}(a_0) + \cdots + \lambda_n f_{a_n}(a_0) & = f(a_0) & L_0 \\
\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_{n-1} - \lambda_n & = \frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0} & L_1 \\
2\,\lambda_1 & = \frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1} - \frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
\vdots & \vdots & \\
2\lambda_{n-1} & = \frac{f(a_n)-f(a_{n-1})}{a_n-a_{n-1}} - \frac{f(a_{n-1})-f(a_{n-2})}{a_{n-1}-a_{n-2}} & L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}
\end{array}\right.$$

Puisque $f_{a_0}(a_n) \neq 0$, la ligne L_0 donne λ_n, puis la ligne L_1 donne λ_0. Le système initial a donc une solution et pour cette solution, on a $g=f$.

Exercice 36

1. Soit $t \in [0,1]$. La fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \frac{s^2+t}{2} \end{array}$$

est croissante. Ainsi la fonction φ est à valeurs dans $\left[\frac{t}{2}\,,\,\frac{1+t}{2}\right] \subset [0,1]$. Par conséquent la suite $\big(P_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0,1]$. De plus, du fait que φ est croissante et $P_0(t) = 0 \leqslant t/2 = P_1(t)$, il est facile de vérifier par récurrence que $P_n(t) \leqslant P_{n+1}(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque la suite réelle $\big(P_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle est convergente. Sa limite L vérifie :

$$L = \frac{t+L^2}{2}$$

c'est-à-dire $L^2 - 2L + t = 0$. Puisque par passage à la limite L est positive, on a $L = 1 - \sqrt{1-t}$.
En conclusion, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & t & \longmapsto & 1-\sqrt{1-t}. \end{array}$$

2. • Soit $(t,s) \in [0,1]^2$ tel que $s \leqslant t$. Il est facile de vérifier par récurrence, à l'aide de la croissance de φ, que $P_n(s) \leqslant P_n(t)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction P_n est croissante.
   • Montrons par récurrence que la fonction $P_{n+1} - P_n$ est croissante. C'est immédiat pour $n = 0$, car $P_1 - P_0 : t \mapsto \frac{t}{2}\cdot$ Supposons le résultat établi pour un $n \in \mathbb{N}$. Remarquons, la suite $\big(P_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante pour tout t, que :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant P_{n+2} - P_{n+1} &= \frac{P_{n+1}^2 - P_n^2}{2} \\ &= \frac{(P_{n+1} - P_n)(P_{n+1} + P_n)}{2} \end{aligned}$$

   La fonction $P_{n+1} - P_n$ est positive et d'après l'hypothèse de récurrence elle est croissante. D'après le premier point P_n et P_{n+1} sont croissantes et donc la fonction $P_{n+1} + P_n$ l'est également. Cette dernière est à valeurs positives d'après la première question. Par conséquent la fonction $P_{n+2} - P_{n+1}$ est croissante, ce qui achève la démonstration.
   • Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$0 \leqslant P_{n+k}(t) - P_n(t) \leqslant P_{n+k}(1) - P_n(1).$$

   En faisant tendre k vers $+\infty$ dans ces inégalités, on obtient :

$$0 \leqslant f(t) - P_n(t) \leqslant f(1) - P_n(1).$$

   Par suite, comme $P_n(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)$, on déduit en la convergence uniforme de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Puisque la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [-1,1] \quad Q_n(t) = 1 - P_n(1-t^2)$$

converge uniformément vers g, où

$$\forall x \in [-1,1] \quad g(t) = 1 - f(1-t^2) = 1 - \Big(1 - \sqrt{1-(1-t^2)}\Big) = \sqrt{t^2} = |t|.$$

Il est clair que les fonctions P_n sont polynomiales et donc les Q_n également. La suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ répond donc à la question.

Exercice 37 Supposons que l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est dense dans $\big(\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{K}\big),\mathcal{N}_\infty\big)$.
Soit $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ et $\varepsilon > 0$. Posons $u : x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$, qui définit une bijection de $[a,b]$ sur $[0,1]$. Puisque $u^{-1} : t \mapsto a + t(b-a)$, la fonction $g = f \circ u^{-1}$ est continue, définie

sur $[0,1]$. Par hypothèse, il existe une fonction polynomiale telle que $\big|g(t)-P(t)\big| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$. Par conséquent, pour tout $x \in [a,b]$:

$$\big|f(x) - P\big(u(x)\big)\big| = \big|g\big(u(x)\big) - P\big(u(x)\big)\big| \leqslant \varepsilon.$$

La conclusion vient en remarquant que $Q : x \mapsto P\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ est une fonction polynomiale.

Théorème 28 D'après l'exercice précédent on peut sans perte de généralité supposer que $[a,b] = [0,1]$.

Soit $\varepsilon > 0$.

- D'après l'exercice 34 de la page 519, il existe une fonction affine par morceaux g telle que $\mathcal{N}_\infty(f-g) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Fixons g, qui est de la forme $g : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} \lambda_i |x - a_i|$ d'après l'exercice 35 de la page 519.
- Avec les notations de l'exercice 36 de la page 519, pour tout $a \in [0,1]$, la suite de fonctions polynomiales $(R_{n,a})_{n\in\mathbb{N}}$, où $R_{n,a}(x) = Q_n(x-a)$, converge uniformément vers f_a.
  En effet, pour tout $x \in [0,1]$, on a $x - a \in [-a, 1-a] \subset [-1,1]$ et l'exercice 36 permet alors de conclure.
- Par combinaisons linéaires, d'après l'exercice 36, la suite $\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i R_{n,a_i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g. Il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\mathcal{N}_\infty(g-Q) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
- En conclusion, $\mathcal{N}_\infty(f-Q) \leqslant \mathcal{N}_\infty(f-g) + \mathcal{N}_\infty(g-Q) \leqslant \varepsilon$ et la fonction f peut être approchée uniformément par des fonctions polynomiales.

Exercice 38 Par linéarité, on a :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \int_0^1 P(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ qui converge uniformément vers P. Puisque la fonction f est bornée, car continue sur un segment, la suite $(P_n\, f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2. Par conséquent :

$$0 = \int_0^1 P_n(x) f(x)\, \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

Puisque f^2 est une fonction positive continue d'intégrale nulle, la fonction f^2 est nulle, et donc f est nulle.

S'entraîner et approfondir

10.1 1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues, définies sur intervalle I, à valeurs dans un intervalle J, convergeant uniformément, et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur J. Est-il vrai que la suite $\big(\varphi\circ f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément ?

2. Qu'en est-il si l'on suppose de plus que J est un segment ?

10.2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = n\left(\operatorname{Arctan}\left((x+\frac{1}{n}\right) - \operatorname{Arctan}\left(x-\frac{1}{n}\right)\right).$$

Étudier les convergences simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

★ **10.3** Soit K un compact d'un espace vectoriel de dimension finie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante à valeurs dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.
Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, alors la convergence est uniforme (*premier théorème de Dini*).

★ **10.4** 1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$, avec $a < b$, convergeant simplement vers une fonction f *continue* sur $[a,b]$. On suppose que les fonctions f_n sont toutes croissantes (mais on n'exige pas leur continuité). Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (*deuxième théorème de Dini*).

2. Soit I un intervalle ouvert, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes sur I convergeant simplement vers une fonction f. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]$ contenu dans I. La convergence uniforme est-elle assurée sur I tout entier ?

10.5 *(Polytechnique 2015)*
On fixe un réel x.

1. Démontrer qu'il existe une unique fonction $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall t \in]-1,1[\quad y(t) = x + t\sin\big(y(t)\big)$$
2. On admet que y est de classe $\mathcal{C}^2$. Donner le développement limité de y en 0 à l'ordre 2.
3. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $]-1,1[$ en posant $y_0 = x$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in]-1,1[\quad y_{n+1}(t) = x + t\sin\big(y_n(t)\big).$$
Démontrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers y.
4. Démontrer que f y est lipschitzienne au voisinage de tout point.
5. Démontrer que y est dérivable.

10.6 Pour $x > 0$ on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}$.

1. Démontrer que $S(x)$ est bien définie et que l'application S est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Donner une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.
3. Équivalents de S en 0 et en $+\infty$?

10.7 Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction :

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$?
Trouver la limite et un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers -1.
Trouver la limite et un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
On cherchera à exprimer $f'(x)$ sous forme d'intégrale.
Calculer $f(1)$.

10.8 *(Centrale 2015)*

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$0 \leqslant \frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor} - \frac{1}{n\pi} \leqslant \frac{1}{(n\pi - 1)^2}$$
2. On pose :
$$fs \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor^s} - \frac{1}{(n\pi)^s}\right).$$
Démontrer que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
3. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

10.9 On pose $u_n(x) = \dfrac{\sqrt{x}\ln n}{1 + xn^2}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.
2. Sa somme f est-elle continue sur $\mathbb{R}_+^*$? Sur $\mathbb{R}_+$?
Indication. On pourra minorer $f(1/n^2)$.
3. Donner un équivalent de la somme au voisinage de 0^+.

10.10 On pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n(1 + nx^2)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Déterminer le domaine de définition $D \subset \mathbb{R}_+$ de $f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
Étudier la continuité de f sur D.
2. Déterminer les limites et des équivalents simples de f aux bornes de D.

10.11 *(Centrale 2015)*
On pose $u_n(x) = x\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.
2. Calculer $f(x+1) - f(x)$ pour tout $x \in D$.

10.12 Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Déterminer toutes les fonctions continues f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x+1) - f(x) = \varphi(x). \tag{1}$$
2. On suppose φ positive décroissante, de limite L en $+\infty$.
Montrer que la série de fonctions $\sum \big(\varphi(n) - \varphi(x+n)\big)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et que sa somme S est une fonction continue.
Montrer que la fonction $f : x \mapsto xL + S(x)$ vérifie la relation (1).

10.13 On pose : $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [0,2\pi] \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$.

On rappelle l'encadrement $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Calculer $S_n(x)$ et vérifier que $\big|S_n(x)\big| \leqslant \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}}$ pour tout $x \in]0, 2\pi[$.
2. On considère dans la suite de l'exercice une suite décroissante de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0.
Démontrer la convergence simple de la série $\sum a_n \sin(nx)$.
Indication. Écrire $\sin(nx) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$
3. En considérant $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)$, démontrer que si la convergence est uniforme sur $[0, 2\pi]$, alors $na_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. On suppose que $na_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que la série $\sum a_n \sin(nx)$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$. *Indication. On montrera que* $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

10.14 Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, où $f_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} \dfrac{1}{x+j}$.

1. Montrer que f est bien définie. Montrer que, pour tout x tel que $2x$ ne soit pas entier, on a :
$$f(2x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f\left(x + \frac{1}{2}\right).$$
2. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose $g(x) = f(x) - \pi \operatorname{cotan} \pi x$. Montrer que g est continue, prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. Notant encore g ce prolongement, montrer que $g = 0$. Pour cela, on introduira $A \geqslant 1$, $M_A = \sup_{t\in[0,A]} \big|g(t)\big|$ et $x_0 = \inf\big\{x \in]0, A] \;\big|\; |g(x)| = M_A\big\}$.

10.15 Étudier la convergence sur $\mathbb{R}_+$ de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n^{3/2}}$.

Sa somme f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$? sur $\mathbb{R}_+$?

Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

10.16 Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2x^2}\right)$.

1. Quelle est le domaine de définition.
2. La fonction f est-elle continue ?
3. Donner un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$ et en 0.

10.17 On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,b]$ par $f_0 \in \mathcal{C}^0\big([0,b],\mathbb{R}\big)$ et :

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Étudier la série $\sum f_n$. Quelle est sa somme ?

10.18 1. Soit F une fonction dérivable en x. Montrer que, pour toute suite (a_n) tendant vers x en croissant et toute suite (b_n) tendant vers x en décroissant, telles que, pour tout n, $b_n - a_n > 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} = F'(x).$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \min(x - \lfloor x\rfloor, \lfloor x\rfloor + 1 - x) = d(x,\mathbb{Z})$, où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière de x.
On pose alors :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 10^{-n} f(10^n x).$$

Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, continue et périodique, mais n'est nulle part dérivable.
La fonction F est un exemple dû à Van Der Waerden de fonction continue nulle part dérivable.

10.19 On note $A = \Big\{ f \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}^2\big) \;\big|\; f\big([0,1]\big) \subset [0,1]^2 \text{ et } f(0) = (0,0),\ f(1) = (1,0)\Big\}$.

On considère l'application $\Phi : A \to \mathcal{F}\big([0,1],\mathbb{R}^2\big)$ définie de la manière suivante. Pour tout $f \in A$, en notant $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, on a :

$$\forall t \in [0,1] \quad \Phi(f)(t) = \begin{cases} \left(\frac{y(4t)}{2}, \frac{x(4t)}{2}\right) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \left(\frac{x(4t-1)}{2}, \frac{y(4t-1)+1}{2}\right) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \left(\frac{x(4t-2)+1}{2}, \frac{y(4t-2)+1}{2}\right) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ \left(1 - \frac{y(4t-3)}{2}, \frac{1-x(4t-3)}{2}\right) & \text{si } t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

1. On pose $g_0 : t \mapsto \Big(t, 3\big(1 - 3|2t-1|\big)/4\Big)$.
Tracer le graphe de g_0, puis celui de $g_1 = \Phi(g_0)$, puis celui de $g_2 = \Phi(g_1)$.
2. Démontrer que Φ laisse stable A et que Φ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne pour la norme $\mathcal{N}_\infty$ de $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}^2\big)$ associée à la norme $\|\ \|_\infty$ de $\mathbb{R}^2$.

3. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :
$$f_0 \in A \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_{n+1} = \Phi(f_n).$$
Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue f. *La fonction f est dite une fonction de Peano.*
4. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$C_n = \left\{ \left(\frac{2i+1}{2^n}, \frac{2j+1}{2^n} \right) ;\ 0 \leqslant i < 2^{n-1},\ 0 \leqslant j < 2^{n-1} \right\} \subset f_n\big([0,1]\big).$$
5. En déduire que $f\big([0,1]\big) = [0,1]^2$.

10.20 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$, on pose :
$$P_n(x) = \big(1-x^2\big)^n \quad ; \quad a_n = \int_{[-1,1]} P_n \quad ; \quad Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{a_n}.$$
1. (a) Démontrer que $a_n \geqslant \frac{2}{n+1}$.
   (b) Soit $\alpha \in]0,1[$. Démontrer que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[\alpha,1]$.
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'extérieur de $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t$$
   (a) Démontrer que la restriction de f_n à $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ est une fonction polynomiale.
   (b) Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.
   Indication. Remarquer que $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)Q_n(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass.

10.21 Soit f une fonction réelle continue définie $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe $a \geqslant 0$ tel que la fonction $t \mapsto e^{-at}f(t)$ soit bornée.
1. Démontrer que $L : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $]a,+\infty[$.
2. Démontrer que si $L(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est nulle pour tout $x > a$, alors f est la fonction nulle.

10.22 Soit φ l'application de $[0,1]$ dans lui-même définie par $\varphi(t) = 2t(1-t)$.
1. Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi_n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}$.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b < 1$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est la limite uniforme d'une suite d'applications polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Solution des exercices

10.1 1. Soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où f_n est la fonction constante sur $\mathbb{R}$ égale à $\frac{1}{n}$ et

$$\begin{array}{rccc}\varphi : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & 1/x.\end{array}$$

Il est clair que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle et que la suite $\big(\varphi\circ f_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas simplement, *a fortiori* elle ne converge pas uniformément.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathcal{F}(I,J)$ convergeant uniformément vers f. Puisque J est fermé, pour tout $x\in I$, on a $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)\in J$.

D'après le théorème de Heine, la fonction φ est uniformément continue.
Soit $\varepsilon>0$. Il existe donc $\eta>0$ tel que :

$$\forall (x,y)\in J^2 \quad \Big(|x-y|\leqslant\eta\Longrightarrow\big|\varphi(x)-\varphi(y)\big|\leqslant\varepsilon\Big)$$

Il existe n_0 tel que $\mathcal{N}_\infty(f_n-f)\leqslant\eta$ pour tout $n\geqslant n_0$. Ainsi, toujours pour $n\geqslant n_0$:

$$\forall x\in I \quad \Big|\varphi\big(f_n(x)\big)-\varphi\big(f(x)\big)\Big|\leqslant\varepsilon.$$

Par conséquent, la suite $\big(\varphi\circ f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\varphi\circ f$.

10.2 La fonction Arctan est de classe $\mathcal{C}^2$ et :

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad \mathrm{Arctan}''(t)=-\frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

Puisque Arctan$''$ est continue et que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\mathrm{Arctan}''(x)=0$, la fonction Arctan$''$ est bornée. Notons $M_2=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\big|\mathrm{Arctan}''(t)\big|$.

Ainsi, pour tout $(x,h)\in\mathbb{R}^2$, l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction Arctan entre x et h donne :

$$\left|\mathrm{Arctan}(x+h)-\mathrm{Arctan}(x)-\frac{h}{x^2+1}\right|\leqslant\frac{h^2}{2}M_2.$$

Par conséquent $\left|\mathrm{Arctan}(x+h)-\mathrm{Arctan}(x-h)-\dfrac{2h}{x^2+1}\right|$

$$\begin{aligned}&=\left|\mathrm{Arctan}(x+h)-\mathrm{Arctan}(x)-\frac{h}{x^2+1}\right.\\&\qquad\left.-\left(\mathrm{Arctan}(x-h)-\mathrm{Arctan}(x)+\frac{h}{x^2+1}\right)\right|\\&\leqslant\left|\mathrm{Arctan}(x+h)-\mathrm{Arctan}(x)-\frac{h}{x^2+1}\right|\\&\qquad+\left|\mathrm{Arctan}(x-h)-\mathrm{Arctan}(x)+\frac{h}{x^2+1}\right|\\&\leqslant h^2\,M_2.\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| f_n(x) - \frac{2}{1+x^2} \right| \leqslant \frac{M_2}{n}.$$

Il s'ensuit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction définie par $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

10.3 Posons $g_n = f - f_n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions g_n sont continues et positives, car la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente, et que les fonctions f_n et f sont continues. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite décroissante de fonctions continues positives convergeant simplement vers la fonction nulle. Démontrons par l'absurde qu'elle converge uniformément vers 0.

Supposons donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe un entier $n_k \geqslant k$ et un $x_k \in K$ vérifiant $g_{n_k}(x_k) > \varepsilon$.

Par compacité en dimension finie, le théorème de Bolzano-Weierstrass donne l'existence d'un $x \in [a,b]$ et d'une extraction φ telle que $x_{\varphi(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x$. En posant $\psi(k) = n_{\varphi(k)}$, on a $\psi(k) \geqslant \varphi(k) \geqslant k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et donc $\psi(k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par convergence simple de la suite $(g_k)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $g_{\psi(k)}(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il existe donc un entier k_0 tel que $g_{\psi(k_0)}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Par continuité de $g_{\psi(k_0)}$, il existe $\eta > 0$ tel que $g_{\psi(k_0)}(y) \leqslant \varepsilon$ pour tout $y \in [a,b]$ vérifiant $|x-y| \leqslant \eta$. Puisque $x_{\varphi(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x$ il existe un entier $k \geqslant k_0$ tel que $|x_{\varphi(k)} - x| \leqslant \eta$. On a alors :

$$\varepsilon < g_{\psi(k)}(x_{\varphi(k)}) \leqslant g_{\psi(k_0)}(x_{\varphi(k)}) \leqslant \varepsilon,$$

ce qui est impossible. Par conséquent la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

10.4 1. Par passage à la limite simple, la fonction f est croissante. De plus, comme elle est continue sur le compact $[a,b]$, elle est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$; il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (u,t) \in [a,b]^2 \quad |t-u| \leqslant \eta \Rightarrow \big|f(t) - f(u)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Fixons N tel que $\dfrac{b-a}{N} \leqslant \eta$ et, pour $k \in [\![0,N]\!]$, notons $t_k = a + k\dfrac{b-a}{N}$.

La convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entraîne sa convergence uniforme sur l'ensemble fini A_N des t_k. Il existe donc $N' \geqslant N$ tel que, pour tout $n \geqslant N'$, on a :

$$\forall k \in [\![0,N]\!] \quad \big|f(t_k) - f_n(t_k)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Mais alors, pour tout $t \in [a,b]$, il existe k tel que $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$. Toujours pour $n \geqslant N'$, en utilisant d'abord la croissance de f_n, puis la continuité uniforme de f et la convergence uniforme de (f_n) sur A_N, on a :

$$\begin{aligned} f(t) - f_n(t) &\leqslant f(t) - f_n(t_k) \\ &\leqslant f(t) - f(t_k) + f(t_k) - f_n(t_k) \\ &\leqslant \big|f(t) - f(t_k)\big| + \big|f(t_k) - f_n(t_k)\big| \leqslant 2\varepsilon. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} f_n(t) - f(t) &\leqslant f_n(t_{k+1}) - f(t) \\ &\leqslant f_n(t_{k+1}) - f(t_{k+1}) + f(t_{k+1}) - f(t) \\ &\leqslant \big|f_n(t_{k+1}) - f(t_{k+1})\big| + \big|f(t_{k+1}) - f(t)\big| \leqslant 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \geqslant N'$ et tout $t \in [a,b]$, on a $\big|f(t) - f_n(t)\big| \leqslant 2\varepsilon$; d'où la convergence uniforme désirée.

2. La limite *simple* f d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions convexes est convexe. En effet, soient $(x,y) \in I^2$ et $t \in [0,1]$; en passant à la limite dans l'inégalité de convexité de f_n :

$$f_n(tx + (1-t)y) \leqslant t f_n(x) + (1-t) f_n(y),$$

on obtient l'inégalité de convexité de f :

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant t f(x) + (1-t) f(y).$$

Par ailleurs, la fonction f, convexe sur l'intervalle *ouvert* I, est nécessairement continue. En effet, soit $x \in I$, montrons la continuité de f en x. On fixe arbitrairement t, u dans I tels que $t < x < u$. Alors, si $y \in]x,u[$ (donc $y - x > 0$) :

$$(y-x)\,\frac{f(x)-f(t)}{x-t} \leqslant f(y) - f(x) \leqslant (y-x)\,\frac{f(u)-f(x)}{u-x},$$

ce qui, en faisant tendre y vers x, prouve la continuité de f à droite de x. Un encadrement analogue prouve la continuité à gauche. Ainsi la fonction f limite des f_n est continue (sur son domaine I ouvert).

Fixons un segment $[a,b] \subset I$. Comme a n'est pas la borne inférieure de I, fixons $\alpha < a$ dans I.

Pour tout n, la fonction g_n définie sur $[a,b]$ par $g_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(\alpha)}{x - \alpha}$ est croissante sur $[a,b]$, par convexité de f_n. La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g définie par $g(x) = \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$.

Ainsi la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du second théorème de Dini (la question précédente) et converge donc uniformément sur $[a,b]$ vers g. Cela entraîne la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[a,b]$, car $x \mapsto x - \alpha$ est borné sur $[a,b]$ et $f_n(x) = (x-\alpha) g_n(x) + f_n(\alpha)$.

L'exemple de $f_n(x) = x^n$ sur $]0,1[$ montre que la convergence n'est pas en général uniforme sur tout I.

10.5 1. Fixons $t \in]-1,1[$ et posons la fonction $\varphi : s \mapsto x + t\sin(s) - s$ définie sur $\mathbb{R}$. Il s'agit de démontrer que φ s'annule une seule fois.

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a $\varphi'(s) = t\cos(s) - 1 < 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que φ est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R})$. Il est clair que $\lim\limits_{+\infty} = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} = +\infty$.

Ainsi $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et la conclusion suit.

2. On a $y(0) = x$. D'après la formule de Taylor-Young, il existe deux réels a et b tels qu'au voisinage de 0 :
$$y(t) = x + at + bt^2 + \mathrm{o}(t^2)$$
Par conséquent au voisinage de 0 :
$$\begin{aligned} y(t) &= x + t\sin\big(x + at + bt^2 + \mathrm{o}(t^2)\big) \\ &= x + t\sin(x)\cos\big(at + bt^2 + \mathrm{o}(t^2)\big) + t\cos(x)\sin\big(at + bt^2 + \mathrm{o}(t^2)\big) \\ &= x + t\sin(x)\big(1 + \mathrm{o}(t)\big) + t\cos(x)\big(at + \mathrm{o}(t)\big) \\ &= x + t\sin x + a\cos(x)\,t^2 + \mathrm{o}(t^2). \end{aligned}$$
Par unicité du développement limité , on en déduit :
$$y(t) = x + \sin(x)\,t + \frac{\sin(2x)}{2}\,t^2 + \mathrm{o}(t^2).$$

3. Fixons $t \in]-1,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) - y(t) &= x + t\sin\big(y_n(t)\big) - y(t) \\ &= x + t\sin\big(y_n(t)\big) - \Big(x + t\sin\big(y(t)\big)\Big) \\ &= t\Big(\sin\big(y_n(t)\big) - \sin\big(y(t)\big)\Big). \end{aligned}$$
Puisque $\sin' = \cos$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction sin donne $|\sin a - \sin b| \leqslant |b - a|$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\big|y_{n+1}(t) - y(t)\big| = |t|\,\Big|\sin\big(y_n(t)\big) - \sin\big(y(t)\big)\big| \leqslant |t|\,\big|y_n(t) - y(t)\big|$$
Il s'ensuit par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big|y_n(t) - y(t)\big| \leqslant |t|^n\,\big|x - y(t)\big|.$$
Puisque $|t| < 1$, on en déduit :
$$\big|y_n(t) - y(t)\big| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Cela étant vrai pour tout $t \in]-1,1[$, on a la convergence simple de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers y.

4. Fixons $a \in]0,1[$. Démontrons par récurrence que la fonction y_n est lipschitzienne sur $[-a,a]$. Cela démontrera que f est lipschitzienne au voisinage de tout point. Cela est immédiat lorsque $n = 0$, car la fonction y_0 est constante.
Supposons que y_n soit k_n-lipschitzienne sur $[-a,a]$ pour un entier n. Alors, pour tout $(t,t') \in [-a,a]^2$, on a :
$$\begin{aligned} \big|y_{n+1}(t') - y_{n+1}(t)\big| &= \Big|t\Big(\sin\big(y_n(t)\big) - \sin\big(y_n(t')\big)\Big) + \sin\big(y_n(t')\big)(t - t')\Big| \\ &\leqslant |t|\Big|\sin\big(y_n(t)\big) - \sin\big(y_n(t')\big)\Big| + |t - t'|\,\Big|\sin\big(y_n(t')\big)\Big| \end{aligned}$$

En utilisant le fait que la fonction sin est 1-lipschitzienne et qu'elle est à valeurs dans $[-1,1$, il vient alors :

$$\begin{aligned}\big|y_{n+1}(t') - y_{n+1}(t)\big| &\leqslant a\,\big|y_n(t) - y_n(t')\big| + |t-t'| \\ &\leqslant (a\,k_n + 1)|t-t'|\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction y_{n+1} est k_{n+1}-lipschitzienne, avec $k_{n+1} = a\,k_n + 1$. Cela démontre l'assertion par récurrence.
Puisque l'équation $c = ac + 1$ a pour solution $c = \frac{1}{1-a}$, il est facile de démontrer par récurrence que y_n est c-lipschitzienne sur $[-a,a]$, pour tout n.
Ainsi, puisque pour tout $(t,t') \in [-a,a]^2$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\big|y_n(t) - y_n(t')\big| \leqslant c\,|t-a|,$$

on conclut par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ que y est c-lipschitzienne sur $[-a,a]$. Il s'ensuit que f est lipschitzienne au voisinage de tout point de $]-1,1[$.

5. Soit $t \in]-1,1[$. Puisque la fonction f y est lipschitzienne au voisinage de t, elle est continue en t et, utilisant le développement limité de la fonction sin au voisinage de $y(t)$, il vient que pour h suffisamment petit :

$$\sin\big(y(t+h)\big) = \sin\big(y(t)\big) + \big(y(t+h) - y(t)\big)\cos\big(y(t)\big) + \mathrm{o}\big(y(t+h) - y(t)\big).$$

Puisque f y est lipschitzienne au voisinage de t :

$$\sin\big(y(t+h)\big) - \sin\big(y(t)\big) = \big(y(t+h) - y(t)\big)\cos\big(y(t)\big) + \mathrm{o}(h).$$

Par conséquent, lorsque h tend vers 0 :

$$\begin{aligned}\frac{y(t+h)-y(t)}{h} &= \frac{(t+h)\sin\big(y(t+h)\big) - t\sin\big(y(t)\big)}{h} \\ &= t\,\frac{\sin\big(y(t+h)\big) - \sin\big(y(t)\big)}{h} + \sin\big(y(t+h)\big) \\ &= t\,\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\,\cos\big(y(t)\big) + \sin\big(y(t+h)\big) + \mathrm{o}(1).\end{aligned}$$

Par suite, puisque $t\cos\big(y(t)\big) \neq 1$:

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h} = \frac{\sin\big(y(t+h)\big) + \mathrm{o}(1)}{1 - t\cos\big(y(t)\big)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{\sin\big(y(t)\big)}{1 - t\cos\big(y(t)\big)}.$$

On a ainsi démontré que la fonction y est dérivable sur $]-1,1[$.

10.6 Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. • Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{n+x}{n+1+x}\,\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum u_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente. La fonction S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Montrons que S est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour cela, puisque la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, démontrons que la série dérivée $\sum u_n'$ converge normalement au voisinage de tout point, les fonctions u_n étant toutes de classe $\mathcal{C}^1$. Pour cela, il suffit de démonter la convergence normale de la série $\sum u_n'$ sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, avec $a>0$.
  Soit $a>0$. Pour tout $x\in[a,+\infty[$:
  $$\left|u_n'(x)\right| = \left|\frac{1}{n!(x+n)^2}\right| \leqslant \frac{1}{n!\,(a+n)^2} \leqslant \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{n!}.$$
  La convergence de la série $\sum \frac{1}{n!}$ garantit la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n'$ sur $[a,+\infty[$. La conclusion suit.

2. Soit $x>0$. On a :
$$\begin{aligned}
S(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(x+n)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\left(1-\frac{x}{x+n}\right) \\
&= (1-e^{-1}) + x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \qquad \text{(deux séries convergentes)} \\
&= (1-e^{-1}) + x\left(S(x)-\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$
   En d'autres termes :
   $$S(x+1) = xS(x) - e^{-1}. \qquad (*)$$

3. - Équivalent en 0.
   On a $S(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1-e^{-1}$.
   Puisque S est continue (elle est de classe $\mathcal{C}^1$), la relation $(*)$ donne :
   $$xS(x) - e^{-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} S(1) = 1-e^{-1}.$$
   On en déduit $S(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
   - Équivalent en $+\infty$.
   Pour tout $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$, posons $v_n(x) = xu_n(x)$. On a :
   $$\left|v_n(x)\right| = \frac{1}{n!}\,\frac{x}{x+n} \leqslant \frac{1}{n!}.$$
   La convergence de la série numérique $\sum \frac{1}{n!}$ assure la convergence normale, donc uniforme, de la série $\sum v_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, pour $n\in\mathbb{N}$ on a :
   $$v_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Ainsi, le théorème de la double limite donne :

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}.$$

Par suite $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{x}$.

10.7 Notons $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$.

- Le domaine de définition de u_n est $]-n,+\infty[$, donc $\mathcal{D} \subset]-1,+\infty[$.

  D'autre part, pour x fixé dans $]-1,+\infty[$, on a $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x}{n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

  La série $\sum (-1)^n \dfrac{x}{n}$ converge d'après le théorème des séries alternées et la série $\sum \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente, donc la série $\sum u_n(x)$ converge.

  Par suite $\mathcal{D} =]-1,+\infty[$.
- Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et :

    $$\forall x \in]-1,+\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n'(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

  - La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathcal{D}$ d'après ce qui précède.
  - La série $\sum u_n'$ converge uniformément sur $\mathcal{D}$ car, d'après le théorème des séries alternées, en notant R_n son reste d'indice n, on a :

    $$\left|R_n(x)\right| \leqslant \left|u_{n+1}'(x)\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x}\right| \leqslant \frac{1}{n},$$

    donc $\sup\limits_{x>-1} \left|R_n(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x>-1} \left|R_n(x)\right| = 0$.

  D'après le théorème précité, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et :

  $$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

  Remarque La classe $\mathcal{C}^1$ de f est plus facile à démontrer que sa continuité.
- Équivalent en $x = -1$.

  Pour $x > -1$, on peut écrire $f(x) = -\ln(1+x) + g(x)$ avec $g(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$.

  Par un raisonnement identique à celui fait pour f, on montre que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-2,+\infty[$. La fonction g est en particulier continue donc bornée au voisinage de -1, ce qui entraîne que $f(x) \sim -\ln(1+x)$ quand x tend vers -1^+.

- Équivalent en $+\infty$.
  Pour $x \geqslant 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$:
  $$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n+x} = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^{x+n-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} (-1)^n\, t^{x+n-1}\,\mathrm{d}t$$
  $$= \int_0^1 \frac{-t^x\left(1-(-t)^N\right)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{-t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{x+N}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$
  Or, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x+N}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{x+N}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+N+1} \underset{N\to+_inftyy}{\longrightarrow} 0$.
  En faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient :
  $$f'(x) = -\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$
  En intégrant par parties, il vient :
  $$f'(x) = \left[\frac{-t^{x+1}}{(x+1)(1+t)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{(x+1)(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{2(x+1)} - R(x)$$
  avec $0 \leqslant \quad R(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x+1}}{(x+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.
  On en déduit pour $x > 0$:
  $$f(x) = f(0) - \int_0^x \frac{1}{2(t+1)}\,\mathrm{d}t - \int_0^x R(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\ln(x+1)}{2} - \int_0^x R(t)\,\mathrm{d}t.$$
  Or $0 \leqslant \quad \displaystyle\int_0^x R(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \ln\frac{x+1}{x+2} + \ln 2$, d'où :
  $$f(x) = -\frac{\ln(x+1)}{2} + \mathrm{O}(1) = -\frac{\ln x}{2} + \mathrm{o}(\ln x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{2}.$$
- Calcul de $f(1)$.
  La série étant convergente, on a $f(1) = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{2p} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
  D'autre part, pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a :
  $$\sum_{n=1}^{2p} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{p} \left(\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\right)$$
  $$= \sum_{k=1}^{p} \left(\ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) - \ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right)\right)$$
  $$= \sum_{k=1}^{p} (\ln(2k+1) + \ln(2k-1)) - 2\sum_{k=1}^{p} \ln(2k)$$
  $$= \ln(2p+1) + 2\ln\left(\frac{(2p-1)\cdots 1}{(2p)\cdots 2}\right)$$
  $$= \ln(2p+1) + 2\ln\left(\frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\right) = 2\ln\left(\sqrt{2p+1}\,\frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\right).$$

D'après l'équivalent de Stirling :

$$(2p)! \underset{+\infty}{\sim} 2^{2p+1}\sqrt{\pi}p^{2p+1/2}e^{-2p} \quad \text{et} \quad 2^{2p}p!^2 \underset{+\infty}{\sim} 2^{2p+1}\pi p^{2p+1}e^{-2p}.$$

Par suite $\sqrt{2p+1}\,\dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\dfrac{2p+1}{p}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

On en déduit que $f(1) = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

10.8 1. Par définition de la partie entière, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n\pi - 1 < \lfloor n\pi \rfloor \leqslant n\pi.$$

Puisque ces trois réels sont strictement positifs, on a :

$$\frac{1}{n\pi} \leqslant \frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor} < \frac{1}{n\pi - 1}.$$

Par suite $0 \leqslant \dfrac{1}{\lfloor n\pi \rfloor} - \dfrac{1}{n\pi} \leqslant \dfrac{1}{n\pi - 1} - \dfrac{1}{n\pi} = \dfrac{1}{n\pi(n\pi-1)} \leqslant \dfrac{1}{(n\pi-1)^2}$.

2. • Démontrons la convergence simple sur $]0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum u_n$, où $u_n(s) = \frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor^s} - \frac{1}{(n\pi)^s}$. De la même manière qu'à la question précédente, puisque $s > 0$, on a pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor^s} - \frac{1}{(n\pi)^s} \leqslant \frac{1}{(n\pi-1)^s} - \frac{1}{(n\pi)^s}. \qquad (*)$$

Par ailleurs, $n\pi - 1 \geqslant n\pi - \pi$. On en déduit alors de l'inégalité $(*)$, pour $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant \frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor^s} - \frac{1}{(n\pi)^s} \leqslant \frac{1}{((n-1)\pi)^s} - \frac{1}{(n\pi)^s}.$$

La série télescopique $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{((n-1)\pi)^s} - \frac{1}{(n\pi)^s}$ est convergente, car, du fait que $s > 0$, on a $\frac{1}{(n\pi)^s} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par comparaison, les termes généraux étant positifs, la série $\sum u_n(t)$ est convergente.

• Démontrons la convergence uniforme au voisinage de tout point de $]0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum u_n$. Fixons $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \geqslant a$, on a :

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(s) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{((k-1)\pi)^s} - \frac{1}{(k\pi)^s}\right) = \frac{1}{nk\pi)^s} \leqslant \frac{1}{(n\pi)^a}.$$

Puisque $\frac{1}{(n\pi)^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

• Les fonctions u_n étant continues, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrons que f est de classe $\mathcal{C}^p$.

• On remarque que par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $s > 0$ l'on a :

$$u_n^{(k)}(s) = (-1)^k \left(\frac{\ln^k(\lfloor n\pi \rfloor))}{\lfloor n\pi \rfloor^s} - \frac{\ln^k(n\pi)}{(np)^s}\right).$$

- Soit $k \in [\![0,p]\!]$. La fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $\varphi_k(s) = \frac{\ln^k t}{t^s}$ est décroissante sur un intervalle $[\alpha_k,+\infty[$, comme peut le montrer une étude de fonction, et $\varphi_k(s) \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparées. Il s'ensuit que pour tout $n \geqslant \alpha_k+1$ et $s>0$, on a :
$$0 \leqslant (-1)^k u_n^{(k)} \leqslant \frac{\ln^k\big((n-1)\pi\big)}{\big((n-1)p\big)^s} - \frac{\ln^k(n\pi)}{(np)^s}.$$
Par suite, la série télescopique $\sum\left(\dfrac{\ln^k\big((n-1)\pi\big)}{\big((n-1)p\big)^s} - \dfrac{\ln^k(n\pi)}{(np)^s}\right)$ étant convergente, par comparaison, la série $\sum u_k^{(k)}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. Cela pour tout $k \in [\![0,p]\!]$.
- Fixons $a>0$. Pour $n \geqslant \alpha_p+1$, et $s \geqslant a$ on a :
$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k^{(p)}(s) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{\ln^p((k-1)\pi)}{((k-1)\pi)^s} - \frac{\ln^p(k\pi)}{(k\pi)^s}\right) = \frac{\ln^p(n\pi)}{(n\pi)^s} \leqslant \frac{\ln^p(n\pi)}{(n\pi)^a}.$$
Puisque $\frac{\ln^p(n\pi)}{(n\pi)^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit la convergence uniforme de la série $\sum u_n^{(p)}$ sur $[a,+\infty[$. Par théorème f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,+\infty[$. Cela étant vérifié pour tout $a>0$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

10.9 1. La série $\sum u_n(0)$ converge car $u_n(0)=0$. Pour $x>0$, on a :
$$u_n(x) \sim \frac{\ln n}{n^2\sqrt{x}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$
donc la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour $x \geqslant a > 0$, on a :
$$0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{\sqrt{x}\ln n}{xn^2} = \frac{\ln n}{\sqrt{x}n^2} \leqslant \frac{\ln n}{\sqrt{a}n^2} ;$$
ce majorant indépendant de $x \geqslant a$ est le terme général d'une série convergente, d'après ce qui précède, donc la série converge normalement sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Par conséquent, les fonctions u_n étant continues par opérations sur les fonctions continues, la somme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Mais pour $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, la série étant à terme général positif, on a, en reconnaissant une somme de Riemann :
$$f(x_n) \geqslant \sum_{p=n+1}^{2n} u_p(x_n) \geqslant \frac{\ln n}{n}\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{1+(p/n)^2} \sim \ln n \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$
Par conséquent :
$$f\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
et donc f n'est pas continue à droite de 0.

3. Encadrons $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$ par des intégrales.

Pour $x > 0$ et $n \geqslant 2$, on a :

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2} \leqslant \frac{1}{1+xn^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2}$$

et donc :

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln(t-1)}{1+xt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln n}{1+xn^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t+1)}{1+xt^2}\,\mathrm{d}t,$$

Par suite, en sommant :

$$\sqrt{x}\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t-1)}{1+xt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \sqrt{x}\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t+1)}{1+xt^2}\,\mathrm{d}t.$$

En effectuant le changement de variable $v = \sqrt{x}t$ dans les deux intégrales, il vient :

$$\int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln(v-\sqrt{x})}{1+v^2}\,\mathrm{d}v - \int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$$
$$\leqslant f(x) \leqslant \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln(v+\sqrt{x})}{1+v^2}\,\mathrm{d}v - \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{1+v^2}\,\mathrm{d}v.$$

Or en posant le changement de variable $u = v - \sqrt{x}$:

$$\left|\int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln(v-\sqrt{x})}{1+v^2}\,\mathrm{d}v\right| = \left|\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln u}{1+(u+\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|\ln u|}{1+u^2}\mathrm{d}u.$$

De même, en posant le changement de variable $u = v + \sqrt{x}$:

$$\left|\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln(v+\sqrt{x})}{1+v^2}\,\mathrm{d}v\right| = \left|\int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln u}{1+(u-\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|\ln u|}{1+u^2/4}\mathrm{d}u$$

Ainsi, quand x tend vers 0^+ :

$$f(x) \sim -\int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{1+v^2}\,\mathrm{d}v \sim -\frac{\ln x}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = -\frac{\pi}{4}\ln x.$$

10.10 1. La série diverge pour $x = 0$, puisque $u_n(0) = \frac{1}{n}$.

Pour tout $x > 0$, on a $u_n(x) \sim \frac{1}{n^2x^2}$; d'où la convergence de la série $\sum u_n(x)$, par comparaison aux séries de Riemann.

La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sup_{x \geqslant a} |u_n(x)| = u_n(a)$, car u_n est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par suite, la série $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout intervalle $[a, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$; comme chaque u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. • Pour l'étude en $+\infty$, appliquons à la série $\sum v_n$, avec $v_n(x) = x^2 u_n(x)$, le théorème de la double limite.

   ∗ On a $\forall (x,n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant v_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

   Par suite, la série $\sum v_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+$.

   ∗ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n(x) = \frac{1}{n^2}$.

   On peut donc conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f(x) \sim \frac{\pi^2}{6x^2}$.

   • Pour l'étude en 0, nous utiliserons un encadrement par l'intégrale.
   Fixons $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t(1+tx^2)}$ est continue, positive et décroissante.
   Comme la série $\sum u_n(x)$ converge, cette fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ et l'on peut écrire :

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n(x) \geqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)}$$
$$\forall n \geqslant 2 \quad u_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)}.$$

   On en déduit, par sommation :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)}.$$

   Comme :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+tx^2}\right) \mathrm{d}t = \ln \frac{t}{1+tx^2},$$

   il vient $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$, avec :

$$u(x) = -2\ln x + \ln\left(1+x^2\right)$$
$$v(x) = -2\ln x + \ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{1+x^2}.$$

   Comme $u(x) \sim -2\ln x$ et $v(x) \sim -2\ln x$, au voisinage de 0^+, on peut conclure que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et que $f(x) \sim -2\ln x$.

10.11 1. • Le domaine de définition de u_n est $]-n, +\infty[$, donc $\mathcal{D} \subset]-1, +\infty[$. D'autre part, pour x fixé dans $]-1, +\infty[$, on a :

$$u_n(x) = x\left(\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{x}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

   donc $\sum u_n(x)$ converge absolument, d'où $\mathcal{D} =]-1, +\infty[$.

   • Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant 2$. Nous allons montrer que f est de classe $\mathcal{C}^p$ en utilisant le théorème du cours sur les séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, ce qui prouvera que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$. Commençons par remarquer que les fonctions u_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$.

∗ La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathcal{D}$ d'après ce qui précède.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{D}$:

$$u'_n(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x} = \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc la série $\sum u'_n$ converge simplement sur $\mathcal{D}$.

Pour $k \in [\![2, p-1]\!]$, $u_n^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{(k-1)!}{(n+x)^k} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$, donc la série $\sum u_n^{(k)}$ converge simplement sur $\mathcal{D}$.

∗ Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathcal{D}$:

$$\sup_{x\in[a,b]} \left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{(p-1)!}{(n+a)^p} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

donc la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a,b]$.

Ces hypothèses entraînent la classe $\mathcal{C}^p$ de f sur $\mathcal{D}$.

2. Pour $x \in \mathcal{D}$, on a $f(x+1) - f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$ avec :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(\frac{k+x}{k}\right) - \ln\left(\frac{k+1+x}{k}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln k\big) + \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+x) - \ln(k+1+x)\big) \\ &= \ln(n+1) + \ln(1+x) - \ln(n+1+x) \\ &= \ln(1+x) - \ln\left(\frac{n+1+x}{n+1}\right), \end{aligned}$$

donc $f(x+1) - f(x) = \ln(1+x)$.

10.12 1. Nous allons montrer que les fonctions f qui vérifient la relation sont entièrement déterminées, par leur restriction f_0 à $[0,1[$ qui est une fonction ayant pour seules contraintes d'être continue sur $[0,1[$ et d'avoir pour limite $f_0(0)+\varphi(0)$ à gauche en 1.

• Si f est une solution et si f_0 désigne sa restriction à $[0,1[$, on a facilement par récurrence sur n, que, pour $x \in [n, n+1[$, et $y = x - n \in [0,1[$:

$$f(x) = f_0(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(y+k).$$

La fonction f étant continue en $x=1$, on a $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ c'est-à-dire, en utilisant l'égalité précédente :

$$\lim_{x\to1^+} \big(f_0(x-1) + \varphi(x-1)\big) = \lim_{x\to1^-} f_0(x),$$

donc :

$$f_0(0) + \varphi(0) = \lim_{x\to1^-} f_0(x).$$

- Réciproquement, soit f_0 une fonction continue sur $[0,1[$ admettant $f_0(0)+\varphi(0)$ comme limite en 1^- et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall x\in[n,n+1[\quad f(x)=f_0(x-n)+\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(x-n+k),$$

ce qui donne en particulier $\forall x\in[0,1[\quad f(x)=f_0(x)$.
Si $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[n,n+1[$, on a $x+1\in[n+1,n+2[$ donc :

$$f(x+1)=f_0\big(x+1-(n+1)\big)+\sum_{k=0}^{n}\varphi\big(x+1-(n+1)+k\big)$$

$$=f_0(x-n)+\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(x-n+k)+\varphi(x)=f(x)+\varphi(x).$$

D'autre part f est évidemment continue sur chaque intervalle $[n,n+1[$, et pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x\to n^-}f(x)=\lim_{x\to n^-}f_0\big(x-(n-1)\big)+\sum_{k=0}^{n-2}\varphi\big(x-(n-1)+k\big)$$

$$=\lim_{z\to 1^-}f_0(z)+\sum_{k=0}^{n-2}\varphi(1+k),$$

et en utilisant l'hypothèse $\lim\limits_{z\to1^-}f_0(z)=f_0(0)+\varphi(0)$:

$$\lim_{x\to n^-}f(x)=f_0(0)+\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(k)=f(n),$$

donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrons que la série de fonctions $\sum u_n$, où $u_n(x)=\varphi(n)-\varphi(x+n)$, converge normalement sur tout intervalle de la forme $[0,k]$, avec $k\in\mathbb{N}^*$ fixé, ce qui assurera la continuité de la somme.
Pour $x\in[0,k]$, on a : $0\leqslant\varphi(n)-\varphi(x+n)\leqslant\varphi(n)-\varphi(k+n)$; de plus pour $N\geqslant k$:

$$\sum_{n=0}^{N}\big(\varphi(n)-\varphi(k+n)\big)=\sum_{n=0}^{k-1}\varphi(n)-\sum_{n=N+1}^{N+k}\varphi(n)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\sum_{n=0}^{k-1}\varphi(n)-kL,$$

ce qui prouve la convergence normale de $\sum u_n$ sur $[0,k]$.
On peut alors écrire :

$$S(x)-S(x+1)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\big(\varphi(k)-\varphi(x+k)-\varphi(k)+\varphi(x+k+1)\big)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\big(\varphi(x+k+1)-\varphi(x+k)\big)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\big(\varphi(x+N+1)-\varphi(x)\big)=L-\varphi(x).$$

Cela entraîne facilement que f vérifie la relation de l'énoncé.

10.13 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que $S_n(0) = S_n(2\pi) = 0$. Pour $x \in]0, 2\pi[$ on a classiquement, par exemple en considérant $\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)$:

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

L'inégalité demandée est alors immédiate.

2. La convergence de la série $\sum a_n \sin(nx)$ est immédiate si $x = 0$ ou $x = 2\pi$. Pour $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kx) &= \sum_{k=1}^{n} a_k\big(S_k(x) - S_{k-1}(x)\big)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})S_k(x) + a_n S_n(x)\end{aligned}$$

Fixons x. On a :

$$\big|(a_k - a_{k+1})S_k(x)\big| \leqslant (a_k - a_{k+1})\,\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} = \mathrm{O}\left(a_k - a_{k+1}\right).$$

La série télescopique à terme général positif $\sum(a_k - a_{k+1})$ étant convergente, par le théorème de comparaison, la série $\sum(a_k - a_{k+1})S_k(x)$ est absolument convergente, donc convergente. Puisque la suite $\big(S_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, $a_n S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc la suite $\left(\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})S_k(x) + a_n S_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Par suite, la série $\sum a_n \sin(nx)$ est convergente.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a $\frac{k\pi}{4n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Par conséquent les $\sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$ sont positifs. On a donc :

$$\begin{aligned}R_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) - R_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) &= \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\\ &\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} a_{2n} \sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right) && ((a_k)_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroissante})\\ &\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} a_{2n}\frac{2}{\pi}\frac{k\pi}{4n} && (\text{inégalité de convexité})\\ &= \frac{a_{2n}}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n} k = a_{2n}\,\frac{3n+1}{4} \geqslant 0\end{aligned}$$

La convergence uniforme de la série donne

$$0 \leqslant a_{2n}\,\frac{3n+1}{4} \leqslant R_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) - R_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) \leqslant \mathcal{N}_\infty(R_n - R_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc $2na_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Cela implique, puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $a_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, que pour tout n :

$$0 \leqslant (2n+1)a_{2n+1} \leqslant (2n+1)a_{2n} = 2n\,a_{2n} + a_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La conclusion est alors immédiate.

4. Par symétrie, on peut se restreindre à $]0,\pi]$.

À l'aide de la question 2, pour $x \in]0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, nous disposons de la relation :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})S_k(x).$$

On en déduit l'inégalité :

$$\begin{aligned}
\big|R_n(x)\big| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})\big|S_k(x)\big| \\
&\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} && \text{(question 1)} \\
&\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})\frac{\pi}{x} && \text{(inégalité de convexité)} \\
&= a_{n+1}\,\frac{\pi}{x}\cdot && (\star)
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout entier $p > n$ et $x \in]0,\pi]$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{p} a_k \sin(kx)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} a_k\big|\sin(kx)\big| \leqslant x \sum_{k=n+1}^{p} k a_k \qquad (\star\star)$$

En combinant, pour tous les entiers n et p vérifiant $p > n > 0$ et $x \in]0,\pi]$, on obtient :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{p} a_k \sin(kx) + \sum_{k=p+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})S_k(x)$$

et donc les inégalités $(\star)$ et $(\star\star)$ donnent :

$$\begin{aligned}
\big|R_n(x)\big| &\leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{p} a_k \sin(kx)\right| + \left|\sum_{k=p+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})S_k(x)\right| \\
&\leqslant x \sum_{k=n+1}^{p} k\,a_k + \frac{\pi}{x}\,a_{p+1} && (\star\star\star)
\end{aligned}$$

L'inégalité $(\star\star\star)$ est vérifiée même si $p \leqslant n$, car alors $\sum_{k=n+1}^{p} a_k k = 0$ et d'après $(\star)$ on a $\big|R_n(x)\big| \leqslant \frac{\pi}{x}a_{n+1} \leqslant \frac{\pi}{x}\,a_{p+1}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in]0, \pi]$, en posant $p = \left\lfloor \frac{1}{x\varepsilon} \right\rfloor$, on obtient :

$$\left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon p} \sum_{k=n+1}^{p} a_k k + \varepsilon(p+1)a_{p+1}.$$

L'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,a_n = 0$ s'écrit $n\,a_n = \mathrm{o}(1)$ et comme 1 est le terme général positif d'une série divergente, par sommation des relations de comparaison, on en déduit $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,a_k = \mathrm{o}(n)$.

Il existe donc n_0 tel que pour tout $p > n_0$ on ait :

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} k a_k \leqslant \varepsilon^2$$

et donc pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{1}{p}\sum_{k=n+1}^{p} k a_k \leqslant \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} k a_k \leqslant \varepsilon^2 \quad &\text{si } p > n \\ 0 \leqslant \frac{1}{p}\sum_{k=n+1}^{p} k a_k = 0 \leqslant \varepsilon^2 \quad &\text{si } p \leqslant n \end{aligned}$$

Par ailleurs, la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc majorée. Soit M un majorant de cette suite. Alors, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\forall x \in]0, \pi] \quad \left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} + M\varepsilon = (M+1)\varepsilon$$

On en déduit la convergence uniforme de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0.

10.14 1. • Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ on a, $f_n(x) = \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{2x}{x^2 - p^2}$.

Puisque $\dfrac{2x}{x^2-p^2} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{p^2}\right)$, la série $\sum \dfrac{2x}{x^2-p^2}$ converge absolument, donc converge et $f(x)$ est bien défini.

• Si $2x$ n'est pas entier, alors x et $x + \dfrac{1}{2}$ ne le sont pas et l'on peut écrire :

$$f_n(x) + f_n\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=-2n}^{2n+1} \frac{2}{2x+k} = 2f_{2n}(2x) + \frac{2}{2x+2n+1}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$f(2x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

• Remarquons que l'égalité $f_n(x+1) = f_n(x) + \dfrac{1}{x+1+n} - \dfrac{1}{x-n}$ entraîne, par passage à la limite, la 1-périodicité de f.

2. • On vérifie facilement que la fonction $x \mapsto h(x) = \pi \operatorname{cotan} \pi x$ est également 1-périodique, donc $g = f - h$ l'est aussi.

- Montrons que la fonction $\gamma : x \mapsto f(x) - \dfrac{1}{x} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{x^2-k^2}$ est continue sur $]-1,1[$ en utilisant le théorème de continuité des séries de fonctions. Notons que les fonctions $x \mapsto \frac{2x}{x^2-k^2}$ sont continues sur $]-1,1[$.
  Soit $a \in]0,1[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{x\in[-a,a]} \left|\dfrac{2x}{x^2-k^2}\right| \leqslant \dfrac{2a}{k^2-a^2}$, ce qui prouve la convergence normale sur $[-a,a]$ de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{2x}{x^2-k^2}$, donc la continuité de sa somme sur $[-a,a]$, puis sur $]-1,1[$.
- La fonction $g = f - h$ est donc continue sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ et pour $x \in]-1,1[$:
$$h(x) = \pi\frac{1+\mathrm{o}(x)}{\pi x + \mathrm{o}(x^2)} = \frac{1}{x}(1+\mathrm{o}(x)) = \frac{1}{x} + \mathrm{o}(1),$$
donc $x \mapsto g(x) = \gamma(x) + \mathrm{o}(1)$ est prolongeable en une fonction continue sur $]-1,1[$ en posant $g(0) = 0$. Par 1-périodicité, g est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. La fonction h vérifie sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ la même relation fonctionnelle que f car si $2x$ n'est pas entier, on a :
$$\begin{aligned} h(x) + h\left(x+\frac{1}{2}\right) &= \pi\operatorname{cotan}(\pi x) - \pi\tan\pi x \\ &= \pi\frac{\cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x)}{\cos(\pi x)\sin(\pi x)} = 2h(2x). \end{aligned}$$
La fonction $g = f - h$ vérifie la même relation fonctionnelle que f et h sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Par continuité, elle vérifie également cette relation sur $\mathbb{R}$.
Comme la fonction $|g|$ est continue sur le segment $[0,A]$, elle atteint sa borne supérieure sur ce segment, donc l'ensemble $T = \left\{x \in [0,A] \;\middle|\; |g(x)| = M_A\right\}$ est non vide et c'est un fermé de $\mathbb{R}$ car égal à $[0,A] \cap |g|^{-1}\left(\{M_A\}\right)$, donc il contient sa borne inférieure, d'où l'existence de x_0.
Mais $x_0 \leqslant 2A-1$, donc $\dfrac{x_0}{2} + \dfrac{1}{2} \leqslant A$, d'où :
$$\left|g\left(\frac{x_0}{2}+\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant M_A, \quad \text{et} \quad M_A = |g(x_0)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left|g\left(\frac{x_0}{2}\right)\right| + M_A\right),$$
par suite $\left|g\left(\dfrac{x_0}{2}\right)\right| \geqslant M_A$. Ce n'est possible que si $x_0 = 0$, autrement dit :
$$M_A = |g(0)| = 0.$$
Donc $g = 0$ sur $[0,A]$ puis sur $\mathbb{R}$ par 1-périodicité.

10.15 On pose $u_n(x) = \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n^{3/2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

- Pour tout $x \geqslant 0$, on a $|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$. Par comparaison aux séries de Riemann, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. Les fonctions u_n étant

continues, la somme f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, par croissances comparées, pour tout $x < 0$, on a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La série $\sum u_n(x)$ diverge alors grossièrement. En conclusion, $f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et elle est continue.

- Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$:
$$u_n'(x) = -\frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}\cdot$$
Soit $a > 0$. Par croissance de la fonction exponentielle, on a pour tout $x \geqslant a$ et $n \geqslant 1$:
$$-u_n'(x) = \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n} \leqslant \frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n}$$
et par croissances comparées :
$$0 \leqslant -u_n'(x) \leqslant \frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$
Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum u_n'$ converge normalement au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x > 0$ et $n \geqslant 1$, on a $\frac{u_n(x)-u_n(0)}{x} \leqslant 0$. Par conséquent :
$$\forall n \in \mathbb{N}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{f(x)-f(0)}{x} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-x\sqrt{k}}-1}{x}\cdot$$
Soit $M \in \mathbb{R}_+$. La série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ étant divergente, il existe un entier n tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2M$. Fixons n. Par ailleurs
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-x\sqrt{k}}-1}{x} \underset{x\to+0}{\longrightarrow} -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}},$$
et donc il existe $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in]0,\eta] \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-x\sqrt{k}}-1}{x} \leqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} + M,$$
ce qui implique :
$$\forall x \in]0,\eta] \quad \frac{f(x)-f(0)}{x} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-x\sqrt{n}}-1}{x} \leqslant -M,$$
en d'autres termes, $\frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} -\infty$. Par suite, f n'est pas dérivable en 0.

- On a, pour tout $x > 0$:
$$0 \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leqslant e^{-x\sqrt{2}} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}\cdot$$
Donc, quand x tend vers $+\infty$, $f(x) = e^{-x} + \mathrm{o}\left(e^{-x}\right)$, c'est-à-dire $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$.

10.16 Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{n^2x^2}\right)$. Il est clair que u_n est définie sur $\mathbb{R}^*$ et continue. Par parité de u_n, on peut restreindre l'étude de à $\mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque $\frac{1}{n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a :
$$u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2x^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}.$$
Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum u_n(x)$ est convergente. On en déduit que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$.
2. Démontrons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+^*$. Pour cela il suffit d'établir la convergence normale sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Soit donc $a > 0$. Par croissance de la fonction ln, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant a$:
$$0 \leqslant u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2x^2}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n^2a^2}\right).$$
La convergence de la série numérique $\sum u_n(a)$ assure la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[a, +\infty[$. Par conséquent, les fonctions u_n étant continues, la fonction f est continue.
3. • Équivalent en $+\infty$.
On constate que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$. Il est alors naturel de supposer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
On sait que l'inégalité $\ln(1+t) \leqslant t$ est valable pour tout $t > -1$. En notant $v_n : x \mapsto x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n^2x^2}\right)$, il s'ensuit :
$$0 \leqslant v_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
Par conséquent, la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, il a été remarqué que $\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = \frac{1}{n^2}$.
D'après le théorème de la double limite :
$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$
En d'autres termes, $x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, *i.e.* :
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$
• Équivalent en 0.
La technique utilisée plus haut est inopérante, car $u_n(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -2\ln x$ et, pour x fixé, la série $\sum(-2\ln x)$ est grossièrement divergente.

Soit $x>0$. L'application $t\mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x^2t^2}\right)$ est continue, décroissante. Puisque la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente, par comparaison série/intégrale, cette dernière fonction est intégrable. On en déduit l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2t^2}\right)\mathrm{d}t\leqslant f(x)\leqslant\int_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2t^2}\right)\mathrm{d}t+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).\quad(*)$$

Calculons $I(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2t^2}\right)$. Le changement de variable linéaire $t=\frac{u}{x}$ donne :

$$I(x)=\frac{1}{x}\underbrace{\int_x^{+\infty}\big(\ln(1+u^2)-2\ln u\big)\,\mathrm{d}u}_{J(x)}.$$

Les fonctions $U:u\mapsto\ln(1+u^2)-2\ln u$ et $V:u\mapsto u$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$U(u)V(u)=u\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\underset{u\to+\infty}{\sim}u\,\frac{1}{u^2}\underset{u\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Ainsi, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}J(x)&=-x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+2\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\\&=-x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}(x)\right).\end{aligned}$$

Puisque $2\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}(x)\right)\underset{x\to0}{\longrightarrow}\pi$ et $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\underset{x\to0}{\sim}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\underset{x\to0}{\sim}-2\ln x$, on a par croissances comparées :

$$J(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}\pi\qquad\text{et}\qquad I(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{\pi}{x}\cdot$$

Toujours par croissances comparées, au voisinage de 0 on a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\underset{0}{\sim}-2\ln x=\mathrm{o}\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

L'encadrement $(*)$ donne alors :

$$f(x)\underset{0}{\sim}\frac{\pi}{x}\cdot$$

10.17 On établit facilement, par récurrence sur n, que la fonction f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et qu'elle vérifie :

$$f_{n+1}^{(n+1)}=f_0\qquad\text{et}\qquad f_{n+1}(0)=f'_{n+1}(0)=\cdots=f_{n+1}^{(n)}(0)=0.$$

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange, on en déduit :

$$\forall x\in[0,b]\quad\big|f_{n+1}(x)\big|\leqslant\mathcal{N}_\infty(f_0)\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot$$

Par suite $\mathcal{N}_\infty(f_{n+1})\leqslant\dfrac{b^{n+1}}{(n+1)!}\mathcal{N}_\infty(f_0)$, ce qui prouve la convergence normale sur $[0,b]$ de la série de fonctions $\sum f_n$.

Posons $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Il s'agit d'une série simplement convergente sur $[0,b]$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, dont la série dérivée converge normalement sur $[0,b]$. D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a :

$$f' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} = f_0 + f.$$

Comme $f(0) = 0$, la fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est l'unique solution sur $[0,b]$ de l'équation différentielle $y' - y = f_0$, avec $y(0) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [0,b] \quad f(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f_0(t)\,\mathrm{d}t.$$

10.18 1. En effet, soit :

$$A_n = \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{F(b_n) - F(x) + F(x) - F(a_n)}{b_n - x + x - a_n}$$
$$= \frac{(b_n - x)\tau_{b_n(x)} + (x - a_n)\tau_{a_n}(x)}{b_n - x + x - a_n},$$

où $\tau_a(x) = \dfrac{F(x) - F(a)}{x - a}$ si $x \neq a$ et $F'(x)$ si $x = a$.

Ainsi A_n est un barycentre à masses positives de deux suites réelles de même limite $F'(x)$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = F'(x)$.

2. La fonction f est de période 1 et :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1/2] \\ 1 - x & \text{si } x \in]1/2,1]. \end{cases}$$

On en déduit que f est continue et à valeurs dans $[0,1/2]$.
La série de fonctions $\sum u_n$, avec $u_n(x) = 10^{-n} f(10^n x)$, est une série de fonctions continues qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leqslant 10^{-n} f(10^n x) \leqslant 10^{-n}/2.$$

La somme F est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$; elle est, comme f, de période 1.

Soit alors $x \in [0,1[$, de développement décimal *propre* $x = \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{x_p}{10^p}$, où tous les x_p sont dans $[\![0,9]\!]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{x_p}{10^p} \qquad \text{et} \qquad b_n = a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Nous allons montrer que $\dfrac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} = 10^n\big(F(b_n) - F(a_n)\big)$ n'a pas de limite lorsque n tend vers l'infini.

Pour $k \geqslant n$, $10^k a_n = \sum_{p=1}^{n} 10^{k-p} x_p \in \mathbb{Z}$; de même $10^k b_n \in \mathbb{Z}$, donc :

$$f(10^k a_n) = f(10^k b_n) = 0.$$

Pour $k < n$, on a :

$$10^k a_n = \sum_{p=1}^{n} 10^{k-p} x_p = \lfloor 10^k a_n \rfloor + \sum_{p=k+1}^{n} 10^{k-p} x_p.$$

- Si $x_{k+1} \in [\![0, 4]\!]$, on a :

  $10^k a_n - \lfloor 10^k a_n \rfloor \in [0, 1/2]$ et $10^k a_n - \lfloor 10^k a_n \rfloor + 10^{k-n} \in [0, 1/2]$.

  On en déduit :

$$f\left(10^k a_n\right) = \sum_{p=k+1}^{n} 10^{k-p} x_p$$

$$f\left(10^k b_n\right) = \sum_{p=k+1}^{n} 10^{k-p} x_p + 10^{k-n},$$

  d'où $10^{-k}\Big(f\big(10^k b_n\big) - f\big(10^k a_n\big)\Big) = 10^{-n} = b_n - a_n$.

- Si $x_{k+1} \in [\![5, 9]\!]$, on a :

  $10^k a_n - \lfloor 10^k a_n \rfloor \in [1/2, 1]$ et $10^k a_n - \lfloor 10^k a_n \rfloor + 10^{k-n} \in [1/2, 1]$.

  On en déduit :

$$f\left(10^k a_n\right) = 1 - \sum_{p=k+1}^{n} 10^{k-p} x_p$$

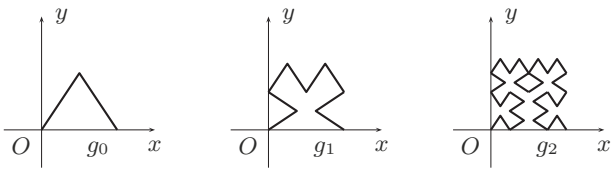
$$f\left(10^k b_n\right) = 1 - \sum_{p=k+1}^{n} 10^{k-p} x_p - 10^{k-n},$$

  d'où $10^{-k}\Big(f\big(10^k b_n\big) - f\big(10^k a_n\big)\Big) = -10^{-n} = -\left(b_n - a_n\right)$

Finalement, $\frac{F(b_n)-F(a_n)}{b_n-a_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k$, avec $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$. La série $\sum \varepsilon_k$ diverge, car son terme général ne tend pas vers 0 ; la suite $\left(\frac{F(b_n)-F(a_n)}{b_n-a_n}\right)$ n'a donc pas de limite et, d'après la première question, F n'est pas dérivable en x.

10.19 Notons $I_0 = \left[0, \frac{1}{4}\right]$, $I_1 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $I_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ et $I_3 = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

1. On obtient les graphes suivants



2. • Il y a *a priori* ambiguïté sur la définition de f en $1/4$, $1/2$ et $3/4$. Il est facile de vérifier pour chacun de ces points que les deux expressions données ont la même valeur.
   • Soit $f : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ un élément de A.
   * Pour tout $t \in I_0$, on a $\Phi(f)(t) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^2$.
   * Pour tout $t \in I_1$, on a $\Phi(f)(t) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   * Pour tout $t \in I_2$ on a $\Phi(f)(t) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   * Pour tout $t \in I_3$ on a $\Phi(f)(t) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

   Par conséquent $\Phi(f)$ est à valeurs dans $[0,1]^2$. De plus :

   $$\Phi(f)(0) = \left(\frac{y(0)}{2}, \frac{x(0)}{2}\right) = (0,0) \quad \text{et} \quad \Phi(f)(1) = \left(1 - \frac{y(1)}{2}, \frac{1 - x(1)}{2}\right) = (1,0).$$

   Les restrictions de $\Phi(f)$ à I_0 et I_1 sont continues. Par suite la fonction $\Phi(f)$ est continue à gauche et à droite en $1/4$, donc elle est continue. On vérifie de même la continuité en $1/2$ et $3/4$. Il s'ensuit que l'application $\Phi(f)$ est continue.
   • Soit f_1 et f_2 deux éléments de A. Pour tout $t \in I_0$:

   $$\big\|\Phi(f)(t) - \Phi(g)(t)\big\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\big\|\big(x_2(4t) - x_1(4t), y_2(4t) - y_1(4t)\big)\big\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{N}_\infty(f_1 - f_2)$$

   On démontre de même que $\big\|\Phi(f_1)(t) - \Phi(f_2)(t)\big\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{N}_\infty(f_1 - f_2)$ sur les intervalles I_i avec $i \in [\![1,3]\!]$. Il s'ensuit que :

   $$\mathcal{N}_\infty\big(\Phi(f_1) - \Phi(f_2)\big) \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{N}_\infty(f_1 - f_2).$$

3. Montrons que la série $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge normalement. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, du fait que Φ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne, on a :

   $$\mathcal{N}_\infty(f_{n+2} - f_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{N}_\infty(f_{n+1} - f_n)$$

   et par une récurrence immédiate :

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{N}_\infty(f_{n+1} - f_n) \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{N}_\infty(f_1 - f_0).$$

   La convergence de la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ permet de conclure. Par suite la série $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge uniformément et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f. Puisque les fonctions f_n sont continues et que la convergence est uniforme, la fonction f est continue.
4. Démontrons l'assertion par récurrence.
   Puisque :

   $$f_1(1/2) = \left(\frac{x(4(1/2) - 1)}{2}, \frac{y(4(1/2) - 1) + 1}{2}\right) = \left(\frac{x(1)}{2}, \frac{y(1) + 1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

   l'assertion est vérifiée au rang 1.

   Supposons l'assertion vraie pour un entier n. Soit $\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}, \frac{2j+1}{2^{n+1}}\right) \in C_{n+1}$.

   Distinguons quatre cas.

- Supposons $0 \leqslant i < 2^n$ et $0 \leqslant j < 2^n$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $t \in [0,1]$ tel que $f_n(t) = \left(\frac{2j+1}{2^n}, \frac{2i+1}{2^n}\right)$. Par conséquent,
$$f_{n+1}\left(\frac{t}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2i+1}{2^n}, \frac{2j+1}{2^n}\right).$$
- Supposons $0 \leqslant i < 2^n$ et $2^n \leqslant j < 2^{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, puisque $0 \leqslant \underbrace{j - 2^n}_{j'} < 2^n$, il existe $t \in [0,1]$ tel que $f_n(t) = \left(\frac{2i+1}{2^n}, \frac{2j'+1}{2^n}\right)$. Par conséquent, puisque $\frac{t+1}{4} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$:
$$f_{n+1}\left(\frac{t+1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2i+1}{2^n}, 1 + \frac{2j'+1}{2^n}\right) = \left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}, \frac{2j+1}{2^{n+1}}\right).$$
- Les cas $2^n \leqslant i < 2^{n+1}$ et $2^n \leqslant j < 2^{n+1}$, et $2^n \leqslant i < 2^{n+1}$ et $0 \leqslant j < 2^n$ se traitent de manière analogue.

5. Démontrons que $[0,1]^2 \subset \overline{f\big([0,1]\big)}$. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$ et $(x,y) \in [0,1]^2$.
Commençons par remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(x_n, y_n) \in C_n$ tel que $|x - x_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ et $|y - x_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$, *i.e.* tel que $\big\|(x,y) - (x_n,y_n)\big\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $t_n \in [0,1]$ tel que $f_n(t_n) = (x_n, y_n)$. Par convergence uniforme :
$$\begin{aligned} 0 \leqslant \big\|f(t_n) - (x,y)\big\|_\infty &\leqslant \big\|f(t_n) - f_n(t_n)\big\|_\infty + \big\|f_n(t_n) - (x,y)\big\|_\infty \\ &\leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f) + \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$
ce qui démontre que $(x,y) \in \overline{f\big([0,1]\big)}$.
Puisque f est continue et que $[0,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$, l'ensemble $f\big([0,1]\big)$ est un compact de $\mathbb{R}^2$, en particulier il est fermé. Par conséquent, $[0,1]^2 \subset f\big([0,1]\big)$. Puisque $f_n\big([0,1]\big) \subset [0,1]^2$ pour tout n, on obtient par passage à la limite dans les inégalités que $f\big([0,1]\big) \subset [0,1]^2$ et donc que $f\big([0,1]\big) = [0,1]^2$.

10.20 1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$ on a $\big(1-t^2\big)^n \geqslant (1-t)^n$. Par conséquent :
$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t \geqslant 2\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{2}{n+1}.$$
(b) Soit $\alpha \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall t \in [\alpha,1] \quad 0 \leqslant Q_n(t) \leqslant \frac{(1-\alpha^2)^n}{a_n} \leqslant \frac{n+1}{2}(1-\alpha^2)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Ainsi, la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[\alpha,1]$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et notons $Q_n = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k X^k$.

Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. En posant le changement de variable $t = x - u$, il vient, en remarquant que f est nulle à l'extérieur de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_{-1}^{1} f(x-t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x+1} f(u)Q_n(x-u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\max\{x-1,-\frac{1}{2}\}}^{\min\{x+1,\frac{1}{2}\}} f(u)Q_n(x-u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(u)Q_n(x-u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Il s'ensuit par linéarité et la formule du binôme :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(u)(x-u)^k\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{i=0}^{k} x^i \binom{k}{i}(-1)^{k-i}\alpha_k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(u)u^{k-i}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Cela démontre que la restriction de f_n à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ est une fonction polynomiale.

(b) La fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet elle l'est sur le segment $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Elle l'est également sur $\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Enfin la continuité de f en $\pm\frac{1}{2}$ permet de conclure.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \varepsilon$ pour tout (x, y) vérifiant $|x - y| \leqslant \alpha$.

Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Puisque $\int_{-1}^{1} Q_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - f_n(x) &= \int_{-1}^{1} f(x)Q_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} f(x-t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} \big(f(x) - f(x-t)\big)Q_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \big(f(x) - f(x-t)\big)Q_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{-\alpha} \big(f(x) - f(x-t)\big)Q_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{\alpha}^{1} \big(f(x) - f(x-t)\big)Q_n(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction Q_n étant à valeurs positives et la fonction f bornée :

$$\begin{aligned}\big|f(x)-f_n(x)\big| &\leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha}\big|f(x)-f(x-t)\big|Q_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^{-\alpha}\big|f(x)-f(x-t)\big|Q_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &\quad+\int_{\alpha}^{1}\big|f(x)-f(x-t)\big|Q_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \varepsilon\int_{-\alpha}^{\alpha}Q_n(t)\,\mathrm{d}t+2\mathcal{N}_\infty(f)\left(\int_{-1}^{-\alpha}Q_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_{\alpha}^{1}Q_n(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &\leqslant \varepsilon+2\mathcal{N}_\infty(f)\left(\int_{-1}^{-\alpha}Q_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_{\alpha}^{1}Q_n(t)\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

Puisque la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[\alpha,1]$ et par parité sur $[-1,-\alpha]$, on a :

$$\int_{-1}^{-\alpha}Q_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_{\alpha}^{1}Q_n(t)\,\mathrm{d}t\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Par suite, il existe n_0 tel que pour tout $n\geqslant n_0$ on a :

$$2\mathcal{N}_\infty(f)\left(\int_{-1}^{-\alpha}Q_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_{\alpha}^{1}Q_n(t)\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\varepsilon.$$

Par conséquent :

$$\forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\quad\big|f(x)-f_n(x)\big|\leqslant 2\varepsilon$$

ce qui donne la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.

3. Soit $f:\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, on peut prolonger f à $\mathbb{R}$ en une fonction continue nulle à l'extérieur de $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. L'étude précédente montre que f est limite uniforme sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ d'une suite de fonctions polynomiales.
De manière générale, la fonction :

$$g:x\mapsto f(x)-f(-1/2)-\big(f(1/2)-f(-1/2)\big)(x+1/2)$$

est une fonction continue, nulle en $1/2$ et $-1/2$. Par suite g est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales et puisque f et g diffèrent d'une fonction polynomiale, f est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.
Dans le cas général, si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, la fonction

$$\begin{array}{rccc} g: & \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & t & \longmapsto & f\left(\frac{a+b}{2}+(b-a)t\right)\end{array}$$

est une fonction continue sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Elle est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, la fonction f est limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall x\in[a,n]\quad f_n(x)=g_n\left(\frac{2x-a-b}{2(b-a)}\right).$$

10.21 1. Soit M un majorant de la fonction $t \mapsto e^{-at}\big|f(t)\big|$. Pour tout $x > a$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \big|f(t)e^{-xt}\big| = \big|f(t)e^{-xt+at-at}\big| \leqslant Me^{-(x-a)t}.$$

Il s'ensuit que L est bien définie sur $]a, +\infty[$ et que

$$g(t) = f(t)e^{-(a+1)t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Posons le changement de variable $t = -\ln(u)$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. Pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$0 = L(a+x+2) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-(x+1)t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \underbrace{g(-\ln u)}_{h(u)} u^x\,\mathrm{d}u.$$

Puisque $g(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $h(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$. La fonction h se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$. Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 = \int_0^1 h(u)\,u^n\,\mathrm{d}u,$$

et par linéarité :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad 0 = \int_0^1 h(u)\,P(u)\,\mathrm{d}u.$$

D'après le théorème de Weierstrass, Il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers h. Ainsi :

$$0 = \int_0^1 h(u)P_n(u)\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 h^2(u)\,\mathrm{d}u$$

La fonction h^2 étant continue, positive et d'intégrale nulle sur un intervalle, elle est nulle. Par suite h, puis f sont nulles.

10.22 1. La suite (φ_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :

$$f(0) = f(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = 1/2 \text{ si } x \in]0,1[.$$

En effet, soit $x_0 \in [0,1]$; notons $x_n = \varphi_n(x_0)$.

- Si $x_0 \in]0,1/2]$, on a $x_n \in]0,1/2]$, pour tout n. On vérifie facilement que la suite (x_n) est croissante et majorée par $1/2$; donc elle converge et c'est nécessairement vers un point fixe de f. Le seul candidat possible est dans ce cas $1/2$.
- Si $x_0 \in]1/2,1[$, alors $x_1 \in]0,1/2]$ et l'on est ramené au cas précédent.
- Si $x_0 = 0$ ou 1, on a $x_n = 0$, pour $n \geqslant 1$.

La convergence n'est pas uniforme, car la fonction limite n'est pas continue. Montrons qu'en revanche, la convergence est uniforme sur $[a, 1-a]$, pour tout $a \in]0,1/2[$. On a, pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$, $\varphi_n(1-x) = \varphi_n(x)$ et φ_n est croissante sur $[0,1/2]$; on en déduit :

$$\sup_{x\in[a,1-a]} \big|\varphi_n(x) - 1/2\big| = \sup_{x\in[a,1/2]} \big(1/2 - \varphi_n(x)\big) = 1/2 - \varphi_n(a)$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, d'après l'étude de la convergence simple.

Il y a *a fortiori* convergence uniforme sur tout segment $[a,b] \subset]0,1[$.

2. Notons A l'anneau des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Il est clair que $\varphi_n \in A$. Donc la fonction constante $1/2$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions dans A . Par produit, pour tout entier $k \geqslant 1$, la constante $1/2^k$ sur $[a,b]$ est elle-même limite uniforme d'applications toutes dans A. De même, pour $p \in \mathbb{Z}$, la constante $p/2^k$ est limite uniforme sur $[a,b]$ de fonctions de A. La fonction $x \mapsto x^q$ étant bornée sur $[a,b]$, pour tout $q \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{px^q}{2^k}$ est aussi limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions dans A. Par densité dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des réels de la forme $\frac{p}{2^k}$, avec $(p,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, on en déduit que toute fonction de la forme $x \mapsto \lambda x^q$, avec $(\lambda, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions de A.

   L'adhérence de A contient les polynômes donc $\mathcal{C}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$, d'après le théorème de Weierstrass.

Chapitre 11 : Séries entières

I Séries entières 582
1 Rayon de convergence 582
2 Pratique de la détermination du rayon de convergence 586
3 Opérations algébriques sur les séries entières . . . 590
4 Continuité 592
II Séries entières de la variable réelle 593
1 Séries dérivées 593
2 Primitive de la somme d'une série entière 593
3 Dérivation de la somme d'une série entière 594
III Développements en série entière 595
1 Fonctions développables en série entière 595
2 L'exponentielle 599
3 Séries du binôme 603
IV Pratique du développement en série entière . . . 605
1 Opérations algébriques et analytiques 605
2 Utilisation d'équations différentielles 607
3 Séries de Taylor 610
4 Développement en série entière et suites 611
5 Étude au bord du disque ouvert de convergence . . 612
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 614
Exercices 635

Séries entières



Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne soit le corps $\mathbb{R}$, soit le corps $\mathbb{C}$.

I Séries entières

Les séries entières sont des séries de fonctions de la variable complexe. Il se trouve que beaucoup de fonctions usuelles sont, du moins au voisinage de 0, sommes de séries entières. Par ailleurs, les séries entières permettent de construire facilement des solutions de certains problèmes, tel par exemple la résolution d'équations différentielles.

1 Rayon de convergence

Relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}_+$

La relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}_+$ est étendue à $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x < +\infty.$$

La relation ainsi obtenue est encore une relation d'ordre total.
À l'instar des définitions concernant les parties de $\mathbb{R}$, on introduit pour toute partie $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ les notions suivantes.

- Un majorant de A est un élément $M \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tel que $x \leqslant M$ pour tout $x \in A$. On définit de même un minorant. L'élément $+\infty$ est un majorant de toute partie de $\overline{\mathbb{R}}_+$.
- Un maximum de A est un élément $M \in A$ tel que $x \leqslant M$ pour tout $x \in A$. Puisque la relation d'ordre est totale, s'il existe un maximum, celui-ci est unique ; on le note $\max A$. De même, on définit un minimum.
- La borne supérieure de A est le plus petit des majorants. On définit de même la borne inférieure. Si la borne supérieure existe, elle est unique ; on la note $\sup A$.

Notation Soit $z_0 \in \mathbb{K}$ et $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

- On pose $D_O(z_0, r)$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{K} \mid |z - z_0| < r\}$.
  Si r est réel, cela correspond dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, au **disque ouvert** de centre z_0 et de rayon r. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $D_0(0, r) =]-r, r[$. Dans les deux cas, on a $D_O(z, +\infty) = \mathbb{K}$.
- On pose $D_F(z_0, r)$ est l'ensemble $\{z \in \mathbb{K} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$. Si r est réel, dans le cas où $K = \mathbb{C}$, cela correspond au **disque fermé** de centre z_0 et de rayon r, et, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cela correspond à $[-r, r]$. On a encore $D_F(0, +\infty) = \mathbb{K}$.

Proposition 1

Dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, toute partie non vide admet une borne supérieure.

Démonstration page 614

Séries entières

Définition 1

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.
La **série entière** associée à a est la série de fonctions $\sum u_n$, où :

$$\begin{array}{rccc} u_n : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & a_n z^n. \end{array}$$

La **somme de la série entière** est la somme de la série $\sum u_n$, c'est-à-dire la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

Remarques

1. On note $\sum a_n z^n$ la série entière associée à la suite a.
2. Si l'indexation commence à partir de n_0, on notera $\sum_{n \geqslant n_0} a_n z^n$.
3. De manière analogue, on définit les **séries entières de la variable réelle**, comme étant les séries de fonctions $\sum u_n$, où $u_n : t \mapsto a_n t^n$ est une fonction de la variable réelle.
4. Séries entières lacunaires. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.
   On note $\sum a_n z^{2n}$ la série entière $\sum b_n z^n$ où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad b_{2n} = a_n.$$
   Plus généralement, si $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers, on note $\sum a_n z^{\nu_n}$ la série entière $\sum c_n z^n$, où la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \begin{cases} a_k & \text{si } n = \nu_k, \text{ avec } k \in \mathbb{N} ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme d'Abel

Théorème 2 (Lemme d'Abel)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Principe de démonstration. Démontrer, dans le cas où la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, que l'on a $a_n z^n = \mathrm{O}\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Démonstration page 614

Rayon de convergence

Lemme 3

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.
L'ensemble $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|\, r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Démonstration page 614

Définition 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

1. La borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ de $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|\, r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est le **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$.
2. Le **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ est $D_O(0, R)$.
3. L'**intervalle ouvert de convergence** de la série entière (de la variable réelle) $\sum a_n t^n$ est $]-R, R[$.

Exemple Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Le rayon de convergence de $\sum \alpha^n z^n$ est $r = \dfrac{1}{|\alpha|}$.
En effet, la suite $(\alpha^n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, $|\alpha z| \leqslant 1$.

Remarques

1. Le rayon de convergence d'une série entière est un élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
2. Le disque ouvert de convergence est un ouvert éventuellement vide de $\mathbb{C}$. L'intervalle ouvert de convergence est un ouvert de $\mathbb{R}$.
3. Le disque ouvert de convergence est vide si $R = 0$. Le disque ouvert de convergence est $\mathbb{C}$ si $R = +\infty$.
4. Il vient de la définition que si la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $|z| \leqslant R$. De même, si la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors $R \leqslant |z|$.

5. On ne peut rien dire *a priori* sur le comportement de la suite $\left(|a_n|\,R^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, lorsque le rayon de convergence R est un réel strictement positif.
6. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe et $\lambda\in\mathbb{C}^*$, alors les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum |a_n| z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ coïncident.
7. Invariance par décalage. Soit $p\in\mathbb{N}$ et $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

   Le rayon de convergence de $\sum a_n z^{n+p}$ est alors R. En effet, si $r\in\mathbb{R}_+^*$, alors la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite :
   $$(a_n r^{n+p})_{n\in\mathbb{N}} = r^p\,(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$$
   est bornée.

   De même le rayon de convergence de $\sum a_{n+p} z^n$ est R. En effet, pour tout $r\in\mathbb{R}_+^*$, la suite $(a_n r^n)_{n\geqslant p}$ est bornée si, et seulement si, la suite :
   $$(a_n r^{n-p})_{n\geqslant p} = r^{-p}\,(a_n r^n)_{n\geqslant p}$$
   est bornée.

Proposition 4

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z\in\mathbb{C}$.

1. Si $|z|<R$, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.
2. Si $|z|>R$, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Démonstration page 614

Proposition 5

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la somme $f : z\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ vérifie :
$$D_O(0,R)\subset\mathcal{D}\subset D_F(0,R)$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 4. □

Exemples

1. Le rayon de convergence de $\sum z^n$ est 1. Puisqu'une série géométrique est convergente si, et seulement si, la raison est de module strictement inférieur à 1, le domaine de définition de la somme est $D_O(0,1)$.
2. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ est 1. En effet, si $|z|\leqslant 1$, alors la suite $\left(\frac{|z^n|}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1 et si $|z|>1$, la suite $\left(\frac{|z^n|}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Par ailleurs, pour tout z vérifiant $|z|\leqslant 1$, par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ est absolument convergente.

   Par suite, le domaine de définition de la somme est $D_F(0,1)$.

3. Le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$. En effet, pour tout complexe $z \neq 0$, on a :
$$\frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ est convergente et donc $\frac{|z|^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *a fortiori* la suite $\left(\frac{|z|^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Puisque cela est vérifié pour tout complexe $z \neq 0$, on a $R = +\infty$ et la fonction $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est définie sur $\mathbb{C}$.
4. Le rayon de convergence de $\sum n!\, z^n$ est 0. En effet, d'après l'étude précédente, pour tout complexe $z \neq 0$, on a $\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{|z|}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $n!|z|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, la suite $(!n|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est bornée pour aucun $z \neq 0$, ce qui implique que le rayon de convergence de $\sum n!z^n$ est nul. Par conséquent, le domaine de définition de la fonction $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n!\, z^n$ est $\{0\}$.

2 Pratique de la détermination du rayon de convergence

Inégalités

Point méthode

Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière, on procède souvent par double inégalité.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Nous avons déjà remarqué que si la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors le rayon de convergence R vérifie l'inégalité $|z| \leqslant R$ (*cf.* page 584). Le point suivant en découle.

Point méthode (Minoration du rayon de convergence)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.

On a $R \geqslant |z|$ si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

1. la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
2. la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
3. la série $\sum a_n z^n$ converge ;
4. la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

La contraposée du lemme d'Abel donne une méthode pour majorer le rayon de convergence.

Point méthode (Majoration du rayon de convergence)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.

On a $R \leqslant |z|$ si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

1. la série $\sum |a_n z^n|$ diverge ;
2. la série $\sum a_n z^n$ diverge ;
3. la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée ;

p.614 **Exercice 1** Montrer que la série $\sum n\, z^n$ a pour rayon de convergence 1.

p.615 **Exercice 2** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$ est $\sqrt{R}$ (avec une convention à donner pour $R = +\infty$).

p.615 **Exercice 3** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Montrer que le rayon de convergence R' de $\sum a_{2n} z^n$ vérifie $R' \geqslant R^2$ (avec une convention à donner pour $R = +\infty$). Peut-on espérer mieux ?

p.615 **Exercice 4** Quel est le rayon de convergence de $\sum \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$?

Comparaison

Proposition 6 (Comparaison)

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

Si l'inégalité $|a_n| \leqslant |b_n|$ est vérifiée à partir d'un certain rang, alors $R_a \geqslant R_b$.

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que la suite $(b_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Puisque $|a_n r^n| \leqslant |b_n r^n|$ à partir d'un certain rang, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également bornée. On a donc $R_b \leqslant R_a$. □

p.616 **Exercice 5** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Donner le rayon de convergence de $\sum d(n)\, z^n$.

Corollaire 7

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b respectivement.

1. Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ ou $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
2. Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Démonstration page 616

Exemple Le rayon de convergence de la série $\sum \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2^n}\right) z^n$ est 2.

En effet :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}.$$

D'autre part, la série géométrique $\sum \left(\frac{z}{2}\right)^n$ converge si, et seulement si, $|z|<2$. Ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{1}{2^n} z^n$ est 2 et donc, par comparaison, le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{2^n}\right) z^n$ est également 2.

Utilisation de la règle de d'Alembert

On peut parfois utiliser la règle de d'Alembert pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière.

Exemples

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes tous non nul. Notons R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$. Supposons que :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Examinons plusieurs cas.

(a) Supposons $L \in]0,+\infty[$. Alors pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, on a :

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L|z|.$$

- Si $|z|<\frac{1}{L}$, alors d'après la règle de d'Alembert la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Par suite $|z|\leqslant R$. Puisque cela est vrai pour tout z vérifiant $|z|<\frac{1}{L}$, on en déduit que $\frac{1}{L}\leqslant R$.
- Si $|z|>\frac{1}{L}$, alors, toujours d'après le règle de d'Alembert, la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente. Par suite $|z|\geqslant R$. Puisque cela est vrai pour tout z vérifiant $|z|>\frac{1}{L}$, on en déduit que $\frac{1}{L}\geqslant R$.

En conclusion $R=\frac{1}{L}$.

(b) Supposons $L=0$. Alors, pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, on a :

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par suite la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z\in\mathbb{C}$. Par conséquent $R=+\infty$.

(c) Supposons $L=+\infty$. Alors pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, on a :

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par suite, la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente pour tout $z\in\mathbb{C}^*$. Par conséquent $R\leqslant|z|$ pour tout z non nul et donc $R=0$.

À titre d'illustration, calculons le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{n}{3^n} z^n$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a :

$$\frac{\left|\frac{n+1}{3^{n+1}} z^{n+1}\right|}{\left|\frac{n}{3^n} z^n\right|} = \frac{(n+1)|z|}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|z|}{3}.$$

Le raisonnement mené plus haut donne que le rayon de convergence est $R = 3$.

2. Déterminons le rayon de convergence R de $\sum \alpha^{1+\cdots+n} z^{n^2}$, où α un réel strictement positif fixé. Rappelons que cette série correspond à la série entière $\sum b_n z^n$, où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \begin{cases} \alpha^{1+\cdots+k} & \text{si } n = k^2, \text{ avec } k \in \mathbb{N} ; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons, du fait qu'il y a une infinité d'indices pour lesquels b_n est nul, qu'il est illusoire de s'intéresser aux $\frac{|b_{n+1} z^{n+1}|}{|b_n z^n|}$.

En revanche, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\frac{|\alpha^{1+\cdots+(n+1)} z^{(n+1)^2}|}{|\alpha^{1+\cdots+n} z^{n^2}|} = \alpha|z|\big(\alpha|z|^2\big)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha|z|^2 < 1 ; \\ \alpha\,|z| & \text{si } \alpha|z|^2 = 1 ; \\ +\infty & \text{si } \alpha|z|^2 > 1. \end{cases}$$

Par suite, si $\alpha|z|^2 < 1$, alors la série $\sum \alpha^{1+\cdots+n} z^{n^2}$ est absolument convergente et donc la série $\sum b_n z^n$ est absolument convergente. Par conséquent, $R \geqslant \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$.

De même si $\alpha|z|^2 > 1$ la série $\sum \alpha^{1+\cdots+n} z^{n^2}$ n'est pas absolument convergente et donc *a fortiori* la série $\sum b_n z^n$ n'est pas absolument convergente. Par conséquent, $R \leqslant \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$. On en conclut que $R = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$.

Point méthode

Soit $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls.
Pour déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^{\nu_n}$, on peut s'intéresser, pour $z \in \mathbb{C}^*$, à $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1} z^{\nu_{n+1}}|}{|a_n z^{\nu_n}|}$.
Si cette limite existe, la règle de d'Alembert donne des informations quant à la valeur du rayon de convergence.

p.616

Exercice 6 Quel est le rayon de convergence de $\sum n!\, z^{n^2}$?

Convergence en un point de la frontière

Le comportement de la série entière sur la frontière de son disque ouvert de convergence peut être très variable, comme le montre les exemples et l'exercice suivants.

Exemple

1. Nous avons vu que le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est 1 et le domaine de définition de sa somme est $D_O(0,1)$ (*cf.* page 585). La série diverge donc en tout point de la frontière du disque ouvert de convergence.
2. Nous avons également vu page 585, que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ est 1 et le domaine de définition de la somme est $D_F(0,1)$. La série converge donc en tout point de la frontière du disque de convergence.

p.616

Exercice 7 On pose $S_n(\theta) = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$, pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ et $\theta \in]0, 2\pi[$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k(\theta)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_n(\theta)}{n} - 1.$$
2. On a $\left|S_n(\theta)\right| \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$ (*cf.* par exemple page 509).

   Démontrer que la série $\sum \dfrac{z^n}{n}$ converge pour tout $z \neq 1$ tel que $|z| = 1$.

Remarque L'exercice précédent donne donc un exemple de série entière pour laquelle la convergence de la série a lieu en tout point sauf un de la frontière de son disque ouvert de convergence.

3 Opérations algébriques sur les séries entières

Somme

Proposition 8 (Somme)

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

Le rayon de convergence R de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie alors l'inégalité :
$$R \geqslant \min\{R_a, R_b\}.$$
De plus, si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min\{R_a, R_b\}$.

Démonstration page 616

p.617

Exercice 8 Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \mathrm{ch}(n)\, z^n$.

Produit

Définition 3

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. La série entière $\sum c_n z^n$, où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

est le **produit de Cauchy** des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

Remarque Bien évidemment, on peut écrire le produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sous la forme $\sum \Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j \Big) z^n$.

Proposition 9 (Produit)

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, on a :

$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \, z^i \right) \left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_i \, z^i \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

En particulier, le rayon de convergence R du produit de Cauchy des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifie l'inégalité :

$$R \geqslant \min\{R_a, R_b\}.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 617

Utiliser le produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes.

Remarque Soit $\sum a_n^{(1)} z^n, \ldots, \sum a_n^{(p)} z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs $R_1, \ldots, R_p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$.
Posons $R = \min\{R_1, \ldots, R_p\}$.
On démontre aisément par récurrence sur l'entier p que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R$, on a :

$$\prod_{k=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)} z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i_1 + \cdots + i_p = n} a_{i_1}^{(1)} \cdots a_{i_p}^{(p)} \right) z^n.$$

Attention

- On ne peut rien dire de plus sur R, même dans le cas où $R_a \neq R_b$.
- L'égalité $\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \, z^i \right) \left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_i \, z^i \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$ n'a pas de sens si $|z| > \min\{R_a, R_b\}$!

p.617 **Exercice 9** Donner deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence distincts, telles que le rayon de convergence du produit soit strictement supérieur au minimum des deux rayons.

p.618 **Exercice 10** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Donner une minoration du rayon de convergence de la série entière $\sum S_n z^n$ et donner sa somme en fonction de f au voisinage de 0.

4 Continuité

Théorème 10

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. La série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $D_F(0,\rho)$, où $0 \leqslant \rho < R$.

Principe de démonstration. Utiliser le lemme d'Abel. Démonstration page 618

Attention La série $\sum a_n z^n$ ne converge pas normalement sur $D_O(0,R)$ en général ! La série géométrique $\sum z^n$ peut servir d'exemple.

Corollaire 11

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Alors la restriction de la somme au disque ouvert de convergence, c'est-à-dire l'application :

$$\begin{array}{ccc} D_O(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}$$

est continue.

Démonstration page 618

p.618 **Exercice 11 Formule de Cauchy**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.
On pose, pour tout $r \in]0,R[$, $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Démontrer que pour tout $0 < r < R$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) e^{-int}\,\mathrm{d}t$$

En déduire que $|a_n| \leqslant \dfrac{M(r)}{r^n}$.

Proposition 12

Soit une $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul et de somme f.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction f admet un développement limité à l'ordre p en 0, qui s'écrit :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n + o(z^p).$$

Démonstration page 619

II Séries entières de la variable réelle

1 Séries dérivées

Proposition 13 (Série dérivée)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. La série $\sum (n+1)a_{n+1} z^n$ est sa **série dérivée**. Elles ont même rayon de convergence.

Démonstration page 619

Corollaire 14

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 13 à la série $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$. □

Corollaire 15

Soit $p \in \mathbb{Z}$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^p a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

2 Primitive de la somme d'une série entière

Primitivation terme à terme

Théorème 16 (Primitivation terme à terme)

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Soit enfin F une primitive de f sur $]-R, R[$. On a alors :

$$\forall t \in]-R, R[\quad F(t) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

Démonstration page 619

Corollaire 17

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Démonstration page 620

Remarque On a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}.$$

3 Dérivation de la somme d'une série entière

Théorème 18 (Dérivation terme à terme)

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.
Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$ et :

$$\forall t \in]-R,R[\quad f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, t^{n-1}.$$

Démonstration page 620

Remarque Ainsi, la dérivée sur $]-R,R[$ de la somme d'une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence R est la somme de la série entière $\sum (n+1) a_{n+1} t^n$.

Exemple Le théorème 18 appliqué à la série entière $\sum t^n$ donne :

$$\forall t \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) t^n.$$

p.620

Exercice 12 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de somme f et de rayon de convergence $R > 0$, ainsi que $\varphi : I \to D_O(0,R)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, où I est un intervalle d'intérieur non vide.
Démontrer que la fonction $f \circ \varphi$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall t \in I \quad (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \varphi^{n-1}(t).$$

Corollaire 19

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.
Alors la restriction de f à $]-R,R[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Démonstration page 620

Exemple Le théorème 19 appliqué à la série entière $\sum t^n$ donne, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall t \in]-1,1[\quad \frac{p!}{(1-t)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\cdots(n+p)t^n.$$

Définition 4

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie au voisinage de 0. Sa **série de Taylor** est la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$.

III Développements en série entière

1 Fonctions développables en série entière

Définition 5

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un voisinage de 0, ainsi qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$.

- Soit $r > 0$. S'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ telle que :

$$\forall z \in D_O(0,r) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n\, z^n,$$

  on dit que f est **développable en série entière sur $D_O(0,r)$**.
- On dit que f est **développable en série entière** s'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $D_O(0,r)$.

Définition 6

Soit $U \subset \mathbb{R}$ un voisinage de 0, ainsi qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$.

- Soit $r > 0$. S'il existe une série entière $\sum a_n t^n$ telle que :

$$\forall t \in]-r,r[\quad f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n\, t^n,$$

  on dit que f est **développable en série entière sur $]-r,r[$**.
- On dit que f est **développable en série entière** s'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-r,r[$.

Remarques

- Bien noter que « développable en série entière » ne signifie pas que la fonction est globalement égale à la somme d'une série entière, mais simplement qu'elle coïncide avec la somme d'une série entière sur un voisinage de 0.

- Il est tout à fait possible que la somme de la série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence R et la fonction f coïncident sur un intervalle $]-r,r[$, mais qu'elles ne coïncident pas sur $]-R,R[$, même lorsque f est définie sur $]-R,R[$.
  Par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : t \mapsto \min\{t^2, 1\}$ est développable en série entière, car $f(t) = t^2$ sur $]-1,1[$, mais la relation $f(t) = t^2$ n'est pas vérifiée sur $\mathbb{R}$.

Exemples

1. Toute fonction polynomiale est développable en série entière.
2. Soit $a \in \mathbb{C}^*$. La fonction f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ par $f(z) = \frac{1}{z-a}$ est développable en série entière. En effet, pour tout $z \in D_O\big(0,|a|\big)$, on a :
$$f(z) = -\frac{1}{a}\,\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}.$$
3. Nous avons vu au corollaire 17 de la page 594 que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière.
   Il est clair que la relation $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$ n'est pas valable sur tout le domaine de définition de f, car la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$ diverge grossièrement pour $x > 1$. L'égalité :
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$$
   est vérifiée *a priori* simplement sur $]-1,1[$.
4. De même, nous avons vu que la fonction Arctan est développable en série entière. L'égalité :
$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
   est valable *a priori* sur $]-1,1[$.

Théorème 20 (Unicité du développement en série entière)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes.
S'il existe un intervalle $J =]-r,r[$, avec $r > 0$ tel que :
$$\forall x \in J \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n,$$
alors les suites a et b ont égales.

Démonstration page 621

Remarque En particulier, si le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est strictement positif et s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall t \in]-r, r[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0,$$

alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle.

Corollaire 21

Soit $U \subset \mathbb{K}$ un voisinage de 0 et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction.
Il existe alors au plus une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\exists r > 0 \quad \forall z \in D_O(0, r) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Démonstration page 621

Remarque Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{K}$ est développable en série entière si, et seulement si, elle est égale à la somme de sa série de Taylor sur un intervalle $]-r, r[$, avec $r > 0$.

p.621

Exercice 13 Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de sommes f est g. Montrer que si fg est nulle sur un voisinage de 0, alors $f = 0$ ou $g = 0$.

Les théorèmes sur les opérations sur les séries entières donnent le point suivant.

Point méthode

Soit $U \subset \mathbb{K}$ un voisinage de 0 ainsi que $f : U \to \mathbb{C}$ et $g : U \to \mathbb{C}$.

- Si f et g sont des fonctions développables en série entière sur $D_0(0, r)$, alors $f + g$, λf et fg sont développables en série entière sur $D_O(0, r)$.
- Si f et g sont des fonctions développables en série entière, alors $f + g$, λf et fg sont développables en série entière.
- Si U est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est développable en série entière sur $]-r, r[$, alors toutes les dérivées et les primitives de f sont développables en série entière sur $]-r, r[$

Remarque En particulier, l'ensemble des fonctions développables en série entière définies sur U est une algèbre.

p.622

Exercice 14 Que dire des coefficients du développement en série entière d'une fonction développable en série entière paire ? impaire ?

Un exemple : développement en série entière de $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$

La fonction $f : z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est développable en série entière sur $D_0(0,1)$. Par conséquent pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction f^{p+1} est développable en série entière sur $D_O(0,1)$. Fixons un entier naturel p.

Première méthode pour obtenir le développement en série entière de f^{p+1}. Notons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement en série entière de f^{p+1}. On a donc :

$$\forall z \in D_O(0,1) \quad \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n.$$

Par ailleurs, nous avons vu par dérivation à la page 595 que :

$$\forall t \in]-1,1[\quad \frac{p!}{(1-t)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)\cdots(n+1)\, t^n.$$

Il s'ensuit que les sommes des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \binom{n+p}{p} z^n$ coïncident sur $]-1,1[$. Par unicité du développement en série entière (*cf.* le théorème 20 de la page 596), on a $a_n = \binom{n+p}{p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite :

$$\forall z \in D_O(0,1) \quad \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n.$$

Une seconde méthode pour obtenir le développement en série entière de f^{p+1}. Par produit de Cauchy (*cf.* remarque page 591), pour tout $z \in D_O(0,1)$, on a :

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^{p+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_{p+1} \\ i_1+\cdots+i_{p+1}=n}} 1\cdots 1 \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n,p} z^n,$$

où $c_{n,p}$ désigne le nombre de solutions entières de l'équation :

$$i_1 + \cdots + i_{p+1} = n.$$

Le nombre $c_{n,p}$ est le nombre de distributions de n boules dans $p+1$ urnes. Son calcul est l'objet d'un exercice classique de dénombrement et l'on a :

$$c_{n,p} = \binom{n+p}{p}.$$

p.622

Exercice 15 Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^{*2}$ et $f : z \mapsto \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$.

Montrer que f est développable en série entière et donner son développement en série entière ainsi que le domaine de validité.

Exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ non développable en série entière

p.622

Exercice 16 Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-1/x^2)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\exp(-1/x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Démontrer que f admet un prolongement g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que g n'est pas développable en série entière.

Remarque Dans le cas de l'exercice précédent, le fait que f ne soit pas développable en série entière provient de ce que f ne coïncide avec la somme de sa série de Taylor sur aucun intervalle $]-r, r[$, bien que la rayon de convergence de la série de Taylor soit $+\infty$. Dans d'autres cas, le problème peut provenir de ce que le rayon de convergence de la série de Taylor est nul (voir l'exercice 11.19 de la page 637).

2 L'exponentielle

Rappelons que la fonction réelle $x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ a déjà été introduite comme bijection réciproque de la fonction ln, elle même introduite comme l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 0 de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{t}$.
Par ailleurs vous avez rencontré à plusieurs reprises les fonctions trigonométriques et la notation $e^{i\theta}$. À chaque fois certaines propriétés des fonctions trigonométriques ont dû être admises. Cependant, toutes les propriétés usuelles peuvent être déduites d'un petit nombre d'entre elles, à savoir :

- il existe un réel $\pi > 0$ et deux fonctions cos et sin qui sont de classe $\mathcal{C}^1$;
- la fonction sin est impaire, la fonction cos est paire ;
- on a les relations $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ et $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$;
- le tableau de variations de la fonction sin est

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin'(x)$		$+$	0
sin	0	↗	1

Nous allons donner une nouvelle définition des fonctions trigonométriques et démontrer qu'elles vérifient les propriétés données ci-dessus.

Développement en série entière de la fonction $x \mapsto e^x$

Lemme 22

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est infini.

Démonstration. Cela a été démontré en exemple à la page 585. □

Théorème 23

La fonction $x \mapsto e^x$ définie que $\mathbb{R}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Principe de démonstration. Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Démonstration page 623

Proposition 24

Les fonctions ch et sh sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate des définitions des fonctions ch et sh, ainsi que du théorème précédent. □

Exponentielle complexe

Le théorème 23 conduit naturellement à la définition suivante.

Définition 7

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

Remarques

- Cette définition est légitime, car, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ est convergente d'après le théorème 23.
- Ainsi par définition, pour tout x réel, on a $e^x = \exp x$.
- La fonction exp est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
- On peut noter e^z le nombre complexe $\exp(z)$. Afin d'éviter des confusions, on se limite dans la suite de ce livre aux notations e^x et $e^{ix} = \exp(ix)$, lorsque x est réel.

Proposition 25

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\,\exp(z_2).$$

Démonstration page 623

Proposition 26

Les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout nombre complexe z :

$$\exp(z) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$$

$$|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

Démonstration page 624

Corollaire 27

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |\exp(z)| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}.$$

Démonstration page 624

Fonctions trigonométriques

Définition 8

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions cos et sin par :

$$\cos x = \mathrm{Re}\big(\exp(ix)\big) \qquad \text{et} \qquad \sin x = \mathrm{Im}\big(\exp(ix)\big).$$

Remarque D'après le corollaire 27, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}$$

Proposition 28

Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on a :

$$\exp(z) = e^a\big(\cos b + i \sin b\big)$$

Démonstration page 624

Théorème 29

Les fonctions sin et cos sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} \qquad \text{et} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}.$$

En particulier la fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.

Démonstration page 624

p.624

Exercice 17 Pour $x \in \mathbb{R}$ calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

Corollaire 30

Les fonctions cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

Démonstration page 625

p.625

Exercice 18 Si $\varphi : I \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, alors $t \mapsto \exp\big(\varphi(t)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $t \mapsto \varphi'(t)\exp\big(\varphi(t)\big)$.

Définition du nombre π

Lemme 31

On a $\cos 2 < 0$.

Principe de démonstration. Utiliser le théorème des séries alternées.

Démonstration page 625

Proposition 32

Le réel $\alpha = \min\{x \in \mathbb{R}_+ \mid \cos x = 0\}$ est bien défini, strictement positif.
On définit alors $\pi = 2\alpha$.

Démonstration page 625

Variations des fonctions trigonométriques

Étudions les variations de la fonction sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Cette fonction est dérivable et $\sin' = \cos$. Par définition de π, la fonction cos ne s'annule pas sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et puisque $\cos 0 = 1$, la fonction continue cos est à valeurs strictement positives sur cet intervalle.

Il s'ensuit que la fonction sin est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Puisque $\sin(0) = 0$, la fonction sin est à valeurs positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; de la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et de $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, on en déduit alors que $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin'(x)$		$+$	0
sin	0	↗	1

Proposition 33

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i \qquad \text{et} \qquad \exp(2i\pi) = 1.$$

Démonstration. En effet, d'après l'étude précédente, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.
Par ailleurs, $\exp(2i\pi) = \exp\left(4\,\frac{i\pi}{4}\right) = i^4 = 1$. □

Corollaire 34

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp\Big(i(x+\frac{\pi}{2})\Big) = i\,\exp(x);$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x).$$

Remarque Il s'ensuit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, que l'on a :

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Morphismes

Théorème 35

L'application $\varphi : t \mapsto \exp(ix)$ est un morphisme continu, surjectif du groupe $(\mathbb{R},+)$ sur le groupe $(\mathbb{U},\times)$ de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration page 625

Corollaire 36

Les fonctions sin et cos sont périodiques, de plus petite période 2π.

Théorème 37

L'application exp est un morphisme continu surjectif du groupe additif $(\mathbb{C},+)$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*,\times)$, de noyau $i2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration page 626

Attention L'application exp de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$ n'est pas injective. En effet le noyau du morphisme exp n'est pas $\{0\}$.

3 Séries du binôme

Coefficients binomiaux généralisés

On pose pour tout $(\alpha,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Cette notation n'est pas explicitement au programme, mais elle est assez fréquemment utilisée.

Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et cherchons à donner un développement en série entière de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$. Cette dernière est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. Ici les dérivées successives sont faciles à calculer et la série de Taylor associée à f est la série :

$$\sum \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n.$$

Pour démonter que f est développable en série entière, il faut démontrer :

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

pour les x dans un voisinage de 0. Pour cela, il est naturel de penser à l'inégalité de Taylor-Lagrange, et donc on doit s'intéresser au comportement lorsque n tend vers $+\infty$ de :

$$M_n(x) = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[-|x|,|x|]} \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(1+t)^{n+1-\alpha}}\right|.$$

À partir de cette expression de $M_n(x)$, il n'y a pas de majoration simple qui vienne naturellement à l'esprit permettant de conclure que $M_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. C'est pourquoi nous utiliserons une autre méthode pour donner le développement en série entière de f.

Proposition 38

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in]-1,1[\quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Principe de démonstration. Le résultat correspond à la formule du binôme si α est un entier naturel. Dans les autres cas, la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ définie sur $]-1,1[$ est caractérisée par

$$\forall x \in]-1,1[\quad (1+x)f'(x) = \alpha f(x) \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

Chercher une série entière dont la somme vérifie ces deux propriétés. Démonstration page 627

Remarques

- L'exercice 11.18 de la page 637 donne néanmoins une démonstration de ce résultat en utilisant uniquement le reste intégral de la formule de Taylor.
- On retrouve ainsi que si $t \in]-1,1[$ et $p \in \mathbb{N}$, alors :

$$\frac{1}{(1-t)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} t^n.$$

En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\binom{-p-1}{n} = (-1)^n \frac{(p+1)\cdots(p+n)}{n!} = (-1)^n \binom{n+p}{n}.$$

Exemple Donnons le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n\, n!} \\ &= (-1)^n \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n\, n!} \times \frac{2\times 4\times\cdots\times 2n}{2\times 4\times\cdots\times 2n} \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!^2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la série du binôme :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} x^n.$$

p.627 **Exercice 19** Donner le développement en série entière de la fonction Arcsin.

p.628 **Exercice 20** Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

IV Pratique du développement en série entière

Cette section, à vocation pratique, traite de méthodes usuelles.

1 Opérations algébriques et analytiques

Point méthode

Pour établir l'existence d'un développement en série entière d'une fonction f, on cherche d'abord à voir si l'on peut se ramener par des opérations algébriques ou analytiques (intégration, dérivation) à des fonctions ou des développements connus.

Opérations algébriques

p.628 **Exercice 21** Donner le développement en série entière de $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$.

Cas des fractions rationnelles

Rappelons (*cf.* page 598) que pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < 1$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n.$$

On en déduit que si $a \in \mathbb{C}^*$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < |a|$:

$$\frac{1}{a-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}$$

et plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(a-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} \frac{z^n}{a^{n+p}}$$

Exemple Nous pouvons alors exprimer la somme de la série $\sum P(n)z^n$ où P est un polynôme de degré p de $\mathbb{C}[X]$.
Déterminons le rayon de convergence. Puisque $P(n) \sim \alpha n^p$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, et que le rayon de convergence de la série $\sum n^p z^n$ est 1, il vient que le rayon de convergence de $\sum P(n)z^n$ est 1.
Le polynôme P se décompose dans la base :

$$\left(1, (X+1), \frac{(X+2)(X+1)}{2!}, \ldots, \frac{(X+p)\ldots(X+2)(X+1)}{p!}\right)$$

de $\mathbb{C}_p[X]$ sous la forme :

$$P = \alpha_0 1 + \alpha_1(X+1) + \alpha_2 \frac{(X+2)(X+1)}{2!} + \cdots + \alpha_p \frac{(X+p)\ldots(X+2)(X+1)}{p!}.$$

On a donc pour tout z avec $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)z^n = \frac{\alpha_0}{1-z} + \frac{\alpha_1}{(1-z)^2} + \cdots + \frac{\alpha_p}{(1-z)^{p+1}}.$$

Point méthode

Une fonction rationnelle dont 0 n'est pas un pôle est développable en série entière sur $]-r, r[$, où r est le minimum des modules des pôles de la fonction. Pour le démontrer, on peut effectuer une décomposition en éléments simples.

Exemples

1. La fonction $f : z \mapsto \dfrac{z-1}{z+1}$ est développable en série entière sur $D_0(0,1)$. En effet :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \quad f(z) = 1 - \frac{2}{z+1}$$

et donc :

$$\forall z \in D_O(0,1) \quad f(z) = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2(-1)^{n+1} x^n$$

2. Pour $|z| < 1$, on a $F(z) = \dfrac{1-z^2}{1-2z\cos(\alpha)+z^2} = -1 + \dfrac{1}{1-ze^{-i\alpha}} + \dfrac{1}{1-ze^{i\alpha}}$ donc :

$$F(z) = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\alpha} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\alpha} z^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\alpha) z^n.$$

Dérivation/intégration

p.628

Exercice 22 Développement en série entière de $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$.

Indication. On pourra donner le développement en série entière de f'.

p.629

Exercice 23 Donner le développement en série entière de $f : x \mapsto \text{Arctan}(x+1)$.

Remarque On pourrait être tenté d'utiliser le développement en série entière de la fonction Arctan. Cela conduit à une impasse, puisque le développement en série entière est valable uniquement sur $]-1,1[$ et il permet simplement d'écrire :

$$\forall x \in]-2,0[\quad \text{Arctan}(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1},$$

ce qui en aucun cas ne peut donner un développement en série entière au voisinage de 0.

2 Utilisation d'équations différentielles

Équations différentielles

Une méthode de détermination de développement en série entière est celle de l'équation différentielle. Elle consiste à trouver une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux vérifiée par la fonction, et à la résoudre formellement avec une série entière.
Deux situations peuvent se présenter.

- On veut montrer que f est développable en série entière : on cherche une série entière de rayon de convergence strictement positif satisfaisant à la même équation différentielle et l'on utilise un résultat d'unicité des solutions d'une telle équation différentielle.
- On sait que f est développable en série entière : on cherche une relation de récurrence entre les coefficients de ce développement (unicité du développement en série entière) pour déterminer ces derniers.

Un premier exemple

Illustrons cette méthode avec la fonction $\varphi : t \mapsto \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons qu'il n'est pas évident *a priori* que φ soit développable en série entière.

- L'application φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$ et l'on vérifie facilement qu'elle est solution de l'équation différentielle du second ordre :
$$(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0. \qquad (E)$$
L'application φ est donc l'unique solution sur $]-1,1[$ du problème de Cauchy défini par l'équation (E) et la condition $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.

- Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n t^n$ sur un intervalle $]-R,R[$ avec $R>0$. Alors f' (respectivement f'') est la somme de la série entière $\sum (n+1)a_{n+1}t^n$ (respectivement $\sum (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n$) sur $]-R,R[$. Ainsi, toujours pour $t \in]-R,R[$, on a :
$$\begin{aligned}(1-t^2)f''(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n)t^n \\ tf'(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n \\ \alpha^2 f(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^2 a_n t^n.\end{aligned}$$
On en déduit que la fonction $t \mapsto (1-t^2)f''(t) - tf'(t) + \alpha^2 f(t)$ est la somme de la série entière :
$$\sum((n+1)(n+2)a_{n+2} + (-n(n-1) - n + \alpha^2)a_n)t^n.$$
sur $]-R,R[$. Par unicité du développement en série entière, f est solution de (E) si, et seulement si, :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)(n+2)a_{n+2} = (n^2-\alpha^2)a_n$$
Comme on veut $f(0)=1$ et $f'(0)=1$, on doit prendre $a_0=1$ et $a_1=0$. La relation de récurrence ci-dessus définit alors une unique suite (a_n) : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1}=0$ et :
$$a_{2p} = \frac{(-4)^p}{(2p!)}\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - (p-1)^2\right)\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - (p-2)^2\right)\cdots\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1\right)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

- $*$ Dans le cas où α est un nombre entier pair, les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang et la somme de la série obtenue est polynomiale.
  $*$ Dans le cas contraire, la règle de d'Alembert montre que la série entière $\sum a_{2n}t^{2n}$ a un rayon de convergence égal à 1.

Dans les deux cas, la fonction somme définie par cette série sur $]-1,1[$ est solution du problème de Cauchy cité ci-dessus et est donc égale à la fonction φ.

Remarque Dans le cas où α est un nombre entier pair, la fonction φ est polynomiale, ce qui s'explique par le fait que $\cos(\alpha\theta)$ est un polynôme pair en $\cos\theta$, donc un polynôme en $\sin\theta$.

Un second exemple

Illustrons la méthode avec la fonction $f : t \mapsto \operatorname{Arcsin}^2 t$.

- Puisque la fonction Arcsin est développable en série entière sur $]-1,1[$, par produit, il en est de même de f. Par ailleurs, la fonction f est paire. Il existe donc une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $t \in]-1,1[$, on ait :

$$\forall t \in]-1,1[\quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{2n}.$$

- Le calcul usuel de dérivées donne, pour tout $t \in]-1,1[$, les relations :

$$\sqrt{1-t^2}f'(t) = 2\operatorname{Arcsin}(t) \quad \text{et} \quad (1-t^2)f''(t) - tf'(t) = 2 \qquad (*)$$

- Pour tout $t \in]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned}(1-t^2)f''(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1)a_{2n}t^{2n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2n(2n-1)a_{2n}t^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((2n+1)(2n+2)a_{n+1} - 2n(2n-1)a_n)t^n \\ tf'(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2na_n t^{2n}.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $t \in]-1,1[$:

$$(1-t^2)f''(t) - tf'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((2n+1)(2n+2)a_{n+1} - 4n^2 a_n)t^{2n}.$$

Par unicité du développement en série entière, il vient de la relation $(*)$:

$$2a_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2n+1)(2n+2)a_{n+1} = 4n^2 a_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient alors $a_n = \frac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!}$.

Puisque $f(0) = 0$, on a $a_0 = 0$ et par conséquent :

$$\forall t \in]-1,1[\quad \operatorname{Arcsin}^2 t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!} t^{2n}.$$

Utilisation de relations fonctionnelles

À défaut d'obtenir une équation différentielle, il arrive que l'on puisse obtenir un développement en série entière de f en caractérisant la fonction par une relation fonctionnelle.

p.630

Exercice 24 On pose la fonction de la variable réelle $f : x \mapsto \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - x^{2^k}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur $]-1,1[$ et exprimer $f(x)$ à l'aide de $f(x^2)$.
3. Démontrer que f est développable en série entière.

3 Séries de Taylor

Point méthode

On n'utilise que très rarement les séries de Taylor pour obtenir un développement en série entière. Cependant :

- lorsque les dérivées successives sont très faciles à calculer, ce qui n'est pas courant, on peut chercher à démontrer que la somme de la série de Taylor de f coïncide avec f sur un voisinage de 0 ;
- en outre, les séries de Taylor peuvent donner des informations pour résoudre des questions de nature théorique.

p.631

Exercice 25

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle de la forme $I =]-a,a[$.
Démontrer que s'il existe $\rho > 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{Mn!}{\rho^n}$$

alors f est développable en série entière en 0 sur $]-R,R[$, où $R = \min\{a,\rho\}$.

p.632

Exercice 26 Théorème de Bernstein

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur voisinage de 0 telle que f et toutes ses dérivées soient positives sur ce voisinage. Montrer que f est développable en série entière.
Indication. On pourra utiliser l'exercice précédent.

p.632

Exercice 27 Soit $\lambda \in]0,1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(\lambda x)$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $f^{(n)}(x)$ pour tout x en fonction de f, λ et n.
2. Déterminer f, en vérifiant que f est nécessairement développable en série entière.

4 Développement en série entière et suites

Point méthode

Pour donner le terme général d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il arrive que l'on introduise la série entière $\sum a_n z^n$ de somme f. Si le rayon de convergence est non nul, on peut chercher à calculer $f(z)$, puis avec les techniques usuelles de développement en série entière, on cherche à développer la fonction f.

Exemple Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant la relation :

$$a_0 = a_2 = 1,\ a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+3} = a_{n+1} + a_n. \qquad (*)$$

- Supposons que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ soit non nul. Alors, pour tout $z \in D_O(0,R)$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+3}z^{n+3} = z^2 a_{n+1}z^{n+1} + z^3 a_n z^n,$$

et en sommant, il vient :

$$\forall z \in D_O(0,R) \quad \sum_{n=3}^{+\infty} a_n z^n = z^2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n + z^3 f(z),$$

c'est-à-dire :

$$\forall z \in D_O(0,R) \quad f(z) - 1 - z^2 = z^2(f(z)-1) + z^3 f(z,)$$

soit encore :

$$\forall z \in D_O(0,R) \quad \left(1 - z^2 - z^3\right) f(z) = 1.$$

La somme f de la série entière serait donc la fonction rationnelle $z \mapsto \dfrac{1}{1-z^2-z^3}$ sur $D_0(0,R)$.

- Réciproquement, si $g : z \mapsto \dfrac{1}{1-z^2-z^3}$ est développable en série entière, alors, en notant $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ sur un voisinage $D_O(0,r)$ de 0, on a

$$\forall z \in D_O(0,r) \quad (1-z^2-z^3)g(z) = 1.$$

Ainsi, toujours pour tout $z \in D_O(0,r)$ on a :

$$\begin{aligned}
&(1-z^2-z^3)g(z) = 1 \\
&\iff \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^{n+3} = 1 \\
&\iff \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n - \sum_{n=2}^{+\infty} b_{n-2} z^n - \sum_{n=3}^{+\infty} b_{n-3} z^n = 1 \\
&\iff b_0 + b_1 z + (b_2 - b_0)z^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} (b_n - b_{n-2} - b_{n-3}) z^n = 1.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on a :

$$b_0 = 1,\ b_1 = 0,\ b_2 - b_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 3 \quad b_n - b_{n-2} - b_{n-3} = 0.$$

Par conséquent, les suites a et b coïncident.

- La fonction g est développable en série entière en tant que fonction rationnelle n'ayant pas de pôle nul. Notons z_1, z_2 et z_3 les racines de $P = X^3 + X^2 - 1$. Elles sont distinctes, car $P' = X(3X+2)$ et que ni 0, ni $-2/3$ ne sont racines de P. Il s'ensuit que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$:

$$g(z) = \frac{1}{1-z^2-z^3} = \frac{1}{z_1(3z_1+2)}\,\frac{1}{z_1 - z} + \frac{1}{z_2(3z_2+2)}\,\frac{1}{z_2 - z} + \frac{1}{z_3(3z_3+2)}\,\frac{1}{z_3 - z}.$$

En notant $r = \min\bigl\{|z_1|, |z_2|, |z_3|\bigr\}$, on a pour tout $z \in D_O(0,r)$:

$$g(z) = \frac{1}{z_1(3z_1+2)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{z_1^{n+1}} + \frac{1}{z_2(3z_2+2)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{z_2^{n+1}} + \frac{1}{z_3(3z_3+2)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{z_3^{n+1}}.$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{1}{3z_1+2}\,\frac{1}{z_1^{n+2}} + \frac{1}{3z_2+2}\,\frac{1}{z_2^{n+2}} + \frac{1}{3z_3+2}\,\frac{1}{z_3^{n+2}}.$$

5 Étude au bord du disque ouvert de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et de somme f.
On peut supposer $R = 1$, le cas général s'y ramenant en posant $z = Rt$.
On s'intéresse ici au comportement de f en un point z tel que $|z| = 1$ et tel que $f(z)$ soit défini.
Si la série $\sum a_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum u_n$ de fonctions continues $u_n : z \mapsto a_n z^n$ converge normalement sur $D_F(0,1)$. Dans ces conditions la fonction f est continue sur $D_F(0,1)$.
Qu'en est-il si la série $\sum a_n$ n'est pas absolument convergente ?
Nous savons que la somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément est une fonction continue. Cela conduit au point suivant.

Point méthode

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$ et de somme f.
Si la série converge uniformément sur $[0,1]$, alors $f(1)$ est définie et :

$$f(1) = \lim_{t \to 1^-} f(t)$$

Remarque On adaptera lorsque l'on s'intéresse à la valeur en un point de convergence sur la frontière du disque ouvert de convergence.

Attention Il est possible que $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t)$ soit définie et que la série $\sum a_n$ diverge. Par exemple, la série $\sum(-1)^n$ est grossièrement divergente, alors que, pour $t \in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

p.633

Exercice 28 Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Nous l'avons déjà signalé : si la série numérique $\sum a_n$ est absolument convergente, alors la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D_O(0,1)$ et sa somme est continue sur $D_O(0,1)$. L'exercice suivant donne un résultat plus fin.

p.634

Exercice 29 Soit $\sum a_n$ une série numérique convergente. On note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, pour $n \in \mathbb{N}$, et f est la somme de la série entière $\sum a_n z^n$.

1. Justifier que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.
   Démontrer que pour tout $z \in D_0(0,1)$:
   $$f(1) - f(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$
2. Démontrer que la restriction $f_{|[0,1]}$ est continue en 1.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1 Soit A une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

- Si $+\infty \in A$, alors il est clair que $+\infty$ est le seul majorant de A et $\sup A = +\infty$.
- Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majorée dans $\mathbb{R}_+$, alors A, n'a pas de majorant réel. Ainsi $+\infty$ est le seul majorant de A et $\sup A = +\infty$.
- Si $A \subset \mathbb{R}_+$ est majorée dans $\mathbb{R}_+$, alors A a une borne supérieure α dans $\mathbb{R}_+$:

$$\alpha = \min\{x \in \mathbb{R}_+ \mid \forall y \in A \quad y \leqslant x\}.$$

Puisque :

$$\{x \in \overline{\mathbb{R}}_+ \mid \forall y \in A \quad y \leqslant x\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in A \quad y \leqslant x\} \cup \{+\infty\},$$

l'élément α est la borne supérieure de A dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Théorème 2 Notons $r = |z_0|$. Si $r = 0$, le résultat est immédiat, car l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < r$ est vide. Dans la suite, $r > 0$.
Supposons que la suite $(|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée et posons M un majorant de cette suite.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n z^n| = \left|a_n r^n \frac{z^n}{r^n}\right| \leqslant M \left|\frac{z}{r}\right|^n = \mathrm{O}\left(\left|\frac{z}{r}\right|^n\right).$$

Par suite, si $|z| < r$, alors la série géométrique $\sum \left|\frac{z}{r}\right|^n$ est convergente. Le théorème de comparaison sur les séries numériques donne alors que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Lemme 3 Notons $I = \left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|\, r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$. Cet ensemble est non vide, car il contient évidemment 0.

Par définition, pour tout $r \in I$, la suite $(|a_n|\, r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi, pour tout réel r' vérifiant $0 \leqslant r' \leqslant r$, on a $|a_n|\, r'^n \leqslant |a_n|\, r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent $r' \in I$. Il s'ensuit que I est un intervalle.

Proposition 4 Notons I l'ensemble des $r \in \mathbb{R}_+$ tels que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Puisque $R = \sup I$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, si $r < R$, alors il existe $\rho \in I$ tel que $r < \rho$.

1. Si $|z| < R$, alors il existe un réel $\rho \in I$ tel que $|z| < \rho$. La suite $(a_n\, \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée, et d'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
2. Si $|z| > R$, alors $|z| \notin I$, car R est un majorant de I. Par suite, si $|z| > R$, alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Exercice 1 Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum n\, z^n$.

Par croissances comparées, pour tout $r \in [0, 1[$, on a $nr^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent $R \geqslant r$. Cela étant vrai pour tout $r < 1$, on en déduit $R \geqslant 1$.

Puisque la série $\sum n$ diverge grossièrement, on a $R \leqslant 1$. Par suite $R = 1$.

Exercice 2 Notons R' le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^{2n}$.

- Supposons le rayon de convergence R fini.
  Pour tout $r < R'$, la suite $\left(a_n (r^2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a_n r^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et donc $r^2 \leqslant R$.
  Il s'ensuit que R' est fini et $R' \leqslant \sqrt{R}$.
  Pour tout $r < \sqrt{R}$, la suite $\left(a_n r^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a_n (r^2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, car $r^2 < R$.
  Ainsi $R' \geqslant r$, cela pour tout $r < \sqrt{R}$, et donc $R' \geqslant \sqrt{R}$.
  Il s'ensuit que $R' = \sqrt{R}$.
- Dans le cas où $R = +\infty$, alors la suite $\left(a_n r^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a_n (r^2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $r > 0$ et donc $R' = +\infty$.

Exercice 3 Soit $r \geqslant 0$ tel que $r < R$. La suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc la suite extraite $(a_{2n} r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Puisque la suite $\left(a_{2n} (r^2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a $r^2 \leqslant R'$.

- Si R est fini, puisque $r^2 \leqslant R'$ pour tout $r \leqslant R$, on obtient $R^2 \leqslant R'$. Si $R = +\infty$, alors $R' \geqslant r^2$ pour tout $r \geqslant 0$ et donc $R' = +\infty$. En convenant $(+\infty)^2 = +\infty$, on a toujours $R^2 \leqslant R'$.
- Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 2^{2^n}.$$
  Pour tout $r > 0$, on a :
  $$\ln\left(2^{2^n} r^{2n+1}\right) = (2n+1)\ln r + 2^n \ln 2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
  Par conséquent, la suite $\left(2^{2^n} r^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, ce qui implique que $R = 0$. Cependant $R' = +\infty$. Ainsi l'inégalité $R^2 \leqslant R'$ peut être stricte.

Exercice 4

Notons $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $r > 0$ et $n \geqslant 2$, on a :

$$\ln(a_n r^n) = n^2 \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) + n \ln r = \left((-1)^n + \ln r\right) n + \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1).$$

Distinguons deux cas.

- Si $\ln r > -1$, on a $\ln\left(a_{2n} r^{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (1 + \ln r)\, 2n$. Par conséquent :
  $$\ln(a_{2n} r^{2n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
  On en conclut que la suite $(a_{2n} r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et $R \leqslant r$. Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout $r > \frac{1}{e}$, on en déduit que $R \leqslant 1/e$
- De même, si $\ln r < -1$, alors $(-1)^n + \ln r \leqslant 1 + \ln r < 0$. Par suite :
  $$\ln(a_n r^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$
  En d'autres termes, $a_n r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, par conséquent, $R \geqslant r$. On en déduit que $R \geqslant r$, cela pour tout $r < 1/e$. Ainsi $R \geqslant 1/e$.

Par suite $R = \dfrac{1}{e}$.

Exercice 5 Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum d(n)z^n$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement $1 \leqslant d(n) \leqslant n$. Le rayon de convergence de la série $\sum z^n$ est 1, donc $R \leqslant 1$. De plus, nous avons vu en exercice que le rayon de convergence de la série $\sum nz^n$ est 1 (*cf.* page 587). Ainsi $R \geqslant 1$. En conclusion, $R = 1$.

Corollaire 7

1. Il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ et un rang N à partir duquel $|a_n| \leqslant M|b_n|$. La série $\sum Mb_nz^n$ ayant pour rayon de convergence R_b, la proposition précédente conduit à $R_a \geqslant R_b$.
2. Si $a_n \sim b_n$, alors $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ et $b_n = \mathrm{O}(a_n)$, donc d'après la proposition précédente, on a $R_a \geqslant R_b$ et $R_a \leqslant R_b$.

Exercice 6 Soit $r > 0$. Il est clair que

$$\frac{(n+1)!\, r^{(n+1)^2}}{n!\, r^{n^2}} = (n+1)r^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } r < 1\,; \\ +\infty & \text{si } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Ainsi, $R = 1$.

Exercice 7

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0, 2\pi[$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(S_k(\theta) - S_{k-1}(\theta)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} S_k(\theta) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} S_{k-1}(\theta) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} S_k(\theta) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} S_k(\theta) = \sum_{k=1}^{n-1} S_k(\theta)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_n(\theta)}{n} - 1.\end{aligned}$$

2. Fixons $\theta \in]0, 2\pi[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'après l'inégalité donnée :

$$\left|S_k(\theta)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

La série télescopique $\sum\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ est convergente, du fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. D'après le théorème de comparaison, la série $\sum\left(S_k(\theta)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right)$ est absolument convergente. Par ailleurs, $\frac{S_n(\theta)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, car la suite $(S_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée d'après l'inégalité donnée. On en déduit, à l'aide de l'expression de la question 1, que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie. La conclusion s'ensuit.

Proposition 8

- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. Les deux séries numériques $\sum a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ convergent absolument, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(a_n + b_n)z^n$ converge absolument, ce qui implique $R \geqslant \min\{R_a, R_b\}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nz^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_nz^n$.

- Dans le cas où $R_a \neq R_b$, on peut supposer, par exemple, $R_a < R_b$.
  Pour z tel que $R_a < |z| < R_b$, la suite $\big((a_n + b_n)z^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée, comme somme de la suite bornée $(b_n z_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car $|z| < R_b$) et de la suite non bornée $(a_n z_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car $|z| > R_a$).
  Cela implique $R \leqslant R_a$ et donc $R = R_a$, car $R \geqslant \min\{R_a, R_b\} = R_a$.

Exercice 8

- Le rayon de convergence de la série entière $\sum e^n z^n$ est $R_1 = 1/e$, car, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série géométrique $\sum (ez)^n$ converge si, et seulement si, $|ez| < 1$. De plus :
$$\forall z \in D_O\big(0, 1/e\big) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} e^n z^n = \frac{1}{1-ze}\cdot$$

- De même, Le rayon de convergence de la série entière $\sum e^{-n} z^n$ est $R_2 = e$ et :
$$\forall z \in D_O\big(0, e\big) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} z^n = \frac{1}{1-z/e}\cdot$$

- On a :
$$\sum \operatorname{ch}(n)\, z^n = \sum \left(\frac{e^n}{2} + \frac{e^{-n}}{2}\right) z^n.$$
  Puisque $R_1 < R_2$, d'après la proposition 8 de la page 590, le rayon de convergence de cette dernière série entière est $R = 1/e$ et, pour tout $z \in D_O(0, 1/e)$, on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{ch}(n)\, z^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z/e} + \frac{1}{1-ez}\right) = \frac{1-\operatorname{ch}(1)\, z}{1-2\operatorname{ch}(1)\, z + z^2}\cdot$$

Proposition 9 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$. Les deux séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergeant absolument, la série numérique produit $\sum c_n z^n$ converge absolument, et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$
Cela assure de plus que $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Exercice 9 Nous savons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module strictement inférieur à 1 :
$$(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1.$$
La série entière $\sum z^n$ a un rayon de convergence R_1 égal à 1. On a par ailleurs, en posant $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et $a_n = 0$ pour $n \geqslant 2$:
$$1 - z = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Le rayon de convergence R_2 de cette dernière série entière est $+\infty$. De plus, la série produit $\sum c_n z^n$ est donnée par :

$$c_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p = 1 - 1 = 0.$$

Le rayon de convergence R de la série produit de ces deux dernières séries entières est donc $+\infty$. On a donc $R > \min\{R_1, R_2\}$ et $R_1 \neq R_2$.

Exercice 10 La série entière définie par $\sum (a_0 + \cdots + a_n) z^n$ a un rayon de convergence $R' \geqslant \min\{1, R\}$. En effet cette série entière est le produit de Cauchy des séries $\sum z^n$ et $\sum a_n z^n$.

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min\{1, R\}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_0 + \cdots + a_n) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) = \frac{f(z)}{1-z}.$$

Théorème 10 Soit ρ un réel vérifiant $0 \leqslant \rho < R$. Pour tout entier n et $z \in D_F(0, \rho)$, on a $|a_n z^n| \leqslant |a_n| \rho^n$ et, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum |a_n| \rho^n$ converge. La convergence normale sur $D_F(0, \rho)$ de la série $\sum a_n z^n$ s'en trouve établie.

Corollaire 11 Pour tout entier naturel n, la fonction $u_n : z \mapsto a_n z^n$ est continue. Le théorème 10 de la page 592 montre que la série $\sum u_n$ converge normalement au voisinage de tout point de $D_O(0, R)$. La continuité de la somme sur $D_0(0, R)$ en découle.

Exercice 11 Soit $\sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$ et de somme f.

Soit $0 < r < R$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme la série $\sum a_k z^k$ converge normalement sur $D_F(0, r)$, la série de fonctions $\sum u_k$, où $u_k : \theta \mapsto \big(a_k (re^{i\theta})^k\big) e^{-in\theta}$ converge normalement, et donc uniformément, sur le segment $[0, 2\pi]$ vers la fonction $\theta \mapsto f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}$. D'après le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions convergeant uniformément sur un segment, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \, \mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} a_k (re^{i\theta})^k e^{-in\theta} \, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} \, \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Ce qui donne, en remarquant, pour $q \in \mathbb{Z}^*$, l'égalité $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{iq\theta} \, d\theta = 0$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \, \mathrm{d}\theta = a_n r^n.$$

Puisque f est continue sur le disque ouvert $D_O(0, 1)$, elle est continue sur le cercle de centre 0 et de rayon r, qui est une partie compacte de $\mathbb{C}$. Ainsi $M(r)$ est définie

et :

$$|a_n|\, r^n = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(r\, e^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta \right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(r\, e^{i\theta}\right) \right| \mathrm{d}\theta \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(r)\, \mathrm{d}\theta = M(r).$$

La conclusion est alors immédiate.

Proposition 12 Notons R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.

La fonction f est définie sur le disque $D = D_O(0, R)$. La fonction $g_p : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p+1} z^n$ est également définie sur D (*cf.* page 585). Par ailleurs en tant que somme d'une série entière, la fonction g_p est continue sur D. Donc au voisinage de 0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n + z^{p+1} g_p(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n + z^{p+1} \mathrm{O}(1) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n + \mathrm{o}(z^p).$$

Proposition 13 Notons R et R' respectivement les rayons de convergence de la série et de sa série dérivée.

- Nous avons remarqué que les rayons de convergence des séries entières $\sum n a_n z^{n-1}$ et $\sum n a_n z^n$ coïncident (*cf.* page 585).
- Puisque $n|a_n| \geqslant |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le rayon de convergence R' de la série entière $\sum n a_n z^n$ vérifie $R' \leqslant R$.
- Si $R = 0$, l'inégalité précédente donne $R' = 0$.
  Supposons $R > 0$. Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < R$. Choisissons un réel $r < \rho < R$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
  $$|n\, a_n r^n| = |a_n \rho^n| \left| n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \right|.$$
  Par croissances comparées, on a :
  $$\left| n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$
  ce qui implique, lorsque n tend vers $+\infty$, que l'on a :
  $$|n a_n r^n| = \mathrm{o}\left(a_n \rho^n\right).$$
  Puisque $\rho < R$, la suite $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et donc la suite $(n a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est également. Il s'ensuit que $R' \geqslant r$, puis que $R' \geqslant R$. On a bien l'égalité des deux rayons.

Théorème 16 Notons $u_n : t \mapsto a_n t^n$, qui sont des fonctions de la variable réelle. D'après le théorème 10 de la page 592, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur tout disque fermé inclus dans $D_0(0, R)$, *a fortiori* la série $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$.
Puisque les fonctions u_n sont continues ; le théorème de primitivation terme à terme (*cf.* le théorème 22 de la page 512) permet de conclure.

Corollaire 17

- Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k.$$

D'après le théorème 16 de la page 593, on a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

- Pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

D'après le théorème 16 de la page 593, on a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\operatorname{Arctan} x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Théorème 18 Les fonctions $u_n : t \mapsto a_n t^n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Puisque la série $\sum u_n$ converge simplement sur $]-R,R[$ et la série $\sum u'_n$ converge uniformément sur tout segment de $]-R,R[$, car il s'agit de la somme d'une série entière de la variable réelle, il vient que la fonction $\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 12 Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $u_n : t \mapsto a_n \varphi^n(t)$. Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I. Pour conclure, montrons que la série $\sum u'_n$ converge normalement sur tout segment.

Soit un segment $[a,b] \subset I$. Par compacité et continuité, la fonction $t \mapsto |\varphi(t)|$ atteint son maximum sur $[a,b]$, dont la valeur est notée r. Puisque φ est à valeurs dans $D_O(0,R)$, il vient que $r < R$. Toujours par compacité et continuité, la fonction $|\varphi'|$ est majorée par une constante M sur $[a,b]$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall t \in [a,b] \quad |u'_n(t)| \leqslant M\, n\, |a_n| r^{n-1}.$$

Puisque $r < R$, la série $\sum_{n \geqslant 1} M\, n\, |a_n| r^{n-1}$ converge et donc la série $\sum u'_n$ converge normalement sur $[a,b]$. Le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions permet alors de conclure.

Corollaire 19

- En appliquant le théorème 18 de la page 594, on démontre facilement par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]-R,R[$ et :

$$\forall t \in]-R,R[\quad f^{(n)}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k\, t^{k-n}.$$

- En particulier, puisque $0 \in]-R,R[$:

$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n.$$

Théorème 20 Notons R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ et R' le rayon de convergence de la série $\sum b_n z^n$. Puisque par hypothèse la série $\sum a_n x^n$ converge pour $x \in]-r,r[$, on a $R \geqslant r > 0$. De même $R' \geqslant r > 0$.
Posons

$$f : \begin{array}{ccc}]-R,R[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc}]-R',R'[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n. \end{array}$$

Puisque f et g coïncident sur $J =]-r,r[$ et qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, les dérivées successives de f et g coïncident sur J. En particulier $f^{(n)}(0) = n!a_n$ et $g^{(n)}(0) = n!b_n$ sont égaux, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La conclusion suit.

Remarque Nous aurions pu utiliser la proposition 12 de la page 593 et le principe d'unicité d'un développement limité pour établir le résultat.

Corollaire 21 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\exists r_1 > 0 \quad \forall z \in D_O(0,r_1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Fixons r_1. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\exists r_2 > 0 \quad \forall z \in D_O(0,r_2) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Fixons r_2 et posons $r = \min\{r_1, r_2\}$. Il est immédiat que $r > 0$ et l'on a :

$$\forall t \in]-r,r[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n.$$

Le théorème précédent permet de conclure.

Remarque L'exercice 11 de la page 592 fournit une autre démonstration de l'unicité du développement en série entière pour les fonctions de la variable complexe.

Exercice 13 Il suffit de montrer que si $a \neq 0$, alors $b = 0$ (et donc $g = 0$).
Supposons $a \neq 0$ et posons p le plus petit indice tel que $a_p \neq 0$. Puisque fg est nulle sur un *voisinage* de 0, par unicité du développement en série entière, on a $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$ pour tout entier naturel.
Montrons par récurrence « forte » que $b_n = 0$, pour tout entier $n = 0$.

- On a $c_p = a_p b_0 = 0$, donc $b_0 = 0$.
- Si $b_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors :

$$c_{n+p} = \sum_{k=p}^{n+p} a_k b_{n+p-k} = a_p b_n.$$

Par conséquent, $b_n = 0$, ce qui assure le résultat.

Remarque Ainsi, l'algèbre des fonctions développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ est intègre.

Exercice 14 Supposons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$, avec $r > 0$.

- Si f est impaire, alors, pour tout $x \in]-r, r[$:

$$f(x) + f(-x) = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(1 + (-1)^n\big) a_n x^n.$$

  Ainsi, par unicité du développement en série entière, $\big(1+(-1)^n\big)a_n = 0$ pour tout entier n, et donc $a_n = 0$ pour tout entier n pair.
- De même, si f est paire, alors $a_n = 0$ pour tout entier n impair.

Exercice 15

- Supposons $a \neq b$. On a alors :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\} \quad f(z) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$$

  et donc, puisque a et b sont non nuls, pour tout $z \in D_O\big(0, \min\{|a|, |b|\}\big)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}}\right) z^n,$$

  ce qui donne le développement en série entière de f.
- Supposons que $a = b$. Alors, pour tout $z \in D(0, |a|)$, d'après la proposition 9 de la page 591, on a :

$$f(z) = \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{(1-\frac{z}{a})^2} = \frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{z}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{a^{n+2}} z^n,$$

  ce qui donne le développement en série entière de f.

Exercice 16 Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Démontrons par récurrence :

   $\mathcal{H}_n$: « il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ ».

   Pour $n = 0$, le polynôme $P_0 = 1$ convient.
   Supposons $\mathcal{H}_n$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Alors, en dérivant $f^{(n)}$, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, que :

$$f^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) f(x).$$

   Il s'ensuit que le polynôme $P_{n+1} = 2X^3 P_n - X^2 P_n'$ convient.
2. - Notons $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$P_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1} = 2X^3 P_n - X^2 P_n'.$$

   On vient de voir que $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme P_n est élément de $\mathbb{R}_d[X]$ pour un certain entier d. Il s'ensuit que l'on a au voisinage de 0 :

$$P_n\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^{d+1}}\right),$$

et donc :

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = \mathrm{O}\left(\frac{\exp(-1/x^2)}{x^{d+1}}\right).$$

Il s'ensuit, par croissances comparées, que l'on a :

$$f^{(n)}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

- Soit p un entier naturel. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^p$ et que $f^{(k)}$ admet une limite finie en 0 pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, la fonction f a un unique prolongement de classe $\mathcal{C}^p$, qui coïncide avec le prolongement par continuité, que l'on note g. Par conséquent la fonction g est de classe $\mathcal{C}^p$ et $g^{(p)}(0) = 0$, cela pour tout entier p. La fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- La série de Taylor de g est nulle. Cependant, la fonction g ne s'annule qu'en 0 (car $g(x) = \exp(-1/x^2) > 0$ lorsque $x \neq 0$). Ainsi, g ne coïncide sur aucun intervalle $]-r, r[$ avec la somme de sa série de Taylor ; la fonction g n'est pas développable en série entière.

Théorème 23 Le résultat est immédiat lorsque $x = 0$.

Soit un réel $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Puisque la dérivée n-ième de $f : t \mapsto e^t$ est f, et puisque la fonction f est positive et croissante, on a $\sup_{t\in[-|x|,|x|]} \left|f^{(n)}(t)\right| = e^{|x|}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f sur l'intervalle $\left[-|x|, |x|\right]$ donne :

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{|x|}.$$

Puisque le rayon de convergence de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est infini, la série $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ converge et :

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{|x|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La conclusion en découle.

Proposition 25 Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Les deux séries $\sum \frac{z_1^n}{n!}$ et $\sum \frac{z_2^n}{n!}$ convergent absolument respectivement vers $\exp(z_1)$ et $\exp(z_2)$, donc leur produit de Cauchy $\sum \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \right)$ converge absolument vers $\exp(z_1)\exp(z_2)$. Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(z_1 + z_2\right)^n \\
&= \exp(z_1 + z_2).
\end{aligned}$$

Ainsi $\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$.

Proposition 26

- $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z-z) = \exp(0) = 1$.
- $\overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \exp(\overline{z})$.
- $|\exp(z)|^2 = \exp(z)\,\overline{\exp(z)} = \exp(z)\,\exp(\overline{z}) = e^{z+\overline{z}} = e^{2\,\mathrm{Re}(z)}$. Donc :

$$|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

Corollaire 27

$$|\exp(z)| = 1 \Longleftrightarrow e^{\mathrm{Re}(z)} = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0.$$

Proposition 28 Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. D'après la proposition 25 de la page 601 :

$$\exp(z) = \exp(a+ib) = \exp(a) \times \exp(ib) = e^a \times \exp(ib) = e^a\,(\cos b + i \sin b)\,.$$

Théorème 29 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, par définition :

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{\exp(ix) + \overline{\exp(ix)}}{2} \\
&= \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n x^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n(1+(-1)^n)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.
\end{aligned}$$

L'expression de $\sin x$ s'obtient de la même manière.

Exercice 17

- Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{x^n}{(2n)!} = \frac{\sqrt{x}^{\,2n}}{(2n)!}.$$

Par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \mathrm{ch}\left(\sqrt{x}\right).$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{x^n}{(2n)!} = \frac{(-(-x))^n}{(2n)!} = (-1)^n \frac{\sqrt{-x}^{\,2n}}{(2n)!}.$$

Par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \cos\left(\sqrt{-x}\right).$$

Corollaire 30 La fonction $\cos$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Par dérivation terme à terme, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2n)x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = -\sin(x).$$

La démonstration est analogue pour la fonction $\sin$.

Exercice 18 Il s'agit d'un cas particulier de l'exercice 12 de la page 594.

Lemme 31 Vérifions que la suite $\left(\frac{2^{2n}}{(2n)!}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Pour cela, il suffit de remarquer que pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{\frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{2^{2n}}{(2n)!}} = \frac{4}{(2n+1)(2n+2)} < 1.$$

D'après le théorème des séries alternées :

$$\cos 2 = -1 + R_1 \qquad \text{où} \qquad R_1 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}.$$

Toujours d'après le théorème des séries alternées :

$$|R_1| = \left|\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3}.$$

Il s'ensuit que $\cos 2 \leqslant -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0$.

Proposition 32 Notons $E = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \cos x = 0\right\}$.

- Montrons que E est non vide. La fonction $\cos$ est continue. De plus $\cos(0) = 1$ et $\cos 2 < 0$. D'après le théorème de valeurs intermédiaires, la fonction réelle continue sur l'intervalle $[0, 2]$ s'annule et donc E est non vide.
- L'ensemble E est une partie non vide, minorée de $\mathbb{R}$: ainsi E admet une borne inférieure α.
  Par ailleurs, puisque la fonction $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :
  $$E = \cos^{-1}\big(\{0\}\big) \cap \mathbb{R}_+$$
  est un fermé de $\mathbb{R}$, en tant qu'intersection de deux fermés. Par conséquent, α est un minimum de E et, puisque $\cos 0 = 1$, on a $\alpha > 0$.

Théorème 35

- D'après le corollaire 27 de la page 601, φ est à valeurs dans $\mathbb{U}$.
- D'après la proposition 25 de la page 601, φ est un morphisme et φ est continue par continuité de la fonction $\exp$.
- La fonction φ est 2π-périodique, car pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
  $$\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t)\exp(2i\pi) = \varphi(t).$$

- Montrons que la restriction φ_1 de φ à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ définit une bijection sur :

$$\mathbb{U}_1 = \{z \in \mathbb{U} \mid \mathrm{Re}(z) \geqslant 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}.$$

En effet, l'étude des variations de $\sin$ montre que la restriction de $\sin$ à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ définit une bijection sur $[0,1]$. Cela garantit l'injectivité de φ_1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{U}_1$. Puisque $\sin$ définit une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$, il existe donc $c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin c = b$. On a : $a = \sqrt{1-b^2}$ et puisque la fonction $\cos$ est à valeurs positives sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$ donne :

$$\cos c = \sqrt{1 - \sin^2 c} = \sqrt{1-b^2} = a.$$

La surjectivité de φ_1 est ainsi assurée.

- À l'aide de la relation $\varphi\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = i\varphi(t)$, on démontre que φ_k, restriction de φ à $\left[(k-1)\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2}\right]$, définit une bijection de cet intervalle sur $\mathbb{U}_k = (i)^{k-1}\mathbb{U}_1$. Il est facile de vérifier que $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3 \cup \mathbb{U}_4$. Il s'ensuit que φ est surjective. À l'aide du fait que $1 \notin \mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3$, on a que si $t \in [0, 2\pi[$, la relation $\varphi(t) = 1$ est équivalente à $t = 0$.
- Puisque la fonction φ est 2π-périodique et $\varphi(0) = 1$, il vient que $2\pi\mathbb{Z} \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$.
Le point précédent montre que $\mathrm{Ker}\,\varphi \cap [0, 2\pi[= \{0\}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, en notant $n = \lfloor t/2\pi \rfloor$, on a :

$$1 = \varphi(t) = \varphi(t - 2\pi n) = \varphi\left(t - 2\pi\left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor\right),$$

et puisque l'on a :

$$0 \leqslant t - 2\pi\left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor < 2\pi,$$

il vient que :

$$t = 2\pi\left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor.$$

On en conclut que $\mathrm{Ker}\,\varphi = 2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 37

- D'après la proposition 26 de la page 601, la fonction $\exp$ est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$.
- D'après la proposition 25 de la page 601, l'application $\exp$ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}, \times)$.
- Montrons que la fonction $\exp$ est surjective sur $\mathbb{C}^*$. D'après le théorème 35 de la page 603, pour tout nombre complexe z' de module 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z' = \exp(i\theta)$. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $z = |z|\, z'$, où $z' = \frac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z' = \exp(i\theta)$, et donc :

$$z = |z| \exp(i\theta) = \exp\big(\ln|z| + i\theta\big).$$

On a ainsi démontré la surjectivité.

- Soit $z = a + ib \in \operatorname{Ker}\exp$, c'est-à-dire tel que $e^a \exp(ib) = 1$.
  Puisque $\left|e^a \exp(ib)\right| = e^a$, cela impose $a = 0$ et $\exp(i\theta) = 1$. D'après le théorème 35 de la page 603, on a donc $b \in 2\pi\mathbb{Z}$. Par suite, $\operatorname{Ker}\exp \subset i2\pi\mathbb{Z}$. Il est clair, toujours d'après le théorème 35 de la page 603, que $i2\pi\mathbb{Z} \subset \operatorname{Ker}\exp$. Cela achève la démonstration.

Proposition 38 Nous traitons le cas $\alpha \notin \mathbb{N}$.
La fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ définie sur $]-1,1[$ vérifie :

$$\forall x \in]-1,1[\quad (1+x)f'(x) = \alpha f(x) \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \tag{$*$}$$

Par unicité des solutions d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire résolue du premier ordre à coefficients continus, la fonction f est caractérisée par $(*)$.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et g la somme de la série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence R. Pour tout $x \in]-R,R[$:

$$\begin{aligned}(1+x)g'(x) - \alpha g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^n - \alpha\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n\,x^n - \alpha\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\big((n+1)\,a_{n+1} + (n-\alpha)a_n\big)x^n.\end{aligned}$$

Par conséquent g vérifie $(1+x)g'(x) = \alpha g(x)$ et $g(0) = 1$ sur un voisinage de 0 si, et seulement si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1}\,a_n$ et $a_0 = 1$;
- le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est non nul.

La relation de récurrence définit une unique suite. Puisque $\alpha \notin \mathbb{N}$, cette suite est à valeurs non nulles et, via la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1. La fonction g vérifie donc $(1+x)g'(x) = \alpha g(x)$ sur $]-1,1[$ et $g(0) = 1$. Par conséquent $f = g$. Par récurrence, on obtient facilement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

La conclusion s'ensuit.

Exercice 19 L'exemple précédent donne que Arcsin' est développable en série entière sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,x^{2n}.$$

Il s'ensuit, d'après le théorème 16 de la page 593 que la fonction Arcsin est développable en série entière et, du fait que $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$:

$$\forall x \in]-1,1[\quad \operatorname{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n+1)}\,x^{2n+1}.$$

Exercice 20 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\binom{1/2}{n} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\\ &= (-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2^n\,n!}\\ &= (-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n(2n-1)\,n!}\times\frac{2\times 4\times\cdots\times 2n}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,\frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!^2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la série du binôme :

$$\forall x\in\,]-1,1[\quad \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,x^n.$$

Exercice 21 Proposons deux méthodes. Remarquons que f est définie sur $[-1,1[$.

- Première méthode. Notons que $f(x) = (x+1)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x\in\,]-1,1[$. On sait que :

$$\forall x\in\,]-1,1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,x^{2n}.$$

  Il s'ensuit par produit que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, avec :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N}\quad a_{2n} = a_{2n+1} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

- Deuxième méthode. Les fonctions $x\mapsto\sqrt{1+x}$ et $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ sont développables en série entière sur $]-1,1[$. Il s'ensuit par produit que f l'est également. Par ailleurs, pour tout $x\in\,]-1,1[$:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{1+x}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}\\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,x^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}\right)x^n.\end{aligned}$$

Les deux calculs sont bien évidemment justes, bien que les deux expressions soient très différentes.

Exercice 22

- Développons f' en série entière. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{2x+1}{(x-j)(x-j^2)} = \frac{1}{x-j}+\frac{1}{x-j^2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{j^{n+1}} + \frac{1}{(j^2)^{n+1}} \right) x^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} 2\,\mathrm{Re}(j^{n+1}) x^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}(n+1)\right) x^n. \end{aligned}$$

- Puisque f' est développable en série entière sur $]-1,1[$, la fonction f l'est également et, du fait que $f(0) = 0$, on a :

$$\forall x \in]-1,1[\quad f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \frac{x^n}{n}.$$

Remarque On peut proposer une autre méthode.
En remarquant que $1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, il vient pour $x \in]-1,1[$ que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right) \\ &= \ln(1-x^3) - \ln(1-x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{x^n}{n}, \end{aligned}$$

où $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = \begin{cases} -2 & \text{si } n \equiv 0 \mod 3 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 23 La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{(x+1+i)(x+1-i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x+1-i} - \frac{1}{x+1+i}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x+1-i}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x-\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{x-\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\frac{xe^{-i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} - 1}\right).$$

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$, on a :

$$\frac{1}{x-\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-i(n+1)\frac{3\pi}{4}}}{2^{\frac{n+1}{2}}} x^n,$$

et donc :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((n+1)\frac{3\pi}{4}\right)}{2^{\frac{n+1}{2}}}\, x^n.$$

Ainsi, la fonction f' est développable en série entière sur $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$. Par primitivation des développements en série entière, sachant que $f(0) = \frac{\pi}{4}$, on en déduit :

$$\forall x \in \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[\quad f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n\frac{3\pi}{4}\right)}{2^{\frac{n}{2}}}\, \frac{x^n}{n}.$$

La fonction f est bien développable en série entière sur $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$.

Remarque La suite $\left(\sin\left((n+1)\frac{3\pi}{4}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est 8-périodique non nulle. Par conséquent la série $\sum \frac{\sin\left((n+1)\frac{3\pi}{4}\right)}{2^{\frac{n+1}{2}}}\, x^n$ a pour rayon de convergence $\sqrt{2}$. On en déduit que f' (et *a fortiori* f) n'est développable en série entière sur aucun intervalle ouvert I contenant strictement $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$.

Exercice 24

1. Il est clair que f est définie en 1 et -1.
   Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$. Si $|x|>1$, alors $\left|x^{2^n}-1\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc :
   $$\ln\left(\left|x^{2^n}-1\right|\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
   Il s'ensuit que la série $\sum \ln\left(\left|x^{2^n}-1\right|\right)$ diverge grossièrement. Par suite :
   $$\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(x^{2^k}-1\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
   et $f(x)$ n'est pas définie.
   Si $|x|<1$, alors $x^{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln\left(1-x^{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -x^{2^n}$. Puisque $x^{2^n} \leqslant |x|^n$ et puisque la série géométrique $\sum |x|^n$ est convergente, par comparaison des séries à terme général positif, les séries $\sum x^{2^n}$ et $\sum \ln\left(1-x^{2^n}\right)$ convergent. Ainsi la suite $\left(\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1-x^{2^k}\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et, par continuité de la fonction exp, la quantité $f(x)$ est définie.
2. Il est immédiat que $f(x) = (1-x)f(x^2)$ pour tout $x \in \left]-1,1\right[$. Montrons que la fonction $g = \ln\circ f$ est continue. Pour cela, démontrons que la série de fonctions $\sum u_n$, où $u_n : x \mapsto \ln\left(1-x^{2^n}\right)$, converge uniformément sur tout segment de $\left]-1,1\right[$.

Soit $a \in]0,1[$. Par croissance de la fonction ln on a :

$$\forall x \in [-a,a] \quad \ln\left(1-a^{2^n}\right) \leqslant \ln\left(1-x^{2^n}\right) \leqslant 0$$

La convergence de la série $\ln\left(1-a^{2^n}\right)$ garantit la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[-a,a]$. Par conséquent, la fonction g est continue sur $]-1,1[$, car les u_n sont des fonctions continues. Par continuité de la fonction exponentielle, il en est de même de f.

3. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme g. On a :

$$\forall x \in]-R,R[\quad (1-x)g(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

Si $R > 0$, par unicité du développement en série entière, la fonction g vérifiera :

$$g(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-R,R[\quad g(x) = (1-x)g(x^2)$$

si, et seulement si :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \begin{cases} a_{\lfloor n/2 \rfloor} & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ -a_{\lfloor n/2 \rfloor} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \qquad (*)$$

La relation $(*)$ définit bien une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il est facile de vérifier par récurrence qu'elle est à valeurs dans $\{-1,1\}$. Pour cette suite, par comparaison, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ vaut 1. La somme g est une fonction continue sur $]-1,1[$ et vérifie :

$$g(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1,1[\quad g(x) = (1-x)g(x^2) \qquad (**)$$

On déduit de $(**)$ que pour tout entier n :

$$\forall x \in]-1,1[\quad g(x) = g\left(x^{2^{n+1}}\right) \prod_{k=0}^{n} \left(1-x^{2^k}\right).$$

D'autres part, la fonction g étant continue en 0, on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$g\left(x^{2^{n+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(0) = 1.$$

Par conséquent, toujours pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$g(x) = g\left(x^{2^{n+1}}\right) \prod_{k=0}^{n} \left(1-x^{2^k}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1-x^{2^k}\right) = f(x).$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1-x^{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

ce qui démontre que f est développable en série entière.

Exercice 25 Il suffit d'écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left|R_n(t)\right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\in[-|t|,|t|]} \left|f^{n+1}(x)\right| \leqslant M\frac{|t|^{n+1}}{\rho^{n+1}}.$$

Exercice 26 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 telle que f et toutes ses dérivées soient positives sur ce voisinage. Montrons que f est développable en série entière en 0. Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, 2\alpha] \subset I$ et soit $x \in [-\alpha, \alpha]$. La formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$f(x+\alpha) = f(x) + \alpha f'(x) + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}(x) + \alpha^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(x+\alpha u)\, du.$$

Tous les termes du second membre étant positifs, on a :

$$0 \leqslant \frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}(x) \leqslant f(x+\alpha) \leqslant f(2\alpha),$$

la dernière inégalité provenant de la croissance de f. L'exercice précédent s'applique alors et montre le résultat annoncé.

Exercice 27

1. Démontrons par récurrence l'assertion $\mathcal{H}_n$: « la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ et $f^{(n)}(x) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ».
   - Puisque f est par définition dérivable, f est continue. De plus la formule $f^{(n)}(x) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est évidemment vérifiée lorsque $n = 0$.
   - Supposons $\mathcal{H}_n$ vérifiée pour un entier naturel n. Par hypothèse, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f^{(n)}(x) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n x)$ et, puisque f est dérivable, cette dernière relation donne que $f^{(n)}$ dérivable. De plus, toujours pour $x \in \mathbb{R}$:

     $$f^{(n+1)}(x) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda^n f'(\lambda^n x) = \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} f\left(\lambda^{n+1} x\right).$$

     Cette expression montre que $f^{(n+1)}$ est continue et donc que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

   Cela démontre le résultat par récurrence.
2. Utilisons la formule de Taylor avec reste intégral, pour démontrer que f est nécessairement la somme de sa série de Taylor sur $\mathbb{R}$.

   Commençons par remarquer que $f^{(k)}(0) = f(0)\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Soit a un réel strictement positif. Notons $M_a = \max_{x\in[-a,a]} \left|f(x)\right|$, qui est bien définie puisque f est continue.

   Pour tout $x \in [-a, a]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} x^n &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} f(\lambda^{n+1} t)\, \mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} x^{n+1} \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} f(\lambda^{n+1} x u)\, \mathrm{d}u}_{R_n(x)} \end{aligned}$$

Puisque $\lambda \in]0,1[$, pour tout $x \in [-a,a]$ et $u \in [0,1]$, on a $\left|\lambda^{n+1}xu\right| \leqslant a$ et donc :

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &\leqslant \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\,|x|^{n+1}\,\lambda^{\frac{n(n+1)}{2}}\left|f(\lambda^{n+1}xu)\right|\mathrm{d}u\\ &\leqslant \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\,a^{n+1}\,\lambda^{\frac{n(n+1)}{2}}M_a\,\mathrm{d}u\\ &\leqslant \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\,a^{n+1}M_a\,\mathrm{d}u \leqslant M_a\,\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\end{aligned}$$

De la convergence de la série $\sum \frac{a^n}{n!}$, il vient que $R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que la fonction f est égale à la somme de sa série de Taylor sur $\mathbb{R}$.

Il est par ailleurs facile de vérifier que $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}\,x^n$ est une solution du problème.

Exercice 28

- Notons $u_n : \begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,x^n.\end{array}$

  Montrons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite $\left((-1)^n u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est négative. De plus, la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, de limite nulle, pour tout $x \in [0,1]$. Ainsi, d'après le théorème des séries alternées, pour tout $(x,n) \in [0,1]\times\mathbb{N}^*$:

  $$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,x^k\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}\cdot$$

  La convergence uniforme de la série $\sum u_n$ est ainsi établie. Puisque les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$, la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ est continue sur $]0,1[$. Par ailleurs $f(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x \in [0,1[$. Par conséquent :

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = f(1) = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

- Notons $v_n : \begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1}\end{array}$.

  Montrons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite $\left((-1)^v u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive. De plus, la suite $(|v_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, de limite nulle, pour tout $x \in [0,1]$. Ainsi, d'après le théorème des séries alternées, pour tout $(x,n) \in [0,1]\times\mathbb{N}^*$:

  $$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\,x^{2k+1}\right| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2n+3}\cdot$$

La convergence uniforme de la série $\sum v_n$ est ainsi établie. Puisque les fonctions v_n sont continues sur $[0,1]$, la fonction $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ est continue sur $]0,1[$. Par ailleurs $g(x) = \text{Arctan}(x)$ pour tout $x \in [0,1[$. Par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = g(1) = \lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 29

1. • Puisque la série $\sum a_n$ est convergente, la rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est supérieur à 1.

   • Soit $z \in D_O(0,1)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, en posant $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, on a :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-z^k) &= \sum_{k=1}^{n} (R_{k-1} - R_k)(1-z^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} R_k(1-z^{k+1}) - \sum_{k=1}^{n} R_k(1-z^k) \\ &= (1-z)\sum_{k=0}^{n-1} R_k z^k - (1-z^n)R_n. \end{aligned}$$

   Puisque $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|z| < 1$, on a $(1-z^n)R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc :

$$S_n = (1-z)\sum_{k=0}^{n-1} R_k z^k - (1-z^n)R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (1-z)\sum_{k=0}^{+\infty} R_k z^k.$$

   Par ailleurs :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) - f(1).$$

   La conclusion suit.

2. En posant $g(x) = f(1) - f(x)$ pour $x \in [0,1]$, la fonction g est la somme de la série de fonctions u_n, où $u_n : x \mapsto R_n x^n(1-x)$. Pour démontrer que f est continue en 1, il suffit de démontrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément, car les fonctions u_n sont continues.
   Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe n_0 tel que $|R_n| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$. Pour tout $n \geqslant n_0$ et $x \in [0,1[$, du fait que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k(1-x) = x^{n+1}$, on a :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k(1-x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |R_k| x^k(1-x) \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k(1-x) = \varepsilon\, x^{n+1} \leqslant \varepsilon.$$

   Cette dernière inégalité est encore vérifiée lorsque $x = 1$. La série $\sum u_n$ converge bien uniformément et la conclusion est alors immédiate.

S'entraîner et approfondir

11.1 Trouver les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ pour :

1. a_n est la somme des carrés des diviseurs de n ;
2. $a_n = 1$ si n est premier, $a_n = 0$ sinon.
3. a_n est le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 + y^2 \leqslant n^2$;
4. $a_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{n}$;
5. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

11.2 Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Comparer à R les rayons de convergence des séries entières :

1. $\sum n^\alpha a_n z^n$ (α réel quelconque) ;
2. $\sum a_n^2 z^n$;
3. $\sum a_n e^{\sqrt{n}} z^n$;
4. $\sum a_n z^{n^2}$.

11.3 Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières réelles suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^{n+1} n\, x^{2n+1}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{(-1)^n} x^n$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$.

11.4 Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{z^{p_n}}{p_n}$, où p_n est le n-ième nombre premier.

⋆ **11.5** *(Polytechnique 2015)*

Donner le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{\sin(\pi n\sqrt{2})}$.

On montrera que $\dfrac{1}{(2\sqrt{2}+1)\,q^2} \leqslant \left|\sqrt{2} - \dfrac{p}{q}\right| \leqslant \dfrac{1}{q}$ *pour tout* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$.

11.6 Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum 2^{(-1)^n n} z^n$ sur le disque ouvert de convergence.

11.7 Rayon de convergence et somme de la série entière de la variable réelle $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

11.8 1. Calculer, pour tout $x \in]-1,1[$, la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}\, x^{3n+1}$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

★ **11.9** Soit $f : D_F(0,1) \to \mathbb{C}$ une fonction continue, développable en série entière sur $D_O(0,1)$. On note $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in D_O(0,1)$.

1. Démontrer que pour tout $r \in [0,1[$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^2 \mathrm{d}t$$
On utilisera l'exercice 11 de la page 592.

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(e^{it})\right|^2 \mathrm{d}t$.

11.10 *(Centrale 2015)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note π_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On notera que $\pi_0 = 1$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $\pi_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi_k$.
2. Démontrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{\pi_n}{n!}\, x^n$ est strictement positif. On note f la somme de cette série sur $]-R,R[$.
3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f. En déduire f, puis une expression des π_n.

11.11 Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$, où $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \,\mathrm{d}t$.

11.12 Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{3^n}$ converge et calculer sa somme.

11.13 On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ est non nul et donner une équation différentielle du premier ordre avec second membre vérifiée par f.
2. Résoudre l'équation différentielle sur $]0,4[$.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

11.14 Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\sum a_n z^n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k\, k! \,.$$

11.15 Développement en série entière de $f(x) = (\operatorname{Arctan} x)^2$. On donnera les coefficients en fonction de $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1}$.

11.16 Développer en série entière $f(x) = \ln \sqrt{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$.

11.17 Développer en série entière $f(x) = e^{x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

11.18 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Retrouver le développement en série entière :

$$\forall x \in]-1,1[\quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n$$

à l'aide de la formule de Taylor reste intégral. Pour cela on pourra majorer le reste $R_n(x)$ à l'aide de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+xu}\right)^n \mathrm{d}u$.

11.19 Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\left(n^2 x\right)}{2^n}$.

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f n'est pas développable en série entière.

11.20 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note f sa somme. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module strictement inférieur à $\mathbb{R}$, la fonction $f_z : h \mapsto f(z+h)$ est développable en série entière.

⋆ **11.21** Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière, telle que $f(0) = 0$. Démontrer que $g : x \mapsto \dfrac{1}{1 - f(x)}$ est développable en série entière.

⋆ **11.22** On pose pour tout $z \in D_0(0,1)$, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n!}$.

1. Soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\lim_{t \to 1^-} \left| f\left(te^{2i\pi\frac{p}{q}}\right)\right|$.
2. Démontrer que f n'admet aucun prolongement continue en un point de la frontière du disque de convergence.

⋆ **11.23** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série $\sum na_n$ soit absolument convergente. On pose $\mathcal{D}$ le disque fermé de centre 0 et de rayon 1, ainsi que f la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Démontrer que f est bien définie sur $\mathcal{D}$.
2. On suppose de plus que $|a_1| \geqslant \sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n|$ et $a_1 \neq 0$. Démontrer que f est injective.

11.24 Soit $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec x réel.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Montrer que $f(x) = \mathrm{o}\,(1/(1-x))$ au voisinage de 1.
2. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $f(z) \underset{1}{\sim} \dfrac{\alpha}{1-x}$.

11.25 Soit $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On note f et g respectivement les sommes des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$. On suppose enfin que le rayon de convergence de la série $\sum b_n x^n$ vaut 1, que $a_n \underset{b}{\sim} {}_n$ et que la série numérique $\sum b_n$ diverge.

1. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)$?
2. Démontrer que $f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} g(x)$.

11.26 Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence par $c_0=1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$$

et la série entière $\sum c_n x^n$.

1. On suppose que la série entière $\sum c_n x^n$ est de rayon de convergence R strictement positif et l'on note $f(x)$ sa somme. Montrer, qu'au voisinage de 0, la fonction $f(x)$ vérifie $xf(x)^2 = f(x) - 1$ et est égale à la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{2x}\left(1-\sqrt{1-4x}\right).$$

2. Montrer que la fonction $g(x)$ se développe en série entière au voisinage de 0. En déduire $c_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ pour tout n.

Solution des exercices

11.1 1. Notons R le rayon de convergence.

- Puisque 1 divise tout les entiers, pour tout n, on a $a_n \geqslant 1$. Par comparaison, on a $R \leqslant 1$.
- L'entier $n \geqslant 1$ a au plus n diviseurs, le carré d'un diviseur est inférieur à n^2, donc la somme des carrés des diviseurs de n est $\mathrm{O}(n^3)$. Puisque le rayon de convergence de $\sum x^n$ vaut 1, le rayon de convergence de la série $\sum n^3 x^n$ vaut également 1 (*cf.* le corollaire 15 de la page 593). Par comparaison, on obtient $R \geqslant 1$ et donc $R = 1$.

2. Notons R le rayon de convergence.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant a_n \leqslant 1$. Par suite, $R \geqslant 1$.
- Puisque l'ensemble des nombres premiers est infini, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Par conséquent, on a $R \leqslant 1$ et donc $R = 1$.

3. Notons R le rayon de convergence.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $0^2 + 0^2 \leqslant n$, on a $a_n \geqslant 1$. Il s'ensuit par comparaison que $R \leqslant 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $x^2 + y^2 \leqslant n^2$, alors $(x, y) \in [\![-n, n]\!]^2$. Par conséquent, $a_n \leqslant (2n+1)^2 = \mathrm{O}\left(n^2\right)$. D'après le corollaire 15 de la page 593, il vient que $R \geqslant 1$. Par suite $R = 1$.

4. Notons R le rayon de convergence.

- Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est celui de $\sum \mathrm{ch}(n)\, z^n$ (*cf.* le corollaire 15 de la page 593).
- Puisque $\mathrm{ch}(n) \sim \frac{e^n}{2}$, le rayon de convergence de la série $\sum e^n z^n$, qui vaut $1/e$ (série géométrique), est égal à R (*cf.* le corollaire 7 de la page 587).
  Donc $R = 1/e$.

5. Notons R le rayon de convergence.

- La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives. À l'aide du développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, on a :
$$\ln a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} - \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1).$$
Il s'ensuit que :
$$a_n \sim e^{-1/2}\, e^{\sqrt{n}}$$
et R est le rayon de convergence celui de la série $\sum e^{\sqrt{n}}\, x^n$ (*cf.* le corollaire 7 de la page 587).
- Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a :
$$\frac{|e^{\sqrt{n+1}} z^{n+1}|}{|e^{\sqrt{n}} z^n|} = |z|\, e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = |z|\, e^{1/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$
En utilisant la règle de d'Alembert, il vient que $R = 1$.

11.2 Notons $R(\sum a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Notons aussi $I(\sum a_n z^n)$ l'ensemble des réels positifs tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée.

1. D'après le corollaire 15 de la page 593, pour tout *entier* relatif, $\sum n^\alpha a_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$. Par encadrement de n^α entre n^β et $n^{\beta+1}$, β partie entière de α, c'est aussi le rayon de convergence de $\sum n^\alpha a_n z^n$.
2. Dans ce cas :
$$r \in I(\textstyle\sum a_n^2 z^n) \iff (|a_n|^2 r^n) \text{ bornée} \iff (|a_n| r^{n/2}) \text{ bornée}$$
$$\iff r^{1/2} \in I(\textstyle\sum a_n z^n).$$
Donc $R(\sum a_n^2 z^n) = R^2$.
3. Comme $|a_n e^{\sqrt{n}}| \geqslant |a_n|$, le rayon de convergence R' de $\sum a_n e^{\sqrt{n}} z^n$ est inférieur ou égal à R. D'autre part, soit $r > 0$ tel que $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors :
$$\forall r' \in [0, r[\quad a_n e^{\sqrt{n}} r'^n = a_n r^n e^{\sqrt{n}} \cdot \frac{r'^n}{r^n},$$
et comme $e^{\sqrt{n}} \cdot \dfrac{r'^n}{r^n}$ tend vers 0, la suite $a_n e^{\sqrt{n}} r'^n$ tend vers 0. Donc $R' = R$.
4. Pour la dernière série, montrons d'abord que si R est fini non nul, alors :
$$R' = R\Big(\sum a_n z^{n^2}\Big) = 1.$$
En effet, dans ce cas, soit $r > R$. Pour tout $\rho > 1$, $a_n \rho^{n^2} = a_n r^n \cdot \dfrac{\rho^{n^2}}{r^n}$ qui n'est pas borné, car $\dfrac{\rho^{n^2}}{r^n}$ tend vers l'infini si n tend vers l'infini, et $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Donc $\rho \geqslant R'$.

   De même, si $r < R$, $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et, pour tout $\rho < 1$, $\dfrac{\rho^{n^2}}{r^n}$ tend vers 0, donc $(a_n \rho^{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et $\rho \leqslant R'$. Finalement, $R' = 1$.

   Le raisonnement précédent montre que si $R = +\infty$, R' est élément de $[1, +\infty[$, mais tout peut arriver :

   - si $a_n = 1/\lambda^{n^2}$, $\lambda > 1$, alors $R' = \lambda$;
   - si $a_n = 1/n!$, alors $R' = 1$;
   - si $a_n = 1/(n^2)!$, alors $R' = +\infty$.

   De même, si $R = 0$, R' peut être tout réel de $\big[0, 1\big]$ (on prendra les inverses des valeurs de a_n ci-dessus).

11.3 1. Le rayon de convergence est 1, car $\sum z^{2n+1}$ admet 1 pour rayon de convergence, et la multiplication par $(-1)^n n$ du coefficient ne change pas ce rayon. Pour $|x| < 1$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n\, x^{2n+1} = x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n\, x^{2(n-1)} = x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n\, t^{n-1}$$

avec $t = x^2$. Mais :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}n\,t^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}t^n\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{1+t}\right) = \frac{1}{(1+t)^2},$$

d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}n\,x^{2n+1} = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\cdot$$

Lorsque $x = \pm 1$, le terme général de la série ne tend pas vers 0, et il n'y a pas lieu de calculer la somme.

2. Le rayon de convergence est 1 car le coefficient de x^n est équivalent à $1/n^2$ lorsque n tend vers l'infini. Pour $|x| < 1$, et $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+2)} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)x^n = -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}\\ &= -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right)\cdot\end{aligned}$$

3. Puisque le coefficients a_n est $\mathrm{o}(n)$, le rayon de convergence de la série est au moins égal à 1. Comme pour $x = 1$ le terme général n'est pas borné, le rayon vaut 1. La série des termes pairs $\sum(2n)\,x^{2n}$ est de rayon de convergence 1 et de somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}2n(x^2)^n = 2(x^2)\sum_{n=1}^{+\infty}n(x^2)^{n-1} = \frac{2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}\cdot$$

Celle des termes impairs $\sum\dfrac{1}{(2n+1)}\,x^{2n+1}$ est de rayon de convergence 1. Par ailleurs, pour $x \in\,]-1,1[$, on a :

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

La somme de la série proposée est donc

$$\frac{2x^2}{\left(1-x^2\right)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

4. Notons $h_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ le n-ième nombre harmonique. Le quotient h_{n+1}/h_n, égal à $1 + \dfrac{1}{(n+1)h_n}$, tend vers 1. Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est égal à 1.

On remarque alors que le produit de Cauchy des séries entières classiques $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x^n}{n}$ est $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n x^n$. On en déduit :

$$\forall x \in\,]-1,1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty}h_n\,x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}\cdot$$

11.4 Cette série entière est aussi $\sum a_m z^m$, où $a_m = \begin{cases} \dfrac{1}{p_n} & \text{si } m = p_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour $r \in \mathbb{R}_+$, $a_m r^m = r^{p_n}/p_n$ si $m = p_n$, 0 sinon. Donc la suite $(a_m r^m)$ est bornée si, et seulement si, la suite (r^{p_n}/p_n) l'est, c'est-à-dire pour $r \leqslant 1$.
Le rayon demandé est 1.

11.5 Rappelons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Il s'ensuit que $\sin(\pi n\sqrt{2}) \neq 0$ pour tout entier n.
La série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{\sin(\pi n\sqrt{2})}$ est bien définie et notons R son rayon de convergence.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{1}{\left|\sin(\pi n\sqrt{2})\right|} \geqslant 1.$$
Par comparaison, puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ est 1, on en déduit que $R \leqslant 1$.
- Remarquons que pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a :
$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \left|\sqrt{2} + \frac{p}{q}\right| = \left|2 - \frac{p^2}{q^2}\right| = \frac{|2\,q^2 - p^2|}{q^2}. \qquad (\star)$$
Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, $2q^2 - p^2$ n'est pas nul, et puisqu'il s'agit d'un entier :
$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad 1 \leqslant \left|2q^2 - p^2\right|.$$
On en déduit, à l'aide de l'égalité $(\star)$, que pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$, on a :
$$\frac{1}{q^2} \leqslant \left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \left|\sqrt{2} + \frac{p}{q}\right| \leqslant (2\sqrt{2}+1) \left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right|,$$
et donc, en posant $\mu = 2\sqrt{2}+1$, on obtient l'inégalité :
$$\forall\, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1] \quad \frac{1}{\mu\, q^2} \leqslant \left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right|, \qquad (\star\star)$$
- Remarquons que pour tout $\frac{p}{q} \notin [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$, on a :
$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geqslant 1 \geqslant \frac{1}{\mu q^2},$$
car $\mu \geqslant 1$. Il s'ensuit que l'inégalité $(\star\star)$ est vérifiée pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $p_n = \lfloor n\sqrt{2} + 1/2 \rfloor$. L'entier p_n est l'entier le plus proche de $n\sqrt{2}$: $\left|p_n - n\sqrt{2}\right| \leqslant 1/2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par π-périodicité de la fonction $|\sin|$, on a :
$$\left|\sin(\pi n\sqrt{2})\right| = \left|\sin\big(\pi(n\sqrt{2} - p_n)\big)\right|.$$
De l'inégalité $(\star\star)$ et de la définition de p_n il vient :
$$\frac{1}{\mu\, n} \leqslant |n\sqrt{2} - p_n| \leqslant \frac{1}{2}. \qquad (\star\star\star)$$

Par positivité et concavité de la fonction sin sur $[0,\pi/2]$, on a classiquement :

$$\forall x \in [0,\pi/2] \quad 0 \leqslant \frac{2}{\pi}\,x \ \leqslant \sin(x),$$

et par imparité de la fonction sin, nous obtenons la minoration :

$$\forall x \in [-\pi/2,\pi/2] \quad \frac{2}{\pi}\,|x| \ \leqslant \big|\sin(x)\big|.$$

On en déduit alors, à l'aide de l'inégalité $(\star\star\star)$:

$$\frac{2}{\mu n} \leqslant 2\big|n\sqrt{2}-p_n\big| \leqslant \Big|\sin\big(\pi(n\sqrt{2}-p_n)\big)\Big|.$$

Ainsi, $\dfrac{1}{\sin(\pi n\sqrt{2})} = \mathrm{O}(n)$.

Puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$ est 1, on déduit que $R \geqslant 1$. Par suite, $R = 1$.

11.6 La série entière $\sum 2^{(-1)^n n} z^n$ est la somme des séries entières :

$$\sum 2^{2n} z^{2n} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{1}{2^{2n+1}}\, z^{2n+1}.$$

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\frac{\big|2^{2n+2} z^{2n+2}\big|}{\big|2^{2n} z^{2n}\big|} = 4|z|^2,$$

donc, d'après le règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum 2^{2n} z^{2n}$ est $\frac{1}{2}$. Par ailleurs :

$$\frac{\left|\dfrac{1}{2^{2n+3}}\, z^{2n+3}\right|}{\left|\dfrac{1}{2^{2n+1}}\, z^{2n+1}\right|} = \frac{|z^2|}{4}$$

et donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{1}{2^{2n+1}}\, z^{2n+1}$ est 2.

Puisque les deux rayons sont distincts, le rayon de convergence de la série $\sum 2^{(-1)^n n} z^n$ est $\frac{1}{2}$.

Pour tout $z \in D_O\left(0,\frac{1}{2}\right)$ on a :

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{(-1)^n n} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{2n} z^{2n} + \frac{z}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\, z^{2n} && \text{(les deux séries convergent)} \\
&= \frac{1}{1-4z^2} + \frac{z}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z^2}{4}} \\
&= \frac{4+2z-z^2-8z^3}{(1-4z^2)(4-z^2)}.
\end{aligned}$$

11.7 • Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{|x|^n}{n(n+1)}} = |x|\,\frac{n}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$ est 1. Notons f sa somme.

• Soit $x \in]-1,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\cdot$$

Puisque le rayon de convergence de la série $\sum \frac{x^n}{n}$ est 1, on a, dans le cas où $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\cdot \end{aligned}$$

D'après le développement en série entière des fonctions usuelles, on a, toujours pour $x \neq 0$:

$$f(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{x}\,(\ln(1-x) + x)\,,$$

c'est-à-dire :

$$f(x) = 1 + \frac{1-x}{x}\,\ln(1-x).$$

11.8 1. • Pour $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum (-1)^n x^{3n}$ est une série géométrique, qui converge si, et seulement si, $|x| < 1$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^n x^{3n}$ et de la série « primitive » $\sum \frac{(-1)}{3n+1}\, x^{3n+1}$ valent ainsi 1.

• Pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3},$$

et par théorème :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3},$$

car la somme de la série en nulle en 0.

• Décomposons en éléments simples $F = \dfrac{1}{X^3+1}\cdot$

Les racines de X^3+1 sont -1, $-j$ et $-j^2$. Par conséquent :

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{X+1} + \frac{1}{3j^2}\,\frac{1}{X+j} + \frac{1}{3j}\,\frac{1}{X+j^2} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{X+1} + \frac{1}{3}\,\frac{-X+2}{X^2-X+1}\cdot$$

On peut remarquer que :

$$\frac{X-2}{X^2-X+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2X-1}{X^2-X+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{(X-1/2)^2+3/4}.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^x \frac{t-2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\,\ln(x^2-x+1) - \sqrt{3}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x$$

et donc, pour $x \in]-1,1[$, on obtient l'expression :

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1} = \frac{1}{3}\left(\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}\,\frac{\pi}{6}\right)$$

2. Notons $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}$ pour $(n,x) \in \mathbb{N} \times [0,1]$.

Pour $x \in [0,1]$, la suite $\big((-1)^n u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle. D'après le théorème des séries alternées, la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \big|u_{n+1}(x)\big| \leqslant \frac{|x|^{3n+4}}{3n+4} \leqslant \frac{1}{3n+4}.$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. Il vient alors, les fonctions u_n étant continues, que la somme $f : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{3k+1}}{3k+1}$ est continue sur $[0,1]$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{3k+1} &= f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x)\\ &= \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{3}\left(\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}\,\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{3k+1} = \frac{1}{3}\left(\ln 2 + \sqrt{3}\,\frac{\pi}{3}\right).$$

11.9 1. Fixons $r \in [0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$\forall t \in [0,2\pi] \quad u_n(t) = f(re^{it})\overline{a_n} r^n e^{-nit}.$$

Puisque la fonction f est continue sur le compact $D_F(0,1)$, elle est bornée. Il s'ensuit que :

$$\forall t \in [0,2\pi] \quad \big|u_n(t)\big| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f) r^n |a_n|.$$

Du fait que $r < 1$, la série numérique $\sum |a_n| r^n$ est convergente et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement. On en déduit, du fait que les fonctions u_n sont continues, l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'une part, d'après l'exercice 11 de la page 592, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{2\pi} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{a_n}\, r^n\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = r^n\,\overline{a_n}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t = 2\pi|a_n|^2 r^{2n}.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(re^{it})\,\overline{a_n}\,(re^{-it})^n \\ &= f(re^{it})\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\overline{a_n}\,(\overline{re^{it}})^n\right) \\ &= f(re^{it})\,\overline{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(re^{it})^n} = \left|f(re^{it})\right|^2.\end{aligned}$$

Par suite :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n}|a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^2\mathrm{d}t.$$

2. • Montrons que $g : r \mapsto \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^2\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $[0,1]$.

On a en effet :

∗ pour tout $r \in [0,1]$ l'application $t \mapsto \left|f(re^{it})\right|^2$ est continue sur $[0,2\pi]$ par continuité de f ;

∗ pour tout $t \in [0,2\pi]$, l'application $r \mapsto \left|f(re^{it})\right|^2$ est continue ;

∗ pour tout $(t,r) \in 0,2\pi \times [0,1]$ on a :

$$\left|f(re^{it})\right|^2 \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)^2$$

et la fonction constante $\mathcal{N}_\infty(f)^2$ est intégrable sur le segment $[0,2\pi]$.

Par théorème, la fonction g est définie et continue sur $[0,1]$.

• Montrons que $h : r \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n}|a_n|^2$ est définie et continue sur $[0,1]$. Nous savons que h est définie sur $[0,1[$. Par ailleurs, d'après la question précédente :

$$\forall r \in [0,1[\quad h(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it}\right|^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{N}_\infty(f)^2\,\mathrm{d}t = \mathcal{N}_\infty(f)^2.$$

En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$, du fait qu'il s'agit d'une série à terme général positif, on a l'inégalité :

$$\forall r \in [0,1[\quad \sum_{n=0}^{p} r^{2n}|a_n|^2 \leqslant h(r) \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)^2.$$

En faisant tendre r vers 1 à p fixé dans cette dernière inégalité, il vient :

$$\forall r \in [0,1[\quad \sum_{n=0}^{p}|a_n|^2 \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)^2.$$

Il s'ensuit que la série numérique à terme général positif $\sum |a_n|^2$ est convergente, puisque la suite des sommes partielles est majorée. Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$, où $u_n(r) = |a_n|^2 r^{2n}$. On en conclut aisément que h est continue sur $[0,1]$.

Les fonctions g et h sont continues sur $[0,1]$ et coïncident sur $[0,1[$. Elles sont donc égales. En particulier :

$$g(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(e^{it})\right|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = h(1)$$

11.10 1. Rappelons qu'une partition $\mathcal{A}$ d'un ensemble E est un ensemble de parties non vides de E, deux à deux disjointes et dont l'union est égale à E.
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons Π_n l'ensemble des partitions de l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$. On peut remarquer que $\Pi_0 = \{\varnothing\}$.
Remarquons que le nombre de partitions d'un ensemble E fini ne dépend pas explicitement de E, mais seulement de son cardinal $|E|$.
Soit n un entier naturel. Pour $\mathcal{A} \in \Pi_{n+1}$, notons $C_{\mathcal{A}}$ l'élément de $\mathcal{A}$ contenant n. En regroupant les partitions telles que $C_{\mathcal{A}}$ soit un ensemble donné et en remarquant que, par définition, $n \in C_{\mathcal{A}}$, on obtient :

$$\Pi_{n+1} = \bigcup_{X \subset [\![0,n-1]\!]} \left\{\mathcal{A} \in \Pi_{n+1} \;\middle|\; C_{\mathcal{A}} = X \cup \{n\}\right\}. \qquad (*)$$

Il est clair que les partitions de $[\![0,n]\!]$ telle que $C_{\mathcal{A}} = X \cup \{n\}$ sont les partitions de $[\![0,n-1]\!] \setminus X$ auxquelles on adjoint la partie $X \cup \{n\}$. Il s'ensuit, pour $X \subset [\![0,n-1]\!]$:

$$\left|\left\{\mathcal{A} \in \Pi_{n+1} \;\middle|\; C_{\mathcal{A}} = X \cup \{n\}\right\}\right| = \pi_{n-|X|}.$$

Par suite, les ensembles dans l'union $(*)$ étant deux à deux disjoints :

$$\pi_{n+1} = \sum_{X \subset [\![0,n-1]\!]} \pi_{n-|X|} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{X \subset [\![0,n-1]\!] \\ |X|=k}} \pi_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi_{n-k}.$$

En conclusion, par symétrie des coefficients binomiaux, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi_k. \qquad (**)$$

2. Notons $b_n = \dfrac{\pi_n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et démontrons par récurrence (forte) que $0 \leqslant b_n \leqslant 1$.
L'assertion est vraie si $n = 0$.
Supposons l'assertion vraie pour tout $k \leqslant n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$. En divisant par $(n+1)!$ la relation $(**)$, il vient que :

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!}\, b_i. \qquad (***)$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$0 \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!}\, b_i \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} 1 = 1,$$

et donc $0 \leqslant b_{n+1} \leqslant 1$. Cela démontre l'assertion pour $n+1$ et donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par comparaison, puisque $|b_n| \leqslant 1$ et que le rayon de convergence de la série $\sum x^n$ vaut 1, il vient que $R \geqslant 1$. Par conséquent, $R > 0$.

3. • Soit $x \in]-R, R[$. En multipliant la relation $(***)$ par $(n+1)x^n$ et en sommant, il vient :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)b_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(n-i)!}\,b_i\right)x^n.$$
Cela est légitime, car le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$ est égal à celui de la série entière $\sum (n+1)b_{n+1}x^n$. Par ailleurs, d'après les résultats relatifs au produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on a :
$$\forall x \in]-R, R[\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(n-i)!}\,b_i\right)x^n = f(x)\exp(x).$$
Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$:
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(n-i)!}\,b_i\right)x^n = f(x)\exp(x).$$
Sachant que $f(0) = 1$, cette dernière relation donne, en intégrant l'équation différentielle résolue, linéaire du premier ordre, homogène vérifiée par f, la relation :
$$\forall x \in]-R, R[\quad f(x) = \exp\bigl(\exp(x) - 1\bigr).$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$ et notons $u_{n,k}(x) = \dfrac{k^n x^n}{k!\,n!}$ pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$.
Si $x \geqslant 0$, on a :
$$\exp\bigl(\exp(x)\bigr) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\exp(x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\exp(kx)}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{k^n x^n}{n!}\right). \qquad (\star)$$
La famille $\bigl(u_{n,k}(x)\bigr)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ étant alors à valeurs positives, on en déduit qu'elle est sommable.
Dans le cas général, puisque $\bigl|u_{n,k}(x)\bigr| = u_{n,k}\bigl(|x|\bigr)$, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, la famille $\bigl(u_{n,k}(x)\bigr)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Par conséquent, on peut intervertir l'ordre de sommation dans l'expression $(\star)$. Ainsi :
$$\exp\bigl(\exp(x)\bigr) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{k^n x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}\right). \qquad (\star\star)$$

• Par unicité du développement en série entière, puisque $f(x) = \frac{1}{e}\exp\bigl(\exp(x)\bigr)$ pour $x \in \mathbb{R}$, il vient de $(\star\star)$ l'expression suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}.$$

11.11 Première méthode

- Commençons par minorer le rayon de convergence. Il est immédiat que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \mathrm{O}(1)$$
Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$ est supérieur à 1.
- Soit $x \in]-1,1[$ et posons, pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $u_n : t \mapsto x^n \sin^{2n}(t)$ définies sur $[0,\pi/2]$. On a :
  * les fonctions u_n sont continues ;
  * Pour tout $(n,t) \in \mathbb{N} \times [0,\pi/2]$:
$$\big|u_n(t)\big| \leqslant |x^n|,$$
et, du fait que $|x| < 1$ et donc que la série numérique $\sum |x^n|$ est convergente, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[0,\pi/2]$.

Par conséquent, on peut intégrer terme à terme, c'est-à-dire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$$
Pour $t \in [0,\pi/2]$, la série numérique $\sum x^n \sin^{2n}(t)$ est une suite géométrique convergente et donc :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$
En posant le changement de variable $u = \tan t$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, on obtient :
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x(1-\cos^2(t))}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)(1 - x(1 - \frac{1}{1+u^2}))}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2(1-x)}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$
Ensuite, en posant $u = \dfrac{v}{\sqrt{1-x}}$, on obtient :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2(1-x)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$
- Montrons que le rayon de convergence R de la série $\sum I_n x^n$ vaut 1. Si $R > 1$, alors la somme est continue sur $]-R,R[$, en particulier elle est continue en 1, or l'expression obtenue de la somme donne que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$. Par conséquent, $R \leqslant 1$ et donc $R = 1$.

Deuxième méthode

- Calculons I_n. On reconnaît une intégrale de Wallis. Rappelons que pour $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $u(t) = \sin^{2n-1}(t)$ et $v(t) = -\cos t$, une intégration par parties donne la relation :
$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$
Sachant que $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient :
$$I_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\,\frac{\pi}{2}.$$
- Le développement en série entière de $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ donne, pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, que le rayon de convergence de la série $\sum (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\, x^n$ est 1 et que sa somme vaut $f(x)$ sur $]-1,1[$. Par conséquent :
$$\forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

11.12 Puisque $\dfrac{n^3}{(n+1)^3}$ tend vers 1, d'après la règle de d'Alembert le rayon de convergence de la série entière $\sum n^3 x^n$ est égal à 1. Sa somme f est donc définie sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$. La série proposée, évaluée de la série entière précédente en $\dfrac{1}{3} \in]-1,1[$, converge donc et sa somme égale à $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Puisque la série entière $\sum x^n$ est de rayon de convergence 1 et de somme $\dfrac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$, on a sur $]-1,1[$, par dérivation et multiplication par x, les expressions :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2},$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$
et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 x^n = \frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}.$$
La somme de la série proposée est alors $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{33}{8}$.

11.13 1. • Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{\frac{|x|^{n+1}}{\binom{2n+2}{n+1}}}{\frac{|x|^n}{\binom{2n}{n}}} = \frac{(n+1)}{2(2n+1)}\,|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|x|}{4}.$$
D'après la règle de d'Alembert, il vient que le rayon de convergence de la série $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ est 4.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$2(2n+1)a_{n+1} = (n+1)a_n,$$
soit
$$4(n+1)a_{n+1} - 2a_{n+1} = na_n + a_n. \qquad (*)$$
En multipliant la relation $(*)$ par x^n, avec $|x| < 4$ et en sommant, il vient :
$$4\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,$$
et donc pour tout x vérifiant $0 < |x| < 4$:
$$4f'(x) - 2\frac{f(x)-1}{x} = xf'(x) + f(x),$$
soit :
$$x(4-x)f'(x) - (x+2)f(x) = -2. \qquad (\star)$$
Cette relation est encore vérifiée pour $x = 0$.

2. Posons $I =]0, 4[$. Pour tout $x \in I$, on a :
$$\frac{x+2}{x(4-x)} = \frac{1}{2x} + \frac{3}{2}\frac{1}{4-x}\cdot$$
Il s'ensuit que l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène :
$$x(4-x)y' - (x+2)y = 0$$
est :
$$\mathcal{S}_0 = \Big\{x \mapsto a\,\frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}}\,;\ a \in \mathbb{R}\Big\}.$$
Par ailleurs, la méthode de la variation de la constante assure qu'il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $y : x \mapsto \alpha(x)\,\frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}}$ soit une solution de l'équation $(\star)$. La fonction α est caractérisée par :
$$\forall x \in I \quad \alpha'(x)\,\frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}} = \frac{-2}{x(4-x)},$$
c'est-à-dire :
$$\forall x \in I \quad \alpha'(x) = \frac{-2}{x^{3/2}}\sqrt{4-x}.$$
Une intégration par parties donne, pour $x \in I$:
$$\begin{aligned}\alpha(x) - \alpha(2) &= 4\sqrt{\frac{4-x}{x}} - 4 + 2\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(4-t)}} \\ &= 4\sqrt{\frac{4-x}{x}} + 2\,\mathrm{Arcsin}\Big(\frac{x}{2} - 1\Big) + C^{\mathrm{te}}.\end{aligned}$$
Il s'ensuit que l'ensemble des solutions de $(\star)$ sur I est :
$$\mathcal{S} = \Big\{x \mapsto \frac{4}{4-x} + \Big(2\,\mathrm{Arcsin}\Big(\frac{x}{2} - 1\Big) + a\Big)\,\frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}}\,;\ a \in \mathbb{R}\Big\}.$$

3. Par conséquent, il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I \quad f(x) = \frac{4}{4-x} + \left(2\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{2}-1\right)+a\right)\frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}}\cdot$$

La fonction f, qui est la somme d'une série entière sur $]-4,4[$, étant dérivable en 0, on en déduit que :

$$a = 2\,\mathrm{Arcsin}\,(1) = \pi.$$

Il s'ensuit que :

$$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{4}{3} + \left(-2\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right)+\pi\right)\frac{1}{3^{3/2}} = \frac{4}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}\cdot$$

11.14 On remarque que :

$$a_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(k+1-1)\cdot k! = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\big((k+1)!-k!\big) = n+1-\frac{1}{n!}\cdot$$

Le rayon de convergence est donc 1 et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n - e^z = \frac{1}{(1-z)^2} - e^z.$$

11.15 On sait que $\mathrm{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ sur $]-1,1[$. Donc, sur $]-1,1[$, on a :

$$f'(x) = 2\,\frac{\mathrm{Arctan}(x)}{1+x^2} = 2\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\Big).$$

Ces deux série entières ont même rayon de convergence égal à 1, et le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries entières s'applique, entraînant que, pour $x \in]-1,1[$, on a $f'(x) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$, avec :

$$c_n = \sum_{p+q=n}\frac{(-1)^p}{2p+1}\,(-1)^q = (-1)^n S_n, \quad \text{avec} \quad S_n = \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{2p+1}\cdot$$

Par suite, par intégration de développement en série entière :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n S_n}{n+1}\,x^{2n+2}.$$

Comme $1 \leqslant S_n \leqslant n+1$, le rayon de convergence de cette série est 1.

11.16 Pour $\alpha \equiv 0 \mod 2\pi$, $f(x) = \ln|1-x| = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ sur $]-1,1[$, avec un rayon de convergence égal à 1.

De même, si $\alpha \equiv \pi \mod 2\pi$, $f(x) = \ln|1+x| = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ sur $]-1,1[$, avec un rayon de convergence égal à 1.

Si α n'est congru ni à 0 ni à π modulo 2π, f est définie et dérivable sur tout $\mathbb{R}$, avec, pour tout x :

$$f'(x) = \frac{x-\cos\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1} = \frac{1}{2(x-e^{i\alpha})} + \frac{1}{2(x-e^{-i\alpha})}$$

$$= \frac{e^{-i\alpha}}{2(xe^{-i\alpha}-1)} + \frac{e^{i\alpha}}{2(xe^{i\alpha}-1)} = -\operatorname{Re}\Big(\frac{e^{i\alpha}}{1-xe^{i\alpha}}\Big)$$

Donc, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$f'(x) = -\operatorname{Re}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{i(n+1)\alpha}\Big) = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(n+1)\alpha.$$

On sait que le rayon de convergence de ce développement de fraction rationnelle est le plus petit module de pôle, donc est 1, et c'est celui du développement en série entière de f :

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos(n+1)\alpha = -\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m}\cos m\alpha.$$

Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$ on retrouve les développements précédents.

11.17 On vérifie immédiatement que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, que $f(0) = 0$ et que :

$$f'(x) = 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2}e^{-x^2} = 2xf(x) + 1.$$

Si, sur un intervalle $]-R,R[$, cette équation différentielle admet une solution développable en série entière $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$:

$$\varphi'(x) - 2x\varphi(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} m a_m x^{m-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$

$$= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1}\big)x^n = 1.$$

Par unicité du développement en série entière, compte tenu de $\varphi(0) = 0$, on a :

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1$$
$$\forall n \geqslant 1 \quad (n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1} = 0$$

Cela définit une unique série entière, telle que $a_{2k} = 0$ pour tout k, $a_1 = 1$, et, pour $k \geqslant 1$, $a_{2k+1} = \dfrac{2}{2k+1} a_{2k-1}$, soit $a_{2k+1} = \dfrac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)}$.

La règle de d'Alembert entraîne que le rayon de convergence est $+\infty$. Donc, pour tout x réel, la somme de la série entière :

$$x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} x^{2k+1}$$

vérifie l'équation différentielle avec la condition initiale ci-dessus. D'après le théorème de Cauchy sur les équations différentielles linéaires, il n'y a qu'une solution, donc :

$$f(x) = \varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} x^{2k+1}$$

sur tout $\mathbb{R}$.

11.18 Soit $x \in]-1, 1[$. On a :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(1+t)^{n+1-\alpha}} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En posant le changement de variable $t = xu$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient l'expression :

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+xu}\right)^n (1+xu)^{\alpha-1} \, \mathrm{d}u.$$

Notons $M(x) = \sup\limits_{u \in [0,1]} (1+ux)^{\alpha-1}$, qui est bien définie par un argument de continuité et de compacité. On déduit alors de l'égalité précédente, en passant au module, l'inégalité :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!} |x|^{n+1} M(x) I_n(x),$$

où :

$$I_n(x) = \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+xu}\right)^n \mathrm{d}u.$$

Or, pour tout $u \in [0,1]$, on a :

$$0 \leqslant \frac{1-u}{1+xu} \leqslant 1.$$

Par conséquent :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}M(x).$$

De plus, si $x \neq 0$, on a :

$$\frac{\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n-1)|}{(n+1)!}|x|^{n+2}}{\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}} = \frac{|\alpha-n-1|}{n+1}\,|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

Par suite, la règle de d'Alembert assure que la série $\sum \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}$ converge pour $|x| < 1$. Cela implique :

$$\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par suite, $R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

11.19 1. Posons pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n : x \mapsto \frac{\cos\left(n^2x\right)}{2^n}.$$

Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad u_n^{(k)}(x) = \frac{n^{2k}}{2^n}\cos\left(n^2x + k\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Les fonctions $u_n^{(k)}$ sont donc bornées sur $\mathbb{R}$ et par croissances comparées :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{N}_\infty\left(u_n^{(k)}\right) = \frac{n^{2k}}{2^n} = \mathrm{O}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

Par conséquent, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Par théorème, puisque les séries $\sum u_n^{(k)}$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$ pour $k \in [\![0, p-1]\!]$ et que la série $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{2p}}{2^n}\cos\left(n^2x + p\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Par suite la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. Pour démontrer que f n'est pas développable en série entière, il suffit de montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor de f est nulle.
Il vient de la question précédente que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad f^{(2p)}(0) = (-1)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{4p}}{2^n} \qquad \text{et} \qquad f^{(2p+1)}(0) = 0.$$

En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\left|f^{(2p)}(0)\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{4p}}{2^n} \geqslant \frac{p^{4p}}{2^p}.$$

En notant $b_p = \frac{p^{4p}}{(2p)!\,2^p}$, déterminons le rayon de convergence de la série $\sum b_p x^{2p}$. Pour tout $r > 0$, on a :

$$\frac{|b_{p+1}|\,r^{2p+2}}{b_p r^{2p}} = \frac{(p+1)^3}{2(2p+1)}\left(\frac{p+1}{p}\right)^{4p}\frac{r^2}{2} \geqslant \frac{(p+1)^3}{2(2p+1)}\frac{r^2}{2} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Il vient par la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de la série $\sum b_p x^{2p}$ est nul. Par comparaison, le rayon de convergence de la série $\sum \frac{f^{(2p)}(0)}{(2p)!}\,x^{2p}$ est nul. Par suite la fonction f n'est pas développable en série entière.

11.20 Soit $z \in \mathbb{C}$ de module strictement inférieur à R. Pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $|h| < R - |z|$ (en convenant que $+\infty - |z| = +\infty$), on a $|z| + |h| < R$. Par conséquent, d'après le lemme d'Abel la série $\sum |a_n|\big(|z|+|h|\big)^n$ est convergente.
D'après le formule du binôme, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k}|h|^k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n}{k}|a_n|\,|z|^{n-k}|h|^k\right), \qquad (*)$$

la dernière égalité étant une conséquence du fait que $\binom{n}{k}$ est nul lorsque $k > n$. Puisque la somme de gauche dans la relation $(*)$ est finie, on en déduit que la suite double $\left(|a_n|\binom{n}{k}|z|^{n-k}|h|^k\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

Par conséquent, la suite double $\left(a_n\binom{n}{k}z^{n-k}\,h^k\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Par suite :

$$f(z+h) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n}{k}a_n\,z^{n-k}h^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}a_n\,z^{n-k}\right)h^k.$$

On a ainsi démontré que $f_z : h \mapsto f(z+h)$ est développable en série entière.

11.21 Nous allons exploiter le fait qu'au voisinage de 0, on a $g(x) = \dfrac{1}{1-f(x)} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} f^p(x)$.

- Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'au voisinage de 0 on ait $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$. On peut remarquer que $a_0 = f(0) = 0$.
- Notons $h : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|x^n$. Puisque les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum |a_n|x^n$ ont même rayon de convergence, la fonction h est définie au voisinage de 0. Par continuité de h, puisque $|a_0| = 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in [-r, r]$, on ait $\big|h(x)\big| \leqslant 1/2$. Par ailleurs, pour $x \in [-r, r]$, on a, d'après l'inégalité triangulaire $\big|f(x)\big| \leqslant h\big(|x|\big) \leqslant 1/2$. Par conséquent :

$$\forall x \in [-r, r] \quad g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} f^p(x)$$

Fixons un tel r.

- Pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par produit de Cauchy, les fonctions f^p et h^p sont développables en série entière sur $[-r,r]$. Notons :

$$\forall [-r,r] \quad f^p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(p)} x^n \qquad \text{et} \qquad h^p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^{(p)} x^n.$$

Démontrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n^{(p)}| \leqslant b_n^{(p)}.$$

Le résultat est immédiat si $p = 1$.
Si le résultat est vrai pour un certain $p \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|a_n^{(p+1)}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}^{(p)}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|a_{n-k}^{(p)}| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|\, b_{n-k}^{(p)} = b_n^{(p+1)}.$$

Le résultat s'en trouve démontré.

- Soit $x \in [-r,r]$. Puisque $|h(x)| \leqslant 1/2$, on a :

$$\frac{1}{1-h(|x|)} = \sum_{p=0}^{+\infty} h^p\big(|x|\big) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^{(p)} |x|^n\right).$$

Puisque dans l'équation précédente le terme de gauche est fini, on déduit que la famille de réels positifs $\left(b_n^{(p)}|x|^n\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Du fait que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad \left|a_n^{(p)} x^n\right| \leqslant b_n^{(p)} |x|^n,$$

on déduit que la famille $\left(a_n^{(p)} x^n\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_n^{(p)}\right) x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(p)} x^n\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} f^p(x) = g(x).$$

Nous avons ainsi démontré que la fonction g est développable en série entière.

11.22 1. Pour tout $n \geqslant q$, on a : $\left(te^{2i\pi\frac{p}{q}}\right)^{n!} = t^{n!} e^{2i\pi\frac{n!\,p}{q}} = t^{n!}$, car $\frac{n!\,p}{q} \in \mathbb{N}$. Par conséquent, au voisinage de 1^- :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{q-1} \left(te^{2i\pi\frac{p}{q}}\right)^{n!} + \sum_{n=q}^{+\infty} t^{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n!} + \mathrm{O}(1).$$

La fonction $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n!}$ est définie sur $[0,1[$ car, sur cet intervalle, on a $0 \leqslant t^{n!} \leqslant t^n$. La fonction g est évidemment croissante. D'après le théorème de la limite monotone, g a une limite L dans $\overline{\mathbb{R}}$. Par ailleurs, par croissance et positivité du terme général :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [0,1[\quad \sum_{k=0}^{n} t^{k!} \leqslant f(t) \leqslant L.$$

En faisant tendre t vers 1 dans cette inégalité, à n fixé, on obtient l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n+1 \leqslant L.$$

Par conséquent, $L = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{t\to 1^-} \left| f\left(te^{2i\pi\frac{p}{q}}\right)\right| = +\infty$.

2. Soit $z_0 = e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$, et supposons que f ait un prolongement continue $\widetilde{f}$ sur $\mathcal{D} = D_O(0,1) \cup \{e^{i\theta}\}$. En particulier, $\widetilde{f}$ est bornée au voisinage de z_0. Soit $r > 0$ tel que $\widetilde{f}$ soit bornée sur $\mathcal{D} \cap D_O(z_0, r)$.
   - Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et par continuité de la fonction $t \mapsto e^{it}$, il existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $\left|e^{i2\pi\frac{p}{q}} - e^{i\theta}\right| < \frac{r}{2}$. Fixons un tel $\frac{p}{q}$.
   - Pour tout $t \in \left[1 - \frac{r}{2}, 1\right[$, on a :

$$\begin{aligned}\left|te^{i2\pi\frac{p}{q}} - e^{i\theta}\right| &= \left|(t-1)e^{i2\pi\frac{p}{q}} + \left(e^{i2\pi\frac{p}{q}} - e^{i\theta}\right)\right| \\ &\leqslant |t-1| + \left|e^{i2\pi\frac{p}{q}} - e^{i\theta}\right| < r.\end{aligned}$$

   Ainsi, $te^{i2\pi\frac{p}{q}} \in \mathcal{D} \cap D_O(z_0, r)$ pour $|t-1| < r/2$, mais $\lim\limits_{t\to 1^-} \left| f\left(te^{2i\pi\frac{p}{q}}\right)\right| = +\infty$, contredisant le fait que $\widetilde{f}$ soit bornée sur $\mathcal{D} \cap D_O(z_0, r)$. Par suite, f n'admet aucun prolongement continue en un point de la frontière du disque ouvert de convergence.

11.23 1. Pour tout $z \in \mathcal{D}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| \leqslant n|a_n|.$$

Ainsi, puisque la série $\sum na_n$ est absolument convergente, par comparaison, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. La fonction f est bien définie sur $\mathcal{D}$.

2. Soit $(z_1, z_2) \in \mathcal{D}^2$, avec $z_1 \neq z_2$, tel que $f(z_1) = f(z_2)$. On a donc :

$$0 = f(z_1) - f(z_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z_1^n - z_2^n). \qquad (*)$$

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-k-1}\right)$$

et puisque $z_1 \neq z_2$, la relation $(*)$ donne :

$$0 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-k-1}\right).$$

Par conséquent :

$$|a_1| = \left|\sum_{n=2}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-k-1}\right)\right| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \left|\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-k-1}\right|$$
$$\leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \left(\sum_{k=0}^{n-1} |z_1|^k |z_2|^{n-k-1}\right) \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| n. \qquad (**)$$

Démontrons que cette dernière inégalité est stricte. Supposons avoir l'égalité dans l'inégalité $(**)$. Puisque $a_1 \neq 0$, il existe $p \geqslant 2$ tel que $a_p \neq 0$. Pour un tel entier p, on aura :

$$\left|\sum_{k=0}^{p-1} z_1^k z_2^{p-k-1}\right| = \sum_{k=0}^{p-1} |z_1|^k |z_2|^{p-k-1} = p.$$

Puisque $|z_1| \leqslant 1$ et $|z_2| \leqslant 1$, la seconde inégalité donne : $|z_1| = |z_2| = 1$. La première inégalité donne que les $z_1^k z_2^{p-k-1}$ sont $\mathbb{R}_+$-colinéaires. Puisqu'ils sont non nuls, il existe donc un réel positif t tel que :

$$z_1^{p-1} z_2 = t z_1^p,$$

c'est-à-dire tel que $z_2 = t z_1$. Puisque t est positif et que z_1 et z_2 sont de module 1, il vient que $t = 1$, *i.e.* $z_1 = z_2$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Ainsi :

$$|a_1| < \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| n,$$

ce qui là encore est contradictoire. Par suite il n'existe pas de $(z_1, z_2) \in \mathcal{D}^2$ vérifiant $z_1 \neq z_2$ et $f(z_1) = f(z_2)$. La fonction f est injective.

11.24 1. Puisque la suite a est convergente, elle est bornée et donc le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que $|a_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant n_0$.Fixons un tel n_0. Ainsi, pour tout $x \in [0, 1[$, on a :

$$\big|(1-x)f(x)\big| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1-x) x^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (1-x) x^n$$
$$\leqslant (1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \varepsilon (1-x) x^n$$
$$= (1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + x^{n_0} \varepsilon \leqslant (1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + \varepsilon. \qquad (*)$$

Par ailleurs, on a :

$$(1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0,$$

par conséquent, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [1-\eta, 1[$ on ait :

$$0 \leqslant (1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n \leqslant \varepsilon. \qquad (**)$$

Fixons un tel η. Alors, pour tout $x \in [1-\eta, 1[$, en combinant les inégalités $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$0 \leqslant \big|(1-x)f(x)\big| \leqslant 2\varepsilon.$$

Ainsi, par définition, $(1-x)f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$. En d'autres termes, on a au voisinage de 1^- :

$$f(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

2. En appliquant la question précédente à la suite $(a_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$, qui tend vers 0, il vient qu'au voisinage de 1^- :

$$f(x) - \frac{\alpha}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - \alpha)\, x^n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

c'est-à-dire $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{\alpha}{1-x}$.

11.25 1. Remarquons que puisque la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs positives, la restriction de g à $[0,1[$ est croissante. Il s'ensuit que g a une limite ℓ en 1, finie ou infinie. Par ailleurs, toujours du fait que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs positives, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$:

$$\sum_{n=0}^{N} b_k x^k \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} b_k x^k = g(x).$$

En faisant tendre x vers 1 dans cette inégalité, il vient que :

$$\sum_{n=0}^{N} b_k \leqslant \ell.$$

Comme la série à terme positif $\sum b_n$ est divergente, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} b_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par suite, $\ell = +\infty$.

2. Fixons un $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un entier n_0 tel que $|a_n - b_n| \leqslant \varepsilon\, b_n$, pour tout $n \geqslant n_0$. Fixons un tel n_0.

Pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}\big|f(x)-g(x)\big| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n-b_n)x^n\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n-b_n|\,x^n\\ &\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n-b_n|\,x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty}\varepsilon\, b_n\, x^n\\ &\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n-b_n|\,x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon\, b_n\, x^n\\ &\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n-b_n| + \varepsilon\, g(x). \qquad (*)\end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $g(x) \underset{x\to+1^-}{\longrightarrow} +\infty$, on a au voisinage de 1 :

$$\sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n-b_n| = \mathrm{o}\big(g(x)\big).$$

Par conséquent, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [1-\eta,1[$ on ait :

$$\sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n-b_n| \leqslant \varepsilon\, g(x). \qquad (**)$$

Ainsi, pour tout $x \in [1-\eta,1[$, en combinant les inégalités $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$\big|f(x)-g(x)\big| \leqslant 2\varepsilon g(x),$$

c'est-à-dire, par définition, $f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} g(x)$.

11.26 1. On suppose que la série $\sum c_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(x)$ sur $]-R,R[$. Pour tout x vérifiant $|x| < R$, on a par produit de Cauchy :

$$\begin{aligned}xf(x)^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}c_k c_{n-k}\right)x^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}c_{n+1}x^{n+1}\\ &= f(x)-1.\end{aligned}$$

On en déduit $4x^2f(x)^2 - 4xf(x) + 4x = 0$ et :

$$(2xf(x)-1)^2 = 1-4x.$$

Puisque $2xf(x)-1$ est par continuité strictement négatif au voisinage de 0, il existe α de $]0,R[$ tel que, pour tout $x \in]-\alpha,\alpha[$, on ait $2xf(x)-1 = -\sqrt{1-4x}$ et donc :

$$f(x) = \frac{1}{2x}\left(1-\sqrt{1-4x}\right),$$

(on considère en 0 les prolongements par continuité).

2. En utilisant le développement en série entière de $\sqrt{1-4x}$ de rayon de convergence $1/4$, on voit que la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{2x}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$$

se développe sur $]-1/4, 1/4[$ en :

$$g(x) = \frac{-1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2)\cdots(1/2-n+1)}{n!}(-1)^n(4x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n$$

avec $d_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

On a $d_0 = 1$. Comme $g(x)$ vérifie $xg(x)^2 = g(x) - 1$, il vient :

$$\forall x \in \left]\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right[\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} d_k d_{n-k}\right) x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+1}x^{n+1}$$

et, par unicité des coefficients $d_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} d_k d_{n-k}$ pour tout n. On en déduit par récurrence $c_n = d_n$ pour tout n.

Chapitre 12 : Intégration sur un intervalle quelconque

I Intégrale généralisée sur un intervalle $[a, +\infty[$ . . 665

1 Généralités 665

2 Cas des fonctions positives 668

3 Intégrabilité 671

II Généralisation aux autres types d'intervalles . . . 672

1 Cas d'un intervalle de la forme $]-\infty, a]$ 672

2 Cas d'un intervalle de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$ . . . 673

3 Cas d'un intervalle ouvert 675

III Propriétés de l'intégrale 676

1 Linéarité, positivité 676

2 Relation de Chasles 677

IV Calcul d'intégrales 678

1 Intégration par parties 678

2 Changement de variable 679

3 Étude d'intégrales semi-convergentes 680

V Intégration des relations de comparaison 682

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 685

Exercices 701

Intégration sur un intervalle quelconque



Dans ce chapitre, on cherche à étendre la notion d'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment au cas de certaines fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les intervalles de $\mathbb{R}$ considérés dans ce chapitre seront tous d'intérieur non vide.

Rappelons la définition d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle.

Définition 1

1. Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, s'il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de ce segment telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ possède un prolongement continu sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$.
2. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

On note $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, on note $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ une primitive quelconque de f.

I Intégrale généralisée sur un intervalle $[a, +\infty[$

Dans cette section, on fixe $a \in \mathbb{R}$.

1 Généralités

Définition 2

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ **converge**, si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$ existe dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ ou $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ **diverge**.

Point méthode

Prenons le cas où f est continue et notons F une primitive de f.

Puisque $\displaystyle\int_a^x f = [F]_a^x = F(x) - F(a)$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ équivaut à l'existence dans $\mathbb{K}$ de $\displaystyle\lim_{+\infty} F$ et, dans ce cas, l'on a :

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{+\infty} F - F(a).$$

Remarque Bien sûr, dans le point méthode précédent, la caractérisation de la convergence et, en cas de convergence, la valeur de l'intégrale ne dépendent pas de la primitive F choisie, puisque, si G est une autre primitive de f, il existe une constante $k \in \mathbb{K}$ telle que $G = F + k$.

Exemples

1. Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t\,\mathrm{d}t$ diverge.

   La fonction cos est continue sur $[0, +\infty[$ et l'une de ses primitives est la fonction sin, qui ne possède pas de limite en $+\infty$; d'où la conclusion.

2. Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$.

   La fonction $f : t \longmapsto e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et l'une de ses primitives est $F = -f$. Comme $\displaystyle\lim_{+\infty} F$ existe et est nulle, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et l'on a :

   $$\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{+\infty} F - F(0) = 1.$$

   Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et l'on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$.

p.685

Exercice 1 Déterminer la nature (convergente ou divergente) et la valeur éventuelle de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$.

p.685

Exercice 2
Déterminer la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}} \mathrm{d}t$.

On peut noter un parallèle entre l'étude des intégrales généralisées sur un intervalle $[a,+\infty[$ et celle des séries numériques. Dans ce parallèle, l'analogue du terme général est la fonction f, dont on cherche à définir l'intégrale sur $[a,+\infty[$, et l'analogue des sommes partielles est la fonction définie sur $[a,+\infty[$ par $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$.
Dans le prochain exemple, nous allons constater une différence importante dans ce parallèle entre « séries numériques » et « intégrales généralisées ».

Attention

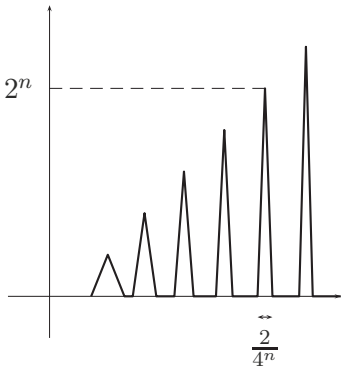
- Comme pour les séries numériques, le fait que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ n'entraîne pas que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

p.685

Exercice 3 Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{CM}\big([1,+\infty[,\mathbb{K}\big)$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ diverge.

- En revanche, contrairement à ce qui se passe pour les séries numériques, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ n'entraîne pas que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, ni même que f est bornée.

Exemple On définit la fonction f continue et affine par morceaux sur $[0,+\infty[$ de la façon suivante :
* pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est affine sur les intervalles $[n-\frac{1}{4^n}, n]$ et $[n, n+\frac{1}{4^n}]$,
* pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$f\left(n-\frac{1}{4^n}\right) = f\left(n+\frac{1}{4^n}\right) = 0 \quad \text{et} \quad f(n) = 2^n,$$
(ainsi f n'est pas bornée sur $[0,+\infty[$),
* en dehors des intervalles $[n-\frac{1}{4^n}, n+\frac{1}{4^n}]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est nulle.



Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_{n-\frac{1}{4^n}}^{n+\frac{1}{4^n}} f$ est égale à l'aire d'un triangle dont l'un des côtés a pour longueur $\left(n+\frac{1}{4^n}\right)-\left(n-\frac{1}{4^n}\right)=\frac{2}{4^n}$ et dont la hauteur orthogonale à ce côté a pour longueur 2^n ; on en déduit :

$$\int_{n-\frac{1}{4^n}}^{n+\frac{1}{4^n}} f=\frac{1}{2}\,\frac{2}{4^n}\,2^n=\frac{1}{2^n}\cdot$$

Comme la fonction f est positive, la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^x f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$; pour conclure, il suffit donc, d'après le théorème de la limite monotone, d'établir que cette dernière fonction est majorée.

Or, pour tout $x\geqslant 0$, il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n+\frac{1}{4^n}\geqslant x$; on a alors :

$$\int_0^x f\leqslant\int_0^{n+\frac{1}{4^n}} f=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2^p}=1-\frac{1}{2^n}\leqslant 1,$$

d'où la conclusion.

Proposition 1

Soit $f:[a,+\infty[\to\mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $b\in[a,+\infty[$. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_b^{+\infty} f$ sont de même nature, c'est-à-dire convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux.

De plus, si elles convergent, on a l'égalité :

$$\int_a^{+\infty} f=\int_a^b f+\int_b^{+\infty} f.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 685

On utilise la relation de Chasles et la définition de la convergence d'une intégrale.

Remarque De cette proposition on déduit une idée-clé qui apparaîtra à plusieurs reprises dans ce chapitre : si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend que du comportement local de f au voisinage de $+\infty$.

Proposition 2

L'ensemble des fonctions $f\in\mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ et l'application $f\mapsto\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Démonstration page 686

Proposition 3

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{C})$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, les deux intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{Re}\,(f)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}\,(f)$ convergent, et l'on a alors :

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} \mathrm{Re}\,(f) + i\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}\,(f)\,.$$

Démonstration page 686

Proposition 4

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction positive telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge. Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f \geqslant 0$.

Si de plus f est continue, on a $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = 0$ si, et seulement si, $f = 0$.

Principe de démonstration. Démonstration page 686

On utilise le fait que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f$ et les propriétés de l'intégrale sur un segment.

Proposition 5

Soit $f \in \mathcal{C}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge. Alors la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée est égale à $-f$.

Démonstration page 686

2 Cas des fonctions positives

De la même façon que dans le chapitre « Séries numériques », on commence par étudier le cas des fonctions positives. La notion de convergence absolue permet ensuite de se ramener à ce cas.

Proposition 6

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction positive.

1. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée sur $[a,+\infty[$ et l'on a alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \sup_{x\geqslant a}\int_a^x f$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge si, et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f = +\infty$.

Démonstration page 686

Remarque Les conclusions subsistent si f n'est positive qu'au voisinage de $+\infty$, car F est alors croissante au voisinage de $+\infty$.

Théorème 7 (de comparaison)

On considère deux fonctions f et g à valeurs dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ et positives.

1. On suppose l'existence de $b \geqslant a$ tel que $\forall t \geqslant b \quad f(t) \leqslant g(t)$.
   - Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.
   - Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge.
2. Si $f = \mathrm{O}(g)$ au voisinage de $+\infty$ et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.
3. Si $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$, les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ sont de même nature.

Principe de démonstration. On utilise la caractérisation de la convergence de l'intégrale d'une fonction positive de la proposition 6 et le caractère local de la convergence d'une intégrale (proposition 1 de la page 667).

Démonstration page 686

Comme pour les séries numériques, nous disposerons d'un certain nombre d'exemples de référence qui permettront, par le théorème de comparaison, de déterminer la nature de beaucoup d'intégrales. Il est donc essentiel de connaître parfaitement ces exemples de référence.

Voici un premier exemple très utile, mais non explicitement au programme.

Proposition 8

Soit α un réel. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Démonstration page 687

Proposition 9 (Intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Démonstration page 687

Les théorèmes de comparaison appliqués au cas des intégrales de Riemann peuvent se résumer comme suit :

Point méthode

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction positive.

1. On suppose qu'il existe $k>0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) \sim \frac{k}{t^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$.L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
2. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $f(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ au voisinage de $+\infty$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.
3. S'il existe $\alpha \leqslant 1$ et $\lambda > 0$ tels que $f(t) \geqslant \frac{\lambda}{t^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Remarque Le troisième cas est souvent obtenu en constatant que :

$$\lim_{t\to+\infty} tf(t) = +\infty.$$

p.687

Exercice 4 Donner la nature, selon $\alpha \in \mathbb{R}$, de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\mathrm{d}t$.

p.688

Exercice 5 Soit $f : t \mapsto \frac{t-\lfloor t \rfloor}{t^2}$.

1. Montrer que f est continue par morceaux sur $\left[1,+\infty\right[$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge.
2. Justifier l'existence de $\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$.
3. Exprimer $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ à l'aide de γ.

p.689

Exercice 6 Pour tout $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$.

1. Justifier la définition et la continuité de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Dans les trois exercices suivants, on détermine la nature des *intégrales de Bertrand* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$, selon $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Il est bon de retenir la méthode d'étude de ces intégrales de Bertrand, mais les résultats obtenus ne peuvent être utilisés directement, car hors programme.

p.689 **Exercice 7**

Établir la convergence pour $\alpha > 1$, en comparant à une intégrale de Riemann.

p.689 **Exercice 8** Établir la divergence pour $\alpha < 1$, en comparant à $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

p.689 **Exercice 9** Faire l'étude pour $\alpha = 1$.

En conclusion l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge si, et seulement si :

$$\alpha > 1 \qquad \text{ou} \qquad (\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta > 1)\,.$$

3 Intégrabilité

Définition 3

On dit que $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ est **intégrable** sur $[a,+\infty[$ ou que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ **converge absolument**, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

Théorème 10

Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

Principe de démonstration. On étudie d'abord le cas des fonctions f à valeurs réelles, en utilisant les fonctions $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ et $f^- = \frac{|f|-f}{2}$, puis le cas des fonctions à valeurs complexes.

Démonstration page 690

Théorème 11 (de comparaison)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{R})$, la fonction g étant positive et intégrable sur $[a,+\infty[$.

1. S'il existe $b \geqslant a$ tel que $\forall t \geqslant b \quad |f(t)| \leqslant g(t)$, alors la fonction f est intégrable sur $[a,+\infty[$.
2. Si $f = \mathrm{O}(g)$ au voisinage de $+\infty$, alors la fonction f est intégrable sur $[a,+\infty[$.
3. Si $|f| \sim g$ au voisinage de $+\infty$, alors la fonction f est intégrable sur $[a,+\infty[$.

Démonstration.
Cela résulte immédiatement de la définition de l'intégrabilité et du théorème 7 de la page 669. □

p.690 **Exercice 10** Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t) \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t$?

p.690 **Exercice 11** Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{\operatorname{ch} t}} \mathrm{d}t$?

II Généralisation aux autres types d'intervalles

Nous étudions maintenant la notion d'intégrale sur un intervalle non compact quelconque.

1 Cas d'un intervalle de la forme $]-\infty, a]$

Les définitions et les résultats obtenus dans le cas d'un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ s'étendent sans difficulté à ce cas. Nous ne les rappelons pas tous.

Définition 4

Soit $f \in \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ **converge**, si $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \int_x^a f$ existe dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas on note $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ ou $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ **diverge**.

On a de même le résultat important qui suit.

Proposition 12

Soit $f :]-\infty, a] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $b \in]-\infty, a]$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f$ sont de même nature, c'est-à-dire convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux.

De plus, si elles convergent, on a l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{a} f = \int_{-\infty}^{b} f + \int_b^a f.$$

Il faut bien sûr adapter l'étude des intégrales de Riemann de la façon suivante.

Proposition 13 (Intégrale de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{|t|^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Démonstration page 690

Définition 5

On dit que $f \in \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{K})$ est **intégrable** sur $]-\infty, a]$ ou que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ **converge absolument**, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} |f|$ converge.

Point méthode

Pour étudier la convergence de l'intégrale sur $]-\infty, a]$ d'une fonction positive, et donc aussi pour montrer une convergence absolue, on vérifie que cette fonction est continue par morceaux sur cet intervalle, puis on étudie son comportement asymptotique au voisinage de $-\infty$.

2 Cas d'un intervalle de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$

On s'intéresse ici à des intervalles $[a, b[$ ou $]a, b]$, avec $-\infty < a < b < +\infty$.

La plupart des résultats s'étendent à cette situation, nous ne les rappelons pas tous. Voici une définition valable dans le cas d'un intervalle $[a, b[$; il est facile d'en fournir une valable dans le cas d'un intervalle $]a, b]$.

Définition 6

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{K})$, avec $a < b$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **converge**, si $\lim\limits_{x \to b} \displaystyle\int_a^x f$ existe dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas on note $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **diverge**.

La seule modification concerne à nouveau les intégrales de Riemann.

Proposition 14 (Intégrale de Riemann)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Démonstration. En adaptant le calcul de primitives, la démonstration est la même que dans le cas de l'intervalle $[a, +\infty[$. □

Définition 7

On dit que $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$ est **intégrable** sur $[a,b[$ ou que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **converge absolument**, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge.

Proposition 15

Soit a et b deux réels, avec $a < b$, et $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue.

Si f admet une limite finie en b, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration page 691

Remarques

1. Ici f est la restriction à $[a,b[$ d'une fonction f_1 continue sur $[a,b]$ et l'on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f_1(t)\,dt$.
2. Supposons plus généralement $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux et **bornée** sur l'intervalle **borné** $[a,b[$.

   Si $M = \sup_{[a,b[} |f|$, on a $|f| \leqslant M$ et, comme les fonctions constantes sont intégrables sur les intervalles **bornés**, f est intégrable sur $[a,b[$, par comparaison.
3. Le fait que l'intervalle d'intégration $[a,b[$ soit **borné** est évidemment essentiel. Ce type d'intégrales impropres « trivialement convergentes » n'existe pas lorsque l'intervalle d'intégration n'est pas borné, comme le montre l'exemple d'une fonction constante non nulle sur $[a,+\infty[$.

p.691 **Exercice 12** Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$?

p.691 **Exercice 13** Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \cos t\,|\ln t|^{\alpha}\,\mathrm{d}t$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$?

3 Cas d'un intervalle ouvert

On s'intéresse ici à des intervalles $]a,b[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Proposition 16

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a,b[,\mathbb{K})$.

S'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f$ **et** $\displaystyle\int_c^b f$ convergent, alors, pour tout réel $c' \in]a,b[$, les deux intégrales $\displaystyle\int_a^{c'} f$ et $\displaystyle\int_{c'}^b f$ convergent et $\displaystyle\int_a^{c'} f + \int_{c'}^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Démonstration page 691

Définition 8

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **converge** s'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f$ **et** $\displaystyle\int_c^b f$ convergent. On pose alors :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **diverge**.

Proposition 17

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a,b[,\mathbb{K})$. On fixe $c \in]a,b[$ et l'on pose :

$$\forall x \in]a,b[\quad F(x) = \int_c^x f.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si, et seulement si, F admet des limites dans $\mathbb{K}$ en a et b, et l'on a alors $\displaystyle\int_a^b f = \lim_b F - \lim_a F$.

Démonstration. Cela résulte de la définition précédente. □

p.691 **Exercice 14** Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin t \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) \mathrm{d}t$?

p.692 **Exercice 15** Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{it} \ln t}{\sqrt{\operatorname{ch} t}} \mathrm{d}t$?

Remarque Lorsque a et b sont réels, la notation $\int_a^b f$ peut désigner :

- l'intégrale de f sur $[a,b]$, si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$,
- l'intégrale généralisée de f sur $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$, sous réserve que f soit continue par morceaux sur l'intervalle considéré.

Il faudra donc prendre garde à distinguer ces quatre cas.

Point méthode

Pour l'étude de la convergence de $\int_a^b f$, on commence par examiner sur quel intervalle d'extrémités a et b la fonction f est continue par morceaux.

Selon les cas, on fait ensuite une ou deux études (en général des études locales permettant d'utiliser les méthodes vues précédemment).

III Propriétés de l'intégrale

Les propositions suivantes étendent à des intervalles I quelconques des propriétés vraies sur un segment.
Dans cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Convention Par extension, lorsque I est un segment et que f est continue par morceaux sur I, on dit encore que l'intégrale $\int_I f$ converge.

Comme $|f|$ est également continue par morceaux, on dit aussi que l'intégrale converge absolument ou que f est intégrable sur I.

Lorsque I, d'extrémités $a < b$, n'est pas un segment, on utilise parfois la notation $\int_I f$ au lieu de $\int_a^b f$.

1 Linéarité, positivité

La proposition 2 de la page 667 et la proposition 4 de la page 668 s'étendent facilement au cas d'un intervalle quelconque.

Proposition 18

L'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ telles que $\int_I f$ existe est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ et l'application $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Proposition 19

L'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ intégrables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

Démonstration page 692

Proposition 20

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ une fonction positive telle que $\int_I f$ converge. On a alors $\int_I f \geqslant 0$.

Si de plus f est *continue*, on a $\int_I f = 0$ si, et seulement si, $f = 0$.

Principe de démonstration. On utilise les propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment et la définition de l'intégrale sur un intervalle quelconque.

Démonstration page 692

Proposition 21

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ une fonction intégrable sur I. On a :

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

Principe de démonstration. Le résultat est connu lorsque I est un segment. Lorsque I n'est pas un segment, on utilise ce premier cas et la définition de l'intégrale d'une fonction intégrable.

Démonstration page 693

2 Relation de Chasles

Proposition 22

Soit J un sous-intervalle d'intérieur non vide de I et f continue par morceaux sur I telle que $\int_I f$ converge. Alors $\int_J f$ converge.

Principe de démonstration. On utilise la caractérisation de la convergence d'une intégrale à l'aide d'une primitive.

Démonstration page 693

Notation Soit $a < b$ les bornes (peut-être infinies) de I et $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ telle que $\int_I f$ converge. Soit x et y vérifiant $a \leqslant x \leqslant b$ et $a \leqslant y \leqslant b$. Si $x \neq y$, l'intégrale de f sur tout intervalle d'extrémités x et y inclus dans I converge,

en particulier sur $]x,y[$ si $x<y$ et $]y,x[$ si $x>y$. On peut donc poser :

$$\int_x^y f = \begin{cases} \displaystyle\int_{]x,y[} f & \text{si} \quad x<y \\ \displaystyle -\int_{]y,x[} f & \text{si} \quad x>y \\ 0 & \text{si} \quad x=y. \end{cases}$$

Proposition 23

Soit $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ telle que $\displaystyle\int_I f$ converge et x, y, z trois points ou extrémités de I. Alors les intégrales $\displaystyle\int_x^y f$, $\displaystyle\int_x^z f$, $\displaystyle\int_z^y f$ convergent et l'on a la relation de Chasles : $\displaystyle\int_x^y f = \int_x^z f + \int_z^y f$.

Démonstration page 693

IV Calcul d'intégrales

1 Intégration par parties

Notation Soit F une fonction continue sur l'intervalle I d'extrémités a et b, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.
On note $[F]_a^b$ ou $[F(x)]_a^b$ ou encore $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$, en cas d'ambiguïté :

- $F(b) - F(a)$, si $I = [a,b]$,
- $F(b) - \lim\limits_a F$, lorsque cette limite existe, si $I =]a,b]$,
- $\lim\limits_b F - F(a)$, lorsque cette limite existe, si $I = [a,b[$,
- $\lim\limits_b F - \lim\limits_a F$, lorsque ces deux limites existent, si $I =]a,b[$.

Proposition 24

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I d'extrémités a et b, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

L'existence de deux termes parmi $\displaystyle\int_a^b f'g$, $[fg]_a^b$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ entraîne l'existence du troisième et l'on a alors la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Principe de démonstration. Si, par exemple, $I = [a,b[$, on intègre par parties sur $[a,x]$, avec $a<x<b$, et l'on fait tendre x vers b.

Démonstration page 693

Point méthode

En pratique, on intègre par parties sur les primitives, puis on passe à la limite. Il y a deux buts possibles :

- justifier une convergence, comme on le verra dans l'exercice 22 de la page 681,
- effectuer un calcul, comme dans les deux exercices suivants.

p.694

Exercice 16

1. Pour quels $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ existe-t-elle ?
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} à l'aide de I_n, lorsque ces deux intégrales existent.
3. Calculer I_n.

p.694

Exercice 17 Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, puis la calculer à l'aide d'une intégration par parties.

2 Changement de variable

Proposition 25

Soit $f \in \mathcal{C}\left(]a,b[, \mathbb{K}\right)$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Principe de démonstration. Les hypothèses sur φ donnent $\lim\limits_{\alpha} \varphi = a$ et $\lim\limits_{\beta} \varphi = b$, ainsi que $\lim\limits_{a} \varphi^{-1} = \alpha$ et $\lim\limits_{b} \varphi^{-1} = \beta$.

Le théorème du changement de variable s'applique sur tout segment $[x,y] \subset]a,b[$. On fait tendre ensuite x vers a et y vers b.

Démonstration page 695

Remarque Dans le cas d'un intervalle $[a,b[$ ou $[a,+\infty[$, on pourra se ramener à la situation de la proposition 25, puisque si $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ converge, il en de même de $\displaystyle\int_{]a,b[} f$ et les deux intégrales sont égales.

p.696

Exercice 18 Justifier l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

Proposition 26

Soit $f \in \mathcal{C}\left(]a,b[,\mathbb{K}\right)$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante et bijective. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Démonstration page 696

Remarque Comme φ' est de signe constant, en appliquant le théorème de changement de variable à $|f|$, on obtient que l'intégrabilité de f sur $]a,b[$ équivaut à celle de $(f\circ\varphi)\,\varphi'$ sur $]\alpha,\beta[$.

p.696

Exercice 19 Justifier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et la calculer à l'aide du changement de variable $\varphi : u \mapsto \frac{1}{u}$.

3 Étude d'intégrales semi-convergentes

Il se peut qu'une fonction $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{C})$ ne soit pas intégrable, mais que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge. On dit alors que cette dernière intégrale est **semi-convergente**.

Comme pour les séries semi-convergentes, l'étude de la convergence d'une intégrale non absolument convergente ne peut pas se faire à l'aide des théorèmes de comparaison, puisque ces derniers ne concernent que des fonctions de signe constant et ne peuvent donc fournir que la convergence absolue, pas la semi-convergence. De plus, les théorèmes de convergence que nous verrons dans le chapitre suivant ne concernent que les fonctions intégrables.

Il va donc falloir transformer l'intégrale pour pouvoir étudier sa convergence. Un changement de variable ne sert à rien en général, puisque, d'après la remarque de la présente page, on ne pourra pas obtenir une intégrale absolument convergente en partant d'une intégrale semi-convergente.

L'outil principal est donc l'*intégration par parties* en vue, en général, de transformer l'intégrale en une intégrale absolument convergente.

Dans les trois exercices suivants, on étudie l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, où α est un réel. Pour certaines valeurs de α, cette intégrale est semi-convergente.
Notons que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

p.697

Exercice 20 On suppose $\alpha \leqslant 0$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant 2$.

En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

p.697

Exercice 21 On suppose $\alpha > 1$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

p.697

Exercice 22 On suppose $0 < \alpha \leqslant 1$.

Établir, à l'aide d'une intégration par parties, la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \mathrm{d}t$ diverge. En déduire la semi-convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Remarque Pour l'étude de certaines intégrales non absolument convergentes, on pourra, comme pour les séries, effectuer de la fonction un développement asymptotique, le dernier terme écrit étant :

- ou bien une fonction intégrable,
- ou bien de signe constant (dans le cas où la fonction est à valeurs réelles).

p.698

Exercice 23 Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$.

Attention À la lumière de l'exercice précédent, il faut bien noter l'importance de l'hypothèse de positivité de la fonction de comparaison dans le théorème 7 de la page 669.
En effet, si $f(t) = \ln\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)$ et $g(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$, on a $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$, alors que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ diverge et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} g$ converge.

V Intégration des relations de comparaison

Dans ce qui suit, les fonctions sont définies sur un intervalle $[a,b[$ et l'on fait une étude locale au voisinage de b. On procéderait de la même façon dans le cas d'un intervalle $]a,b]$, pour une étude au voisinage de a.

Proposition 27

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R})$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

On suppose φ **positive** et intégrable sur $[a,b[$.

- Si $f = \mathrm{O}(\varphi)$ au voisinage de b, alors f est intégrable sur $[a,b[$ et $\displaystyle\int_x^b f = \mathrm{O}\left(\int_x^b \varphi\right)$, quand $x \to b$.
- Si $f = \mathrm{o}(\varphi)$ au voisinage de b, alors f est intégrable sur $[a,b[$ et $\displaystyle\int_x^b f = \mathrm{o}\left(\int_x^b \varphi\right)$, quand $x \to b$.

Principe de démonstration. Démonstration page 698

Comme φ est intégrable sur $[a,b[$, il en est de même de f, par comparaison. Il suffit ensuite d'exprimer, selon le cas, que $f = \mathrm{O}(\varphi)$ ou $f = \mathrm{o}(\varphi)$ au voisinage de b.

Proposition 28

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R})$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

On suppose φ **positive** et non intégrable sur $[a,b[$.

- Si $f = \mathrm{O}(\varphi)$ au voisinage de b, alors $\displaystyle\int_a^x f = \mathrm{O}\left(\int_a^x \varphi\right)$, quand $x \to b$.
- Si $f = \mathrm{o}(\varphi)$ au voisinage de b, alors $\displaystyle\int_a^x f = \mathrm{o}\left(\int_a^x \varphi\right)$, quand $x \to b$.

Principe de démonstration. Démonstration page 699

Comme la fonction φ est positive et n'est pas intégrable sur $[a,b[$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x \varphi = +\infty$.

On exprime ensuite, selon le cas, que $f = \mathrm{O}(\varphi)$ ou $f = \mathrm{o}(\varphi)$ au voisinage de b.

Attention La positivité de φ est essentielle.

Prenons, par exemple, $f(x) = |\sin x|$ et $\varphi(x) = \sin x$ sur $[0,+\infty[$. On a bien sûr $f = \mathrm{O}(\varphi)$, au voisinage de $+\infty$, avec φ non intégrable sur $[0,+\infty[$. Pourtant, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \varphi = 1 - \cos x$ est bornée, alors que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$

ne l'est pas, puisque, par périodicité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{n\pi} |\sin x| \, \mathrm{d}x = n \int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 2n.$$

p.700

Exercice 24

1. Montrer que, quand $x \to +\infty$, $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} = \mathrm{o}\left(\int_1^x e^{t^2} \, \mathrm{d}t\right)$.
2. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, un équivalent simple de $\displaystyle\int_1^x e^{t^2} \, \mathrm{d}t$, quand $x \to +\infty$.

Proposition 29

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{CM}([a,b[, \mathbb{R})$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose f et g **positives** et $f \underset{b}{\sim} g$.

- Si g est intégrable sur $[a,b[$, alors f est intégrable sur $[a,b[$ et :
$$\int_x^b f \underset{b}{\sim} \int_x^b g.$$
- Si g n'est pas intégrable sur $[a,b[$, alors f n'est pas intégrable sur $[a,b[$ et :
$$\int_a^x f \underset{b}{\sim} \int_a^x g.$$

Démonstration page 700

Remarques

1. Le résultat s'étend bien sûr aux fonctions négatives.
2. Il suffit que les fonctions f et g ne soient positives qu'au voisinage de b.
   En effet :
   - d'une part, les intégrabilités de f et de g sur $[a,b[$ équivalent aux intégrabilités de ces mêmes fonctions sur $[a',b[$, pour tout $a' \in]a,b[$,
   - d'autre part, pour le deuxième point, si f et g sont positives sur $[a',b[$ et ne sont pas intégrables sur $[a',b[$, on a $\lim\limits_{x\to b} \int_{a'}^b f = \lim\limits_{x\to b} \int_{a'}^b g = +\infty$ donc :
   $$\int_a^{a'} f = \mathrm{o}\left(\int_{a'}^x f\right) \quad \text{et} \quad \int_a^{a'} g = \mathrm{o}\left(\int_{a'}^x g\right),$$
   d'où la conclusion.
3. En pratique, il suffit de vérifier la positivité au voisinage de b de l'une des fonctions, puisque de $f \underset{b}{\sim} g$ on déduit alors la positivité au voisinage de b de l'autre fonction.

Attention Le signe constant au voisinage de b des fonctions est essentiel. Prenons, par exemple, $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}$, sur $[1,+\infty[$. On a $f \underset{+\infty}{\sim} g$ et l'on a vu dans l'exercice 22 de la page 681 que f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$; par comparaison, g ne l'est pas non plus.

On a vu également dans l'exercice 22 de la page 681 que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge, donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x f$ est bornée sur $[1,+\infty[$.

Un développement de g au voisinage de $+\infty$ donne :

$$g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}} = f(x) - h(x) \quad \text{avec} \quad h(x) \sim \frac{\sin^2 x}{x}.$$

On en déduit que h est positive au voisinage de $+\infty$ et que, par comparaison, h est intégrable sur $[1,+\infty[$ si, et seulement si, $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x}$ l'est. Or :

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{2x}$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge (intégrale de Riemann) alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge (même principe que dans l'exercice 22 de la page 681). Par suite, h n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ et, comme elle est positive au voisinage de $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^x h = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^x g = -\infty$, puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x g$ n'est donc pas bornée.

Cela prouve que les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_1^x f$ et $x \mapsto \displaystyle\int_1^x g$ ne sont pas équivalentes au voisinage de $+\infty$.

p.700

Exercice 25 Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \ln\big(\ln(1+t)\big)\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que f est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Donner un équivalent simple de f en 0.

Remarque On peut noter un parallèle entre les résultats de cette section sur les « intégrales partielles » et les « restes d'intégrales », et les résultats analogues sur les sommes partielles et restes de séries numériques.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 La fonction $f : t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $[1,+\infty[$. Déterminons l'une de ses primitives à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t &= t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)+\int\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)+2\operatorname{Arctan}t.\end{aligned}$$

Notons F la primitive obtenue. Comme $t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$, on a $\lim\limits_{+\infty} F = \pi$; par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ converge et l'on a :

$$\int_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \lim_{+\infty}F - F(1) = \pi - \ln 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$$

Exercice 2 La fonction $f : t \mapsto \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}$ est continue sur $[\frac{2}{\pi},+\infty[$, comme composée de fonctions continues, car $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur ce même intervalle et à valeurs dans $]0,\frac{\pi}{2}]$.

Pour $x \in [\frac{2}{\pi},+\infty[$, le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ donne :

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{x}\frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\sqrt{\sin u}}\,\mathrm{d}u = \left[2\sqrt{\sin u}\right]_{\frac{1}{x}}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{\sin u}\right]_{\frac{1}{x}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}\,\mathrm{d}t$ converge et l'on a :

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}\,\mathrm{d}t = 2.$$

Exercice 3 La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ convient, car :

$$\forall x \geqslant 1 \quad \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x.$$

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t} = 0$.

Proposition 1 En effet, en utilisant la relation de Chasles pour l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment, on obtient :

$$\forall x \in [b,+\infty[\quad \int_a^x f = \int_a^b f + \int_b^x f.$$

Il suffit alors d'appliquer la définition de la convergence d'une intégrale pour conclure.

S'il y a convergence, il suffit de faire tendre x vers $+\infty$ pour obtenir l'égalité annoncée.

Proposition 2 Cet ensemble contient la fonction nulle et, d'après les propriétés des limites, est stable par combinaisons linéaires.

La linéarité de l'intégrale provient de la même propriété sur l'espace des fonctions continues par morceaux sur un segment.

Proposition 3 Cela résulte immédiatement de la définition 2 de la page 665 et des propriétés des limites des fonctions à valeurs complexes.

Proposition 4 En effet, d'après les propriétés de l'intégrale sur un segment, c'est la limite en $+\infty$ d'une fonction positive.

Pour le deuxième point, par positivité et croissance de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ sur $[a, +\infty[$, on déduit de l'hypothèse que :

$$\forall x > a \quad \int_a^x f = 0.$$

D'après les propriétés de l'intégrale des fonctions continues sur un segment, il en résulte que f est nulle sur $[a, x]$ pour tout $x > a$, c'est-à-dire sur $[a, +\infty[$.

Proposition 5 D'après la proposition 1 de la page 667, on peut écrire, pour tout $x \geqslant a$:

$$\int_x^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f - \int_a^x f.$$

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est dérivable, de dérivée f, d'après les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment ; d'où la conclusion.

Proposition 6 En effet, comme f est positive, la fonction $F : x \in [a, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est croissante, puisque, d'après la relation de Chasles :

$$\forall\, (x, y) \in [a, +\infty[^2 \quad x \leqslant y \Rightarrow \int_a^y f - \int_a^x f = \int_x^y f \geqslant 0.$$

On sait que deux cas se présentent :

- F est majorée et alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, égale à $\sup\limits_{x \geqslant a} F(x)$,
- F n'est pas majorée et alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

Théorème 7 1. Posons $F(x) = \displaystyle\int_b^x f$ et $G(x) = \int_b^x g$. La majoration $f \leqslant g$ sur $[b, +\infty[$ et la positivité de l'intégrale entraînent $F \leqslant G$ sur $[b, +\infty[$.

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge, il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_b^{+\infty} g$, d'après la proposition 1 de la page 667. On déduit de la proposition 6 que G est majorée

sur $[b,+\infty[$. Il en est donc de même pour F. Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_b^{+\infty} f$ converge, donc aussi l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

Le deuxième point en résulte, par contraposition.

2. Les fonctions f et g étant positives, « $f=\mathrm{O}(g)$ au voisinage de $+\infty$ » équivaut à l'existence de $k>0$ et de $b\geqslant a$ tels que :
$$\forall t\in[b,+\infty[\quad f(t)\leqslant kg(t).$$
Il va de soi que les intégrales $\displaystyle\int_b^{+\infty} g$ et $\displaystyle\int_b^{+\infty} kg$ sont de même nature, car $k\neq 0$.
On conclut en utilisant la première partie du théorème.
3. Comme f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$, on sait qu'alors $f=\mathrm{O}(g)$ et $g=\mathrm{O}(f)$, au voisinage de $+\infty$. On conclut en utilisant la deuxième partie du théorème.

Proposition 8 La fonction $t\mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Pour $\alpha\leqslant 0$ et $x>0$, on a $\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t}\mathrm{d}t\geqslant\int_0^x \mathrm{d}t=x$. Par suite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-\alpha t}dt=+\infty$.

Pour $\alpha>0$ et $x>0$, on a $\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t}\mathrm{d}t=\left[-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\right]_0^x=\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-\alpha t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha}$; d'où la conclusion.

Proposition 9 La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

Pour $\alpha\neq 1$ et $x\in[1,+\infty[$, on a :
$$\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}=\int_1^x t^{-\alpha}\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x=\frac{1-x^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Par suite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}=+\infty$ pour $\alpha<1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$ pour $\alpha>1$.

Pour $\alpha=1$, on a $\displaystyle\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln x$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}=+\infty$. D'où la conclusion.

Exercice 4 La fonction $t\mapsto t^\alpha e^{-t}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$; on peut donc lui appliquer le théorème de comparaison.

Par croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha+2}e^{-t}=0$, donc $t^\alpha e^{-t}=\mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente, par comparaison aux intégrales de Riemann (on utilise la proposition 9).

Exercice 5

1. • La fonction $t \mapsto \lfloor t \rfloor$ est en escalier, donc continue par morceaux, sur tout segment inclus dans $\left[1, +\infty\right[$; elle est donc continue par morceaux sur ce dernier intervalle. On en déduit que la fonction $t \mapsto t - \lfloor t \rfloor$ est continue par morceaux, puis que f est continue par morceaux sur $\left[1, +\infty\right[$, comme quotient de deux fonctions continues par morceaux.
   • On a, pour tout $t \geqslant 1$:
   $$0 \leqslant t - \lfloor t \rfloor \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{t^2}.$$
   Par comparaison aux intégrales de Riemann, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge.

2. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Pour établir que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite, montrons que la série $\sum u_n$, avec $u_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$, converge (on utilise le « lien suites-séries »).
   On a :
   $$u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge ; d'où la conclusion.

3. Calculons, pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$\begin{aligned}
\int_1^n f &= \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} \\
&= \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{k}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} \\
&= \ln n - (n-1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \\
&= \ln n - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
&= 1 - \gamma_n.
\end{aligned}$$
   Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge, on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} f = \lim_{n\to+\infty} \int_1^n f$.
   On peut donc conclure que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f = 1 - \gamma$.

Remarque Le réel γ est appelé **constante d'Euler**.

Exercice 6

1. La fonction $u : t \mapsto \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$.

   Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) = 1$, on a $\ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) \sim \frac{t^2+2}{t^2+1} - 1 = \frac{1}{t^2+1} \sim \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t$ est donc convergente, par comparaison aux intégrales de Riemann (on utilise la proposition 9 de la page 669).

   D'après la proposition 5 de la page 668, la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc continue, sur $\mathbb{R}_+$. Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$; comme $f = g \circ h$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, comme composée de fonctions continues.
2. On a $f = g \circ h$, avec g et $h : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f donc est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

   Pour le calcul de f', on utilise la proposition 5 de la page 668 et le théorème de dérivation des fonctions composées :

   $$\forall x > 0 \quad f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

3. On déduit de la question précédente que $\lim\limits_{0^+} f' = -\infty$. Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de limite de la dérivée permet de conclure que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$. Par suite, f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 7

Notons que la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$; on peut donc lui appliquer le théorème de comparaison.

Soit $\gamma \in]1, \alpha[$. Comme $t^\gamma f(t) = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma}(\ln t)^\beta}$ avec $\alpha - \gamma > 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\gamma f(t) = 0$, d'après les croissances comparées des fonctions puissances et logarithmes ; par suite, $f(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$ au voisinage de $+\infty$. On en déduit que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ converge par comparaison aux intégrales de Riemann, puisque $\gamma > 1$.

Exercice 8 On a $tf(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{(\ln t)^\beta}$, avec $1 - \alpha > 0$; on en déduit $\lim\limits_{t\to+\infty} tf(t) = +\infty$.

Par suite, $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ diverge, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Exercice 9 Pour $\alpha = 1$ et $x > 2$, le changement de variable $t = e^u$ donne :

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on déduit de l'étude des intégrales de Riemann que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\,(\ln t)^\beta}$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Théorème 10

1. *Cas des fonctions à valeurs réelles.*

   Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge absolument. Introduisons les deux fonctions $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ et $f^- = \frac{|f|-f}{2}$; ces deux fonctions sont continues par morceaux et *positives* et, comme $|f| = f^+ + f^-$, on a les deux inégalités $f^+ \leqslant |f|$ et $f^- \leqslant |f|$.

   D'après le théorème de comparaison, les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^+$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^-$ sont donc convergentes ; comme $f = f^+ - f^-$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ en résulte.

2. *Cas des fonctions à valeurs complexes.*

   Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge absolument. De $|f| = \sqrt{\big(\mathrm{Re}\,(f)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}\,(f)\big)^2}$ on déduit les inégalités :

   $$\big|\mathrm{Re}\,(f)\big| \leqslant |f| \quad \text{et} \quad \big|\mathrm{Im}\,(f)\big| \leqslant |f|\,.$$

   D'après le théorème de comparaison, les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{Re}\,(f)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}\,(f)$ sont *absolument convergentes*, donc convergentes d'après le premier cas. La convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ résulte de la proposition 3 de la page 668.

Exercice 10 La fonction $t \mapsto \sin(t) \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

On conclut en utilisant l'exercice 6 de la page 670, puisque :

$$\forall t \geqslant 0 \quad \left|\sin(t) \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)\right| \leqslant \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right).$$

Exercice 11 La fonction $t \mapsto \frac{e^{it}}{\sqrt{\mathrm{ch}\,t}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\left|\frac{e^{it}}{\sqrt{\mathrm{ch}\ t}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\ t}}$.

Or $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\ t}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^t+e^{-t}}} \sim \sqrt{2}e^{-t/2}$, au voisinage de $+\infty$. D'après la proposition 8 de la page 669, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{\mathrm{ch}\,t}}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.

Proposition 13

On procède comme pour la proposition 9 de la page 669, au changement près de t en $-t$.

Proposition 15 La fonction f se prolonge en une fonction f_1 continue sur $[a,b]$. On sait qu'alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_1(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[a,b]$; donc :

$$\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b}\int_a^x f_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est donc convergente.

Exercice 12 La fonction $f : t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0,1]$ et bornée sur cet intervalle borné. D'après la remarque précédente, f est intégrable sur $]0,1]$.

On notera bien qu'en revanche, f ne possède pas de prolongement continu sur le segment $[0,1]$.

Exercice 13 La fonction $f : t \mapsto \cos t\,|\ln t|^{\alpha}$ est continue sur $]0,\frac{1}{2}]$ et, par croissances comparées des fonctions puissances et logarithmes en 0, on a $|f(t)| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$ au voisinage de 0. Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f$ est absolument convergente, donc convergente.

Proposition 16 D'après la proposition 1 de la page 667 (même principe pour une borne finie ou infinie), les convergences de $\displaystyle\int_a^c f$ et de $\displaystyle\int_c^b f$ entraînent les convergences de $\displaystyle\int_a^{c'} f$ et de $\displaystyle\int_{c'}^b f$ et l'on a :

$$\int_a^{c'} f = \int_a^c f + \int_c^{c'} f \quad \text{et} \quad \int_{c'}^b f = -\int_c^{c'} f + \int_c^b f.$$

D'où l'égalité annoncée.

Exercice 14 La fonction $f : t \mapsto \sin(t)\ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)$ est continue sur $]1,+\infty[$ et l'on a :

$$\forall t > 1 \quad \big|f(t)\big| \leqslant g(t) \quad \text{avec} \quad g(t) = \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right).$$

Montrons la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g$; cela établira, par comparaison, la convergence absolue, donc la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$.

- Au voisinage de 1, la fonction $t \mapsto \ln\left(\frac{t^2+1}{t+1}\right)$ est bornée et $\lim\limits_{t\to 1}\ln(t-1) = -\infty$; on a donc :

$$g(t) = \ln\left(\frac{t^2+1}{t+1}\right) - \ln(t-1) \sim -\ln(t-1) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right),$$

par croissances comparées. On en déduit la convergence de $\displaystyle\int_1^2 g$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

- Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^2+1}{t^2-1} = 1$, on peut écrire, au voisinage de $+\infty$:

$$g(t) \sim \frac{t^2+1}{t^2-1} - 1 = \frac{2}{t^2-1} \sim \frac{2}{t^2}.$$

On en déduit la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} g$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge absolument, donc converge.

Exercice 15 La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{it}\ln t}{\sqrt{\operatorname{ch} t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

- Au voisinage de 0, on a :

$$\left|f(t)\right| = \frac{|\ln t|}{\operatorname{ch} t} \sim |\ln t| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

par croissances comparées. On en déduit la convergence absolue, donc la convergence, de $\displaystyle\int_0^1 f$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

- Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|f(t)\right| = \frac{|\ln t|}{\operatorname{ch} t} \sim \sqrt{2}e^{-\frac{t}{2}}\ln t = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

par croissances comparées. On en déduit la convergence absolue, donc la convergence, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge absolument, donc converge.

Proposition 19 Si l'on note E cet ensemble, E est inclus dans $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ et contient la fonction nulle.

Montrons que E est stable par combinaisons linéaires, en ne considérant que le cas où I n'est pas un segment. Soit f, g deux fonctions de E et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$; on a :

$$|\lambda f + \mu g| \leqslant |\lambda|\,|f| + |\mu|\,|g|.$$

La fonction majorante étant intégrable, on en déduit, par comparaison, l'intégrabilité de la fonction $\lambda f + \mu g$, d'où la conclusion.

Proposition 20

- Lorsque I est un segment, le résultat est connu. Lorsque I est de la forme $[a,b[$ ou $]a,b]$, on procède comme dans la proposition 4 de la page 668. Lorsque I est un intervalle ouvert, on utilise la proposition 16 de la page 675.

- Pour tout segment J d'intérieur non vide inclus dans I, comme f est positive, on a $\displaystyle\int_J f \leqslant \int_I f$ et donc $\displaystyle\int_J f = 0$. Comme f est continue, positive et d'intégrale nulle sur J, elle est nulle sur J. La fonction f, nulle sur tout segment inclus dans I, est nulle sur I.

Proposition 21 Le résultat est connu lorsque I est un segment.

Si I est de la forme $[a,b[$, on a :

$$\forall x \in]a,b[\quad \left|\int_a^x f\right| \leqslant \int_a^x |f|\,.$$

Le résultat s'en déduit, en faisant tendre x vers b.

Le cas où I est de la forme $]a,b]$ se traite de la même façon.

Si I est de la forme $]a,b[$, fixons $c \in]a,b[$ et utilisons la proposition 16 de la page 675 :

$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\int_a^c f + \int_c^b f\right| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + \left|\int_c^b f\right|.$$

En utilisant le cas précédent, on obtient :

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^c |f| + \int_c^b |f| = \int_a^b |f|\,,$$

d'où la conclusion.

Proposition 22 Nous rédigerons la démonstration dans un cas, les autres cas se traitant de manière analogue.

Démontrons, par exemple, le résultat lorsque $I = [a,b[$ et $J =]a,c[$, avec $a < c \leqslant b$, en utilisant la proposition 17 de la page 675. On note F une primitive de f.

Comme f est continue par morceaux sur $[a,b[$, la fonction F est continue sur $[a,b[$ et possède donc une limite en a.

Si $c < b$, par continuité de F sur $[a,b[$, la fonction F possède une limite à gauche en c.

Si $c = b$, par convergence de $\displaystyle\int_I f$, la fonction F possède une limite en b, d'après la proposition 17 de la page 675.

En conclusion, $\displaystyle\int_J f$ converge, d'après la proposition 17 de la page 675.

Proposition 23 Le résultat est connu lorsque I est un segment.

Dans les autres cas, cela résulte de la proposition 1 de la page 667 et de ses généralisations aux autres intervalles semi-ouverts, ou de la proposition 16 de la page 675.

Proposition 24 Traitons le cas où $I = [a,b[$; les autres cas se traitent de la même manière.

Pour $x \in [a,b[$, une intégration par parties sur $[a,x]$ donne :

$$\int_a^x f'g = [fg]_a^x - \int_a^x fg'.$$

L'existence de deux limites parmi $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f'g$, $\lim\limits_{x\to b}[fg]_a^x$ et $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x fg'$ entraîne donc celle de la troisième. On conclut en revenant à la définition de l'existence d'une intégrale généralisée et à la notation introduite avant cette proposition.

Exercice 16

1. Pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_n : t\mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

   Comme $f_0 = 1$, l'intégrale I_0 n'existe pas.

   Pour $n\geqslant 1$, on a $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$.

   On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, l'existence de I_n.

   En conclusion, I_n existe si, et seulement si, $n\geqslant 1$.
2. Pour $n\geqslant 1$, on écrit :
$$\int f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t,$$
   puis on intègre par parties la troisième intégrales :
$$\int f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int f_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{t}{2n(1+t^2)^n} - \frac{1}{2n}\int f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$
   On en déduit :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n.$$
3. On a $I_1 = \frac{\pi}{2}$ et l'on déduit de la question précédente, par une récurrence facile :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad I_{n+1} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)\,2k}{(2k)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\,\pi.$$
   Le dernier résultat étant encore valable pour $n=0$, on a établi :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad I_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\big((n-1)!\big)^2}\,\pi.$$

Exercice 17

- La fonction $f : t\mapsto \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}$ est continue sur $]0,1[$.

  Comme $\ln(1-t^2)\underset{0}{\sim} -t^2$, on a $\lim\limits_0 f = -1$, d'où l'intégrabilité de f sur $]0,\frac{1}{2}]$.

  Au voisinage de 1, on a :
$$|f(t)| \sim -\ln(1-t^2) = -\ln(1-t) - \ln(1+t),$$
  d'où $|f(t)| \sim -\ln(1-t)$. Par suite, $|f(t)| = o\left((1-t)^{-\frac{1}{2}}\right)$, par croissances comparées, d'où l'intégrabilité de f sur $[\frac{1}{2},1[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

- Pour l'intégration par parties, choisissons comme primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ celle qui est nulle en 1, c'est-à-dire $t \mapsto 1 - \frac{1}{t}$, ce qui donne :

$$\int \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t-1}{t}\ln\left(1-t^2\right) - \int \left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{-2t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On a $\frac{t-1}{t}\ln\left(1-t^2\right) \underset{0}{\sim} t$, de limite nulle en 0.

On a $\frac{t-1}{t}\ln\left(1-t^2\right) \underset{1}{\sim} (t-1)\ln(1-t)$, de limite nulle en 1.

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et le crochet $\left[\frac{t-1}{t}\ln\left(1-t^2\right)\right]_0^1$ existent (ce dernier étant nul). On peut donc écrire :

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t-1}{t}\ln\left(1-t^2\right)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}.$$

En conclusion $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -2\ln 2$.

Proposition 25 Comme φ est strictement croissante et bijective, on a :

$$\lim_{y\to\beta}\varphi(y) = b \quad \text{et} \quad \lim_{y'\to b}\varphi^{-1}(y') = \beta.$$

- Fixons $x_0 \in]\alpha,\beta[$ et supposons l'intégrale $\displaystyle\int_{\varphi(x_0)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergente.

Pour $y \in]\alpha,\beta[$, le théorème du changement de variable sur un segment permet d'écrire :

$$\int_{x_0}^{y} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme $\lim\limits_{y\to\beta}\varphi(y) = b$, on obtient, par composition de limites :

$$\lim_{y\to\beta}\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(x_0)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_{x_0}^{\beta} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge et l'on a :

$$\int_{x_0}^{\beta} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(x_0)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On prouve de même que si $\displaystyle\int_{a}^{\varphi(x_0)} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_{\alpha}^{x_0} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge aussi et lui est égale.

En utilisant la relation de Chasles, on a donc établi que si $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge aussi et lui est égale.

- Supposons l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ convergente.

  Avec les notations précédentes, pour $y' \in]a,b[$, on a :

  $$\int_{x_0}^{\varphi^{-1}(y')} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(x_0)}^{y'} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

  Le même raisonnement de composition de limites que dans le premier point permet de conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_{\varphi(x_0)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et qu'on a l'égalité :

  $$\int_{x_0}^{\beta} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(x_0)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

  On termine la réciproque comme dans le premier point.

Exercice 18 La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. Par croissances comparées, on a $e^{-t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$. On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Appliquons la proposition 25 de la page 679 sur $]0,+\infty[$, en utilisant le changement de variable $\varphi : u \mapsto \sqrt{u}$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0,+\infty[$ sur lui-même. On en déduit la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ et l'égalité annoncée.

Proposition 26 Le principe est exactement le même que pour la proposition 25, en utilisant cette fois $\lim\limits_{\alpha}\varphi = b$ et $\lim\limits_{\beta}\varphi = a$, ainsi que $\lim\limits_{a}\varphi^{-1} = \beta$ et $\lim\limits_{b}\varphi^{-1} = \alpha$.

Exercice 19

- La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et :
  - ∗ quand $t \to 0$, on a $\big|f(t)\big| \sim |\ln t| = \mathrm{o}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)$; par comparaison aux intégrales de Riemann, f est intégrable sur $]0,1]$;
  - ∗ quand $t \to +\infty$, on a $\big|f(t)\big| \sim \frac{\ln t}{t^2} = \mathrm{o}\left(t^{-\frac{3}{2}}\right)$; par comparaison aux intégrales de Riemann, f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

  Par suite, f est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'où l'existence de I.
- La fonction $\varphi : u \mapsto \frac{1}{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante et bijective de $]0,+\infty[$ sur lui-même. D'après la proposition 25 de la page 679 on peut écrire :

  $$I = -\int_0^{+\infty} \frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u^2}}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) = -I.$$

  Par suite $I = 0$.

Exercice 20 Puisque $\alpha \leqslant 0$, on a : $\forall t \geqslant 1 \quad t^\alpha \leqslant 1$. La fonction sin étant positive sur $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 2.$$

Or, si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ convergeait, par définition de la convergence d'une intégrale, on aurait :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_1^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t - \int_1^{2n\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \right) = 0.$$

D'où la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 21 On a : $\forall t \geqslant 1 \quad \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$.

Comme $\alpha > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Exercice 22

- Pour $x > 1$, une intégration par parties donne :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t^\alpha}\right]_1^x - \alpha \int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t.$$

On déduit de $\alpha > 0$ que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[-\frac{\cos t}{t^\alpha}\right]_1^x = \cos 1$.

Par ailleurs, on a : $\forall t \geqslant 1 \quad \left|\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\right| \leqslant \frac{1}{t^{\alpha+1}}$. Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$ converge absolument, donc converge ; par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ existe.

On a montré que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ existe.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

- La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$, car $\alpha > 0$; on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha \pi^\alpha} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)^\alpha \pi^\alpha}.$$

La série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \mathrm{d}t$ diverge par comparaison aux séries de Riemann, car $\alpha \leqslant 1$.

- Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\dfrac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t=+\infty$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\pi}^{(n+1)\pi}\left|\dfrac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t=+\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t$ diverge donc.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

Exercice 23 La fonction $f:t\mapsto\ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)$ est continue sur $[2,+\infty[$; effectuons de f un développement au voisinage de $+\infty$:

$$f(t)=\frac{\sin t}{\sqrt{t}}+g(t)\quad\text{avec}\quad g(t)\sim-\frac{\sin^2 t}{2t}\cdot$$

- D'après l'exercice 22 de la page 681, $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.
- On peut écrire :

$$\forall t\geqslant 2\quad\frac{\sin^2 t}{2t}=\frac{1}{4t}-\frac{\cos(2t)}{4t}\cdot$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{\cos(2t)}{4t}\,\mathrm{d}t$ converge (même principe que dans l'exercice 22 de la page 681), alors que l'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{4t}$ diverge (c'est, à un facteur près, une intégrale de Riemann). Par suite $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{2t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Comme $g(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}-\frac{\sin^2 t}{2t}$ et que l'équivalent est de signe constant, on conclut, par comparaison, que l'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}g$ diverge.

En conclusion $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}f$ diverge, puisque f est la somme de deux fonctions, l'une d'intégrale convergente, l'autre d'intégrale divergente.

Proposition 27 Dans les deux cas, l'intégrabilité de f sur $[a,b[$ se déduit du théorème de comparaison.

- Si $f=\mathrm{O}(\varphi)$ au voisinage de b, il existe $K>0$ et $b'\in[a,b[$ tels que :

$$\forall t\in[b',b[\quad\left|f(t)\right|\leqslant K\varphi(t)\,.$$

On en déduit, pour $x\in[b',b[$:

$$\left|\int_x^b f\right|\leqslant\int_x^b|f|\leqslant K\int_x^b\varphi.$$

On a donc établi que $\displaystyle\int_x^b f=\mathrm{O}\left(\int_x^b\varphi\right)$, quand $x\to b$.

- Supposons $f = \mathrm{o}(\varphi)$ au voisinage de b. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $b' \in [a, b[$ tel que :
$$\forall t \in [b', b[\quad \left|f(t)\right| \leqslant \varepsilon \varphi(t).$$
On en déduit, pour $x \in [b', b[$:
$$\left|\int_x^b f\right| \leqslant \int_x^b |f| \leqslant \varepsilon \int_x^b \varphi.$$
On a donc établi que $\displaystyle\int_x^b f = \mathrm{o}\left(\int_x^b \varphi\right)$, quand $x \to b$.

Proposition 28 Comme φ est positive et n'est pas intégrable sur $[a, b[$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_a^x \varphi = +\infty$.

- Si $f = \mathrm{O}(\varphi)$ au voisinage de b, il existe $K > 0$ et $b' \in [a, b[$ tels que :
$$\forall t \in [b', b[\quad \left|f(t)\right| \leqslant K\varphi(t).$$
On en déduit, pour $x \in [b', b[$:
$$\left|\int_a^x f\right| \leqslant \int_a^x |f| \leqslant \int_a^{b'} |f| + K\int_{b'}^x \varphi \leqslant \int_a^{b'} |f| + K\int_a^x \varphi.$$
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_a^x \varphi = +\infty$, il existe $b'' \in [b', b[$ tel que :
$$\forall x \in [b'', b[\quad \int_a^{b'} |f| \leqslant K\int_a^x \varphi.$$
On a donc :
$$\forall x \in [b'', b[\quad \left|\int_x^b f\right| \leqslant 2K\int_a^x \varphi,$$
ce qui prouve que $\displaystyle\int_a^x f = \mathrm{O}\left(\int_a^x \varphi\right)$, quand $x \to b$.

- Supposons $f = \mathrm{o}(\varphi)$ au voisinage de b. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $b' \in [a, b[$ tel que :
$$\forall t \in [b', b[\quad \left|f(t)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\varphi(t).$$
On en déduit, pour $x \in [b', b[$:
$$\left|\int_a^x f\right| \leqslant \int_a^x |f| \leqslant \int_a^{b'} |f| + \frac{\varepsilon}{2}\int_{b'}^x \varphi \leqslant \int_a^{b'} |f| + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x \varphi.$$
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_a^x \varphi = +\infty$, il existe $b'' \in [b', b[$ tel que :
$$\forall x \in [b'', b[\quad \int_a^{b'} |f| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x \varphi.$$

On a donc :

$$\forall x \in [b'', b[\quad \left| \int_a^x f \right| \leqslant \varepsilon \int_a^x \varphi,$$

ce qui prouve que $\displaystyle\int_a^x f = \mathrm{o}\left(\int_a^x \varphi\right)$, quand $x \to b$.

Exercice 24

1. La fonction $\varphi : t \mapsto e^{t^2}$ est continue, positive et non intégrable sur $[1, +\infty[$ (on a, par exemple, $\varphi \geqslant 1$).

   Comme $\frac{e^{t^2}}{t^2} = \mathrm{o}\left(e^{t^2}\right)$, quand $t \to +\infty$, on conclut à l'aide de la proposition 28 de la page 682.
2. Une intégration par parties donne, pour $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_1^x 2te^{t^2}\frac{\mathrm{d}t}{2t}\\ &= \left[\frac{e^{t^2}}{2t}\right]_{t=1}^{t=x} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

   D'après la première question, on a $\frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} \sim \displaystyle\int_1^x e^{t^2}\mathrm{d}t$, quand $x \to +\infty$, d'où l'on déduit $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\mathrm{d}t \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$.

Proposition 29 On déduit du théorème de comparaison l'intégrabilité de f dans le premier cas, la non intégrabilité de f dans le deuxième cas.

Il suffit ensuite d'utiliser la proposition 27 ou la proposition 28, puisque $f - g = \mathrm{o}(g)$, au voisinage de b.

Exercice 25

1. Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est continue et strictement positive sur l'intervalle $]0, x]$, donc $u : t \mapsto \ln\bigl(\ln(1+t)\bigr)$ est continue sur $]0, x]$.

   On a, au voisinage de 0 :

$$u(t) = \ln\bigl(t + \mathrm{o}(t)\bigr) = \ln t + \ln\bigl(1 + \mathrm{o}(1)\bigr) \sim \ln t,$$

   puisque $\lim\limits_{t\to 0} \ln t = -\infty$. On a donc, par croissances comparées :

$$\bigl|u(t)\bigr| \sim |\ln t| = \mathrm{o}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right).$$

   On en déduit, par comparaison, l'intégrabilité sur $]0, x]$ de u ; d'où la conclusion.
2. La fonction u est négative au voisinage de 0 et l'on a $u(t) \sim \ln t$. En appliquant la proposition 29, on obtient $f(x) \sim \displaystyle\int_0^x \ln t\,\mathrm{d}t$, au voisinage de 0.

   Comme $\displaystyle\int_0^x \ln t\,\mathrm{d}t = x\ln x - x \sim x\ln x$, on en déduit $f(x) \sim x\ln x$.

S'entraîner et approfondir

12.1 Pour quels réels a et b, la fonction $f : t \mapsto 3t - 1 - \frac{5}{6t} - \sqrt{9t^2 + at + b}$ est-elle intégrable sur un intervalle de la forme $[\gamma, +\infty[$?

12.2 Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{t}\right) \ln t}{\sqrt{t} - \sin t}\,\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(t^2 - t\right)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta - 1}\,\mathrm{d}t$ (on discutera suivant $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$) ;
4. $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \left(\ln \frac{1}{t}\right)^\beta \mathrm{d}t$ (on discutera suivant les réels α et β).

12.3 Lorsqu'elles convergent, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$.

12.4 Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)\mathrm{d}t$ (on discutera suivant le réel α) ;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t} - \sin t}\,\mathrm{d}t$.

12.5 *(Polytechnique 2015)*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} f'^2$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

12.6 1. Montrer qu'une fonction réelle uniformément continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ tend vers 0 en $+\infty$.

2. Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace l'uniforme continuité par la continuité ? l'intégrabilité par la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$?

3. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'^2 soient intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée.

12.7 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. On suppose de plus que f est à valeurs réelles positives et décroissante. Montrer que $f(x) = \mathrm{o}(1/x)$ au voisinage de $+\infty$.
3. Donner un exemple de fonction intégrable sur $[0,+\infty[$ telle que la fonction $x \mapsto xf(x)$ ne soit pas bornée.

12.8 Pour tout réel $\alpha > 0$, on note $f_\alpha : x \mapsto x\,e^{-x^\alpha \sin^2 x}$.

1. Donner la nature, selon α, de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \displaystyle\int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}} f_\alpha$.
2. Pour quels $\alpha > 0$ la fonction f_α est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

12.9 Comparaison série-intégrale

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[n_0,+\infty[$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que f' est intégrable sur $[n_0,+\infty[$.

1. Vérifier que la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est équivalente à la convergence de la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ est absolument convergente.

   On pourra intégrer par parties $\displaystyle\int_{n-1}^{n} (t-n+1)\,f'(t)\,\mathrm{d}t$.

   Que peut-on en déduire sur l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et la série $\sum f(n)$?
3. Montrer que pour $0 < \alpha < 1$, la série $\displaystyle\sum \frac{\sin(n^\alpha)}{n}$ converge.

12.10 Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(t-x) - f(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

12.11 Soit f continue de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les limites suivantes existent ou n'existent pas dans $\mathbb{R}$ simultanément et qu'en cas d'existence, elles sont égales :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

12.12 Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1[,\mathbb{R})$.

On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} = 0$.

12.13 1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Justifier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

3. Linéariser $\sin^3 t$, puis calculer I à l'aide de la première question.

12.14 Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier la définition de f.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \pi/2$.

12.15 *(Centrale 2015)*

Soit $\alpha \in]0,1[$.

1. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$. Justifier la définition de f sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que cette fonction est positive.
2. Soit $R : x \mapsto \left(\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u\right)^2 + \left(\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u\right)^2$.

Justifier la définition de R sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que cette fonction est décroissante.

12.16 1. Montrer que la fonction $f :]0,\pi] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$, se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t$.

Justifier l'existence de I_n. Calculer $I_{n+1} - I_n$ puis I_n.

3. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \displaystyle\int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0$.

4. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et déduire des questions précédentes la valeur de I.

Solution des exercices

12.1 Choisissons $\gamma > 0$ assez grand pour que le trinôme $t \mapsto 9t^2 + at + b$ soit positif sur $[\gamma, +\infty[$ (possible, car cette fonction tend vers $+\infty$ en $+\infty$). La fonction f est alors continue sur cet intervalle. Faisons un développement de f au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(t) &= 3t - 1 - \frac{5}{6t} - 3t\left(1 + \frac{a}{9t} + \frac{b}{9t^2}\right)^{1/2} \\ &= 3t - 1 - \frac{5}{6t} - 3t\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{9t} + \frac{b}{9t^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{a}{9t}\right)^2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) \\ &= -\frac{a+6}{6} + \frac{a^2 - 36\,(b+5)}{216\,t} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right). \end{aligned}$$

- Pour $a \neq -6$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} |f(t)| = \left|\frac{a+6}{6}\right| > 0$. Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ diverge ; donc f n'est pas intégrable sur $[\gamma, +\infty[$.
- Pour $a = -6$ et $b \neq -4$, on a $|f(t)| \sim \frac{|b+4|}{6t}$ au voisinage de $+\infty$. On conclut, comme dans le premier cas, que l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ diverge ; donc f n'est pas intégrable sur $[\gamma, +\infty[$.
- Pour $a = -6$ et $b = -4$, on a $|f(t)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente ; donc f est intégrable sur $[\gamma, +\infty[$.

12.2 Dans les exemples suivants, la fonction dont nous étudions l'intégrale sera toujours notée f.

1. Pour $t \in]0, 1]$, on a $\sqrt{t} \geqslant t$ et l'inégalité classique $\sin t < t$, vraie pour tout $t > 0$, donne $\sqrt{t} > \sin t$.
   On déduit de cela que f est définie et continue sur $]0, 1]$. Notons aussi qu'elle est négative.
   Comme $\sin t \sim t = \mathrm{o}\left(\sqrt{t}\right)$ et $\mathrm{sh}\left(\sqrt{t}\right) \sim \sqrt{t}$, on a, au voisinage de 0 :
   $$f(t) \sim \frac{\sqrt{t}\ln t}{\sqrt{t} - \sin t} \sim \frac{\sqrt{t}\ln t}{\sqrt{t}} = \ln t = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$
   On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, par comparaison aux intégrales de Riemann.

2. La fonction f est continue sur $]1,+\infty[$.

   - Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme :
   $$\ln\left(t^2-t\right)=\ln t+\ln(t-1)\underset{t\to1^+}{\sim}\ln(t-1),$$
   on obtient, au voisinage de 1, l'équivalent $f(t)\sim\frac{\ln(t-1)}{4}$, d'où :
   $$\left|f(t)\right|=\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right),\qquad\text{par croissances comparées.}$$
   Par comparaison aux intégrales de Riemann, on en déduit la convergence absolue, donc la convergence, de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   - Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   On a, au voisinage de $+\infty$:
   $$\ln\left(t^2-t\right)=2\ln t+\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)=2\ln t+\mathrm{o}(1)\sim2\ln t.$$
   D'où $f(t)\sim\frac{2\ln t}{t^2}\cdot$ et $\left|f(t)\right|=\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$, par croissances comparées ; par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge, par comparaison aux intégrales de Riemann.

   En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

3. La fonction f est continue et de signe fixe sur $]1,+\infty[$.

   - Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Faisons une étude au voisinage de 1 en posant $t=1+u$:
   $$f(t)=\frac{\left(\ln(1+u)\right)^\alpha}{(1+u)^\beta-1}=\frac{\left(u+\mathrm{o}(u)\right)^\alpha}{\beta u+\mathrm{o}(u)}\sim\frac{u^{\alpha-1}}{\beta}\cdot$$
   On a donc $f(t)\sim\frac{(t-1)^{\alpha-1}}{\beta}$ et, par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha>0$.
   - Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
     * Pour $\beta>0$, on a $f(t)\sim\frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta}$, quand $t\to+\infty$. Utilisons l'étude des *intégrales de Bertrand* faite dans les exercices de la page 671 (attention ce résultat serait à redémontrer, car hors programme). D'après le théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta>1$ ou $\beta=1$ et $\alpha<-1$.

∗ Pour $\beta < 0$, on a $f(t) \sim -(\ln t)^{\alpha}$. En procédant comme dans le premier cas, on voit que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est toujours divergente.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$ et $\beta > 1$.

4. La fonction f est continue et positive sur $]0,1[$.

- Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

∗ Pour $\alpha > -1$, posons $\alpha = -1+2h$. Par croissances comparées des fonctions puissances et logarithmes au voisinage de 0, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} t^h \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{\beta} = 0$, car $h \in \mathbb{R}_+^*$.
Comme $f(t) = t^{-1+h}\left(t^h \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{\beta}\right)$, on a, au voisinage de 0, $f(t) = \mathrm{o}\left(t^{-1+h}\right)$. Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

∗ Pour $\alpha = -1$, le changement de variable $t = e^{-u}$ donne, pour $x \in]0,1/2[$:

$$\int_x^{1/2} \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{\beta} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{\ln 2}^{\ln \frac{1}{x}} u^{\beta}\mathrm{d}u.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln \frac{1}{x} = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta < -1$, d'après l'étude des intégrales de Riemann.

∗ Pour $\alpha < -1$, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} tf(t) = +\infty$, par croissances comparées des fonctions puissances et logarithmes, au voisinage de 0.
Par suite, $\frac{1}{t} = \mathrm{o}\big(f(t)\big)$ et, par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

- Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

On a, au voisinage de 1 :

$$f(t) \sim (-\ln t)^{\beta} \sim (1-t)^{\beta}.$$

Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta > -1$.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > -1$ et $\beta > -1$.

12.3 1. La fonction $f : t \mapsto \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$.

On a, au voisinage de $+\infty$, $f(t) \sim \frac{\ln t}{t^3} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\ln t\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{2}\frac{\ln t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{\ln t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\ &= -\frac{\ln t}{2(1+t^2)} + \frac{\ln t}{2} - \frac{1}{4}\ln\left(1+t^2\right)\\ &= -\frac{\ln t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right).\end{aligned}$$

Notons F la primitive obtenue de f. On a $-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} \sim -\frac{\ln x}{2x^2}$ au voisinage de $+\infty$; comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$, on déduit du calcul précédent que $\lim\limits_{+\infty} F = 0$. Par suite :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = -F(1) = \frac{\ln 2}{4}.$$

2. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t} - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $[1, +\infty[$ et un développement, au voisinage de $+\infty$, donne :

$$f(t) = \frac{1}{t} - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{6t^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) \sim -\frac{1}{6t^3}.$$

On en déduit que f est négative au voisinage de $+\infty$ (en fait, f est négative sur $[1, +\infty[$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Une intégration par parties sur $]1, +\infty[$ donne :

$$\begin{aligned}\int \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t &= t\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right) + \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}\\ &= t\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right) + \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}\\ &= t\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right) + \ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right).\end{aligned}$$

D'où :

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = -t\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right) - \ln\left(1 + \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right).$$

On a, au voisinage de $+\infty$, $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right) \sim \frac{1}{t}$; comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} = 1$, on déduit du calcul précédent, en faisant tendre t d'une part vers $+\infty$ et d'autre part vers 1 :

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right)\right) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - 1 - \ln 2.$$

12.4 Dans les exemples suivants, la fonction dont nous étudions l'intégrale sera toujours notée f.

1. La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$.

   - Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

     On a, au voisinage de 1 :

     $$\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) = -\ln(t-1) + \ln(t+1) \sim -\ln(t-1).$$

     D'où $\left|f(t)\right| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)$. On en déduit que f est intégrable sur $]1, 2]$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

   - Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

     On a, au voisinage de $+\infty$:

     $$\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

     * Pour $\alpha > -1$, on a $f(t) = 2\frac{\sin t}{t^{\alpha+1}} + g(t)$ avec $g(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{\alpha+2}}\right)$, au voisinage de $+\infty$.

       Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.
       En utilisant l'étude faite dans l'exercice de la page 681 (*attention*, ce résultat serait à redémontrer, car hors programme), on établit que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} 2\frac{\sin t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

       L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente car f est la somme de deux fonctions dont l'intégrale converge.

     * Pour $\alpha \leqslant -1$, on a, au voisinage de $+\infty$, $\frac{1}{t^\alpha}\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) \sim \frac{2}{t^{\alpha+1}}$.

       On en déduit l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

       $$\forall t \geqslant 2n_0\pi \quad \frac{1}{t^\alpha}\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) \geqslant 1.$$

       On peut donc écrire, pour tout entier $n \geqslant n_0$:

       $$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)\mathrm{d}t \geqslant \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 2.$$

Si l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergeait et valait ℓ, on aurait :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_2^{2n\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_2^{(2n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \ell,$$

d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Cela contredit la minoration précédente.

L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc divergente.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > -1$.

2. Pour $t \geqslant 1$, on a bien sûr $\sqrt{t} > \sin t$. Par suite, la fonction f est continue sur $[1, +\infty[$.

On a, au voisinage de $+\infty$:

$$f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\frac{1}{1-\frac{\sin t}{\sqrt{t}}} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \mathrm{o}\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)\right) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + g(t),$$

avec $g(t) \sim \frac{\sin^2 t}{t}$.

Nous utiliserons, comme dans l'exercice précédent, les résultats obtenus dans l'exercice de la page 681.

- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente, d'après l'exercice rappelé.
- Comme $t \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t}$ est une fonction positive, on déduit de l'équivalent, au voisinage de $+\infty$, $g(t) \sim \frac{\sin^2 t}{t}$, que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

  Or $\dfrac{\sin^2 t}{t} = \dfrac{1}{2t} - \dfrac{\cos 2t}{2t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t}$ diverge, alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t}\,\mathrm{d}t$ converge, d'après l'exercice rappelé.

On déduit de cette étude que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge, donc aussi $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, puisque f est la somme d'une fonction dont l'intégrale converge et d'une fonction dont l'intégrale diverge.

12.5 Notons $M = \displaystyle\sup_{x\geqslant 0}\int_x^{x+1} f'^2$.

Si l'on n'a pas $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall A \geqslant 0 \quad \exists x \geqslant A \quad \big|f(x)\big| \geqslant \varepsilon.$$

Fixons un tel $\varepsilon > 0$ et donnons-nous $\alpha \in]0,1]$ tel que $\alpha \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4M}$.
Pour $x \geqslant 0$ et $t \in [x, x+\alpha]$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\begin{aligned}\left|f(t) - f(x)\right| &= \left|\int_x^t f'\right| \\ &\leqslant \sqrt{\int_x^t 1}\sqrt{\int_x^t f'^2} \\ &\leqslant \sqrt{\alpha}\sqrt{\int_x^{x+1} f'^2} \\ &\leqslant \sqrt{\alpha}\sqrt{M} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

- Si l'on a $f(x) \geqslant \varepsilon$, on déduit de ce qui précède :

$$\forall t \in [x, x+\alpha] \quad f(t) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et donc} \quad \int_x^{x+\alpha} f \geqslant \frac{\alpha\varepsilon}{2}.$$

- Si l'on a $f(x) \leqslant -\varepsilon$, on prouve de même que $\displaystyle\int_x^{x+\alpha} f \leqslant -\frac{\alpha\varepsilon}{2}$.

On a donc établi :

$$\forall A \geqslant 0 \quad \exists x \geqslant A \quad \left|\int_x^{x+\alpha} f\right| \geqslant \frac{\alpha\varepsilon}{2}.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} f = 0$, puisque :

$$\forall x \geqslant 0 \quad \int_x^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} f - \int_0^x f \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f = \int_0^{+\infty} f.$$

On peut donc choisir $A \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \geqslant A \quad \left|\int_x^{+\infty} f\right| \leqslant \frac{\alpha\varepsilon}{8}.$$

En utilisant la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\forall x \geqslant A \quad \left|\int_x^{x+\alpha} f\right| \leqslant \frac{\alpha\varepsilon}{4}.$$

C'est une contradiction. On a donc montré que $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$.

12.6 1. Par l'absurde, si f ne tend pas vers 0, on peut trouver une suite (x_n) tendant vers $+\infty$ et un réel $\varepsilon > 0$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|f(x_n)\right| \geqslant 2\varepsilon$.
Par uniforme continuité, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $|f| \geqslant \varepsilon$ sur $[x_n, x_n+\eta]$ et par suite :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{[0,x_n+\eta]} |f| - \int_{[0,x_n]} |f| = \int_{[x_n,x_n+\eta]} |f| \geqslant \eta\,\varepsilon,$$

ce qui contredit l'existence de $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$ et donc l'intégrabilité de f.

2. La continuité ne suffit pas comme le prouve l'exemple de la page 666.

   En revanche, on peut remplacer l'intégrabilité par la convergence de $\int_0^{+\infty} f$. En reprenant la démonstration et les notations précédentes, la fonction f garde un signe constant sur $\big[x_n, x_n+\eta\big]$ et la contradiction provient de :

$$\left|\int_{[0,x_n+\eta]} f - \int_{[0,x_n]} f\right| = \left|\int_{[x_n,x_n+\eta]} f\right| \geqslant \eta\,\varepsilon,$$

   ce qui contredit l'existence de $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz appliquée à f' et 1 :

$$\big|f(y)-f(x)\big| = \left|\int_x^y f'(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f'^2}\,\sqrt{|y-x|},$$

   ce qui prouve que f est uniformément continue. Comme elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$, elle tend vers 0 en $\pm\infty$ et, étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

12.7 1. On a, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$\int_{x/2}^x f\,(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f\,(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x/2} f\,(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} f\,(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f\,(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$.

   Notant ℓ cette limite, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x/2}^x f\,(t)\,\mathrm{d}t = \ell-\ell = 0$.

2. Comme f est positive et décroissante, on peut écrire :

$$\forall x\geqslant 0\quad 0\leqslant \frac{x}{2}\,f\,(x)\leqslant \int_{x/2}^x f\,(t)\,\mathrm{d}t.$$

   On déduit de la première question que $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\frac{x}{2}f\,(x)\big)=0$, d'où :

$$\lim_{x\to+\infty}\big(xf\,(x)\big)=0.$$

   Cela signifie que $f\,(x)=\mathrm{o}\big(\frac{1}{x}\big)$, au voisinage de $+\infty$.

3. Il suffit de reprendre l'exemple de la page 666.

12.8 1. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \int_{-\frac{\pi}{2}+n\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} x\,e^{-x^\alpha\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (t+n\pi)\,e^{-(t+n\pi)^\alpha\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

   Par concavité de la fonction sin sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\quad \lambda t\leqslant\sin t\leqslant t\quad\text{avec}\quad \lambda=\frac{2}{\pi}\cdot$$

Par imparité de la même fonction, il vient :

$$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \lambda\,|t| \leqslant |\sin t| \leqslant |t|\,.$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n-1)\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\left((n+1)\pi\right)^\alpha t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant (n+1)\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\left((n-1)\pi\right)^\alpha \lambda^2 t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or, lorsque $a > 0$ tend vers $+\infty$:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\pi\sqrt{a}/2}^{\pi\sqrt{a}/2} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \sim \frac{I}{\sqrt{a}} \quad \text{avec} \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u > 0.$$

Donc les suites majorantes et minorantes sont équivalentes l'une à $\frac{\mu}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$, avec $\mu > 0$, l'autre à $\frac{\nu}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$, avec $\nu > 0$.

Par comparaison aux séries de Riemann, la série à termes positifs $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\dfrac{\alpha}{2} - 1 > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 4$.

2. • Supposons $\alpha \leqslant 4$. La série à termes positifs $\sum u_n$ étant divergente, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} u_p = +\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} f_\alpha = +\infty$.
La fonction f_α n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

• Supposons $\alpha > 4$. La série à termes positifs $\sum u_n$ converge ; posons $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.
Pour tout réel $x > \frac{\pi}{2}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{\pi}{2} + n\pi \geqslant x$; on a alors :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f_\alpha \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} f_\alpha = \sum_{p=1}^{n} u_p \leqslant S.$$

La fonction positive f_α est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$, puisque la fonction $x \mapsto \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f_\alpha$ est majorée sur $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$.

En conclusion, la fonction f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $\alpha > 4$.

12.9 1. • Les sommes partielles de cette série étant $\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$, il suffit de montrer que la convergence de cette **suite** entraîne la convergence de l'intégrale de f c'est-à-dire l'existence d'une limite finie pour la **fonction** $x \mapsto \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ (la réciproque est évidente).

• Tout d'abord, remarquons que l'intégrabilité de f' entraîne l'existence d'une limite finie pour $x \mapsto \int_{n_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire d'une limite finie pour f en $+\infty$.
Cette limite est alors nulle, puisque $\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie.

- Pour $x \in [n, n+1]$, on a :

$$\left|f(x)\right| \leqslant \left|f(n)\right| + \int_n^x \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \left|f((n)\right| + \int_n^{n+1} \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t.$$

Ainsi, par intégration sur $\left[\lfloor x \rfloor, x\right]$:

$$\left|\int_{\lfloor x \rfloor}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|f\left(\lfloor x \rfloor\right)\right| + \int_{\lfloor x \rfloor}^{\lfloor x \rfloor + 1} \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui prouve le résultat.

2. L'intégration par parties proposée dans l'énoncé donne :

$$w_n = \int_{n-1}^n f(t)\ \mathrm{d}t - f(n) = -\int_{n-1}^n (t-n+1)\ f'(t)\ \mathrm{d}t$$

et donc $|w_n| \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^n \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t$ qui est le terme général d'une série convergente par intégrabilité de f'.

On en déduit que les suites $\displaystyle\int_{n_0}^n f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\sum_{p=n_0+1}^{n} u_p$ sont de même nature. Donc, d'après la première question, l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si,la série $\sum u_n$ converge.

Remarque Pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème 12 de la page 409 est un cas particulier de ce résultat, puisque si f est réelle positive décroissante, elle admet une limite et donc $\displaystyle\int_{n_0}^n f' = f(n) - f(n_0)$ admet aussi une limite, ce qui prouve que la fonction **négative** f' est intégrable sur $[n_0, +\infty[$.

3. Comme $f'(x) = \dfrac{\alpha\, x^{\alpha-1} \cos(x^\alpha)}{x} - \dfrac{\sin(x^\alpha)}{x^2} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{x^{2-\alpha}}\right)$, quand $x \to +\infty$, la fonction f', continue sur $[1, +\infty[$, est intégrable sur cet intervalle.

D'après la question précédente, il suffit donc de montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x}\,\mathrm{d}x$.

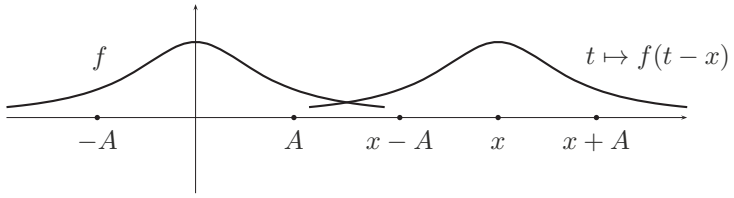
Par une intégration par parties, on a :

$$\int \frac{\sin(x^\alpha)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^{\alpha-1}\sin(x^\alpha)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(x^\alpha)}{\alpha\, x^\alpha} - \int \frac{\cos(x^\alpha)}{x^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}x$$

et cette primitive admet une limite en $+\infty$ puisque la fonction à intégrer est dominée par $1/x^{\alpha+1}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge et la série $\displaystyle\sum \frac{\sin(n^\alpha)}{n}$ converge.

12.10 Le schéma est le suivant :



et l'on peut deviner que la limite est $2\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|$ (c'est clair si f est nulle en dehors d'un segment).

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $A > 0$ tel que :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} |f| - \int_{[-A,A]} |f| \right| \leqslant \varepsilon$$

et $x \geqslant 2A$.

- L'inégalité triangulaire $\big|f(t) - f(t-x)\big| \leqslant \big|f(t)\big| + \big|f(t-x)\big|$ donne :

$$\int_{-\infty}^{-A} \big|f(t) - f(t-x)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-\infty}^{-A} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{-A-x} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant 2\varepsilon$$

et de même :

$$\int_{x+A}^{+\infty} \big|f(t) - f(t-x)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant 2\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_{A}^{x-A} \big|f(t) - f(t-x)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant 2\varepsilon.$$

- D'autre part :

$$\left| \int_{-A}^{A} \big|f(t) - f(t-x)\big|\,\mathrm{d}t - \int_{-A}^{A} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{-A}^{A} \big|f(t-x)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

puisque $A - x \leqslant -A$, et de même :

$$\left| \int_{x-A}^{x+A} \big|f(t) - f(t-x)\big|\,\mathrm{d}t - \int_{x-A}^{x+A} \big|f(t-x)\big|\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{x-A}^{x+A} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon.$$

- Enfin :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t - \int_{-A}^{+A} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon$$

et :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t - \int_{x-A}^{x+A} \big|f(t-x)\big|\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon$$

ce qui donne :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(t) - f(t-x)\big|\,\mathrm{d}t - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t \right| \leqslant 10\varepsilon.$$

12.11 La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, car f est continue.

- Supposons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \ell$.

  Commençons par prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Pour cela, montrons par une intégration par parties que les primitives admettent une limite en $+\infty$:

  $$\int \frac{F'(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{F(t)}{t^2} + 2\int \frac{F(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$

  Puisque $t \mapsto F(t)/t$ admet une limite finie, d'une part $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t)/t^2 = 0$ et d'autre part $F(t)/t^3 = \mathrm{O}(1/t^2)$, donc $t \mapsto F(t)/t^3$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, ce qui prouve l'existence d'une limite finie pour la primitive considérée.
  On en déduit :

  $$A(x) = x\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{F(x)}{x} + 2x\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$

  Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{F(t)}{t} = \ell$, on a :

  $$\frac{F(t)}{t^3} - \frac{\ell}{t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

  et par intégration des relations de comparaison (voir la proposition 27 de la page 682) :

  $$\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t - \frac{\ell}{x} = \int_x^{+\infty} \left(\frac{F(t)}{t^3} - \frac{\ell}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

  ce qui prouve :

  $$\lim_{x\to+\infty} x\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t = \ell \qquad \text{et donc} \qquad \lim_{x\to+\infty} A(x) = \ell.$$

- Supposons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,G(x) = \ell$ avec $G(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

  Alors $f(x) = -x^2\,G'(x)$ et par une intégration par parties :

  $$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x}\left[-t^2\,G(t)\right]_1^x + \frac{2}{x}\int_1^x t\,G(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{G(1)}{x} - x\,G(x) + \frac{2}{x}\int_1^x t\,G(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

  Comme $t\,G(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on a :

  $$\int_1^x t\,G(t)\,\mathrm{d}t - \ell\,(x-1) = \int_1^x \big(t\,G(t) - \ell\big)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}(x),$$

  ce qui donne $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} B(x) = \ell$.

12.12 Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$, on peut écrire, pour $0<x<y<1$:

$$f(y)-f(x)=\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au couple de fonctions $(1,f')$, on obtient :

$$\left|f(y)-f(x)\right|\leqslant\sqrt{\int_x^y \mathrm{d}t}\sqrt{\int_x^y f'^2(t)\,\mathrm{d}t}=\sqrt{y-x}\sqrt{\int_x^y f'^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

En faisant tendre y vers 1, on en déduit :

$$\left|f(x)\right|\leqslant\sqrt{1-x}\sqrt{\int_x^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

On a, par définition de la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t$:

$$\lim_{x\to1^-}\int_0^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\displaystyle\int_x^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t$, il vient :

$$\lim_{x\to1^-}\int_x^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

On a ainsi démontré $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x}}=0$.

12.13 1. On a, au voisinage de 0, $\frac{\sin t-t}{t^2}\sim-\frac{t}{6}$. La fonction $t\mapsto\frac{\sin t-t}{t^2}$ possède donc un prolongement continu sur $\mathbb{R}$, que nous noterons f.
On peut écrire, pour tout $x>0$:

$$\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_x^{3x}\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_x^{3x}f(t)\;\mathrm{d}t=\ln 3+\int_x^{3x}f(t)\;\mathrm{d}t.$$

D'après les propriétés de l'intégrale des fonctions continues, $x\mapsto\displaystyle\int_x^{3x}f(t)\;\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$; on en déduit, en particulier, $\lim\limits_{x\to0^+}\displaystyle\int_x^{3x}f(t)\;\mathrm{d}t=0$.

En conclusion, on a $\lim\limits_{x\to0^+}\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t=\ln 3$.

2. La fonction $t\mapsto\frac{\sin^3 t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et l'on a $\frac{\sin^3 t}{t^2}\sim t$, au voisinage de 0. Cette fonction possède donc un prolongement continu sur $\mathbb{R}$.
On a, pour tout $t>0$, $\left|\frac{\sin^3 t}{t^2}\right|\leqslant\frac{1}{t^2}$. On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et donc la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

3. On a :

$$\sin^3 t = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3 = -\frac{e^{3it}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-3it}}{8i}$$
$$= \frac{3}{4}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} - \frac{1}{4}\frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i} = \frac{3\sin t - \sin 3t}{4}\cdot$$

Pour $0 < x < y$, on peut écrire :

$$\int_x^y \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^y \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t - \int_x^y \frac{\sin 3t}{4t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $t = u/3$ dans la deuxième intégrale donne :

$$\begin{aligned}\int_x^y \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_x^y \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t - \int_{3x}^{3y} \frac{3\sin u}{4u^2}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_x^{3x} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{3x}^{3y} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{3y}^{y} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t\\ &\quad - \int_{3x}^{3y} \frac{3\sin u}{4u^2}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_x^{3x} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t - \int_y^{3y} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On a, pour tout $y > 0$:

$$\left|\int_y^{3y} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_y^{3y} \left|\frac{3\sin t}{4t^2}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_y^{3y} \frac{3}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{3}{4t}\right]_y^{3y}\cdot$$

On en déduit $\lim\limits_{y\to+\infty} \displaystyle\int_y^{3y} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t = 0$, d'où :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En faisant tendre x vers 0, on obtient, avec le résultat de la première question :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3\ln 3}{4}\cdot$$

12.14 1. Fixons $x > 0$. La fonction $t \mapsto \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}$ est continue, positive sur $[0, x[$ et l'on a, au voisinage de x :

$$\sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}} = \sqrt{\frac{1+t^2}{x+t}}\frac{1}{\sqrt{x-t}} \sim \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}}\frac{1}{\sqrt{x-t}}\cdot$$

On en déduit la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}\,\mathrm{d}t$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

2. Pour tout $x > 0$, on peut écrire :
$$\forall t \in [0, x[\quad 1 \leqslant \sqrt{1+t^2} \leqslant \sqrt{1+x^2}.$$
D'où l'encadrement :
$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}} \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{1+x^2} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}}.$$
On a, pour tout $u \in [0, x[$:
$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}} = \left[\operatorname{Arcsin}\left(\frac{t}{x}\right)\right]_{t=0}^{t=u} = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{u}{x}\right).$$
On en déduit, en faisant tendre u vers x, $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}} = \pi/2$. On a donc :
$$\forall x > 0 \quad \frac{\pi}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{1+x^2}.$$
Cet encadrement donne $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \pi/2$.

12.15 1. Soit $x \geqslant 0$. La fonction $g : t \mapsto \frac{\sin t}{(x+t)^{\alpha+1}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- Pour tout $t > 0$, on a $\left|g(t)\right| \leqslant \frac{1}{t^{\alpha+1}}$; cela prouve, par comparaison aux intégrales de Riemann, la convergence absolue, donc la convergence, de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g$.
- Pour $x > 0$, la fonction g a un prolongement continu en 0.
  Pour $x = 0$, on a $\left|g(t)\right| \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$; cela prouve, par comparaison aux intégrales de Riemann, la convergence absolue, donc la convergence, de $\displaystyle\int_0^1 g$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} v_n = \int_0^{(N+1)\pi} g$; on en déduit que la série $\sum v_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \int_0^{+\infty} g$.

Le changement de variable $t = n\pi + u$ donne $v_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin u}{(n\pi + x + u)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}u$.
La série $\sum v_n$ est donc alternée et, comme elle converge, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$; enfin, de l'inégalité valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in]0, \pi]$:
$$\frac{\sin u}{(n\pi + x + u)^{\alpha+1}} \geqslant \frac{\sin u}{\big((n+1)\pi + x + u\big)^{\alpha+1}},$$
on déduit la décroissance de la suite $\big(|v_n|\big)$.
La série $\sum v_n$ vérifie donc les hypothèses du critère des séries alternées. Par suite $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ a le signe de v_0, c'est-à-dire $f(x) \geqslant 0$.

2. • Les fonctions $u \mapsto \frac{\sin u}{u^\alpha}$ et $u \mapsto \frac{\cos u}{u^\alpha}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$ a été établie dans l'exercice 22 de la page 681 (ce serait à redémontrer, car hors programme). On prouve de même la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$.

Quand $u \to 0^+$, on a :

$$\left|\frac{\sin u}{u^\alpha}\right| \sim \frac{1}{u^{\alpha-1}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\cos u}{u^\alpha}\right| \sim \frac{1}{u^\alpha}.$$

Ces équivalents prouvent, par comparaison aux intégrales de Riemann, la convergence absolues, donc la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$ et de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$. On a donc justifié la définition de R sur $\mathbb{R}_+$.

• D'après la proposition 5 de la page 668, les deux fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$ et $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ces fonctions sont également continues en 0, par définition de la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$.

Par suite, la fonction R est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} R'(x) &= -2\frac{\sin x}{x^\alpha}\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u - 2\frac{\cos x}{x^\alpha}\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{2}{x^\alpha}\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u-x)}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = v + x$, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant, donne :

$$R'(x) = -\frac{2}{x^\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{\cos v}{(x+v)\,\alpha}\,\mathrm{d}v.$$

Effectuons une intégration par parties (crochet et intégrale existent de manière évidente) :

$$\begin{aligned} R'(x) &= -\frac{2}{x^\alpha}\left[\frac{\sin v}{(x+v)^\alpha}\right]_0^{+\infty} - \frac{2\alpha}{x^\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{\sin v}{(x+v)\,\alpha+1}\,\mathrm{d}v \\ &= -\frac{2\alpha}{x^\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{\sin v}{(x+v)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

D'après la première question, on a $R' \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme la fonction R est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $R' \leqslant 0$, on en déduit qu'elle est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

12.16 1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$. Pour conclure, il suffit, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, d'établir l'existence de $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et de $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.

- Un développement au voisinage de 0 donne :

$$f(x)=\frac{2\sin(x/2)-x}{2x\sin(x/2)}=\frac{2\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{48}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)-x}{2x\sin(x/2)}=\frac{-\dfrac{x^3}{24}+\mathrm{o}\left(x^3\right)}{2x\sin(x/2)}\sim-\frac{x}{24}.$$

On en déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$.

- On a, pour tout $x\in]0,\pi]$:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{\cos(x/2)}{4\sin^2(x/2)}=\frac{x^2\cos(x/2)-4\sin^2(x/2)}{4x^2\sin^2(x/2)}.$$

En procédant comme au dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{x^2\left(1-\frac{x^2}{8}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)-4\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{48}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^2}{4x^2\sin^2(x/2)}\\&=\frac{x^2\left(1-\frac{x^2}{8}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)-4\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{48}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)}{4x^2\sin^2(x/2)}\\&=\frac{-\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)}{4x^2\sin^2(x/2)}\sim\frac{-\frac{x^4}{24}}{x^4}.\end{aligned}$$

On en déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=-1/24$.

Le prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ de f ainsi obtenu sera encore noté f.

2. La fonction $t\mapsto\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ est continue sur $]0,\pi]$ et comme, au voisinage de 0, $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sim\frac{\frac{2n+1}{2}t}{\frac{t}{2}}$, on a $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=2n+1$.

Cette fonction a donc un prolongement continu sur $[0,\pi]$, d'où l'existence de I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}I_{n+1}-I_n&=\int_0^\pi\frac{\sin\left(\frac{2n+3}{2}t\right)-\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^\pi\frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(n+1)\,t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t\\&=2\int_0^\pi\cos(n+1)\,t\,\mathrm{d}t\\&=2\left[\frac{\sin(n+1)\,t}{n+1}\right]_0^\pi=0.\end{aligned}$$

Ainsi la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = I_0 = \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = \pi.$$

3. Une intégration par parties avec $\lambda > 0$ donne :

$$\int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\,g(x)\right]_a^b + \frac{1}{\lambda}\int_a^b \cos(\lambda x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \frac{\big|g(b)\big| + \big|g(a)\big|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b \big|\cos(\lambda x)\,g'(x)\big|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{\big|g(b)\big| + \big|g(a)\big|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b \big|g'(x)\big|\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

d'où $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0$, puisque le majorant tend vers zéro.

4. Nous avons établi la semi-convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ dans un exercice de la page 681 (*attention*, la démonstration de ce résultat hors programme serait à refaire).

En appliquant à la fonction f de la première question le résultat de la question précédente, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Vu la définition de f, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)\,\mathrm{d}t &= \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{I_n}{2}\\ &= \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Le changement de variable $t = \frac{2u}{2n+1}$ donne :

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$ et l'on peut conclure que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$

Chapitre 13 : Convergence dominée et applications

I Suites et séries d'intégrales 724
1 Le théorème de convergence dominée 724
2 Séries de fonctions intégrables 727
II Intégrales à paramètre 732
1 Continuité d'une intégrale à paramètre 732
2 Limites d'intégrales 735
3 Dérivation d'une intégrale à paramètre 737
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 744
Exercices 759

Convergence dominée et applications

13

Dans ce chapitre, nous étudions des intégrales dépendant d'un paramètre qui peut être entier (suites de fonctions) ou réel. Dans les deux cas, nous nous intéresserons aux problèmes de convergence et dans le second cas à la continuité et à la dérivabilité. Pour la continuité, le paramètre pourra même plus généralement être pris dans un espace vectoriel de dimension finie. Les résultats de ce chapitre sont importants, mais certaines démonstrations sont hors programme. Il convient donc de lire avec attention les exemples et contre-exemples pour bien comprendre l'importance des hypothèses.
Dans tout le chapitre, les intervalles de $\mathbb{R}$ considérés seront d'intérieur non vide et les fonctions seront à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I Suites et séries d'intégrales

1 Le théorème de convergence dominée

Théorème 1 (de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On fait les hypothèses suivantes :

- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction φ *intégrable* sur I à valeurs réelles telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t),$$

(**hypothèse de domination**).

Alors les f_n et f sont intégrables sur I et $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

Nous n'en ferons pas la démonstration qui est hors programme.
Une démonstration avec des hypothèses renforcées est proposée dans l'exercice 13.7 de la page 759.

Remarques

1. La fonction φ de l'hypothèse de domination est bien sûr, en particulier, continue par morceaux et à valeurs positives.
2. On n'oubliera pas de vérifier la continuité par morceaux de f. En effet, il existe des suites de fonctions continues par morceaux qui convergent simplement vers une fonction qui n'est pas continue par morceaux.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n\,e^{-t}}$.

Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ à l'aide du théorème de convergence dominée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n\,e^{-t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour $t \in [0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(1) = \frac{1}{2+e^{-1}}$.

  Pour $t > 1$, on $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$.

  Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+t^2} & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ \frac{1}{2+e^{-1}} & \text{si} \quad t = 1 \\ 0 & \text{si} \quad t > 1. \end{cases}$$

  La fonction f est continue sur $[0,1[$, possède une limite finie à droite et à gauche en 1, et est continue sur $]1,+\infty[$; elle est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\left|f_n(t)\right| = f_n(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

  La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\frac{1}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann. Cela fournit l'hypothèse de domination.

En conclusion, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\operatorname{Arctan} t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Attention

Constatons sur un exemple l'importance de l'hypothèse de domination.

Soit $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = n^2 t^{n-1}$. Pour $n \geqslant 1$, chaque f_n est continue et intégrable sur $[0,1[$, puisqu'elle a un prolongement continu sur $[0,1]$.
Pour tout $t \in [0,1[$ fixé, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$, par comparaison des suites géométriques et puissances. Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle, continue et intégrable sur $[0,1[$, d'intégrale nulle sur $[0,1[$.
Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont donc vérifiées, en dehors de l'hypothèse de domination. Or $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = [t^n]_0^1 = n$.
On n'a donc pas $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

p.744

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. À l'aide du changement de variable $t = u^{\frac{1}{n}}$, déterminer un équivalent simple de I_n. On ne cherchera pas à calculer l'intégrale obtenue.

p.744

Exercice 2

1. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^n)^{1/n}}$ est-elle définie ?
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Attention Il faut bien noter, dans l'énoncé du théorème de convergence dominée, que *l'intervalle d'intégration est fixe*. Nous allons voir, sur un exemple, comment on peut parfois contourner cette difficulté lorsque l'intervalle d'intégration dépend de n.

p.745

Exercice 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

1. Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction f_n continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ telle que $I_n = \displaystyle\int_{[0,+\infty[} f_n$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ sous forme d'une intégrale.

2 Séries de fonctions intégrables

Intégration terme à terme d'une série de fonctions intégrables

Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 2 (d'intégration terme à terme)

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions, avec $u_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

On fait les hypothèses suivantes :

- chaque u_n est intégrable sur I,
- la série $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue par morceaux sur I,
- la série $\sum \left(\int_I |u_n| \right)$ converge.

Alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et l'on a :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n \right).$$

Remarques

1. Chaque u_n est bien sûr supposée en particulier continue par morceaux.
2. Dans la plupart des exercices, on développe en série une fonction f continue par morceaux. La continuité par morceaux de la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, égale à f, est alors évidente.
3. Lorsque chaque u_n est continue et qu'on ne connaît pas d'expression simple de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, on peut s'assurer que c'est une fonction continue (donc continue par morceaux) par convergence uniforme, voire normale, sur tout segment.

Exemples

1. Établissons l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

   Pour tout $t \in]0,1[$, la série géométrique $\sum t^n \ln t$ converge et l'on a :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln t = \frac{\ln t}{1-t}.$$

   Appliquons à la série de fonctions $\sum u_n$, avec $u_n(t) = -t^n \ln t$, le théorème 2 sur $]0,1[$.

- Chaque u_n est continue sur $]0,1[$ et l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall t \in]0,1[\quad \left|u_n(t)\right| \leqslant |\ln t|\,.$$
On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par croissances comparées, $u_n(t) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$, au voisinage de 0. Par suite, chaque u_n est intégrable sur $]0,1[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.
- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,1[$, d'après l'étude initiale, et sa somme est la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$, continue sur $]0,1[$.
- Calculons $\displaystyle\int_0^1 \left|u_n(t)\right|\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n(-\ln t)\,\mathrm{d}t$.
Intégrons par parties, en utilisant la proposition 24 de la page 678 (ici les trois termes existent de manière évidente) :
$$\begin{aligned}\int_0^1 t^n(-\ln t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}(-\ln t)}{n+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t^{n+1}(-\ln t)}{n+1} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2}\cdot\end{aligned}$$
La série $\displaystyle\sum \int_0^1 \left|u_n(t)\right|\mathrm{d}t$ est donc convergente.

En conclusion, la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ (ce qu'on peut facilement vérifier directement) et l'on a :
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cdot$$

2. Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\cdot$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $u_n : t \mapsto \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n}}$ et appliquons le théorème d'intégration terme à terme sur $]0,+\infty[$.
- Chaque u_n est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'après la proposition 8 de la page 669.
- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, car, pour tout $t > 0$, la série $\sum u_n(t)$ est une série géométrique de raison $e^{-t} \in]0,1[$.
Montrons la continuité de la somme sur $]0,+\infty[$. Chaque u_n est continue sur $]0,+\infty[$. Il suffit donc d'établir la convergence normale sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.
Soit $[a,b]$ un tel segment $(a < b)$. Par positivité et décroissance de chaque u_n, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sup_{[a,b]} |u_n| = u_n(a)\ ;$$
d'où la conclusion, d'après l'étude de la convergence simple.

- Comme chaque u_n est positif, on a :

$$\int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} u_n = \left[-\frac{e^{-nt}}{n^{\frac{3}{2}}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

  Par suite, la série $\sum \left(\int_I |u_n|\right)$ est une série de Riemann convergente.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique donc et la formule annoncée s'en déduit, d'après le calcul précédent.

p.746

Exercice 4 Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Attention L'hypothèse de convergence de la série $\sum \left(\int_I |u_n|\right)$ est essentielle et la seule convergence, même absolue, de la série $\sum \left(\int_I u_n\right)$ ne suffit pas, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = t^{2n+1}$.

- Chaque u_n est bien sûr intégrable sur $]-1,1[$ et l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{-1}^{1} u_n = \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right]_{-1}^{1} = 0.$$

  En particulier, la série $\displaystyle\sum \int_{-1}^{1} u_n$ converge.

- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$, puisque, pour tout $t \in]-1,1[$, la série $\sum u_n(t)$ est une série géométrique de raison $t^2 \in [0,1[$.

  Sa somme $t \mapsto \frac{t}{1-t^2}$ est continue sur $]-1,1[$, mais elle n'est pas intégrable, car l'une de ses primitives, $t \mapsto -\frac{1}{2}\ln\left(1-t^2\right)$ n'a pas de limite finie en 1.

p.747

Exercice 5 On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$u_n(t) = 2(n+1)te^{-(n+1)t^2} - 2nte^{-nt^2}.$$

Montrer que les u_n et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$.

Comparer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n\right)$.

Autres méthodes pour intégrer terme à terme

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et intégrables sur I qui converge simplement sur I. On suppose que la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue par morceaux sur I et l'on cherche des conditions suffisantes pour que $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n\right)$. On se place dans le cas où la méthode précédente ne s'applique pas.

Une première condition à imposer est que l'intégrale $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ converge ; on supposera en fait que la fonction $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I.

Si $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p$ et $R_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} u_p$, il s'agit de justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_I S_n = \int_I S$ ou, de manière équivalente, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_I R_n = 0$. En pratique, on pourra utiliser l'une des méthodes suivantes :

- établir directement, à l'aide de majorations, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_I R_n = 0$,
- appliquer le théorème de convergence dominée à l'une des suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple Montrons que $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, t^{\sqrt{n}}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$.

Notons $u_n : t \mapsto (-1)^n\, t^{\sqrt{n}}$. Pour tout $t \in [0,1[$, la série $\sum u_n(t)$ converge, d'après le théorème des séries alternées (cette série est alternée, la suite $\Big(\big|u_n(t)\big|\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît et tend vers 0, car $\big|u_n(t)\big| = t^{\sqrt{n}}$, avec $t \in [0,1[$.

La fonction $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est donc définie sur $[0,1[$; justifions son intégrabilité sur cet intervalle.

- Montrons d'abord la continuité de f, en appliquant le théorème de continuité des séries de fonctions. Chaque fonction u_n est déjà continue sur $[0,1[$.
  Soit $a \in [0,1[$; le théorème des séries alternées permet d'écrire :
  $$\forall\,(n,t) \in \mathbb{N}^* \times [0,a] \quad \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p(t)\right| \leqslant \big|u_{n+1}(t)\big| \leqslant a^{\sqrt{n+1}}.$$
  Comme la suite numérique $\left(a^{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, cela prouve la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur le segment $[0,a]$ et cela pour tout réel $a \in [0,1[$. La fonction f est donc continue sur $[0,1[$.

- Chaque u_n a un prolongement continu sur le segment $[0,1]$, donc est intégrable sur $[0,1[$.

  Le théorème des séries alternées permet d'écrire $|f| \leqslant |u_1| \leqslant 1$. Comme la fonction continue f est bornée sur l'intervalle borné $[0,1[$, elle est intégrable sur ce dernier intervalle.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$ et $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$. En utilisant le théorème des séries alternées, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left|\int_0^1 R_n\right| \leqslant \int_0^1 |R_n| \leqslant \int_0^1 |u_{n+1}| = \frac{1}{1+\sqrt{n+1}}.$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 R_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n = \int_0^1 f$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}} = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, t^{\sqrt{n}}\right) \mathrm{d}t.$$

p.747

Exercice 6 Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4n+2}{(2n+1)^2+x^2}.$$

On pourra écrire, pour tout $t>0$, $\frac{1}{\operatorname{ch} t} = \frac{2e^{-t}}{1+e^{-2t}}$.

Remarque On peut vérifier *a posteriori* de deux façons que le théorème d'intégration terme à terme (page 727) ne s'applique pas.

- On a $\left|\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right| = \frac{4n+2}{(2n+1)^2+x^2} \sim \frac{1}{n}$; comme :

  $$\left|\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |u_n(t)|\mathrm{d}t,$$

  la série $\sum \int_0^{+\infty} |u_n(t)|\mathrm{d}t$ diverge, par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum \frac{1}{n}$ (série harmonique).

- La série de fonctions $\sum |u_n|$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :

  $$\forall t>0 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(t)| = |\cos(tx)|e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt} = \frac{|\cos(tx)|e^{-t}}{1-e^{-2t}}.$$

  La fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si le théorème d'intégration terme à terme s'appliquait à la série $\sum u_n$, il s'appliquerait donc aussi à

la série $\sum |u_n|$, l'une des conclusions étant l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. Comme, au voisinage de 0, $\frac{\left|\cos(tx)\right|e^{-t}}{1-e^{-2t}} \sim \frac{1}{2t}$, cette fonction n'est pas intégrable sur $]0,1]$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

p.749

Exercice 7 Établir par deux méthodes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2 + x^2}.$$

On pourra écrire, pour tout $t > 0$, $\frac{1}{\operatorname{sh} t} = \frac{2e^{-t}}{1-e^{-2t}}$.

1. En appliquant le théorème d'intégration terme à terme.
   On pourra utiliser l'inégalité $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$, valable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. En appliquant le théorème de convergence dominée.

II Intégrales à paramètre

1 Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 3

Soit A une partie non vide d'un espace normé E de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \to \mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A,
- pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$ *intégrable* sur I telle que :
$$\forall (x,t) \in A \times I \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t),$$
(**hypothèse de domination**).

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Principe de démonstration. On utilise la caractérisation séquentielle de la continuité et le théorème de convergence dominée.

Démonstration page 751

Remarque La fonction φ de l'hypothèse de domination est bien sûr en particulier continue par morceaux et à valeurs positives.

Exemple Montrons que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Appliquons le théorème 3 de la page ci-contre en notant $f : (x,t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue (donc continue par morceaux) sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, on a :

$$\left|f(x,t)\right| = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(t) \sim \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$; d'où l'intégrabilité de φ sur $[0,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Cela fournit donc l'hypothèse de domination.

En conclusion, la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Attention

Montrons sur un exemple que l'hypothèse de domination est essentielle.

Prenons $A = \mathbb{R}$, $I =]0,1]$ et $f : A \times I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \frac{x}{x^2+t^2}$.

On vérifie sans difficulté les deux premières hypothèses.

Calculons $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$. On a $g(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$:

$$g(x) = \left[\operatorname{Arctan}(t/x)\right]_{t=0}^{t=1} = \operatorname{Arctan}(1/x).$$

Par suite, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\pi/2$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\pi/2$; g n'est donc pas continue en 0.

Point méthode

La conclusion du théorème 3 de la page précédente subsiste si l'on remplace l'hypothèse de domination par la suivante :

- pour tout point a de A, il existe un voisinage V de a dans A et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in V \times I \quad \left|f(x,t)\right| \leqslant \varphi(t),$$

(hypothèse de domination au voisinage de tout point)

En effet, en appliquant, pour tout $a \in A$, le théorème à la restriction de f à $V \times I$, où V est un voisinage de a dans A sur lequel l'hypothèse précédente est vérifiée, on prouve que g est définie et continue au voisinage de tout point de A, donc sur A.

Exemple Soit $H = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\right\}$ et $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux telle que, pour tout $p \in H$, la fonction $t \mapsto e^{-pt} f(t)$ soit intégrable sur $[0, +\infty[$.
On définit la **transformée de Laplace** $Lf : H \to \mathbb{C}$ de f par :

$$\forall p \in H \quad Lf(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Montrons que Lf est continue sur H, en appliquant le point méthode précédent.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $p \mapsto e^{-pt} f(t)$ est continue sur H.
- Pour tout $p \in H$, la fonction $t \mapsto e^{-pt} f(t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- Soit $p_0 \in H$ et $a = \dfrac{1}{2} \operatorname{Re}(p_0)$. Notons V le disque ouvert de centre p_0 et de rayon a ; c'est un voisinage de p_0 et l'on a :

  $$\forall p \in V \quad \operatorname{Re}(p) \geqslant \operatorname{Re}(p_0) - a = a.$$

  On en déduit, pour tout $(p, t) \in V \times \mathbb{R}_+$:

  $$\left|e^{-pt} f(t)\right| = e^{-\operatorname{Re}(p)t} \left|f(t)\right| \leqslant e^{-at} \left|f(t)\right|.$$

  Comme a est strictement positif, la fonction $t \mapsto e^{-at} \left|f(t)\right|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a établi l'hypothèse de domination au voisinage de tout point.

D'après le point méthode précédent, la fonction Lf est continue sur H.

Point méthode

La conclusion du théorème 3 de la page 732 subsiste, lorsque A est un intervalle de $\mathbb{R}$, si l'on remplace l'hypothèse de domination par la suivante :

- pour tout segment $[a, b] \subset A$, il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

  $$\forall (x, t) \in [a, b] \times I \quad \left|f(x, t)\right| \leqslant \varphi(t),$$

  (hypothèse de domination sur tout segment)

En effet, comme tout point de A admet un voisinage dans A qui est un segment, il suffit d'appliquer le point méthode précédent.

p.752

Exercice 8 Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\, \mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. Montrer que g est continue.

2 Limites d'intégrales

Le but de cette partie est d'étendre le théorème de convergence dominée à une famille de fonctions indexées par un paramètre décrivant un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 4

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : J \times I \to \mathbb{K}$ et λ_0 un point adhérent à J. On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout $\lambda \in J$, la fonction $t \mapsto f(\lambda, t)$ est continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction $F \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ telle que pour tout $t \in I$, on ait $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} f(\lambda, t) = F(t)$,
- il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (\lambda, t) \in J \times I \quad |f(\lambda, t)| \leqslant \varphi(t)$$

(**hypothèse de domination**).

Alors, pour tout $\lambda \in J$, la fonction $t \mapsto f(\lambda, t)$ est intégrable sur I, la fonction F est intégrable sur I et l'on a :

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_I f(\lambda, t)\,\mathrm{d}t = \int_I F(t)\,\mathrm{d}t.$$

Principe de démonstration. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée.

Démonstration page 752

Remarques

1. Ce résultat sert surtout lorsque $\lambda_0 = \pm\infty$ car, pour $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, quitte à prolonger par continuité les fonctions, on pourra le plus souvent appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre.
2. En pratique, il suffit d'établir une domination locale au voisinage de λ_0.

   Ainsi, dans le cas où $\lambda_0 = +\infty$, une domination sur un intervalle quelconque $J_0 = [a, +\infty[\subset J$ suffit, car $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \int_I f(\lambda, t)\,\mathrm{d}t$ et $\lim\limits_{\substack{\lambda \to \lambda_0 \\ \lambda \in J_0}} \int_I f(\lambda, t)\,\mathrm{d}t$ existent simultanément et sont égales, en cas d'existence.

Reformulons le théorème précédent en termes de familles de fonctions.

Corollaire 5

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions continues par morceaux sur I et λ_0 un point adhérent à J. On fait les hypothèses suivantes :

- il existe une fonction $F \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ telle que pour tout $t \in I$, on ait $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda(t) = F(t)$,
- il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall \lambda \in J \quad \forall t \in I \quad |f_\lambda(t)| \leqslant \varphi(t)$$

(**hypothèse de domination**).

Alors les fonctions f_λ et F sont intégrables sur I et $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \int_I f_\lambda = \int_I F$.

Exemple On reprend les notations du dernier exemple (transformée de Laplace) de la page 734.

On note $\ell_0 = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$, on suppose l'existence de $\ell_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ et l'on considère la restriction de Lf à $\mathbb{R}_+^*$. Établissons les deux résultats suivants.

- Théorème de la valeur initiale : $\lim\limits_{p\to+\infty} pLf(p) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \ell_0$.
- Théorème de la valeur finale : $\lim\limits_{p\to 0^+} pLf(p) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell_\infty$.

En effectuant dans l'intégrale définissant $Lf(p)$ le changement de variable $t = \frac{u}{p}$ (on applique la proposition 25 de la page 679 : la fonction $u \mapsto \frac{u}{p}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même), on obtient :

$$\forall p > 0 \quad pLf(p) = \int_0^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{p}\right) \mathrm{d}u.$$

Appliquons le théorème 4 de la page précédente.

- Pour tout $p > 0$, la fonction $u \mapsto e^{-u} f\left(\frac{u}{p}\right)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $u > 0$, on a :

$$\lim_{p\to+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{p}\right) = e^{-u}\ell_0 \quad \text{et} \quad \lim_{p\to 0} e^{-u} f\left(\frac{u}{p}\right) = e^{-u}\ell_\infty.$$

Les fonctions $u \mapsto e^{-u}\ell_0$ et $u \mapsto e^{-u}\ell_\infty$ sont continues sur $]0,+\infty[$.

- Comme f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et possède une limite en $+\infty$, elle est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$; notons $M = \sup_{\mathbb{R}_+^*} |f|$ et $\varphi : u \mapsto Me^{-u}$. On a :

$$\forall p \in]0,+\infty[\quad \forall u \in]0,+\infty[\quad \left| e^{-u} f\left(\frac{u}{p}\right) \right| \leqslant \varphi(u),$$

ce qui fournit l'hypothèse de domination.

D'après le théorème 4 de la page 735, on peut conclure, que :

$$\lim_{p\to+\infty} p\,Lf(p) = \int_0^{+\infty} \ell_0 e^{-u}\mathrm{d}u = \ell_0$$

$$\lim_{p\to 0} p\,Lf(p) = \int_0^{+\infty} \ell_\infty e^{-u}\mathrm{d}u = \ell_\infty.$$

C'est le résultat annoncé.

p.753

Exercice 9 Pour tout $\lambda > 0$, on définit f_λ sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \geqslant 0 \quad f_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{\lambda^2+t^2}}.$$

Justifier l'existence, pour tout $\lambda > 0$ de $\int_{\mathbb{R}_+} f_\lambda$ et déterminer $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_\lambda$.

p.753

Exercice 10 Pour tout $x > 0$, on pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier la définition de g.
2. Déterminer la limite et un équivalent simple de $g(x)$, quand x tend vers $+\infty$.

3 Dérivation d'une intégrale à paramètre

Rappel Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $(x_0,t_0) \in J \times I$.
Lorsqu'elle existe, la dérivée en x_0 de la fonction $x \mapsto f(x,t_0)$ est appelée dérivée partielle par rapport à x en (x_0,t_0) de f et est notée $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t_0)$.

Exemple Soit $f : \mathbb{R} \times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \frac{x^2}{x^2+t^2}$.
Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, dont la deuxième ne s'annule pas. Par suite $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $\mathbb{R} \times]0,+\infty[$ et l'on a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2x}{x^2+t^2} + x^2 \frac{-2x}{(x^2+t^2)^2} = \frac{2xt^2}{(x^2+t^2)^2}.$$

Théorème 6

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J,
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I,
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in J \times I \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t),$$

(**hypothèse de domination pour** $\frac{\partial f}{\partial x}$).

Alors la fonction $g : J \mapsto \mathbb{K}$, définie par $g(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et l'on a : $\forall x \in J \quad g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Principe de démonstration. Pour tout $x_0 \in J$, on forme les taux d'accroissement de g en x_0 et l'on applique le théorème 3 de la page 732.

Démonstration page 754

Exemple Montrons que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Appliquons le théorème 6.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(x,t) = \frac{e^{ixt}}{1+t^3}$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{it\,e^{ixt}}{1+t^3}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\left|f(x,t)\right| = \frac{1}{1+t^3}$.

  La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et, comme on a $\frac{1}{1+t^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- On a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t}{1+t^3}.$$

  La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{t}{1+t^3}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et, comme $\varphi(t) \sim \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

  Cela fournit l'hypothèse de domination.

On déduit du théorème 6 de la page précédente que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{it\, e^{ixt}}{1+t^3}\, \mathrm{d}t.$$

Attention

Montrons sur un exemple que l'hypothèse de domination de $\frac{\partial f}{\partial x}$ est essentielle.

Prenons $J = \mathbb{R}$, $I =]0, +\infty[$ et $f : J \times I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \frac{x^2}{x^2+t^2}$.
Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont la seconde ne s'annule pas.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{x^2}{x^2+t^2}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et comme, au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) \sim \frac{x^2}{t^2}$, f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.
On a vu dans l'exemple de la page 737 que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2xt^2}{(x^2+t^2)^2}$ et l'on prouve de même que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ a un prolongement continu sur $[0, +\infty[$.
Ainsi les trois premières hypothèses du théorème 3 de la page 732 sont vérifiées.
Bien sûr $g(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$, on a $g(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(x \operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right)\right) = \frac{\pi}{2}|x|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $g(x) = \frac{\pi}{2}|x|$. Par suite g n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, car non dérivable en 0 .

Point méthode

La conclusion du théorème 6 de la page ci-contre subsiste si l'on remplace l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ par la suivante :

- pour *tout segment* $[a,b] \subset J$, il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

(hypothèse de domination sur tout segment pour $\frac{\partial f}{\partial x}$).

En effet, en appliquant pour tout segment $[a,b] \subset J$ le théorème 6 de la page précédente à la restriction de f à $[a,b] \times I$, on prouve que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et que $g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, \mathrm{d}t$.
Par suite g est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de tout point, donc sur J, et le calcul de g' est valable sur J.

Exemple Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

- Montrons que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$, en appliquant le théorème 3 de la page 732. On note $f : (x,t) \mapsto \frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}$.
  - ∗ Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  - ∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
  - ∗ On a :
  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t \geqslant 0 \quad \left|f(x,t)\right| = f(x,t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$
  La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$, quand $t \to +\infty$; d'où l'intégrabilité de cette fonction sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann. Cela fournit l'hypothèse de domination.

  D'après le théorème 3 de la page 732, g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- Montrons que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (par parité de g, elle l'est également sur $\mathbb{R}_-^*$), en appliquant le point méthode précédent.
  - ∗ Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :
  $$\forall x > 0 \quad \forall t \geqslant 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2\left(1+t^2\right)}.$$
  - ∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, comme on l'a vu dans l'étude de définition de g.
  - ∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
  - ∗ Soit $[a,b]$, avec $0 < a < b$, un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :
  $$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2be^{-a^2\left(1+t^2\right)}.$$
  La fonction $\varphi : t \mapsto 2be^{-a^2\left(1+t^2\right)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a :
  $$\varphi(t) = 2be^{-a^2}e^{-a^2t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{quand} \quad t \to +\infty,$$
  par croissances comparées ; d'où l'intégrabilité de φ sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

  Cela fournit l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

  On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :
  $$\forall x > 0 \quad g'(x) = -\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t.$$

- Déduisons de ce qui précède la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

  Notons que I existe, car la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann, puisque $e^{-t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$.

  En effectuant dans l'intégrale donnant g' le changement de variable $t = \frac{u}{x}$ (on applique la proposition 25 de la page 679 : la fonction $u \mapsto \frac{u}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même), on obtient :

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = -2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -2Ie^{-x^2}.$$

  D'où l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x > 0 \quad g(x) = -2I\int_0^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + C.$$

  On a, par ailleurs :

$$\forall x > 0 \quad 0 \leqslant g(x) = e^{-x^2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-x^2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\,e^{-x^2}.$$

  Par encadrement, on en déduit $\lim\limits_{+\infty} g = 0$, puis $C = 2I^2$.

  On a, de plus :

$$g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{0^+} g = C = 2I^2.$$

  La continuité de g en 0 permet de conclure que $2I^2 = \frac{\pi}{2}$ et donc que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

p.755

Exercice 11 Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer g', puis g.

Corollaire 7

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J,
- pour tout $x \in J$ et tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur I,
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- pour *tout segment* $[a,b] \subset J$, il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t),$$

(**hypothèse de domination sur tout segment pour** $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$).

Alors la fonction $g : J \mapsto \mathbb{K}$, définie par $g(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et l'on a, pour tout $p \in [\![1,k]\!]$: $\forall x \in J \quad g^{(p)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration page 756

Exemple Montrons que $g : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-itx} \mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Appliquons le corollaire 7. On note $f : (x,t) \mapsto e^{-t^2} e^{-itx}$ et l'on fixe $k \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall p \in [\![0,k]\!] \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) = (-it)^p e^{-t^2} e^{-itx}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

  On a, quand $|t| \to +\infty$:

$$\left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| = |t|^p e^{-t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

  par croissances comparées.

  Cela assure l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$, par comparaison aux intégrales de Riemann, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in [\![0, k-1]\!]$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- On a :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |t|^k e^{-t^2}.$$
La fonction $t \mapsto |t|^k e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (même raison que dans le point précédent). Cela assure l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$.

D'après le corollaire 7 de la page ci-contre, on peut conclure que g est définie et de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que :
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^k e^{-t^2} e^{-itx} \mathrm{d}t.$$

p.756

Exercice 12 On conserve la notation de l'exemple précédent.

Former une équation différentielle vérifiée par g et en déduire g.

p.757

Exercice 13 Soit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de Γ.
2. Démonter que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

1. On pourrait utiliser le théorème de convergence dominée, mais ici une méthode directe est plus simple.
   On déduit de la concavité de la fonction ln l'inégalité classique suivante :
   $$\forall u > -1 \quad \ln(1+u) \leqslant u.$$
   On a donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$
   et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u \mapsto u^{\frac{1}{n}}$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1]$ sur lui-même ; en utilisant la proposition 25 de la page 679, on obtient :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, u^{\frac{1}{n}} \,\mathrm{d}u.$$
   Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec $J_n = nI_n$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}\, u^{\frac{1}{n}}$ est continue sur $]0,1]$.
   - La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction continue f définie par : $\forall u \in]0,1] \quad \varphi(u) = \frac{\ln(1+u)}{u}$.
   - On a :
     $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall u \in]0,1] \quad \big|f_n(u)\big| = f_n(u) \leqslant \varphi(u),$$
     avec $\varphi(u) = \frac{\ln(1+u)}{u}$.
     La fonction φ est intégrable sur $]0,1]$, car prolongeable par continuité sur $[0,1]$, puisque $\lim\limits_0 \varphi = 1$.

   On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f$ et, comme la fonction f est continue et strictement positive sur $[0,1]$, on a $\int_0^1 f > 0$. On peut donc écrire :
   $$I_n \sim \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1-t^n)^{1/n}}$ est continue sur $[0,1[$.
   On a, au voisinage de 1 :
   $$1 - t^n = 1 - \big(1 + (t-1)\big)^n = 1 - \big(1 + n(t-1) + \mathrm{o}(t-1)\big).$$
   On en déduit $1 - t^n \sim n(1-t)$, puis $f_n(t) \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}(1-t)^{\frac{1}{n}}}$.
   Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale I_n est définie si, et seulement si, $\frac{1}{n} < 1$, c'est-à-dire $n \geqslant 2$, puisque $n \in \mathbb{N}^*$.

2. • Soit $t \in [0,1[$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-t^n)=1$; comme $\ln\big(f_n(t)\big)=-\frac{1}{n}\ln(1-t^n)$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\big(f_n(t)\big)=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(t)=1$.
Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction f constante (donc continue !) égale à 1.
• Pour $n\geqslant 2$ et $t\in[0,1[$, on a :

$$1-t^n\geqslant 1-t^2 \quad\text{donc}\quad (1-t^n)^{\frac{1}{n}}\geqslant\big(1-t^2\big)^{\frac{1}{n}}.$$

Comme $1-t^2\leqslant 1$, on a $\big(1-t^2\big)^{\frac{1}{n}}\geqslant\big(1-t^2\big)^{\frac{1}{2}}$.
On en déduit, pour tout $n\geqslant 2$, $|f_n|=f_n\leqslant f_2$, ce qui fournit l'hypothèse de domination, puisque, d'après la première question, f_2 est intégrable.

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n=\int_0^1 f=1.$$

Exercice 3

1. Notons $\mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,\sqrt{n}]$ sur $\mathbb{R}_+$ et définissons f_n sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall t\geqslant 0\quad f_n(t)=\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t).$$

La fonction f_n est continue sur $[0,\sqrt{n}]$ et nulle sur $]\sqrt{n},+\infty[$, donc continue par morceaux (et même continue).

Comme $x\mapsto\displaystyle\int_0^x|f_n|$ est constante sur $]\sqrt{n},+\infty[$, la fonction f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

On a $\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n=\int_0^{\sqrt{n}}f_n=I_n$.

2. • Soit $t\in\mathbb{R}_+$. Pour $n>t^2$, qui équivaut à $1-\frac{t^2}{n}>0$, on a $f_n(t)>0$. On peut écrire, quand $n\to+\infty$:

$$\ln\big(f_n(t)\big)=n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\sim -n\,\frac{t^2}{n}\cdot$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(t)=e^{-t^2}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction continue $f:t\mapsto e^{-t^2}$.
• Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\mathbb{R}_+$, on a, si $n>t^2$:

$$\big|f_n(t)\big|=e^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)}\leqslant e^{-t^2},$$

en utilisant la même inégalité qu'à la page 744.
Comme, pour $n\leqslant t^2$, on a $f_n(t)=0$, on peut écrire :

$$\forall\,(n,t)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+\quad\big|f_n(t)\big|\leqslant e^{-t^2}.$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue, positive sur $\mathbb{R}_+$; elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $e^{-t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, quand $t \to +\infty$, par croissances comparées.
Cela fournit l'hypothèse de domination.

On peut conclure, d'après le théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Exercice 4 Soit $f : x \mapsto \frac{x^2}{e^x-1}$; pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) = \frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^2e^{-nx} \quad \text{car} \quad e^{-x} \in]0,1[.$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : x \mapsto x^2e^{-nx}$ et appliquons à la série $\sum u_n$ le théorème d'intégration terme à terme sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $u_n(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $x \to +\infty$, par croissances comparées ; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, par comparaison aux intégrales de Riemann.
- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} u_n$, procédons à une double intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-nx}\mathrm{d}x &= -\frac{x^2e^{-nx}}{n} + \frac{2}{n}\int xe^{-nx}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{x^2e^{-nx}}{n} - \frac{2xe^{-nx}}{n^2} + \frac{2}{n^2}\int e^{-nx}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{x^2e^{-nx}}{n} - \frac{2xe^{-nx}}{n^2} - \frac{2e^{-nx}}{n^3}\cdot\end{aligned}$$

Notant v_n la primitive obtenue de u_n, on a :

$$v_n(0) = -\frac{2}{n^3} \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} v_n = 0.$$

On en déduit $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} u_n = \frac{2}{n^3}$, ce qui prouve la convergence de la série $\displaystyle\sum\left(\int_0^{+\infty} |u_n|\right)$ (série de Riemann).

En conclusion, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\cdot$$

Exercice 5

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $v_n : t \mapsto 2nte^{-nt^2}$ est continue positive et l'on a, pour tout $A > 0$:
$$\int_0^A v_n(t)\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-nt^2}\right]_0^A.$$
En faisant tendre A vers $+\infty$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Comme la fonction v_n est positive, elle est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc aussi $u_n = v_{n+1} - v_n$ et l'on a :
$$\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} v_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
Ainsi la série $\sum \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} u_n\right)$ converge absolument.
- Par ailleurs, on a, pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$:
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k(t) &= \sum_{k=1}^{n}\big(v_{k+1}(t) - v_k(t)\big)\\ &= v_{n+1}(t) - v_1(t) = 2(n+1)te^{-(n+1)t^2} - 2te^{-t^2}.\end{aligned}$$
Pour $t > 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(2(n+1)te^{-(n+1)t^2}\right) = 0$, par croissances comparées ; comme $u_k(0) = 0$, on peut conclure que la série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et que :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) = -2te^{-t^2}.$$
On en déduit que la fonction $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que :
$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(-2te^{-t^2}\right)\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\left[e^{-t^2}\right]_0^A = -1.$$
On n'a donc pas $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ puisque cette dernière somme est nulle.

Exercice 6 Fixons $t \in \mathbb{R}_+^*$; on a :
$$\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t} = \frac{2\cos(xt)}{e^t + e^{-t}} = \frac{2e^{-t}\cos(xt)}{1 + e^{-2t}}.$$

La série géométrique $\sum 2e^{-t}\cos(xt)\left(-e^{-2t}\right)^n$, de raison $\left(-e^{-2t}\right) \in]0,1[$, converge et l'on peut écrire :

$$\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t} = \frac{2e^{-t}\cos(xt)}{1+e^{-2t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2e^{-t}\cos(xt)\left(-e^{-2t}\right)^n.$$

Posons $u_n(t) = 2(-1)^n \cos(xt)\, e^{-(2n+1)t}$.

- Chaque u_n est continue sur $]0,+\infty[$ et l'on a :

  $$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times]0,+\infty[\quad \left|u_n(t)\right| \leqslant 2e^{-(2n+1)t} \leqslant 2e^{-t}.$$

  Comme la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty|$, on en déduit que chaque u_n est intégrable sur $]0,+\infty|$, par comparaison.
- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty|$, d'après l'étude initiale, et sa somme S est la fonction $t \mapsto \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}$, continue sur $]0,+\infty|$.

  On a :

  $$\forall t > 0 \quad \left|S(t)\right| = \left|\frac{2\cos(xt)}{e^t + e^{-t}}\right| \leqslant 2e^{-t}.$$

  On en déduit que S, comme chaque u_n, est intégrable sur $]0,+\infty|$.

  Notons qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction R_n est intégrable sur $]0,+\infty|$, comme somme de fonctions intégrables, puisque $R_n = S - S_n$.
- Pour tout $(n,t) \in \mathbb{N} \times]0,+\infty|$, on a :

  $$\left|R_n(t)\right| = 2e^{-t}\left|\cos(xt)\right|\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}\left(-e^{-2t}\right)^p\right| = 2e^{-t}\left|\cos(xt)\right|\left|\frac{\left(-e^{-2t}\right)^{n+1}}{1+e^{-2t}}\right|.$$

  On en déduit $\left|R_n(t)\right| \leqslant 2e^{-2(n+1)t}$.

  La fonction $t \mapsto 2e^{-2(n+1)t}$ est intégrable sur $]0,+\infty|$ et l'on a :

  $$\int_0^{+\infty} 2e^{-2(n+1)t}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{2e^{-2(n+1)t}}{2n+2}\right]_0^A = \frac{1}{n+1}.$$

  Comme :

  $$\left|\int_0^{+\infty} R_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty}\left|R_n(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} 2e^{-2(n+1)t}\mathrm{d}t,$$

  on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} R_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = 0$. On en déduit l'égalité :

  $$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

- Calculons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$.

  Remarquons que $u_n(t) = \operatorname{Re}\left(2(-1)^n e^{(ix-2n-1)t}\right)$. Comme :

  $$\left|2e^{(ix-2n-1)t}\right| = 2e^{-(2n+1)t} \leqslant 2e^{-t},$$

la fonction $t \mapsto 2e^{(ix-2n-1)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et l'on peut écrire :

$$(-1)^n \int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} 2e^{(ix-2n-1)t}\mathrm{d}t\right).$$

Or, pour tout $A \in]0,+\infty[$, on a :

$$\int_0^A 2e^{(ix-2n-1)t}\mathrm{d}t = \left[\frac{2e^{(ix-2n-1)t}}{ix-2n-1}\right]_0^A.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on en déduit :

$$(-1)^n \int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\frac{2}{2n+1-ix}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2(2n+1+ix)}{(2n+1)^2+x^2}\right)$$
$$= \frac{4n+2}{(2n+1)^2+x^2}.$$

En conclusion, nous avons établi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4n+2}{(2n+1)^2+x^2}.$$

Exercice 7

1. Fixons $t \in \mathbb{R}_+^*$; on a :

$$\frac{\sin(xt)}{\mathrm{sh}\,t} = \frac{2\sin(xt)}{e^t-e^{-t}} = \frac{2e^{-t}\sin(xt)}{1-e^{-2t}}.$$

La série géométrique $\sum 2e^{-t}\sin(xt)\,e^{-2nt}$, de raison $e^{-2t} \in]0,1[$, converge et l'on peut écrire :

$$\frac{\sin(xt)}{\mathrm{sh}\,t} = \frac{2e^{-t}\sin(xt)}{1-e^{-2t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2e^{-t}\sin(xt)\,e^{-2nt}.$$

Appliquons à la série $\sum u_n$, avec $u_n(t) = 2\sin(xt)\,e^{-(2n+1)t}$, le théorème d'intégration terme à terme sur $]0,+\infty[$.

- Chaque u_n est continue sur $]0,+\infty[$ et l'on a :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times]0,+\infty[\quad \left|u_n(t)\right| \leqslant 2e^{-(2n+1)t} \leqslant 2e^{-t}.$$

  Comme la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, on en déduit que chaque u_n est intégrable sur $]0,+\infty[$, par comparaison.
- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, d'après l'étude initiale, et sa somme est la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{\mathrm{sh}\,t}$, continue sur $]0,+\infty[$.
- En utilisant l'inégalité classique $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$, valable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times]0,+\infty[\quad \left|u_n(t)\right| \leqslant 2|x|\,te^{-(2n+1)t}.$$

Soit $A \in]0,+\infty[$; une intégration par parties donne :

$$\int_0^A 2|x|\,te^{-(2n+1)t}\mathrm{d}t = \frac{2|x|}{2n+1}\left[-te^{-(2n+1)t}\right]_0^A + \frac{2|x|}{2n+1}\int_0^A e^{-(2n+1)t}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2|x|}{2n+1}\left[-te^{-(2n+1)t} - \frac{e^{-(2n+1)t}}{2n+1}\right]_0^A.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ et en utilisant les croissances comparées des fonctions puissances et exponentielles, on obtient l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto 2|x|\,te^{-(2n+1)t}$ sur $[0,+\infty[$ et :

$$\int_0^{+\infty} 2|x|\,te^{-(2n+1)t}\mathrm{d}t = \frac{2|x|}{(2n+1)^2}.$$

On peut donc écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} \left|u_n(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} 2|x|\,te^{-(2n+1)t}\mathrm{d}t = \frac{2|x|}{(2n+1)^2}.$$

Comme $\frac{2|x|}{(2n+1)^2} \sim \frac{|x|}{2n^2}$, la série $\sum \frac{2|x|}{(2n+1)^2}$ converge, par comparaison aux séries de Riemann, donc aussi la série $\sum\left(\int_0^{+\infty}\left|u_n(t)\right|\mathrm{d}t\right)$.

On peut donc conclure que la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (ce que l'on peut facilement vérifier directement) et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

- Calculons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$.

  Notons que $u_n(t) = \operatorname{Im}\left(2e^{(ix-2n-1)t}\right)$.

  Comme $\left|2e^{(ix-2n-1)t}\right| = 2e^{-(2n+1)t} \leqslant 2e^{-t}$, la fonction $t \mapsto 2e^{(ix-2n-1)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et l'on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} 2e^{(ix-2n-1)t}\mathrm{d}t\right).$$

  Pour tout $A \in]0,+\infty[$, on a :

$$\int_0^A 2e^{(ix-2n-1)t}\mathrm{d}t = \left[\frac{2e^{(ix-2n-1)t}}{ix-2n-1}\right]_0^A.$$

  En faisant tendre A vers $+\infty$, on en déduit :

$$\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im}\left(\frac{2}{2n+1-ix}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{2(2n+1+ix)}{(2n+1)^2+x^2}\right) = \frac{2x}{(2n+1)^2+x^2}.$$

En conclusion, nous avons établi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2 + x^2}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$ et appliquons à la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le théorème de convergence dominée. Comme les autres hypothèses ont été établies dans la première méthode, vérifions seulement l'hypothèse de domination.

   Pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|S_n(t)\right| = \left|2e^{-t}\sin(xt)\ \frac{1-e^{-(2n+2)t}}{1-e^{-2t}}\right| \leqslant \frac{2e^{-t}\,|xt|}{1-e^{-2t}} = \frac{|xt|}{\operatorname{sh} t},$$

   en utilisant l'inégalité classique $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$, valable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

   La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{|xt|}{\operatorname{sh} t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et a un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$; elle est donc intégrable sur $]0,1]$. De plus, quand $t \to +\infty$, on a :

$$\frac{|xt|}{\operatorname{sh} t} \sim 2\,|xt|\,e^{-t} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

   par croissances comparées.

   Cela prouve l'intégrabilité de la fonction φ sur $\mathbb{R}_+^*$, par comparaison aux intégrales de Riemann et fournit l'hypothèse de domination. On peut donc conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t)\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2 + x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 3 Utilisons la *caractérisation séquentielle de la continuité*.

Fixons $a \in A$ et donnons-nous une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

Notons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur I par $f_n(t) = f(x_n, t)$ et appliquons-lui le théorème de convergence dominée.

D'après la deuxième hypothèse, chaque f_n est continue par morceaux sur I.

Pour tout $t \in I$ fixé, d'après la première hypothèse et par *composition des limites* appliquée à la fonction $x \mapsto f(x,t)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, t) = f(a,t)$.

Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction $t \mapsto f(a,t)$, continue par morceaux sur I d'après la deuxième hypothèse.

Pour tous $t \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après la troisième hypothèse, $\left|f_n(t)\right| \leqslant \varphi(t)$, avec φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I.

Les hypothèses du théorème de convergence dominée étant vérifiées, on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = g(a)$. Cela étant vrai pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A de limite a, on en déduit que g est continue en a, pour tout $a \in A$, c'est-à-dire sur A.

Exercice 8

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

   Pour $x > 0$, on a :

   $$\forall t \in [0,+\infty[\quad 0 \leqslant \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \leqslant e^{-xt}.$$

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$ converge, par comparaison de fonctions positives, puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t$ converge.

   Pour $x \leqslant 0$, on a :

   $$\forall t \in [0,+\infty[\quad \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{t+1}}.$$

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$ diverge, par comparaison aux exemples de Riemann, car $\frac{1}{\sqrt{t+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ au voisinage de $+\infty$.

   En conclusion, g est définie sur $J =]0,+\infty[$.

2. Soit $I = [0,+\infty[$ et $f : J \times I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}$.

   Appliquons à f le point méthode précédent.

   - Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}$ est continue sur J.
   - Pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}$ est continue sur I.
   - Soit $[a,b]$ un segment inclus dans J et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \frac{e^{-at}}{\sqrt{t+1}}$.
     La fonction φ est continue et intégrable sur I d'après l'étude initiale, car a est strictement positif. Pour tout $(x,t) \in [a,b] \times I$, on a :

     $$\left|f(x,t)\right| = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \leqslant \frac{e^{-at}}{\sqrt{t+1}} = \varphi(t).$$

   La fonction g est donc continue sur J, d'après le point méthode précédent.

Théorème 4 L'intégrabilité de chaque fonction $t \mapsto f(\lambda,t)$ se déduit de l'hypothèse de domination et du théorème de comparaison.

Utilisons la caractérisation séquentielle de la limite.

Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de J de limite λ_0. Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

$$\forall t \in I \quad f_n(t) = f(\mu_n,t).$$

- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement sur I vers la fonction continue par morceaux F.
- On a l'hypothèse de domination.

Par suite, F est intégrable sur I et l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n=\int_I F,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f\left(\mu_n,t\right)\mathrm{d}t=\int_I F\left(t\right)\mathrm{d}t.$$

Comme ce résultat est établi pour toute suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de J de limite λ_0, on déduit de la caractérisation séquentielle de la limite que $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}\int_I f\left(\lambda,t\right)\mathrm{d}t=\int_I F\left(t\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 9 Pour tout $\lambda>0$, la fonction f_λ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, quand $t\to+\infty$, on a $f_\lambda\left(t\right)\sim\frac{1}{t^2}$; d'où l'intégrabilité de chaque f_λ sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Appliquons le corollaire 5 de la page 736.

- Pour tout $t\geqslant 0$, on a $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}f_\lambda\left(t\right)=0$.
- Il suffit d'établir la domination au voisinage de $+\infty$, par exemple sur $[1,+\infty[$:

$$\forall\lambda\in[1,+\infty[\quad\forall t\in[0,+\infty[\quad\left|f_\lambda\left(t\right)\right|=f_\lambda\left(t\right)\leqslant\frac{1}{1+t^2}\cdot$$

  La fonction $t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{1+t^2}\sim\frac{1}{t^2}$, quand $t\to+\infty$. On en déduit l'intégrabilité de cette fonction sur $[0,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann. Cela fournit l'hypothèse de domination.

D'après le corollaire 5 de la page 736, on peut conclure, que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+}f_\lambda=0$.

Exercice 10

1. Pour tout $x>0$, la fonction $f_x:t\mapsto\frac{e^{-t}}{t+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, quand $t\to+\infty$, on a $f_x\left(t\right)=\mathrm{o}\left(e^{-t}\right)$, ce qui assure l'intégrabilité de f_x sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison. Cela justifie la définition de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Appliquons le corollaire 5 de la page 736, pour déterminer $\lim\limits_{+\infty}g$.
   - Pour tout $t\geqslant 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}f_x\left(t\right)=0$.
   - Il suffit d'établir la domination au voisinage de $+\infty$, par exemple sur $[1,+\infty[$:

$$\forall x\in[1,+\infty[\quad\forall t\in[0,+\infty[\quad\left|f_x\left(t\right)\right|=f_x\left(t\right)\leqslant\frac{e^{-t}}{t+1}=f_1\left(t\right).$$

     Comme f_1 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, cela fournit l'hypothèse de domination.

   D'après le corollaire 5 de la page 736, on peut conclure, que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+}f_x=0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{+\infty}g=0$.

Appliquons le corollaire 5 de la page 736, pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} xg(x)$, ce qui permettra d'obtenir un équivalent simple de $g(x)$, quand x tend vers $+\infty$.

- Pour tout $t \geqslant 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} xf_x(t) = e^{-t}$. La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- On a :
$$\forall x \in]0,+\infty[\quad \forall t \in [0,+\infty[\quad \left|xf_x(t)\right| = xf_x(t) \leqslant e^{-t}.$$
La fonction $t \mapsto e^{-t}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, cela fournit l'hypothèse de domination.

D'après le corollaire 5 de la page 736, on peut conclure, que :
$$\lim_{x\to+\infty} x\int_0^{+\infty} f_x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1.$$
On a établi que $\lim\limits_{x\to+\infty} xg(x) = 1$, c'est-à-dire $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Théorème 6 Fixons $x_0 \in J$ et appliquons le théorème 3 de la page 732 à la fonction $f_1 : J \times I \to \mathbb{K}$ définie par $f_1(x,t) = \begin{cases} \dfrac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) & \text{si } x = x_0. \end{cases}$

- Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f_1(x,t)$ est continue en tout $x \in J \setminus \{x_0\}$, d'après la première hypothèse, et en x_0, par définition de $\frac{\partial f}{\partial x}$.
- La classe $\mathcal{C}^1$ sur J, pour tout $t \in I$, de la fonction $x \mapsto f(x,t)$ permet de lui appliquer l'inégalité des accroissements finis ; on en déduit, d'après l'hypothèse de domination :
$$\forall (x,t) \in J \times I \quad \left|f_1(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$
D'après les hypothèses, la fonction $t \mapsto f_1(x,t)$ est continue par morceaux sur I, pour tout $x \in J$.
L'inégalité précédente fournit l'hypothèse de domination. On peut ainsi conclure que la fonction $g_1 : x \mapsto \displaystyle\int_I f_1(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur J ; on a donc, en particulier, $\lim\limits_{x\to x_0} g_1(x) = g_1(x_0) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t$.

Comme, pour $x \neq x_0$, $g_1(x) = \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$, on a établi que g est dérivable en x_0 avec :
$$g'(x_0) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t.$$
Le résultat précédent étant vrai pour tout $x_0 \in J$, g est dérivable sur J.

Une nouvelle application du théorème 3 de la page 732 permet de prouver que g' est continue sur J : les première, troisième et quatrième hypothèses fournissent les hypothèses concernant $\frac{\partial f}{\partial x}$ pour ce théorème, d'où la conclusion.

Exercice 11

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   La fonction h_1 étant nulle, le domaine de définition de g contient 1. Supposons donc $x \neq 1$.

   Un développement limité à l'ordre 1 du numérateur donne $\lim\limits_{t\to 0} h_x(t) = x - 1$; ayant un prolongement continu en 0, la fonction h_x est intégrable sur $]0,1]$.

   Quand $t \to +\infty$, on a :

$$h_x(t) \sim \begin{cases} \dfrac{e^{-t}}{t} & \text{si } x > 1 \\ -\dfrac{e^{-xt}}{t} & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

   Pour $x \leqslant 0$, la fonction h_x est négative et, vu l'équivalent obtenu, $\frac{1}{t} = \mathrm{O}\big(h_x(t)\big)$; par comparaison aux intégrales de Riemann, $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_x$ est donc divergente.

   Pour $x > 0$, l'équivalent obtenu montre que $\big|h_x(t)\big| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, par croissances comparées ; cela prouve l'intégrabilité de h_x sur $[1, +\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

   En conclusion, le domaine de définition de g est $\mathbb{R}_+^*$.

2. Appliquons le point méthode précédent, pour établir la classe $\mathcal{C}^1$ de g.

   Notons $f : (x,t) \mapsto \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}$.

   - Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-xt}.$$

   - Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après la première question.
   - Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Soit $[a,b]$, avec $0 < a < b$, un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt} \leqslant e^{-at}.$$

     La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

     Cela fournit l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

   On déduit du point méthode précédent que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

   Comme $g(1) = 0$, on déduit de ce qui précède que :

$$\forall x > 0 \quad g(x) = \ln x.$$

Corollaire 7 Fixons un segment $[a,b] \subset J$ et établissons la classe $\mathcal{C}^k$ de g sur $[a,b]$, avec hypothèse de domination sur $[a,b]$ pour $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$, par récurrence sur k.

- Pour $k=1$, il s'agit du théorème 6 de la page 738.
- Supposons le résultat prouvé au rang $k-1$ avec $k \geqslant 2$ et prouvons-le au rang k. La classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, pour tout $t \in I$, de la fonction $x \mapsto \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t)$ permet de lui appliquer, pour tout $x \in [a,b]$, l'inégalité des accroissements finis sur le segment $[a,x]$; on obtient :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I \quad \left| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t) - \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(a,t) \right| \leqslant (x-a)\,\varphi(t) \leqslant (b-a)\,\varphi(t).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I \quad \left| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t) \right| \leqslant \left| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(a,t) \right| + (b-a)\,\varphi(t) = \psi(t).$$

La fonction ψ est continue par morceaux, positive et intégrable sur I, d'après les deuxième et quatrième hypothèses.

L'hypothèse de domination étant vérifiée pour $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}$, on déduit de l'hypothèse de récurrence que g est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $[a,b]$ et que :

$$\forall p \in [\![1, k-1]\!] \quad \forall x \in [a,b] \quad g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

En particulier $g^{(k-1)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t)\ \mathrm{d}t$. Appliquons le théorème 6 de la page 738 à cette intégrale :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$,
- pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t)$ est intégrable sur I,
- pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- on a l'hypothèse l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$.

Par suite $g^{(k-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\ \mathrm{d}t$; g est donc de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b]$, d'où la conclusion.

Nous avons établi la classe $\mathcal{C}^k$ de g sur tout segment inclus dans J, donc sur J.

Exercice 12 On a vu que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)\, e^{-t^2} e^{-itx} \mathrm{d}t.$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et intégrons par parties, en utilisant la proposition 24 de la page 678

(ici les trois termes existent de manière évidente) :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2te^{-t^2}\right)e^{-itx}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{i}{2}\,e^{-t^2}e^{-itx}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{x}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{-itx}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{x}{2}\,g(x)\,. \end{aligned}$$

On a établi :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad g'(x) = -\frac{x}{2}\,g(x)\,.$$

La solution générale de cette équation différentielle est $x\mapsto C\exp\left(-\displaystyle\int_0^x \frac{t}{2}\,dt\right)$, avec $C\in\mathbb{C}$. D'après l'exemple de la page 740, on a $g(0)=\sqrt{\pi}$; on en déduit :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{-itx}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\,e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Exercice 13

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $g_x : t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - La fonction g_x est positive et l'on a $g_x(t)\sim t^{x-1}$, quand $t\to 0$. On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, que $\displaystyle\int_0^1 g_x$ converge si, et seulement si, $x>0$.
   - Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $g_x(t)=\mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, quand $t\to+\infty$, ce qui assure l'intégrabilité de g_x sur $[1,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

   En conclusion, le domaine de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrons que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en appliquant le corollaire 7 de la page 742.

   On note $f:(x,t)\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ et l'on fixe $k\in\mathbb{N}^*$.
   - Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :
   $$\forall p\in[\![0,k]\!]\quad \forall\,(x,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\quad \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) = (\ln t)^p\,t^{x-1}e^{-t}.$$
   - Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $p\in[\![0,k-1]\!]$.
     On a, quand $t\to 0$:
     $$\left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| = |\ln t|^p\,t^{x-1}e^{-t}\sim|\ln t|^p\,t^{x-1} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$
     par croissances comparées.
     Cela assure l'intégrabilité sur $]0,1]$ de $t\mapsto\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

On a, quand $|t| \to +\infty$:

$$\left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| = |\ln t|^p \, t^{x-1} e^{-t} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

par croissances comparées. Par comparaison aux intégrales de Riemann, cela assure l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ de $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$.
Notons que, puisque p est quelconque, nous avons établi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $[a,b]$, avec $0 < a < b$, un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in]0,1] \qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k \, t^{x-1} e^{-t} \leqslant |\ln t|^k \, t^{a-1} e^{-t}$$

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in]1,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k \, t^{x-1} e^{-t} \leqslant |\ln t|^k \, t^{b-1} e^{-t}.$$

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(t) = |\ln t|^k \, t^{a-1} e^{-t} + |\ln t|^k \, t^{b-1} e^{-t} = \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)\right| + \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(b,t)\right|.$$

Cette fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le deuxième point, et l'on a :

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in]0,+\infty[\quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

Cela fournit l'hypothèse de domination sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ pour la fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$.

D'après le corollaire 7 de la page 742, on peut conclure que Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k \, t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

S'entraîner et approfondir

13.1 Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(nx)e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\operatorname{th}(x^n)\right)\mathrm{d}x$.

13.2 Étudier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et un équivalent simple de I_n.

13.3 Étudier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-\frac{1}{n}}\mathrm{d}x$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

13.4 Montrer que pour tout $x>0$, on a :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t,$$

où Γ est la fonction définie dans l'exercice 13 de la page 743.

13.5 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$, avec :

$$I_n = n^2\int_0^1 (1-x)^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

13.6 1. Justifier l'existence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, de $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln t\,\mathrm{d}t$ et montrer que $I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n$.

On pourra poser $u = 1-\frac{t}{n}$.

2. En déduire que l'intégrale $\gamma = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right).$$

13.7 Démontrer le théorème de convergence dominée de la page 724 en supposant en outre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers f.

13.8 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\sum a_n\,n!$ converge absolument. Montrer :

$$\int_0^{+\infty}\left(e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,n!.$$

13.9 Soit p et q deux réels strictement positifs. Montrer :

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,q+p}.$$

13.10 Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\,\mathrm{d}x.$$

13.11 On note $\zeta :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x > 1 \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Montrer que :

$$\forall x > 1 \quad \Gamma(x)\,\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t,$$

où Γ est la fonction définie dans l'exercice 13 de la page 743.

13.12 1. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ une série de fonctions, avec $u_n \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction *positive*, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On fait les hypothèses suivantes :
- chaque u_n est intégrable sur I,
- la série $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue par morceaux sur I.

Montrer que la fonction $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I si, et seulement si, la série $\sum \int_I u_n$ converge et que l'on a alors :

$$\int_I \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I u_n.$$

2. En déduire le *théorème de convergence monotone*, dont l'énoncé suit.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions à valeurs réelles, intégrables sur l'intervalle I et convergeant simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.
Montrer que f est intégrable sur I si, et seulement si, la suite $\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et que l'on a alors :

$$\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n.$$

13.13 *(Centrale 2015)*

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Arctan}(x\tan t)}{\tan t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Calculer F.
3. En déduire les valeurs des intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

13.14 *(Centrale 2015)*

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto xf(x)$ est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle :

$$x^2y' + y = x. \qquad (E)$$

3. Montrer qu'il existe une unique solution g de (E) telle que $\lim\limits_{0^+} g = 0$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle R telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g(x) = R(x).$$

13.15 Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ avec $f(x,t) = \dfrac{\ln\left(x+t^2\right)}{1+t^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de g.
2. Montrer que g est continue sur $\mathcal{D}$.
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Calculer g' sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$.
4. Calculer $g(0)$ à l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{u}$.
   En déduire $g(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

13.16 Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{K})$.

1. Soit g la fonction définie sur $J \setminus \{0\}$ par $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$. Montrer que :

$$\forall x \in J \setminus \{0\} \quad g(x) = \int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t.$$

   En déduire que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J.
2. Montrer plus généralement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h, définie sur $J\setminus\{0\}$ par $h(x) = \dfrac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\dfrac{x^k}{k!}}{x^{n+1}}$, se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\tan x}{\operatorname{sh} x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

13.17 *Théorème de Fubini*
Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{K}$ une application continue. En utilisant les applications H et G définies sur $[a,b]$ par :

$$H(x) = \int_a^x \left(\int_c^d f(t,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = \int_c^d \left(\int_a^x f(t,y)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y,$$

établir :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

13.18 Soit, pour $x > 0$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}}.$$

1. Justifier la définition de F.
2. Prouver que F tend vers $+\infty$ en 0.
3. Soit $\alpha > 0$. Calculer :
$$I_\alpha(x) = \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+x^2}}$$
et en donner un équivalent lorsque x tend vers 0.
4. En déduire un équivalent de F en 0.
5. Par un changement de variable, donner un équivalent de F en $+\infty$.

13.19 Étudier l'existence des intégrales suivantes, puis les calculer à l'aide d'une dérivation par rapport au paramètre qu'on justifiera :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{t}\,\mathrm{d}t$,
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\operatorname{sh} t}{t}\,\mathrm{d}t$.

13.20 Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_g$ puis calculer g'.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, puis calculer g.

13.21 Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,dt$.

1. Montrer que : $\forall x \geqslant 0 \quad g(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x+1)$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

13.22 Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(2tx)\,\mathrm{d}t = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

13.23 Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}_+$. Transformer $g(x)$, pour $x > 0$, à l'aide du changement de variable $t = u - x$. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de la même équation différentielle que f.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4. Déterminer les limites de f et g en $+\infty$. Conclure que $f = g$ sur $\mathbb{R}_+$.
   En déduire en particulier la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Solution des exercices

13.1 1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues sur $\mathbb{R}_+$, définies par :

$$\forall x \geqslant 0 \quad f_n(x) = \operatorname{Arctan}(nx)e^{-x^n},$$

converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f égale à $\pi/2$ sur $]0,1[$, égale à $\pi/2e$ en 1 et nulle ailleurs.
De plus, elle est dominée par la fonction intégrable :

$$x \mapsto \begin{cases} \pi/2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \pi e^{-x}/2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La limite est donc $\pi/2$.

2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues sur $\mathbb{R}_+^*$, définies par :

$$\forall x > 0 \quad f_n(x) = \left(1 + \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\right)\big(1 - \operatorname{th}(x^n)\big),$$

converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ (sauf en 1) vers la fonction caractéristique de $]0,1]$.
La limite est donc égale à 1 puisqu'il y a domination par la fonction :

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 2(1 - \operatorname{th} x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et que φ est intégrable d'après les équivalents suivants :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 4e^{-2x}.$$

13.2 • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par $f_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}$ est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

∗ On a $f_n(t) \sim \frac{t/n}{t}$, au voisinage de 0, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} f_n(t) = 1/n$.
La fonction f_n est intégrable sur $]0,1]$, puisqu'elle a un prolongement continu sur $[0,1]$.

∗ On a, pour tout $t > 0$:

$$\left|f_n(t)\right| \leqslant \frac{1}{t(1+t^2)}\cdot$$

Comme on a $\frac{1}{t(1+t^2)} \sim \frac{1}{t^3}$, au voisinage de $+\infty$, la fonction f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

• Posons $g_n = nf_n$ et appliquons à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le théorème de convergence dominée.

∗ Chaque fonction g_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

∗ On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\sin\left(\frac{t}{n}\right)\right) = t$, pour tout $t > 0$.
On en déduit que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction continue par morceaux g définie par $g(t) = \frac{1}{1+t^2}\cdot$

∗ En utilisant l'inégalité classique $|\sin u| \leqslant |u|$, vraie pour tout $u \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\forall\,(n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \left|g_n\,(t)\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}\cdot$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$, au voisinage de $+\infty$; cette fonction est donc intégrable sur $]0,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

On peut donc conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} (nI_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g\,(t)\,\mathrm{d}t$.

On a, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{Arctan} x$.

On en déduit, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g\,(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, en faisant tendre x vers $+\infty$.

On a donc établi que $\lim\limits_{n\to+\infty} (nI_n) = \dfrac{\pi}{2}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ et $I_n \sim \dfrac{\pi}{2n}\cdot$

13.3 • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par $f_n\,(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-\frac{1}{n}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

∗ On a $f_n\,(x) \sim x^{-1/n}$, au voisinage de 0.
Par comparaison aux intégrales de Riemann, la fonction f_n est intégrable sur $]0,1]$ si, et seulement si, $n > 1$.

∗ On a $f_n\,(x) \sim \frac{x^{-n-\frac{1}{n}}}{n^{-n}}$, au voisinage de $+\infty$.
Par comparaison aux intégrales de Riemann, la fonction f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$ si, et seulement si, $n + \frac{1}{n} > 1$, ce qui est toujours vrai.

En conclusion, f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $n \geqslant 2$.

• Appliquons à la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ le théorème de convergence dominée sur $]0,+\infty[$.

∗ Chaque f_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

∗ Fixons $x > 0$. Un développement, quand n tend vers l'infini, donne :

$$\ln f_n\,(x) = -n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{\ln x}{n} = -n\left(\frac{x}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{\ln x}{n},$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln f_n\,(x) = -x$.

On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction continue par morceaux f définie par $f\,(x) = e^{-x}$.

∗ Définissons la fonction $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\varphi\,(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ \\ \frac{4}{x^2} & \text{si} \quad x \in]1,+\infty[\,. \end{cases}$$

La fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$, d'après l'étude des intégrales de Riemann.

Pour $n \geqslant 2$ et $x \in]0,1]$, on a :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^{-1/n} \leqslant x^{-1/2} = \varphi(x).$$

Pour $n \geqslant 2$ et $x > 1$, on a :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \leqslant \frac{1}{\binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2}} = \frac{2n}{n-1}\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{4}{x^2} = \varphi(x),$$

car $\frac{2n}{n-1} \leqslant 4$ équivaut à $2n \geqslant 4$.

Cela fournit l'hypothèse de domination.

On a ainsi établi que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = 1$.

13.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 < t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n. \end{cases}$$

La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a $f_n(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$, ce qui assure l'intégrabilité de f_n sur $]0,1]$, par comparaison aux intégrales de Riemann ; comme, de plus, f_n est nulle sur $[n,+\infty[$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a bien sûr :

$$\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Appliquons à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le théorème de convergence dominée.

- Soit $t > 0$; pour $n > t$, on peut écrire :

  $$f_n(t) = t^{x-1}e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}.$$

  Quand $n \to +\infty$, on a $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \sim -\frac{t}{n}$, d'où l'on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = t^{x-1}e^{-t}$.

  La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction continue par morceaux $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.
- On déduit de la concavité de la fonction ln l'inégalité :

  $$\forall u > -1 \quad \ln(1+u) \leqslant u.$$

  Par suite, pour $n > t > 0$, on a :

  $$\left|f_n(t)\right| = f_n(t) = t^{x-1}e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = t^{x-1}e^{-t}.$$

  L'inégalité $\left|f_n(t)\right| \leqslant \varphi(t)$ est bien sûr valable pour $n \leqslant t$.

  La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme a :

  $$\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} \qquad \varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

  elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

  Cela fournit l'hypothèse de domination.

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que :

$$\forall x > 0 \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

13.5 Par le changement de variable $u = n\,x$, on obtient :

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n n \sin\left(\frac{\pi u}{n}\right) \mathrm{d}u.$$

Définissons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(u) = \begin{cases} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n n \sin\left(\frac{\pi u}{n}\right) & \text{si} \quad u \in [0, n[\\ 0 & \text{si} \quad u \geqslant n. \end{cases}$$

Chaque fonction f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et, comme elle est nulle sur $[n, +\infty[$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$; on a bien sûr :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u.$$

Appliquons à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le théorème de convergence dominée.

- Soit $u \in \mathbb{R}_+$; pour $n > u$, on peut écrire :

  $$f_n(u) = e^{n\ln\left(1-\frac{u}{n}\right)} n \sin\left(\frac{\pi u}{n}\right).$$

  Comme, pour $u \geqslant 0$, on a lorsque n tend vers $+\infty$:

  $$\sin\left(\frac{\pi\,u}{n}\right) \sim \frac{\pi\,u}{n} \qquad \text{et} \qquad \ln\left(1 - \frac{u}{n}\right) \sim -\frac{u}{n},$$

  la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction continue par morceaux $f : u \mapsto \pi\,e^{-u}\,u$.
- On déduit de la concavité de la fonction ln l'inégalité :

  $$\forall t > -1 \quad \ln(1+t) \leqslant t.$$

  Par suite, pour $n > u \geqslant 0$, on a :

  $$\left|f_n(u)\right| = f_n(u) = e^{n\ln\left(1-\frac{u}{n}\right)} n \sin\left(\frac{\pi u}{n}\right) \leqslant \varphi(u) \quad \text{avec} \quad \varphi(u) = \pi\,e^{-u}\,u,$$

  en utilisant l'inégalité classique $|\sin t| \leqslant |t|$, valable pour tout $t \in \mathbb{R}$ (elle peut se déduire de la concavité de la fonction sin sur $[0, \pi/2]$).

  L'inégalité $\left|f_n(u)\right| \leqslant \varphi(u)$ est bien sûr valable pour $n \leqslant u$.

  La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et, comme on a $\varphi(u) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{u^2}\right)$ quand $u \to +\infty$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

  Cela fournit l'hypothèse de domination.

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \pi \int_0^{+\infty} u\,e^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

Une intégration par parties donne :

$$\int ue^{-u}\mathrm{d}u = -ue^{-u} + \int e^{-u}\mathrm{d}u = -ue^{-u} - e^{-u}.$$

On en déduit facilement $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \pi$.

13.6 1. • Vérifions d'abord l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de l'intégrale I_n.
La fonction $f_n : t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln t$ est continue sur $]0,n]$ et, au voisinage de 0, on a $\left|f_n(t)\right| \sim |\ln t| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$.
On en déduit l'intégrabilité de f_n sur $]0,n]$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

• La fonction $\psi :]0,1[\to]0,n[$, définie par $\psi(u) = n(1-u)$, étant une bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire, d'après la proposition 26 de la page 680 :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^1 f_n\big(\psi(u)\big)\psi'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 nu^{n-1}\ln\big(n(1-u)\big)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 nu^{n-1}\big(\ln n + \ln(1-u)\big)\mathrm{d}u \\ &= \ln n + \int_0^1 nu^{n-1}\ln(1-u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Pour $x \in [0,1[$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^x nu^{n-1}\ln(1-u)\,\mathrm{d}u &= \Big[(u^n-1)\ln(1-u)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{u^n-1}{u-1}\,\mathrm{d}u \\ &= (x^n-1)\ln(1-x) - \int_0^x \left(\sum_{k=1}^n u^{k-1}\right)\mathrm{d}u \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)(x-1)\ln(1-x) - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}\cdot \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)\ln(1-x) = 0$, il vient, en faisant tendre x vers 1 :

$$I_n = \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\cdot$$

2. Soit $g_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g_n(t) = f_n(t)\,\mathbb{1}_{]0,n]}(t)$ où $\mathbb{1}_{]0,n]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $]0,n]$. Appliquons à la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le théorème de convergence dominée sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

• Chaque g_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
• Fixons $t > 0$. On a, pour $n > t$:

$$g_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln t = e^{(n-1)\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}\ln t.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{t}{n}\right)=0$, on peut écrire le développement :

$$g_n(t)=e^{(n-1)\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\ln t=e^{-t+o(1)}\ln t.$$

On en déduit que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction continue par morceaux g définie par $g(t)=e^{-t}\ln t$.

- En utilisant l'inégalité classique $\ln(1+u)\leqslant u$, vraie pour $u>-1$, on obtient, pour $(n,t)\in\mathbb{N}^*\times]0,n[$:

$$\begin{aligned}\left|g_n(t)\right|&=e^{(n-1)\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}\left|\ln t\right|\\&\leqslant e^{(n-1)\left(-\frac{t}{n}\right)}\left|\ln t\right|=e^{-t+\frac{t}{n}}\left|\ln t\right|\leqslant e^{-t+1}\left|\ln t\right|.\end{aligned}$$

Soit $\varphi:]0,+\infty[\to\mathbb{R}_+$ la fonction définie par $\varphi(t)=e^{1-t}\left|\ln t\right|$.
La fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$.
On a $\varphi(t)\sim e\left|\ln t\right|$, au voisinage de 0. La fonction ln étant intégrable sur $]0,1]$, d'après la première question, on en déduit, par comparaison, l'intégrabilité de φ sur $]0,1]$.
Par croissances comparées, on a $\varphi(t)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$. On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, que φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Ainsi φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Comme g_n est nulle sur $[n,+\infty[$, on a établi :

$$\forall(n,t)\in\mathbb{N}^*\times]0,+\infty[\quad\left|g_n(t)\right|\leqslant\varphi(t),$$

d'où l'hypothèse de domination.

En conclusion, on a démontré que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire :

$$\gamma=-\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t.$$

13.7 • L'intégrabilité de chaque f_n se déduit de l'hypothèse de domination et du théorème de comparaison.
Par convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, on a également $|f|\leqslant\varphi$; on en déduit de même l'intégrabilité de f.

- Soit $\varepsilon>0$. Notons $\alpha<\beta$ les bornes de I ; comme φ est intégrable sur I, il existe deux réels $a<b$ dans I tels que :

$$\int_\alpha^a\varphi\leqslant\frac{\varepsilon}{5}\quad\text{et}\quad\int_b^\beta\varphi\leqslant\frac{\varepsilon}{5}\cdot$$

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n\geqslant n_0\quad\left|\int_{[a,b]}f_n-\int_{[a,b]}f\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{5}\cdot$$

Pour $n \geqslant n_0$, on a :

$$\left|\int_I f_n - \int_I f\right| \leqslant \int_\alpha^a |f| + \int_\alpha^a |f_n| + \int_b^\beta |f| + \int_b^\beta |f_n| + \left|\int_{[a,b]} f_n - \int_{[a,b]} f\right|$$
$$\leqslant 2\int_\alpha^a \varphi + 2\int_b^\beta \varphi + \left|\int_{[a,b]} f_n - \int_{[a,b]} \varphi\right|$$
$$\leqslant \varepsilon.$$

On a donc établi que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

13.8 La série $\sum a_n\, x^n$ converge normalement sur tout segment $[0, R]$ puisque :

$$|a_n|\ R^n = |a_n|\ n!\, \frac{R^n}{n!} = \mathrm{o}\big(|a_n|\ n!\big),$$

ce qui assure la convergence de $\sum |a_n| R^n$. Sa somme est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Chaque fonction $u_n : x \mapsto e^{-x}\, a_n\, x^n$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann, car $\big|u_n\,(x)\big| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $x \to +\infty$. On a de plus :

$$\int_{\mathbb{R}_+} |u_n| = |a_n| \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^n \,\mathrm{d}x = n!|a_n|,$$

ce dernier résultat se démontrant facilement par récurrence. Par suite, la série de terme général $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} |u_n|$ converge.

D'où le résultat, d'après le théorème 2 de la page 727.

13.9 La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^{p-1}}{1+x^q}$ est continue sur $]0, 1]$ et $f(x) \sim x^{p-1}$ au voisinage de 0 avec $p - 1 > -1$. Donc f est intégrable sur $]0, 1]$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Pour $x \in]0, 1]$, on a $x^q \in]0, 1]$ et donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, u_n(x) \qquad \text{avec} \qquad u_n(x) = x^{p+nq-1}.$$

On peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles. Le reste étant évident, vérifions seulement l'hypothèse de domination ; pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, 1]$, on a :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k(x)\right| = \left|\frac{x^{p-1} - (-1)^{n+1}\, x^{p+(n+1)q-1}}{1+x^q}\right| \leqslant \frac{2x^{p-1}}{1+x^q} = 2f(x)$$

ce qui fournit l'hypothèse de domination, puisque f est intégrable sur $]0, 1]$. D'où la conclusion.

Remarques

- Comme $\displaystyle\int_{]0,1]} |u_n| = \frac{1}{n\,q+p}$ n'est pas le terme général d'une série convergente, le théorème 2 de la page 727 ne s'applique pas directement.
- En revanche, en regroupant les termes deux par deux, on obtient une série convergente et le théorème peut s'appliquer.
- On peut aussi remarquer que $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante tendant vers 0, et que par le théorème des séries alternées :

$$\forall\,(x,n)\in\,]0,1]\times\mathbb{N}\quad \left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}u_k(x)\right|\leqslant u_{n+1}(x)$$

  dont l'intégrale tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
- Cette majoration peut d'ailleurs être obtenue directement à l'aide de l'égalité :

$$\frac{x^{p-1}}{1+x^q}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,x^{p+kq-1}+(-1)^{n+1}\frac{x^{p+(n+1)q-1}}{1+x^q}\cdot$$

13.10 • Pour tout $x>0$, la série géométrique $\sum xe^{-ax}\left(e^{-bx}\right)^n$, de raison $e^{-bx}\in\,]0,1[$, converge et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}xe^{-ax}\left(e^{-bx}\right)^n=\frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\cdot$$

Définissons $u_n:\,]0,1[\,\to\mathbb{R}$ par $u_n\,(x)=xe^{-ax}\left(e^{-bx}\right)^n$ et appliquons à la série de fonctions $\sum u_n$ le théorème 2 de la page 727 sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

• ∗ Chaque u_n se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et l'on a :

$$\forall x>0\quad 0\leqslant u_n\,(x)\leqslant xe^{-ax}.$$

Par croissances comparées, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3e^{-ax}\right)=0,$$

donc $u_n\,(x)=\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Par suite, chaque fonction u_n est intégrable sur $]0,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

∗ La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et la fonction somme, $x\to\frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}$, est continue sur $]0,+\infty[$.

∗ Soit $n\in\mathbb{N}$.

Calculons $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|u_n\,(x)\,\right|\mathrm{d}x$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^{+\infty}u_n\,(x)\,\mathrm{d}x$, puisque u_n est positive.

Intégrons par parties :

$$\begin{aligned}\int xe^{-(a+bn)x}\mathrm{d}x&=-\frac{xe^{-(a+bn)x}}{a+bn}+\frac{1}{a+bn}\int e^{-(a+bn)x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{xe^{-(a+bn)x}}{a+bn}-\frac{e^{-(a+bn)x}}{(a+bn)^2}\cdot\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{(a+bn)^2}.$$

Comme $\frac{1}{(a+bn)^2} \sim \frac{1}{b^2n^2}$, la série $\sum\left(\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\mathrm{d}x\right)$ converge, par comparaison aux séries de Riemann.

On a donc, d'après le théorème 2 de la page 727 (intégration terme à terme) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire : $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+bn)^2} = \int_0^{+\infty}\frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\,\mathrm{d}x.$$

13.11 Fixons $x > 1$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$; on peut écrire :

$$\frac{t^{x-1}}{e^t-1} = \frac{t^{x-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

La série géométrique $\sum t^{x-1}e^{-nt}$, de raison $e^{-t} \in]0,1[$, converge et l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1}e^{-nt} = \frac{t^{x-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

Définissons $u_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $u_n(t) = t^{x-1}e^{-nt}$ et appliquons à la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ le théorème d'intégration terme à terme sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; la fonction u_n est continue sur $]0,+\infty[$ et l'on a :
$$\forall t > 0 \quad 0 \leqslant u_n(t) \leqslant t^{x-1}e^{-t}.$$
La fonction u_n est donc intégrable sur $]0,+\infty[$, par comparaison, en reprenant l'étude de la fonction Γ
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et sa somme, $t \mapsto \frac{t^{x-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; comme u_n est positive, on a :
$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-nt}\mathrm{d}t.$$
L'application $\theta : u \mapsto u/n$ étant une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur lui-même, on peut écrire, d'après la proposition 25 de la page 679 :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-nt}\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty}\big(\theta(u)\big)^{x-1}e^{-n\theta(u)}\theta'(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{n^x}\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(x)}{n^x}.\end{aligned}$$
La série $\sum\left(\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t\right)$ est convergente, puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ converge.

D'après théorème d'intégration terme à terme, on peut donc écrire :

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u_n(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(x)}{n^x}=\Gamma(x)\,\zeta(x).$$

13.12 1. Posons $S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ et : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad S_n=\sum\limits_{p=1}^{n}u_p$.

- Supposons la série $\sum\int_I u_n$ convergente. Comme les u_n sont positifs, il suffit d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme de la page 727.
- Supposons la fonction S intégrable sur I. Comme les u_n sont positifs, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad\sum_{p=1}^{n}\int_I u_n=\int_I S_n\leqslant\int_I S.$$

Par suite, la série à termes positifs $\sum\int_I u_n$ converge, puisque ses sommes partielles sont majorées ; d'où la conclusion.

2. Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=f_n-f_{n-1}$ et appliquons à la série $\sum u_n$ le résultat établi à la première question.

- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, chaque u_n est positif. Les f_n étant intégrables, chaque u_n est intégrable.
  Par télescopage, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad\sum_{p=1}^{n}u_p=f_n-f_0.$$

Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f continue par morceaux, la série $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n=f-f_0$ est continue par morceaux.

- L'intégrabilité sur I de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n=f-f_0$ équivaut à celle de f, puisque f_0 est intégrable.
- On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad\sum_{p=1}^{n}\int_I u_p=\int_I\sum_{p=1}^{n}u_p=\int_I f_n-\int_I f_0.$$

La série à termes positifs $\sum\int_I u_n$ converge si, et seulement si, ses sommes partielles sont majorées, c'est-à-dire ici si, et seulement si, la suite $\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

- Dans ce cas, la suite croissante $\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et l'on a :
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_I f_n = \lim_{n\to+\infty}\int_I f_n.$$
Enfin, d'après la première question, on a alors $\displaystyle\int_I \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_I u_n$, *i.e.* :
$$\int_I f - \int_I f_0 = \lim_{n\to+\infty}\int_I f_n - \int_I f_0.$$
D'où l'égalité annoncée.

13.13 1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $g : t\mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(x\tan t)}{\tan t}$ est continue sur $]0,\pi/2[$. Comme elle nulle pour $x=0$, nous ne ferons d'étude que pour $x\neq 0$.
   - Quand $t\to 0$, on a $g(t)\sim \frac{x\tan t}{\tan t}\sim x$. La fonction g ayant un prolongement continu en 0, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4} g$ converge.
   - On a $\lim\limits_{t\to(\pi/2)^-}\operatorname{Arctan}(x\tan t)=\varepsilon\pi/2$, où l'on note ε le signe de x.
   Comme $\lim\limits_{t\to(\pi/2)^-}\tan t=+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{t\to(\pi/2)^-} g(t)=0$. La fonction g ayant un prolongement continu en $\pi/2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} g$ converge.

   En conclusion, la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Comme F est impaire, nous calculerons d'abord F sur $\mathbb{R}_+$. Pour cela, nous allons établir que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer F', en appliquant le théorème 6 de la page 738. Notons $f : (x,t)\mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(x\tan t)}{\tan t}$.
   - Pour tout $t\in]0,\pi/2[$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :
$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}_+\times]0,\pi/2[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{1}{1+x^2\tan^2 t}.$$
   - Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,\pi/2[$, puisqu'elle a un prolongement continu sur $[0,\pi/2]$, d'après la première question.
   - Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, la fonction $t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,\pi/2[$.
   - On a :
$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}_+\times]0,\pi/2[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant 1.$$
   La fonction constante égale à 1 est intégrable sur l'**intervalle borné** $]0,\pi/2[$. Cela fournit l'hypothèse de domination.

   D'après le théorème précité, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a :
$$\forall x\in\mathbb{R}_+\quad F'(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+x^2\tan^2 t}.$$
   La fonction $u\mapsto \operatorname{Arctan} u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]0,\pi/2[$. Le théorème du changement de variable permet alors d'écrire :
$$\forall x\geqslant 0\quad F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+x^2u^2)}.$$

Pour $u \geqslant 0$ et $x \neq 1$, on en déduit, par décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{x^2}{1+x^2u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-x^2}\left[\operatorname{Arctan} u - x\operatorname{Arctan}(xu)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{\pi}{2}-x\,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+x}\cdot \end{aligned}$$

La fonction F' étant continue sur $\mathbb{R}_+$, ce dernier résultat reste valable pour $x = 1$. Comme $F(0) = 0$ et que F est impaire, il vient :

$$\forall x \geqslant 0 \quad F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x) \quad \text{et} \quad \forall x \leqslant 0 \quad F(x) = -\frac{\pi}{2}\ln(1-x).$$

3. Comme :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \operatorname{Arctan}(\tan t) = t,$$

on a :

$$\int_0^{\pi/2}\frac{t}{\tan t}\mathrm{d}t = F(1) = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Intégrons par parties :

$$\int t\,\frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(\sin t)\right] - \int \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t.$$

Quand $t \to 0^+$, on a $t\ln(\sin t) \sim \sin t \ln(\sin t)$ et donc $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(\sin t) = 0$. Par suite, le crochet $\left[t\ln(\sin t)\right]_0^{\pi/2}$ existe et vaut 0. D'après le théorème d'intégration par parties (proposition 24 de la page 678) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ converge et l'on a :

$$\int_0^{\pi/2} t\,\frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(\sin t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

13.14 1. Appliquons directement le théorème de dérivation des intégrales à paramètre (corollaire 7 de la page 742) ; la définition de f s'en déduira.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$; notons $h : (x,t) \to \frac{e^{-t}}{1+xt}\cdot$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall p \in [\![0,k]\!] \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \quad \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t) = \frac{(-1)^p\,p!\,t^p e^{-t}}{(1+xt)^{p+1}}\cdot$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $p \in [\![0,k-1]\!]$. La fonction $t \mapsto \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a :

$$\forall t \geqslant 0 \quad \left|\frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)\right| \leqslant p!\,t^p e^{-t}.$$

Comme, par croissances comparées, $p!\,t^p e^{-t} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

- Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- On a :
$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \quad \left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant k!\,t^k e^{-t}.$$
Cela fournit l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}$ (on prouve comme dans le deuxième point l'intégrabilité de la fonction dominante).

On déduit du corollaire précité que f est définie et de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur $\mathbb{R}_+$, avec :
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \geqslant 0 \quad f^{(k)}(x) = (-1)^k\,k! \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-t}}{(1+xt)^{k+1}}\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit $x \geqslant 0$; on a :
$$x^2 f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{x^2 t e^{-t}}{(1+xt)^2}\,\mathrm{d}t.$$
Intégrons par parties (crochet et intégrale existent de façon évidente) :
$$\begin{aligned} x^2 f'(x) &= \left[\frac{x}{1+xt}\,te^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{x\,(1-t)\,e^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{xt-x}{1+xt}\,e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{1+xt}\,e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= 1-(x+1)\,f(x)\,. \end{aligned}$$
Notons $g : x \mapsto xf(x)$. On déduit de ce qui précède que, pour tout $x \geqslant 0$:
$$\begin{aligned} x^2 g'(x) + g(x) &= x^3 f'(x) + x^2 f(x) + xf(x) \\ &= x - x\,(x+1)\,f(x) + x^2 f(x) + xf(x) \\ &= x. \end{aligned}$$
Cela prouve que g est solution sur $\mathbb{R}_+$ de (E).

3. La solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène associée à (E) est :
$$x \mapsto Ce^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}} = Ce^{1/x} \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$
Si u est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x > 0 \quad u(x) = g(x) + Ce^{1/x}.$$
Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a $\lim\limits_{0^+} g = 0$. Par suite $\lim\limits_{0^+} u = 0$ équivaut à $C = 0$. En conclusion, g est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim\limits_{0^+} g = 0$.

4. Supposons l'existence de P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ tels que : $\forall x \geqslant 0 \quad g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

   En exprimant que g est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

   $$\forall x \geqslant 0 \quad x^2 (P'Q - PQ')(x) + (PQ)(x) = xQ^2(x).$$

   Donc le polynôme $X^2(P'Q - PQ') + PQ - XQ^2$ est nul, puisqu'il possède une infinité de racines. Posons $n = \deg P$ et $m = \deg Q$. On a $n \geqslant 1$, car si P est constant, il est nul puisque $g(0) = 0$; or la fonction nulle n'est pas solution de (E).

   Supposons $n \neq m$. On a $\deg(P'Q - PQ') \leqslant n + m - 1$ et, en examinant le coefficient de X^{n+m-1}, on constate que $\deg(P'Q - PQ') = n + m - 1$.

   Ainsi $\deg\big(X^2(P'Q - PQ')\big) = n + m + 1$ et, comme $\deg(PQ) = n + m$, on a :

   $$\deg\big(X^2(P'Q - PQ') - PQ\big) = n + m + 1 \quad \text{et} \quad \deg\big(XQ^2\big) = 2m + 1.$$

   On en déduit $n = m$, ce qui contredit $n \neq m$! Donc $n = m$. On vérifie alors que le coefficient de X^{2n-1} de $P'Q - PQ'$ est nul et, par suite, $\deg(P'Q - PQ') \leqslant 2n - 2$. On a donc :

   $$\deg\big(X^2(P'Q - PQ') - PQ\big) \leqslant 2n \quad \text{et} \quad \deg\big(XQ^2\big) = 2n + 1.$$

   C'est une contradiction, d'où la conclusion.

13.15 1. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est définie sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si :

   $$\forall t > 0 \quad x + t^2 > 0.$$

   Cela équivaut à $x \geqslant 0$.

   Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ a un prolongement continu sur $[0, +\infty[$.

   Pour $x = 0$, cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$ et, au voisinage de 0, on a $\left|\dfrac{\ln(t^2)}{1+t^2}\right| \sim \ln(t^2) = 2\ln t = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$; par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente, par comparaison aux intégrales de Riemann.

   On a $\ln(x + t^2) = 2\ln t + \ln\left(1 + \frac{x}{t^2}\right) \sim 2\ln t$, au voisinage de $+\infty$. On en déduit :

   $$\left|\frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2}\right| \sim \frac{2\ln t}{t^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right),$$

   par croissances comparées ; par suite l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente, par comparaison aux intégrales de Riemann.

   En conclusion g est définie sur $[0, +\infty[$.

   Notons que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2. Montrons, à l'aide du point méthode de la page 734, que g est continue sur $[0, +\infty[$.

   - Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

- Pour tout tout $x \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\ln\left(x+t^2\right)}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- Soit $[a,b]$, avec $0 \leqslant a < b$, un segment inclus dans $[0,+\infty[$. Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \ln\left(x+t^2\right)$ est croissante sur $[a,b]$; on en déduit, pour tout $(x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\left|f(x,t)\right| &= \frac{\left|\ln\left(x+t^2\right)\right|}{1+t^2} \\ &\leqslant \frac{1}{1+t^2}\sup\left(\left|\ln\left(a+t^2\right)\right|,\left|\ln\left(b+t^2\right)\right|\right) \\ &\leqslant \frac{\left|\ln\left(a+t^2\right)\right|+\left|\ln\left(b+t^2\right)\right|}{1+t^2} = \varphi(t).\end{aligned}$$

  La fonction φ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ car :

$$\varphi(t) = \left|f(a,t)\right| + \left|f(b,t)\right|,$$

  avec a et b positifs. En effet, nous avons établi dans la première question l'intégrabilité, pour tout $x \geqslant 0$, de la fonction $t \mapsto f(x,t)$ sur $]0,+\infty[$.

D'où la continuité de g sur $[0,+\infty[$, d'après le point méthode de la page 739.

3. • Établissons la classe $\mathcal{C}^1$ de g sur $]0,+\infty[$ à l'aide du point méthode de la page 739.

   ∗ Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et l'on a :

$$\forall (x,t) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(x+t^2)(1+t^2)}.$$

   ∗ Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'après l'étude faite à la première question.
   ∗ Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(x+t^2)(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
   ∗ Soit $[a,b]$, avec $0 < a < b$, un segment inclus dans $]0,+\infty[$. On a, pour tout $(x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1}{(x+t^2)(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{(a+t^2)(1+t^2)} = \varphi(t).$$

     La fonction φ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$, car elle est prolongeable par continuité en 0 et, en $+\infty$, on a $\varphi(t) \sim \frac{1}{t^4}$.

   Les hypothèses du point méthode de la page 739 étant vérifiées, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+t^2)(1+t^2)}.$$

- Calculons $g'(x)$ pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.

  On a $\frac{1}{(x+t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x+t^2}\right)$; on en déduit, pour tout $Y > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^Y \frac{\mathrm{d}t}{(x+t^2)(1+t^2)} &= \frac{1}{x-1}\left[\operatorname{Arctan} t - \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)\right]_{t=0}^{t=Y} \\ &= \frac{1}{x-1}\left(\operatorname{Arctan} Y - \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{Y}{\sqrt{x}}\right)\right).\end{aligned}$$

  D'où : $g'(x) = \lim\limits_{Y\to+\infty} \displaystyle\int_0^Y \frac{\mathrm{d}t}{(x+t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{x}}\right)$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\pi}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}.$$

  Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, l'égalité $g'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$ est vraie pour $x = 1$, par continuité de g' en 1.

- $*$ La fonction $u \mapsto \frac{1}{u}$ est une bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur lui-même ; le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ dans l'intégrale définissant $g(0)$ donne alors :

$$g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(t^2\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(u^2\right)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = -g(0).$$

  Par suite, $g(0) = 0$.

  $*$ Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\displaystyle\int \frac{\pi}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}\,\mathrm{d}x = \pi \ln\left(1+\sqrt{x}\right)$; il existe donc une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x > 0 \quad g(x) = \pi \ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C.$$

  La continuité de g en 0 donne $g(0) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = C$.

  On en déduit $C = g(0) = 0$. En conclusion :

$$\forall x \geqslant 0 \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(x+t^2\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi \ln\left(1+\sqrt{x}\right).$$

13.16 1. On a immédiatement, pour tout $x \in J\setminus\{0\}$:

$$\int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{f(tx)}{x}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{f(x)-f(0)}{x} = g(x).$$

Notons g_1 la fonction définie sur J par :

$$\forall x \in J \quad g_1(x) = \int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t$$

et appliquons à g_1 le corollaire 7 de la page 742. Notons $\varphi : (x,t) \mapsto f'(tx)$ et fixons $k \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et l'on a :

$$\forall p \in [\![1,k]\!] \quad \forall (x,t) \in J \times [0,1] \quad \frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(x,t) = t^p f^{(p+1)}(tx)$$

- Pour tout $x \in J$ et tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, la fonction :
$$t \mapsto \frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(x,t) = t^p f^{(p+1)}(tx),$$
est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$, donc intégrable sur ce segment.
- Pour tout $x \in J$, la fonction :
$$t \mapsto \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x,t) = t^k f^{(k+1)}(tx),$$
est continue par morceaux sur $[0,1]$.
- Fixons un segment $[a,b]$ de J contenant 0. La fonction $f^{(k+1)}$ est continue sur ce segment, donc bornée sur ce segment ; posons $M = \sup_{u \in [a,b]} \left|f^{(k+1)}(u)\right|$.
On a :
$$\forall (x,t) \in [a,b] \times [0,1] \quad \left|\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x,t)\right| = \left|t^k f^{(k+1)}(tx)\right| \leqslant M,$$
ce qui fournit l'hypothèse de domination.

On peut donc conclure, d'après le corollaire précité, que g_1 est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J, pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J, avec pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in J \quad g_1^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k f^{(k+1)}(tx)\,\mathrm{d}t.$$
Il est clair que g_1 fournit un prolongement de g.

2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n à la fonction f sur le segment $[0,x]$, on obtient :
$$\forall x \in J\setminus\{0\} \quad h(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$
Le changement de variable $t = ux$ donne :
$$\forall x \in J\setminus\{0\} \quad h(x) = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux)\,\mathrm{d}u.$$
En procédant comme à la première question, on établit que h se prolonge en une fonction h_1 de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J, avec pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in J \quad h_1^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} u^k f^{(n+k+1)}(ux)\,\mathrm{d}u.$$

3. D'après la première question, les fonctions $x \mapsto \frac{\tan x}{x}$ et $x \mapsto \frac{\mathrm{sh}\, x}{x}$ se prolongent en des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
La deuxième fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, puisque la fonction sh ne s'y annule pas ; en 0 elle vaut $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sh}\, x}{x}\right) = 1$.
Par suite, le quotient de ces deux prolongements est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Cela veut dire que la fonction $x \mapsto \frac{\tan x}{\mathrm{sh}\, x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

13.17 Notons que la fonction f, continue sur le compact $R = [a,b] \times [c,d]$, est bornée ; posons $M = \sup_R |f|$.

- Montrons que H est de classe $\mathcal{C}^1$.

  Pour cela, établissons la continuité sur $[a,b]$ de l'application $t \mapsto \displaystyle\int_c^d f(t,y)\,\mathrm{d}y$, en appliquant le théorème 3 de la page 732. Les deux premières hypothèses sont facilement vérifiées, par continuité de f, et l'on utilise la fonction constante égale à M comme fonction de domination.

  D'après les propriétés de l'intégrale fonction d'une de ses bornes, on en déduit que H est de classe $\mathcal{C}^1$ et que :

$$\forall x \in [a,b] \quad H'(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

- Montrons que G est de classe $\mathcal{C}^1$, en appliquant le théorème 6 de la page 738.

  Définissons $g : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{K}$ par :

$$\forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \quad g(x,y) = \int_a^x f(t,y)\,\mathrm{d}t.$$

  * Pour tout $y \in [c,d]$, la fonction $x \mapsto g(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, d'après les propriétés de l'intégrale fonction d'une de ses bornes, et l'on a :

$$\forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y).$$

  * Pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $y \mapsto g(x,y)$ est intégrable sur $[c,d]$, car continue sur ce segment (comme pour l'étude de H, on utilise le théorème 3 de la page 732).
  * Pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $y \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ est continue par morceaux sur $[c,d]$, car f est continue.
  * On utilise de même la fonction constante égale à M pour l'hypothèse de domination.

  On en déduit que G est de classe $\mathcal{C}^1$ et que :

$$\forall x \in [a,b] \quad G'(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Les fonctions H et G sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, avec $H' = G'$; comme, de plus, $H(a) = G(a) = 0$, on a $H = G$ et, en particulier, $H(b) = G(b)$, c'est-à-dire :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

13.18 1. Pour $x > 0$, la fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}_+$ et équivalente en $+\infty$ à t^{-2}, donc est intégrable, par comparaison aux intégrales de Riemann.

2. On a, pour tout $t > 0$:
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}} = \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\cdot$$
Comme $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$, cette fonction positive φ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, par comparaison aux intégrales de Riemann.
Soit $A \in \mathbb{R}$; on peut donc trouver $\beta > \alpha > 0$ tels que :
$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t \geqslant A + 1.$$
Par continuité sur $\mathbb{R}_+$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}}$ pour $t \in [\alpha, \beta]$ et domination par φ intégrable sur $[\alpha, \beta]$, on déduit du théorème 3 de la page 732 :
$$\lim_{x\to 0} \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}} = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$
On a donc, au voisinage de 0 :
$$F(x) \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}} \geqslant A.$$
On en déduit que $F(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.
3. On trouve :
$$I_\alpha(x) = \left[\ln\left(t + \sqrt{t^2+x^2}\right)\right]_0^\alpha = \ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2+x^2}\right) - \ln x$$
ce qui donne $I_\alpha(x) \sim -\ln x$ lorsque x tend vers 0.
4. Intuitivement, c'est la présence de 0 dans l'intervalle d'intégration qui commande tout. Nous allons donc couper l'intégrale en deux morceaux $F(x) = G(x) + H(x)$ avec :
$$G(x) = \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}} \quad \text{et} \quad H(x) = \int_\alpha^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}}\cdot$$
On a immédiatement :
$$H(x) = \int_\alpha^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}} \leqslant \int_\alpha^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{\alpha}\cdot$$
D'autre part :
$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, I_\alpha(x) \leqslant G(x) \leqslant I_\alpha(x).$$
Soit $\varepsilon > 0$. En prenant $\alpha > 0$ tel que $\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \geqslant 1 - \varepsilon$, la fonction G est minorée par une fonction équivalente à $-(1-\varepsilon)\ln x$ et majorée par une fonction équivalente à $-\ln x$.
Il existe donc $\eta \in]0,1[$ tel que pour $x \in]0, \eta]$, on ait :
$$1 - 2\varepsilon \leqslant \frac{G(x)}{-\ln x} \leqslant 1 + \varepsilon.$$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = -\infty$, on peut choisir $\eta > 0$ tel que $\dfrac{1}{-\alpha \ln \eta} \leqslant \varepsilon$; on obtient pour $x \in]0, \eta]$:

$$1 - 2\varepsilon \leqslant \frac{F(x)}{-\ln x} \leqslant 1 + 2\varepsilon,$$

ce qui prouve que $F(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$.

5. Par le changement de variable $t = u\,x$ (on applique la proposition 25 de la page 679 : $u \mapsto u\,x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même), on obtient :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{x} F(1/x),$$

ce qui donne $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x}$.

13.19 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $u_x : t \mapsto e^{-t}\frac{\sin(tx)}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Comme $u_x(t) \sim \frac{tx}{t}$, au voisinage de 0, la fonction u_x a un prolongement continu sur $[0, +\infty[$ et est donc intégrable sur $]0, 1]$.

On a $\left|u_x(t)\right| \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}$, pour tout $t \geqslant 1$. On en déduit, par comparaison, l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$, puisque la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur cet intervalle.

Par suite, la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin(tx)}{t}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Posons $f(x,t) = e^{-t}\frac{\sin(tx)}{t}$ et appliquons le théorème 6 de la page 738.

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-t}\cos(tx).$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, d'après l'étude initiale.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- On a :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-t}.$$
Comme la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, cela fournit l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}$.

On peut donc conclure que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(tx)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(e^{(ix-1)t}\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme $\left|e^{(ix-1)t}\right| = e^{-t}$, la fonction $t \mapsto e^{(ix-1)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{Re}\left(e^{(ix-1)t}\right) \mathrm{d}t = \operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} \mathrm{d}t\right)$$
$$= \operatorname{Re}\left(\left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_0^{+\infty}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right).$$

Par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Comme $g(0) = 0$, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin(tx)}{t} \mathrm{d}t = \operatorname{Arctan} x.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $u_x : t \mapsto \frac{e^{-xt} \operatorname{sh} t}{t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.
Comme $u_x(t) \sim \frac{t}{t}$., au voisinage de 0, la fonction u_x a un prolongement continu sur $[0, +\infty[$ et est donc intégrable sur $]0, 1]$.
On a $u_x(t) \sim \frac{e^{(1-x)t}}{2t}$, au voisinage de $+\infty$.

- Pour $x > 1$, on en déduit, $u_x(t) = \mathrm{o}\left(e^{(1-x)t}\right)$.
Comme la fonction $t \mapsto e^{(1-x)t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, il en est de même de u_x par comparaison.
- Pour $x \leqslant 1$ et $t \geqslant 1$, on a $u_x(t) \geqslant \frac{1}{2t} \geqslant 0$.
L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt} \frac{\operatorname{sh} t}{t} \mathrm{d}t$ est donc divergente, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Par suite, la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\operatorname{sh} t}{t} \mathrm{d}t$ est définie sur $]1, +\infty[$.

Posons $f(x,t) = e^{-xt} \frac{\operatorname{sh} t}{t}$ et appliquons le point méthode de la page 739.

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et l'on a :
$$\forall (x,t) \in]1, +\infty[\times]0, +\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt} \operatorname{sh} t.$$
- Pour tout $x \in]1, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t) = e^{-xt} \frac{\operatorname{sh} t}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, d'après l'étude initiale.
- Pour tout $x \in]1, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt} \operatorname{sh} t$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$
- Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $]1, +\infty[$. On a :
$$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0, +\infty[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt} \operatorname{sh} t \leqslant e^{-at} \operatorname{sh} t.$$

La fonction $t \mapsto e^{-at} \operatorname{sh} t$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après l'étude initiale ; cela fournit l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}$.

On peut donc conclure que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ avec :

$$\forall x \in]1,+\infty[\quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} \operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit, pour tout $x > 1$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{(1-x)t} - e^{-(1+x)t}}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{e^{(1-x)t}}{2(1-x)} + \frac{e^{-(1+x)t}}{2(1+x)}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}. \end{aligned}$$

D'où l'existence d'un réel C tel que :

$$\forall x \in]1,+\infty[\quad g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C.$$

Par suite, $C = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Pour déterminer cette limite, appliquons le théorème 4 de la page 735 avec domination au voisinage de $+\infty$.

- Pour tout $t > 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,t) = 0$.
- On a :

$$\forall (x,t) \in [2,+\infty[\times]0,+\infty[\quad \left|f(x,t)\right| = f(x,t) \leqslant f(2,t).$$

Cela fournit l'hypothèse de domination sur $[2,+\infty[$, d'après l'étude initiale. Par suite $C = 0$ et l'on peut conclure que :

$$\forall x \in]1,+\infty[\quad g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

13.20 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $u_x : t \mapsto t^x \frac{t-1}{\ln t}$ est continue et positive sur $]0,1[$.
Comme $u_x(t) \sim \frac{t-1}{t-1}$, au voisinage de 1, la fonction u_x a un prolongement continu sur $]0,1]$, donc est intégrable sur $[1/2,1[$.
On a $u_x(t) \sim -\frac{t^x}{\ln t}$, au voisinage de 0.

- Pour $x > -1$, on a $-\frac{t^x}{\ln t} = \mathrm{o}(t^x)$, au voisinage de 0 ; on en déduit, par comparaison, l'intégrabilité de u_x sur $]0,1/2]$.
- Pour $x = -1$, on a, pour tout $a \in]0,1/2]$:

$$\int_a^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \Big[\ln|\ln t|\Big]_a^{1/2} = \ln\left(\frac{\ln 2}{-\ln a}\right).$$

On en déduit que $\lim\limits_{a\to0^+} \int_a^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{-t\ln t} = +\infty$. Par comparaison, $\int_0^{1/2} u_x(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

- Pour $x < -1$, on a $-\frac{1}{t\ln t} = \mathrm{o}\left(-\frac{t^x}{\ln t}\right)$, au voisinage de 0. D'après le cas précédent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} u_x(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, par comparaison de fonctions de signe constant.

En conclusion, $\mathcal{D}_g =]-1,+\infty[$.

2. Posons $f(x,t) = t^x\frac{t-1}{\ln t}$ et appliquons le point méthode de la page 739.
   - Pour tout $t \in]0,1[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et :
   $$\forall (x,t) \in]-1,+\infty[\times]0,1[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t^x(t-1).$$
   - Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t) = t^x\frac{t-1}{\ln t}$ est intégrable sur $]0,1[$, d'après l'étude initiale.
   - Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1[$.
   - Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $]-1,+\infty[$. On a :
   $$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,1[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = t^x(1-t) \leqslant t^a(1-t) \leqslant t^a.$$
   La fonction $t \mapsto t^a$ est continue, positive et intégrable sur $]0,1[$, d'après l'étude des intégrales de Riemann, puisque $a > -1$. Cela fournit l'hypothèse de domination sur tout segment pour $\frac{\partial f}{\partial x}$.

   On peut donc conclure que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ avec :
   $$\begin{aligned}\forall x \in]-1,+\infty[\quad g'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 t^x(t-1)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t^{x+2}}{x+2} - \frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, il existe un réel C tel que :
   $$\forall x \in]-1,+\infty[\quad g(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + C.$$
   Par suite $C = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Pour déterminer cette limite, appliquons le théorème 4 de la page 735, avec domination au voisinage de $+\infty$.
   - Pour tout $t \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,t) = 0$.
   - On a :
   $$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,1[\quad \left|f(x,t)\right| = f(x,t) \leqslant f(0,t).$$
   Cela fournit l'hypothèse de domination sur $[0,+\infty[$, d'après l'étude initiale.

   On en déduit $C = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et, par suite :
   $$\forall x \in]-1,+\infty[\quad g(x) = \int_0^1 t^x\frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

13.21 1. Pour $x \geqslant 0$ et $t > 0$, posons $f(x,t) = \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ et appliquons le théorème 6 de la page 738.

- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et l'on a :
$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$
- Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t) = \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Étudions son intégrabilité sur cet intervalle.
  - ∗ Au voisinage de 0, on a $\frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \sim \frac{xt}{t}$; on a donc un prolongement continu sur $[0,1]$, d'où l'intégrabilité sur $]0,1]$.
  - ∗ On a, pour tout $t \geqslant 1$:
$$\left|f(x,t)\right| = \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \leqslant \frac{\pi/2}{t^2}.$$
On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ de $t \mapsto f(x,t)$, pour tout $x \geqslant 0$.
- Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
- On a :
$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$
La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue, positive et intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$, puisque $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ existe et vaut $\pi/2$; par suite, cette fonction est intégrable sur $]0,+\infty[$. Cela fournit l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}$.

On en déduit que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ avec :
$$\forall x \in [0,+\infty[\quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$
Calculons $g'(x)$ pour $x \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$. On a, pour tout $t \geqslant 0$:
$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right).$$
On en déduit :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} &= \frac{1}{1-x^2}\Big[\operatorname{Arctan} t - x\operatorname{Arctan}(xt)\Big]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{\pi}{2} - x\,\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{x+1}.\end{aligned}$$

Comme g' est continue sur $\mathbb{R}_+$, on peut conclure que :

$$\forall x \in [0,+\infty[\quad g'(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{x+1}\cdot$$

Puisque $g(0) = 0$, il vient :

$$\forall x \in [0,+\infty[\quad g(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x+1).$$

2. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto \big(\operatorname{Arctan} t\big)^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$; une intégration par parties donne :

$$\int \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = -\frac{1}{t}\big(\operatorname{Arctan} t\big)^2 + 2\int \frac{\operatorname{Arctan} t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Appliquons la proposition 24 de la page 678.

- Le crochet $\left[-\frac{1}{t}\big(\operatorname{Arctan} t\big)^2\right]_0^{+\infty}$ existe et vaut 0, car :

$$-\frac{1}{t}\big(\operatorname{Arctan} t\big)^2 \underset{0}{\sim} t \quad \text{et} \quad \forall t > 0 \quad \left|-\frac{1}{t}(\operatorname{Arctan} t)^2\right| \leqslant \frac{\pi^2}{4t^2}\cdot$$

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $g(1)$.

D'après la proposition 24 de la page 678, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ converge et l'on a :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\big(\operatorname{Arctan} t\big)^2\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

On a donc établi :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = 2g(1) = \pi\ln 2.$$

13.22 • Posons $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(2tx)\,\mathrm{d}t$ et montrons que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à l'aide du théorème 6 de la page 738. On note $f : (x,t) \mapsto e^{-t^2}\sin(2tx)$.

∗ Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 2te^{-t^2}\cos(2tx).$$

∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t) = e^{-t^2}\sin(2tx)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissances comparées, on a $\left|e^{-t^2}\sin(2tx)\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$; cette fonction est donc intégrable sur $[0,+\infty[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

∗ On a :

$$\forall\,(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,t)\right|\leqslant 2te^{-t^2}.$$

La fonction $t\mapsto 2te^{-t^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $2te^{-t^2}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$.
Cela fournit l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Par suite, g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad g'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}2te^{-t^2}\cos(2tx)\,\mathrm{d}t.$$

- Formons une équation différentielle dont g soit solution. Fixons $x\in\mathbb{R}$.

  Les fonctions $t\mapsto e^{-t^2}$ et $t\mapsto\cos(2tx)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$; une intégration par parties donne :

$$\int 2te^{-t^2}\cos(2tx)\,\mathrm{d}t=-e^{-t^2}\cos(2tx)-2x\int e^{-t^2}\sin(2tx)\,\mathrm{d}t.$$

  Le crochet $\left[-e^{-t^2}\cos(2tx)\right]_0^{+\infty}$ existe et vaut 1. On a donc établi :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad g'(x)=1-2xg(x).$$

- Posons $h(x)=e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$. D'après les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad h'(x)=e^{-x^2}e^{x^2}-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t=1-2xh(x).$$

  Comme $g(0)=h(0)=0$, les fonctions g et h sont solutions sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'+2xy & = & 1\\ y(0) & = & 0.\end{array}\right.$$

  D'après le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires du premier ordre (voir cours de première année), on en déduit que les fonctions g et h sont égales. On a donc établi que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \int_0^{+\infty}e^{-t^2}\sin(2tx)\,\mathrm{d}t=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t.$$

13.23 1. • Appliquons le théorème 3 de la page 732.

∗ Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, la fonction $x\mapsto\frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

∗ Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, la fonction $t\mapsto\frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

∗ On a :

$$\forall\,(x,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\quad \left|\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right|=\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\leqslant\frac{1}{1+t^2}.$$

La fonction $t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$; elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $\lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_0^A\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ existe et vaut $\pi/2$.

Cela fournit l'hypothèse de domination.

On en déduit que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Notons $\varphi:(x,t)\mapsto\frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ et appliquons le corollaire 7 de la page 742, pour établir que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

∗ Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, la fonction $x\mapsto\varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall\,(x,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)=-\frac{te^{-xt}}{1+t^2}\quad\text{et}\quad\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)=\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}.$$

∗ Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $p\in[\![0,1]\!]$.

La fonction $t\mapsto\frac{\partial^p\varphi}{\partial x^p}(x,t)=\frac{(-t)^pe^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Comme, au voisinage de $+\infty$, $\left|\frac{(-t)^pe^{-xt}}{1+t^2}\right|=\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, elle est intégrable sur cet intervalle, par comparaison aux intégrales de Riemann.

∗ La fonction $t\mapsto\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)=\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

∗ Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall\,(x,t)\in[a,b]\times\mathbb{R}_+^*\quad \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right|=\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\leqslant e^{-xt}\leqslant e^{-at}.$$

La fonction $t\mapsto e^{-at}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$; d'où l'hypothèse de domination sur tout segment pour $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$.

Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f''(x)+f(x)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}+\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\mathrm{d}t$$
$$=\left[\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{x}.$$

On peut donc conclure que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f''(x)+f(x)=\frac{1}{x}.$$

2. • Pour $x>0$, la fonction $t\mapsto\frac{\sin t}{x+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $x=0$, la fonction $t\mapsto\frac{\sin t}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ car, au voisinage de 0, $\sin t\sim t$.

Cela assure, pour $x \in \mathbb{R}_+$, l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{x+t}\,dt$.

Fixons $x \geqslant 0$. Une intégration par parties donne :

$$\int \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\cos t}{t+x} - \int \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t.$$

∗ On a $\lim\limits_{A\to+\infty}\left[-\frac{\cos t}{t+x}\right]_{t=1}^{t=A} = \frac{\cos 1}{1+x}$, puisque $\left|\frac{\cos A}{A+x}\right| \leqslant \frac{1}{A}$.

∗ On a, pour tout $t \geqslant 1$:

$$\left|\frac{\cos t}{(t+x)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

On en déduit la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

• Pour tout $x > 0$, la fonction $\psi :]x, +\infty[\to]0, +\infty[$, définie par $\psi(u) = u - x$, est une bijection strictement décroissante, de classe $\mathcal{C}^1$. D'après la proposition 26 de la page 680, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin\big(\psi(u)\big)}{x+\psi(u)}\,\psi'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\cos x \sin u - \sin x \cos u}{u}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

En procédant comme dans l'étude précédente, on établit la convergence des intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$. On peut donc écrire :

$$g(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Comme les fonctions $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ et $u \mapsto \frac{\cos u}{u}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit (*cf.* la proposition 5 de la page 668) que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \\ &\quad - \frac{\cos x \sin x}{x} + \frac{\sin x \cos x}{x} \\ &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

La fonction g' est de même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u + \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \\ &\quad + \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\cos^2 x}{x} \\ &= -g(x) + \frac{1}{x}\cdot \end{aligned}$$

La fonction g est donc solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de la même équation différentielle que f :

$$y'' + y = \frac{1}{x}\cdot$$

3. • Fixons $x \geqslant 0$. Une intégration par parties donne :

$$\int \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos t}{t+x} + \int \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t.$$

De $\left|\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon+x}\right| \leqslant \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$, on tire $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon+x}\right) = 0$ car, au voisinage de 0, $\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} \sim \frac{\varepsilon^2/2}{\varepsilon}$.

De $\left|\frac{1-\cos A}{A+x}\right| \leqslant \frac{2}{A}$ pour $A > 0$, on tire $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{1-\cos A}{A+x}\right) = 0$.

Par suite, le crochet $\left[\frac{1-\cos t}{t+x}\right]_0^{+\infty}$ existe et vaut 0. On déduit alors de la proposition 24 de la page 678 la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$ et l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t.$$

• Appliquons le théorème le théorème 3 de la page 732.

∗ Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

∗ On a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \quad \left|\frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\right| = \frac{1-\cos t}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1-\cos t}{t^2}\cdot$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $\frac{1-\cos t}{t^2} \sim \frac{t^2/2}{t^2}$, au voisinage de 0, la fonction φ a un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$, donc est intégrable sur $]0,1]$.

On a $\varphi(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$; on en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrabilité de φ sur $[1,+\infty[$.

Ainsi φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Cela fournit l'hypothèse de domination.

On peut donc conclure que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

4. • Pour tout $x > 0$, on peut écrire :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt} \mathrm{d}t = 1/x.$$

On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

On a par ailleurs :

$$\forall x > 0 \quad 0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{2}{(t+x)^2} \, \mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{t+x} \right]_0^{+\infty} = 2/x.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

• Posons $h = f - g$. D'après les questions précédentes, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0.$$

On en déduit l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x > 0 \quad h(x) = a \cos x + b \sin x.$$

D'après l'étude précédente, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$. Il en résulte en particulier que les suites $\Big(h(2n\pi)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\Big(h\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers 0 ; comme $h(2n\pi) = a$ et $h\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = b$, il vient $a = b = 0$, d'où $h = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_+$, par continuité en 0.

On a donc établi que les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi/2$, on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = g(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Chapitre 14 : Espaces préhilbertiens et euclidiens

I Rappels et compléments 796

II Projection orthogonale 799

1 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie 799

2 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie 801

III Suites orthonormales 802

1 Suites totales 802

2 Polynômes orthogonaux 803

IV Endomorphismes d'un espace euclidien 806

1 Endomorphismes symétriques 806

2 Réduction des endomorphismes symétriques 809

3 Isométries vectorielles d'un espace euclidien 811

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 814

Exercices 827

Espaces préhilbertiens et euclidiens

14

En première année, on a introduit la notion d'espace préhilbertien ($\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire) et d'espace euclidien (espace préhilbertien de dimension finie). La relecture de ce cours est fortement conseillée.
Dans ce chapitre, on considère un espace préhilbertien réel E dont le produit scalaire sera noté $(\ |\ )$. La norme et la distance euclidiennes associées seront respectivement notées $\|\ \|$ et d.

I Rappels et compléments

Définition 1

On dit que deux vecteurs x et y de E sont **orthogonaux** si $(x \mid y) = 0$.
On note alors $x \perp y$.

Définition 2

On appelle **orthogonal** d'une partie A de E, l'ensemble noté $A^\perp$ défini par :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A \quad (a \mid x) = 0\}.$$

Proposition 1

L'orthogonal d'une partie de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

L'orthogonal de A est $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \operatorname{Ker} \varphi_a$, où φ_a est la forme linéaire $x \mapsto (a \mid x)$. □

Définition 3

On dit que deux sous-espaces vectoriels de E, F et G sont orthogonaux si :

$$\forall (x, y) \in F \times G \quad (x \mid y) = 0,$$

autrement dit si $G \subset F^\perp$ ou, de façon équivalente, si $F \subset G^\perp$.

On note alors $F \perp G$.

Proposition 2

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux, alors ils sont en somme directe. On dit alors que la somme $F+G$ est directe et orthogonale et on la note $F \overset{\perp}{\bigoplus} G$.

Démonstration. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux, alors tout vecteur $x \in F \cap G$ vérifie $(x \mid x) = 0$ donc $\|x\| = 0$ puis $x = 0$. □

Remarque En particulier, Si F est un sous-espace vectoriel de E alors F et $F^\perp$ sont en somme directe. On pourrait se demander si leur somme est égale à E. La réponse est négative en général (voir l'exercice 1) mais elle est vraie si F est de dimension finie.

Proposition 3

Si F est un sous-espace vectoriel de E et si F est de dimension finie, alors :

$$E = F \overset{\perp}{\bigoplus} F^\perp \qquad \text{et} \qquad (F^\perp)^\perp = F.$$

Démonstration.

Comme F et $F^\perp$ sont en somme directe, il suffit de montrer que $F + F^\perp = E$.

Soit $x \in E$. Montrons qu'il existe un couple $(y,z) \in F \times F^\perp$ tel que $x = y + z$. Pour cela, raisonnons par analyse-synthèse.

Comme F est de dimension finie, il possède une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ que l'on fixe.

- Analyse : supposons qu'il existe $(y,z) \in F \times F^\perp$ tel que $x = y + z$. Comme $z \in F^\perp$, on a :
$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad (e_i \mid z) = 0 = (e_i \mid x - y) = (e_i \mid x) - (e_i \mid y).$$
Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a nécessairement :
$$y = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid y)\, e_i = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)\, e_i \quad \text{et} \quad z = x - y = x - \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)\, e_i.$$
Ainsi, si un tel couple (y,z) existe, il est unique.
- Synthèse : si l'on pose $y = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)\, e_i$ et $z = x - y$, alors $x = y + z$, $y \in F$ et
$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad (e_i \mid z) = (e_i \mid x - y) = (e_i \mid x) - (e_i \mid y) = 0$$
donc $z \in F^\perp$.

Par suite, les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont supplémentaires. On a même trouvé une expression de la projection du vecteur x sur F parallèlement à $F^\perp$ lorsque l'on dispose d'une base orthonormale de F. □

Corollaire 4

Si E est euclidien, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a :

$$\dim F^\perp + \dim F = \dim E.$$

Exemple On a vu en première année que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$, on a :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\bigoplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Le résultat de la proposition 3 de la page précédente ne subsiste pas sans l'hypothèse de dimension finie, comme le montre l'exercice suivant.

p.814

Exercice 1 Soit $E = \mathcal{C}^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ muni du produit scalaire :

$$\varphi : (f,g) \mapsto \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

On considère le sous-espace vectoriel $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. Déterminer $F^\perp$.
2. En déduire que $E \neq F \overset{\perp}{\bigoplus} F^\perp$ et que $(F^\perp)^\perp \neq F$.

Théorème 5 (Théorème de représentation de Riesz)

Soit φ une forme linéaire sur E un espace euclidien.

Il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que : $\forall x \in E \quad \varphi(x) = (\,a \mid x\,)$.

Démonstration.

Comme E est un espace euclidien, il possède une base orthonormale $(e_1,\dots,e_n)$.

Soit $a \in E$. La forme linéaire $x \mapsto (\,a \mid x\,)$ est égale à φ si, et seulement si, elle coïncide avec φ sur une base. Donc le vecteur a est solution si, et seulement si :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad (\,a \mid e_i\,) = \varphi(e_i)$$

c'est-à-dire si, et seulement si, $a = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\,e_i$ puisque la base est orthonormale. On en déduit qu'il existe un unique vecteur solution : $a = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\,e_i$. □

Remarque Pour tout vecteur a, l'application $x \mapsto (\,a \mid x\,)$ est clairement une forme linéaire sur E. Le théorème de Riesz permet donc de caractériser les formes linéaires sur un espace euclidien : il s'agit des applications de la forme $x \mapsto (\,a \mid x\,)$ avec $a \in E$.

p.814

Exercice 2 Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(M) = \mathrm{Tr}\,(AM).$$

p.814

Exercice 3 Produit vectoriel

On se place dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3.

Étant donné deux vecteurs a et b, on note $a \wedge b$ et on appelle **produit vectoriel** des vecteurs a et b, l'unique vecteur tel que :

$$\forall x \in E \quad [a, b, x] = (\, a \wedge b \mid x \,)$$

1. Justifier la définition du produit vectoriel.
2. Déterminer les coordonnées dans une base orthonormale du produit vectoriel $a \wedge b$ en fonction de celles des vecteurs a et b.
3. Montrer la formule du double produit vectoriel :

$$a \wedge (b \wedge c) = (\, a \mid c \,)\, b - (\, a \mid b \,)\, c.$$

II Projection orthogonale

1 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition 4

Soit F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

On appelle **projection orthogonale** sur F, la projection sur F parallèlement à son supplémentaire orthogonal $F^\perp$.

L'image d'un vecteur x par cette projection est appelée le **projeté orthogonal** de x sur F.

Sous ces hypothèses, on a établi dans la démonstration de la proposition 3 de la page 797 l'expression de la projection orthogonale sur F :

Proposition 6

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale de F, alors le projeté orthogonal sur F d'un vecteur x de E est :

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{p} (\, e_i \mid x \,)\, e_i.$$

Exemples

1. Si a est un vecteur **normé**, alors la projection orthogonale d'un vecteur x sur la droite vectorielle engendrée par a est

$$\begin{array}{rccc} \pi : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & (\, a \mid x \,)\, a. \end{array}$$

Si le vecteur a n'est pas normé (mais non nul), on le norme pour obtenir :

$$\forall x \in E \quad \pi(x) = \frac{(\, a \mid x \,)}{(\, a \mid a \,)}\, a.$$

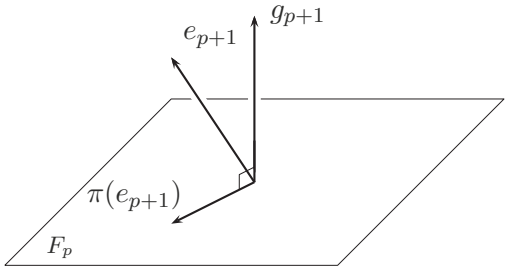
2. Si E est euclidien et si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (respectivement $(a_1, a_2, \dots, a_n)$) sont les composantes de x (respectivement de a) dans une base orthonormale $\mathcal{B}$, on a :
$$\pi(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\, a.$$

3. Si H est un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors il existe un vecteur non nul a tel que $H = (\mathbb{R}a)^\perp$. Si l'on note p_H et $p_{\mathbb{R}a}$ les projections orthogonales sur H et $\mathbb{R}a$, alors on a $Id_E = p_H + p_{\mathbb{R}a}$. Pour obtenir la projection orthogonale sur H d'un vecteur, il suffit donc de lui retirer sa projection orthogonale sur $H^\perp$, c'est-à-dire :
$$\forall x \in E \quad p_H(x) = x - \frac{(\,a \mid x\,)}{(\,a \mid a\,)}\, a.$$

4. De façon général, si F et $F^\perp$ sont supplémentaires alors $Id_E = p_F + p_{F^\perp}$. Ainsi, si on connaît p_F, alors on connaît $p_{F^\perp}$.

Remarque Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille libre de E. Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt vu en première année permet de construire une famille orthonormale $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ de E telle que :
$$\forall p \in [\![1, n]\!] \quad \text{Vect}\,\{e_1, e_2, \dots, e_p\} = \text{Vect}\,\{f_1, f_2, \dots, f_p\}$$
de la façon suivante. Pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, on pose :
$$g_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} (\,e_{p+1} \mid f_i\,)\, f_i \qquad \text{et} \qquad f_{p+1} = \frac{g_{p+1}}{\|g_{p+1}\|}.$$

Le vecteur g_{p+1} est obtenu en retranchant à e_{p+1} son projeté orthogonal sur :
$$F_p = \text{Vect}\,\{e_1, e_2, \dots, e_p\}.$$



Pour normer le vecteur g_{p+1}, il suffit alors d'appliquer le théorème de Pythagore aux vecteurs orthogonaux $\pi(e_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p} (\,f_i \mid e_{p+1}\,)\, f_i$ et g_{p+1}. On obtient ainsi :
$$\|g_{p+1}\|^2 = \|e_{p+1}\|^2 - \|\pi(e_{p+1})\|^2 = \|e_{p+1}\|^2 - \sum_{i=1}^{p} (\,f_i \mid e_{p+1}\,)^2.$$

Proposition 7

Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie engendrée par une famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$. Étant donnés deux vecteurs x et y de E, on a :

$$y = p_F(x) \iff \begin{cases} y \in F \\ \forall i \in [\![1, p]\!] \quad (x - y \mid e_i) = 0. \end{cases}$$

Point méthode

La proposition précédente permet de trouver le projeté orthogonal d'un vecteur x sur un sous-espace vectoriel F de dimension finie sans avoir à déterminer une base orthonormale de F. Il suffit de connaître une famille génératrice de F et de résoudre le système obtenu en traduisant les égalités $(x - y \mid e_i) = 0$ sur les coordonnées de y.

Lorsque l'on dispose d'une base orthonormale (ou plus simplement orthogonale) ce système est plus simple puisque diagonal et sa résolution revient à utiliser la formule de la proposition 6 de la page 799 mais il ne faut pas oublier que l'obtention d'une base orthogonale peut être longue.

p.815

Exercice 4 Pour tout entier n, déterminer la projection orthogonale du polynôme X^n sur $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$:

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^1 P(x)\, Q(x)\, \mathrm{d}x.$$

2 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

On rappelle que si $\mathcal{X}$ est une partie non vide de E et A un point de E. On appelle **distance** de A à $\mathcal{X}$ la quantité :

$$d(A, \mathcal{X}) = \inf_{M \in \mathcal{X}} d(A, M).$$

L'existence de cette quantité $d(A, \mathcal{X})$ vient du fait que $\{d(A, M)\,;\ M \in \mathcal{X}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0.

Proposition 8

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, p_F la projection orthogonale sur F et x un vecteur de E. La distance du vecteur x à F est atteinte en un unique point de F, à savoir $p_F(x)$. Autrement dit :

1. $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$;
2. $\forall y \in F \quad d(x, F) = \|x - y\| \iff y = p_F(x)$.

Démonstration page 815

p.815

Exercice 5 Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \,\mathrm{d}x$.

Corollaire 9

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base orthonormale d'un sous-espace vectoriel F de E. On a l'égalité :

$$d^2(x, F) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)^2 .$$

Démonstration page 816

Corollaire 10 (Inégalité de Bessel)

Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille orthonormée de E, on a, pour tout $x \in E$:

$$\sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Remarque Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée, alors, pour tout $x \in E$, la série $\sum_k (e_k \mid x)^2$ est convergente car elle est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées par $\|x\|^2$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (e_k \mid x)^2 \leqslant \|x\|^2.$$

III Suites orthonormales

1 Suites totales

On a vu que si $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormale de E, alors pour tout vecteur $x \in E$, on a $x = \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x) e_k$. et donc $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)^2$.

On souhaite généraliser ce résultat dans le cas où E n'est pas euclidien et que l'on ne dispose pas d'une base orthonormale mais d'une suite orthonormale. L'exercice suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'égalité souhaitée. Cette condition explique la définition de suite totale.

p.816

Exercice 6

Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée et $x \in E$. L'**égalité de Parseval-Bessel** :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (e_k \mid x)^2 = \|x\|^2$$

est satisfaite si, et seulement si, x est adhérent au sous-espace vectoriel engendré par la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Définition 5

On appelle **suite totale** de E toute suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de E telle que le sous-espace vectoriel engendré soit dense dans E, c'est-à-dire $E = \overline{\mathrm{Vect}(e_k)_{k\in\mathbb{N}}}$.

Corollaire 11

Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale de E, alors, pour tout $x \in E$, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (e_k \mid x)^2 = \|x\|^2.$$

Corollaire 12

Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale de E, et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n désigne le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$, alors, pour tout $x \in E$, la suite $\left(p_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Démonstration. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x - p_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (e_k \mid x)^2. \qquad \square$$

2 Polynômes orthogonaux

Dans cette section, nous allons voir des exemples de suites totales composées de polynômes.
En pratique, le caractère normé introduit des constantes multiplicatives, ce qui explique que l'on se limite parfois à considérer des suites orthogonales totales.

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$ muni du produit scalaire :

$$(f,g) \mapsto \int_{[a,b]} f\,g.$$

Pour tout $f \in \mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$, le théorème de densité de Weierstrass nous fournit une suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur le segment $[a,b]$. La majoration :

$$\|f - p_n\| = \left(\int_{[a,b]} (f-p_n)^2\right)^{1/2} \leqslant (b-a)^{1/2}\,\|f-p_n\|_\infty$$

montre que cette suite converge aussi vers f pour la norme euclidienne associée au produit scalaire $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b fg$.

Le sous-espace des fonctions polynomiales est donc dense dans l'espace préhilbertien $\mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$ pour cette norme. Ainsi, si $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}[X]$, alors, $\mathrm{Vect}(q_n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathbb{R}[X]$ est dense dans E et donc, pour

tout $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, l'égalité de Parseval-Bessel donne :

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{[a,b]} q_n f \right)^2 .$$

Si $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est seulement une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$, cette égalité devient :

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{[a,b]} q_n f \right)^2 \frac{1}{\|q_n\|^2}.$$

Les trois exercices suivants proposent la construction et l'étude d'une suite totale de polynômes orthogonaux lorsque $[a,b] = [-1,1]$ (ce qui rajoute des propriétés de symétrie)

p.816

Exercice 7 On munit $\mathbb{R}[X]$, du produit scalaire :

$$(f,g) \mapsto (\, f \mid g \,) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer qu'il existe une unique base orthogonale $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout entier n, on ait $\deg(Q_n) = n$ et Q_n de coefficient dominant 1.
2. Déterminer Q_0, Q_1, Q_2 et Q_3.
3. Étudier la parité de Q_n en fonction de n.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme Q_n admet n racines distinctes dans $]-1,1[$.

   On pourra introduire le polynôme $\prod_{a\in S} (X-a)$ *où* S *est l'ensemble des racines de* Q_n *appartenant à l'intervalle* $]-1,1[$ *et d'ordre impair.*

p.818

Exercice 8 On considère les polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis dans l'exercice précédent.

1. Montrer que pour tout entier n, $Q_{n+2} \in \mathrm{Vect}(XQ_{n+1}, Q_n)$, c'est-à-dire qu'il existe des réels α_n et β_n tels que $Q_{n+2} = \alpha_n X Q_{n+1} + \beta_n Q_n$.
2. Prouver que, pour tout entier n, on a $Q_n = \dfrac{n!}{(2n)!}\, R_n^{(n)}$ avec $R_n = (X^2-1)^n$.
3. En déduire $Q_n(1)$, puis que :

$$Q_{n+2} = XQ_{n+1} - \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} Q_n.$$

p.819

Exercice 9 On considère les polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exercice précédent.

Montrer que pour tout entier n, le polynôme $\left(\left(1-X^2\right) Q_n'\right)'$ est colinéaire à Q_n. En déduire que Q_n est solution de l'équation différentielle :

$$(X^2-1)Q_n'' + 2XQ_n' - n(n+1)Q_n = 0.$$

p.819

Exercice 10 Polynômes de Legendre

La suite des polynômes de Legendre est définie par $L_0(X) = 1$, $L_1(X) = X$ et pour tout entier n par la formule de Bonnet :

$$(n+2)L_{n+2}(X) - (2n+3)XL_{n+1}(X) + (n+1)L_n(X) = 0.$$

1. Déterminer L_2 et L_3 puis prouver que pour tout entier n, on a $L_n(1) = 1$.
2. Prouver que la suite des polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étudiée dans les trois exercices précédents est reliée aux polynôme de Legendre par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad Q_n(X) = \frac{2^n\,(n!)^2}{(2n)!}L_n(X).$$

Remarque Les quatre exercices précédents prouvent que la famille des polynômes de Legendre forme une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $(f,g) \mapsto (\,f \mid g\,) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ et que pour tout entier n, on a :

$$(X^2-1)L_n'' + 2XL_n' - n(n+1)L_n = 0.$$

Plus généralement, si w est une fonction continue sur $[a,b]$ strictement positive sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors le sous-espace des fonctions polynomiales est dense dans l'espace préhilbertien $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ pour la norme euclidienne issue du produit scalaire :

$$(\,f \mid g\,) = \int_a^b w(t)\,f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$$

car l'on dispose de la majoration :

$$\left(\int_{[a,b]} w\,(f-p_n)^2\right)^{1/2} \leqslant \|w\|_\infty\,(b-a)^{1/2}\,\|f-p_n\|_\infty$$

La fonction w est alors appelée une fonction poids.

Exemple Lorsque l'on choisit $[a,b] = [-1,1]$ et $w : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, on obtient les **polynômes de Tchebychev de seconde espèce**.

On peut généraliser le raisonnement précédent avec des fonctions poids qui ne sont pas nécessairement continues sur un segment $[a,b]$. Il suffit que la fonction w soit telle que, pour tout entier n, $t \mapsto w(t)\,t^n$ soit intégrable sur l'intervalle considéré.

Exemple On peut ainsi munir $\mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$ du produit scalaire :

$$(f,g) \mapsto (\,f \mid g\,) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t.$$

et construire une suite totale de polynômes orthogonaux. C'est l'objet de l'exercice 14.8 de la page 829 qui fait notamment apparaître les **polynômes de Tchebychev**.

On peut aussi se placer sur un intervalle non borné.

Exemple Si l'on munit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ : \ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t < \infty \right\}$ du produit scalaire :

$$(f,g) \mapsto (\,f \mid g\,) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

on obtient les **polynômes d'Hermite**.

Les suites de polynômes orthogonaux proposées vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, il est donc possible d'écrire un programme informatique permettant le calcul explicite des coefficients de ces polynômes.
Prenons l'exemple des polynômes de Tchebychev qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Le programme suivant prend en paramètre un entier $n \geqslant 2$ et renvoie une liste $[a_0,\ldots,a_n]$ telle que $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$:

```
def Tcheby(n):
    L0=[1]
    if n == 0: return L0
    L1=[0,1]
    if n == 1: return L1
    for k in range(2,n+1) :
        L=[-L0[0]]
        for i in range(1,k-1) :
            L+=[2*L1[i-1]-L0[i]]
        L+=[0,2*L1[k-1]]
        L0=L1
        L1=L
    return(L)
```

IV Endomorphismes d'un espace euclidien

Dans la suite E est un espace euclidien de dimension n.

1 Endomorphismes symétriques

Définition 6

On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est **symétrique** , si :

$$\forall\,(x,y) \in E^2 \quad (x \mid u\,(y)\,) = (u\,(x) \mid y\,).$$

Proposition 13

L'ensemble des endomorphismes symétriques de E, noté $\mathcal{S}(E)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 14

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Un endomorphisme u est symétrique si, et seulement si, sa matrice dans $\mathcal{B}$ est symétrique.

Démonstration page 820

p.820 **Exercice 11** Soit u et v deux endomorphismes symétriques de E.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $u \circ v$ soit symétrique.

Corollaire 15

L'espace vectoriel $\mathcal{S}(E)$ est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.

L'application Φ : $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$ induit un isomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc :

$$\dim \mathcal{S}(E) = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}.$$ □

Proposition 16

L'endomorphisme induit sur un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme symétrique est aussi symétrique.

Démonstration. La relation $\big(x \mid u(y)\big) = \big(u(x) \mid y\big)$ pour tout $(x, y) \in E^2$ montre que l'endomorphisme v induit par l'endomorphisme u sur le sous-espace stable F vérifie :

$$\forall (x, y) \in F^2 \quad \big(x \mid v(y)\big) = \big(v(x) \mid y\big).$$ □

Proposition 17

Un projecteur p est une projection orthogonale si, et seulement s'il est symétrique

Démonstration page 820

p.820 **Exercice 12** Déterminer les symétries qui sont des endomorphismes symétriques.

p.821 **Exercice 13** Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si :

$$\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

On pourra pour tout couple $(x, y) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$*, considérer les vecteurs* $y + \lambda x$*.*

Proposition 18

Les sous-espaces vectoriels propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.

Démonstration page 821

p.821

Exercice 14

1. Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP' - P'' \end{array}$.

   Montrer que Φ est symétrique pour ce produit scalaire.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Prouver que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ et que l'endomorphisme induit Φ_n est diagonalisable.
   (b) Montrer l'existence d'une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de Φ_n.
4. En déduire que, pour tout entier n, il existe un unique polynôme H_n de coefficient dominant 1 tel que $\Phi(H_n) = nH_n$ et que ce polynôme est de degré n.

L'exercice précédent prouve l'existence d'une base orthonormée de diagonalisation pour l'endomorphisme symétrique Φ_n. Le théorème spectral, que nous énoncerons plus tard, généralise ce résultat à tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.

Dans le cas de l'endomorphisme Φ, on peut expliciter la base orthogonale de diagonalisation $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue dont les éléments sont appelés les polynômes de Hermite. C'est l'objet de l'exercice suivant.

p.822

Exercice 15 Polynômes de Hermite

On considère la base orthogonale constituée de vecteurs propres de Φ, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obtenue à l'exercice précédent.

1. Calculer H_0, H_1, H_2 et H_3.
2. Soit $g : x \mapsto e^{-x^2/2}$.

   Prouver que, pour tout entier k, la fonction $x \mapsto e^{x^2/2} g^{(k)}(x)$ est polynomiale de degré k et de coefficient dominant $(-1)^k$.
3. En déduire que pour tout entier n, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2/2} g^{(n)}(x)$$
4. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|H_n\|^2 = n\,\|H_{n-1}\|^2$.
5. En déduire une base orthonormée de vecteurs propres de Φ puis que, pour tout polynôme P, on a $P = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (\,P \mid H_n\,) \frac{H_n}{n!\sqrt{2\pi}}$.

   On admettra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.

Remarque Comme dans les autres familles de polynômes orthogonaux présentées, on aurait pu prouver que pour tout entier n, H_n est de même parité que n, à racines simples et que l'on a les relations :

$$H_{n+2} = XH_{n+1} - (n+1)H_n,$$
$$H'_{n+1} = (n+1)H_n$$
$$H''_n - XH'_n + nH_n = 0.$$

2 Réduction des endomorphismes symétriques

Pour démontrer le théorème spectral, on va utiliser deux propositions. La première assure qu'un endomorphisme symétrique possède une valeur propre réelle ; la seconde concerne la stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme symétrique. Le théorème spectral en découlera par récurrence.

Proposition 19

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}$.

Principe de démonstration. Considèrer une valeur propre complexe λ ainsi qu'un vecteur propre complexe associé X et calculer ${}^tXA\overline{X}$.

Démonstration page 823

Corollaire 20

Un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension non nulle, possède une valeur propre réelle.

Démonstration. Soit u un endomorphisme symétrique. Alors χ_u possède une racine complexe qui est réelle comme valeur propre de la matrice symétrique réelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée. □

Proposition 21

Soit u un endomorphisme symétrique et F un sous-espace vectoriel de E.

Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Démonstration page 824

Théorème 22 (Théorème spectral)

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. Alors :

- E possède une base orthonormée formée de vecteurs propres de u.
- E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ;

On dit que u est diagonalisable en base orthonormée.

Démonstration page 824

Exemple Les polynômes de Legendre forment une base orthogonale de vecteurs propres de l'endomorphisme symétrique $P \mapsto \left((X^2-1)P'\right)'$.

Corollaire 23

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si, et seulement s'il existe une base orthonormée de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si, et seulement s'il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Démonstration page 824

Dans ces conditions, on dira que u est **orthogonalement diagonalisable** et que A est **orthogonalement semblables**à une matrice diagonale.

Remarques

- Le corollaire précédent fournit une condition suffisante extrêmement simple de diagonalisabilité d'une matrice réelle : il suffit qu'elle soit symétrique. On aura garde de croire que ce résultat reste vrai pour les matrices complexes : la matrice complexe symétrique $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ est nilpotente non nulle. Elle n'est donc pas diagonalisable.
- On cherchera évidemment à diagonaliser un endomorphisme symétrique u dans une base orthonormée. On procédera de la façon suivante.
  1. On déterminera de façon classique le spectre et les sous-espaces propres de l'endomorphisme u.
  2. On déterminera une base orthonormée de chaque sous-espace propre, en utilisant, par exemple, le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. La réunion de ces bases sera une base orthonormée $\mathcal{C}$ de diagonalisation de u.
  3. Si A est la matrice de u dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice P de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$ est une matrice orthogonale telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. La matrice D représente, rappelons-le, la matrice de u dans $\mathcal{C}$. Il faut remarquer pour éviter trop de calculs que, P étant orthogonale, P^{-1} est égale à ${}^tP$.

Exemple En sciences industrielles, la matrice d'inertie d'un solide S :

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\int_S (y^2+z^2)\mathrm{d}m & -\displaystyle\int_S xy\mathrm{d}m & -\displaystyle\int_S xz\mathrm{d}m \\ -\displaystyle\int_S xy\mathrm{d}m & \displaystyle\int_S (x^2+z^2)\mathrm{d}m & -\displaystyle\int_S yz\mathrm{d}m \\ -\displaystyle\int_S xz\mathrm{d}m & -\displaystyle\int_S yz\mathrm{d}m & \displaystyle\int_S (x^2+y^2)\mathrm{d}m \end{pmatrix}$$

est une matrice symétrique. Il existe donc une base orthonormée adaptée au solide dans laquelle elle est diagonale.

p.824

Exercice 16 *(Polytechnique 2015)*

Soit u un endomorphisme symétrique d'un endomorphisme euclidien dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique v tel que $u = v^2$.
2. Montrer que v est unique si l'on impose la condition supplémentaire $\mathrm{sp}(v) \subset \mathbb{R}_+$.

Ce résultat est souvent appelé « lemme de la racine carrée ».

p.824

Exercice 17 *(Polytechnique 2015)*

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tMM$ est symétrique et de valeurs propres positives.
2. Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_{\setminus}(\mathbb{R})$ tel que :

$$M = OS \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sp}\, S \subset \mathbb{R}_+.$$

On utilisera le lemme de la racine carrée (exercice 16).

Cette écriture est appelée décomposition polaire de la matrice M.

3 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Définition 7

Un endomorphisme u est une **isométrie vectorielle**, si :

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

p.825

Exercice 18 Quelles sont les valeurs propres possibles d'une isométrie vectorielle ?

Rappelons quelques propriétés des isométries vues en première année.

Proposition 24

Une isométrie vectorielle est un automorphisme et vérifie :

$$\forall\, (x, y) \in E^2 \quad (u(x) \mid u\,(y)\,) = (x \mid y)\,.$$

Remarque Cette propriété explique pourquoi une isométrie vectorielle est aussi appelée un **automorphisme orthogonal**. Il s'agit en effet d'un automorphisme qui conserve l'orthogonalité, au sens où deux vecteurs orthogonaux ont des images orthogonales.

Proposition 25

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Un endomorphisme u est une isométrie vectorielle si, et seulement s'il transforme $\mathcal{B}$ en une base orthonormée.

Corollaire 26

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Un endomorphisme u est une isométrie vectorielle si, et seulement si, sa matrice dans $\mathcal{B}$ est orthogonale.

Proposition 27

L'endomorphisme induit sur un sous-espace vectoriel stable par une isométrie vectorielle est aussi une isométrie vectorielle.

Pour démontrer le théorème de réduction des isométries vectorielles, on va prouver deux résultats intermédiaires. Le premier est propre aux isométries, le second est plus général et aurait pu être utilisé pour démontrer le théorème spectral.

Proposition 28

Soit u une isométrie vectorielle et F un sous-espace vectoriel de E.

Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Principe de démonstration. Prouver que $u\left(F^\perp\right) \subset u(F)^\perp$ et que $u(F) = F$.

Démonstration page 825

Lemme 29

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie non nulle.

Alors il existe une droite ou un plan stable par u.

Principe de démonstration. Utiliser un facteur irréductible d'un polynôme annulateur de u.

Démonstration page 825

Théorème 30

Soit u un automorphisme orthogonal. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est égale à une diagonale par blocs :

- de taille 1 de la forme (γ) avec $\gamma \in \{-1, 1\}$;
- de taille 2 et de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[.$$

Démonstration page 825

Exemple Si u est une isométrie vectorielle d'un espace euclidien de dimension 3, alors il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \gamma = \det(u) = \pm 1 \quad \text{et} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

En effet, il ne peut y avoir qu'un seul bloc de la forme $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et comme une telle matrice est de déterminant 1, on a $\gamma = \det(u)$.
S'il n'y a pas de bloc de la forme $R(\theta)$, alors il existe un base orthonormale dans laquelle la matrice est diagonale $\mathrm{Diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, avec $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \{1, -1\}^3$. Quitte à permuter les vecteurs de la base, on peut suppose $\gamma_2 = \gamma_3$. Alors $\mathrm{Diag}(\gamma_2, \gamma_3) = R(0)$ ou $\mathrm{Diag}(\gamma_2, \gamma_3) = R(\pi)$ suivant le signe de $\gamma_2 = \gamma_3$.

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 31

Si u est une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3, alors il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Corollaire 32

Si u est une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3, il existe une droite D telle que $u_{|D} = \mathrm{Id}_D$ et $u_{|P}$ soit une rotation, où P est le plan orthogonal à D.

On dit que u est une **rotation d'axe D**.

p.826 **Exercice 19** Discuter de l'unicité de l'axe.

Remarques

- On dit qu'une telle isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3 est une **rotation** d'angle θ.

  L'angle θ de la rotation peut être déterminé, au signe près, en remarquant que :

  $$\mathrm{Tr}(u) = 1 + 2\cos\theta.$$

- Si u est une isométrie vectorielle indirecte d'un espace euclidien de dimension 3, alors il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est :

  $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

  Il existe alors une droite D et un plan P orthogonal à D tels que $u_{|P}$ soit une rotation et $u_{|D} = -\mathrm{Id}_D$.

  Ainsi, u est la composée d'une rotation autour d'une droite D et d'une symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à D.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

1. Soit $f \in F^\perp$. Pour tout $g \in F$, on a $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. En particulier, si l'on considère $g : x \mapsto xf(x)$, alors $\displaystyle\int_0^1 xf(x)^2\,\mathrm{d}x = 0$. Comme la fonction $x \mapsto xf(x)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, on en déduit que :
$$\forall x \in [0,1] \quad xf(x)^2 = 0 \qquad \text{puis que} \qquad \forall x \in]0,1] \quad f(x) = 0.$$
La fonction f étant continue, cela implique qu'elle est nulle.
Réciproquement la fonction nulle appartient à $F^\perp$ donc $F^\perp = \{0\}$.
2. Comme $F^\perp = \{0\}$, on a $F \overset{\perp}{\bigoplus} F^\perp = F \neq E$ et $(F^\perp)^\perp = E \neq F$.

Exercice 2 L'application $(M,N) \mapsto \mathrm{Tr}\left({}^tM\,N\right)$ étant un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le théorème de Riesz prouve l'existence d'une unique matrice B telle que :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(M) = \mathrm{Tr}\left({}^tB\,M\right).$$
Comme $M \mapsto {}^tM$ est bijective, on en déduit le résultat.

Exercice 3

1. Étant donné deux vecteurs a et b, l'existence et l'unicité d'un vecteur $a \wedge b$ tel que $\forall x \in E \quad [a,b,x] = (\,a \wedge b \mid x\,)$ découle du théorème de Riesz.
2. Si l'on note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (a_1,a_2,a_3) (respectivement (b_1,b_2,b_3) les coordonnées) du vecteur a (respectivement b) dans cette base, alors on a :
$$a \wedge b = \sum_{k=1}^{3} (\,a \wedge b \mid e_k\,)e_k = \sum_{k=1}^{3} [a,b,e_k]\,e_k.$$
On retrouve la formule bien connue en physique et en sciences industrielles :
$$a \wedge b \begin{vmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{vmatrix}.$$
Attention : cette formule n'est pas vraie si l'on ne se place pas dans une base orthonormée.
3. On peut trouver une base orthonormale (e_1,e_2,e_3) de E telle que $a \in \mathrm{Vect}(e_1)$ et $b \in \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$: il suffit de prendre un plan P contenant a et b et une base orthonormale (e_1,e_2) de ce plan telle que $e_1 \in \mathrm{Vect}(a)$ si $a \neq 0$. On complète par un vecteur e_3 normé orthogonal à P. Écrivons donc (en identifiant E et $\mathbb{R}^3$ au moyen de cette base) :
$$a = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors facilement :

$$b \wedge c = \begin{pmatrix} b_2\, c_3 \\ -b_1 c_3 \\ b_1\, c_2 - b_2\, c_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad a \wedge (b \wedge c) = \begin{pmatrix} 0 \\ a\, b_2\, c_1 - a\, b_1\, c_2 \\ -a\, b_1 c_3 \end{pmatrix}$$

ce qui donne le résultat $a \wedge (b \wedge c) = (\, a \mid c \,)\, b - (\, a \mid b \,)\, c$ puisque $(\, a \mid b \,) = a\, b_1$ et $(\, a \mid c \,) = a\, c_1$.

Exercice 4 On cherche le projeté orthogonal P du polynôme X^n sur $\mathbb{R}_1[X]$ sous la forme $P = aX + b$. Le polynôme P doit vérifier

$$(\, X^n - P \mid 1 \,) = (\, X^n - P \mid X \,) = 0,$$

ce qui se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} a + 2b &= \dfrac{2}{n+1} \\ 2a + 3b &= \dfrac{6}{n+2} \end{cases}$$

ce qui donne $P = \dfrac{6nX + 2 - 2n}{(n+1)(n+2)}$.

Proposition 8 Soit $x \in E$ et $y \in F$. On a :

$$y - x = y - p_F(x) + p_F(x) - x \qquad \text{avec} \qquad (\, x - p_F(x) \mid y - p_F(x) \,) = 0,$$

et donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|y - p_F(x)\|^2 \geqslant \|x - p_F(x)\|^2.$$

Par conséquent, $d(x, F) \geqslant \|x - p_F(x)\|$ et, comme $p_F(x) \in F$, on a aussi $d(x, F) \leqslant \|x - p_F(x)\|$. D'où l'égalité. De plus :

$$d(x,F) = \|x-y\| \iff \|x-y\|^2 = \|x-p_F(x)\|^2 \iff \|y-p_F(x)\|^2 = 0 \iff y = p_F(x).$$

Exercice 5 On remarque que :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \,\mathrm{d}x = \inf_{P\in\mathbb{R}_1[X]} \|X^2 - P\|^2$$

où $\|\ \|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$:

$$(P, Q) \longmapsto \int_0^1 P(x)\, Q(x)\, \mathrm{d}x$$

Donc :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \big(x^2 - ax - b\big)^2 \,\mathrm{d}x = \|X^2 - P\|^2$$

où P est le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

D'après l'exercice précédent, on a $P = X - \frac{1}{6}$ d'où :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{180}.$$

Corollaire 9 Par projection orthogonale sur le sous-espace F engendré par $(e_1, \dots, e_p)$, on a :

$$x = p_F(x) + g = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)\, e_i + g \quad \text{avec} \quad g \in F^{\perp}.$$

L'égalité de Pythagore fournit :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)^2 + \|g\|^2.$$

Exercice 6 Notons F le sous-espace engendré par $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et, pour tout entier n, F_n le sous-espace engendré par $(e_0, \dots, e_n)$.

Supposons que l'on ait $\sum_{k=0}^{+\infty} (e_k \mid x)^2 = \|x\|^2$.

Soit $\varepsilon > 0$, montrons que $F \cap B(x, \varepsilon)$ est non vide. D'après l'inégalité de Bessel et comme $\|x\|^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (\, e_k \mid x\,)^2$, il existe un entier n tel que :

$$0 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (e_k \mid x)^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Le vecteur $p_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (e_k \mid x)\, e_k$ est la projection orthogonale de x sur le sous-espace vectoriel engendré par $(e_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. Il appartient à F et vérifie, d'après le théorème de Pythagore, l'inégalité :

$$\|x - p_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (e_k \mid x)^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Ainsi $p_n(x) \in F \cap B(x, \varepsilon)$ ce qui prouve $x \in \overline{F}$.

Supposons réciproquement que x soit adhérent à F. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N et un élément $f = \sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k e_k$ de F_N tel que $\|x - f\|^2$ soit inférieur ou égal à ε. Pour tout $n \geqslant N$, $F_N \subset F_n$ donc $f \in F_n$, ce qui entraîne :

$$0 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (e_k \mid x)^2 = d(x, F_n)^2 \leqslant \|x - f\|^2 \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, $\|x\|^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (\, e_k \mid x\,)^2$.

Exercice 7

1. En appliquant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire en posant $Q_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad Q_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\, X^n \mid Q_k\,)}{\|Q_k\|^2}\, Q_k$$

on obtient une base orthogonale telle que, pour tout entier n, on ait $\deg(Q_n) = n$ et Q_n de coefficient dominant 1.

Supposons qu'il en existe une autre notée $\left(\tilde{Q}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons, par récurrence forte que, pour tout entier n, on a $\tilde{Q}_n = Q_n$.

Par hypothèse, $\tilde{Q}_0$ est constant et de coefficient dominant 1 donc $\tilde{Q}_0 = 1 = Q_0$.

Supposons que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \tilde{Q}_k = Q_k.$$

Comme les polynômes Q_n et $\tilde{Q}_n$ sont de degré n et de coefficient dominant 1, le polynôme $\tilde{Q}_n - Q_n$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Vect}(Q_0, \ldots, Q_{n-1})$. De plus :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad (\, Q_n \mid Q_k \,) = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\, \tilde{Q}_n \,\middle|\, Q_k \,\right) = \left(\, \tilde{Q}_n \,\middle|\, \tilde{Q}_k \,\right) = 0$$

donc :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \left(\, \tilde{Q}_n - Q_n \,\middle|\, Q_k \,\right) = 0.$$

Ainsi, $\tilde{Q}_n - Q_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ donc le polynôme $\tilde{Q}_n - Q_n$ est nul.

2. On a $Q_0 = 1$. On cherche Q_1 de la forme $X + a$ de sorte que $(\, Q_1 \mid 1 \,) = 0$ et l'on obtient $Q_1 = X$.

On cherche Q_2 de la forme $X^2 + aX + b$ de sorte que :

$$(\, Q_2 \mid 1 \,) = (\, Q_2 \mid X \,) = 0$$

et l'on obtient $Q_2 = X^2 - \dfrac{1}{3}$.

On cherche Q_3 de la forme $X^3 + aX^2 + bX + c$ de sorte que :

$$(\, Q_3 \mid 1 \,) = (\, Q_3 \mid X \,) = \left(\, Q_3 \,\middle|\, X^2 \,\right) = 0$$

et l'on obtient $Q_3 = X^3 - \dfrac{3}{5}X$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que le polynôme Q_n est de même parité que n, c'est-à-dire que $Q_n(X) = (-1)^n Q_n(-X)$.

Comme Q_n est de degré n, le polynôme $\tilde{Q}_n(X) = (-1)^n Q_n(-X)$ est de degré n et de coefficient dominant 1. Il suffit donc, par unicité, de montrer que $(\tilde{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale, c'est-à-dire que $\tilde{Q}_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a :

$$\int_{-1}^{1} \tilde{Q}_n(t)\, P(t)\, \mathrm{d}t = (-1)^n \int_{-1}^{1} Q_n(-t)\, P(t)\, \mathrm{d}t = (-1)^n \int_{-1}^{1} Q_n(t)\, P(-t)\, \mathrm{d}t = 0,$$

les deux dernières égalités provenant du changement de variable $t \mapsto -t$ et du fait que $P(-X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ est orthogonal à Q_n.

4. Si Q_n ne possède pas n racines simples dans l'intervalle $]-1, 1[$, alors le polynôme $R = \prod_{a\in S} (X - a)$ où S est l'ensemble des racines de Q_n appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$ et d'ordre impair, appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Vect}\,(Q_0, \ldots, Q_{n-1})$. En particulier, on a $(\, Q_n \mid R \,) = 0$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_n(t)\, R(t)\, \mathrm{d}t = 0$.

Or, la fonction $t \mapsto Q_n(t)R(t)$ est continue et de signe constant sur $[-1,1]$. En effet, les racines de Q_nR appartenant à l'intervalle $]-1,1[$ sont de multiplicité paire donc la fonction $t \mapsto Q_n(t)R(t)$ est de signe constant sur $]-1,1[$ puis sur le segment $[-1,1]$ par continuité.

Par conséquent, la fonction $t \mapsto Q_n(t)R(t)$ est nulle sur $[-1,1]$, ce qui implique la nullité du polynôme Q_nR qui est de degré au moins n.

On aboutit donc à une contradiction ; ce qui prouve que le polynôme Q_n possède n racines simples dans l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice 8

1. Le polynôme $Q_{n+2} - XQ_{n+1}$ appartient à $\mathbb{R}_{n+1}[X] = \text{Vect}\,(Q_0,\dots,Q_{n+1})$. De plus :

   $\forall k \in [\![0,n-1]\!] \quad (\,Q_{n+2} - XQ_{n+1} \mid Q_k\,) = -\,(\,XQ_{n+1} \mid Q_k\,) = -\,(\,Q_{n+1} \mid XQ_k\,) = 0$

   car Q_{n+1} est orthogonal à $\text{Vect}\,(Q_0,\dots,Q_n) = \mathbb{R}_n[X]$.

   Comme $Q_{n+2} - XQ_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(\,Q_{n+2} - XQ_{n+1} \mid Q_k\,)}{\|Q_k\|^2} Q_k$, on en déduit que $Q_{n+2} - XQ_{n+1}$ est une combinaison linéaire des polynômes Q_{n+1} et Q_n.

   Pour des raisons de parité, il est donc colinéaire à Q_n, c'est-à-dire que :

   $$Q_{n+2} \in \text{Vect}(XQ_{n+1}, Q_n).$$

2. Soit p et q deux entiers tels que $q < p$. On a, par intégrations par parties :

   $$\left(R_p^{(p)} \,\middle|\, R_q^{(q)}\right) = -\left(R_p^{(p-1)} \,\middle|\, R_q^{(q+1)}\right)$$

   et, de même, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\left(R_p^{(p)} \,\middle|\, R_q^{(q)}\right) = (-1)^k \left(R_p^{(p-k)} \,\middle|\, R_q^{(q+k)}\right)$. En particulier, pour $k = q+1$, on obtient $\left(R_p^{(p)} \,\middle|\, R_q^{(q)}\right) = 0$.

   La famille $\left(R_n^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc orthogonale.

   De plus, pour tout entier n, le polynôme R_n est de degré $2n$ et unitaire donc $R_n^{(n)}$ est de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{(2n)!}{n!}$.

   En particulier, la famille $\left(\dfrac{n!}{(2n)!}R_n^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est échelonnée, il s'agit donc d'une base orthogonale. On conclut à l'aide de l'unicité prouvée à la première question.

3. On a $R_n = (X-1)^n(X+1)^n$ donc la formule de Leibniz donne :

   $$R_n^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left((X-1)^n\right)^{(k)} \left((X+1)^n\right)^{(n-k)}.$$

   Comme 1 est racine d'ordre n de $(X-1)^n$, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, le polynôme $\left((X-1)^n\right)^{(k)}$ s'annule en 1. On en déduit que $R_n^{(n)}(1) = n!\,2^n$ puis que

   $$Q_n(1) = 2^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Pour des raisons de degré et de coefficient dominant, on a $\alpha_n = 1$.
En évaluant la relation $Q_{n+2} = \alpha_n X Q_{n+1} + \beta_n Q_n$ en 1, on obtient :

$$2^{n+2}\frac{((n+2)!)^2}{(2n+4)!} = 2^{n+1}\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} + \beta_n 2^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

soit :

$$\frac{4(n+2)^2(n+1)^2}{(2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} + \beta_n$$

puis :

$$\beta_n = -\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Exercice 9 Le polynôme $\left(\left(1-X^2\right)Q_n'\right)'$ appartient à $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(Q_0,\ldots,Q_n)$.

Montrons que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\left(\left(\left(1-X^2\right)Q_n'\right)' \,\middle|\, Q_k\right) = 0$, ce qui permettra de conclure.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, une intégration par parties donne :

$$\left(\left(\left(1-X^2\right)Q_n'\right)' \,\middle|\, Q_k\right) = -\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)Q_n'(t)\,Q_k'(t)\mathrm{d}t.$$

Une seconde intégration par parties conduit alors à :

$$\begin{aligned}\left(\left(\left(1-X^2\right)Q_n'\right)' \,\middle|\, Q_k\right) &= \int_{-1}^{1} Q_n(t)\,\left(\left(1-t^2\right)Q_k''(t) - 2tQ_k'(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \left(Q_n \,\middle|\, \left(1-X^2\right)Q_k'' - 2XQ_k'\right) = 0\end{aligned}$$

car le polynôme $\left(1-X^2\right)Q_k'' - 2XQ_k'$ appartient à $\mathbb{R}_k[X] = \mathrm{Vect}(Q_0,\ldots,Q_k)$.

Il existe donc un réel λ_n tel que $\left(\left(1-X^2\right)Q_n'\right)' = \lambda_n Q_n$. Le coefficient dominant de $\left(\left(1-X^2\right)Q_n'\right)'$ est égal à $-n(n+1)$. Par conséquent, Q_n est solution de l'équation différentielle :

$$(X^2-1)Q_n'' + 2XQ_n' - n(n+1)Q_n = 0.$$

Exercice 10

1. On a $L_2(X) = \dfrac{3X^2-1}{2}$ et $L_3(X) = \dfrac{5X^3-3X}{2}$.

   Montrons par récurrence double que pour tout entier n, on a $H(n)$: « $L_n(1) = 1$ ».
   Les assertions $H(0)$ et $H(1)$ sont évidentes. Supposons que pour un certain entier n on ait $H(n)$ et $H(n+1)$, alors on a :

   $$(n+2)L_{n+2}(1) - (2n+3)L_{n+1}(1) + (n+1)L_n(1) = 0 = (n+2)L_{n+2}(1) - (2n+3) + n + 1,$$

   ce qui prouve $H(n+2)$.
2. Montrons par récurrence double que pour tout entier n, on a :

   $$P(n) : \text{« } Q_n(X) = \frac{2^n\,(n!)^2}{(2n)!}L_n(X) \text{ ».}$$

Les assertions $P(0)$ et $P(1)$ sont évidentes. Supposons que pour un certain entier n on ait $P(n)$ et $P(n+1)$, alors :

$$\begin{aligned}
Q_{n+2} &= XQ_{n+1} - \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}Q_n \\
&= \frac{2^{n+1}\,((n+1)!)^2}{(2n+2)!}XL_{n+1}(X) - \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}\frac{2^n\,(n!)^2}{(2n)!}L_n(X) \\
&= \frac{2^{n+2}\,((n+2)!)^2}{(2n+4)!}\left(\frac{(2n+3)(2n+4)}{2(n+2)^2}XL_{n+1}(X) - \frac{(2n+2)(2n+4)}{4(n+2)^2}L_n(X)\right) \\
&= \frac{2^{n+2}\,((n+2)!)^2}{(2n+4)!}L_{n+2}(X),
\end{aligned}$$

ce qui prouve $P(n+2)$.

Proposition 14 Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de E et u un endomorphisme de E. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est $M = (\,(\,u(e_j)\mid e_i\,)\,)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Si u est symétrique, alors, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on a $(\,u(e_j)\mid e_i\,) = (\,u(e_i)\mid e_j\,)$ donc M est symétrique.

Réciproquement, supposons M symétrique. Soit x et y dans E ; notons X et Y les matrices colonnes les représentant dans la base $\mathcal{B}$. Comme la base est orthonormée, on a :

$$\big(\,u(x)\;\big|\;y\,\big) = {}^t(M\,X)\,Y = {}^tX\,{}^tM\,Y = {}^tX\,M\,Y = \big(\,x\;\big|\;u(y)\,\big).$$

Exercice 11 Considérons les matrice A et B de u et v dans une base orthonormale. Alors $u\circ v$ est symétrique si, et seulement si, $A\,B$ est symétrique d'après la proposition 14 de la page 807.

Or, ${}^t(A\,B) = {}^tB\,{}^tA = B\,A$. Donc $A\,B$ est symétrique si, et seulement si, A et B commutent, c'est-à-dire si, et seulement si, u et v commutent.

Proposition 17

- Si p est une projection orthogonale, on a pour tout (x,y) :

$$(p(x)\mid y) = \big(p(x)\mid p(y)+y-p(y)\big) = \big(p(x)\mid p(y)\big)$$

puisque $p(x)$ appartient à $\operatorname{Im}p$ et $y-p(y)$ à $\operatorname{Ker}p = (\operatorname{Im}p)^\perp$.

On obtient de même $\big(x\mid p(y)\big) = \big(p(x)\mid p(y)\big)$ d'où $(p(x)\mid y) = \big(x\mid p(y)\big)$ pour tout (x,y), ce qui montre que p est symétrique.

- Si p est un projecteur symétrique, alors pour tout $(x,y)\in\operatorname{Ker}p\times\operatorname{Im}p$, on a :

$$(\,x\mid y\,) = (\,x\mid p(y)\,) = (\,p(x)\mid y\,) = 0.$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}p$ et $\operatorname{Im}p$ sont orthogonaux, ce qui prouve que p est une projection orthogonale.

Exercice 12 Soit s une symétrie de E. L'endomorphisme $p = \dfrac{s+\mathrm{Id}}{2}$ est alors une projection. Comme $\mathcal{S}(E)$ est un espace vectoriel contenant Id, s est un endomorphisme symétrique si, et seulement si, p l'est donc si, et seulement si, s est une symétrie orthogonale.

Exercice 13

- Supposons p orthogonale. Pour tout $x \in E$, on a $\big(x - p(x), p(x)\big) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ donc $\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$. Ainsi, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
- Supposons que pour tout $u \in E$, on ait $\|p(u)\| \leqslant \|u\|$.
  Soit $(x, y) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $p(y + \lambda x) = y$ donc :
  $$\|y\|^2 \leqslant \|y + \lambda x\|^2 = \|y\|^2 + 2\lambda(\, y \mid x\,) + \lambda^2 \|x\|^2.$$
  La fonction polynomiale $\lambda \mapsto \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(\, x \mid y\,)$ est donc positive, ce qui implique, lorsque $\|x\|^2 \neq 0$, que son discriminant est négatif, et conduit à $(\, x \mid y\,) = 0$. Évidemment, x et y sont orthogonaux lorsque $x = 0$.
  Ainsi, $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont orthogonaux. Par conséquent, p est une projection orthogonale.

Proposition 18 Soit x et y deux vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique u associés à des valeurs propres différentes λ et μ. On a alors :
$$\lambda(\, x \mid y\,) = (\, u(x) \mid y\,) = (\, x \mid u(y)\,) = \mu(\, x \mid y\,)$$
donc $(\lambda - \mu)\,(\, x \mid y\,) = 0$, ce qui prouve que les vecteurs x et y sont orthogonaux.

Exercice 14

1. Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, la fonction $t \mapsto P(t)\,Q(t)\,e^{-t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $P(t)\,Q(t)\,e^{-t^2/2} \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc, par critère de Riemann, $t \mapsto P(t)\,Q(t)\,e^{-t^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   Ainsi, l'application $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X]^2$ et elle est clairement bilinéaire symétrique. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
   On a évidemment $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2\,e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ et comme $t \mapsto P(t)^2\,e^{-t^2/2}$ est continue et positive, on en déduit que son intégrale ne peut être nulle que si c'est la fonction nulle. Comme la fonction exponentielle ne s'annule pas, il en découle que P est le polynôme nul.
   Par conséquent, l'application $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$. On a :
   $$(\, \Phi(P) \mid Q\,) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\left(tP'(t) - P''(t)\right) Q(t)\,\mathrm{d}t.$$
   Comme la fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}\,P'(t)\,Q(t)$ est de limite nulle en $\pm\infty$, une intégration par parties donne :
   $$(\, \Phi(P) \mid Q\,) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,P'(t)\,Q'(t)\,\mathrm{d}t,$$
   quantité dans laquelle P et Q jouent un rôle symétrique, ce qui conduit donc à :
   $$(\, \Phi(P) \mid Q\,) = (\, P \mid \Phi(Q)\,).$$
   Par conséquent, Φ est symétrique.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, les polynômes XP' et P'' appartiennent aussi au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ.
   Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\Phi(X^k) = kX^k - k(k-1)X^{k-2}$ donc la matrice de Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure avec $0, 1, \ldots, n$ sur la diagonale. On en déduit que Φ_n possède $n+1$ valeurs propres distinctes ce qui constitue une condition suffisante pour être diagonalisable.
   (b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$, k est valeur propre de Φ_n donc il existe un polynôme P_k tel que $\Phi_n(P_k) = kP_k$.
   D'après la proposition précédente, la famille $\left(\dfrac{P_k}{\|P_k\|}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille orthonormée. Comme elle est de cardinal $n+1$, c'est donc une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de Φ_n.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in E_n(\Phi)$ non nul. Si l'on note d le degré de P et a_P son coefficient dominant, alors les polynômes $\Phi(P)$ et nP ont pour coefficients dominants respectifs da_P et na_P. On en déduit que P est de degré n.
   Ainsi, $E_n(\Phi) \subset \mathbb{R}_n[X]$ donc $E_n(\Phi) = E_n(\Phi_n)$. Comme les espaces propres de Φ_n sont de dimension 1, $E_n(\Phi)$ aussi. Par conséquent, il existe un unique polynôme H_n de coefficient dominant 1 tel que $\Phi(H_n) = nH_n$ et $\deg H_n = n$.

Exercice 15

1. On obtient $H_0 = 1$, $H_1 = X$, $H_2 = X^2 - 1$, $H_3 = X^3 - 3X$.
2. Le résultat est évident pour $k = 0$. Supposons-le vrai pour un certain entier k. Il existe alors un polynôme Q de degré k et de coefficient dominant $(-1)^k$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(k)}(x) = Q(x)e^{-x^2/2}.$$
   Comme g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on en déduit que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(k+1)}(x) = \big(Q'(x) - xQ(x)\big)e^{-x^2/2}.$$
   Le polynôme Q étant de degré k et de coefficient dominant $(-1)^k$, $Q' - XQ$ est de degré $k+1$ et de coefficient dominant $(-1)^{k+1}$, ce qui prouve le résultat au rang $k+1$.
3. D'après la question précédente, il existe un polynôme Q_n de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(n)}(x) = Q_n(x)e^{-x^2/2}.$$
   Il reste à prouver que $\Phi(Q_n) = nQ_n$ pour conclure.
   On a :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(n+1)}(x) = \big(Q_n'(x) - xQ_n(x)\big)e^{-x^2/2}$$
   et
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(n+2)}(x) = \big(Q_n''(x) - 2xQ_n'(x) - Q_n(x) + x^2Q_n(x)\big)e^{-x^2/2}.$$
   Ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad xQ_n'(x) - Q_n''(x) = e^{x^2/2}\left(-g^{(n)}(x) - xg^{(n+1)}(x) - g^{(n+2)}(x)\right).$$

Or, $g^{(n+2)}$ est égale à la dérivée $(n+1)$-ième de $x \mapsto -xe^{-x^2/2}$ donc, en utilisant la formule de Leibniz, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(n+2)}(x) = -xg^{(n+1)}(x) - (n+1)g^{(n)}(x).$$

On a donc $\Phi(Q_n) = nQ_n$ puis $(-1)^n Q_n = H_n$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} \quad H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2/2} g^{(n)}(x)$.

4. Pour tout entier n, la fonction $t \mapsto g^{(n)}(x)g^{(n-1)}(x)e^{x^2/2}$ est de limite nulle en $\pm\infty$ car elle est de la forme $x \mapsto Q(x)e^{-x^2/2}$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.
Ainsi, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\|H_n\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t^2}\, g^{(n)}(t)\, g^{(n)}(t)\, e^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} g^{(n-1)}(t)\, e^{t^2/2} \left(tg^{(n)}(t) + g^{(n+1)}(t)\right) \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or, pour tout réel t, on a :

$$tg^{(n)}(t) + g^{(n+1)}(t) = -ng^{(n-1)}(t)$$

donc $\|H_n\|^2 = n\,\|H_{n-1}\|^2$.

5. On en déduit que pour tout entier n, $\|H_n\|^2 = n!\|H_0\|^2 = n!\sqrt{2\pi}$ et donc que la famille $\left(\dfrac{H_n}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}[X]$.

Si P est un polynôme de degré d, alors, la famille $\left(\dfrac{H_n}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}}\right)_{0\leqslant n\leqslant d}$ étant une base orthonormée de $\mathbb{R}_d[X]$, on a $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{d} (\,P \mid H_n\,)\frac{H_n}{n!\sqrt{2\pi}}$.

Pour tout entier n, si $n > d$, alors le polynôme H_n appartient à l'orthogonal de $\mathbb{R}_d[X] = \mathrm{Vect}\,(H_k)_{0\leqslant k\leqslant d}$ donc $(\,P \mid H_n\,) = 0$.

Par conséquent, on peut écrire $P = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (\,P \mid H_n\,)\frac{H_n}{n!\sqrt{2\pi}}$ (il s'agit d'une somme finie).

Proposition 19 Soit λ une valeur propre complexe de A ainsi qu'un vecteur propre complexe associé $X = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$.

On a donc $AX = \lambda X$ et $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$ car A est à coefficients réels. Ainsi :

$${}^tXA\overline{X} = \overline{\lambda}\,{}^tX\overline{X} = \overline{\lambda}\sum_{k=1}^{n} |x_i|^2.$$

De plus, comme ${}^tXA\overline{X} \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{C})$, ${}^tXA\overline{X} = {}^t\left({}^tXA\overline{X}\right) = {}^t\overline{X}\,{}^tAX$ La symétrie de A donne alors ${}^tXA\overline{X} = {}^t\overline{X}AX = \lambda\,{}^t\overline{X}X = \overline{\lambda}\sum\limits_{k=1}^{n} |x_i|^2$ donc $\left(\lambda - \overline{\lambda}\right)\sum\limits_{k=1}^{n} |x_i|^2 = 0$.

Par conséquent, λ est réel.

Proposition 21 Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par un endomorphisme u symétrique et $x \in F^\perp$. Pour tout $y \in F$, on a $u(y) \in F$ car F est stable par u, donc :

$$(\,u(x) \mid y\,) = (\,x \mid u(y)\,) = 0.$$

Par conséquent, $u(x) \in F^\perp$ et donc $F^\perp$ est stable par u.

Théorème 22 On va démontrer l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres. Le second point en découlera grâce à la proposition 18 de la page 807.

La somme G des sous-espaces propres de u est stable par u. Son supplémentaire orthogonal $G^\perp$ l'est aussi d'après la proposition 21 de la page 809.

L'endomorphisme u' induit par u sur $G^\perp$ est évidemment symétrique. Si $G^\perp$ n'est pas réduit à $\{0\}$, il possède une valeur propre ce qui contredit $G \cap G^\perp = \{0\}$ puisque tout vecteur propre de u' appartient aussi à G. Il vient alors $G = E$.

Corollaire 23

- Si u est symétrique, alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres d'après la propriété précédente. La matrice de u dans cette base est alors diagonale.
  La réciproque découle de la proposition 14 de la page 807
- Découle de la proposition 14 de la page 807.

Exercice 16

1. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = P^{-1}DP$.
   Par hypothèse, $\mathrm{sp}\, A \subset \mathbb{R}_+$ donc les coefficients diagonaux de D, notés $d_1, \ldots, d_n$ sont positifs. On considère alors la matrice diagonale D' de coefficients diagonaux $\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n}$ de sorte que $D'^2 = D$. On a ainsi $A = B^2$ avec $B = P^{-1}D'P$. Comme P est orthogonale, $B = {}^tP\,D'\,P$ est symétrique et il suffit de considérer l'endomorphisme v tel que $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ pour conclure.
2. L'endomorphisme symétrique trouvé à la question précédente convient. Montrons que c'est le seul. Pour cela considérons un endomorphisme symétrique w vérifiant $w^2 = u$ et $\mathrm{sp}\, w \subset \mathbb{R}_+$.
   Puisque w commute avec u, cet endomorphisme laisse stable les sous-espaces propres de u. On va prouver que pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}\, u$, l'endomorphisme w_λ induit par w sur $E_\lambda(u)$ est égal à $\sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}_{E_\lambda(u)}$, ce qui prouvera que v et w coïncident sur chaque espace propre de u et donc sur E.
   Comme w_λ est symétrique et de valeurs propres positives, il existe une base de $E_\lambda(u)$ dans laquelle sa matrice D_λ est diagonale, à coefficients positifs et vérifie $D_\lambda^2 = \lambda I_{n_\lambda}$ où $n_\lambda = \dim E_\lambda(u)$. On en déduit que $D_\lambda = \sqrt{\lambda} I_{n_\lambda}$, ce qui prouve $w_\lambda = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}_{E_\lambda(u)}$ et conclut la démonstration de l'unicité.

Exercice 17

1. On a ${}^t\big({}^tMM\big) = {}^tM\,{}^t\big({}^tM\big) = {}^tMM$ donc ${}^tMM$ est symétrique.
   Soit λ une valeur propre de ${}^tMM$ et X un vecteur propre associé.
   On a ${}^tMMX = \lambda X$ donc ${}^tX\,{}^tMMX = \lambda\,{}^tXX$ c'est-à-dire $\|MX\|^2 = \lambda\|X\|^2$ donc $\lambda \geqslant 0$.

2. • Supposons qu'un tel couple existe.
On a alors ${}^tM = {}^tS{}^tO = SO^{-1}$ donc ${}^tMM = S^2$. Ainsi, S est unique d'après le lemme de la racine carrée. Comme $\operatorname{Ker} S \subset \operatorname{Ker} M$, S est inversible et l'on obtient $O = MS^{-1}$. Ainsi, un tel couple est unique s'il existe.
• Vérifions que le couple obtenu par analyse convient c'est-à-dire que $O = MS^{-1}$ est orthogonale. On a :
$$ {}^tOO = {}^tS^{-1}{}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$$
donc le couple obtenu convient.

Exercice 18 Soit u une isométrie et x un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Comme $\|u(x)\| = \|x\| = |\lambda|\|x\|$ et comme x est non nul, on a $|\lambda| = 1$. Les valeurs propres possibles d'une isométrie vectorielle sont donc ± 1.

Proposition 28
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par une isométrie u et $x \in F^\perp$. Pour tout $y \in F$, on a :
$$(\, u(x) \mid u(y)\,) = (\, x \mid y\,) = 0,$$
ce qui prouve que $u(x) \in u(F)^\perp$.

Comme u est un automorphisme et comme F est de dimension finie, on a $\dim u(F) = \dim F$. La stabilité de F par u implique donc $u(F) = F$.

Par conséquent, $u(x) \in F^\perp$ donc $F^\perp$ est stable par u.

Lemme 29 Comme u possède un polynôme annulateur, il existe des polynômes unitaires $P_1, \ldots, P_r$ de degré 1 ou 2 tels que $(P_1 \ldots P_r)(u) = 0 = P_1(u) \circ \ldots \circ P_r(u) = 0$.

Parmi les endomorphismes $P_1(u), \ldots, P_r(u)$ l'un d'entre eux est donc non injectif. Sans perdre de généralité, on suppose qu'il s'agit de P_1 et l'on considère $x \in \operatorname{Ker} P_1(u)$ non nul.

Comme P_1 est de degré inférieur ou égal à 2, on a $u^2(x) \in \operatorname{Vect}(x, u(x))$. Par conséquent, $\operatorname{Vect}(x, u(x))$ est une droite ou un plan stable par u.

Théorème 30 On va démontrer le résultat par récurrence sur la dimension de E.

Si E est de dimension 1, alors le résultat est trivial.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat vrai pour toute isométrie d'un espace euclidien de dimension inférieure ou égale à $n-1$ et considérons u une isométrie d'un espace euclidien de dimension n.

• Supposons que u possède une valeur propre réelle λ.

Soit e_1 un vecteur propre associé à λ. On a alors $E = \mathbb{R}e_1 \overset{\perp}{\bigoplus} (\mathbb{R}e_1)^\perp$. Comme $\mathbb{R}e_1$ est stable par l'isométrie u, son orthogonal aussi.

Par hypothèse de récurrence, comme l'endomorphisme induit par u sur $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est une isométrie, il existe une base orthonormée de $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ dans laquelle sa matrice est de la forme annoncée. Il suffit de la compléter avec $\frac{e_1}{\|e_1\|}$ pour obtenir une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme annoncée. En effet, u étant une isométrie, $\lambda = \pm 1$.

- Supposons que u ne possède pas de valeur propre réelle. Alors u possède un plan stable P d'après le lemme précédent. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de P et $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur P. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est alors une matrice de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ sans valeur propre réelle.

  Or, d'après les résultats de première année, les matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ sont de la forme $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Comme u ne possède pas de valeur propre réelle, $\tilde{u}$ non plus et ce n'est donc pas une symétrie. On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $R(\theta)$ avec $\sin\theta \neq 0$.

  Par hypothèse de récurrence, comme l'endomorphisme induit par u sur $P^\perp$ est une isométrie, il existe une base orthonormée de $P^\perp$ dans laquelle sa matrice est de la forme annoncée. Il suffit de la compléter avec une base orthonormée de P pour obtenir une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme annoncée.

Exercice 19 Il n'y a pas nécessairement unicité. Par exemple, si $u = \mathrm{Id}_E$, alors toute droite convient.

Soit u une rotation d'axe D. Supposons qu'il n'y ait un autre axe D'. Alors u induit l'identité sur le plan $D + D'$. Ce plan contient alors un vecteur non nul du plan $D^\perp$, ce qui prouve que la rotation sur $D^\perp$ est l'identité. Donc $u = \mathrm{Id}_E$.

En conclusion il y a unicité de l'axe si, et seulement si, $u \neq \mathrm{Id}_E$.

S'entraîner et approfondir

14.1 Soit E un espace euclidien orienté de dimension n.

Pour tout $(e_1, \dots, e_{n-1}) \in E^{n-1}$, on note $e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1}$, et l'on appelle **produit vectoriel** des vecteurs $e_1, \dots, e_{n-1}$, l'unique vecteur de E tel que :

$$\forall x \in E \quad [e_1, \dots, e_{n-1}, x] = (\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} \mid x \,)$$

1. Justifier la définition du produit vectoriel.
2. Montrer que le produit vectoriel $e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1}$ est nul si, et seulement si, la famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est liée.
3. Montrer que si la famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est orthonormale, alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale directe.

14.2 Soit E un espace vectoriel préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que s'il existe un sous-espace G tel que $E = F \overset{\perp}{\bigoplus} G$, alors $G = F^\perp$.
2. Prouver que si $E = F \overset{\perp}{\bigoplus} G$, alors $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

14.3 Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u^* de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (\, u(x) \mid y \,) = (\, x \mid u^*(y) \,).$$

L'endomorphisme u^* est appelé l'**adjoint** de u.

2. Déterminer $(u^*)^*$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u^* pour que u soit symétrique.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u^* pour que u soit une isométrie.
5. Montrer que $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$ et $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.
6. Soit F un sous-espace vectoriel stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u^*. Retrouver la stabilité de $F^\perp$ par u lorsque u est symétrique (*cf.* la proposition 21 de la page 809) ou orthogonal (*cf.* la proposition 28 de la page 812).

14.4 Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   (*i*) $\forall x \in E \quad (\, x \mid u(x) \,) = 0$;
   (*ii*) $\forall (x, y) \in E^2 \quad (\, u(x) \mid y \,) = -(\, x \mid u(y) \,)$.
2. Montrer que deux quelconques des trois propositions suivantes impliquent la troisième :
   (*i*) u est une isométrie ;
   (*ii*) $u^2 = -\operatorname{Id}$;
   (*iii*) $\forall x \in E \quad (\, x \mid u(x) \,) = 0$.

14.5 Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E.

1. On suppose que $\operatorname{Tr} u = 0$.
   Montrer qu'il existe un vecteur unitaire ε_1 tel que $(\, u(\varepsilon_1) \mid \varepsilon_1 \,) = 0$.
2. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   (*i*) il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a ses éléments diagonaux nuls,
   (*ii*) $\operatorname{Tr}(u) = 0$.

14.6 Sur un espace vectoriel réel E de dimension finie, on considère une norme $\| \ \|$ vérifiant l'égalité du parallélogramme c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

On veut montrer qu'il s'agit d'une norme euclidienne.

On définit l'application φ : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]. \end{array}$

1. Soit $(x_1, x_2, y) \in E^3$. Montrer que $\varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y) = \varphi(x_1 + x_2, y)$.
   On pourra écrire $x_i + y = \left(x_i + \frac{y}{2}\right) + \frac{y}{2}$ *et* $x_i = \left(x_i + \frac{y}{2}\right) - \frac{y}{2}$.
2. Soit $(x, y) \in E^2$ et f : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \varphi(\lambda x, y) - \lambda\varphi(x, y). \end{array}$
   (a) Montrer que $\forall\, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \quad f(\lambda_1 + \lambda_2) = f(\lambda_1) + f(\lambda_2)$.
   (b) En déduire que $\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = 0$.
   (c) Que peut-on en déduire sur la fonction f ?
3. Conclure.

14.7 1. Soit deux familles $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ de p vecteurs d'un espace euclidien E de dimension n, vérifiant :

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2 \quad (\, x_i \mid x_j \,) = (\, y_i \mid y_j \,).$$

Montrer qu'il existe une isométrie u de E vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad u(x_i) = y_i.$$

2. En déduire que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifient ${}^tA\,A = {}^tB\,B$ si, et seulement s'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = Q\,A$.

14.8 1. Montrer que l'application :

$$(f,g)\mapsto (\,f\mid g\,)=\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$.

2. Montrer que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$ pour la norme associée.
3. Montrer qu'il existe une unique base orthogonale $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout entier n, on ait $\deg(Q_n)=n$ et Q_n de coefficient dominant 1.
4. Déterminer Q_0, Q_1, Q_2 et Q_3.
5. Étudier la parité de Q_n en fonction de n.
6. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, Q_n admet n racines distinctes dans $]-1,1[$.
7. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
   (a) Prouver que, pour tout $x\in[-1,1]$, on a $Q_n(x)=\dfrac{1}{2^{n-1}}\cos\left(n\operatorname{Arccos}(x)\right)$.
   (b) En déduire $Q_n(1)$ puis que $Q_{n+2}=XQ_{n+1}-\dfrac{1}{4}Q_n$.
8. Montrer que pour tout entier n, le polynôme $(X^2-1)Q_n+XQ_n$ est colinéaire à Q_n. En déduire que Q_n est solution de l'équation différentielle :

$$(X^2-1)Q_n''+XQ_n'-n^2Q_n=0.$$

9. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $g_n : x\mapsto(1-x^2)^{n-1/2}$.
   (a) Montrer que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, il existe un polynôme R_k de degré k tel que :

$$\forall x\in\,]-1,1[\quad g_n^{(k)}=(1-x^2)^{n-k-1/2}R_k(x).$$

   (b) Prouver que, pour tout polynôme P, on a :

$$(\,R_n\mid P\,)=(-1)^n\int_{-1}^{1}g_n(t)\,P^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (c) En déduire que, pour tout $x\in\,]-1,1[$ on a :

$$Q_n(x)=(-1)^n\frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\sqrt{1-x^2}\,g_n^{(n)}(x).$$

14.9 Soit E un espace euclidien. Montrer que le groupe $\mathcal{O}(E)$ des automorphismes orthogonaux est engendré par l'ensemble des réflexions, c'est-à-dire des symétries orthogonales hyperplanes.

14.10 *(Polytechnique 2015)*

Soit $A\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(X_1,\dots,X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $(AX_1,\dots,AX_n)$ soit une base orthogonale.

14.11 *(Polytechnique 2015)*

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $q_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & {}^tXAX. \end{array}$

Montrer l'équivalence entre :

(i) $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \quad q_A(X) > 0$;

(ii) toute valeur propre de A est strictement positive ;

(iii) $q_A^{-1}(\{1\})$ est un compact non vide.

14.12 *(Polytechnique 2015)*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.

1. Soit X un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^q$. Déterminer la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(X)$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{pq}$ non nul, où $X_1, \ldots, X_q$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^p$.
   (a) Donner une écriture par blocs $M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & & M_{1,q} \\ & \ddots & \\ M_{q,1} & & M_{q,q} \end{pmatrix}$ de la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(X)$.
   (b) Montrer que $S = \sum_{k=1}^{q} M_{k,k}$ est de trace 1 et que, pour tout $Y \in \mathbb{R}^p$, ${}^tYSY \geqslant 0$.
3. Réciproquement, soit $S \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ de trace 1 telle que, pour tout $Y \in \mathbb{R}^p$, on ait ${}^tYSY \geqslant 0$.
   Montrer qu'il existe une matrice $M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & & M_{1,q} \\ & \ddots & \\ M_{q,1} & & M_{q,q} \end{pmatrix}$ représentant une projection orthogonale sur un espace de dimension 1 et telle que $S = \sum_{k=1}^{q} M_{k,k}$.

14.13 Soit E un espace préhilbertien réel.

Une famille de vecteurs $(x_0, \ldots, x_p)$ est **obtusangle** si :

$$\forall (i,j) \in [\![0,p]\!]^2 \quad i \neq j \Rightarrow (\, x_i \mid x_j \,) < 0.$$

1. On suppose que la famille $(x_0, \ldots, x_p)$ est obtusangle. Prouver que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.
2. En déduire que si E est euclidien de dimension n, alors toute famille obtusangle a au plus $n+1$ vecteurs.

Solution des exercices

14.1 1. Pour tout $(e_1,\dots,e_{n-1})\in E^{n-1}$, l'application $x\mapsto[e_1,\dots,e_{n-1},x]$ est une forme linéaire sur E. Le théorème de représentation de Riesz implique donc l'existence d'un unique vecteur $e_1\wedge\cdots\wedge e_{n-1}$ de E tel que :

$$\forall x\in E\quad [e_1,\dots,e_{n-1},x]=(\,e_1\wedge\cdots\wedge e_{n-1}\mid x\,).$$

2. Si la famille $(e_1,\dots,e_{n-1})$ est liée, alors, pour tout $x\in E$, il en est de même de la famille $(e_1,\dots,e_{n-1},x)$ et donc :

$$[e_1,\dots,e_{n-1},x]=0=(\,0_E\mid x\,).$$

Par unicité du produit vectoriel, on en déduit que $e_1\wedge\cdots\wedge e_{n-1}$ est nul.

Si la famille $(e_1,\dots,e_{n-1})$ est libre, alors, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_n\in E$ tel que $(e_1,\dots,e_n)$ soit une base. On a alors :

$$(\,e_1\wedge\cdots\wedge e_{n-1}\mid e_n\,)=[e_1,\dots,e_{n-1},e_n]\neq 0$$

donc $e_1\wedge\cdots\wedge e_{n-1}$ est non nul.

3. Supposons la famille $(e_1,\dots,e_{n-1})$ orthonormale et posons $e_n=e_1\wedge\cdots\wedge e_{n-1}$. Comme on a :

$$\forall k\in[\![1,n-1]\!]\quad (\,e_n\mid e_k\,)=[e_1,\dots,e_{n-1},e_k]=0,$$

la famille $(e_1,\dots,e_{n-1},e_n)$ est orthogonale. De plus :

$$[e_1,\dots,e_{n-1},e_n]=(\,e_n\mid e_n\,)=\|e_n\|^2\geqslant 0$$

donc la famille $(e_1,\dots,e_{n-1},e_n)$ est une base directe. Ainsi, $\left(e_1,\dots,e_{n-1},\dfrac{e_n}{\|e_n\|}\right)$ est une base orthonormale directe. Par conséquent :

$$1=\left[e_1,\dots,e_{n-1},\frac{e_n}{\|e_n\|}\right]=\left(e_n\,\middle|\,\frac{e_n}{\|e_n\|}\right)=\|e_n\|$$

donc la famille $(e_1,\dots,e_{n-1},e_n)$ est une base orthonormale directe.

14.2 1. Supposons que $E=F\overset{\perp}{\bigoplus}G$. On a alors $G\subset F^\perp$. Réciproquement, pour tout $x\in F^\perp$, en écrivant $x=f+g$ avec $f\in F$ et $g\in G$, le vecteur $f=x-g$ appartient à F et $F^\perp$ et il est donc nul, ce qui implique que $F^\perp\subset G$.

2. Puisque $E=F\overset{\perp}{\bigoplus}F^\perp=F^\perp\overset{\perp}{\bigoplus}F$, la question précédente donne $\left(F^\perp\right)^\perp=F$.

14.3 1. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E.

- Si un tel endomorphisme u^* existe, alors :

$$\forall y\in E\quad u^*(y)=\sum_{i=1}^{n}(\,u^*(y)\mid e_i\,)e_i=\sum_{i=1}^{n}(\,u(e_i)\mid y\,)e_i.$$

Il y a donc unicité (sous réserve d'existence).

- Soit $u^* : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\, u(e_i) \mid y \,) e_i . \end{array}$

  L'application u^* est alors un endomorphisme de E et :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in E^2 \quad (\, x \mid u^*(y) \,) &= \left(\sum_{i=1}^{n} (\, x \mid e_i \,) e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} (\, u(e_j) \mid y \,) e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\, x \mid e_i \,)(\, u(e_i) \mid y \,) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\, x \mid e_i \,) u(e_i) \,\middle|\, y \right) \\ &= (\, u(x) \mid y \,). \end{aligned}$$

  Donc u^* convient.

2. Par définition de u^*, on a pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$\left(x \,\middle|\, (u^*)^* (y) \right) = (\, u^*(x) \mid y \,) = (\, y \mid u^*(x) \,) = (\, u(y) \mid x \,) = (\, x \mid u(y) \,).$$

   L'unicité de $(u^*)^*$ donne alors $(u^*)^* = u$.

3. Par définition, et du fait de l'unicité de l'adjoint, u est symétrique si, et seulement si, $u^* = u$.

4. Si u est une isométrie, alors u est bijectif et :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (\, u(x) \mid y \,) = (\, u(x) \mid u\left(u^{-1}(y)\right) \,) = (\, x \mid u^{-1}(y) \,)$$

   donc $u^* = u^{-1}$. De même, si u est bijectif et si $u^* = u^{-1}$, alors :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (\, u(x) \mid u(y) \,) = (\, x \mid u^* \left(u(y)\right) \,) = (\, x \mid y \,)$$

   donc u est une isométrie.

   Par conséquent, u est une isométrie si, et seulement si, u est bijectif et si $u^* = u^{-1}$.

5. - Soit $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker} u^* \iff u^*(x) = 0 &\iff \forall y \in E \quad (\, u^*(x) \mid y \,) = 0 \\ &\iff \forall y \in E \quad (\, x \mid u(y) \,) = 0 \\ &\iff x \in (\operatorname{Im} u)^{\perp} . \end{aligned}$$

     Ainsi, $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$.

   - Comme $(u^*)^* = u$, en appliquant le résultat précédent à u^*, on obtient l'égalité $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u^*)^{\perp}$. On en déduit $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ car E est de dimension finie.

6. Soit F un sous-espace vectoriel stable par u. Soit $y \in F^{\perp}$. On a, pour tout $x \in F$:

$$\left(u^*(y) \,\middle|\, x \right) = \left(y \,\middle|\, u(x) \right) = 0 \qquad \text{puisque } u(x) \in F \text{ par stabilité de } F .$$

   Donc $u^*(y) \in F^{\perp}$. Cela prouve que $F^{\perp}$ est stable par u^*.

   - Si u est symétrique, on en déduit directement la stabilité de $F^{\perp}$ par $u = u^*$.
   - Supposons u orthogonal.

     Alors $F^{\perp}$ est stable par $u^* = u^{-1}$, donc $F^{\perp} \subset u(F^{\perp})$. Comme u est un isomorphisme, on en déduit $F^{\perp} = u(F^{\perp})$ par égalité des dimensions, donc $F^{\perp}$ est stable par u.

14.4 1. Il est clair que $(ii) \Rightarrow (i)$.

Réciproquement, supposons (i) et montrons (ii). Soit $(x, y) \in E^2$, on a :

$$(\, x + y \mid u(x+y)\,) = 0 = (\, x \mid u(x)\,) + (\, y \mid u(y)\,) + (\, x \mid u(y)\,) + (\, y \mid u(x)\,)$$

donc $(\, u(x) \mid y\,) = -(\, x \mid u(y)\,)$.

2. • Supposons (i) et (ii) et montrons (iii).
Soit $x \in E$. On a :

$$(\, x \mid u(x)\,) = (\, u(x) \mid u^2(x)\,) = (\, u(x) \mid -x\,) = -(\, x \mid u(x)\,)$$

donc $(\, x \mid u(x)\,) = 0$.

• Supposons (ii) et (iii) et montrons (i).
Soit $(x, y) \in E^2$. En utilisant la question précédente, on a :

$$(\, x \mid y\,) = (\, -u^2(x) \mid y\,) = (\, u(x) \mid u(y)\,)$$

donc u est une isométrie.

• Supposons (i) et (iii) et montrons (ii).
Soit $(x, y) \in E^2$. En utilisant la question précédente, on a :

$$(\, u^2(x) \mid y\,) = -(\, u(x) \mid u(y)\,) = -(\, x \mid y\,) = (\, -x \mid y\,)$$

donc $(\, u^2(x) + x \mid y\,) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in E$, on a $u^2(x) + x = 0$ *i.e.* $u^2 = -\operatorname{Id}$.

14.5 1. Soit A la matrice (symétrique) de u dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. On a :

$$0 = \operatorname{Tr} u = \sum_{i=1}^{n} (\, u(e_i) \mid e_i\,).$$

- S'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $(\, u(e_i) \mid e_i\,) = 0$, alors il suffit de prendre $\varepsilon_1 = e_i$.
- Sinon, il existe $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $(\, u(e_i) \mid e_i\,) < 0 < (\, u(e_j) \mid e_j\,)$.
Pour tout réel t, on pose $e(t) = (1-t)e_i + te_j$. La fonction $t \mapsto (\, u(e(t)) \mid e(t)\,)$ est alors polynomiale, négative en 0 et positive en 1. Il existe donc un réel t_0 tel que le vecteur $e(t_0)$ vérifie $(\, u(e(t_0)) \mid e(t_0)\,) = 0$. Les vecteurs e_i et e_j étant non colinéaires, le vecteur $e(t_0)$ est non nul. Par conséquent, le vecteur $\varepsilon_1 = \frac{e(t_0)}{\|e(t_0)\|}$ convient.

2. L'une des implications est triviale. Montrons l'autre par récurrence sur la dimension n de E. C'est clair pour $n = 1$. Soit $n \geqslant 2$. Supposons le résultat acquis pour $n-1$ et démontrons-le pour n.

D'après la question précédente, il existe un vecteur unitaire ε_1 tel que $(\, u(\varepsilon_1) \mid \varepsilon_1\,) = 0$. Complétons ε_1 en une base orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. La matrice de u dans cette base est alors :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ * & & & \\ \vdots & & B & \\ * & & & \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad B = ((\, u(\varepsilon_j) \mid \varepsilon_i\,))_{2 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Comme u est de trace nulle, la matrice B l'est également. D'après l'hypothèse de récurrence il existe donc une matrice $P \in \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPBP$ ait tous ses éléments diagonaux nuls. Il suffit alors de poser $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ pour avoir :

$$Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad {}^tQAQ \text{ de diagonale nulle.}$$

Il existe donc une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a ses éléments diagonaux nuls.

14.6 1. On pose :

$$A = 4\big(\varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)\big) = \|x_1 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2 + \|x_2 + y\|^2 - \|x_2 - y\|^2.$$

L'égalité du parallélogramme donne :

$$\|x_1 + y\|^2 + \|x_1\|^2 = 2\left\|x_1 + \frac{y}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{y}{2}\right\|^2$$

et :

$$\|x_1 - y\|^2 + \|x_1\|^2 = 2\left\|x_1 - \frac{y}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{y}{2}\right\|^2.$$

Le résultat est similaire pour x_2, et l'on obtient donc :

$$A = 2\left\|x_1 + \frac{y}{2}\right\|^2 + 2\left\|x_2 + \frac{y}{2}\right\|^2 - 2\left\|x_1 - \frac{y}{2}\right\|^2 - 2\left\|x_2 - \frac{y}{2}\right\|^2.$$

En utilisant à nouveau l'égalité du parallélogramme, cela donne alors :

$$A = \|x_1 + x_2 + y\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 - \left(\|x_1 + x_2 - y\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2\right)$$

et donc $\varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y) = \varphi(x_1 + x_2, y)$.

2. (a) La question précédente donne directement le résultat.

   (b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre alors facilement que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(n\,\lambda) = n\,f(\lambda)$.
   Comme $f(1) = 0$, on a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = 0$.
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) + f(-n) = f(0) = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n) = 0$.
   Soit $r \in \mathbb{Q}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$, ce qui donne, d'après ce qui précède :

$$0 = f(p) = f(q\,r) = q\,f(r) \qquad \text{donc} \qquad f(r) = 0.$$

   (c) La fonction f est continue car la norme est continue (comme E est de dimension finie, on peut choisir n'importe quelle norme, en particulier celle qui nous est donnée). Ainsi, par densité des rationnels, on en déduit que f est la fonction nulle.

3. Soit $(x, y) \in E^2$. On a $\|x - y\| = \|y - x\|$ donc $\varphi(y, x) = \varphi(x, y)$.
   - Les questions précédentes prouvent la linéarité à gauche de φ et donc sa bilinéarité par symétrie.

- Enfin, pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x,x) = \|x\|^2 \geqslant 0$ avec donc égalité si, et seulement si, $x = 0$.

Ainsi, φ est un produit scalaire sur E et la norme associée à φ est $\|\ \|$; ce qui prouve que $\|\ \|$ est une norme euclidienne sur E.

14.7 1. Soit V l'espace vectoriel engendré par les $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et d sa dimension. Quitte à réindexer, on peut supposer que la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ est une base de V.

- Montrons que $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ est une base de W, l'espace vectoriel engendré par les $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$.
  Pour tout $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant d} \in \mathbb{R}^d$, on a :
  $$\left\|\sum_{i=1}^{d}\lambda_i y_i\right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_i y_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{d}\lambda_i y_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{d}\lambda_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{d}\lambda_i x_i\right) = \left\|\sum_{i=1}^{d}\lambda_i x_i\right\|^2$$
  donc la liberté de la famille $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ découle de celle de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$.
  On démontre exactement de la même manière qu'une égalité de la forme $x_i - \sum_{k=1}^{d}\lambda_k x_k = 0$ implique $y_i - \sum_{k=1}^{d}\lambda_k y_k = 0$; ce qui prouve que la famille $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ engendre W. Il s'agit donc d'une base de W qui est donc de dimension d.
- Considérons une base orthonormée $(x'_{d+1},\dots,x'_n)$ de $V^\perp$, une base orthonormée $(y'_{d+1},\dots,y'_n)$ de $W^\perp$ ainsi que l'endomorphisme u défini par :
  $$\forall i \in [\![1,d]\!] \quad u(x_i) = y_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![d+1,n]\!] \quad u(x'_i) = y'_i.$$
  On a pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $u(x_i) = y_i$ car si $x_i = \sum_{k=1}^{d}\lambda_k x_k$ alors $y_i = \sum_{k=1}^{d}\lambda_k y_k$.
  On a déjà prouvé que pour tout $x \in V$, $\|u(x)\| = \|x\|$. Par définition, u transforme une base orthonormée de $V^\perp$ en une base orthonormée donc, pour tout $x' \in V^\perp$, on a $\|u(x')\| = \|x'\|$.
  Pour tout $(x,x') \in V \times V^\perp$, on a $(u(x),u(x')) \in W \times W^\perp$ donc, en utilisant le théorème de Pythagore, on a :
  $$\|u(x+x')\|^2 = \|u(x)\|^2 + \|u(x')\|^2 = \|x\|^2 + \|x'\|^2 = \|x+x'\|^2,$$
  ce qui prouve que u est une isométrie.

2. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ les vecteurs colonnes de A et B. L'égalité ${}^tAA = {}^tBB$ donne, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $(\,x_i \mid x_j\,) = (\,y_i \mid y_j\,)$ où $(\ \mid\ )$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. On peut donc appliquer le résultat ci-dessus. La matrice Q de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vérifie l'égalité $B = QA$ qui traduit les égalités $y_i = u(x_i)$. Une telle matrice est orthogonale comme matrice d'une isométrie.
   Inversement, une égalité de la forme $B = QA$ avec ${}^tQQ = I_n$ donne :
   $${}^tB\,B = {}^tA\,{}^tQ\,Q\,A = {}^tA\,A.$$

14.8 1. Commençons par prouver que l'application est bien définie.

Soit $(f,g) \in \mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)^2$. La fonction $h : t \mapsto \frac{f(t)\,g(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. De plus, au voisinage de 1, on a $\frac{f(t)\,g(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$, le critère de Riemann implique donc que h est intégrable sur $[0,1[$. De même on montre qu'elle l'est sur $]-1,0]$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ existe.

Il est clair que l'application $(f,g) \mapsto (\,f \mid g\,)$ est bilinéaire symétrique et que $(\,f \mid f\,) \geqslant 0$ pour tout $f \in \mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$.

Soit $f \in \mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$ telle que $(\,f \mid f\,) = 0$. La fonction $h : t \mapsto \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$, positive et d'intégrale nulle, donc nulle sur $]-1,1[$. Par conséquent, la fonction f est nulle sur $]-1,1[$ puis sur $[-1,1]$ par continuité.

Ainsi, l'application $(f,g) \mapsto (\,f \mid g\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$. D'après le théorème de densité de Weierstrass, il existe une suite de fonctions polynomiales $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur le segment $[-1,1]$. La majoration :

$$\|f-p_n\| = \left(\int_{-1}^{1} \frac{(f-p_n)^2}{\sqrt{1-t^2}}\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)^{1/2} \|f-p_n\|_\infty$$

prouve que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f au sens de la norme euclidienne associée au produit scalaire $(f,g) \mapsto (\,f \mid g\,) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$.

3. En appliquant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire en posant $Q_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad Q_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\,X^n \mid Q_k\,)}{\|Q_k\|^2}\,Q_k$$

on obtient une base orthogonale telle que, pour tout entier n, on ait $\deg(Q_n) = n$ et Q_n de coefficient dominant 1.

Supposons qu'il en existe une autre notée $\big(\tilde{Q}_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons, par récurrence forte que, pour tout entier n, on a $\tilde{Q}_n = Q_n$.

Par hypothèse, $\tilde{Q}_0$ est constant et de coefficient dominant 1 donc $\tilde{Q}_0 = 1 = Q_0$.

Supposons que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!] \quad \tilde{Q}_k = Q_k.$$

Par hypothèse, le polynôme $\tilde{Q}_n - Q_n$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Vect}(Q_0,\dots,Q_{n-1})$. De plus :

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!] \quad \big(\,\tilde{Q}_n - Q_n \,\big|\, Q_k\,\big) = \big(\,\tilde{Q}_n \,\big|\, Q_k\,\big) = \big(\,\tilde{Q}_n \,\big|\, \tilde{Q}_k\,\big) = 0$$

donc le polynôme $\tilde{Q}_n - Q_n$ est nul.

4. On a $Q_0 = 1$. On cherche Q_1 de la forme $X + a$ de sorte que $(\,Q_1 \mid 1\,) = 0$. Comme :
$$(\,Q_1 \mid 1\,) = \left[-\sqrt{1-t^2} - a \operatorname{Arccos} t\right]_{-1}^{1} = \pi a = 0,$$
l'on obtient $Q_1 = X$.
On cherche Q_2 de la forme $X^2 + aX + b$ de sorte que $(\,Q_2 \mid 1\,) = (\,Q_2 \mid X\,) = 0$. Or :
$$(\,Q_2 \mid 1\,) = \int_{-1}^{1} \frac{t^2 + at + b}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \pi a$$
et le changement de variable $t = \cos u$ donne :
$$\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_{0}^{\pi} \frac{\cos^2 u}{\sqrt{1-\cos^2 u}} \sin u \,\mathrm{d}u = \int_{0}^{\pi} \frac{1+\cos(2u)}{2}\mathrm{d}u = \pi/2$$
donc $a = -\dfrac{1}{2}$. Comme $(\,Q_2 \mid X\,) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^3 + at^2 + bt}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{at^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$, l'on obtient $Q_2 = X^2 - \dfrac{1}{2}$.
On cherche Q_3 de la forme $X^3 + aX^2 + bX + c$ de sorte que :
$$(\,Q_3 \mid 1\,) = (\,Q_3 \mid X\,) = \left(\,Q_3 \,\middle|\, X^2\,\right) = 0.$$
Or, $(\,Q_3 \mid 1\,) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^3 + at^2 + bt + c}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}a + \pi c$ donc $a = -2c$.
D'autre part, $(\,Q_3 \mid X\,) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^4 + at^3 + bt^2 + ct}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \frac{\pi}{2}b$ et le changement de variable $t = \cos u$ donne :
$$\int_{-1}^{1} \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_{0}^{\pi} \frac{\cos^4 u}{\sqrt{1-\cos^2 u}} \sin u \,\mathrm{d}u = \int_{0}^{\pi} \frac{3 + 4\cos(2u) + \cos(4u)}{8}\mathrm{d}u = \frac{3\pi}{8}$$
donc $b = -\dfrac{3}{4}$.
Enfin, $\left(\,Q_3 \,\middle|\, X^2\,\right) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^5 + at^4 + bt^3 + ct^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{8}a + \frac{\pi}{2}c$ donc $a = c = 0$.
Ainsi $Q_3 = X^3 - \dfrac{3}{4}X$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que le polynôme Q_n est de même parité que n, c'est-à-dire que $Q_n(X) = (-1)^n Q_n(-X)$.
Comme Q_n est de degré n, le polynôme $\tilde{Q}_n(X) = (-1)^n Q_n(-X)$ est de degré n et de coefficient dominant 1. Il suffit donc, par unicité, de montrer que $(\tilde{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale, c'est-à-dire que $\tilde{Q}_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a :
$$\int_{-1}^{1} \frac{\tilde{Q}_n(t)\,P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{Q_n(-t)\,P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{Q_n(t)\,P(-t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 0,$$

les deux dernières égalités provenant du changement de variable $t \mapsto -t$ et du fait que $P(-X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ est orthogonal à Q_n.

6. Si Q_n ne possède pas n racines simples dans l'intervalle $]-1,1[$, alors le polynôme $R = \prod_{a \in S} (X-a)$ où S est l'ensemble des racines de Q_n appartenant à l'intervalle $]-1,1[$ et d'ordre impair, appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Vect}\,(Q_0, \dots, Q_{n-1})$. En particulier, on a $(Q_n \mid R) = 0$ c'est-à-dire $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{Q_n(t)\,R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = 0$.

   Or, la fonction $t \mapsto \frac{Q_n(t)\,R(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et de signe constant $]-1,1[$. En effet, les racines de Q_nR appartenant à l'intervalle $]-1,1[$ sont de multiplicité paire donc la fonction $t \mapsto Q_n(t)R(t)$ est de signe constant sur $]-1,1[$. Par conséquent, le polynôme Q_nR possède une infinité de racines ; il est donc nul. Comme il est de degré supérieur à n, on aboutit à une contradiction ; ce qui prouve que le polynôme Q_n possède n racines simples dans l'intervalle $]-1,1[$.

7. (a) Commençons par prouver que la fonction $f_n : x \mapsto \cos(n\,\text{Arccos}(x))$ est polynomiale.
   Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \text{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right)\\ &= \text{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta)\cos^{n-k}(\theta)\right)\\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}(-1)^p \sin^{2p}(\theta)\cos^{n-2p}(\theta)\\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}(-1)^p \left(1-\cos^2\theta\right)^p \cos^{n-2p}(\theta).\end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $x \in [-1,1]$, on a :

$$f_n(x) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}(-1)^p \left(1-x^2\right)^p x^{n-2p}.$$

   Par conséquent, f_n est une fonction polynomiale. Pour tout entier p inférieur ou égal à $\lfloor n/2\rfloor$, la fonction $x \mapsto \binom{n}{2p}(-1)^p\left(1-x^2\right)^p x^{n-2p}$ est polynomiale de degré n et de coefficient dominant $\binom{n}{2p}$. Montrons que $\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p} = 2^{n-1}$.
   Pour cela, on pose :

$$S_1 = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}.$$

   On a $S_1 + S_2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ et $-S_1 + S_2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = 0$

(car $n > 0$). Par suite, f_n est une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
Il reste à montrer que les fonctions f_k sont orthogonales ce qui permettra de conclure grâce à l'unicité.
Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$(f_p \mid f_q) = \int_{-1}^{1} \frac{\cos\big(p \operatorname{Arccos}(x)\big) \cos\big(q \operatorname{Arccos}(x)\big)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$

et en effectuant le changement de variable $x = \cos u$, on obtient :

$$(f_p \mid f_q) = \int_0^{\pi} \frac{\cos(pu)\cos(qu)}{\sqrt{\sin^2 u}} \sin u \,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \cos(pu)\cos(qu)\,\mathrm{d}u.$$

La formule trigonométrique :

$$2\cos(pu)\cos(qu) = \cos\big((p+q)u\big) + \cos\big((p-q)u\big)$$

conduit alors à $(f_p \mid f_q) = 0$ si $p \neq q$.
Par suite, on a prouvé que, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$Q_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos\big(n \operatorname{Arccos}(x)\big).$$

(b) On a $Q_n(1) = \dfrac{1}{2^{n-1}} \cos(n \operatorname{Arccos}(1)) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
Le polynôme $Q_{n+2} - X\,Q_{n+1}$ appartient à $\mathbb{R}_{n+1}[X] = \operatorname{Vect}(Q_0, \ldots, Q_{n+1})$.
De plus :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad (Q_{n+2} - XQ_{n+1} \mid Q_k) = -(Q_{n+1} \mid XQ_k) = 0$$

car Q_{n+1} est orthogonal à $\operatorname{Vect}(Q_0, \ldots, Q_n) = \mathbb{R}_n[X]$.
On en déduit que $Q_{n+2} - XQ_{n+1}$ est une combinaison linéaire des polynômes Q_{n+1} et Q_n. Pour des raisons de parité, il est donc colinéaire à Q_n. Il existe donc un réel λ_n tel que $Q_{n+2} = XQ_{n+1} + \lambda_n Q_n$. En évaluant cette relation en 1, on obtient $\dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2^n} + \lambda_n \dfrac{1}{2^{n-1}}$ donc $\lambda_n = -\dfrac{1}{4}$.

8. Le polynôme $(X^2-1)Q_n'' + XQ_n'$ appartient à $\mathbb{R}_n[X] = \operatorname{Vect}(Q_0, \ldots, Q_n)$.
Montrons que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\big((X^2-1)Q_n'' + XQ_n' \,\big|\, Q_k\big) = 0$, ce qui permettra de conclure.

Pour tout polynôme R, la fonction $t \mapsto \dfrac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{R(t)}{\sqrt{1+t}\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $]-1, 1[$, ce qui justifie toutes les intégrations par parties qui suivent.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\big((X^2-1)Q_n'' \,\big|\, Q_k\big) &= -\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, Q_n''(t)\, Q_k(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} Q_n'(t) \left(\sqrt{1-t^2}\, Q_k'(t) - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} Q_k(t)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} Q_n'(t) \sqrt{1-t^2}\, Q_k'(t)\,\mathrm{d}t - (XQ_n' \mid Q_k).
\end{aligned}$$

Or, une autre intégration par parties donne :

$$\int_{-1}^{1} Q_n'(t)\sqrt{1-t^2}\,Q_k'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} Q_n(t)\left(\sqrt{1-t^2}\,Q_k''(t) - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}Q_k'(t)\right)$$
$$= \left(\,Q_n \,\middle|\, (X^2-1)Q_k'' + XQ_k'\,\right).$$

Cette dernière quantité est nulle car le polynôme $(X^2-1)Q_k'' + XQ_k'$ appartient à $\mathbb{R}_k[X] = \mathrm{Vect}(Q_0,\dots,Q_k)$.

Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\left(\,(X^2-1)Q_n'' + XQ_n' \,\middle|\, Q_k\,\right) = 0$.

Comme $(X^2-1)Q_n''+XQ_n'$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, cela assure l'existence d'un réel λ_n tel que $(X^2-1)Q_n''+XQ_n' = \lambda_n Q_n$. Le coefficient dominant de $(X^2-1)Q_n''+XQ_n'$ est égal à n^2. Par conséquent, Q_n est solution de l'équation différentielle :

$$(X^2-1)Q_n'' + XQ_n' - n^2 Q_n = 0.$$

9. (a) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $H(k)$ l'assertion :

« il existe un polynôme $R_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\deg R_k = k \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-1,1[\quad g_n^{(k)} = (1-x^2)^{n-k-\frac{1}{2}} R_k(x). \text{ »}$$

- L'assertion $H(0)$ est vraie car il suffit de prendre $R_0 = 1$.
- Supposons $H(k)$ vraie pour un certain $k \in [\![0, n-1]\!]$.
  Comme g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

  $$g_n^{(k+1)}(x) = (1-x^2)^{n-k-\frac{1}{2}} R_k'(x) - 2\left(n-k-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{n-k-1-\frac{1}{2}} x R_k(x).$$

  Il suffit donc de poser $R_{k+1} = (1-X^2)R_k' - (2n-2k-1)XR_k$.
  Si l'on note a_k le coefficient dominant de R_k, alors R_{k+1} est de degré inférieur ou égal à $k+1$ et le coefficient devant X^{k+1} vaut $-(2n-k-1)a_k \neq 0$.

On a donc montré $H(k)$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

(b) Soit P un polynôme. On a :

$$(\,R_n \mid P\,) = \int_{-1}^{1} g_n^{(n)}(t)\,P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in]-1,1[$, on a $g_n^{(n-1)}(t)\,P(t) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}} R_{n-1}(t)\,P(t)$ donc la fonction $t \mapsto g_n^{(n-1)}(t)\,P(t)$ se prolonge par continuité par zéro en 1 et -1. Une intégration par parties mène alors à :

$$(\,R_n \mid P\,) = -\int_{-1}^{1} g_n^{(n-1)}(t)\,P'(t)\,\mathrm{d}t.$$

En réitérant le raisonnement, on arrive à :

$$(\,R_n \mid P\,) = (-1)^n \int_{-1}^{1} g_n(t)\,P^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme R_n est de degré n donc, d'après ce qui précède, orthogonal à $R_0,\dots,R_{n-1}$. Cela prouve que la famille $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. Si l'on note a_n le coefficient dominant de R_n, on a alors $Q_n = \dfrac{1}{a_n} R_n$.

Comme on a prouvé que pour tout k, $a_{k+1} = -(2n-k-1)a_k$, on a :

$$a_n = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} (2n-k) = (-1)^n \frac{(2n-1)!}{(n-1)!}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$ on a $Q_n(x) = (-1)^n \dfrac{(n-1)!}{(2n-1)!} \sqrt{1-x^2}\, g_n^{(n)}(x)$.

14.9 Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. D'après le théorème 30 de la page 812, il existe un base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice U de u est diagonale par blocs :

- de taille 1 de la forme (γ) avec $\gamma \in \{-1, 1\}$;
- de taille 2 et de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la matrice diagonale D_i dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 sauf celui d'indice i égal à -1, est la matrice dans $\mathcal{B}$ d'une réflexion (réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal au i-ème vecteur). En multipliant U à droite par de telles matrices D_i, on peut changer en son opposée la deuxième colonne de tous les blocs de taille 2, et l'on obtient ainsi une matrice V diagonale par blocs :

- de taille 1 de la forme (γ) avec $\gamma \in \{-1, 1\}$;
- de taille 2 et de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Cette matrice est symétrique et orthogonale, donc c'est la matrice dans $\mathcal{B}$ d'une isométrie v symétrique. Il existe donc un base orthonormale $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de v est une matrice diagonale (v est symétrique), avec des élément diagonaux sont tous égaux à ± 1 (v est une isométrie). Une telle matrice est évidemment un produit de matrices D_i, donc v est une composée de réflexions. Or, par construction, v est la composée de u par des réflexions de matrices D_i dans la base $\mathcal{B}$, donc u est la composée de v par des réflexions.

Finalement, u est bien une composée de réflexions.

14.10 La matrice ${}^tAA$ est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormée.

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de diagonalisation de ${}^tAA$.

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a ${}^t(AX_i)AX_j = {}^tX_i {}^tAAX_j$. Comme il existe un réel λ_j tel que ${}^tAAX_j = \lambda_j X_j$, on en déduit que si $i \neq j$, alors :

$${}^t(AX_i)AX_j = {}^tX_i\,(\lambda_j X_j) = \lambda_j {}^tX_i X_j = 0$$

car la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ est orthogonale.

Enfin, comme image d'une base par une matrice inversible, la famille $(AX_1, \ldots, AX_n)$ est une base

14.11 La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans un base orthonormale. Notons $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres et $(E_1, \dots, E_n)$ une base orthonormale telle que $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad A\,E_i = \lambda_i\,E_i$.

Soit $X = \sum_{i=1}^{n} x_i\,E_i \in \mathbb{R}^n$. On a $A\,X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,x_i\,E_i$ et donc $q_A(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,x_i^2$. On en déduit :

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant q_A(X) \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \qquad (*)$$

En particulier, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $q_A(X) \geqslant \lambda_1 \|X\|^2$, et il y a égalité lorsque $X = E_1 \neq 0$.

- La minoration précédente prouve l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ et le cas d'égalité la réciproque $(i) \Rightarrow (ii)$.
- Supposons (ii) et montrons (iii).

  Comme q_A est continue (fonction polynomiale), $q_A^{-1}(\{1\})$ est un fermé.

  D'autre part, pour tout $X \in q_A^{-1}\big(\{1\}\big)$, on a :

  $$1 = q_A(X) \geqslant \lambda_1 \|X\|^2.$$

  Puisque $\lambda_1 > 0$, on en déduit que $q_A^{-1}\big(\{1\}\big)$ est borné par $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$.

  Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, on en déduit que $q_A^{-1}(\{1\})$ est compact.
- Montrons $(iii) \Rightarrow (i)$ par contraposition. Supposons $\lambda_1 \leqslant 0$.
  - Si $\lambda_n \leqslant 0$, l'encadrement $(*)$ montre que $q_A^{-1}\big(\{1\}\big)$ est vide.
  - Sinon, considérons le vecteur $X = x_1\,E_1 + x_n\,E_n$, avec $(x_1, x_n) \in \mathbb{R}^2$. On a $q_A(X) = \lambda_1\,x_1^2 + \lambda_n\,x_n^2$ et donc :

    $$q_A(X) = 1 \iff x_n^2 = \frac{1 - \lambda_1\,x_1^2}{\lambda_n}.$$

    Pour $k \in \mathbb{N}$, les vecteurs $k\,E_1 + \sqrt{\dfrac{1 - \lambda_1\,k^2}{\lambda_n}}\,E_n$ (bien définis puisque l'on a supposé $\lambda_1 \leqslant 0 < \lambda_n$) constituent une suite de $q_A^{-1}\big(\{1\}\big)$, non bornée car leurs composantes suivant E_1 forment une suite non bornée.
    Donc $q_A^{-1}\big(\{1\}\big)$ est non compact.

14.12 1. Comme X est unitaire, la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(X)$ d'un vecteur Y est $(X \mid Y)\,X$. Or :

$$(X \mid Y)\,X = X\big((X \mid Y)I_1\big) = X\big({}^tXY)\,I_1\big) = X\,({}^tXY) = (X\,{}^tX)\,Y.$$

Donc la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(X)$ est $X\,{}^tX$.

2. (a) L'écriture par blocs de la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(X)$ est $M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & & M_{1,q} \\ & \ddots & \\ M_{q,1} & & M_{q,q} \end{pmatrix}$ où :

$$\forall (i,j) \in [\![1,q]\!]^2 \quad M_{i,j} = \frac{1}{\|X\|^2} X_i {}^t X_j$$

(on applique la question précédente à $\frac{X}{\|X\|}$).

(b) On a $\mathrm{Tr}\,(S) = \sum_{k=1}^{q} \mathrm{Tr}\, M_{k,k} = \frac{1}{\|X\|^2} \sum_{k=1}^{q} \mathrm{Tr}\left(X_k {}^t X_k\right) = \frac{1}{\|X\|^2} \sum_{k=1}^{q} \mathrm{Tr}\left({}^t X_k X_k\right)$.

Or, pour tout $k \in [\![1,q]\!]$, ${}^t X_k X_k$ est une matrice carrée de taille 1 dont l'unique coefficient est $\|X_k\|^2$ donc $\sum_{k=1}^{q} M_{k,k}$ est de trace 1.

De plus, pour tout $k \in [\![1,q]\!]$, $M_{k,k} = \frac{1}{\|X\|^2} X_k {}^t X_k$ est symétrique et vérifie :

$$\forall Y \in \mathbb{R}^p \quad {}^t Y M_{k,k} Y = \frac{1}{\|X\|^2} {}^t\left({}^t X_k Y\right) {}^t X_k Y = \frac{1}{\|X\|^2} \|{}^t X_k Y\|^2 \geqslant 0.$$

Par conséquent, pour tout $Y \in \mathbb{R}^p$, ${}^t Y S Y \geqslant 0$.

3. Comme S est symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ et une matrice orthogonale P telles que $S = P D {}^t P$.

Notons q le rang de S. Quitte à réordonner les valeurs propres de S, on peut supposer $\lambda_{q+1} = \cdots = \lambda_p = 0$. Notons $Y_1, \ldots, Y_q$ les q premières colonnes de P. On a alors, en notant $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$:

$$S = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k P E_{k,k} {}^t P = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k Y_k {}^t Y_k.$$

Pour tout $k \in [\![1,q]\!]$, si V_k est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ_k, alors $\lambda_k \|V_k\|^2 = {}^t V_k S V_k \geqslant 0$ donc λ_k est positif.

On peut donc poser $X_k = \sqrt{\lambda_k}\, Y_k$, de telle sorte que :

$$S = \sum_{k=1}^{q} X_k {}^t X_k.$$

Par propriété de la trace, pour tout k, on a $\mathrm{Tr}(X_k {}^t X_k) = \mathrm{Tr}({}^t X_k X_k) = \|X_k\|^2$, donc :

$$\sum_{k=1}^{q} \|X_k\|^2 = \mathrm{Tr}(S) = 1. \qquad (*)$$

Posons $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{pq}$. L'égalité $(*)$ montre que X est normé. La matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(X)$ répond donc à la question.

14.13 1. Supposons la famille $(x_1, \dots, x_p)$ liée.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$.

Par produit scalaire avec x_0, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (x_0 \mid x_i) = 0$$

et comme tous les $(x_0 \mid x_i)$ sont strictement négatifs, on en déduit que les λ_i ne peuvent pas être tout se même signe. Posons alors :

$$I = \big\{ i \in [\![1, p]\!] \;\big|\; \lambda_i > 0 \big\} \qquad \text{et} \qquad J = \big\{ i \in [\![1, p]\!] \;\big|\; \lambda_i < 0 \big\}.$$

Ce sont deux ensembles non vides et l'on a :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = - \sum_{j \in J} \lambda_j x_j.$$

Notons x ce vecteur. Alors :

$$\|x\|^2 = - \left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \;\middle|\; \sum_{j \in J} \lambda_j x_j \right) = - \sum_{(i,j) \in I \times J} \underbrace{\lambda_i \lambda_j}_{<0} \underbrace{(x_i \mid x_j)}_{<0}$$

et donc $\|x\|^2 < 0$ puisque $I \times J$ est non vide. C'est contradictoire, donc la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

2. On en déduit que pour tout famille obtusangle $(x_0, \dots, x_p)$ de l'espace vectoriel E de dimension n, on a $p \leqslant n$, d'où le résultat.

Chapitre 15 : Espaces probabilisés

I Espaces probabilisés 846
1 Espaces probabilisables 846
2 Probabilité 849
3 Probabilité sur un univers au plus dénombrable . . 854
II Probabilités conditionnelles 855
1 Définition 855
2 Formules liées aux probabilités conditionnelles . . 856
3 Indépendance des événements 857
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 861
Exercices 873

Espaces probabilisés 15

En première année, ont été étudiés les espaces probabilisés finis. Les concepts fondamentaux des probabilités (univers, événements, probabilité, variables aléatoires), qui sont les mêmes que dans le cas fini, vont être définis dans des espaces probabilisés quelconques. L'axiomatisation du calcul des probabilités qui est ici présentée est due principalement au mathématicien russe Andreï Kolmogorov (*Fondements de la théorie des probabilités*, 1933).

I Espaces probabilisés

1 Espaces probabilisables

Univers et événement

- Comme dans le cours de première année, il s'agit de modéliser une expérience aléatoire. On associe à une telle expérience un ensemble qui contient tous les résultats possibles de l'expérience, appelé **univers**. L'univers n'est plus supposé fini.

Exemples

1. On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile. On s'intéresse au nombre de lancers nécessaires. L'univers que l'on peut associer à cette expérience est $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, car *a priori* il n'est pas exclu que l'on n'obtienne jamais pile.
2. On veut modéliser l'expérience consistant à lancer une pièce de monnaie une infinité de fois. L'ensemble des résultats de l'expérience peut être représenté par l'ensemble $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ des suites à valeurs dans $\{0,1\}$, où 1 représente pile et 0 face ; le terme d'indice n de la suite est le résultat du n-ième lancer. Cet ensemble n'est pas dénombrable (*cf.* exercice 7 de la page 452).

   Il est nécessaire de faire appel à un tel modèle quand le nombre de lancers effectués n'est pas fixé *a priori* : par exemple si on lance la pièce tant que la différence entre le nombre de piles et de faces est inférieure à 2.

- À une propriété que peut vérifier un résultat de l'expérience, on associe une partie de l'univers Ω que l'on appelle un événement. Dans le cas fini, on avait considéré que toute partie de Ω représentait un événement. On verra que dans le cas où Ω est dénombrable, on peut encore prendre $\mathcal{P}(\Omega)$ comme ensemble des événements.

  Dans les où Ω est infini et non dénombrable, ce choix conduit à des difficultés mathématiques dans la définition d'une probabilité qu'on ne surmonte qu'en restreignant l'ensemble des événements, qui sera alors une partie stricte de $\mathcal{P}(\Omega)$.

  Cela dit, l'ensemble des événements ne peut pas être une partie quelconque de $\mathcal{P}(\Omega)$.

  * L'ensemble Ω doit être un événement (l'événement certain).
  * Si A est un événement, alors $\overline{A}$, complémentaire de A dans Ω, doit être un événement (événement contraire).
  * Si A et B sont des événements, alors $A \cup B$ et $A \cap B$ doivent être des événements.
  * On impose une autre condition qui peut sembler moins naturelle : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un événement. En effet, la stabilité par réunion finie risque d'être insuffisante. Si l'on cherche par exemple à modéliser le jeu de pile ou face infini et qu'on considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'événement A_n : « le n-ième tirage donne pile », on souhaitera s'intéresser à des événements comme « on obtient au moins un pile dans la suite des tirages » qui est $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

- Enfin, une probabilité est, comme dans le cas d'un univers fini, une application qui à un événement associe un réel appartenant à $[0,1]$. Elle sera donc définie sur une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$. On imposera une propriété d'additivité plus riche que dans les univers finis.

Tribu

Définition 1

Soit Ω un ensemble non vide. On appelle **tribu** sur Ω tout sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que :

- Ω appartient à $\mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que, pour tout élément A de $\mathcal{A}$, $\overline{A}$ appartient à $\mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable, c'est-à-dire, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

Remarque Au lieu de tribu, on dit aussi σ-algèbre, d'où la notation $\mathcal{A}$ adoptée par le programme.

Définition 2

Un **espace probabilisable** est un couple $(\Omega, \mathcal{A})$, où Ω est un ensemble quelconque non vide et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω.
L'ensemble Ω est appelé **l'univers** et un élément de $\mathcal{A}$ est appelé un **événement**.

Exemples

1. Pour tout ensemble non vide Ω, l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω.
2. Pour tout ensemble non vide de Ω et toute partie A de Ω, distincte de $\varnothing$ et de Ω, l'ensemble $\{\Omega, A, \bar{A}, \varnothing\}$ est une tribu sur Ω.

p.861

Exercice 1 Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$.

1. Montrer qu'il existe des tribus sur Ω contenant $\mathcal{F}$ et que l'intersection de toutes ces tribus est une encore une tribu, que l'on note $\sigma(\mathcal{F})$.
2. Montrer que $\sigma(\mathcal{F})$ est la plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{F}$.

La tribu $\sigma(\mathcal{F})$ est appelée **tribu engendrée** par $\mathcal{F}$.

Remarque Par exemple, si A est une partie de Ω, non vide et distincte de Ω, la tribu engendrée par $\{A\}$ est $\{\Omega, A, \bar{A}, \varnothing\}$.

p.861

Exercice 2 Montrer que si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition d'un ensemble Ω, avec I au plus dénombrable, alors la tribu engendrée par $\{A_i\,;\ i \in I\}$ est l'ensemble $\mathcal{A}$ des $\bigcup_{i\in J} A_i$, où J est une partie quelconque de I.

Opérations sur les événements

Proposition 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Alors :

- $\varnothing$ appartient à $\mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable, c'est-à-dire que, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ est stable par réunion et intersection finie, c'est-à-dire que, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $A_1, \ldots, A_n$ sont des éléments de $\mathcal{A}$, alors $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ et $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ appartiennent à $\mathcal{A}$;
- pour tous éléments A et B de $\mathcal{A}$, $A \setminus B$ appartient à $\mathcal{A}$.

Démonstration page 862

Remarque On emploie le même vocabulaire que dans les espaces probabilisés finis. En particulier, deux événements A et B tels que $A \cap B = \varnothing$ sont dits incompatibles.

p.862

Exercice 3 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Montrer que l'ensemble B des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité d'événements A_n et l'ensemble C des éléments de Ω qui appartiennent à tous les événements A_n sauf un nombre fini sont des événements, en les exprimant à l'aide des symboles $\cup$ et $\cap$.

Systèmes complets d'événements

Définition 3

On appelle **système complet d'événements** d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ toute famille au plus dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements telle que :

- pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de I, $A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.

Exemples

1. Pour tout événement A de Ω d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, la famille $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.
2. Pour tout ensemble Ω au plus dénombrable, muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$, la famille $(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$ formée des événements élémentaires est un système complet d'événements.

2 Probabilité

Dans le cas d'un univers fini, on a défini une probabilité comme une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et additive, c'est-à-dire vérifiant :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B),$$

pour tout couple d'événements incompatibles (A, B). Dans le cas où Ω est infini, on impose une condition d'additivité plus forte.

Définitions

Définition 4

On appelle **probabilité** sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$ vérifiant :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements **deux à deux incompatibles**, la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge et :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A)$ est appelée **la probabilité de l'événement A**.

Remarques

- La seconde propriété est appelée **σ-additivité**.
- Il résulte de la définition que les événements sont les parties de Ω qui ont une probabilité.

Définition 5

Un **espace probabilisé** est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Propriétés

Théorème 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On a alors :

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$;
2. pour toute famille finie $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ d'événements deux à deux incompatibles :
$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$
En particulier, pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \ ;$$
3. pour tout événement A :
$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) \ ;$$
4. pour tout couple (A, B) d'événements vérifiant $A \subset B$:
$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$$
et ainsi :
$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B) \ ;$$
l'application $\mathbb{P}$ est donc croissante ;
5. pour tout couple (A, B) d'événements :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Démonstration page 862

Remarque La σ-additivité peut se formuler ainsi, en intégrant le cas d'un nombre fini d'événements : si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille au plus dénombrable d'événements deux à deux incompatibles, la famille $(\mathbb{P}(A_i))_{i \in I}$ est som-

mable et :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

En effet la sommabilité de la suite de réels positifs $(\mathbb{P}(A_i))_{i\in\mathbb{N}}$ équivaut à la convergence de la série $\sum \mathbb{P}(A_i)$.

p.863

Exercice 4 On suppose que Ω est fini.

Montrer qu'une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$ si, et seulement si, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et, pour tous événements A et B incompatibles :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Remarque Une probabilité sur un univers fini Ω telle que nous l'avons définie en première année apparaît donc comme un cas particulier de la définition donnée pour un espace probabilisable quelconque, la tribu des événements étant $\mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 6

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Tout événement de probabilité nulle est dit **négligeable**.
- Tout événement de probabilité 1 est dit **presque sûr** ou **presque certain**.
- Toute propriété vérifiée sur un ensemble de probabilité 1 est dite **presque sûre**.

Propriétés des systèmes complets d'événements

Proposition 3

Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors :

- la famille $\mathbb{P}(A_i)$ est sommable et sa somme vaut 1 ;
- pour tout événement B, la famille $\mathbb{P}(B \cap A_i)$ est sommable et sa somme vaut $\mathbb{P}(B)$.

Démonstration page 863

La propriété suivante est une conséquence très forte de la σ-additivité.

Théorème 4 (Continuité monotone)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ croissante, c'est-à-dire vérifiant $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
2. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ décroissante, c'est-à-dire vérifiant $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Démonstration page 864

Corollaire 5

Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on a :
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big),$$
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$

Démonstration page 865

Proposition 6 (Inégalité de Boole)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Si $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont des événements, alors on a :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$
- Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors on a :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

Démonstration page 865

Remarque On n'a pas nécessairement $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) < +\infty$, mais si la série diverge, l'inégalité est sans intérêt.

L'inégalité de Boole peut être énoncée en englobant les deux cas.

Corollaire 7

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille *au plus dénombrable* d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Démonstration page 865

Corollaire 8

Une réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Démonstration page 865

Attention L'hypothèse « au plus dénombrable » est indispensable.

- Une réunion non dénombrable d'événements n'a aucune raison *a priori* d'être un événement et donc d'avoir une probabilité.
- Même si c'est un événement, il peut avoir une probabilité non nulle.

p.866

Exercice 5 (Premier lemme de Borel-Cantelli)

Soit (A_n) une suite d'événements de l'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que l'événement $\bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p$ est négligeable.

Union d'événements non incompatibles

Pour calculer la probabilité d'une réunion d'événements, il existe une formule qui généralise la formule $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$ obtenue pour deux événements. Elle n'est pas au programme. Pour une démonstration et une utilisation, *cf.* exercice 16.11 de la page 954.

Formule du crible ou de Poincaré

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) &= \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ \text{card } I=k}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)\right).\end{aligned}$$

3 Probabilité sur un univers au plus dénombrable

Si l'univers Ω est au plus dénombrable, on peut prendre $\mathcal{P}(\Omega)$ comme tribu des événements. Alors comme dans le cas d'un univers fini, une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par la connaissance des probabilités des événements élémentaires.

Théorème 9

Soit Ω un ensemble au plus dénombrable.

1. Soit $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Si l'on pose $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$, pour tout $\omega \in \Omega$, on a alors :
$$(1)\ \forall \omega \in \Omega \quad p_\omega \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad (2)\ \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1.$$
2. Réciproquement, si $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une famille de réels vérifiant les conditions (1) et (2), il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. La probabilité $\mathbb{P}$ est définie, pour tout événement A, par :
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

Démonstration page 866

Remarque

Le cas d'un univers fini a été étudié en première année. Dans ce cas, on peut en particulier définir une probabilité pour laquelle les événements élémentaires ont tous même probabilité (probabilité uniforme). Ce n'est pas possible pour un univers dénombrable. En effet si Ω est dénombrable et si p_ω est une constante, soit cette constante n'est pas nulle et la famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ n'est pas sommable, soit elle est nulle et $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega$ vaut 0 et pas 1.

Exemples Considérons le cas $\Omega = \mathbb{N}$.

1. Si $p \in]0,1[$, on définit une probabilité sur $\mathbb{N}$, en posant :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n = (1-p)^n p.$$
En effet, on a $p_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n p = \dfrac{p}{1-(1-p)} = 1$.
2. Si $\lambda > 0$, on définit une probabilité sur $\mathbb{N}$, en posant :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$
En effet, on a $p_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^n}{n!} = 1$.

p.866

Exercice 6

1. Montrer qu'on définit une probabilité sur $\mathbb{N}^*$ en posant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)}.$$
2. Calculer la probabilité qu'un entier soit pair.

   On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$, quand n tend vers $+\infty$, où γ est la constante d'Euler (*cf.* page 409).

Remarque Définir une probabilité sur un univers non dénombrable est beaucoup plus compliqué. On ne peut pas la définir par les probabilités des événements élémentaires, car une partie non dénombrable ne peut pas être obtenue comme union disjointe dénombrable de singletons. Toutefois, considérer des univers non dénombrables est indispensable, ne serait-ce que pour modéliser un pile ou face infini, dont nous avons vu qu'il conduit à l'univers non dénombrable $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ (nous reviendrons sur cette modélisation dans la remarque de la page 859).

II Probabilités conditionnelles

Les définitions qui suivent généralisent simplement les définitions vues en première année dans le cas d'un univers fini.

1 Définition

Théorème 10

Pour tout événement A de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de probabilité non nulle, l'application :
$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_A : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & B & \longmapsto & \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \end{array}$$
est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, appelée la **probabilité conditionnelle** sachant A.
Pour tout événement B, $\mathbb{P}_A(B)$ qui est encore noté $\mathbb{P}(B \mid A)$ est appelé la **probabilité conditionnelle de B sachant A**.

Démonstration page 867

2 Formules liées aux probabilités conditionnelles

Formule des probabilités composées

Théorème 11 (Formule des probabilités composées)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour toute famille finie $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Démonstration page 867

Formule des probabilités totales

Théorème 12 (La formule des probabilités totales)

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tel que, pour tout entier i, on ait $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$.
Pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i).$$

Démonstration page 868

Remarque On peut s'affranchir de la condition $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$ en convenant, si $\mathbb{P}(A_i) = 0$, d'attribuer la valeur 0 au produit $\mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)$. En effet, on a alors $\mathbb{P}(B \cap A_i) = 0$ car $B \cap A_i \subset A_i$.

p.868

Exercice 7 On dit que $(A_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet d'événements si I est au plus dénombrable et si les A_i sont des événements deux à deux incompatibles dont la réunion est de probabilité 1. Montrer que la formule des probabilités totales reste vraie avec un système quasi-complet d'événements.

Formule de Bayes

Théorème 13 (Formule de Bayes)

Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on a :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Démonstration. Cela résulte de la définition des probabilités conditionnelles. □

Point méthode

On combine souvent la formule de Bayes avec la formule des probabilités totales. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements et B un événement. Si A_j $(j \in I)$ et B ont une probabilité non nulle, alors on a :

$$\mathbb{P}(A_j \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\sum\limits_{i\in I} \mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}.$$

p.868

Exercice 8 Dans une population donnée, on suppose qu'il existe $p \in]0,1[$ et $\alpha > 0$ tels que la probabilité p_n qu'une famille ait n enfants vérifie :

$$\forall n \geqslant 1 \quad p_n = \alpha p^n.$$

On suppose qu'un enfant a la même probabilité d'être une fille ou un garçon.

1. Calculer p_0.
2. Déterminer la probabilité qu'une famille ait deux enfants, sachant qu'elle a deux filles.
3. Déterminer la probabilité qu'une famille ait deux garçons sachant qu'elle a deux filles.

3 Indépendance des événements

Les définitions qui suivent généralisent les définitions vues en première année dans le cas d'un univers fini.

Indépendance entre deux événements

Définition 7

Deux événements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont dits indépendants si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Proposition 14

Deux événements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ sont indépendants si, et seulement si, $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$.

Remarques

- Si l'événement A est négligeable, alors il est indépendant de tout événement B. En effet on a $\mathbb{P}(A) = 0$ et *a fortiori* $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.
- L'indépendance est une notion probabiliste. Elle dépend de la probabilité dont est muni $(\Omega, \mathcal{A})$.
- L'indépendance ne doit pas être confondue avec l'incompatibilité : deux événements de probabilité non nulle, incompatibles, ne sont pas indépendants.

Proposition 15

Si A et B sont deux événements indépendants de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, les événements A et $\overline{B}$, les événements $\overline{A}$ et B et les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration page 869

Remarque On en déduit que si A est un événement presque sûr, il est indépendant de tout événement B. En effet $\overline{A}$ est de probabilité nulle donc $\overline{A}$ et B sont indépendants, comme nous l'avons déjà vu.

Indépendance d'une famille d'événements.

Définition 8

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On dit que les événements A_i, pour $i \in I$, sont **deux à deux indépendants** si, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de I, on a :

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j).$$

On dit que les événements A_i, pour $i \in I$, sont **mutuellement indépendants** ou que $(A_i)_{i\in I}$ est une **famille d'événements mutuellement indépendants** si, pour toute partie finie J de I, on a :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarques

- Souvent, pour une famille d'événements mutuellement indépendants, on dit simplement **indépendants**.
- Si les événements A_i, pour $i \in I$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants, comme on le voit en prenant pour J un ensemble à deux éléments.

  Comme dans le cas des univers finis, **la réciproque est fausse**.
- L'indépendance ne dépend pas de l'ordre des événements. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants, il en est de même de la famille $(A_{\sigma(i)})_{i\in I}$, où σ est une permutation de I.
- Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants, alors, pour toute partie I' de I, $(A_i)_{i\in I'}$ est encore une famille d'événements mutuellement indépendants.

p.869

Exercice 9 Montrer que $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements indépendants si, et seulement si, toute sous-famille finie est constituée d'événements indépendants.

Proposition 16

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants, et si, pour tout $i \in I$, B_i est égal à A_i ou $\overline{A_i}$, alors $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Démonstration page 870

Quand on a une famille d'événements mutuellement indépendants, si on remplace certains d'entre eux par leur réunion ou leur intersection, on obtient encore des événements mutuellement indépendants. C'est l'objet de l'exercice suivant.

p.870

Exercice 10 Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ainsi que I_1, I_2,..., I_n des parties finies et deux à deux disjointes de I. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on pose $B_j = \bigcap_{i\in I_j} A_i$.

1. Montrer que $(B_1, B_1, \ldots, B_n)$ est une famille d'événements indépendants.
2. Montrer qu'il en est de même si on remplace $\bigcap_{i\in I_j} A_i$ par $\bigcup_{i\in I_j} A_i$ dans la définition de certains événements B_j.

Modèle de pile ou face infini Nous admettons qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, avec $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, permettant de modéliser une suite infinie de lancers de pile ou face indépendants. Il vérifie les propriétés suivantes : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble A_n : « le n-ième lancer donne pile » est un événement de probabilité $p \in]0,1[$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

p.871

Exercice 11 On garde les mêmes notations. Montrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, le singleton $\{\omega\}$ est un événement, de probabilité nulle.

Remarque On peut démontrer que dans un tel modèle, $\mathcal{A}$ ne peut pas être égal à $\mathcal{P}(\Omega)$. En fait, on peut prendre pour $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par $\{A_n\,;\, n \in \mathbb{N}^*\}$ (*cf.* exercice 1 de la page 848) .

p.871

Exercice 12 (Second lemme de Borel-Cantelli)

1. Soit (A_n) une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge et que les événements A_n sont mutuellement indépendants. Montrer que l'événement $\bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p$ est presque sûr.
2. Application. Une pièce de monnaie amène pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1-p$. On la lance une infinité de fois. Montrer que, pour tout $m \geqslant 1$, il apparaît une infinité de séquences de m piles consécutifs de façon presque sûre.

Remarques

- On peut montrer de la même façon qu'on obtient de manière presque sûre une infinité de fois n'importe quelle séquence de piles ou faces.
- En tenant compte du premier lemme de Borel-Cantelli (exercice 5 de la page 853), on voit que si les événements A_n sont mutuellement indépendants, la probabilité de $\bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p$, c'est-à-dire la probabilité qu'une infinité d'événements A_n se réalisent, ne peut être que 0 ou 1.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

1. Notons T l'ensemble de toutes les tribus contenant $\mathcal{F}$. Il est non vide, car $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω contenant $\mathcal{F}$. Posons $\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap_{\mathcal{A}\in T} \mathcal{A}$. Montrons que $\sigma(\mathcal{F})$ est une tribu.
   - Par définition d'une tribu, $\Omega \in \mathcal{A}$, pour tout $\mathcal{A} \in T$, donc $\Omega \in \sigma(\mathcal{F})$.
   - Soit $A \in \sigma(\mathcal{F})$. Pour tout $\mathcal{A} \in T$, on a $A \in \mathcal{A}$ et donc $\bar{A} \in \mathcal{A}$, par définition d'une tribu. Donc $\bar{A} \in \sigma(\mathcal{F})$.
   - Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\sigma(\mathcal{F})$. Soit $\mathcal{A} \in T$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$, donc par définition d'une tribu, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. C'est vrai pour tout $\mathcal{A} \in T$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma(\mathcal{F})$.

   Ainsi $\sigma(\mathcal{F})$ est une tribu sur Ω.
2. - Par définition $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ pour tout $\mathcal{A} \in T$ donc $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F})$.
   - Si $\mathcal{A}$ est une tribu quelconque contenant $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{A} \in T$, donc $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$.

   On a bien montré que $\sigma(\mathcal{F})$ est la plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{F}$.

Exercice 2

- Par définition, $\mathcal{A}$ contient $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.

  Soit $B \in \mathcal{A}$ et J une partie de I telle que $B = \bigcup_{i\in J} A_i$. Comme les A_i sont disjoints, on a :

  $$\overline{B} = \Omega \setminus B = \bigcup_{i\in I} A_i \setminus \bigcup_{i\in J} A_i = \bigcup_{i\in I\setminus J} A_i$$

  donc $\overline{B}$ appartient à $\mathcal{A}$.
  Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ une partie J_n de I telle que $B_n = \bigcup_{i\in J_n} A_i$. On a alors :

  $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{i\in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n} A_i,$$

  ce qui montre que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.
  Ainsi, $\mathcal{A}$ est une tribu de Ω qui, de manière évidente, contient $\{A_i\,;\ i \in I\}$.
- Soit $\mathcal{A}'$ une tribu contenant $\{A_i\,;\ i \in I\}$. Pour tout $J \subset I$, comme I est au plus dénombrable, il en est de même de J. Chaque A_i est dans $\mathcal{A}'$ donc $\bigcup_{i\in J} A_i$ appartient aussi à $\mathcal{A}'$. Ainsi $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$.

Proposition 1

- $\varnothing$ appartient à $\mathcal{A}$ car Ω appartient à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire.
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Pour tout entier n, $\overline{A_n}$ appartient à $\mathcal{A}$, donc $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$ appartient à $\mathcal{A}$. Comme $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n}$, on en déduit, par passage au complémentaire, que $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.
- Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des éléments de $\mathcal{A}$, en posant $A_i = \varnothing$ si $i = 0$ ou $i > n$, on obtient, par stabilité par réunion dénombrable $\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{A}$. De même, en posant $A_0 = \Omega$ et $A_i = \Omega$ pour $i > n$, on obtient, par stabilité par intersection dénombrable, $\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{A}$.
- Si A et B appartiennent à $\mathcal{A}$, il en est de même de $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, d'après les propriétés précédentes.

Exercice 3 Considérons $\overline{B}$, ensemble des éléments de Ω appartenant seulement à un nombre fini d'événements A_n. Alors, on a, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\omega \in \overline{B} \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \geqslant n \quad \omega \notin A_p.$$

On a donc $\overline{B} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geqslant n} \overline{A_p}$, d'où l'on déduit $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} A_p$.

De même, on a pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\omega \in C \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \geqslant n \quad \omega \in A_p$$

et donc $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geqslant n} A_p$.

Comme une tribu est stable par union et intersection dénombrable, B et C sont des événements.

Théorème 2

1. Considérons la famille d'événements incompatibles $(A_n)_{i\in\mathbb{N}}$, où $A_n = \varnothing$ pour tout entier naturel n. Alors, par définition d'une probabilité, la série de terme général constant $\mathbb{P}(\varnothing)$ converge, d'où $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
2. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille finie d'événements deux à deux incompatibles. La suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, où $A_k = \varnothing$ pour tout entier $k \geqslant n+1$ et pour $k = 0$, est une famille d'événements deux à deux incompatibles.
   Alors, par définition d'une probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_0) + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k) + \sum_{i=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

   Comme $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, on obtient :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

En particulier, pour deux événements incompatibles, on trouve :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

3. On a, d'après le point précédent, puisque A et $\overline{A}$ sont incompatibles :

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = P\left(A \cup \overline{A}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

et donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

4. Si $A \subset B$, alors B est la réunion des événements incompatibles A et $B \setminus A$ et donc :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A).$$

On en déduit $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B) \geqslant \mathbb{P}(A)$.

5. L'événement $A \cup B$ est la réunion des deux événements incompatibles A et $B \setminus A$; d'autre part, B est la réunion des événements incompatibles $A \cap B$ et $B \setminus A$. On a donc :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A).$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Exercice 4

- Si $\mathbb{P}$ est une probabilité, alors $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et, d'après la proposition 2, pour tous événements A et B incompatibles, on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- Réciproquement, supposons que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et que, pour tous événements A et B incompatibles, on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

  Par récurrence sur n, on démontre que, pour des événements deux à deux incompatibles $A_0, \ldots, A_n$, on a $\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.

  Comme Ω est fini, l'ensemble des événements est fini. Une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles ne comporte donc qu'un nombre fini d'événements différents de $\varnothing$. De plus, de $\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\varnothing)$, on tire $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$. En notant $I = \{n \in \mathbb{N} \mid A_n \neq \varnothing\}$, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in I} A_n\right) = \sum_{n \in I} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

  Donc $\mathbb{P}$ est une probabilité.

Proposition 3 La famille $(A_i)_{i \in I}$ est au plus dénombrable et les événements A_i sont deux à deux incompatibles, donc :

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

De même, les événements $B \cap A_i$ sont deux à deux incompatibles et $\bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) = B$, donc :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}\left(B \cap A_i\right).$$

Théorème 4

1. On considère la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_0 = A_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$.

   On note que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n \subset A_n$ donc $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Mais d'autre part, si $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et si m est le plus petit des entiers k tels que $\omega \in A_k$, alors on a $\omega \in A_m \setminus A_{m-1} = B_m$ et donc $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$. On a donc $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

   On montre de même que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$. En effet, on a par définition :

   $$\bigcup_{k=0}^{n} B_k \subset \bigcup_{k=0}^{n} A_k \subset A_n$$

   et réciproquement si $\omega \in A_n$ et si m est le plus petit des entiers k tels que $\omega \in A_k$, alors $m \leqslant n$ et $\omega \in B_m$ donc $\omega \in \bigcup_{k=0}^{n} B_k$.

   Les événements B_n sont incompatibles. En effet si $m < n$, on a $B_m \subset A_m \subset A_{n-1}$ et $B_n \subset \overline{A_{n-1}}$ donc $B_m \cap B_n = \varnothing$. On a donc :

   $$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k).$$

   De plus on a, toujours par incompatibilité des événements B_n, l'égalité :

   $$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\Big) = \mathbb{P}(A_n).$$

   Finalement, on obtient :

   $$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, alors la suite $\big(\overline{A_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements. En appliquant le premier point, on trouve donc :

   $$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\overline{A_n}\big).$$

   On en déduit :

   $$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = 1-\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\Big) = 1-\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\overline{A_n}\big) = \lim_{n\to+\infty} \big(1-\mathbb{P}\big(\overline{A_n}\big)\big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Corollaire 5

1. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ est croissante et $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. On a donc :
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big).$$

2. La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $C_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k$ est décroissante et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} C_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$. On a donc :
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} C_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$

Proposition 6

- On démontre la propriété par récurrence sur n. La propriété est évidente pour $n = 0$ et si elle est vérifiée au rang n, alors :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&\leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \mathbb{P}(A_k).
\end{aligned}$$

- On utilise l'inégalité démontrée dans le point précédent. On obtient, par passage à la limite, en utilisant le corollaire 5 :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

Corollaire 7 Si I est de la forme $[\![0, n]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}$, ou est égal à $\mathbb{N}$, l'inégalité énoncée est l'inégalité de Boole. Sinon I est en bijection avec un de ces ensembles et l'inégalité résulte de l'inégalité de Boole par invariance des deux membres de l'inégalité par permutation des termes.

Corollaire 8 Si $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements négligeables, on a $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 0$ et d'après l'inégalité de Boole $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 0$.

Exercice 5 On pose $B = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p$. La suite $\left(\bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{k\to+\infty} \bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p\right) \leqslant \sum_{p=k}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p).$$

On reconnaît dans $\sum_{p=k}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p)$ le reste d'une série convergente, qui tend donc vers 0.

On en déduit $\mathbb{P}(B) = 0$.

Théorème 9

1. Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, les propriétés (1) et (2) résultent de la définition d'une probabilité et du fait que $(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$ est un système complet d'événements.
2. Réciproquement, supposons que les propriétés (1) et (2) soient vérifiées. Raisonnons par analyse-synthèse.
   - Si la probabilité $\mathbb{P}$ existe, on écrit tout événement A sous la forme $A = \bigcup_{\omega\in A} \{\omega\}$.

     Puisque A est au plus dénombrable, on obtient, par σ-additivité :

     $$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} p_\omega.$$

   - Montrons que l'application $\mathbb{P}$ ainsi définie est une probabilité.
     * Pour tout événement A, on a $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega \leqslant 1$, car les p_ω sont positifs et $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$. De plus, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
     * Si (A_n) est une suite d'événements deux à deux incompatibles, alors en notant $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et en appliquant le théorème de sommation par paquets, on obtient :

       $$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\omega\in A_n} p_\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

     Donc $\mathbb{P}$ est une probabilité et, par définition de $\mathbb{P}$, on a $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$, pour tout $\omega \in \Omega$.

Exercice 6

1. On vérifie les deux conditions du théorème 9.

   On a $\dfrac{1}{n(n+1)} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge. C'est une série télescopique car $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

   On a donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 1$.

2. On a $\mathbb{P}(2\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2n(2n+1)}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n(2n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)\\ &= 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n}\\ &= \ln N + \gamma + 1 - \ln(2N+1) - \gamma + \mathrm{o}\,(1)\\ &= 1 - \ln\left(2 + \frac{1}{N}\right) + \mathrm{o}\,(1)\,,\end{aligned}$$

On en déduit $\mathbb{P}(2\mathbb{N}^*) = 1 - \ln 2$.

Théorème 10 Montrons que $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

- On a $\mathbb{P}_A(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$.
- Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. La famille $(B_n \cap A)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite d'événements deux à deux incompatibles. on a alors par additivité :

$$\mathbb{P}\Big(\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\big) \cap A\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap A)\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(B_n \cap A\Big).$$

On a donc :

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n\big) \cap A\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_A(B_n).$$

Théorème 11 Pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, on a :

$$A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \ldots \cap A_k,$$

d'où $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_k) \geqslant \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Toutes les probabilités conditionnelles sont donc définies. Il suffit alors d'écrire :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})\\ &\qquad = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}\left(A_k \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}\right)\\ &\qquad = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^{n} \frac{\mathbb{P}\big(A_1 \cap \ldots A_{k-1} \cap A_k\big)}{\mathbb{P}\big(A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}\big)}\\ &\qquad = \mathbb{P}\big(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n\big),\end{aligned}$$

car le produit de droite est télescopique : tous les termes se simplifient deux à deux sauf $\mathbb{P}\big(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n\big)$.

Théorème 12 On a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(B \mid A_i).$$

Exercice 7 On note $C = \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$, événement de probabilité nulle. En adjoignant C au système précédent, on obtient un système complet d'événements. On a donc, avec les notations du théorème :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap C) + \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i),$$

car $B \cap C$ est aussi de probabilité nulle.

Exercice 8

1. On a $p_0 = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1 - \alpha \sum_{p=1}^{+\infty} p^n = 1 - \dfrac{\alpha p}{1-p}$. On remarque qu'on a donc $\dfrac{\alpha p}{1-p} \leqslant 1$, c'est-à-dire $\alpha \leqslant \dfrac{1}{p} - 1$.
2. On considère, pour $k \in \mathbb{N}$, les événements E_k « la famille a k enfants », F_k « la famille a k filles » et G_k « la famille a k garçons ». On cherche :

$$\mathbb{P}(E_2 \mid F_2) = \frac{\mathbb{P}(F_2 \mid E_2)\,\mathbb{P}(E_2)}{\mathbb{P}(F_2)}.$$

On connait $\mathbb{P}(F_2 \mid E_2) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(E_2) = \alpha p^2$. Pour calculer $\mathbb{P}(F_2)$, on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On obtient :

$$\mathbb{P}(F_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F_2 \mid E_n)\mathbb{P}(E_n).$$

Pour $n \geqslant 2$, on a $\mathbb{P}(F_2 \mid E_n) = \binom{n}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, car il faut choisir 2 filles parmi n enfants et, pour chaque enfant la probabilité d'être une fille ou un garçon est $\dfrac{1}{2}$. Cette probabilité est évidemment nulle si $n < 2$. On obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_2) = \sum_{n=2}^{+\infty} \binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha p^n &= \frac{\alpha}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{p}{2}\right)^n \\ &= \frac{\alpha p^2}{8}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{p}{2}\right)^{n-2}.\end{aligned}$$

Par le théorème de dérivation des séries entières, on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(F_2) = \frac{\alpha p^2}{8}\,\frac{2}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^3} = \frac{2\alpha p^2}{(2-p)^3},$$

puis :

$$\mathbb{P}(E_2 \mid F_2) = \frac{\frac{\alpha p^2}{4}}{\frac{2\alpha p^2}{(2-p)^3}} = \frac{(2-p)^3}{8}.$$

3. En appliquant de nouveau la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\mathbb{P}(G_2 \cap F_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F_2 \cap G_2 \mid E_n)\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(F_2 \cap G_2 \mid E_4)\mathbb{P}(E_4),$$

car la probabilité conditionnelle est nulle si $n \neq 4$. On a donc :

$$\mathbb{P}(G_2 \cap F_2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \alpha p^4 = 6\alpha\left(\frac{p}{2}\right)^4.$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(G_2 \mid F_2) = \frac{\mathbb{P}(G_2 \cap F_2)}{\mathbb{P}(F_2)} = \frac{6\alpha\left(\frac{p}{2}\right)^4}{\frac{2\alpha p^2}{(2-p)^3}} = \frac{3p^2(2-p)^3}{16}.$$

Proposition 15 Comme A et B sont indépendants, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
De l'égalité $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$, on déduit :

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\big(1 - \mathbb{P}(B)\big) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}),$$

ce qui montre que A et $\overline{B}$ sont indépendants.
Comme B et A sont indépendants, le raisonnement précédent montre que B et $\overline{A}$ sont indépendants. Enfin, en appliquant ce qui précède à $\overline{A}$ et B, on obtient l'indépendance de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 9

- Supposons que $(A_i)_{i\in I}$ soit une famille d'événements indépendants. Soit J une partie finie de I. Si $J' \subset J$, alors J' est une partie finie de I et, par définition de l'indépendance de la famille $(A_i)_{i\in I}$, on a :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in J'} A_i\Big) = \prod_{i\in J'} \mathbb{P}(A_i),$$

donc $(A_i)_{i\in J}$ est une famille d'événements indépendants.

- Supposons que, pour toute partie finie J de I, $(A_i)_{i\in J}$ soit une famille d'événements mutuellement indépendants. On a en particulier, pour pour toute partie finie J de I :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i),$$

donc $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements indépendants.

Proposition 16 Soit J une partie finie et non vide de I. Alors $(A_i)_{i\in J}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants. Montrons que $(B_i)_{i\in J}$ est également une famille d'événements mutuellement indépendants.

- On étudie d'abord le cas où il existe $k \in J$ tel que $B_k = \overline{A}_k$ et $B_i = A_i$ si $i \in J\backslash\{k\}$. Soit K une partie non vide de J.
  - Si $k \notin K$, alors $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in K} B_i) = \mathbb{P}(\bigcap_{i\in K} A_i) = \prod_{i\in K} \mathbb{P}(A_i) = \prod_{i\in K} \mathbb{P}(B_i)$.
  - Si $k \in K$, on note que :

$$\left(\bigcap_{i\in K} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in K} B_i\right) = \left(\bigcap_{i\in K\backslash\{k\}} A_i\right) \cap (A_k \cup B_k) = \bigcap_{i\in K\backslash\{k\}} A_i$$

  et comme cette union est disjointe ;

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in K} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in K\backslash\{k\}} A_i\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in K} A_i\right).$$

  Comme $(A_i)_{i\in J}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in K} B_i\right) = \prod_{i\in K\backslash\{k\}} \mathbb{P}(A_i) - \prod_{i\in K} \mathbb{P}(A_i) &= \big(1 - \mathbb{P}(A_k)\big) \prod_{i\in K\backslash\{k\}} \mathbb{P}(A_i) \\ &= \mathbb{P}(\overline{A}_k) \prod_{i\in K\backslash\{k\}} \mathbb{P}(A_i) = \prod_{i\in K} \mathbb{P}(B_i).\end{aligned}$$

  On a donc démontré, dans ce cas, que $(B_i)_{i\in J}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.
- On passe au cas général. En utilisant ce premier résultat autant de fois qu'il y a de contraires dans les événements B_i pour $i \in J$, nous pouvons en déduire que $(B_i)_{i\in J}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

On a donc en particulier :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} B_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(B_i).$$

Comme cela est vrai pour toute partie finie non vide J de I, on en déduit que $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Exercice 10

1. Soit $J \subset [\![1, n]\!]$. On a, par indépendance de la famille $(A_i)_{i\in I}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in \bigcup_{j\in J} I_j} A_i\Big) &= \prod_{i\in \bigcup_{j\in J} I_j} \mathbb{P}(A_i) \\ &= \prod_{j\in J} \Big(\prod_{i\in I_j} \mathbb{P}(A_i)\Big) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(B_j).\end{aligned}$$

   Donc $(B_1, B_1, \ldots, B_n)$ est une famille d'événements indépendants.

2. Posons $C_j = B_j$ si $B_j = \bigcap\limits_{i\in I_j} A_i$ et $C_j = \overline{B_j} = \bigcap\limits_{i\in I_j} \overline{A_i}$ si $B_j = \bigcup\limits_{i\in I_j} A_i$. Alors l'indépendance de $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ résulte de la proposition 16 et de la première question de l'exercice. En appliquant de nouveau la proposition 16, on en déduit que $(B_1, B_1, \ldots, B_n)$ est une famille d'événements indépendants.

Exercice 11 Soit $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Omega$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n = A_n$ si $\omega_n = 1$ et $B_n = \overline{A_n}$ sinon. On a alors :

$$\{\omega\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n.$$

Les A_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, sont des événements, donc les B_n sont également des événements, et $\{\omega\}$ qui est l'intersection d'un nombre dénombrable d'événements est un événement.

Comme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements indépendants, il en est de même de la famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'après la proposition 16 de la page 859. On a donc, d'après le corollaire 5 de la page 852 :

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} B_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \mathbb{P}(B_n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(B_n) = p$ ou $1-p$. On en déduit que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $\prod\limits_{n=1}^{N} \mathbb{P}(B_n) \leqslant \big(\max(p, 1-p)\big)^N$. Par passage à la limite, on obtient $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 0$.

Exercice 12

1. On pose $B = \bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} \bigcup\limits_{p=k}^{+\infty} A_p$. On a donc $\overline{B} = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} \bigcap\limits_{p=k}^{+\infty} \overline{A_p}$.

Les événements $\overline{A_n}$ sont aussi mutuellement indépendants donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=k}^{+\infty} \overline{A_p}\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{p=k}^{N} \overline{A_p}\right) &= \lim_{N\to+\infty} \prod_{p=k}^{N} \mathbb{P}\big(\overline{A_p}\big) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \prod_{p=k}^{N} \big(1 - \mathbb{P}(A_p)\big).\end{aligned}$$

Sachant que $0 \leqslant 1 - x \leqslant e^{-x}$ pour tout réel $x \in [0,1]$, on a :

$$0 \leqslant \prod_{p=k}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_p)) \leqslant \prod_{p=k}^{N} \exp\big(-\mathbb{P}(A_p)\big) \leqslant \exp\left(-\sum_{p=k}^{N} \mathbb{P}(A_p)\right).$$

La série $\sum \mathbb{P}(A_p)$ diverge donc $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{p=k}^{N} \mathbb{P}(A_p) = +\infty$. On en déduit :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=k}^{+\infty} \overline{A_p}\right) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{p=k}^{N} \big(1 - \mathbb{P}(A_p)\big) = 0.$$

Ainsi, $\overline{B}$ est négligeable, car réunion dénombrable d'événements négligeables, et l'événement contraire B est presque sûr.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note π_n l'événement « le n-ième lancer donne pile » et A_n l'événement $\pi_{nm+1} \cap \pi_{nm+2} \cap \ldots \cap \pi_{nm+m}$, c'est-à-dire « les lancers entre les rangs $nm+1$ et $nm+m$ donnent pile ». Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{nm+m}$ sont indépendants. Il résulte de l'exercice 10 de la page 859 que les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc constituée d'événements indépendants.

   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, par indépendance des événements π_i :

$$\mathbb{P}(A_n) = \prod_{i=nm+1}^{nm+m} \mathbb{P}(\pi_i) = p^m.$$

   La série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est donc grossièrement divergente. En gardant les notations des questions précédentes, on en déduit que $\mathbb{P}(B) = 1$. Il est donc presque sûr qu'une infinité d'événements A_n se réalisent. Comme l'événement C « il apparaît une infinité de séquences de m piles consécutifs » contient l'événement B, il est *a fortiori* presque sûr.

S'entraîner et approfondir

15.1 (Probabilité image)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et f une application de Ω dans un ensemble Ω'.

1. Montrer que $\mathcal{A}' = \{B \in \mathcal{P}(\Omega') \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Ω'. On l'appelle **tribu image** de $\mathcal{A}$ par f.
2. Monter que $\mathbb{P}_f : B \in \mathcal{A}' \mapsto \mathbb{P}\left(f^{-1}(B)\right)$ est une probabilité sur $(\Omega', \mathcal{A}')$. On l'appelle **probabilité image** de $\mathbb{P}$ par f.

15.2 Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \mathbb{P}(A_i \cap A_k)\right).$$

15.3 On souhaite démontrer qu'il n'existe pas de probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la probabilité de l'ensemble A_n des multiples de n soit $\dfrac{1}{n}$.

On raisonne par l'absurde et on suppose qu'une telle probabilité existe.

1. Montrer que $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$, où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers, est une famille d'événements indépendants.
2. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers.

   On rappelle que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{p_n}$ diverge (*cf.* par exemple l'exercice 9.15 de la page 479).

   Soit A l'ensemble des entiers naturels ayant une infinité de diviseurs premiers. Exprimer A en fonction des événements A_{p_i} (pour $i \in \mathbb{N}^*$). En déduire la probabilité de A.
3. Conclure.

15.4 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendants.

1. Montrer que :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \lim_{n \to +\infty} \prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right).$$
2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) \neq 1$.

   Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$ si, et seulement si, la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ diverge.
3. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{(n+2)^2}$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$.
   (b) Calculer la probabilité qu'un seul des événements A_n se réalise.

15.5 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n = \bigcup_{k\geqslant n} A_k \text{ et } C_n = \bigcap_{k\geqslant n} A_k, \text{ puis } B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \text{ et } C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n.$$

1. On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si $B = C$ et, par définition, sa limite A est alors $A = B = C$.
   Montrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors A est un événement et la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbb{P}(A)$.
2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements B_n et C_n sont indépendants.
   (a) Montrer que B et C sont indépendants.
   (b) Montrer que si, de plus, la suite (A_n) converge vers A, alors $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

★★ **15.6** *(ENS Ulm 2015)*

Soit A_1, A_2,..., A_n des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on considère l'événement C_k « appartenir à A_i pour au moins k valeurs de l'indice i entre 1 et n ». Montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(C_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

★ **15.7** Un avion comporte n sièges ($n \geqslant 2$). Chacun des n passagers a une place qui est réservée.

- Le premier passager arrive. Il est distrait et s'installe à une place choisie au hasard.
- Les passagers suivants quand ils arrivent s'installent à leur place sauf si celle-ci est déjà occupée, auquel cas ils choisissent une place au hasard parmi les places restantes.

Déterminer la probabilité que le n-ième passager s'installe à sa place.

Indication : on pourra raisonner par récurrence sur n.

★ **15.8** Soit b et n deux entiers naturels non nuls. Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On tire au hasard et sans remise les boules jusqu'à ce qu'on obtienne pour la première fois une boule d'une couleur différente des précédentes. Celle-ci est alors remise dans l'urne. On reprend alors la procédure au début. On continue ainsi jusqu'au tirage de la dernière boule (si à la fin, il ne reste plus que des boules d'une seule couleur, on les tire toutes).

Montrer que la probabilité que la dernière boule tirée soit blanche est $\dfrac{1}{2}$.

Indication : on pourra raisonner par récurrence forte sur $n + b$.

15.9 Un fumeur a dans ses poches deux boîtes contenant respectivement n et $n + 1$ allumettes. Chaque fois qu'il a besoin d'une allumette, il prend au hasard dans l'une des boîtes.

Quelle est la probabilité pour que, lorsqu'il prend la dernière allumette d'une boîte, l'autre boîte contienne encore k allumettes ?

15.10 (Le tournoi)

Des joueurs notés $j_1, j_2, \ldots$ (il y a une infinité de joueurs) s'affrontent à pile ou face, avec une pièce honnête, de la façon suivante : j_1 et j_2 commencent, le perdant est éliminé et le gagnant rencontre j_3, le perdant est éliminé et le gagnant rencontre j_4, ... Est déclaré vainqueur le joueur qui gagne trois parties consécutives et le jeu s'arrête alors.

Pour $n \geqslant 1$, on note p_n la probabilité que j_n gagne le tournoi et q_n la probabilité qu'il joue.

1. Montrer que $p_n = \dfrac{1}{8} q_n$.
2. (a) Que vaut q_n pour $1 \leqslant n \leqslant 4$.
   (b) Montrer que, pour $n \geqslant 5$, $q_n = \dfrac{1}{2} q_{n-1} + \dfrac{1}{4} q_{n-2}$.
3. Calculer p_n pour tout n.

15.11 Un gardien doit ouvrir un porte ; il possède un trousseau de six clés différentes. Quand il est ivre, il remélange les clés après chaque essai ; sinon, il retire la mauvaise clé du lot. Sachant qu'il est ivre un jour sur quatre et que ce soir-là il a essayé au moins cinq clés, quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

15.12 Plusieurs joueurs, nommés j_1, j_2, ..., j_k, ... jouent l'un après l'autre, dans l'ordre des indices. À chaque joueur j_k (pour $k \geqslant 1$) est imparti un événement précis A_k, de probabilité $p_k \in]0,1[$. Le jeu se termine lorsque l'un des joueurs réalise l'événement qui lui est imparti.

On pose $q_k = 1 - p_k$. On suppose l'indépendance mutuelle de toutes les suites de résultats des coups joués par les concurrents.

L'événement « j_k gagne la partie » sera noté G_k.

1. On suppose que le nombre de joueurs est fini, égal à un entier $c \geqslant 2$. Lorsqu'aucun joueur n'a gagné, on recommence un tour à partir du joueur j_1 et on continue ainsi jusqu'à ce que l'un des joueurs gagne.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(G_k)$ pour $k \in [\![1, c]\!]$.
   (b) Démontrer que la partie se termine presque sûrement au bout d'un nombre fini de coups.
   (c) On dit que le jeu est équitable si $P(G_1) = \ldots = P(G_c)$. Montrer que le jeu est équitable si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, c-1]\!]$, on a :
   $$p_{k+1} = \frac{p_k}{1 - p_k}.$$
   (d) En supposant le jeu équitable, exprimer p_k en fonction de p_1.
2. On garde les mêmes notations. On suppose qu'il y a une infinité de joueurs. Ainsi un joueur qui n'a pas gagné à son tour est définitivement éliminé.
   (a) Montrer que le jeu ne peut pas être équitable.
   (b) Montrer que la suite de terme général $Q_n = q_1 \ldots q_n$ converge. On note a sa limite.
   Montrer que la probabilité que le jeu se termine en un nombre fini de coups est $1 - a$.

15.13 Soit $p \in]0,1[$. Une personne joue à pile ou face, la probabilité d'obtenir pile étant p. Elle gagne dès qu'elle a obtenu deux piles de plus que de faces. Elle perd dès qu'elle a obtenu deux faces de plus que de piles.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité que la partie dure plus de $2n$ coups.
2. Quelle est la probabilité que la personne gagne ? La partie peut-elle durer indéfiniment ?

15.14 On considère une suite infinie de lancers d'une pièce de monnaie, numérotés par $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité d'obtenir pile (noté P) étant $p \in]0,1[$ et la probabilité d'obtenir face (noté F) étant $q = 1-p$.

1. Calculer la probabilité de l'événement « la première séquence PP apparaît avant la première séquence FP ».
2. Pour tout $n \geqslant 2$, calculer la probabilité x_n de l'événement « la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers numérotés $n-1$ et n et il n'y a pas eu avant de séquence FP ». En déduire la probabilité x de l'événement « la première séquence PF apparaît avant la première séquence FP ».
3. Déterminer de même la probabilité des événements :
   (a) « la première séquence PP apparaît avant la première séquence PF » ;
   (b) « la première séquence PF apparaît avant la première séquence PP » ;
   (c) « la première séquence PF apparaît avant la première séquence FF » ;
   (d) « la première séquence PP apparaît avant la première séquence FF ».

15.15 (La ruine des joueurs)

Deux joueurs A et B ayant pour capitaux initiaux respectivement a et b euros ($(a,b) \in \mathbb{N}^2$) s'affrontent dans un jeu constitué d'une succession de parties indépendantes. À chaque partie, A a la probabilité $p \in]0,1[$ de gagner et B la probabilité $q = 1-p$. À l'issue de chaque partie, le perdant donne 1 euro au gagnant. Le jeu s'arrête lorsque l'un des joueurs est ruiné. On note $R(a,b)$ la probabilité que A finisse ruiné.

1. Montrer que $R(a,b) = pR(a+1,b-1) + qR(a-1,b+1)$.
2. Calculer $R(a,b)$. On pourra remarquer que la capital total $a+b$ reste fixe au cours de la partie.
3. La partie peut-elle durer indéfiniment ?
4. Calculer $\lim\limits_{b\to+\infty} R(a,b)$. Commenter.

15.16 Un banquier se rend chaque jour de son domicile à sa banque, puis de sa banque à son domicile. Il possède un unique parapluie. À chaque fois qu'il part, s'il pleut et si le parapluie est à sa disposition, alors il le prend.

On suppose que la probabilité qu'il pleuve vaut constamment $p \in]0,1[$ (on pose $q = 1-p$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ note p_n la probabilité que le parapluie soit disponible là où se trouve le banquier (au domicile ou au bureau) au bout de n trajets et $q_n = 1-p_n$. La probabilité qu'il soit disponible initialement est p_0, quelconque.

1. Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.
2. En déduire que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Calculer $p_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Solution des exercices

15.1 1. • On a $f^{-1}(\Omega') = \Omega \in \mathcal{A}$ donc $\Omega' \in \mathcal{A}'$.

• Si $B \in \mathcal{A}'$, alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. On écrit $f^{-1}(\Omega' \setminus B) = \Omega \setminus f^{-1}(B)$. De $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, on déduit $\Omega \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, car $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, et donc $\Omega' \setminus B \in \mathcal{A}'$.

• Enfin si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}'$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$. On en déduit :

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$$

et donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}'$.

On conclut que $\mathcal{A}'$ est une tribu sur Ω'.

2. On note que $\mathbb{P}_f$ est bien une application de $\mathcal{A}'$ dans $[0,1]$.

• On a $\mathbb{P}_f(\Omega') = \mathbb{P}\Big(f^{-1}(\Omega')\Big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

• Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{A}'$, les ensembles $f^{-1}(B_n)$ sont de éléments disjoints de $\mathcal{A}$ et on a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) &= \mathbb{P}\left(f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(f^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_f(B_n).\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}_f$ est une probabilité sur $(\Omega', \mathcal{A}')$.

15.2 Il faut démontrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} \mathbb{P}(A_i \cap A_k).$$

Comme $A_1, \ldots, A_n$ jouent des rôles symétriques, on peut supposer $k = n$. On transforme le second membre de l'inégalité :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_n) &= \mathbb{P}(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_i \cap A_n)\right)\\ &= \mathbb{P}(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i \setminus A_n).\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Boole, on obtient :

$$\mathbb{P}(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i \setminus A_n) \geqslant \mathbb{P}\left(A_n \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \setminus A_n)\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right),$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

15.3 1. Soit p_1, p_2, …, p_r des nombres premiers distincts. Ces entiers sont premiers entre eux, donc un entier est divisible par chaque p_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ si, et seulement s'il est divisible par $\prod_{i=1}^{r} p_i$. On a donc $\bigcap_{i\in[\![1,r]\!]} A_{p_i} = A_{\prod_{i=1}^{r} p_i}$. On en déduit :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in[\![1,r]\!]} A_{p_i}\Big) = \mathbb{P}\left(A_{\prod_{i=1}^{r} p_i}\right) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{r} p_i} = \prod_{i=1}^{r}\frac{1}{p_i} = \prod_{i=1}^{r}\mathbb{P}(A_{p_i}).$$

Donc la famille $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est constituée d'événements indépendants.

2. On a $A = \bigcap_{r\geqslant 1}\bigcup_{i\geqslant r} A_{p_i}$ (*cf.* exercice 3 de la page 849) et donc $\overline{A} = \bigcup_{r\geqslant 1}\bigcap_{i\geqslant r}\overline{A_{p_i}}$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Comme $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est une famille d'événements indépendants, il en est de même de $\left(\overline{A_p}\right)_{p\in\mathcal{P}}$. On a donc, pour $N \geqslant r$:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{r\leqslant i\leqslant N}\overline{A_{p_i}}\Big) = \prod_{r\leqslant i\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{i=r}^{N}\frac{1}{p_i}\right).$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge, on en déduit :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=r}^{+\infty}\overline{A_{p_i}}\right) = \lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{r\leqslant i\leqslant N}\overline{A_{p_i}}\right) \leqslant \lim_{N\to+\infty}\exp\left(-\sum_{i=r}^{N}\frac{1}{p_i}\right) = 0\cdot$$

Ainsi $\overline{A}$ est une réunion dénombrable d'événements négligeables, donc est négligeable. En prenant l'événement contraire, on obtient $\mathbb{P}(A) = 1$.

3. Comme A est de probabilité 1, il n'est pas vide. Il y a donc des entiers ayant une infinité de diviseurs premiers, ce qui donne la contradiction voulue.

15.4 1. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= 1-\mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}\right) = 1-\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}\right)\\ &= 1-\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n}\overline{A_i}\right) = 1-\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=0}^{n}\mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right).\end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1$ équivaut à

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=0}^{n}\mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right) = 0.$$

Comme aucun terme du produit n'est nul, cela équivaut à

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\ln\left(\mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right)\right) = -\infty,$$

c'est-à-dire à la divergence de la série $\sum \ln\left(\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)\right)$.

Si $\mathbb{P}(A_n)$ ne tend pas vers 0, alors les séries de terme général $\ln\left(\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)\right)$ et $\mathbb{P}(A_n)$ sont grossièrement divergentes.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$, alors $\ln \mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right) = \ln\left(1 - \mathbb{P}(A_n)\right) \sim -\mathbb{P}(A_n)$. Les séries de terme général $\ln \mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)$ et $\mathbb{P}(A_n)$ ont même nature.

Ainsi, on a $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1$ si, et seulement si, la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ diverge.

3. La condition $\mathbb{P}(A_n) \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est réalisée.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right) = \prod_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{(i+2)^2}\right) = \prod_{i=0}^{n} \frac{(i+1)(i+3)}{(i+2)^2}$$
$$= \frac{(n+1)!(n+3)!}{2((n+2)!)^2} = \frac{n+3}{2(n+2)}.$$

   On en déduit :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{2(n+2)} = \frac{1}{2}.$$

   (b) Notons B_n l'événement « seul l'événement A_n se réalise ». On a :

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(A_n \cap \bigcap_{i\neq n} \overline{A_i}\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(A_n \cap \bigcap_{\substack{0\leqslant i\leqslant N \\ i\neq n}} \overline{A_i}\right)$$
$$= \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant N \\ i\neq n}} \mathbb{P}(\overline{A_i}).$$

   Pour $N > n$, on a, d'après le calcul mené dans la question précédente :

$$\mathbb{P}(A_n) \prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant N \\ i\neq n}} \mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right) = \frac{\mathbb{P}(A_n)}{\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)} \prod_{0\leqslant i\leqslant N} \mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right)$$
$$= \frac{1}{(n+1)(n+3)} \times \frac{N+3}{2(N+2)}.$$

   On en déduit : $\mathbb{P}(B_n) = \dfrac{1}{2(n+1)(n+3)}$.

   L'événement B « un seul événement A_n se réalise » est $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

   C'est une réunion dénombrable d'événements incompatibles donc :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+3)} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right)$$
$$= \frac{1}{4} \lim_{N\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) = \frac{3}{8}.$$

15.5 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n et C_n sont des événements donc B et C sont des événements (car une réunion ou une intersection d'un nombre dénombrable d'événements est un événement). Comme $A = B = C$, on en déduit que A est un événement.

La suite (B_n) (resp. (C_n)) est décroissante (resp. croissante) donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n).$$

On a de plus, $C_n \subset A_n \subset B_n$ et donc $\mathbb{P}(C_n) \leqslant \mathbb{P}(A_n) \leqslant \mathbb{P}(B_n)$ donc, par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A).$$

2. (a) Les suites $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\overline{C_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes. Il en est donc de même de la suite $\left(B_n \cap \overline{C_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme :

$$B \cap \overline{C} = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \bigcap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{C_n}\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(B_n \cap \overline{C_n}\right),$$

on a, par indépendance des événements B_n et $\overline{C_n}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \cap \overline{C}) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(B_n \cap \overline{C_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(B_n\right) \mathbb{P}\left(\overline{C_n}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(B_n\right) \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\overline{C_n}\right) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}\left(\overline{C}\right).\end{aligned}$$

Les événements B et $\overline{C}$ sont donc indépendants. On sait qu'alors il en est de même de B et C.

(b) On a $B = C = A$. On en déduit :

$$0 = \mathbb{P}(A \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}\left(\overline{A}\right),$$

donc $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

15.6 On remarque pour commencer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$C_k = \bigcup_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}.$$

On démontre la propriété par récurrence sur n.

- La propriété est évidente pour $n = 1$. On la démontre pour $n = 2$, ce qui sera utile pour passer du rang n au rang $n+1$. Il s'agit de démontrer :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \leqslant \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2),$$

ce qui équivaut à :

$$\left(\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)\right)\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \leqslant \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2).$$

En posant $x = \mathbb{P}(A_1)$, $y = \mathbb{P}(A_2)$ et $z = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$, il faut démontrer que $xy - (x + y - z)z \geqslant 0$, c'est-à-dire $(x - z)(y - z) \geqslant 0$. Cette inégalité est vérifiée car $z \leqslant x$ et $z \leqslant y$, ce qui résulte de $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ et $A_1 \cap A_2 \subset A_2$.

- On suppose que la propriété est vérifiée au rang n. On la démontre au rang $n+1$. On pose, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$:

$$C'_k = \bigcup_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n+1} A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}.$$

Il faut donc démontrer que :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(C'_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k).$$

On suppose que $\mathbb{P}(C'_k) \neq 0$ pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, sinon l'inégalité est évidente. On remarque que, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

$$C'_{k+1} = (C_k \cap A_{n+1}) \cup C_{k+1}.$$

En appliquant la propriété au rang 2, on obtient :

$$\mathbb{P}(C'_{k+1})\mathbb{P}\big((C_k \cap A_{n+1}) \cap C_{k+1}\big) \leqslant \mathbb{P}(C_k \cap A_{n+1})\mathbb{P}(C_{k+1}).$$

Il est clair que $C_{k+1} \subset C_k$. On a donc $\mathbb{P}\big((C_k \cap A_{n+1}) \cap C_{k+1}\big) = \mathbb{P}(C_{k+1} \cap A_{n+1})$. On obtient, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\mathbb{P}(C'_{k+1})\,\mathbb{P}(C_{k+1} \cap A_{n+1}) \leqslant \mathbb{P}(C_k \cap A_{n+1})\mathbb{P}(C_{k+1}).$$

En multipliant ces inégalités pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on obtient :

$$\prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(C'_k) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(C_k \cap A_{n+1}) \leqslant \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(C_k \cap A_{n+1}) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(C_k).$$

La suite $(\mathbb{P}(C_k \cap A_{n+1}))_{1 \leqslant k \leqslant n}$ décroît donc s'il existe $k \in [\![2, n]\!]$ tel que l'on ait $\mathbb{P}(C_k \cap A_{n+1}) = 0$, alors $\mathbb{P}(C_n \cap A_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(C'_{n+1}) = 0$, ce qui contredit notre hypothèse. On obtient donc en simplifiant :

$$\prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(C'_k) \times \mathbb{P}(C_n \cap A_{n+1}) \leqslant \mathbb{P}(C_1 \cap A_{n+1}) \times \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(C_k).$$

Comme $C'_{n+1} = C_n \cap A_{n+1}$ et $C'_1 = C_1 \cup A_{n+1}$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(C'_k) \leqslant \mathbb{P}(C_1 \cup A_{n+1})\,\mathbb{P}(C_1 \cap A_{n+1}) \times \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(C_k).$$

En utilisant de nouveau la propriété au rang 2, puis l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(C'_k) \leqslant \mathbb{P}(A_{n+1}) \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(C_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k).$$

15.7 Notons p_n la probabilité cherchée. Soit $n \geqslant 2$. On considère un avion à n sièges. On numérote les passagers par ordre d'arrivée, et on attribue le numéro k à la place

du passager numéro k. On considère les événements G : « le n-ième passager s'installe à sa place » et A_k :« le premier passager s'installe à la k-ième place », pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$. On applique la formule des probabilités totales. On obtient

$$p_n = \mathbb{P}(G) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}(G \mid A_k).$$

Le premier passager choisit au hasard donc, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{1}{n}$.

- Si le premier passager s'assoit à sa place, tous les autres en font de même ; on a donc $\mathbb{P}(G \mid A_1) = 1$.
- Si le premier passager s'assoit la n-ième place, le n-ième passager ne pourra pas s'assoir à sa place ; on a donc $\mathbb{P}(G \mid A_n) = 0$.
- Si le premier passager s'assoit à la k-ième place, pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$, les passagers jusqu'au $(k-1)$-ième s'installent à leur place. Il reste ensuite $n-k+1$ passagers (numérotés de k à n) et $n-k+1$ sièges (le siège numéro 1 et les sièges du $(k+1)$-ième au n-ième). Le passager numéro k choisit son siège au hasard et les suivants s'installent à leur place si elle n'est pas occupée et sinon au hasard. Autrement dit, on est ramené à la situation initiale. On a donc $\mathbb{P}(G \mid A_k) = p_{n-k+1}$.

On obtient :

$$p_n = \frac{1}{n}\left(1 + \sum_{k=2}^{n-1} p_{n-k+1}\right) = \frac{1}{n}\left(1 + \sum_{j=2}^{n-1} p_j\right).$$

On a, de même, $p_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(1 + \sum\limits_{j=2}^{n} p_j\right)$. On en déduit $(n+1)p_{n+1} - np_n = p_n$ et donc $p_{n+1} = p_n$. La suite $(p_n)_{n\geqslant 2}$ est constante. Il est clair que $p_2 = \dfrac{1}{2}$, donc $p_n = \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant 2$.

15.8 On remarque que l'expérience se termine au bout d'un nombre fini de tirages, car à chaque séquence se terminant par un changement de couleur, le nombre total de boules dans l'urne diminue d'au moins une unité. On note $p(b,n)$ la probabilité cherchée et on montre que, pour tous b et n dans $\mathbb{N}^*$, on a $p(b,n) = \dfrac{1}{2}$, par récurrence forte sur $b+n \geqslant 2$.

- Pour $b+n=2$, on a $b=n=1$; l'expérience se termine au bout de deux tirages et la probabilité de terminer par une boule blanche est $\dfrac{1}{2}$.
- Soit $N > 2$. On suppose la propriété vérifiée pour $b+n < N$ et on la démontre pour $b+n=N$. Pour $1 \leqslant i \leqslant b$, on note A_i l'événement « la première séquence comprend i boules blanches, suivies d'une boule noire » et, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note B_i l'événement « la première séquence comprend i boules blanches, suivies d'une boule noire ». Par la formule des probabilités totales, on a :

$$p(b,n) = \sum_{i=1}^{b} \mathbb{P}(A_i)\,p(b-i,n) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)\,p(b,n-i).$$

Par hypothèse de récurrence, on a $p(b-i,n)=\dfrac{1}{2}$ si $i<b$ et $p(0,n)=0$ car s'il ne reste que des boules noires, on les tire toutes successivement. De même, $p(b,n-i)=\dfrac{1}{2}$ si $i<n$ et $p(b,0)=1$. On obtient :

$$p(b,n)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{b-1}\mathbb{P}(A_i)+\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(B_i)\right)+\mathbb{P}(B_n).$$

On calcule :

$$\mathbb{P}(B_n)=\frac{n}{n+b}\times\frac{n-1}{n+b-1}\times\cdots\times\frac{1}{1+b}=\frac{n!\,b!}{(n+b)!}\cdot$$

On trouve de même $\mathbb{P}(A_b)=\dfrac{n!\,b!}{(n+b)!}\cdot$ On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}p(b,n)&=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{b-1}\mathbb{P}(A_i)+\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(B_i)\right)+\frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(A_b)+\mathbb{P}(B_n)\Big)\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{b}\mathbb{P}(A_i)+\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B_i)\right)=\frac{1}{2}\cdot\end{aligned}$$

15.9 L'expérience aléatoire peut être vue comme une suite d'épreuve de Bernoulli indépendantes (chaque fois qu'il a besoin d'allumette, il choisit au hasard la boîte dans laquelle il la prend ; ce choix entre les deux boîtes se fait de manière équiprobable et indépendamment de ce qui précède). L'événements A_k « lorsqu'il prend la dernière allumette d'une boîte, l'autre boîte contient encore k allumettes » est réalisé s'il a, lors des $2n+1-k$ premiers tirages :

- soit choisi n fois la première boîte et $n+1-k$ la seconde, en terminant par la première boîte, ce qui est réalisé avec la probabilité $\dfrac{\binom{2n-k}{n-1}}{2^{2n+1-k}}$, car il faut choisir les $n-1$ tirages effectués dans la première boîte, parmi les $2n-k$ premiers tirages ;
- soit choisi $n+1$ fois la seconde boîte et $n-k$ la première, en terminant par la seconde boîte, ce qui est réalisé avec la probabilité $\dfrac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n+1-k}}$, car il faut choisir les n tirages effectués dans la seconde boîte, parmi les $2n-k$ premiers tirages.

La probabilité cherchée est donc :

$$\frac{\binom{2n-k}{n-1}+\binom{2n-k}{n}}{2^{2n+1-k}}=\frac{\binom{2n-k+1}{n}}{2^{2n+1-k}}\cdot$$

15.10 1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note J_n l'événement « le joueur j_n joue » et G_n l'événement « le joueur j_n gagne ». Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$p_n=\mathbb{P}(G_n)=\mathbb{P}(G_n\cap J_n)=\mathbb{P}(G_n\mid J_n)\,\mathbb{P}(J_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^3 q_n=\frac{1}{8}q_n,$$

car si A_n joue, pour qu'il gagne, il faut qu'il soit vainqueur de trois parties successives.

2. (a) Pour $n \leqslant 4$, le joueur j_n est sûr de jouer car on joue en tout au moins trois parties. On a donc $q_n = 1$ si $1 \leqslant n \leqslant 4$.

   (b) Pour $n \geqslant 5$, le joueur j_n entre en jeu contre j_{n-1} ou j_{n-2}. On note J_n^1 (resp. J_n^2) l'événement « j_n joue et rencontre j_{n-1} » (resp. « j_n joue et rencontre j_{n-2} »). Ces événements sont incompatibles. On obtient donc :

$$\begin{aligned} q_n = \mathbb{P}(J_n) &= \mathbb{P}(J_n^1) + \mathbb{P}(J_n^2) = \mathbb{P}(J_n^1 \cap J_{n-1}) + \mathbb{P}(J_n^2 \cap J_{n-2}) \\ &= \mathbb{P}(J_n^1 \mid J_{n-1})\,\mathbb{P}(J_{n-1}) + \mathbb{P}(J_n^2 \mid J_{n-2})\,\mathbb{P}(J_{n-2}) \\ &= \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{4}q_{n-2}. \end{aligned}$$

   En effet, si j_{n-1} est rentré dans la partie, pour qu'il rencontre j_n, il faut et il suffit qu'il gagne sa première partie contre un adversaire rentré avant lui ; de même, une fois que j_{n-2} est rentré dans la partie, pour qu'il rencontre j_n, il faut et il suffit qu'il gagne sa première partie contre un adversaire rentré avant lui et qu'il gagne contre j_{n-1}.

3. Pour pouvoir étendre la relation à $n \geqslant 2$ et ainsi gérer plus facilement les conditions initiales, on considère la suite $(q'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $q'_n = \frac{1}{2}q'_{n-1} + \frac{1}{4}q'_{n-2}$, avec $q'_3 = q_3 = 1$ et $q'_4 = q_4 = 1$. On a alors $q'_n = q_n$ pour $n \geqslant 3$.

   On obtient $q'_2 = 2$, $q'_1 = 0$ et $q'_0 = 8$. La relation de récurrence linéaire sur deux termes a pour équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$, de solutions $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$q'_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n.$$

   Avec $q'_0 = 8$ et $q'_1 = 0$, on trouve $\alpha = \frac{4(1+\sqrt{5})}{\sqrt{5}}$ et $\beta = \frac{4(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}}$. On obtient, pour tout $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{4}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right) \\ p_n &= \frac{1}{8}q_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right). \end{aligned}$$

15.11 On note I l'événement « le gardien est ivre » et A l'événement « le gardien fait plus de quatre tentatives ». On applique la formule de Bayes et la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(I \mid A) = \frac{\mathbb{P}(I)\,\mathbb{P}(A \mid I)}{\mathbb{P}(I)\,\mathbb{P}(A \mid I) + \mathbb{P}(\overline{I})\,\mathbb{P}(A \mid \overline{I})}.$$

- On a, d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(A \mid \overline{I}) = \frac{5}{6}\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

- S'il est ivre, quel que soit l'essai la probabilité de réussir à ouvrir la porte est $\dfrac{1}{6}$ et la probabilité contraire $\dfrac{5}{6}$. On en déduit $\mathbb{P}(A \mid I) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^4$.

On obtient :

$$\mathbb{P}(I \mid A) = \frac{\frac{1}{4}\frac{5^4}{6^4}}{\frac{1}{4}\frac{5^4}{6^4} + \frac{3}{4}\frac{1}{3}} \approx 0,32.$$

15.12 1. (a) Pour $k \in [\![1, c]\!]$, j_k ne peut jouer et donc gagner qu'en un nombre de coups de la forme $k + cn$, avec $n \in \mathbb{N}$. La probabilité qu'il gagne au bout de $k + cn$ coups exactement est

$$(q_1 q_2 \dots q_c)^n (q_1 \dots q_{k-1} p_k),$$

car cela est réalisé si, et seulement si, tous les joueurs ont perdus n fois et les joueurs avant lui ont perdu une fois de plus. On en déduit :

$$\mathbb{P}(G_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} (q_1 \dots q_c)^n (q_1 \dots q_{k-1} p_k) = \frac{q_1 \dots q_{k-1} p_k}{1 - q_1 \dots q_c}.$$

(b) L'événement G « la partie se termine au bout d'un nombre fini de coups » est la réunion disjointes des G_k. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G) = \sum_{k=1}^{c} \mathbb{P}(G_k) &= \frac{1}{1 - q_1 \dots q_c} \sum_{k=1}^{c} q_1 \dots q_{k-1} p_k \\ &= \frac{1}{1 - q_1 \dots q_c} \sum_{k=1}^{c} q_1 \dots q_{k-1}(1 - q_k) = 1,\end{aligned}$$

car la somme est télescopique. La partie se termine presque sûrement au bout d'un nombre fini de coups.

(c) Le jeu est équitable si, et seulement si :

$$\forall k \in [\![1, c-1]\!] \quad \mathbb{P}(G_{k+1}) = \mathbb{P}(G_k),$$

ce qui équivaut, pour tout $k \in [\![1, c-1]\!]$ à $p_k = q_k p_{k+1}$, c'est-à-dire à $p_{k+1} = \dfrac{p_k}{1 - p_k}$.

(d) Pour tout $k \in [\![1, c-1]\!]$, on $\dfrac{1}{p_{k+1}} = \dfrac{1}{p_k} - 1$ et donc $\dfrac{1}{p_k} = \dfrac{1}{p_1} - (k-1)$, puis $p_k = \dfrac{p_1}{1 - p_1(k-1)}$.

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(G_k) = q_1 \dots q_{k-1} p_k > 0$. Comme les événements G_k sont incompatibles, la série $\sum \mathbb{P}(G_k)$ converge. C'est impossible si la suite $(\mathbb{P}(G_k))$ est constante, non nulle. Le jeu ne peut pas être équitable.

(b) La suite de terme général $Q_n = q_1 \dots q_n$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. On pose $Q_0 = 1$. La probabilité que le jeu se termine en un nombre fini de coups est :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} q_1 \dots q_{k-1}(1 - q_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (Q_{k-1} - Q_k) = 1 - a.$$

15.13 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note Π_k l'événement « le k-ième tirage donne pile » et F_k l'événement « le k-ième tirage donne face ». Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_{2n} l'événement « la partie dure plus de $2n$ coups ».

1. Pour $n \geqslant 1$, l'événement A_{2n} est réalisé si après chacun des lancers on n'a jamais deux piles de plus que de faces ou le contraire. Il faut donc que dans chaque groupe de deux lancers successifs commençant par un lancer d'indice impair, on obtienne exactement un pile et un face. On en déduit :
$$A_{2n} = \bigcap_{i=1}^{n} (\Pi_{2i-1} \cap F_{2i}) \cup (F_{2i-1} \cap \Pi_{2i}).$$
puis, par indépendance des résultats des différents lancers :
$$\mathbb{P}(A_{2n}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left((\Pi_{2i-1} \cap F_{2i}) \cup (F_{2i-1} \cap \Pi_{2i})\right) = \big(2p(1-p)\big)^n.$$

2. On note G l'événement « la personne gagne ». La personne gagne nécessairement au bout d'un nombre pair de lancers. Pour $n \geqslant 1$, on note G_{2n} l'événement « la personne gagne au $2n$-ième lancer ». L'événement G_{2n} est réalisé à condition que la partie dure plus de $2n-2$ coups et que les deux derniers lancers donnent pile. On a donc, pour $n \geqslant 2$:
$$G_{2n} = A_{2n-2} \cap \Pi_{2n-1} \cap \Pi_{2n}.$$
Par indépendance, on a :
$$\mathbb{P}(G_{2n}) = (2p(1-p))^{n-1} p^2.$$
On note que la formule reste valable pour $n = 1$. On a $0 < 2p(1-p) < 1$. On en déduit :
$$\mathbb{P}(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2p(1-p))^{n-1} p^2 = \frac{p^2}{1-2p(1-p)} = \frac{p^2}{1-2p+2p^2}.$$
La probabilité qu'il perde s'obtient en échangeant p et $1-p$. On trouve $\dfrac{(1-p)^2}{1-2p+2p^2}$. Comme $\dfrac{p^2}{1-2p+2p^2} + \dfrac{(1-p)^2}{1-2p+2p^2} = 1$, il est presque sûr que la partie se terminera au bout d'un nombre fini de lancers.

15.14 1. La première séquence PP apparaît nécessairement aux deux premiers lancers, sinon au lancer précédent on a P et donc déjà une séquence PP ou F et une séquence FP. La probabilité cherchée est p^2.

2. Si la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n, les lancers précédents sont nécessairement des P, car sinon en considérant le rang k du dernier F avant celui qui est numéroté n, on aurait une séquence FP aux lancers k et $k+1$. Il faut donc avoir une suite de $(n-1)$ P suivi d'un F. Ainsi $x_n = p^{n-1}q$. L'événement « la première séquence PP apparaît avant la première séquence PF » est la réunion des événements précédents pour $n \geqslant 2$. On a donc :
$$x = \sum_{n=2}^{+\infty} x_n = q \sum_{n=2}^{+\infty} p^{n-1} = \frac{pq}{1-p} = p.$$

3. (a) On note y la probabilité cherchée et y_n la probabilité de l'événement « la séquence PP apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n et il n'y a pas eu avant de séquence PF ».
Si $n > 2$ et si la séquence PP apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n, on a nécessairement des F aux rangs précédents, car sinon on obtiendrait une séquence PF. Ainsi y_n est la probabilité d'obtenir $(n-2)$ F suivis de deux P. On a donc $y_n = q^{n-2}p^2$ et :

$$y = \sum_{n=2}^{+\infty} q^{n-2}p^2 = \frac{p^2}{1-q} = p.$$

(b) On note z la probabilité cherchée et on défini z_n comme précédemment. Pour obtenir PF pour la première fois aux lancers $n-1$ et n sans avoir de séquence PP avant, il faut avoir, si $n > 2$, un F au rang $n-2$, sinon on a une séquence PP et des F dans les lancers précédents, sinon on obtient une séquence PF. Ainsi z_n est la probabilité d'avoir $(n-2)$ F puis P et F : $z_n = q^{n-2}pq$ et :

$$z = \sum_{n=2}^{+\infty} q^{n-2}pq = \frac{pq}{1-q} = q.$$

(c) On note t la probabilité cherchée et on défini t_n comme précédemment. Si la première séquence PF apparaît aux lancers $n-1$ et n soit il n'y a pas de F avant (suite de $(n-1)$ P et d'un F), soit en considérant le dernier F avant le rang $n-1$, on voit qu'il ne peut être précédé ni d'un P ni d'un F : c'est le premier lancer. On a alors un F, puis $(n-2)$ P et un F (cela nécessite $n \geqslant 3$). On obtient $t_n = p^{n-1}q + p^{n-2}q^2$ si $n \geqslant 3$ et $t_2 = pq$. On en déduit :

$$t_n = \sum_{n=2}^{+\infty} p^{n-1}q + \sum_{n=3}^{+\infty} p^{n-2}q^2 = \frac{pq}{1-p} + \frac{pq^2}{1-p} = p + pq.$$

(d) On note u la probabilité cherchée et on défini u_n comme précédemment. Si la première séquence PP apparaît aux lancers n et $n-1$ sans qu'il y ait avant de séquence FF, c'est que dans les lancers précédents, on a une alternance de P et F (des F au lancer $n-2$ et à tous ceux qui ont la même parité). Le résultat dépend de la parité de n. On obtient :

$$t_n = \begin{cases} (pq)^{\frac{n-2}{2}}p^2 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ (pq)^{\frac{n-3}{2}}qp^2 & \text{si} \quad n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a donc :

$$t = \sum_{k=0}^{+\infty}(pq)^k p^2 + \sum_{k=0}^{+\infty}(pq)^k qp^2 = \frac{p^2}{1-pq} + \frac{qp^2}{1-pq} = \frac{p^2(1+q)}{1-pq}.$$

15.15 L'espace probabilisé qui modélise cette situation est celui d'un jeu infini de pile ou face. En effet, on a une suite de parties indépendantes, à deux issues.

1. Pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on note $A_{a,b}$ l'événement « si les joueurs débutent la partie avec des capitaux respectifs de a et b euros, alors A finira ruiné ». En appliquant la

formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(G_1, \overline{G_1})$, où G_1 est l'événement « A gagne la première partie », on trouve :

$$\begin{aligned} R(a,b) = \mathbb{P}(A_{a,b}) &= \mathbb{P}(G_1)\,\mathbb{P}(A_{a,b} \mid G_1) + \mathbb{P}(\overline{G_1})\,\mathbb{P}(A_{a,b} \mid \overline{G_1}) \\ &= pR(a+1,b) + qR(a,b+1). \end{aligned}$$

En effet, si A gagne la première partie, il dispose avant d'entreprendre les parties suivantes de $a+1$ euros et B de $b-1$ euros. Le raisonnement est le même dans l'autre cas.

2. Tout au long de la partie, le capital total des deux joueurs reste constant. On le note N. En fait $R(a,b)$ ne dépend donc que de a : on le note u_a. On a donc $u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$, c'est-à-dire :

$$u_{a+1} = \frac{1}{p}u_a - \frac{q}{p}u_{a-1}.$$

On a donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $x^2 - \dfrac{1}{p}x + \dfrac{q}{p}$. Une des racines est 1, l'autre est $\dfrac{q}{p}$.

- Premier cas : $p \neq q$, c'est-à-dire $p \neq \dfrac{1}{2}$.

  Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $a \in [\![0, N]\!]$, $u_a = \alpha + \beta\left(\dfrac{q}{p}\right)^a$.

  On remarque que $u_0 = 1$, car si le capital de A est nul, il est ruiné d'emblée. De même, $u_N = 0$, car alors c'est B qui est ruiné. On en déduit $\alpha = -\dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$ et $\beta = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$, puis $u_a = \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$.

  En reprenant la notation initiale, on a :

$$R(a,b) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

- Second cas : $p = q$, c'est-à-dire $p = \dfrac{1}{2}$..

  Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $a \in [\![0, N]\!]$, $u_a = \alpha + \beta a$.

  De $u_0 = 1$ et $u_N = 0$, on tire $\alpha = 1$ et $\beta = -\dfrac{1}{N}$ et donc $u_a = 1 - \dfrac{a}{N}$. On conclut :

$$R(a,b) = \frac{b}{a+b}.$$

3. La probabilité de ruine $S(a,b)$ du joueur B quand les capitaux initiaux sont a et b s'obtient à partir de $R(a,b)$ en échangeant les rôles, c'est-à-dire en échangeant

p et q et a et b. On obtient :

$$S(a,b) = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^b - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}} \quad \text{si} \quad p \neq q \quad \text{et} \quad S(a,b) = \frac{a}{a+b} \quad \text{si} \quad p = q.$$

Si $p \neq q$, on obtient :

$$R(a,b) + S(a,b) = \frac{q^a p^b - q^{a+b}}{p^{a+b} - q^{a+b}} + \frac{q^a p^b - p^{a+b}}{q^{a+b} - p^{a+b}} = 1.$$

Ce résultat est évident pour $p = q$. Il est donc presque sûr que le jeu s'arrêtera au bout d'un nombre fini de parties.

4. Si $p \leqslant q$, on trouve $\lim\limits_{b \to +\infty} R(a,b) = 1$.

   Si $p > q$, on trouve $\lim\limits_{b \to +\infty} R(a,b) = \left(\frac{p}{q}\right)^a$. Dans ce cas, c'est-à-dire si le joueur A joue mieux que le joueur B, la ruine du joueur A n'est pas certaine, même si le capital initial du joueur B est très important.

15.16 1. On note A_n (resp. B_n) l'événement « le parapluie est disponible (resp. indisponible) ». Pour $n \in \mathbb{N}$ applique la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements (A_n, B_n). On obtient :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) + \mathbb{P}(B_n)\,\mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n) = p\,p_n + q_n.$$

En effet, $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) = p$, car si le parapluie est disponible après n déplacements, il faut que le banquier l'emporte, c'est-à-dire qu'il pleuve, pour qu'il reste disponible après $n+1$ déplacements ; $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n) = 1$, car si après n déplacements le parapluie n'est pas disponible, il le sera après $n+1$.
On trouve de même :

$$q_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}(B_{n+1} \mid A_n) + \mathbb{P}(B_n)\,\mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n) = q\,p_n + 0\,q_n$$

et donc $S = \begin{pmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix}$.

2. On diagonalise S : les valeurs propres sont 1 et $-q$. Une base de vecteurs propres est $((1,q),(-1,1))$. On obtient $S = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ q & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{q+1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -q & 1 \end{pmatrix}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-q)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que les suites (p_n) et (q_n) convergent. On note p_∞ et q_∞ leurs limites. On a :

$$\begin{pmatrix} p_\infty \\ q_\infty \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+q} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+q} \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix},$$

car $p_0 + q_0 = 1$. On a donc $p_\infty = \dfrac{1}{1+q}$.

Chapitre 16 : Variables aléatoires discrètes

I Variables aléatoires discrètes 892
1 Définition 892
2 Loi d'une variable aléatoire discrète 893
II Lois usuelles 895
1 Loi géométrique 895
2 Loi de Poisson 897
III Couples de variables aléatoires 898
1 Définitions 898
2 Loi conjointe 899
3 Lois marginales 900
4 Lois conditionnelles 901
5 Généralisation aux n-uplets de variables aléatoires 902
IV Indépendance de variables aléatoires 903
1 Indépendance de deux variables aléatoires 903
2 Indépendance de n variables aléatoires 906
3 Suite de variables aléatoires indépendantes 908
V Espérance, variance, covariance 909
1 Espérance 909
2 Variance 915
3 Covariance 918
4 Loi faible des grands nombres 920
VI Fonctions génératrices 921
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 924
Exercices 952

Variables aléatoires discrètes

16

I Variables aléatoires discrètes

1 Définition

Définition 1

Une **variable aléatoire ! discrète** sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application de Ω dans un ensemble quelconque E telle que :

1. l'ensemble $X(\Omega)$ est au plus dénombrable ;
2. pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

Si $E \subset \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire discrète réelle.
Si $X(\Omega)$ est fini, on dit que X est une variable aléatoire finie.

Remarque L'appartenance de $X^{-1}(\{x\})$ à $\mathcal{A}$ signifie que c'est un événement.

Proposition 1

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans E. Alors pour tout partie A de E, l'ensemble $X^{-1}(A)$ est un événement.

Démonstration page 924

Notations

- Comme pour les variables aléatoires finies, l'événement $X^{-1}(A)$ est noté
$$\{X \in A\}.$$
- En particulier, pour tout $x \in E$, l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ est noté :
$$\{X = x\}.$$
On remarque que, pour tout $x \in E$, on a $\{X = x\} = \varnothing$ si $x \notin X(\Omega)$; ainsi $\{X = x\} = \varnothing$ sauf pour un nombre au plus dénombrable de valeurs de x.

Exemples Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.

1. Si A est un événement, alors la fonction $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire finie. En effet, on a $X(\Omega) \subset \{0,1\}$, qui est fini. De plus $\{X=1\} = A$ et $\{X=0\} = \bar{A}$ sont des événements.
2. Une fonction constante sur Ω est une variable aléatoire finie. En effet, il existe a tel que $X(\Omega) = \{a\}$, donc $\{X=a\} = \Omega \in \mathcal{A}$.

2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est muni d'une probabilité, alors on peut définir la loi de X.

Théorème 2

Si X est une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$$

est une probabilité sur $\left(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega))\right)$, appelée **loi de X** et notée $\mathbb{P}_X$.

Démonstration page 924

Remarques

- L'ensemble $X(\Omega)$ étant dénombrable, il n'y a aucun inconvénient à le munir de la tribu $\mathcal{P}(X(\Omega))$.
- Cette probabilité est la probabilité image de $\mathbb{P}$ par l'application X (voir l'exercice 15.1 de la page 873).
- Il peut arriver qu'on ne connaisse pas exactement $X(\Omega)$, mais qu'on sache seulement *a priori* qu'il existe un ensemble E dénombrable tel que $X(\Omega) \subset E$. Alors la loi de X apparaîtra comme une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$ telle que $\mathbb{P}_X(\{\omega\}) = 0$ si $\omega \in E \setminus X(\Omega)$.

Définition 2

Une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dite **presque sûrement constante** s'il existe a tel que $\mathbb{P}(X=a) = 1$.

Proposition 3

Si X est une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, la famille $\left(\{X=x\}\right)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé **système complet d'événements associé à X**. On a, en particulier :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) = 1.$$

Démonstration page 924

Exemple Le système complet d'événements associé à la variable $\mathbb{1}_A$ est $(A, \bar{A})$.

Proposition 4

Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, la loi de X est déterminée de manière unique par la donnée, pour tout $x \in X(\Omega)$, de :

$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x).$$

Plus précisément, on a pour tout $A \subset X(\Omega)$:

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration. Compte tenu de la proposition 3 de la page précédente, il s'agit d'un cas particulier de la définition d'une probabilité sur un univers au plus dénombrable par la probabilité des événements élémentaires (théorème 9 de la page 854). □

Remarque Il résulte de la définition que la loi d'une variable aléatoire discrète n'est rien d'autre qu'une probabilité sur un ensemble dénombrable E muni de la tribu $\mathcal{P}(E)$. La proposition suivante montre que toute probabilité sur un ensemble dénombrable peut être considérée comme la loi d'une variable aléatoire discrète. Une telle probabilité est encore appelée **loi discrète**.

Proposition 5

Soit E un ensemble au plus dénombrable et $(p_x)_{x \in E}$ une famille de réels positifs tels que $\sum_{x \in E} p_x = 1$. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X sur cet espace probabilisé tels que :

$$X(\Omega) = E \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E \quad \mathbb{P}(X = x) = p_x.$$

Principe de démonstration. On pourra choisir $\big(\Omega, \mathcal{A}\big) = \big(E, \mathcal{P}(E)\big)$ et $X = \mathrm{Id}_E$.

Démonstration page 924

Remarque Les conditions énoncées en première année pour définir la loi d'une variable aléatoire finie apparaissent comme un cas particulier des conditions énoncées dans la proposition 5. Les lois étudiées en première année peuvent être utilisées dans des espaces probabilisés quelconques.

Exemple La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est donc une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Elle est définie par la donnée d'une série $\sum p_n$ à termes positifs convergente de somme 1.

Définition 3

On dit que deux variables aléatoires discrètes X et Y ont **même loi** si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. On note alors $X \sim Y$.

Si X est une variable aléatoire et $\mathcal{L}$ est une loi discrète, on note alors $X \sim \mathcal{L}$ le fait que la loi de X est $\mathcal{L}$.

Remarques

- On dit aussi de variables aléatoires de même loi qu'elles sont **équidistribuées**.
- Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ont même loi si, et seulement si, $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = x)$.

  Cela ne signifie nullement que $X = Y$.
- On considérera encore que X et Y ont même loi si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ ne diffèrent que par des valeurs de probabilité nulle, c'est-à-dire si, pour tout $x \in X(\Omega) \cup Y(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = x)$

p.925

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \leqslant n)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbb{P}(X \leqslant x)$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \leqslant -n)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathbb{P}(X \leqslant x)$.

Image d'une variable aléatoire par une application

Proposition 6

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et f une application définie sur $X(\Omega)$. Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète, notée $f(X)$, dont la loi est donnée par :

$$\forall y \in f(X)(\Omega) \quad \mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration page 925

II Lois usuelles

Les lois discrètes définies ici s'ajoutent aux lois finies étudiées en première année (loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale).

1 Loi géométrique

Définition 4

Soit $p \in]0, 1[$.
On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit la loi géométrique de paramètre p si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = k) = p\, q^{k-1},$$

où $q = 1 - p$.

La proposition « X suit la loi géométrique de paramètre p » se note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Remarque On définit bien ainsi la loi d'une variable aléatoire discrète car on a $p\,q^{k-1} \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p\,q^{k-1} = \frac{p}{1-q} = 1.$$

Situation type

On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, la probabilité de succès à chaque épreuve étant $p \in]0,1[$ (on pose $q = 1-p$), modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère le temps d'attente du premier succès.

Plus précisément, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement « la k-ième épreuve est un succès » et l'on pose :

- $T = n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) si l'événement $\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$ est réalisé ; alors $\{T = n\}$ est un événement, car intersection finie d'événements, et $\mathbb{P}(T = n) = (1-p)^{n-1}p = q^{n-1}p$;
- $T = +\infty$ si aucun des A_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, n'est réalisé ; on a donc :

$$\{T = +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{A_n} \in \mathcal{A},$$

et $\mathbb{P}(T = +\infty) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0.$

La variable aléatoire discrète T prend la valeur $+\infty$ avec une probabilité nulle et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(X = k)$, où X suit la loi géométrique de paramètre p. Dans un tel cas, on dira encore que T suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Proposition 7

Si la variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a, pour tout entier naturel k,

$$\mathbb{P}(X > k) = q^k.$$

Démonstration page 925

Interprétation Ce résultat est tout à fait évident si l'on interprète l'on interprète une loi géométrique comme le temps d'attente d'un premier succès. L'événement $\{X > k\}$ est « les k premières épreuves ont été des échecs », de probabilité q^k.

Corollaire 8

Si la variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a, pour tout couple d'entiers naturels (k, ℓ) :

$$\mathbb{P}(X > k + \ell \mid X > k) = \mathbb{P}(X > \ell).$$

Démonstration page 925

Remarque La probabilité que X prenne une valeur supérieure à $k+\ell$ sachant qu'elle est supérieure à k, donc qu'elle s'accroisse au moins de ℓ est égale à la probabilité qu'elle prenne une valeur supérieure à ℓ. Si l'on pense à X comme à une durée, on peut dire que X ne tient pas compte du passé. On dit que la variable aléatoire X est **sans mémoire**.

Proposition 9

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que X est sans mémoire, c'est-à-dire que, pour tout couple d'entiers naturels (k,ℓ), on a :

$$\mathbb{P}(X > k+\ell \mid X > k) = \mathbb{P}(X > \ell).$$

Montrer que X suit une loi géométrique.

Principe de démonstration. On étudie la suite de terme général $u_n = \mathbb{P}(X > n)$.

Démonstration page 925

p.926

Exercice 2 (Temps d'attente du r-ième succès)

On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de probabilité de succès $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$. On définit la variable aléatoire réelle Y_r égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir r succès pour la première fois et à ∞ si on n'obtient jamais r succèss.

Déterminer la loi de Y_r.

2 Loi de Poisson

Définition 5

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle discrète X suit **la loi de Poisson de paramètre λ**, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

La proposition « X suit la loi de Poisson de paramètre λ » se note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque

On définit bien ainsi la loi d'une variable aléatoire discrète car on a $\dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Il n'est pas possible de donner un modèle simple pour la loi de Poisson. Celle-ci apparaît comme une loi limite.

Proposition 10

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes telles que X_n suive la loi binomiale de paramètre (n, p_n). On suppose que la suite (np_n) converge vers un réel $\lambda > 0$. Alors, pour tout entier k de $\mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Démonstration page 926

Remarque

Si la variable aléatoire X suit une loi binomiale avec n grand et p proche de 0, elle suit approximativement une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$. On dit encore que la loi de Poisson est la **loi des événements « rares »**.
Dans la pratique, on peut décrire par une loi de Poisson le nombre d'événements d'un certain type se produisant dans une période de temps donnée, par exemple :

- le nombre de clients se présentant dans un magasin ;
- le nombre de véhicules franchissant un poste de péage ;
- le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique.

Voir l'exercice 11 de la page 905.

III Couples de variables aléatoires

1 Définitions

Définition 6

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs respectivement dans E et E', l'application :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times E' \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

est appelée **couple de variables aléatoires discrètes** sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On note (X, Y) ce couple de variables aléatoires.

Si $E = E' = \mathbb{R}$, alors (X, Y) est appelé un **couple de variables aléatoires réelles discrètes**.

Les couples de variables aléatoires sont simplement les variables aléatoires à valeurs dans $E \times E'$, comme le prouve la proposition suivante.

Proposition 11

- Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs respectivement dans E et E', le couple (X, Y) est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E \times E'$.
- Réciproquement, toute variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $E \times E'$ peut s'écrire (X, Y) où X et Y sont des variables aléatoires discrètes à valeurs respectivement dans E et E'.

Démonstration page 927

Proposition 12

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors la famille d'événements :

$$\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$

est un système complet d'événements de Ω appelé **système complet d'événements associé au couple (X, Y)**.

Démonstration page 927

Remarque Il découle immédiatement de cette proposition que si (X, Y) est un couple de variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors on a :

$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) = 1.$$

Proposition 13

L'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace vectoriel réel. De plus, le produit de deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une variable aléatoire réelle discrète.

Démonstration page 927

2 Loi conjointe

Définition 7

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans E et E' respectivement. La **loi conjointe** de X et Y est la loi du couple (X, Y).

Remarques

- La loi de (X, Y) est déterminée par la famille :

$$\Big(\mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)\Big)_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}.$$

Cela résulte de la proposition 4 de la page 894 appliquée à la variable (X, Y).

- Soit E et E' deux ensembles au plus dénombrables, $(p_{x,y})_{(x,y)\in E\times E'}$ une famille de réels. Il résulte de la proposition 5 de la page 894 qu'il existe un couple (X,Y) de variables aléatoires à valeurs dans $E\times E'$ tel que, pour tout $(x,y)\in E\times E'$, on ait $\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\})=p_{x,y}$ si, et seulement si, les $p_{x,y}$ sont positifs et vérifient $\sum_{(x,y)\in E\times E'} p_{x,y}=1$.

p.927

Exercice 3 Soit a et λ des réels strictement positifs. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie :

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2 \quad \mathbb{P}\left(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\right)=a\frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i!\,j!}.$$

Déterminer la valeur de a en fonction de λ.

3 Lois marginales

Définition 8

Pour tout couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes, la loi de X est appelée **première loi marginale du couple** et celle de Y est appelée **deuxième loi marginale du couple**.

Le théorème suivant exprime le fait que l'on peut déduire les loi marginales de la loi du couple. Pour obtenir une loi marginale, on somme par rapport à l'autre variable.

Théorème 14

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On dispose des égalités suivantes :

$$\forall x\in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\});$$

$$\forall y\in Y(\Omega) \quad \mathbb{P}(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\}).$$

Démonstration. Ces égalités résultent de ce que $(\{Y=y\})_{y\in Y(\Omega)}$ et $\left(\{X=x\}\right)_{y\in X(\Omega)}$ sont des systèmes complets d'événements (on applique la proposition 3 de la page 851). □

p.928

Exercice 4 On reprend l'exemple de l'exercice 3 de la page 900. Déterminer les lois marginales de X et Y.

p.928

Exercice 5 On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès $p\in\,]0,1[$. On note X (respectivement Y) le rang du premier (respectivement du second) succès.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. En déduire les lois de X et Y.

4 Lois conditionnelles

Définition 9

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout y de $Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, la **loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$** est la loi de X dans l'espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_{\{Y=y\}}\right)$.
Elle est donc déterminée par la donnée, pour tout $x \in X(\Omega)$, de :

$$\mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X = x) = \mathbb{P}(X = x \mid Y = y).$$

De même, pour tout x de $X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, la **loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$** est la loi de Y dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_{\{X=x\}})$.

Remarques

- On rappelle que $\mathbb{P}_{\{Y=y\}}$ est la probabilité conditionnelle sachant $\{Y = y\}$.
- Les lois conditionnelles sont des lois de variables aléatoires ; elles en ont les propriétés.

p.928

Exercice 6 On reprend l'exemple du couple (X, Y) des deux premiers succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli.

Déterminer pour $j \geqslant 2$, la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = j\}$ et pour $i \geqslant 1$, la loi conditionnelle de $Y - i$ sachant $\{X = i\}$. Commenter.

Proposition 15

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On suppose que, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$. Alors, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) &= \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) \\
&= \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y \mid X = x), \\
\mathbb{P}(X = x) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y)\,\mathbb{P}(X = x \mid Y = y), \\
\mathbb{P}(Y = y) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y \mid X = x).
\end{aligned}$$

Démonstration. Les premières égalités résultent de la définition des probabilités conditionnelles, les deux dernières de la formule des probabilités totales appliquée aux systèmes complets d'événements $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$ et $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ associés aux variables aléatoires Y et X. □

Remarque Ainsi, connaissant une des lois marginales et la probabilité conditionnelle de l'autre variable par rapport à celle-ci, on obtient la loi conjointe et la loi marginale de la deuxième variable.

p.929

Exercice 7 Soit X et Y deux variables aléatoires sur le même espace probabilisé, à valeurs dans $\mathbb{N}$, $p \in]0,1[$ et $\lambda > 0$. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ et que, pour $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = n\}$ est la loi binomiale de paramètre (n,p). Déterminer la loi de Y.

5 Généralisation aux n-uplets de variables aléatoires

Définition 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs respectivement dans $E_1, \ldots, E_n$, alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E_1 \times \cdots \times E_n \\ \omega & \longmapsto & (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \end{array}$$

est appelée **n-uplet de variables aléatoires** sur Ω.
On le noté $(X_1, \ldots, X_n)$.

Si $E_1 = \cdots = E_n = \mathbb{R}$, $(X_1, \ldots, X_n)$ est appelé un **vecteur aléatoire discret**.

On peut démontrer, comme dans le cas des couples de variables aléatoires discrètes, la proposition suivante.

Proposition 16

Les n-uplets de variables aléatoires discrètes, à valeurs respectivement dans $E_1, \ldots, E_n$, sont les variables aléatoires discrètes à valeurs dans $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Remarque Un vecteur aléatoire discret est donc une variable aléatoire à valeurs dans un espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Définition 11

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- La **loi conjointe** de $X_1, \ldots, X_n$ est la loi du n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$.
- Les **lois marginales** du n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ sont les lois des variables aléatoires X_1, $X_2, \ldots$, X_n.

Remarque
Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors la loi conjointe de $X_1, \dots, X_n$ est déterminée par la donnée, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, de :
$$\mathbb{P}(\{X_1 = x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n = x_n\}).$$
L'événement $\{X_1 = x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n = x_n\}$ est noté $\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$ également et sa probabilité $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$.

Comme dans le cas des couples de variables aléatoires, les lois marginales des n-uplets s'obtiennent à partir de la loi conjointe. Pour obtenir une loi marginale, il suffit donc sommer par rapport aux autres variables.

Théorème 17
Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout $x_k \in X_k(\Omega)$, on a :
$$\mathbb{P}(X_k = x_k) = \sum_{\substack{x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_{k-1} \in X_{k-1}(\Omega), \\ x_{k+1} \in X_{k+1}(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)}} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n).$$

Démonstration page 929

p.930 **Exercice 8** Montrer que si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes sur le même espace probabilisable et f est une fonction quelconque définie sur $E_1 \times \cdots \times E_n$, alors $f(X_1, \dots, X_n)$ est une variable aléatoire discrète.

Exemple En particulier si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes, alors $X_1 + \cdots + X_n$, $X_1 \times \cdots \times X_n$, $\min(X_1, \dots, X_n)$ et $\max(X_1, \dots, X_n)$ sont des variables aléatoires.

IV Indépendance de variables aléatoires

1 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 12
Deux variables aléatoires discrètes X et Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont dites **indépendantes** si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants, c'est-à-dire vérifient :
$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y).$$

Attention L'indépendance est une notion qui dépend de la probabilité choisie.

Exemple Une variable presque sûrement constante est indépendante de toute variable aléatoire discrète, car un événement de probabilité 0 ou 1 est indépendant de tout événement.

Remarques

- Dans le cas de variables aléatoires indépendantes, la donnée des lois marginales permet donc de connaître la loi conjointe.
- L'indépendante de deux variables aléatoires se lit sur la forme de la loi conjointe. En effet, si X et Y sont indépendantes, on obtient en posant $\varphi(x) = \mathbb{P}(X = x)$ et $\psi(y) = \mathbb{P}(Y = y)$:

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) = \varphi(x)\,\psi(y).$$

La réciproque fait l'objet de l'exercice suivant.

p.930

Exercice 9 On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) s'écrit :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad \mathbb{P}\left(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\right) = \varphi(x)\,\psi(y).$$

où φ et ψ sont des fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$. Montrer que X et Y sont indépendantes et qu'il existe des constantes C et C' telle que :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad \mathbb{P}(X = x) = C\varphi(x) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(Y = y) = C'\psi(y).$$

Proposition 18

Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans E et F respectivement, indépendantes, alors, pour toute partie A de E et toute partie B de F, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants, c'est-à-dire vérifient :

$$\mathbb{P}\big(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}\big) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B).$$

Démonstration page 930

Proposition 19

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Il y a équivalence entre :

(*i*) les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ;

(*ii*) pour tout y de $Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ est égale à la loi de X ;

(*iii*) pour tout x de $Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$ est égale à la loi de Y.

Démonstration page 931

Proposition 20

Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes, indépendantes, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ alors, pour toute fonction f définie sur $X(\Omega)$ et toute fonction g définie sur $Y(\Omega)$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration page 931

Loi de la somme de deux variables indépendantes

Proposition 21

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=n-k).$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=n-k).$$

Démonstration page 931

L'exercice suivant montre que la loi de Poisson, comme la loi binomiale est stable.

p.931

Exercice 10 Montrer que, si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors la somme $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Exemple Supposons que le nombre de clients se présentant dans un magasin dans un intervalle de temps donné suive une loi de Poisson. Notons λ le paramètre de cette loi pour l'intervalle $[a,b[$ et μ pour l'intervalle $[b,c[$, avec $a<b<c$. Alors, la loi correspondant à l'intervalle $[a,c[$ est $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.
On en déduit la modélisation suivante : la nombre de clients se présentant dans le magasin dans un intervalle de temps $[a,b[$ suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha\,(b-a)$, où α est un réel strictement positif fixé.

Réciproquement, l'exercice suivant montre que c'est la seule modélisation envisageable.

p.932

Exercice 11 Pour $a<b$, notons $N_{a,b}$ le nombre de clients se présentant dans un magasin dans l'intervalle de temps $[a,b[$. Soit $a<b<c$; on suppose que les variables $N_{a,b}$ et $N_{b,c}$ sont indépendantes et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de $N_{a,b}$ sachant $\{N_{a,c}=n\}$ est $\mathcal{B}(n,p)$, avec $p=(b-a)/(c-a)$.

1. Montrer que pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$:
$$\frac{\mathbb{P}(N_{a,b}=k)\,\mathbb{P}(N_{b,c}=\ell)}{\mathbb{P}(N_{a,c}=k+\ell)} = \binom{k+\ell}{k} p^k\,(1-p)^\ell.$$
2. En déduire qu'il existe une constante λ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(N_{a,b}=n) = \frac{\lambda}{n}\,\mathbb{P}(N_{a,b}=n-1).$$
3. En déduire que $N_{a,b}$ suit une loi de Poisson de paramètre λ.

2 Indépendance de n variables aléatoires

Définition 13

Les variables aléatoires discrètes $X_1, \ldots, X_n$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont dites **indépendantes deux à deux** si, pour tous entiers i et j distincts de $[\![1, n]\!]$, les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes.

Définition 14

Les variables aléatoires discrètes $X_1, \ldots, X_n$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont dites **mutuellement indépendantes** si, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\{X_1 = x_1\} \cap \ldots \cap \{X_n = x_n\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Remarques

- On dit souvent indépendantes au lieu de mutuellement indépendantes.
- L'indépendance d'un n-uplet de variables aléatoires ne dépend pas de l'ordre de ces variables.

Proposition 22

Si les variables aléatoires discrètes $X_1, \ldots, X_n$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans E_1, $E_2, \ldots, E_n$ sont mutuellement indépendantes, alors on a, pour toutes parties A_1 de E_1, A_2 de $E_2, \ldots, A_n$ de E_n :

$$\mathbb{P}\left(\{X_1 \in A_1\} \cap \ldots \cap \{X_n \in A_n\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Démonstration page 933

p.933 **Exercice 12** Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètres respectifs $p_1, \ldots, p_n$.

1. Montrer que $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$ suit aussi une loi géométrique.
2. Déterminer la loi de $Z = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

Proposition 23

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires discrètes, mutuellement indépendantes, de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors toute sous-famille est formée de variables mutuellement indépendantes.

Démonstration page 934

Corollaire 24

Si les variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont indépendantes deux à deux.

Attention Comme dans le cas fini, la réciproque est fausse.

p.934

Exercice 13 Montrer que des événements $A_1, \dots, A_n$ d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont mutuellement indépendants si, et seulement si, les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_1}, \dots, \mathbb{1}_{A_n}$ sont mutuellement indépendantes.

Remarque

- Si les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, il existe des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ définies respectivement sur $X_1(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$ telles que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$,
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i).$$
En effet, il suffit de poser, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varphi_i(x_i) = \mathbb{P}(X_i = x_i)$.
- Comme dans le cas de deux variables aléatoires (cf exercice 9 page 904), on peut démontrer que si la loi conjointe peut s'écrire sous cette forme, alors les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Les propriétés démontrées pour deux variables aléatoires se généralisent à n variables aléatoires.

Proposition 25

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires discrètes, mutuellement indépendantes, de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la fonction f_i est définie sur $X_i(\Omega)$, les variables aléatoires $f_1(X_1)$, $f_2(X_2)$, ..., $f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Démonstration page 935

Remarque La proposition précédente se généralise à des variables aléatoires discrètes fonctions de plusieurs variables aléatoires X_k (pour $1 \leqslant k \leqslant n$) par la proposition suivante.

Proposition 26

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs respectivement dans des ensembles $E_1, \dots, E_n$, et $1 \leqslant p < n$.
Si f est une fonction définie sur $E_1 \times \dots \times E_p$ et g une fonction définie sur $E_{p+1} \times \dots \times E_n$, alors $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Démonstration page 935

Remarque En particulier, les variables $X_1 + \cdots + X_p$ et $X_{p+1} + \cdots + X_n$ sont indépendantes.

p.935

Exercice 14 Montrer que, si X_1, X_2, …, X_n sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que X_k suive la loi de Poisson de paramètre λ_k pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$, alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Ce qui précède peut se généraliser à plus de deux fonctions.

Proposition 27 (Lemme des coalitions)

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, k un entier naturel non nul, I_1, I_2,…, I_k des sous-ensembles non vides et disjoints de $[\![1, n]\!]$. Pour tout j entre 1 et k, on considère une variable aléatoire Y_j qui est une fonction des variables X_i pour $i \in I_j$.
Alors les variables Y_1,…, Y_k sont indépendantes.

Démonstration. On montre que les k variables $(X_i)_{i\in I_1}, (X_i)_{i\in I_2}, \ldots, (X_i)_{i\in I_k}$ sont mutuellement indépendantes, comme dans la proposition 26. On en déduit que Y_1, Y_2,…, Y_n sont mutuellement indépendantes, d'après la proposition 25 de la page précédente. □

3 Suite de variables aléatoires indépendantes

Définition 15

Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles discrètes de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$, les variables aléatoires réelles discrètes X_i où i décrit I soient mutuellement indépendantes, est appelée **suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes**.

Remarque Il suffit de vérifier que, pour tout entier n, les variables $X_0, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes. En effet, toute sous-famille finie de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est contenue dans une sous-famille de la forme $(X_0, \ldots, X_n)$. D'après la proposition 23 de la page 906, elle est constituée de variables aléatoires mutuellement indépendantes si les variables X_0, …, X_n les variables sont mutuellement indépendantes.

Suite de variable aléatoires de lois prescrites

Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 28

Pour toute suite (P_n) de lois de probabilité discrètes, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une suite (X_n) de variables aléatoires discrètes, indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi $\mathbb{P}_{X_n}$ soit P_n.

Remarques

- En particulier, si P est une loi de probabilité discrète, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une suite (X_n) de variables aléatoires discrètes, indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n soit P. On parle alors de suites de variables indépendantes identiquement distribuées (avec parfois l'abréviation i.i.d.) Une telle suite modélise une suite d'épreuves identiques aux résultats indépendants.

  Exemples

  * Si P est la loi de Bernoulli de paramètre p, on obtient une modélisation du jeu de pile ou face. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{X_n = 1\}$ et $\{X_n = 0\}$ sont des événements, qu'on appelle respectivement obtenir pile et face ou succès et échec à la n-ième épreuve ; les variables X_n étant indépendantes, les événements $\{X_n = 1\}$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont indépendants et de probabilité p.
  * De la même façon, si P est la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$, on modélise l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé une infinité de fois.

- Ce théorème est d'une grande importance pratique, car comme nous l'avons signalé dans le chapitre précédent, la construction d'un espace probabilisé modélisant le jeu de pile ou face est très difficile.

p.935

Exercice 15 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note Y_k le temps d'attente du k-ième 1. On pose $Z_1 = Y_1$ et pour $k \geqslant 2$, $Z_k = Y_k - Y_{k-1}$.

Démontrer que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi.

V Espérance, variance, covariance

1 Espérance

Définition 16

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
L'**espérance** de X, notée $\mathbb{E}(X)$, est la somme dans $[0, +\infty]$ de la famille de réels positifs $\big(\mathbb{P}(X = x)\, x\big)_{x \in X(\Omega)}$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)\, x.$$

Remarque Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, la sommabilité de la famille $\big(\mathbb{P}(X = x)\, x\big)_{x \in \mathbb{N}}$ équivaut à la convergence de la série $\sum \mathbb{P}(X = n)\, n$ et l'on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\, n$.

Définition 17

Soit X une variable aléatoire discrète réelle. On dit que X **est d'espérance finie** si la famille $\big(\mathbb{P}(X=x)\,x\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, l'espérance de X, notée $\mathbb{E}(X)$, est la somme de cette famille :

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)\,x.$$

Remarques

- Soit X est une variable aléatoire discrète. Si X est positive, elle possède une espérance finie ou infinie. Si X est de signe quelconque et si la famille $\big(\mathbb{P}(X=x)\,x\big)_{x\in X(\Omega)}$ n'est pas sommable, X ne possède pas d'espérance.
- Si $X(\Omega)$ est fini, la variable aléatoire X est d'espérance finie et la définition de l'espérance coïncide avec celle qui a été donnée en première année.
- La différence essentielle entre le cas discret et le cas fini est que dans le cas discret l'espérance n'est pas toujours définie.

Exemples

1. Soit $a\in\mathbb{R}$.
   Si X est une variable aléatoire presque sûrement égale à a, alors $\mathbb{E}(X)=a$.
2. Pour tout événement A, on a $\mathbb{E}\big(\mathbf{1}_A\big)=\mathbb{P}(A)$.
3. En thermodynamique statistique, l'énergie moyenne d'une particule à spectre discret est égale à l'espérance de son énergie :
   $$\overline{E}=\sum_{n\in\mathbb{N}}E_n\mathcal{P}(E_n),$$
   où (E_n) est le spectre des niveaux d'énergie et $\mathcal{P}(E_n)$ est la probabilité d'occupation par la particule de l'état d'énergie E_n.

p.936

Exercice 16 Donner des exemples de variables aléatoires discrètes :

1. ayant une espérance infinie ;
2. n'ayant pas d'espérance.

p.937

Exercice 17 Montrer qu'une variable aléatoire discrète bornée est d'espérance finie.

Proposition 29

Soit X une variable aléatoire discrète.

1. Si X suit une loi géométrique de paramètre p, alors son espérance est finie et $\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}$.
2. Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors son espérance est finie et $\mathbb{E}(X)=\lambda$.

Démonstration page 937

p.937

Exercice 18

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n).$$

Retrouver ainsi le premier résultat de la proposition 29 de la page précédente.

Propriétés de l'espérance

Théorème 30 (Théorème de transfert)

Soit X une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et f une fonction à valeurs réelles définie sur $X(\Omega)$. Alors la variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la famille $\big(\mathbb{P}(X = x)\, f(x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. On a alors :

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\, \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration. On sait que $f(X)(\Omega) = f\left(X(\Omega)\right)$. Pour tout $y \in f(X)(\Omega)$, on pose

$$I_y = \{x \in X(\Omega) \mid f(x) = y\} = f^{-1}\left(\{y\}\right).$$

On a alors $\{f(X) = y\} = \{X \in I_y\}$ et comme I_y est au plus dénombrable, car inclus dans $X(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in I_y} \mathbb{P}(X = x).$$

L'ensemble $X(\Omega)$ est la réunion disjointe des I_y, pour $y \in f(X)(\Omega)$.

- Supposons que la famille $\big(\mathbb{P}(X = x)\, f(x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ soit sommable. On applique le théorème de sommation par paquets. Pour tout $y \in f(X)(\Omega)$, la famille $\big(\mathbb{P}(X = x)\, f(x)\big)_{x \in I_y}$ est sommable, de somme :

  $$\sum_{x \in I_y} f(x)\, \mathbb{P}(X = x) = y\, \mathbb{P}(f(X) = y).$$

  On sait qu'alors la famille $\big(y\mathbb{P}(f(X) = y)\big)_{y \in f(X)(\Omega)}$ est sommable et que :

  $$\sum_{y \in f(X)(\Omega)} y\, \mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\, \mathbb{P}(X = x).$$

  Autrement dit, $f(X)$ est d'espérance finie et :

  $$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\, \mathbb{P}(X = x).$$

- Supposons réciproquement que la variable aléatoire $f(X)$ soit d'espérance finie, c'est-à-dire que la famille $\big(y\mathbb{P}(f(X) = y)\big)_{y \in f(X)(\Omega)}$ soit sommable. Cela équivaut à la sommabilité de la famille $\big(|y|\, \mathbb{P}(f(X) = y)\big)_{y \in f(X)(\Omega)}$.

Montrons la sommabilité de la famille $(\mathbb{P}(X = x)\, f(x))_{x\in X(\Omega)}$. Soit I une partie finie de $X(\Omega)$. Alors $J = f(I)$ est une partie finie de $f(X)(\Omega)$ et :

$$\sum_{y\in J} |y|\mathbb{P}(f(X) = y) \leqslant \sum_{y\in f(X)(\Omega)} |y|\, \mathbb{P}(f(X) = y).$$

Mais, par ailleurs, I est inclus dans $f^{-1}(J)$ donc :

$$\begin{aligned}\sum_{y\in J} |y|\, \mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{y\in J} |y| \sum_{x\in I_y} \mathbb{P}(X = x) &= \sum_{y\in J}\sum_{x\in I_y} |f(x)|\, \mathbb{P}(X = x)\\ &= \sum_{x\in f^{-1}(J)} |f(x)|\mathbb{P}(X = x)\\ &\geqslant \sum_{x\in I} |f(x)|\mathbb{P}(X = x).\end{aligned}$$

On a donc, pour toute partie I finie de $X(\Omega)$:

$$\sum_{x\in I} |f(x)|\mathbb{P}(X = x) \leqslant \sum_{y\in f(X)(\Omega)} |y|\mathbb{P}(f(X) = y).$$

Cela montre que la famille $(\mathbb{P}(X = x)\,|f(x)|)_{x\in X(\Omega}$ est sommable et donc que la famille $(\mathbb{P}(X = x)\, f(x))_{x\in X(\Omega}$ est sommable et, en utilisant le premier point, on retrouve l'égalité souhaitée. □

Remarque Si f est définie plus généralement sur un ensemble dénombrable E contenant $X(\Omega)$, on peut remplacer la famille $(\mathbb{P}(X = x)\, f(x))_{x\in X(\Omega)}$ par la famille $(\mathbb{P}(X = x)\, f(x))_{x\in E}$.

Théorème 31 (Linéarité de l'espérance)

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes, d'espérance finie, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et λ un réel, alors les variables aléatoires $X + Y$ et λX sont d'espérance finie. De plus, on a :

$$\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda\mathbb{E}(X) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Autrement dit, l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'espérance finie est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, noté $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et l'espérance est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Principe de démonstration. On applique la formule de transfert à X et $f : x \mapsto \lambda x$, puis à (X, Y) et $f : (x, y) \mapsto x + y$.

Démonstration page 938

Définition 18

Toute variable aléatoire réelle discrète d'espérance nulle est dite **centrée**.

Corollaire 32

Si X est une variable aléatoire discrète d'espérance finie, alors $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

Démonstration. La variable aléatoire constante $\mathbb{E}(X)$ a pour espérance $\mathbb{E}(X)$. Donc d'après le théorème 31, la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ possède une espérance et :

$$\mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)\big) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0. \qquad \square$$

Point méthode

Pour déterminer l'espérance d'une variable aléatoire discrète dont on ne sait pas déterminer la loi, on peut la décomposer en somme de variables aléatoires discrètes dont l'espérance est connue.

p.939

Exercice 19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé, toutes de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On cherche à calculer le nombre moyen de tirages nécessaires pour obtenir tous les numéros de 1 à n.

1. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on note T_k le nombre de tirages nécessaires pour obtenir k numéros distincts et l'on pose $Z_1 = T_1$ et $Z_k = T_k - T_{k-1}$ pour $2 \leqslant k \leqslant n$.

   Montrer que les variables aléatoires Z_k pour $2 \leqslant k \leqslant n$ suivent une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
2. En déduire l'espérance de T_n et un équivalent de $\mathbb{E}(T_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Proposition 33 (Positivité de l'espérance)

Si X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, alors on a :

$$\mathbb{E}(X) \geqslant 0.$$

De plus $\mathbb{E}(X) = 0$ équivaut à $X = 0$ presque sûrement.

Démonstration page 940

Corollaire 34 (Croissance de l'espérance)

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, d'espérance finie, telles que $X \leqslant Y$, alors on a :

$$\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y).$$

De plus $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ équivaut à $X = Y$ presque sûrement.

Démonstration. On applique la proposition 33 à la variable aléatoire $X - Y$ et on utilise la linéarité de l'espérance. $\square$

Corollaire 35

Si X est une variable aléatoire discrète, alors X est d'espérance finie si, et seulement si, $|X|$ est d'espérance finie. Si les espérances sont finies, on a :

$$|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|).$$

Démonstration page 940

Proposition 36

Soit X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $|X| \leqslant Y$. Si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Principe de démonstration. Considérer $Z = (X, Y)$, ainsi que les projections $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$ et $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$ et appliquer le théorème de transfert.

Démonstration page 940

Proposition 37

Soit X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors XY est d'espérance finie si, et seulement si, la famille $(xy\,\mathbb{P}((X,Y) = (x,y)))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable et l'on a alors :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\,\mathbb{P}((X,Y) = (x,y)).$$

Démonstration page 941

Théorème 38

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes réelles indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration page 941

p.941

Exercice 20

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Démontrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour toutes fonctions numériques f et g bornées, définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{E}\big(f(X)g(Y)\big) = \mathbb{E}\big(f(X)\big)\mathbb{E}\big(g(Y)\big).$$

Théorème 39 (Inégalité de Markov)

Toute variable aléatoire discrète positive, d'espérance finie, vérifie l'inégalité :

$$\forall a > 0 \quad \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration page 942

2 Variance

Définition 19

Soit X une variable aléatoire réelle discrète et $r \in \mathbb{N}$. Si X^r est d'espérance finie, on dit que X admet un **moment d'ordre r**. Le moment d'ordre r de X est le réel $\mathbb{E}(X^r)$.

Remarques

- D'après la formule de transfert, si le moment d'ordre r existe, on a :
$$\mathbb{E}(X^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r \, \mathbb{P}(X = x).$$
- Une variable aléatoire bornée admet des moments de tout ordre.

p.942

Exercice 21 Soit X une variable aléatoire réelle discrète, positive, possédant un moment d'ordre $r \geqslant 1$.
Montrer que, pour tout $a > 0$, on a $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X^r)}{a^r}$.

Proposition 40

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Si X admet un moment d'ordre 2, alors X est d'espérance finie.

Démonstration page 942

p.942

Exercice 22 Démontrer que la variable aléatoire réelle discrète X admet un moment d'ordre r, elle admet un moment d'ordre k pour tout $k \in [\![0, r]\!]$.

Lemme 41

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, admettant un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie.

Démonstration page 942

Proposition 42

Les variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2 forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, noté $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Démonstration page 942

Théorème 43 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Si les variables aléatoires réelles discrètes X et Y appartiennent à $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors XY est d'espérance finie et :
$$\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

Démonstration page 942

p.943 **Exercice 23** Étudier les cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 20

Si la variable aléatoire réelle discrète X est d'espérance finie et si la variable aléatoire $X-\mathbb{E}(X)$ admet une moment d'ordre 2, on appelle **variance** de X le réel $\mathbb{V}(X)$ défini par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big).$$

Remarques

- La variance est la moyenne du carré de la distance entre les valeurs de X et $\mathbb{E}(X)$. Elle mesure donc la dispersion de X par rapport à sa moyenne.
- Comme la variable $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée, la variance est aussi appelée moment centré d'ordre 2.
- Une variable aléatoire réelle finie possède toujours une variance.

p.943 **Exercice 24** Soit X une variable aléatoire réelle discrète possédant un moment d'ordre 2. À quelle condition la variance de X est-elle nulle ?

Théorème 44 (Formule de Kœnig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. La variable X admet une variance si, et seulement si, X admet un moment d'ordre 2 et l'on a alors :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2.$$

Démonstration page 943

Remarque Dans la quasi-totalité des cas, on utilise la formule de Kœnig-Huygens pour calculer une variance et non la définition.

Proposition 45

Soit X une variable aléatoire discrète.

1. Si X suit une loi géométrique de paramètre p, alors elle possède une variance et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.
2. Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors elle possède une variance et $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

Principe de démonstration. Dans les deux cas, commencer par calculer $\mathbb{E}\big(X(X-1)\big)$.

Démonstration page 944

Proposition 46

Si (a, b) est un couple de réels et X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2, alors $aX+b$ admet un moment d'ordre 2 et :

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X).$$

Démonstration page 944

Théorème 47 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Toute variable aléatoire réelle discrète X admettant un moment d'ordre 2 vérifie l'inégalité :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration page 944

Définition 21

Si X est une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2, **l'écart-type de X** est le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Exemple En thermodynamique statistique, l'écart quadratique moyen en énergie d'une particule à spectre discret d'énergie est l'écart-type de son énergie :

$$\Delta E = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} (E_n - \overline{E})^2 \mathcal{P}(E_n)},$$

où (E_n) est le spectre des niveaux d'énergie, $\mathcal{P}(E_n)$ est la probabilité d'occupation par la particule de l'état d'énergie E_n et $\overline{E}$ l'énergie moyenne de la particule.

Définition 22

Soit X variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Si $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$, la variable aléatoire X est dite **centrée réduite**.

Proposition 48

Si X est une variable aléatoire réelle discrète X admettant une variance non nulle, la variable aléatoire réelle discrète $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire réelle discrète centrée réduite, appelée **la variable aléatoire réelle centrée réduite associée à X**.

Démonstration page 945

3 Covariance

Définition 23

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes d'espérance finie. Si la variable $\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)$ est d'espérance finie, on appelle **covariance** de X et Y (ou du couple (X,Y)) le réel noté $\mathrm{Cov}(X,Y)$ défini par :

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)\Big).$$

Théorème 49 (Formule de Kœnig-Huygens)

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Si X, Y et XY admettent une espérance, alors le couple (X,Y) admet une covariance donnée par la formule :

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

La covariance de (X,Y) existe en particulier si X et Y ont un moment d'ordre 2.

Démonstration page 945

Corollaire 50

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes, indépendantes, possédant une espérance finie, alors le couple (X,Y) possède une covariance et $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

Démonstration. Cela résulte directement du théorème 38 de la page 914. □

Définition 24

Si un couple (X,Y) de variables aléatoires réelles discrètes possède une covariance et vérifie $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$, on dit que les variables aléatoires X et Y sont **non corrélées**.

Remarque Le corollaire 50 montre que deux variables aléatoires réelles discrètes, indépendantes, sont non corrélées.
Comme dans le cas des variables finies, la réciproque est fausse. Deux variables non corrélées ne sont pas nécessairement indépendantes.

p.945

Exercice 25 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes, de paramètre $p\in\,]0,1[$. On pose $q=1-p$. On dit que la première série est de longueur n si les premières épreuves ont donné le même résultat et la $(n+1)$-ième un résultat différent. De même la deuxième série commence à l'épreuve qui suit la dernière épreuve de la première série et s'arrête avant le changement suivant. On note L_1 et L_2 respectivement la longueur de la première et de la seconde série.

Démontrer que $\mathrm{Cov}(L_1,L_2)=-\dfrac{(p-q)^2}{pq}$.

Proposition 51

Pour tout $X \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on a $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$.
L'application $(X, Y) \longmapsto \mathrm{Cov}(X, Y)$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Démonstration page 946

p.947

Exercice 26 Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, possédant toutes un moment d'ordre 2. On considère la matrice $M = \big(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que M est diagonalisable et a des valeurs propres positives ou nulles.

À quelle condition 0 est-il valeur propre de M ?

Variance d'une somme

Théorème 52

Pour toute famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles discrètes appartenant à $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, la variable aléatoire réelle $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ admet une variance :

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Démonstration page 947

La covariance de deux variables aléatoires indépendantes étant nulle, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 53

Pour toute famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles discrètes appartenant à $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, deux à deux indépendantes, on a :

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k).$$

Remarques

- La propriété est vérifiée en particulier si les variables sont mutuellement indépendantes.
- Cette formule montre l'intérêt de décomposer une variable aléatoire en somme de variables aléatoires indépendantes plus simples.

Exemple Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note Y_k le temps d'attente du k-ième 1. On pose $Z_1 = Y_1$ et $Z_k = Y_k - Y_{k-1}$

pour $k \geqslant 2$. Il a été démontré dans l'exercice 15 de la page 909 que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la loi $\mathcal{G}(p)$ et donc d'espérance $\dfrac{1}{p}$ et de variance $\dfrac{1-p}{p^2}$.

De l'égalité $Y_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i$, on déduit $\mathbb{E}(Y_k) = \dfrac{k}{p}$ et $\mathbb{V}(Y_k) = \dfrac{k(1-p)}{p^2}$.

4 Loi faible des grands nombres

Théorème 54 (Loi faible des grands nombres)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes sur le même espace probabilisé, deux à deux indépendantes, de même loi, admettant un moment d'ordre 2. On pose $m = \mathbb{E}(X_1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On a alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Démonstration page 947

Remarque La loi faible des grands nombres exprime le fait qu'en un certain sens la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$ converge vers m.

Exemple On considère une suite d'épreuves indépendantes. Soit A un événement fixé, de probabilité p. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère X_n la variable de Bernoulli qui vaut 1 si l'événement A est réalisé lors de la n-ième épreuve ; elle est de paramètre $p = \mathbb{P}(A)$. Notons Y_n la fréquence de réalisation de l'événement A, c'est-à-dire $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. On a, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(|Y_n - p| \geqslant \varepsilon\big) = 0$. La loi faible des grands nombres s'accorde avec l'intuition qui voit la probabilité d'un événement comme la limite d'une fréquence.

Approfondissement

- On peut obtenir le même résultat en supposant simplement que les variables X_n ont une espérance finie, et pas un moment d'ordre 2 (*cf.* exercice 16.20 de la page 959).
- Si ce théorème s'appelle loi *faible* des grands nombres, c'est qu'il existe des lois *fortes* des grands nombres. On peut démontrer par exemple que, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de même loi, d'espérance finie m, alors il existe un événement

négligeable A, tel que :

$$\forall \omega \in \Omega \setminus A \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = m.$$

On dit que la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers m (*cf.* exercice 16.26 de la page 963 pour une démonstration dans un cas particulier).

VI Fonctions génératrices

Définition 25

Pour tout variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle **fonction génératrice** de X la fonction définie G_X définie par $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$. D'après la formule de transfert, $G_X(t)$ est défini si, et seulement si, la série $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$ converge absolument et on a alors :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n.$$

Proposition 55

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
La série entière $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$ est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 ; elle converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. La fonction G_X est définie et continue sur $[-1, 1]$.

Démonstration page 948

Remarques

- D'après les propriétés des séries entières, la fonction G_X est aussi définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, où R est le rayon de convergence de la série entière.
- Si X est une variable finie, alors G_X est définie sur $\mathbb{R}$ et c'est une fonction polynomiale.

Proposition 56

La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est déterminée de manière unique par G_X. Plus précisément, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = n) = n!\, G_X^{(n)}(0).$$

Deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ ont donc même loi si, et seulement si, elles ont même fonction génératrice.

Démonstration page 948

Lemme 57

Soit (a_n) une suite à termes positifs telle la série $\sum a_n$ converge. On note f la somme de la série entière $\sum a_n t^n$.

La fonction f est dérivable en 1 si, et seulement si, la série de terme général na_n converge et l'on a alors :

$$f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n.$$

Démonstration page 948

Théorème 58

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si, et seulement si, G_X est dérivable en 1 et l'on a alors :

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1).$$

Démonstration page 949

Remarque Il résulte de la démonstration du lemme que G_X est dérivable en 1 si, et seulement si, G_X est dérivable à gauche en 1. Il suffit donc, pour montrer que X est d'espérance finie, de considérer la restriction de G_X à $[0,1]$.

Théorème 59

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ possède un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1 et l'on a alors : $G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$.

Démonstration page 949

Corollaire 60

Si la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est deux fois dérivable en 1, alors X possède un moment d'ordre 2 et on a :

$$\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1).$$

Remarques

- L'existence et le calcul de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire ne posent aucun problème quand la série définissant la fonction génératrice a un rayon de convergence strictement supérieur à 1.
- Par récurrence sur $r \geqslant 1$, on peut démonter que si X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors G_X est r fois dérivable en 1 si, et seulement si, X possède un moment d'ordre r et qu'alors on a :

$$G_X^{(r)}(1) = \mathbb{E}\left(X(X-1)\dots(X-r+1)\right).$$

Fonctions génératrices des lois usuelles

p.949

Exercice 27 Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire qui suit :

1. la loi de Bernoulli de paramètre p ;
2. la loi binomiale de paramètre (n, p) ;
3. la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$;
4. la loi de Poisson de paramètre λ.

Retrouver ainsi dans chaque cas son espérance et sa variance.

Théorème 61

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors, pour tout réel t tel que $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ sont définis, $G_{X+Y}(t)$ est défini et :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)\, G_Y(t).$$

Démonstration page 950

Corollaire 62

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors, pour tout réel t, tel que $G_{X_k}(t)$ est défini pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $G_X(t)$ est défini et :

$$G_X(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t).$$

L'utilisation de la fonction de répartition peut permettre de déterminer la loi d'une variable aléatoire difficile à déterminer directement.

p.950

Exercice 28 Soit ℓ, m et n des entiers naturels non nuls tels que $n = \ell m$, ainsi que X et Y des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$; on pose $Z = X + Y$. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[\![0, \ell - 1]\!]$ et que Z suit la loi uniforme sur $[\![0, n - 1]\!]$.

Déterminer la fonction génératrice de Y. En déduire la loi de Y.

p.951

Exercice 29 À l'aide du théorème 61, retrouver les théorèmes de stabilité de la loi binomiale et de la loi de Poisson.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1 On a :

$$X^{-1}(A) = X^{-1}\big(A \cap X(\Omega)\big) = \bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} X^{-1}\big(\{x\}\big).$$

Chaque $X^{-1}(\{x\})$ appartient à $\mathcal{A}$ et $A \cap X(\Omega)$ est au plus dénombrable, car inclus dans $X(\Omega)$ qui est au plus dénombrable. Ainsi $X^{-1}(A)$ est un événement, car c'est une réunion au plus dénombrable d'événements.

Théorème 2

- L'application $\mathbb{P}_X$ est définie sur $\mathcal{P}\big(X(\Omega)\big)$ et à valeurs dans $[0,1]$.
- De $\{X \in X(\Omega)\} = \Omega$, on déduit $\mathbb{P}_X\left(X(\Omega)\right) = 1$.
- Si (A_n) est une suite de parties deux à deux disjointes de $X(\Omega)$, alors les ensembles $\{X \in A_n\}$ sont également deux à deux disjoints et :

$$\left\{X \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \in A_n\}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \mathbb{P}\left(\left\{X \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \in A_n\}\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\big(\{X \in A_n\}\big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_X(A_n).\end{aligned}$$

Proposition 3

- L'ensemble $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.
- Par définition, $\{X = x\}$ est un événement pour tout $x \in X(\Omega)$.
- Si x et x' sont deux éléments de $X(\Omega)$, distincts, les événements $\{X = x\}$ et $\{X = x'\}$ sont incompatibles, car pour tout $\omega \in \Omega$, $\omega \in \{X = x\}$ équivaut à $X(\omega) = x$.
- On a enfin :

$$\bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\} = \Omega$$

car tout élément ω de Ω appartient à $\{X = x\}$ pour $x = X(\omega)$.

Proposition 5 On prend $\Omega = E$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$. D'après le théorème 9 de la page 854, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur cet espace probabilisé telle que $\mathbb{P}\left(\{x\}\right) = p_x$ pour tout $x \in E$. On considère l'application $X = \mathrm{Id}_E$. On a alors $X(\Omega) = E$, donc $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in E$, $X^{-1}\left(\{x\}\right) = \{x\} \in \mathcal{A}$. Donc X est une variable aléatoire discrète et pour tout $x \in E$:

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\{x\}\right)\right) = \mathbb{P}\left(\{x\}\right) = p_x.$$

Exercice 1

1. La suite $(\{X \leqslant n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements. On a donc :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \leqslant n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X \leqslant n\}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$
La fonction $F : x \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x)$ est croissante. En effet si $x \leqslant y$, alors $\{X \leqslant x\} \subset \{X \leqslant y\}$ et donc $F(x) \leqslant F(y)$ par croissance de $\mathbb{P}$.
Elle possède donc une limite en $+\infty$ et :
$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}(X \leqslant x) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{n\to+\infty} F(n) = 1.$$
2. De même, la suite $(\{X \leqslant -n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements. On a donc :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \leqslant -n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{X \leqslant -n\}\right) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.$$
On en déduit :
$$\lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(X \leqslant x) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to+\infty} F(-n) = 0.$$

Proposition 6 L'ensemble $f(X)(\Omega) = f(X(\Omega))$ est au plus dénombrable, car c'est l'image par f d'un ensemble au plus dénombrable. Pour tout $y \in f(X)(\Omega)$, on a :
$$\begin{aligned}\{f(X) = y\} &= \big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in f^{-1}(\{y\})\big\} \\ &= \big\{X \in f^{-1}(\{y\})\big\} = \bigcup_{x\in f^{-1}(\{y\})} \{X = x\}.\end{aligned}$$
L'ensemble $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ est au plus dénombrable, car c'est une partie de $X(\Omega)$. On en déduit que $\{f(X) = y\} \in \mathcal{A}$ car c'est une union au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$. Ainsi, $f(X)$ est une variable aléatoire discrète. De plus, puisqu'on a une union au plus dénombrable d'événements incompatibles :
$$\forall y \in f(X)(\Omega) \quad \mathbb{P}\big(f(X) = y\big) = \sum_{x\in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x).$$

Proposition 7 Pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X > k) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} pq^{n-1} = \frac{pq^k}{1-q} = q^k.$$

Corollaire 8 Comme $\{X > k + \ell\} \subset \{X > k\}$, on a :
$$\mathbb{P}\big(X > k + \ell \mid X > k\big) = \frac{\mathbb{P}\big(X > k + \ell\big)}{\mathbb{P}\big(X > k\big)} = \frac{q^{k+\ell}}{q^\ell} = q^k = \mathbb{P}\big(X > k\big).$$

Proposition 9 Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbb{P}(X > n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \neq 0$ car, par hypothèse, la probabilité conditionnelle à $\{X > n\}$ est définie. On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_1 = \mathbb{P}\big(X > n + 1 \mid X > n\big) = \frac{\mathbb{P}(X > n + 1)}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

La suite (u_n) est géométrique de raison u_1, donc $u_n = u_1 \times u_1^{n-1} = u_1^n$, pour tout $n \geqslant 1$. Cela reste vrai pour $n = 0$, car $u_0 = \mathbb{P}(X > 0) = 1$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > n-1) - \mathbb{P}(X > n) = u_{n-1} - u_n = u_1^{n-1} - u_1^n = u_1^{n-1}(1 - u_1).$$

On sait que $u_1 \neq 0$. D'autre part, $u_1 \neq 1$, car sinon $\mathbb{P}(X = n) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui est impossible car X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Ainsi $1 - u_1 \in]0, 1[$ et X suit la loi géométrique de paramètre $1 - u_1$.

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « la n-ième épreuve est un succès ».

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $k < r$, alors on a $\{Y_r = k\} = \varnothing$ et si $k \geqslant r$, alors on a :

$$\{Y_r = k\} = \bigcup_{\substack{I \subset [\![1,k-1]\!] \\ \text{card } I = r-1}} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \in [\![1,k-1]\!] \setminus I} \overline{A_i} \right) \cap A_r.$$

En effet, la k-ième épreuve correspond au r-ième succès et dans les $k-1$ premières épreuves, il doit y avoir $r-1$ succès (et donc $k-r$ échecs). Ainsi $\{Y_r = k\} \in \mathcal{A}$ et

$$\mathbb{P}(Y_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^{r-1} q^{k-r} p = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r},$$

car c'est la réunion disjointe de $\binom{k-1}{r-1}$ événements de probabilité $p^r q^{k-r}$.

On a $\{Y_r = \infty\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \overline{\{Y_r = k\}}$, donc $\{Y_r = \infty\}$ est un événement. Il est inclus dans l'événement H : « il existe un rang à partir duquel toutes les épreuves donnent des échecs » qui peut s'écrire $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geqslant n} \overline{A_k}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geqslant n} \overline{A_k} \right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k} \right) = \lim_{N \to +\infty} q^{N-n+1} = 0.$$

L'événement H qui est une réunion dénombrable d'événements négligeables est donc négligeable. *A fortiori* l'événement $\{Y_r = \infty\}$ est négligeable.

Proposition 10 Pour tout entier k et pour tout entier $n \geqslant k$, on a :

$$\mathbb{P}\big(X_n = k\big) = \binom{n}{k} p_n^k \, (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \, p_n^k \exp\big((n-k)\ln(1-p_n)\big).$$

On a, quand n tend vers $+\infty$, $n(n-1)\cdots(n-k+1) \sim n^k$ et $p_n \sim \dfrac{\lambda}{n}$.

Ainsi (p_n) tend vers 0 et donc :

$$(n-k)\ln(1-p_n) \sim n(-p_n) \to -\lambda.$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}\big(X_n = k\big) \sim \frac{n^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{n} \right)^k e^{-\lambda} \sim e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On obtient $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(X_n = k\big) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Proposition 11

- Si X et Y sont deux variables aléatoires, l'image $(X,Y)(\Omega)$ est la partie du produit cartésien $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ formée des couples $\big(X(\omega),Y(\omega)\big)$ où ω décrit Ω. Le produit cartésien $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ est au plus dénombrable car $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont au plus dénombrables. *A fortiori*, $(X,Y)(\Omega)$ est au plus dénombrable.
  Pour tout $(x,y)\in(X,Y)(\Omega)$, l'ensemble $\{(X,Y)=(x,y)\}=\{X=x\}\cap\{Y=y\}$ appartient à $\mathcal{A}$, car c'est l'intersection de deux éléments de $\mathcal{A}$. Donc (X,Y) est une variable aléatoire à valeurs dans $E\times E'$.
- Si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $E\times E'$, on pose $X=\pi_1(Z)$ et $Y=\pi_2(Z)$, où $\pi_1:(x,y)\mapsto x$ et $\pi_2:(x,y)\mapsto y$ sont les projections canoniques de $E\times E'$. Alors X et Y sont des variables aléatoires discrètes à valeurs respectivement dans E et E' et $Z=(X,Y)$.

Proposition 12

- Pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, $\{X=x\}\cap\{Y=y\}$ est un événement.
- Si (x,y) et (x',y') sont des éléments distincts de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$, on a soit $x\neq x'$ et $\{X=x\}\cap\{X=x'\}=\varnothing$, soit $y\neq y'$ et $\{Y=y\}\cap\{Y=y'\}=\varnothing$. On en déduit que $\big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\big)\cap\big(\{X=x'\}\cap\{Y=y'\}\big)=\varnothing$.
- On a enfin $\displaystyle\bigcup_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}\{X=x\}\cap\{Y=y\}=\Omega$ car tout élément ω de Ω appartient à $\{X=x\}\cap\{Y=y\}$ pour $x=X(\omega)$ et $y=Y(\omega)$.

Proposition 13 La fonction nulle est une variable aléatoire discrètes. Si X et Y sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathcal{A})$ et λ un réel, posons $Z=(X,Y)$. Alors Z est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\lambda X+Y=f(Z)$, où f est l'application $(x,y)\mapsto\lambda x+y$, donc $\lambda X+Y$ est une variable aléatoire réelle discrète, d'après la proposition 6 de la page 895. Ainsi, l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega,\mathcal{A})$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de Ω dans $\mathbb{R}$.

En gardant les mêmes notations, on a $XY=g(Z)$, où g est l'application $(x,y)\mapsto xy$, donc XY est une variable aléatoire réelle.

Exercice 3 On sait que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}\big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\big)=1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{i+j=n}\frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i!\,j!}=n\lambda^n\sum_{i+j=n}\frac{1}{i!j!}=\frac{n\lambda^n}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=\frac{n(2\lambda)^n}{n!}.$$

D'autre part, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(2\lambda)^n}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2\lambda)^n}{(n-1)!}=(2\lambda)e^{2\lambda}.$$

D'après le théorème de sommation par paquets, on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i!\,j!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i+j=n}\frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i!\,j!}=(2\lambda)e^{2\lambda}\qquad\text{et}\qquad a=\frac{e^{-2\lambda}}{2\lambda}.$$

Exercice 4 Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=i\} \cap \{Y=j\}\big) = a \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i!\,j!}$$
$$= a\frac{i\lambda^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} + a\frac{\lambda^i}{i!} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{(j-1)!}$$
$$= a\frac{i\lambda^i e^\lambda}{i!} + a\frac{\lambda^{i+1}e^\lambda}{i!} = \frac{ae^\lambda \lambda^i (i+\lambda)}{i!}.$$

Comme $a = \dfrac{e^{-2\lambda}}{2\lambda}$, on obtient $\mathbb{P}(X=i) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{i-1}(i+\lambda)}{2\,i!}$ et, par symétrie de la loi conjointe, $\mathbb{P}(Y=j) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{j-1}(ij+\lambda)}{2\,j!}$.

Exercice 5

1. Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. On a :

$$\mathbb{P}\big(\{X=i\} \cap \{Y=j\}\big) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \geqslant j \\ p^2(1-p)^{j-2} & \text{si} \quad i < j. \end{cases}$$

En effet, il faut avoir des succès à la i-ème et à la j-ème épreuve et des échecs jusqu'à la $(i-1)$-ième épreuve et entre la i-ème et la j-ème.

2. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j=i+1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=i\} \cap \{Y=j\}\big) = \sum_{j=i+1}^{+\infty} p^2(1-p)^{j-2}$$
$$= \frac{p^2(1-p)^{i-1}}{1-(1-p)} = p(1-p)^{i-1}.$$

Sans surprise, on trouve que X suit une loi géométrique.
La variable aléatoire Y est à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$. Pour $j \geqslant 2$, on a :

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \sum_{i=1}^{j-1} p^2(1-p)^{j-2} = (j-1)p^2(1-p)^{j-2}.$$

Exercice 6

- Pour $j \geqslant 2$ et $i \geqslant 1$, on a :

$$\mathbb{P}(X=i \mid Y=j) = \frac{\mathbb{P}\big(\{X=i\} \cap \{Y=j\}\big)}{\mathbb{P}(Y=j)}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \geqslant j \\ \dfrac{p^2(1-p)^{j-2}}{(j-1)p^2(1-p)^{j-2}} = \dfrac{1}{j-1} & \text{si} \quad i < j. \end{cases}$$

La loi conditionnelle de X sachant $\{Y=j\}$ est la loi uniforme sur $[\![1, j-1]\!]$. Le rang du deuxième tirage étant connu, égal à j, le premier se répartit uniformément entre 1 et $j-1$. Cela reflète l'indépendance des différentes épreuves.

- Pour $i \geqslant 1$, on a, pour tout $j \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y-i=j \mid X=i) &= \frac{\mathbb{P}\big(\{Y-i=j\}\cap\{X=i\}\big)}{\mathbb{P}(X=i)}\\ &= \frac{\mathbb{P}\big(\{Y=i+j\}\cap\{X=i\}\big)}{\mathbb{P}(X=i)}\\ &= \frac{p^2(1-p)^{i+j-2}}{p(1-p)^{i-1}} = p(1-p)^{j-1}.\end{aligned}$$

  La loi conditionnelle de $Y-i$ conditionnelle sachant $\{X=i\}$ est une loi géométrique de paramètre p. Une fois obtenu le premier succès au rang i, le temps d'attente $Y-i$ du succès suivant suit encore une loi géométrique. Cela reflète la propriété de la loi géométrique d'être sans mémoire.

Exercice 7

- Soit $(m,k) \in \mathbb{N}^2$. Par définition de la loi binomiale, on a :

$$\mathbb{P}\big(Y=k \mid X=m\big) = \begin{cases}\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k} & \text{si} \quad k \in [\![0,m]\!]\\ 0 & \text{si} \quad k>m,\end{cases}$$

  et donc, par définition de la loi conditionnelle :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{Y=k\}\cap\{X=m\}\right) &= \mathbb{P}\big(X=k \mid Y=m\big)\,\mathbb{P}(Y=m)\\ &= \begin{cases}\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}\dfrac{\lambda^m}{m!}\,e^{-\lambda} & \text{si} \quad k \in [\![0,m]\!]\\ 0 & \text{si} \quad k>m.\end{cases}\end{aligned}$$

- On en déduit que, pour tout entier naturel k :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{m=0}^{+\infty}\mathbb{P}\big(\{Y=k\}\cap\{X=m\}\big) &= \sum_{m=k}^{+\infty}\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}\frac{\lambda^m}{m!}\,e^{-\lambda}\\ &= (p\lambda)^k\frac{1}{k!}\,e^{-\lambda}\sum_{m=k}^{+\infty}\frac{((1-p)\lambda)^{m-k}}{(m-k)!}\\ &= (p\lambda)^k\frac{1}{k!}\,e^{-\lambda}e^{(1-p)\lambda} = \frac{(p\lambda)^k}{k!}\,e^{-p\lambda}.\end{aligned}$$

  Donc Y suit la loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

Théorème 17 Le $(n-1)$-uplet $Z=(X_1,\ldots,X_{k-1},X_{k+1},\ldots,X_n)$, où figurent toutes les variables aléatoires sauf X_k, est une variable aléatoire dont le système complet d'événements associé est :

$$(Z=z)_{z\in X_1(\Omega)\times\ldots\times X_{k-1}(\Omega)\times X_{k+1}(\Omega)\times\ldots\times X_n(\Omega)}\,.$$

On a donc, d'après la formule des probabilités totales, pour tout $x_k \in X_k(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_k = x_k) &= \sum_{\substack{x_1\in X_1(\Omega),\dots,x_{k-1}\in X_{k-1}(\Omega),\\ x_{k+1}\in X_{k+1}(\Omega),\dots,x_n\in X_n(\Omega)}} \mathbb{P}\left(Z = (x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n), X_k = x_k\right)\\ &= \sum_{\substack{x_1\in X_1(\Omega),\dots,x_{k-1}\in X_{k-1}(\Omega),\\ x_{k+1}\in X_{k+1}(\Omega),\dots,x_n\in X_n(\Omega)}} \mathbb{P}(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n).\end{aligned}$$

Exercice 8 Si, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, la variable aléatoire X_i est à valeurs dans E_i et si f est une fonction quelconque définie sur $E_1 \times \cdots \times E_n$, alors $f(X_1,\dots,X_n)$ est une variable aléatoire, d'après la proposition 6 de la page 895 appliquée à la fonction f et à la variable aléatoire $(X_1,\dots,X_n)$.

Exercice 9 En sommant sur $x \in X(\Omega)$, on obtient, pour tout $y \in Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} \varphi(x)\,\psi(y) = C'\psi(y),$$

où $C' = \sum_{x\in X(\Omega)} \varphi(x)$.

De même, pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X = x) = C\varphi(x)$, où $C = \sum_{y\in Y(\Omega)} \psi(y)$.

De $\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y) = 1$, on tire $CC' = 1$ et donc, pour tout $(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}\left(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\right) = \big(C\varphi(x)\big)\big(C'\psi(y)\big) = \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y),$$

donc X et Y sont indépendantes.

Proposition 18 Soit $A \subset E$ et $B \subset F$. Les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont au plus dénombrables, donc il en est de même de leurs sous-ensembles $A' = A\cap X(\Omega)$ et $B' = B\cap Y(\Omega)$, puis de $A' \times B'$. On a :

$$\{X \in A\} = \{X \in A'\} = \bigcup_{x\in A'} \{X = x\} \quad \text{et} \quad \{Y \in B\} = \{Y \in B'\} = \bigcup_{y\in B'} \{Y = y\}.$$

On en déduit $\{X \in A\} \cap \{Y \in B\} = \bigcup_{(x,y)\in A'\times B'} \{X = x\} \cap \{Y = y\}$.

On a une réunion dénombrable d'événements incompatibles. On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}\big) &= \sum_{(x,y)\in A'\times B'} \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)\\ &= \sum_{(x,y)\in A'\times B'} \mathbb{P}\big(X = x\big)\,\mathbb{P}\big(Y = y\big)\\ &= \left(\sum_{x\in A'} \mathbb{P}\big(X = x\big)\right)\left(\sum_{y\in B'} \mathbb{P}\big(Y = y\big)\right).\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x\in A'} \mathbb{P}\big(X = x\big)$ et $\mathbb{P}(Y \in B) = \sum_{y\in B'} \mathbb{P}\big(Y = y\big)$, on a donc :

$$\mathbb{P}\big(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}\big) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B).$$

Proposition 19 Montrons l'équivalence entre (i) et (ii).

- Supposons que (i) soit vérifié.
  Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}\big(Y=y\big) \neq 0$. On a, pour tout $x \in X(\Omega)$:
  $$\mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X=x) = \frac{\mathbb{P}(\{X=x\} \cap \{Y=y\})}{\mathbb{P}(Y=y)} = \frac{\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)} = \mathbb{P}(X=x).$$
  La loi de X sachant $\{Y=y\}$ est égale à la loi de X : donc (ii) est vérifié.
- Supposons que (ii) soit vérifié. Soit $y \in Y(\Omega)$.
  - Si $\mathbb{P}(Y=y)=0$, alors $\{Y=y\}$ est indépendant de $\{X=x\}$ pour tout $x \in X(\Omega)$, car un événement quasi-impossible est indépendant de tout événement.
  - Sinon on a, pour tout $x \in X(\Omega)$:
    $$\mathbb{P}\left(\{X=x\} \cap \{Y=y\}\right) = \mathbb{P}_{\{Y=y\}}\left(X=x\right)\mathbb{P}\left(Y=y\right) = \mathbb{P}\left(X=x\right)\mathbb{P}\left(Y=y\right).$$
    Les variables aléatoires X et Y sont donc indépendantes.

  L'équivalence de (i) et (iii) s'en déduit par symétrie.

Proposition 20 Pour tout $(x,y) \in f(X)(\Omega) \times g(Y)(\Omega)$, on a, d'après la proposition 18 de la page 904 :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\{f(X)=x\} \cap \{g(Y)=y\}\big) &= \mathbb{P}\left(\left\{X \in f^{-1}\big(\{x\}\big)\right\} \cap \left\{Y \in g^{-1}\big(\{y\}\big)\right\}\right) \\ &= \mathbb{P}\big(X \in f^{-1}(\{x\})\big)\,\mathbb{P}\big(Y \in g^{-1}(\{y\})\big) \\ &= \mathbb{P}\big(f(X)=x\big)\,\mathbb{P}\big(g(Y)=y\big).\end{aligned}$$
Ainsi $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Proposition 21 Dans le premier cas, on écrit $\{X+Y=k\} = \bigcup_{i=0}^{k} \{X=i\} \cap \{Y=k-i\}$ et dans le second $\{X+Y=k\} = \bigcup_{i \in \mathbf{Z}} \{X=i\} \cap \{Y=k-i\}$ et l'on utilise l'additivité, puis l'indépendance des variables.

Exercice 10 Posons $S = X+Y$. Alors S est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et, pour tout k dans $\mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(S=k\big) &= \sum_{i+j=k} \mathbb{P}\big(X=i\big)\,\mathbb{P}\big(Y=j\big) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}\big(X=i\big)\mathbb{P}\big(Y=k-i\big) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\frac{e^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i} \\ &= \frac{e^{-\lambda+\mu}}{k!}(\lambda+\mu)^k,\end{aligned}$$
d'après la formule du binôme. Donc S suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Exercice 11

1. L'hypothèse implique que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(N_{a,c}=n) \neq 0$. Par ailleurs, il est clair que $N_{a,c} = N_{a,b} + N_{b,c}$. On a, pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, par indépendance de $N_{a,b}$ et N_{bc} :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{a,b}=k)\,\mathbb{P}(N_{b,c}=\ell) &= \mathbb{P}\big(\{N_{a,b}=k\}\cap\{N_{b,c}=\ell\}\big)\\ &= \mathbb{P}\big(\{N_{a,b}=k\}\cap\{N_{a,c}-N_{a,b}=\ell\}\big)\\ &= \mathbb{P}\big(\{N_{a,b}=k\}\cap\{N_{a,c}=k+\ell\}\big)\\ &= \mathbb{P}(N_{ac}=k+\ell)\,\mathbb{P}(N_{a,b}=k \mid N_a=k+\ell)\\ &= \mathbb{P}(N_{a,c}=k+\ell)\binom{k+\ell}{k}p^k\,(1-p)^\ell.\end{aligned}$$

   En divisant par $\mathbb{P}(N_{a,c}=k+\ell)$ qui n'est pas nul, on obtient le résultat voulu.

2. De la première question, on déduit $\mathbb{P}(N_{a,b}=k) \neq 0$ et $\mathbb{P}(N_{b,c}=\ell) \neq 0$, pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, car le second membre de l'égalité ne s'annule pas. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on peut écrire de même :

$$\frac{\mathbb{P}(N_{a,b}=k-1)\,\mathbb{P}(N_{b,c}=\ell+1)}{\mathbb{P}(N_{a,c}=k+\ell)} = \binom{k+\ell}{k-1}p^{k-1}\,(1-p)^{\ell+1}.$$

   En divisant l'égalité obtenue dans la première question par celle-ci, on obtient :

$$\frac{\mathbb{P}(N_{a,b}=k)\,\mathbb{P}(N_{b,c}=\ell)}{\mathbb{P}(N_{a,b}=k-1)\,\mathbb{P}(N_{b,c}=\ell+1)} = \frac{p(\ell+1)}{k(1-p)},$$

   c'est-à-dire :

$$\frac{\mathbb{P}(N_{a,b}=k)}{\mathbb{P}(N_{a,b}=k-1)} = \frac{p(\ell+1)\,\mathbb{P}(N_{b,c}=\ell+1)}{(1-p)\mathbb{P}(N_{b,c}=\ell)} \times \frac{1}{k}.$$

   Si l'on fixe $\ell \in \mathbb{N}$ et que l'on pose $\lambda = \dfrac{p(\ell+1)\,\mathbb{P}(N_{b,c}=\ell+1)}{(1-p)\mathbb{P}(N_{b,c}=\ell)}$, on obtient $\lambda > 0$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{\mathbb{P}(N_{a,b}=k)}{\mathbb{P}(N_{a,b}=k-1)} = \frac{\lambda}{k}.$$

3. En réitérant l'égalité démontrée dans la question précédente, on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{a,b}=k) &= \frac{\lambda}{k}\,\mathbb{P}(N_{a,b}=k-1) = \frac{\lambda^2}{k(k-1)}\,\mathbb{P}(N_{a,b}=k-2) = \cdots\\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathbb{P}(N_{a,b}=0).\end{aligned}$$

   Sachant que $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N_{a,b}=k) = 1$, on obtient $e^\lambda\mathbb{P}(N_{a,b}=0) = 1$ et donc $\mathbb{P}(N_{a,b}=0) = e^{-\lambda}$. Ainsi $N_{a,b}$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Proposition 22 On suppose $X_1,\dots,\ X_n$ mutuellement indépendantes.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on considère $A_i \subset E_i$ et $A_i' = A_i \cap X_i(\Omega)$; on écrit :

$$\{X_i \in A_i\} = \{X_i \in A_i'\} = \bigcup_{x_i \in A_i'} \{X_i = x_i\}.$$

On obtient :

$$\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} \{X_i \in A_i\} = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} \{X_i \in A_i'\} = \bigcup_{(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} A_i'} \left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} \{X_i = x_i\} \right).$$

Chaque A_i' est au plus dénombrable car inclus dans $X_i(\Omega)$ qui est au plus dénombrable. Il en est de même de leur produit. On a donc une réunion dénombrable d'événements incompatibles. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} \{X_i \in A_i\} \right) &= \sum_{(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} A_i'} \mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} \{X_i = x_i\} \right) \\
&= \sum_{(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} A_i'} \left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbb{P}\left(X_i = x_i\right) \right) \\
&= \prod_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{x_i \in A_i'} \mathbb{P}\left(X_i = x_i\right) \right) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbb{P}\left(X_i \in A_i\right).
\end{aligned}$$

Exercice 12 Les variables Y et Z sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Pour tous réels $x_1,\dots,x_n,\ y$, on a :

$$\min(x_1,\dots,x_n) \geqslant y \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!] \quad x_i \geqslant y.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc $\{Y \geqslant k\} = \{X_1 \geqslant k\} \cap \dots \cap \{X_n \geqslant k\}$, d'où l'on déduit, par indépendance des variables X_i :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \geqslant k) &= \mathbb{P}(\{X_1 \geqslant k\} \cap \dots \cap \{X_n \geqslant k\}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \geqslant k) = \prod_{i=1}^{n} (1-p_i)^{k-1} = \left(\prod_{i=1}^{n} (1-p_i) \right)^{k-1}.
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(Y \geqslant k) - \mathbb{P}(Y \geqslant k+1) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} (1-p_i) \right)^{k-1} \left(1 - \prod_{i=1}^{n} (1-p_i) \right).
\end{aligned}$$

Ainsi, Y suit la loi géométrique de paramètre $1 - \prod\limits_{i=1}^{n} (1-p_i)$.

2. Pour tous réels $x_1,\dots,x_n,\ y$, on a :
$$\max(x_1,\dots,x_n)\leqslant y\Longleftrightarrow\forall i\in[\![1,n]\!]\quad x_i\leqslant y.$$
Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a donc $\{Z\leqslant k\}=\{X_1\leqslant k\}\cap\dots\cap\{X_n\leqslant k\}$, d'où l'on déduit, par indépendance des variables X_i :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z\leqslant k)&=\mathbb{P}(\{X_1\leqslant k\}\cap\dots\cap\{X_n\leqslant k\})=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i\leqslant k)\\&=\prod_{i=1}^{n}\big(1-\mathbb{P}(X_i>k)\big)=\prod_{i=1}^{n}\big(1-(1-p_i)^k\big).\end{aligned}$$
On obtient :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=k)&=\mathbb{P}(Z\leqslant k)-\mathbb{P}(Z\leqslant k-1)\\&=\prod_{i=1}^{n}\big(1-(1-p_i)^k\big)-\prod_{i=1}^{n}\big(1-(1-p_i)^{k-1}\big).\end{aligned}$$

Proposition 23 Soit $I\subset[\![1,n]\!]$ et, pour tout $i\in I$ un élément x_i de $X_i(\Omega)$. On pose $A_i=\{x_i\}$ si $i\in I$ et $A_i=E_i$ si $i\notin I$. On a alors $\{X_i\in A_i\}=\Omega$ pour $i\notin I$. On obtient, en utilisant la proposition 22 :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\{X_i=x_i\}\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]}\{X_i\in A_i\}\right)=\prod_{i\in[\![1,n]\!]}\mathbb{P}(X_i\in A_i)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i=x_i).$$

Exercice 13

On remarque que, pour tout événement A, on a $\{\mathbb{1}_A=1\}=A$ et $\{\mathbb{1}_A=0\}=\overline{A}$.

- Supposons les événements $A_1,\dots,\ A_n$ mutuellement indépendants.
On a, pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n$:
$$\mathbb{P}\left(\{\mathbb{1}_{A_1}=x_1\}\cap\dots\cap\{\mathbb{1}_{A_n}=x_n\}\right)=\mathbb{P}\left(B_1\cap\dots\cap B_n\right),$$
où $B_i=A_i$ si $x_i=1$ et $B_i=\overline{A_i}$ si $x_i=0$. Les événements $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ étant indépendants, il en est de même des événements $B_1,\ B_2,\ \dots,\ B_n$. On a donc :
$$\mathbb{P}\left(\{\mathbb{1}_{A_1}=x_1\}\cap\dots\cap\{\mathbb{1}_{A_n}=x_n\}\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B_i)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(\mathbb{1}_{A_i}=x_i\right).$$
Les variables $\mathbb{1}_{A_1},\dots,\ \mathbb{1}_{A_n}$ sont donc mutuellement indépendantes.
- Supposons les variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soit I une partie non vide de $[\![1,n]\!]$. D'après la proposition 23, $(\mathbb{1}_{A_i})_{i\in I}$ est encore une famille de variables aléatoires mutuellement indépendants, donc on a :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\{\mathbb{1}_{A_i}=1\}\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_i}=1)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i).$$
Les événements $A_1,\dots,\ A_n$ sont donc mutuellement indépendants.

Proposition 25 Soit $(y_1, \ldots, y_n) \in f_1(X_1)(\Omega) \times \cdots \times f_n(X_n)(\Omega)$. On a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\{f_1(X_1) = y_1\} \cap \ldots \cap \{f_n(X_n) = y_n\}\big) \\
&\qquad = \mathbb{P}\Big(\big\{X_1 \in f_1^{-1}(\{y_1\})\big\} \cap \cdots \cap \big\{X_n \in f_n^{-1}(\{y_n\})\big\}\Big) \\
&\qquad = \mathbb{P}\big(X_1 \in f_1^{-1}(\{y_1\})\big) \ldots \mathbb{P}\big(X_n \in f_n^{-1}(\{y_n\})\big) \\
&\qquad = \mathbb{P}\big(f_1(X_1) = y_1\big) \ldots \mathbb{P}\big(f_n(X_n) = y_n\big).
\end{aligned}$$

Proposition 26

- Les variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_p)$ et $(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes. En effet, on a, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\big\{(X_1, \ldots, X_p) = (x_1, \ldots, x_p)\big\} \cap \{(X_{p+1} \ldots, X_n) = (x_{p+1}, \ldots, x_n)\}\Big) \\
&\qquad = \mathbb{P}\big(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\big) \\
&\qquad = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(X_k = x_k\big) \\
&\qquad = \prod_{k=1}^{p} \mathbb{P}(X_k = x_k) \prod_{k=p+1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k) \\
&\qquad = \mathbb{P}\big((X_1, \ldots, X_p) = (x_1, \ldots, x_p)\big)\mathbb{P}\big((X_{p+1}, \ldots, X_n) = (x_{p+1}, \ldots, x_n)\big),
\end{aligned}$$

  car $X_1, \ldots, X_p$ d'une part, $X_{p+1}, \ldots, X_n$ d'autre part, sont indépendantes.

- On en déduit que $f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes, d'après la proposition 20 de la page 904.

Exercice 14 On procède par récurrence sur n, la propriété étant évidente pour $n = 1$ et ayant été démontré pour $n = 2$ dans l'exercice 10 de la page 905.
Supposons que la propriété soit vraie au rang n et considérons $n + 1$ variables indépendantes $X_1, \ldots, X_{n+1}$ suivant des lois de Poisson. Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et donc, par hypothèse de récurrence, la variable $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Les variables $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$ étant mutuellement indépendantes, les variables $X_1 + \cdots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes. Elles suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et λ_{n+1}. D'après le cas de deux variables, leur somme $X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1}$ suit la loi de Poisson de paramètre $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$. Cela termine la démonstration par récurrence.

Exercice 15 On pose $q = 1 - p$. Les variables aléatoires Z_n sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(k_1, \ldots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, on a :

$$\mathbb{P}(Z_1 = k_1, Z_2 = k_2, \ldots, Z_n = k_n) = \mathbb{P}(Y_1 = k_1, Y_2 = k_1 + k_2, \ldots, Y_n = k_1 + \ldots + k_n).$$

On posons $\ell_1 = k_1$, $\ell_2 = k_1 + k_2, \ldots$, $\ell_n = k_1 + \cdots + k_n$, on obtient :

$$\{Z_1 = k_1, Z_2 = k_2, \ldots, Z_n = k_n\} = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \{X_{\ell_i} = 1\} \cap \bigcap_{j \in [\![1, k_1 + \cdots + k_n]\!] \setminus \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}} \{X_j = 0\}$$

et donc :

$$\mathbb{P}(Z_1 = k_1, Z_2 = k_2, \ldots, Z_n = k_n) = p^n q^{k_1 + k_2 + \ldots + k_n - n}.$$

car parmi les variables X_i pour $1 \leqslant i \leqslant k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, il y en a n qui sont égales à 1 et donc $k_1 + k_2 + \ldots + k_n - n$ qui sont égales à 0. On peut réécrire

$$\mathbb{P}(Z_1 = k_1, Z_2 = k_2, \ldots, Z_n = k_n) = \prod_{i=1}^{n} p q^{k_i - 1}.$$

En sommant par rapport à k_1, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_2 = k_2, \ldots, Z_n = k_n) &= \sum_{k_1=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k_1, Z_2 = k_2, \ldots, Z_n = k_n) \\
&= \sum_{k_1=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} p q^{k_i - 1} \\
&= \prod_{i=2}^{n} p q^{k_i - 1} \underbrace{\sum_{k_1=1}^{+\infty} p q^{k_1 - 1}}_{=1} = \prod_{i=2}^{n} p q^{k_i - 1}.
\end{aligned}$$

En réitérant le procédé, en sommant par rapport à $k_2, \ldots, k_{n-1}$ successivement, on obtient :

$$\forall k_n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(Z_n = k_n) = p q^{k_n - 1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable Z_n suit la loi géométrique de paramètre p. On en déduit que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(k_1, \ldots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, on a :

$$\mathbb{P}(Z_1 = k_1, Z_2 = k_2, \ldots, Z_n = k_n) = \prod_{i=1}^{n} p q^{k_i - 1} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Z_i = k_i).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $Z_1, \ldots, Z_n$ sont indépendantes. Donc $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Exercice 16

1. La série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergence, de somme 1. Donc il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

   La série de terme général $\mathbb{P}(X = n)\, n$ diverge donc l'espérance de X est infinie.

2. On a $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{2|n|(|n|+1)} = 1$. Donc il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{Z}^*$ dont la loi est donnée par :

   $$\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{2|n|(|n|+1)}.$$

La série de terme général $\mathbb{P}(X = n)\, n$ diverge donc *a fortiori* la famille $(\mathbb{P}(X = n)\, n)_{n\in\mathbf{Z}^*}$ n'est pas sommable. Ainsi, Y n'a pas d'espérance.

Exercice 17 Soit X une variable aléatoire discrète bornée sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in X(\Omega)$, $|x| \leqslant M$. On a donc :

$$\forall x \in X(\Omega) \quad |\mathbb{P}(X = x)\, x| \leqslant \mathbb{P}(X = x)\, M.$$

La famille $(\mathbb{P}(X = x)\, M)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable de somme M, donc la famille $(\mathbb{P}(X = x)\, x)_{x\in X(\Omega)}$ est également sommable et X est d'espérance finie.

Proposition 29

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(X = n)\, n = pn(1-p)^{n-1}$. La série entière $\sum nx^{n-1}$ a pour rayon de convergence 1 et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$. On en déduit que l'espérance de X est finie et :

$$\mathbb{E}(X) = p\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}\cdot$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(X = n)\, n = e^{-\lambda}\dfrac{n\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\cdot$ De $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = e^{\lambda}$, on déduit que l'espérance de X est finie et $\mathbb{E}(X) = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$.

Exercice 18 Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(X = n) &= \sum_{n=0}^{N} n\,(\mathbb{P}(X > n-1) - \mathbb{P}(X > n))\\ &= \sum_{n=-1}^{N-1}(n+1)\mathbb{P}(X > n) - \sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(X > n)\\ &= \sum_{n=0}^{N}\mathbb{P}(X > n) - (N+1)\mathbb{P}(X > N). \quad (*)\end{aligned}$$

- Supposons que X ne soit pas d'espérance finie. Alors la série de terme général $n\,\mathbb{P}(X = n)$ diverge. Il en est de même *a fortiori* de la série de terme général $\mathbb{P}(X > n)$, car pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a, d'après $(*)$:

$$\sum_{n=0}^{N}\mathbb{P}(X > n) \geqslant \sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(X = n).$$

On a donc :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > n) = +\infty.$$

- Supposons que X soit d'espérance finie. La série de terme général $n\mathbb{P}(X=n)$ converge. On a :

$$(N+1)\mathbb{P}(X>N)=(N+1)\sum_{k=N+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\leqslant\sum_{k=N+1}^{+\infty}k\,\mathbb{P}(X=k)=R_N,$$

où R_N est le reste d'indice N de la série convergente $\sum n\mathbb{P}(X=n)$. Donc la suite $((N+1)\mathbb{P}(X>N))$ converge vers 0. On en déduit, par passage à la limite dans la relation $(*)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>n)=\sum_{n=0}^{+\infty}n\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{E}(X).$$

La deuxième formule s'obtient par un changement d'indice.
Si X suit la loi géométrique, on a $\mathbb{P}(X>n)=(1-p)^n$ pour $n\in\mathbb{N}$, d'après la proposition 7 de la page 896. On en déduit :

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>n)=\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n=\frac{1}{1-(1-p)}=\frac{1}{p}.$$

Théorème 31

1. La famille $\big(\mathbb{P}(X=x)\,x\big)_{x\in X(\Omega)}$ étant sommable, il en est de même de la famille $\big(\mathbb{P}(X=x)\,\lambda x\big)_{x\in X(\Omega)}$, donc d'après la formule de transfert appliquée à X et à la fonction $x\mapsto\lambda x$, la variable aléatoire λX est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(\lambda X)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)\,\lambda x=\lambda\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)\,x=\lambda\mathbb{E}(X).$$

2. On écrit $X+Y=f(X,Y)$ où f est l'application $(x,y)\mapsto x+y$.
Comme $(X,Y)(\Omega)\subset X(\Omega)\times Y(\Omega)$, $X+Y$ est d'espérance finie si, et seulement si, la famille $\Big(\mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)\,(x+y)\Big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable. On a :

$$\mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)\,|x+y|\leqslant\mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)|x|+\mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)|y|,$$

donc il suffit de montrer que les deux familles

$$\big(\mathbb{P}\left((X,Y)=(x,y)\right)\,|x|\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}\quad\text{et}$$
$$\big(\mathbb{P}\left((X,Y)=(x,y)\right)\,|y|\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$$

sont sommables.
Montrons-le pour la première famille. Pour tout $y\in Y(\Omega)$, on a :

$$\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)\,|x|=|x|\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)=|x|\mathbb{P}(X=x).$$

La famille $(|x|\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable car X est d'espérance finie. Le théorème de sommation par paquets permet de conclure que la famille $(\mathbb{P}\left((X,Y)=(x,y)\right)\,|x|)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable.

On montre de même que la famille $\Big(\mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)\,|y|\Big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable. Ainsi $X+Y$ possède une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)\,(x+y)\\ &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)\,x + \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}\big(X,Y)=(x,y)\big)\,y.\end{aligned}$$

Mais le théorème de sommation par paquets donne maintenant :

$$\begin{aligned}\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)\,x &= \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)\,x\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)\,x = \mathbb{E}(X).\end{aligned}$$

De même, on a $\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)\,y = \mathbb{E}(Y)$, ce qui permet de conclure :

$$\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y).$$

Exercice 19

1. Soit $k\in[\![2,n]\!]$ et $(i,j)\in\mathbb{N}^*$. Si $\mathbb{P}(T_{k-1}=i)\neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_k=j\mid T_{k-1}=i) &= \mathbb{P}(T_k-T_{k-1}=j\mid T_{k-1}=i)\\ &= \mathbb{P}(T_k=i+j\mid T_{k-1}=i).\end{aligned}$$

Si $\{T_{k-1}=i\}$ est réalisé, les variables aléatoires $X_1,\dots,X_{i-1}$ ont donné $k-2$ valeurs différentes et X_i une valeur différentes des $k-2$ précédentes. Alors $\{T_k=i+j\}$ est réalisé si les variables aléatoires $X_{i+1},\dots,X_{i+j-1}$ redonnent une des $k-1$ valeurs déjà obtenues, ce qui pour chaque variable aléatoire se fait avec la probabilité $\dfrac{k-1}{n}$ et si X_{i+j} donne une valeur différente des précédentes, ce qui se fait avec une probabilité $1-\dfrac{k-1}{n}$.

Par indépendance des variables aléatoires $X_{i+1},\dots,X_{i+j}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(Z_k=j\mid T_{k-1}=i)=\left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Ce résultat ne dépend pas de i, donc pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_k=j) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Z_k=j\mid T_{k-1}=i)\mathbb{P}(T_{k-1}=i)\\ &= \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T_{k-1}=i)\\ &= \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}\left(1-\frac{k-1}{n}\right).\end{aligned}$$

La variable Z_k suit la loi $\mathcal{G}\left(\dfrac{n-k+1}{n}\right)$.

2. On a $T_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$. La variable aléatoire $Z_1 = T_1$ est la variable certaine égale à 1. Pour $2 \leqslant k \leqslant i$, on a $\mathbb{E}(Z_k) = \dfrac{n}{n-k+1}$. Comme la formule est valable pour $k = 1$, on obtient :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Z_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

On en déduit $\mathbb{E}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n$.

Proposition 33

- La famille $\big(\mathbb{P}(X = x)\, x\big)_{x\in X(\Omega)}$ est à termes positifs, donc sa somme $\mathbb{E}(X)$ est positive.
- Si $X = 0$ presque sûrement alors, pour tout $x \in X(\Omega) \setminus \{0\}$, on a $\mathbb{P}(X = x) = 0$. On en déduit $\mathbb{P}(X = x)\, x = 0$ pour tout $x \in X(\Omega)$ et donc $\mathbb{E}(X) = 0$.
- Réciproquement, si $\mathbb{E}(X) = 0$, on a alors, pour tout $x \in X(\Omega)$, $0 \leqslant x\mathbb{P}(X = x) \leqslant \mathbb{E}(X) = 0$ et donc $\mathbb{P}(X = x) = 0$ si $x \neq 0$. On en déduit :

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \sum_{x\in X(\Omega)\setminus\{0\}} \mathbb{P}(X = x) = 1.$$

Corollaire 35 D'après le théorème de transfert, $|X|$ est d'espérance finie si, et seulement si, la famille $(\mathbb{P}(X = x)\,|x|)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, ce qui équivaut par définition au fait que la famille $(\mathbb{P}(X = x)\, x)_{x\in X(\Omega)}$ soit sommable, c'est-à-dire que X soit d'espérance finie.
De $-|X| \leqslant X \leqslant |X|$, on tire, par linéarité et croissance de l'espérance, dans le cas où X est d'espérance finie :

$$-\mathbb{E}\big(|X|\big) \leqslant \mathbb{E}\big(X\big) \leqslant \mathbb{E}\big(|X|\big), \text{ c'est-à-dire } \big|\mathbb{E}(X)\big| \leqslant \mathbb{E}\big(|X|\big).$$

Proposition 36 Considérons le couple de variables aléatoires $Z = (X, Y)$ et les deux projections canoniques de $\mathbb{R}^2$, $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$ et $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$. On a donc $X = \pi_1(Z)$ et $Y = \pi_2(Z)$.
Comme Y est d'espérance finie, d'après le théorème de transfert, appliqué à la variable aléatoire Z et à la fonction π_2, la famille $\big(\pi_2(x, y)\mathbb{P}(Z = (x, y)\big)_{(x,y)\in Z(\Omega)}$ est sommable et :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{(x,y)\in Z(\Omega)} \pi_2(x, y)\, \mathbb{P}\big(Z = (x, y)\big) = \sum_{(x,y)\in Z(\Omega)} y\, \mathbb{P}\big(Z = (x, y)\big).$$

Si $(x, y) \in Z(\Omega)$, alors il existe $\omega \in \Omega$ tel que $(x, y) = (X(\omega), Y(\omega))$.
Comme $|X| \leqslant Y$, on alors $|x| \leqslant y$. On a donc, pour tout $(x, y) \in Z(\Omega)$:

$$|x|\mathbb{P}\big(Z = (x, y)\big) \leqslant y\mathbb{P}\big(Z = (x, y)\big).$$

De la sommabilité de la famille $\big(y\mathbb{P}(Z=(x,y))\big)_{(x,y)\in Z(\Omega)}$, on déduit la sommabilité de la famille $\big(|x|\,\mathbb{P}(Z=(x,y))\big)_{(x,y)\in Z(\Omega)}$, c'est-à-dire celle de $\big(x\,\mathbb{P}(Z=(x,y))\big)_{(x,y)\in Z(\Omega)}$ ou encore de la famille $(\pi_1(x,y)\mathbb{P}(Z=(x,y))_{(x,y)\in Z(\Omega)}$. Comme $\pi_1(Z)=X$, on en déduit, par le théorème de transfert, que X est d'espérance finie.

Proposition 37 On pose $Z=(X,Y)$ et on écrit $XY=u(Z)$, où u est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u(x,y)=xy$.

D'après le théorème de transfert, Z est d'espérance finie si, et seulement si, la famille :

$$\Big(u(x,y)\mathbb{P}\big(Z=(x,y)\big)\Big)_{(x,y)\in Z(\Omega)} \text{ c'est-à-dire } \Big(xy\mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)\Big)_{(x,y)\in Z(\Omega)}$$

est sommable. Si $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\setminus(X,Y)(\Omega)$, alors $\mathbb{P}(((X,Y)=(x,y))=0$. Il revient donc au même de dire que la famille $(xy\mathbb{P}\left((X,Y)=(x,y)\right))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable.

Dans le cas où XY est d'espérance finie, on a, toujours par la formule de transfert :

$$\mathbb{E}(XY)=\sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} xy\mathbb{P}\left((X,Y)=(x,y)\right)=\sum_{x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\mathbb{P}\left((X,Y)=(x,y)\right).$$

Théorème 38

Supposons X et Y indépendantes. On a $\mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$, pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$. D'après la proposition 37, XY est d'espérance finie si, et seulement si, la famille $(xy\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable.

Par hypothèse, les familles $\big(x\,\mathbb{P}(X=x)\big)$ et $\big(y\,\mathbb{P}(Y=y)\big)$ sont sommables. D'après l'exercice III.3 de la page 462, on en déduit que la famille $(xy\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable et que sa somme est :

$$\left(\sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x)\right)\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\,\mathbb{P}(Y=y)\right),$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 20 Les variables aléatoires $f(X)$, $g(Y)$ et $f(X)g(Y)$ sont bornées, donc possèdent une espérance.

- Si X et Y sont indépendantes, il en est de même de $f(X)$ et $g(Y)$ et l'égalité découle directement du théorème 38.
- Réciproquement supposons que $\mathbb{E}\big(f(X)g(Y)\big)=\mathbb{E}\big(f(X)\big)\mathbb{E}\big(g(Y)\big)$, pour toutes fonctions f et g bornées.
  Soit $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$. Prenons $f=\mathbb{1}_{\{x\}}$ et $g=\mathbb{1}_{\{y\}}$. On a alors

  $$f(X)=\mathbb{1}_{\{X=x\}},\ \ g(Y)=\mathbb{1}_{\{Y=y\}} \qquad \text{et} \qquad f(X)g(Y)=\mathbb{1}_{\{X=x\}\cap\{Y=y\}}.$$

  L'hypothèse se traduit par $\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\})=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$. Cela est vrai pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, ce qui établit l'indépendance de X et Y.

Théorème 39 Soit $\omega \in \Omega$.

- Si $\omega \in \{X \geqslant a\}$, alors on a $\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}}(\omega) = 1 \leqslant \dfrac{X(\omega)}{a}$, car $X(\omega) \geqslant a$.
- Dans le cas contraire, on a $\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}}(\omega) = 0 \leqslant \dfrac{X(\omega)}{a}$, car X est une variable positive.

Ainsi, $\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}} \leqslant \dfrac{X}{a}$, et comme les deux variables aléatoires sont d'espérance finie, on obtient par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}}) \leqslant \mathbb{E}\left(\frac{X}{a}\right) = \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Exercice 21 Comme X est positive, on a, pour tout $a > 0$:

$$\{X > a\} = \{X^r > a^r\}.$$

En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire X^r, on obtient :

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) = \mathbb{P}(X^r \geqslant a^r) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X^r)}{a^r}.$$

Proposition 40 On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant x^2 + 1$, car $|x| \leqslant x^2$ si $|x| \geqslant 1$. On a donc

$$|X| \leqslant X^2 + 1.$$

La variable X^2+1 est d'espérance finie, car somme de variables d'espérances finies, donc X est d'espérance finie d'après la proposition 36 de la page 914.

Exercice 22 Même preuve que celle de la proposition 40, en utilisant l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x^k| \leqslant |x^r| + 1.$$

.

Lemme 41 On a $|XY| \leqslant \dfrac{1}{2}(X^2+Y^2)$. Les variables aléatoires X^2 et Y^2 étant d'espérance finie, il en est de même de $\dfrac{1}{2}(X^2 + Y^2)$. On en déduit que XY est d'espérance finie, d'après la proposition 36 de la page 914.

Proposition 42 La variable aléatoire nulle appartient à $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2 et λ est un réel, on a $(\lambda X+Y)^2 = \lambda^2 X^2 + 2\lambda XY + Y^2$. Par hypothèse les variables X^2 et Y^2 sont d'espérance finie. Il en est de même de XY, d'après le lemme 41. La variable aléatoire $(\lambda X + Y)^2$ est donc d'espérance finie, comme combinaison linéaire de variables aléatoires d'espérance finie, donc $\lambda X + Y \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Théorème 43 Il a été déjà démontré que XY est d'espérance finie, dans le lemme 41. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la variable $(\lambda X + Y)^2 = \lambda^2 X^2 + 2\lambda XY + Y^2$ est d'espérance finie, comme combinaison linéaire de variables aléatoires ayant une espérance finie. Son espérance est positive car c'est une variable aléatoire positive. Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda^2 \mathbb{E}(X^2) + 2\lambda \mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}\left((\lambda X + Y)^2\right) \geqslant 0.$$

- Si $\mathbb{E}(X^2) = 0$, alors X^2 est presque sûrement nulle, donc X est presque sûrement nulle. On en déduit que XY est presque sûrement nulle. On a donc $\mathbb{E}(XY) = 0$ et $\mathbb{E}(XY)^2 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.
- Si $\mathbb{E}(X) \neq 0$, la fonction trinôme $\lambda \longmapsto \mathbb{E}\left((\lambda X + Y)^2\right)$ qui garde un signe constant. Son discriminant est donc négatif, ce qui donne l'inégalité voulue.

Exercice 23 On garde les notations du théorème 43.

- Si X est presque sûrement nulle, on a $\mathbb{E}(XY)^2 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) = 0$.
- Sinon, l'égalité $\mathbb{E}(XY)^2 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$ équivaut à la nullité du discriminant de la fonction trinôme $\lambda \longmapsto \mathbb{E}\left((\lambda X + Y)^2\right)$, c'est-à-dire à l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}\left((\lambda X + Y)^2\right) = 0$. Cette dernière condition est réalisée si, et seulement si, $Y = -\lambda X$ presque sûrement.

On conclut qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si, et seulement si :

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 \quad \text{ou} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}(Y = \alpha X) = 1.$$

Exercice 24 Si X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, possédant un moment d'ordre 2, on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big),$$

donc, d'après la proposition 33 de la page 913, $\mathbb{V}(X) = 0$ équivaut à :

$$\mathbb{P}\big(X - \mathbb{E}(X) = 0\big) = 1, \text{ c'est-à-dire à } \mathbb{P}\big(X = \mathbb{E}(X)\big) = 1.$$

Si cette condition est réalisée, alors X est presque sûrement constante.

Réciproquement, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = a) = 1$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = a \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\big(X = \mathbb{E}(X)\big) = 1.$$

La variance de X est donc nulle si, et seulement si, X est presque sûrement constante.

Théorème 44

- Si X possède un moment d'ordre 2, alors, d'après la proposition 40 de la page 915, elle est d'espérance finie. De l'égalité :

$$\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X)\,X + (\mathbb{E}(X))^2,$$

on déduit par linéarité que $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$ est d'espérance finie. Ainsi $\mathbb{V}(X)$ existe et :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}\Big(\big(\mathbb{E}(X)\big)^2\Big)\\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\big(\mathbb{E}(X)\big)^2 + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2\\ &= \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2,\end{aligned}$$

puisque $\mathbb{E}(X)$ est une variable aléatoire constante dont l'espérance est $\mathbb{E}(X)$.

- Réciproquement si $\mathbb{V}(X)$ existe, X et $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$ ont des espérances. Il en est de même de X^2, car $X^2 = \big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 + 2\mathbb{E}(X)\,X - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$. La variable X possède donc un moment d'ordre 2.

Proposition 45 Dans les deux cas, il est plus simple de commencer par calculer $\mathbb{E}\left(X(X-1)\right)$, plutôt que de calculer directement $\mathbb{E}(X^2)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(X=n)\, n(n-1) = p(1-p)^{n-1} n(n-1)$.
   De $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on déduit que la variable aléatoire $X(X-1)$ possède une espérance finie donnée par la formule de transfert :
   $$\mathbb{E}(X(X-1)) = p(1-p)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} = p(1-p)\frac{2}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}.$$
   Comme $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$, on en déduit par linéarité :
   $$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbb{E}(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2},$$
   puis :
   $$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$
2. Pour $n \geqslant 2$, on a
   $$\mathbb{P}(X=n)\, n(n-1) = e^{-\lambda}\frac{n(n-1)\lambda^n}{n!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}.$$
   De $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} = e^{\lambda}$, on déduit que $X(X-1)$ possède une espérance finie et :
   $$\mathbb{E}(X(X-1)) = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2.$$
   On en déduit, comme dans le premier point :
   $$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda.$$

Proposition 46 La variable X admet un moment d'ordre 2 donc est d'espérance finie. On en déduit que $aX+b$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$. On obtient :
$$\big(aX + b - \mathbb{E}(aX+b)\big)^2 = a^2\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2.$$
Comme X admet une variance $\big(X - E(X)\big)^2$ est d'espérance finie. Par linéarité, il en est de même de $a^2\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2$. Ainsi $aX+b$ admet une variance et :
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}\big(aX+b-\mathbb{E}(aX+b)\big)^2 &= \mathbb{E}\big(a^2(X-\mathbb{E}(X))^2\big)\\ &= a^2\mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))^2\big) = a^2\mathbb{V}(X).\end{aligned}$$

Théorème 47 La variable $\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2$ est positive et possède une espérance égale à $\mathbb{V}(X)$. D'après l'inégalité de Markov, on a pour tout $\varepsilon > 0$:
$$\mathbb{P}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2 \geqslant \varepsilon^2\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Comme les événements $\big\{|X-\mathbb{E}(X)|\geqslant\varepsilon\big\}$ et $\big\{(X-\mathbb{E}(X))^2\geqslant\varepsilon^2\big\}$ sont égaux, on a le résultat voulu.

Proposition 48 Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(X^*)=\dfrac{\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}=0$. En utilisant la proposition 46, on obtient :

$$\mathbb{V}(X^*)=\frac{\mathbb{V}(X)}{\sigma(X)^2}=1.$$

Théorème 49 Par linéarité de l'espérance, la variable aléatoire :

$$\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)=XY-X\mathbb{E}(Y)-Y\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

admet une espérance. Donc le couple (X,Y) possède une covariance et :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=\mathbb{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)\Big)\\&=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(Y)\,\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)+\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)\\&=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(Y)\,\mathbb{E}(X).\end{aligned}$$

Si X et Y ont un moment d'ordre 2, alors elles ont une espérance et XY a une espérance d'après le théorème 43 de la page 915.

Exercice 25

- Pour $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$, on a :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(L_1=m,L_2=n)\\&=\mathbb{P}\left(\{X_1=\cdots=X_m=1\}\cap\{X_{m+1}=\cdots=X_{m+n}=0\}\cap\{X_{m+n+1}=1\}\right)\\&+\mathbb{P}\left(\{X_1=\cdots=X_m=0\}\cap\{X_{m+1}=\cdots=X_{m+n}=1\}\cap\{X_{m+n+1}=0\}\right)\\&=p^{m+1}q^n+q^{m+1}p^n.\end{aligned}$$

  On en déduit, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(L_1=m)=\sum_{n=1}^{+\infty}\big(p^{m+1}q^n+q^{m+1}p^n\big)=p^{m+1}\frac{q}{1-q}+q^{m+1}\frac{p}{1-p}=qp^m+pq^m.$$

  On trouve de même que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(L_2=n)=p^2q^{n-1}+q^2p^{n-1}.$$

  On vérifie au passage que $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\mathbb{P}(L_1=m)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(L_2=n)=1$, ce qui montre que L_1 et L_2 sont bien des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, définies presque sûrement.

- On calcule l'espérance de L_1 et de L_2. On obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_1)&=\sum_{m=1}^{+\infty}m(qp^m+pq^m)=pq\sum_{m=1}^{+\infty}(mp^{m-1}+mq^{m-1})\\&=pq\left(\frac{1}{(1-p)^2}+\frac{1}{(1-q)^2}\right)=\frac{p}{q}+\frac{q}{p}.\end{aligned}$$

On trouve de même :

$$\mathbb{E}(L_2) = \frac{p^2}{(1-q)^2} + \frac{q^2}{(1-p)^2} = 2.$$

- On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_1\,L_2) &= \sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} mn\mathbb{P}(L_1=m, L_2=n)\\ &= \sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} mn(p^{m+1}q^n + q^{m+1}p^n)\\ &= \left(\sum_{m=1}^{+\infty} mp^{m+1}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n\right) + \left(\sum_{m=1}^{+\infty} mq^{m+1}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} np^n\right)\\ &= \frac{p^2}{(1-p)^2}\,\frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^2}{(1-q)^2}\,\frac{p}{(1-p)^2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(L_1,L_2) = \mathbb{E}(L_1\,L_2) - \mathbb{E}(L_1)\,\mathbb{E}(L_2) &= \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{2p}{q} - \frac{2q}{p}\\ &= -\frac{2p^2+2q^2-p-q}{pq} = -\frac{2p^2+2q^2-(p+q)^2}{pq}\\ &= -\frac{(p-q)^2}{pq}.\end{aligned}$$

Proposition 51

Soit X, Y et X' trois variables aléatoires appartenant à $L_2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

- On a $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{V}(X) \geqslant 0$.
- Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\Big) = \mathrm{Cov}(Y,X).\end{aligned}$$

- D'après le théorème 43, $X+X'$ possède un moment d'ordre 2. Ainsi le couple $(X+X',Y)$ possède une covariance. Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X+X',Y) &= \mathbb{E}\big((X+X')Y\big) - \mathbb{E}(X+X')E(Y)\\ &= \mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(X'Y) - \big(\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(X')\big)\mathbb{E}(Y)\\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X'Y) - \mathbb{E}(X')\mathbb{E}(Y)\\ &= \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X',Y),\end{aligned}$$

et de même :

$$\mathrm{Cov}(\lambda X,Y) = \mathbb{E}(\lambda XY) - \mathbb{E}(\lambda X)\mathbb{E}(Y) = \lambda\mathbb{E}(XY) - \lambda\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \lambda\mathrm{Cov}(X,Y).$$

- La linéarité par rapport à la deuxième variable résulte de la symétrie et de la linéarité par rapport à la première variable.

Exercice 26 La matrice M est symétrique réelle donc diagonalisable. Soit λ une valeur propre et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. On a par bilinéarité :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i X_i\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} z_i z_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = {}^tZMZ = {}^tZ\lambda Z = \lambda\|Z\|^2.$$

On a $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i X_i\right) \geqslant 0$ et $\|Z\|^2 > 0$, donc $\lambda \geqslant 0$.

Si $\lambda = 0$, on obtient $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i X_i\right) = 0$ et donc $\sum_{i=1}^{n} z_i X_i = 0$ presque sûrement.

Réciproquement, s'il existe $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\sum_{i=1}^{n} z_i X_i = 0$ presque sûrement, on a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$0 = \mathrm{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^{n} z_j X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) z_j,$$

donc 0 est valeur propre de M, un vecteur propre associé étant $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Théorème 52 Les variables X_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, appartiennent à l'espace vectoriel $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ donc il en est de même de $X_1 + \cdots + X_n$ et on obtient, par bilinéarité de la covariance :

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Cov}\left(X_1 + \cdots + X_n, X_1 + \cdots + X_n\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Sachant que $\mathrm{Cov}(X_i, X_i) = \mathbb{V}(X_i)$ et $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{Cov}(X_j, X_i)$, on obtient :

$$\mathbb{V}(X + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Théorème 54 Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = m$. D'autre part, comme les variables X_k sont deux à deux indépendantes et possèdent une variance, d'après le corollaire 53 de la page 919, S_n possède une variance et, en notant $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$:

$$\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}\cdot$$

On a donc, pour $\varepsilon > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(\dfrac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\cdot$$

Le résultat découle de cette inégalité.

Proposition 55 On a, pour tous $t \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $|\mathbb{P}(X=n)t^n| \leqslant \mathbb{P}(X=n)$. Comme $\sum \mathbb{P}(X=n)$ converge, la série $\sum \mathbb{P}(X=n)t^n$ converge normalement (et donc absolument) sur $[-1,1]$. Donc G_X est définie sur $[-1,1]$ et est continue sur $[-1,1]$, car somme d'une série de fonctions continues convergeant normalement.

La convergence sur $[-1,1]$ montre que le rayon de convergence de la série entière est supérieur ou égale à 1.

Proposition 56 Cela résulte immédiatement de la formule donnant les coefficients du développement d'une fonction en série entière.

Lemme 57 On note R le rayon de convergence de la série $\sum a_n t^n$. Comme la série converge pour $t=1$, on a $R \geqslant 1$. La fonction f est dérivable sur $]-R,R[$ et :

$$\forall t \in]-R,R[\quad f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}.$$

Si $R>1$, la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$, donc $\sum n a_n$ converge.

On suppose désormais $R=1$. On a, pour tout $t \in [0,1[$,

$$\frac{f(t)-f(1)}{t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{t^n-1}{t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (t^{n-1}+\cdots+t+1).$$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}$ est donc croissante sur $[0,1[$.

- Si la fonction f est dérivable en 1, on a pour tout $t \in [0,1[$, $\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1} \leqslant f'(1)$ et *a fortiori* pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{n=1}^{N} a_n (t^{n-1}+\cdots+t+1) \leqslant f'(1).$$
En faisant tendre t vers 1, on obtient $\sum_{n=1}^{N} n a_n \leqslant f'(1)$. Comme cela est vrai pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la série à termes positifs $\sum n a_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leqslant f'(1)$.
- Réciproquement, si la série de terme général $n a_n$ converge, on a, pour tout $t \in [0,1[$,
$$\frac{f(t)-f(1)}{t-1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n.$$
La fonction $t \longmapsto \dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}$ est croissante et majorée. Elle possède donc une limite finie en 1, inférieure à $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$. La fonction f est donc dérivable en 1 et $f'(1) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$.

Dans le cas où f est dérivable, on a donc $f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$.

Théorème 58 D'après le lemme 57, la fonction G_X est dérivable en 1 si, et seulement si, la série de terme général $n\mathbb{P}(X=n)$ converge, c'est-à-dire si, et seulement si, X est d'espérance finie et l'on a alors $G'_X(1)=\mathbb{E}(X)$.

Théorème 59 La variable X possède un moment d'ordre 2 si, et seulement si, la série de terme général $n^2\mathbb{P}(X=n)$ converge, c'est-à-dire si, et seulement si, la série de terme général $n(n-1)\mathbb{P}(X=n)$ converge. En effet, ces séries à termes positifs ont des termes généraux équivalents. En cas de convergence $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{E}(X(X-1))$, d'après la formule de transfert.

- Si la fonction G_X est deux fois dérivable en 1, elle est en particulier dérivable en 1 et d'après le lemme 57 on a :

$$\forall t\in[0,1]\quad G'_X(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)nt^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n+1)(n+1)t^n.$$

  Toujours d'après le lemme 57, appliqué à la série définissant G'_X, la dérivabilité de G'_X en 1 implique la convergence de la série de terme général $n\mathbb{P}(X=n+1)(n+1)$. De plus, on a :

$$G''_X(1)=\sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(X=n+1)(n+1)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n).$$

- Réciproquement, si la série de terme général $n(n-1)\mathbb{P}(X=n)$ converge, alors la série de terme général $nP(X=n)$ converge *a fortiori* donc, d'après le théorème 58, G_X est dérivable en 1 et :

$$\forall t\in[0,1]\quad G'_X(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)nt^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n+1)(n+1)t^n.$$

  La série de terme général $n(n+1)\mathbb{P}(X=n+1)$ converge donc, d'après le lemme 57, G'_X est dérivable en 1 et, d'après le premier point, $G''_X(1)=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n)$.

Exercice 27

1. La variable X est finie donc G_X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G_X(t)=\mathbb{P}(X=0)t^0+\mathbb{P}(X=1)t=(1-p)+pt.$$

   On en déduit, pour tout réel t, $G'_X(t)=p$ et $G''_X(t)=0$. On a donc $\mathbb{E}(X)=p$ et $\mathbb{E}(X^2)=p+0=p$, puis $\mathbb{V}(X)=p-p^2=p(1-p)$.
2. La variable X est finie donc G_X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned}G_X(t)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)t^k&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}t^k\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pt)^k(1-p)^{n-k}=((1-p)+pt)^n.\end{aligned}$$

On en déduit, pour tout réel t :

$$G'_X(t) = np\left((1-p)+pt\right)^{n-1} \ ;$$
$$G''_X(t) = n(n-1)p^2\left((1-p)+pt\right)^{n-2}.$$

On a donc $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{E}(X^2) = np + n(n-1)p^2$, puis :

$$\mathbb{V}(X) = np + n(n-1)p^2 - (np)^2 = np(1-p).$$

3. La série de terme général $\mathbb{P}(X=n)t^n = pt(t(1-p))^{n-1}$ est une série géométrique qui converge si $\left|p(1-t)\right| < 1$. On a :

$$\forall t \in \left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[\quad G_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} pt(t(1-p))^{n-1} = \frac{pt}{1-(1-p)t}.$$

On en déduit, pour tout $t \in \left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[$:

$$G'_X(t) = \frac{p}{(1-(1-p)t)^2} \quad \text{et} \quad G''_X(t) = \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p)t)^3}.$$

On a donc :

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$
$$\mathbb{E}(X^2) = G'_X(1) + G''_X(1) = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2},$$

puis $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{2(1-p)}{p^2} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$.

4. La série de terme général $\mathbb{P}(X=n)t^n = e^{-\lambda}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$ converge pour tout réel t donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad G_X(t) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

On a, pour tout réel t, $G'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$ et $G''_X(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$. On en déduit $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \lambda$ et $\mathbb{E}(X^2) = G'_X(1) + G''_X(1) = \lambda + \lambda^2$, puis $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

Théorème 61 Supposons que $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ soient définis, c'est-à-dire que t^X et t^Y aient une espérance. Les variables aléatoires t^X et t^Y étant indépendantes, car fonctions de variables aléatoires indépendantes, $t^X t^Y = t^{X+Y}$ possède une espérance et :

$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(t^X t^Y\right) = \mathbb{E}\left(t^X\right)\mathbb{E}\left(t^Y\right) = G_X(t)G_Y(t).$$

Exercice 28 Les variables X, Z et Y (car $Y \leqslant Z$) sont finies, donc leur fonction génératrice est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a :

$$G_X(t) = \frac{1}{\ell}\sum_{i=0}^{\ell-1} t^i = \frac{t^\ell - 1}{\ell(t-1)} \text{ et, de même, } G_Z(t) = \frac{t^n-1}{n(t-1)}.$$

Les variables X et Y étant indépendantes, on a $G_Z = G_X\, G_Y$ et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad G_Y(t) = \frac{G_Z(t)}{G_X(t)} = \frac{\ell(t^n-1)}{n(t^\ell-1)} = \frac{t^{\ell m}-1}{m(t^\ell-1)} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} t^{\ell i}.$$

Cette égalité est encore valable pour $t = 1$ par continuité.

On en déduit que $\mathbb{P}(Y = \ell i) = \dfrac{1}{m}$, pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$. Ainsi Y suit la loi uniforme sur $\{0, \ell, 2\ell, \ldots, (m-1)\ell\}$.

Exercice 29

1. Soit $X_1, \ldots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes, telles que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, la variable X_i suive la loi binomiale de paramètre (n_i, p). On pose $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On a alors, pour tout réel t,

$$G_X(t) = \prod_{i=1}^{k} G_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{k}(1-p+pt)^{n_i} = (1-p+pt)^n,$$

où $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$. On reconnaît la fonction génératrice d'une loi binomiale de paramètre (n, p).

D'après la proposition 56, X suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

2. Soit $X_1, \ldots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes, telles que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, la variable X_i suive la loi de Poisson de paramètre λ_i. On pose $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On a alors, pour tout réel t :

$$G_X(t) = \prod_{i=1}^{k} G_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{k} e^{\lambda_i(t-1)} = e^{\lambda(t-1)},$$

où $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$. On reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre λ. D'après la proposition 56, X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

S'entraîner et approfondir

16.1 Soit X une variable aléatoire discrète, à valeur dans $\mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par :

$$f(n) = \frac{n}{2} \quad \text{si} \quad n \text{ est pair} \qquad \text{et} \qquad f(n) = \frac{1-n}{2} \quad \text{si} \quad n \text{ est impair.}$$

On pose $Y = f(X)$. Déterminer la loi de Y et son espérance dans les cas suivants :

$$X \sim \mathcal{G}(p) \qquad\qquad X \sim \mathcal{P}(\lambda).$$

16.2 Soit X et Y deux variables indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Déterminer la probabilité des événements suivants :

1. $\mathbb{P}(X = Y)$;
2. $\mathbb{P}(X > Y)$;
3. $\mathbb{P}(X \geqslant kY)$ pour un entier $k \geqslant 1$ fixé.

16.3 *(Mines-Ponts 2015)*

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre $p \in]0,1[$. Donner la loi de $|X - Y|$.

16.4 Dans une salle de cinéma, il arrive X personnes souhaitant voir le film. On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p. La capacité de la salle est de n places. On note Y le nombre de personnes ne pouvant entrer dans la salle.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Déterminer la fonction génératrice de Y.
3. Calculer l'espérance de Y.

16.5 On considère X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, de même loi. On pose $D = X - Y$ et $I = \min(X, Y)$.

1. On suppose que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = pq^k$, où $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.
   (a) Déterminer la loi conjointe de (D, I).
   (b) Déterminer les lois marginales de D et I. Vérifier que D et I sont indépendantes.
2. On suppose que les variables D et I sont indépendantes et que $\mathbb{P}(X = n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer qu'il existe $p \in]0,1[$, tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = pq^k.$$

16.6 (Une caractérisation de la loi de Poisson)

On considère une variable aléatoire discrète N sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(N = n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si la variable aléatoire N prend la valeur n, on procède à une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0, 1[$. On note S et E les variables aléatoires représentant respectivement le nombre de succès et d'échecs dans ces n épreuves.

1. Montrer que si N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, les variables S et E suivent aussi des lois de Poisson dont on déterminera les paramètres. Montrer que les variables E et S sont indépendantes.
2. Montrer réciproquement que si S et E sont indépendantes, alors N suit une loi de Poisson. Pour cela, on montrera :
   (a) qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
   $$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad (m + n)!\, \mathbb{P}(N = m + n) = u_m\, v_n \ ;$$
   (b) que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques.

16.7 On lance une pièce de monnaie (la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0, 1[$) jusqu'à l'obtention du premier pile. Soit N la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaire. Si $N = n$, on relance ensuite n fois la pièce et on appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de piles obtenu.

1. Déterminer la loi de N, celle du couple (N, X), puis la loi de X.
2. Montrer que X a même loi que le produit de deux variables indépendantes Y et Z telles que Y suive une loi de Bernoulli et Z une loi géométrique de même paramètre.
3. En déduire l'espérance et la variance de X.

16.8 Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour $s > 1$, on note $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}\cdot$$

1. Justifier qu'on définit bien ainsi la loi d'une variable aléatoire.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère A_n : « n divise X ». Montrer que $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est une famille d'événements indépendants. En déduire une preuve probabiliste de :
$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}\cdot$$
3. Montrer que la probabilité qu'aucun carré différent de 1 ne divise X vaut $\dfrac{1}{\zeta(2s)}\cdot$

16.9 (Taux de panne)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète, définie sur cet espace probabilisé, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X \geqslant n) > 0. \tag{1}$$

On appelle taux de panne associé à X la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n = \mathbb{P}(X = n \mid X \geqslant n).$$

1. Exprimer $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ en fonction des x_k.
2. (a) Montrer que l'on a $0 \leqslant x_n < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et que la série de terme général x_n diverge.
   (b) Réciproquement, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeur dans $[0, 1[$ telle que la série de terme général x_n diverge. Montrer qu'il existe une variable aléatoire dont le taux de panne est la suite (x_n).
3. Montrer que la variable X suit une loi géométrique si, et seulement si, son taux de panne est constant.

⋆ **16.10** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par Ω l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$. On munit Ω de la probabilité uniforme. Pour $\sigma \in \Omega$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on dit que $\sigma(i)$ est un maximum (resp.minimum) provisoire de σ si :

$$\sigma(i) = \max\big(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)\big) \quad \big(\text{resp. } \sigma(i) = \min\big(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)\big)\big)\,.$$

On désigne par X_n (resp. Y_n) les variables aléatoires représentant le nombre de maximums (resp. minimums) provisoires des permutations de $[\![1, n]\!]$.

1. Montrer que les variables X_n et Y_n ont même loi.
2. (a) Déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi du couple (X_3, Y_3) et sa covariance.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction génératrice de X_n.
   (a) Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on note Z_k la variable indicatrice de l'événement « $\sigma(k)$ est un maximum provisoire ».
   Montrer que les variables Z_1, Z_2,..., Z_n sont indépendantes.
   (b) Exprimer X_n en fonction de Z_1, Z_2,..., Z_n. En déduire g_n.
   (c) En déduire $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$, $\mathbb{P}(X_n = n)$.
   (d) Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ (sous forme de sommes) et un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ et de $\mathbb{V}(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

16.11 (Formule du crible)

1. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$. En déduire la *formule du crible* :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} \Bigg((-1)^{k-1} \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!] \\ \text{card } I=k}} \mathbb{P}\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big)\Bigg).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir tous les numéros entre 1 et n au moins une fois (et à $+\infty$ si on n'obtient jamais les n numéros). Pour $j \in [\![1, n]\!]$ et $m \in \mathbb{N}$, on note $B_{j,m}$ l'événement : « au bout de m tirages, le numéro j n'est pas encore apparu ».
   (a) Calculer $\mathbb{P}(B_{j_1,m} \cap B_{j_2,m} \cap \cdots \cap B_{j_k,m})$, où j_1, j_2, …, j_k sont des indices distincts compris entre 1 et n.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}(X > m) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^m$.
   Calculer $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathbb{P}(X > m)$. Interpréter.
   (c) Montrer que $\mathbb{E}(X) = n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k}}{k}$, en utilisant l'exercice 18 de la page 911.
   (d) Montrer que $\mathbb{E}(X) = n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$. En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

16.12 Soit $n \geqslant 1$ un entier, et $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit :

$$X_i^{(m)} = \operatorname{card}\{k \in [\![1, m]\!] \mid U_k = i\} \quad \text{si} \quad m \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad X_i^{(0)} = 0.$$

1. Quelle est la loi de $X_i^{(m)}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $m \geqslant 1$?
2. Soit $m \geqslant 1$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, avec $i \neq j$. Calculer la covariance des variables aléatoires $X_i^{(m)}$ et $X_j^{(m)}$. Sont-elles indépendantes ?
3. Soit $\lambda > 0$ et N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, indépendante des variables U_k. On pose
$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad Y_i = X_i^{(N)}.$$
   (a) Déterminer, en fonction de λ et n, la loi de Y_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$
   (b) Déterminer la loi conjointe de $(Y_1, \ldots, Y_n)$.

★★ **16.13** *(Centrale 2015)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On suppose que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) < +\infty$, c'est-à-dire que la série converge.

1. On note $\mathbb{1}_X$ la fonction indicatrice d'un ensemble X. Soit $Z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{E_n}$ (on convient que $Z = +\infty$ si la série diverge). Prouver que Z est une variable aléatoire discrète.
2. Soit $F = \{\omega \in \Omega \mid \omega$ appartient à un nombre fini de E_n (pour $n \in \mathbb{N})\}$.
Prouver que F est un événement et que $\mathbb{P}(F) = 1$.
3. Prouver que Z est d'espérance finie.

16.14 Une action vaut initialement 1 euro. À chaque instant $n \geqslant 1$, sa valeur est multipliée par une quantité aléatoire Z_n. On suppose que les variables Z_n sont indépendantes et de même loi, telles que :

$$\mathbb{P}(Z_n = 1+a) = \mathbb{P}(Z_n = 1-a) = 1/2, \quad \text{avec} \quad a \in]0,1[.$$

On note X_n la valeur de l'action à l'instant n. On pose $Y_k = \ln(Z_k)$, et l'on définit, pour tout entier naturel non nul n, la variable :

$$\widehat{Y}_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{E}(X_n) = 1$.
2. Calculer la limite de $\mathbb{V}(X_n)$ quand n tend vers l'infini ?
3. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\widehat{Y}_n > -\delta\right) = 0.$$
4. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = 0.$$

⋆ **16.15** *(Centrale 2015)*

On dispose de n urnes et de $N = na$ boules, où a et n sont des entiers naturels non nuls. Ces boules sont réparties de façon indépendante et équiprobable entre les urnes. On nomme Y_n la variable aléatoire donnant le nombre d'urnes vides et $S_n = \dfrac{Y_n}{n}$.

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.
3. Montrer :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|S_n - e^{-a}| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

16.16 (**Modèle de Galton-Watson**)

On observe des virus qui se reproduisent tous selon la même loi avant de mourir : un virus donne naissance en une journée à X virus, où X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{P}(X = k) = p_k$. On suppose $p_1 > 0$ et $p_0 + p_1 < 1$. On note f la fonction génératrice de X.

On part au jour zéro de $X_0 = 1$ virus. Au premier jour, on a donc X_1 virus, où X_1 suit la loi de X ; chacun de ces X_1 virus évolue alors indépendamment des autres virus et se reproduit selon la même loi avant de mourir : cela conduit à avoir X_2 virus au deuxième jour ; et le processus continue de la sorte. On note $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

1. Calculer u_0, u_1.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
4. Que peut-on dire de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Discuter selon la valeur de $\mathbb{E}(X)$. Interpréter le résultat.

⋆ **16.17 (Somme aléatoire de variables aléatoires)**
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes, toutes de même loi, et N une variable aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que N et les variables X_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, forment une suite de variables aléatoires indépendantes. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{et} \qquad S_0 = 0.$$

1. Montrer que S_N est une variable aléatoire.
2. (a) Déterminer la loi de S_N, lorsque les X_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p et N la loi de Poisson de paramètre λ.
   (b) Déterminer la loi de S_N lorsque les X_k suivent la loi géométrique de paramètre p et N la loi géométrique de paramètre p'.
3. On suppose que les variables aléatoires X_n sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$ sur $[0,1]$.
   (b) Montrer que, si X_1 et N sont d'espérance finie, alors S_N est d'espérance finie et vérifie la première *formule de Wald* :
   $$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(N).$$
   (c) Montrer que, si X_1 et N possèdent un moment d'ordre 2, alors S_N possède aussi un moment d'ordre 2 et vérifie la seconde *formule de Wald* :
   $$\mathbb{V}(S_N) = \mathbb{V}(X_1)\,\mathbb{E}(N) + (\mathbb{E}(X_1))^2\,\mathbb{V}(N).$$
4. On revient au cas général. On suppose que X_1 et N sont d'espérance finie.
   (a) Démontrer que la famille $(x\,\mathbb{P}(S_n = x)\,\mathbb{P}(N = n))_{(x,n)\in S_N(\Omega)\times N(\Omega)}$ est sommable.
   (b) En déduire que S_N est d'espérance finie et :
   $$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N).$$

16.18 On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes. À chaque épreuve, la probabilité de succès est $p \in]0,1[$. On se donne un entier r strictement positif. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Π_n la probabilité qu'au cours des n premières épreuves, on ait obtenu r succès consécutifs (au moins une fois).

1. (a) Calculer Π_0, Π_1, …, Π_r.
   (b) Montrer que, pour $n \geqslant r$, on a $\Pi_{n+1} = \Pi_n + (1 - \Pi_{n-r})p^r(1-p)$.
   (c) Montrer que la suite $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Calculer sa limite.
2. (a) Déduire de la question 1 que l'on peut définir une variable aléatoire T égale au temps d'attente de r succès consécutifs. On définira $\{T = k\}$ comme l'événement « on a obtenu des succès aux épreuves de rang $k-r+1$, $k-r+2$, …, k sans jamais avoir obtenu r succès consécutifs auparavant ».
   (b) Montrer en utilisant le résultat de l'exercice 18 de la page 911 que :
   $$\mathbb{E}(T) = \frac{1-p^r}{(1-p)p^r}.$$

16.19 (Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$: premier retour à l'origine)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi définie par

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p,$$

où $p \in [0,1]$. On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

La suite (S_n) est appelé *marche aléatoire dans* $\mathbb{Z}$. On peut imaginer un mobile partant de l'origine et se déplaçant à chaque instant (entier) de ± 1, les déplacements successifs étant indépendants. Alors S_n représente la position du mobile au bout de n déplacements.

1. (a) Déterminer $u_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) On note $f(x)$ la somme de la série entière $\sum u_n x^n$. Montrer que :
   $$\forall x \in]-1,1[\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^2}}.$$

2. Pour tout entier naturel non nul k, on note A_k l'événement « le mobile retourne pour la première fois à l'origine au bout n déplacements », c'est-à-dire
   $$A_k = \{S_k = 0\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \{S_i \neq 0\} \right).$$
   On pose $v_k = \mathbb{P}(A_k)$, pour tout $k \geqslant 1$ et $v_0 = 0$
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
   $$\{S_n = 0\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\{S_n = 0\} \cap A_k\right).$$
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a :
   $$u_n = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k.$$

3. On note $g(x)$ la somme de la série entière $\sum v_n x^n$.
   (a) Montrer que le rayon de la série entière définissant $g(x)$ est supérieur ou égal à 1. Montrer que :
   $$\forall x \in]-1,1[\quad g(x) = \frac{f(x)-1}{f(x)} = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)x^2}.$$
   (b) Déterminer la probabilité de l'événement A : « il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n = 0$ ».

On suppose dans le reste de l'exercice que $p = \dfrac{1}{2}$.

4. (a) Montrer que l'on peut définir une variable aléatoire T égale au premier indice n non nul pour lequel l'événement $\{S_n = 0\}$ est réalisé.

   (b) Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$v_{2n} = \frac{2\binom{2n-2}{n-1}}{n4^n}.$$

   (c) La variable T est-t-elle d'espérance finie ?

5. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$v_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}.$$

   (b) Démontrer que la probabilité que le mobile soit à l'origine à l'issue des $2n$ premiers déplacements est égal à la probabilité qu'il ne soit jamais à l'origine à l'issue d'aucun des $2n$ premiers déplacements. En déduire $\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0)$.

⋆ 16.20 (Loi faible des grands nombres dans L_1)

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes, deux à deux indépendantes, de même loi, possédant un espérance finie m.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

Dans les deux premières questions, on suppose $m = 0$.

1. Soit $\varepsilon > 0$.

   (a) Pour $c > 0$, on définit $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leqslant c \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

   Montrer que la variable aléatoire $g(X_1)$ est d'espérance finie et que l'on peut choisir c tel que $\mathbb{E}(|g(X_1) - X_1|) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   Dans la suite de la question, c est ainsi fixé.

   (b) On pose $a = \mathbb{E}(g(X_1))$. Montrer que :
   $$\mathbb{E}(|g(X_1) - X_1 - a|) \leqslant \varepsilon.$$

   (c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = g(X_n) - a$ et $Y'_n = \dfrac{U_1 + \cdots + U_n}{n}$.

   Justifier que les variables U_n admettent un moment d'ordre 2.

   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(Y'_n) = 0$.

   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|Y'_n|) = 0$.

   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|Y_n|) = 0$.

2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(|Y_n| \geqslant \varepsilon\big) = 0$.

3. On ne suppose plus $m = 0$. Montrer que l'on a :
   $$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(|Y_n - m| \geqslant \varepsilon\big) = 0.$$

⋆⋆ 16.21 (Chaînes de Markov)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et (X_n) une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[\![1, N]\!]$. On dit que (X_n) est une *chaîne de Markov homogène* s'il existe une matrice $P = \big(p_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier n et tous éléments x_0, x_1, …, x_{n+1} de $[\![1, N]\!]$, on ait :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n)\\ = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_n = x_n) = p_{x_n, x_{n+1}},\end{aligned}$$

quand les probabilités conditionnelles sont définies. La matrice P est appelée matrice de transition de la chaîne. Dans la suite, on considère une telle chaîne de Markov.

1. Montrer que P est une matrice à coefficients positifs dont la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1 (on dit que P est une *matrice stochastique*). Montrer que 1 est valeur propre de P.
2. (a) Soit $x_0 \in [\![1, N]\!]$ tel que $\mathbb{P}(X = x_0) \neq 0$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et x_1, …, x_n dans $[\![1, N]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid X_0 = x_0) = p_{x_0,x_1} p_{x_1,x_2} \dots p_{x_{n-1},x_n}.$$

En déduire que :

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_0 = x_0) = p^{(n)}_{x_0,x_n},$$

où $p^{(n)}_{x_0,x_n}$ est le coefficient d'indice (x_0, x_n) de la matrice P^n.

(b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et x_0, x_1, …, x_{n+k} dans $[\![1, N]\!]$, tels que $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_{n+k} = x_{n+k} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)\\ = \mathbb{P}(X_1 = x_{n+1}, \dots, X_k = x_{n+k} \mid X_0 = x_n).\end{aligned}$$

3. On suppose désormais que tous les coefficients de P sont strictement positifs. On pose $\varepsilon = \min\limits_{(i,j) \in [\![1,N]\!]^2} p_{i,j} > 0$. On fixe un élément j, et l'on considère les suites

$$u_n = \max_{i \in [\![1,N]\!]} p^{(n)}_{i,j} \quad \text{et} \quad v_n = \min_{i \in [\![1,N]\!]} p^{(n)}_{i,j}.$$

(a) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} \leqslant (1 - \varepsilon) u_n + \varepsilon v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} \geqslant (1 - \varepsilon) v_n + u_n.$$

(b) Montrer que les suite (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

(c) En déduire qu'il existe une probabilité Q sur $[\![1, N]\!]$, c'est-à-dire une famille $Q = (q_j)_{j \in [\![1,N]\!]}$ d'entiers positifs, de somme 1, telle que

$$\forall (i, j) \in [\![1, N]\!]^2 \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = q_j.$$

Montrer que Q est la seule probabilité invariante par P, c'est-à-dire vérifiant $QP = Q$.

16.22 Toutes les variables considérées dans cet exercice sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est dite symétrique si :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = -n).$$

1. (a) Montrer que si X est symétrique, alors 0 est une médiane de X, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(X > 0) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \mathbb{P}(X \geqslant 0).$$

   (b) Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi, alors $X - Y$ est symétrique.

   (c) Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires symétriques indépendantes, alors $X + Y$ est symétrique.

2. On considère des variables aléatoires symétriques X_1, X_2, …, X_n, indépendantes. On se donne $x \geqslant 0$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$ et, de plus, on note Ω_k l'événement $\left\{ \max_{1 \leqslant j \leqslant k-1} S_j \leqslant x \right\} \cap \{S_k > x\}$ si $k \geqslant 2$ et $\Omega_1 = \{S_1 > x\}$.

   (a) Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ est symétrique.

   (b) Montrer que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\{S_n - S_k \geqslant 0\} \cap \Omega_k \subset \{S_n > x\} \cap \Omega_k \quad \text{et}$$

$$\mathbb{P}\left(\{S_n - S_k \geqslant 0\} \cap \Omega_k\right) \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{P}(\Omega_k).$$

   (c) Prouver que $\bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k = \left\{ \max_{1 \leqslant j \leqslant n} S_j > x \right\}$.

   (d) En déduire l'inégalité de Paul Lévy :

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} S_j > x \right) \leqslant 2\mathbb{P}(S_n > x).$$

16.23 (Inégalité de Kolmogorov)
Soit X_1, …, X_n des variables aléatoires réelles discrètes de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, ayant un moment d'ordre 2, centrées, ainsi que $a \in \mathbb{R}_+^*$. On pose, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$S_i = X_1 + \cdots + X_i, \quad B_i = \big\{|S_1| < a\big\} \cap \ldots \cap \big\{|S_{i-1}| < a\big\} \cap \big\{|S_i| \geqslant a\big\}.$$

1. Montrer que, pour $i \in [\![1, n]\!]$, les variables $S_i \mathbb{1}_{B_i}$ et $S_n - S_i$ sont indépendantes. En déduire que :

$$\mathbb{E}\left(S_n^2\, \mathbb{1}_{B_i}\right) = \mathbb{E}\left(S_i^2\, \mathbb{1}_{B_i}\right) + \mathbb{E}\left((S_n - S_i)^2\, \mathbb{1}_{B_i}\right) \geqslant a^2 \mathbb{P}(B_i).$$

2. (a) On pose $C = \big\{ \sup(|S_1|, |S_2|, \ldots, |S_n|) \geqslant a \big\}$.

   Montrer que $\mathbb{P}(C) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)$.

   (b) En déduire l'inégalité de Kolmogorov :

$$\mathbb{P}\big(\sup(|S_1|, |S_2|, \ldots, |S_n|) \geqslant a\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{a^2}.$$

16.24 (Inégalité de Le Cam)

L'objet de l'exercice est d'étudier l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Soit X et Y deux telles variables aléatoires. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbb{P}(Y = k)$. On définit la distance entre X et Y par :

$$\mathrm{d}(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k - q_k|.$$

   (a) Montrer que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, on a :

$$\left|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)\right| \leqslant \mathrm{d}(X, Y).$$

   (b) Démontrer la formule :

$$\mathrm{d}(X, Y) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \min(p_k, q_k).$$

   (c) En déduire :

$$\mathrm{d}(X, Y) \leqslant \mathbb{P}(X \neq Y).$$

2. (a) Vérifier que pour tout $x \in [0, 1]$, le réel $f(x) = 1 - (1 - x)\exp(x)$ appartient à $[0, 1]$.
   Soit $U_1, \ldots, U_n, Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, U_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $f\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ et Y_i suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. On pose $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
   Enfin, pour $i \in [\![1, n]\!]$, on considère la variable de Bernoulli X_i telle que $X_i = 0$ si $U_i = Y_i = 0$ et $X_i = 1$ sinon.

   (b) Déterminer pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la loi de X_i. En déduire la loi de $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   Quelle est la loi de Y ?

   (c) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}\big(X_i \neq Y_i\big) \leqslant \frac{\lambda^2}{n^2}.$$

   (d) En déduire l'*inégalité de Le Cam* :

$$\mathrm{d}(X, Y) \leqslant \frac{\lambda^2}{n}.$$

16.25 (Convergence presque sûre) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose :

$$B = \{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad C_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geqslant n} \left\{|X_p - X| \leqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X si $\mathbb{P}(B) = 1$.

1. Montrer que l'on a $\mathbb{P}(B) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(C_k)$.
2. On suppose que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} \big\{|X_p - X| > \varepsilon\big\}\Big) = 0.$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X.

3. Montrer que si la série de terme général $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge pour tout $\varepsilon > 0$, alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X.

⋆⋆ 16.26 (Fonction génératrice des moments)

Soit X une variable aléatoire discrète, pas presque sûrement constante, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $L_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$ (la fonction L_X est appelée *fonction génératrice des moments* de la variable aléatoire X). On suppose qu'il existe un intervalle $]\alpha, \beta[$ contenant 0 tel que $L_X(t) < +\infty$ pour tout $t \in]\alpha, \beta[$.

1. (a) Soit $a < b$ deux réels tels que $[a, b] \subset]\alpha, \beta[$. On considère $\delta > 0$ tel que $[a - \delta, b + \delta] \subset]\alpha, \beta[$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall t \in [a, b] \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad |u|^k e^{tu} \leqslant C\big(e^{(a-\delta)u} + e^{(b+\delta)u}\big).$$

En déduire que $X^k e^{tX}$ est d'espérance finie pour tout $t \in]\alpha, \beta[$.

(b) Montrer que L_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\alpha, \beta[$ et vérifie :

$$\forall t \in]\alpha, \beta[\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad L_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}(X^k e^{tX}).$$

En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une expression du moment d'ordre k de X. On note m l'espérance de X.

2. (a) On pose, pour tout $t \in]\alpha, \beta[$, $\Psi_X(t) = \ln L_X(t)$.
Montrer que Ψ_X est strictement convexe.

(b) On note $I = \Psi'_X\big(]\alpha, \beta[\big)$ et on pose $g(c) = \max_{t\in]\alpha,\beta[} (ct - \Psi_X(t)$, pour tout $c \in I$.
Montrer que $m \in I$. Calculer $g(m)$; montrer que $g(c) > 0$ si $c \neq m$.

(c) Montrer que $g(c) = \begin{cases} \max\limits_{t\in]\alpha,0[} \big(ct - \Psi_X(t)\big) \text{ si } c < m \\ \max\limits_{t\in]0,\beta[} \big(ct - \Psi_X(t)\big) \text{ si } c > m. \end{cases}$

(d) En déduire les *inégalités de Chernov* :

$$\mathbb{P}(X \leqslant c) \leqslant e^{-g(c)} \quad \text{si} \quad c < m$$

$$\mathbb{P}(X \geqslant c) \leqslant e^{-g(c)} \quad \text{si} \quad c > m.$$

3. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (a) Soit $c \in I$. Montrer que :
   $$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leqslant c\right) \leqslant e^{-ng(c)} \qquad \text{si} \qquad c < m$$
   $$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant c\right) \leqslant e^{-ng(c)} \qquad \text{si} \qquad c > m.$$

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour ε assez petit, on a :
   $$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2e^{-n\min(g(m+\varepsilon),g(m-\varepsilon))}.$$

   (c) En utilisant le résultat de l'exercice 16.25, montrer que la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers m.

16.27 (Théorème de Weierstrass)
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in [0,1]$. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables de Bernoulli de paramètre x, indépendantes, sur le même espace probabilisé. Pour $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de f sur $[0,1]$, il existe $\eta > 0$ tel que :
   $$\forall (t,u) \in [0,1]^2 \quad |t-u| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(t) - f(u)| \leqslant \varepsilon.$$

   (a) Montrer que :
   $$\forall (t,u) \in [0,1]^2 \quad |f(t) - f(u)| \leqslant \frac{2\|f\|_\infty (t-u)^2}{\eta^2} + \varepsilon.$$

   (b) En déduire que
   $$|\mathbb{E}\left(f(Y_n)\right) - f(x)| \leqslant \frac{2\|f\|_\infty \mathbb{V}(Y_n)}{\eta^2} + \varepsilon \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{n\eta^2} + \varepsilon.$$

2. On considère les polynômes de Bernstein définis par :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^k.$$
   Montrer que la suite $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

16.28 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une file d'attente avec un guichet et n clients qui attendent. Chaque minute, un guichet se libère. Le guichetier choisit alors le client qu'il appelle selon le processus aléatoire suivant :

- avec probabilité $\dfrac{1}{2}$, il appelle le client en première position dans la file,
- sinon, il choisit de manière équiprobable parmi les $n-1$ autres clients.

Enfin, un nouveau client arrive dans la file et se place en dernière position (de telle sorte qu'il y a toujours exactement n clients qui attendent). Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note T_k le temps d'attente d'un client qui se trouve en position k dans la file.

1. Quelle est la loi de T_1 ? Donner son espérance, sa variance.
2. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la variable T_k est d'espérance finie.
3. Écrire une relation entre $\mathbb{E}(T_k)$ et $\mathbb{E}(T_{k-1})$ pour tout $k \geqslant 2$. En déduire une expression de $\mathbb{E}(T_k)$ en fonction de k et n.
   On pourra considérer la suite $((n+k-2)\,\mathbb{E}(T_k))_{1\leqslant k\leqslant n}$.
4. Comparer les caractéristiques de cette file d'attente et d'une file d'attente « classique » (premier arrivé, premier servi).

⋆ **16.29** *(Cachan-Rennes 2015)*

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles d'espérance finie sur le même espace probabilisé. On considère les trois propriétés suivantes :

(i) X et Y sont presque sûrement constante ;

(ii) X et Y sont indépendantes ;

(iii) XY est d'espérance finie et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

1. Montrer que $(i) \Rightarrow (ii)$ et que $(ii) \Rightarrow (iii)$, mais qu'aucune réciproque n'est vraie.
2. Montrer que $(iii) \Rightarrow (i)$ est vrai s'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissantes ainsi qu'une variable aléatoire réelle Z telle que $X = f(Z)$ et $Y = g(Z)$.
   On admettra qu'aucune généralité n'est perdue à supposer qu'il existe une seconde variable aléatoire Z' indépendante de Z et suivant la même loi que Z. On introduira la fonction :
   $$\theta : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (f(a) - f(b))(g(a) - g(b))$$
   et on s'intéressera à la variable $\theta(Z, Z')$.

⋆ **16.30** *(Polytechnique 2015)*

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires sur le même espace probabilisé, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, tel que $\mathbb{E}(|X_2|) < +\infty$.

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y_1 d'espérance finie, qui s'écrit $Y_1 = h(X_1)$, où h est une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, et telle que, pour tout application bornée f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, on ait :
   $$\mathbb{E}(X_2\, f(X_1)) = \mathbb{E}(Y_1 f(X_1)).$$
2. Montrer que si une autre variable aléatoire a les mêmes propriétés que Y_1, elle est égale à Y_1 presque sûrement.
3. La variable aléatoire Y_1 étant définie et unique, on la note $\mathbb{E}(X_2 \mid X_1)$: c'est l'espérance conditionnelle de X_2 par rapport à X_1. Soit g une application bornée de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que :
   $$\mathbb{E}(X_2\, g(X_1) \mid X_1) = g(X_1)\,\mathbb{E}(X_2 \mid X_1).$$

Solution des exercices

16.1 Dans les deux cas, Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\mathbb{P}(Y=k) = \begin{cases} \mathbb{P}(X=1-2k) & \text{si} \quad k<0 \\ \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1) & \text{si} \quad k=0 \\ \mathbb{P}(X=2k) & \text{si} \quad k>0. \end{cases}$$

- Supposons que $X \sim \mathcal{G}(p)$. On obtient

$$\mathbb{P}(Y=k) = \begin{cases} p(1-p)^{-2k} & \text{si} \quad k<0 \\ p & \text{si} \quad k=0 \\ p(1-p)^{2k-1} & \text{si} \quad k>0. \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}_-^*} kp(1-p)^{-2k} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} kp(1-p)^{2k-1} \\ &= -p(1-p)^2 \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k(1-p)^{2(k-1)} + p(1-p) \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k(1-p)^{2(k-1)} \\ &= \frac{-p(1-p)^2+p(1-p)}{(1-p^2)^2} = \frac{p^2}{(1-p)(1+p)^2}. \end{aligned}$$

- Supposons que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. On obtient :

$$\mathbb{P}(Y=k) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{1-2k}e^{-\lambda}}{(1-2k)!} & \text{si} \quad k<0 \\ e^{-\lambda}(1+\lambda) & \text{si} \quad k=0 \\ \dfrac{\lambda^{2k}e^{-\lambda}}{(2k)!} & \text{si} \quad k>0. \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}_-^*} k\frac{\lambda^{1-2k}e^{-\lambda}}{(1-2k)!} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{\lambda^{2k}e^{-\lambda}}{(2k)!} \\ &= e^{-\lambda}\left(-\sum_{k\in\mathbb{N}} k\frac{\lambda^{1+2k}}{(1+2k)!} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\right) \\ &= e^{-\lambda}\left(-\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^{1+2k}\left(\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(1+2k)!}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!}\right) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2}\left(-\lambda\,\mathrm{ch}(\lambda)+\mathrm{sh}(\lambda)+\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(1-(2\lambda+1)e^{-2\lambda}\right). \end{aligned}$$

16.2 On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

1. On a $\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=k\} \cap \{Y=k\}\big)$ et par indépendance de X et Y, on obtient :
$$\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} (\mathbb{P}(X=k))^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{3}.$$
2. On obtient, de même :
$$P(X>Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X>k\} \cap \{Y=k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k)\,\mathbb{P}(Y=k)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{3}.$$
3. Pour $k \geqslant 1$ fixé, on a :
$$\mathbb{P}(X \geqslant kY) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Y=j\} \cap \{X \geqslant kj\}) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=j)\mathbb{P}(X \geqslant kj)$$
$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{kj-1} = 2\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j(k+1)}$$
$$= 2\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} = \frac{2}{2^{k+1}-1}.$$

16.3 On pose $q = 1-p$. La variable $|X-Y|$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\{|X-Y|=n\} = \{X-Y=n\} \cup \{Y-X=n\}$$
$$= \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \big(\{Y=k\} \cap \{X=n+k\} \cup \{X=k\} \cap \{Y=n+k\}\big).$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, tous ces événements sont incompatibles. On en déduit :
$$\mathbb{P}(|X-Y|=n) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \big(\mathbb{P}\{Y=k\} \cap \{X=k+n\}) + \mathbb{P}\left(\{X=k\} \cap \{Y=n+k\}\right)\big)$$
$$= 2\sum_{k=1}^{+\infty} \big(\mathbb{P}(Y=k)\mathbb{P}(X=k+n)$$
$$= 2\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k+n-2} = \frac{2p^2q^n}{1-q^2} = \frac{2pq^n}{1+q}.$$
De plus, on a $\mathbb{P}(|X-Y|=0) = \mathbb{P}(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=k\})$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q}.$$

16.4 On pose $q = 1 - p$.

1. On a $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X \leqslant n) = 1 - \mathbb{P}(X > n) = 1 - q^n$.
   Pour $k \geqslant 1$, on a $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n + k) = pq^{n+k-1}$.
2. On en déduit, sous réserve d'absolue convergence :
$$G_Y(t) = (1 - q^n) + \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{n+k-1}t^k.$$
   Ainsi, $G_Y(t)$ est défini pour $|tq| < 1$ et $G_Y(t) = 1 - q^n + \dfrac{q^n pt}{1 - qt}$.
3. Comme $1 \in]-1/q, 1/q[$, la fonction G_X est dérivable en 1, donc Y est d'espérance finie :
$$\mathbb{E}(Y) = G'_Y(1) = \frac{q^n p}{1 - q} + \frac{q^n pq}{(1 - q)^2} = \frac{q^n}{p}.$$

16.5 1. (a) On a $D(\Omega) = \mathbb{Z}$ et $I(\Omega) = \mathbb{N}$.

- Si $k \geqslant 0$, alors on a :
  $\{D = k\} \cap \{I = \ell\} = \{X - Y = k\} \cap \{Y = \ell\} = \{X = k + \ell\} \cap \{Y = \ell\}$
  et donc, par indépendance de X et Y :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{D = k\} \cap \{I = \ell\}) &= \mathbb{P}(\{X = k + \ell\} \cap \{Y = \ell\}) \\ &= pq^{k+\ell}pq^{\ell} = p^2q^{k+2\ell}.\end{aligned}$$
- Si $k < 0$, alors on a :
  $\{D = k\} \cap \{I = \ell\} = \{X - Y = k\} \cap \{X = \ell\} = \{X = \ell\} \cap \{Y = -k + \ell\}$
  et donc, par indépendance de X et Y :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{D = k\} \cap \{I = \ell\}) &= \mathbb{P}(\{X = \ell\} \cap \{Y = -k + \ell\}) \\ &= pq^{\ell}pq^{-k+\ell} = p^2q^{-k+2\ell}.\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on trouve $\mathbb{P}(\{D = k\} \cap \{I = \ell\}) = p^2q^{|k|+2\ell}$.

(b) - Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D = k) &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{D = k\} \cap \{I = \ell\}) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} p^2q^{|k|+2\ell} \\ &= p^2q^{|k|} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^{\ell} = \frac{p^2q^{|k|}}{1 - q^2} = \frac{pq^{|k|}}{1 + q}.\end{aligned}$$
- Pour $\ell \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(I = \ell) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(\{D = k\} \cap \{I = \ell\}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p^2q^{|k|+2\ell} \\ &= p^2q^{2\ell} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^{|k|} = p^2q^{2\ell}\left(2\sum_{k=0}^{+\infty} q^k - 1\right) \\ &= p^2q^{2\ell}\left(\frac{2}{1 - q} - 1\right) = pq^{2\ell}(1 + q).\end{aligned}$$

On a bien :

$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \mathbb{P}\left(\{D=k\} \cap \{I=\ell\}\right) = \mathbb{P}(D=k)\,\mathbb{P}(I=\ell),$$

ce qui prouve que D et I sont indépendantes.

2. Comme précédemment, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \{D=k\} \cap \{I=\ell\} = \{X=k+\ell\} \cap \{Y=\ell\}.$$

Par indépendance de X et Y d'une part, de D et I d'autre part, on en déduit :

$$\mathbb{P}(D=k)\mathbb{P}(I=\ell) = \mathbb{P}(X=k+\ell)\mathbb{P}(Y=\ell) = \mathbb{P}(X=k+\ell)\mathbb{P}(X=\ell) \neq 0,$$

par hypothèse. On a en particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(D=k)\mathbb{P}(I=0) = \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(X=0)$$

$$\mathbb{P}(D=k)\mathbb{P}(I=1) = \mathbb{P}(X=k+1)\mathbb{P}(X=1).$$

En divisant les égalités, on obtient :

$$\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)} = \frac{\mathbb{P}(I=1)\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(I=0)\mathbb{P}(X=1)}.$$

Ce rapport est indépendant de k et strictement positif. On le note q.

La suite $(\mathbb{P}(X=k))$ est géométrique de raison q.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X=0)q^k$. La série $\sum \mathbb{P}(X=k)$ converge et a pour somme 1 donc $q<1$ et $\mathbb{P}(X=0) = 1-q$. En posant $p = 1-q$, on a le résultat voulu.

16.6 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de S sachant $\{N=n\}$ est la loi binomiale de paramètre (n,p). D'autre part, N suit une loi de Poisson de paramètre λ. On montre, comme dans l'exercice 7 de la page 902, que S suit la loi de Poisson de paramètre λp. De la même façon, la loi de E sachant $N=n$ est la loi binomiale de paramètre $(n,1-p)$ donc E suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

On remarque que $S+E=N$. On a donc, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{S=m\} \cap \{E=n\}) &= \mathbb{P}(\{S=m\} \cap \{N=m+n\}) \\
&= \mathbb{P}(N=m+n)\,\mathbb{P}(X=m \mid N=m+n) \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{m+n}}{(m+n)!}\binom{m+n}{m} p^m (1-p)^n \\
&= \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^m}{m!} \times \frac{e^{-\lambda(1-p)}(\lambda(1-p))^n}{n!} \\
&= \mathbb{P}(S=m)\,\mathbb{P}(E=n).
\end{aligned}$$

Le variables aléatoires S et E sont indépendantes.

2. On suppose que S et E sont indépendantes. On a donc pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S=m)\,\mathbb{P}(E=n) &= \mathbb{P}(\{S=m\} \cap \{E=n\}) = \mathbb{P}(\{S=m\} \cap \{N=m+n\}) \\
&= \mathbb{P}(N=m+n)\,\mathbb{P}(S=m \mid N=m+n) \\
&= \mathbb{P}(N=m+n)\binom{m+n}{m} p^m (1-p)^n.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(N=m+n)(m+n)! = \frac{m!\,\mathbb{P}(S=m)}{p^m} \times \frac{n!\,\mathbb{P}(E=n)}{(1-p)^n} = u_m\, v_n,$$

en posant $u_m = \dfrac{m!\,\mathbb{P}(S=m)}{p^m}$ et $v_n = \dfrac{n!\,\mathbb{P}(E=n)}{(1-p)^n}$.

Pour $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :

$$u_{m-1}v_{n+1} = u_m v_n = \mathbb{P}(N=m+n) \neq 0$$

et donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_m}{u_{m-1}}$. Le rapport $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est égal à $\dfrac{u_m}{u_{m-1}}$ donc est indépendant de n : la suite (v_n) est donc géométrique. On note $\lambda > 0$ sa raison.
On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(N=n) = \frac{u_0 v_n}{n!} = \frac{u_0 v_0 \lambda^n}{n!}.$$

L'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n) = 1$ impose $u_0 v_0 = e^{-\lambda}$: N suit donc la loi de Poisson de paramètre λ.

16.7 1. La variable N suit la loi géométrique de paramètre p. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de X sachant $\{N=n\}$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On a donc, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big((N,X)=(n,k)\big) &= \mathbb{P}(N=n)\,\mathbb{P}(X=k \mid N=n)\\ &= \begin{cases} \binom{n}{k} p^{k+1}(1-p)^{2n-k-1} & \text{si} \quad k \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k > n. \end{cases}\end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on en déduit $\mathbb{P}(X=k)$, en sommant sur n (avec $n \geqslant k$ et $n \geqslant 1$).

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1}(1-p)^{2n-k-1}\\ &= \frac{p^{k+1}(1-p)^{k-1}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}(1-p)^{2(n-k)}.\end{aligned}$$

On a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{p^{k+1}(1-p)^{k-1}}{k!} \frac{k!}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.$$

- On a :

$$\mathbb{P}(X=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{2n-1} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}.$$

2. Soit $p' \in]0,1[$. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, Y suivant une loi de Bernoulli de paramètre p' et Z suivant une loi géométrique de paramètre p'. La variable aléatoire YZ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. On a :
   - $\mathbb{P}(YZ=0) = \mathbb{P}(Y=0) = 1-p'$;
   - pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(YZ=k) = \mathbb{P}(Y=1, Z=k) = p'^2(1-p')^{k-1}$.

   On voit que X et YZ ont même loi si, et seulement si, $p' = \dfrac{1}{2-p}$.

3. On a, puisque Y et Z sont indépendantes :
$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) = p'\frac{1}{p'} = 1.$$
   On a, de même, par indépendance de Y^2 et Z^2 :
$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2Z^2) = \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(Y)\left(\mathbb{V}(Z) + (\mathbb{E}(Z))^2\right)$$
$$= p'\left(\frac{1-p'}{p'^2} + \frac{1}{p'^2}\right) = \frac{2-p'}{p'} = 3-2p.$$
   On en déduit $\mathbb{V}(X) = 2(1-p)$.

16.8 1. Les réels $\dfrac{n^{-s}}{\zeta(s)}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, sont positifs et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-s}}{\zeta(s)} = 1$ par définition, donc on définit bien la loi d'une variable aléatoire.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} \{X = nj\}$ est un événement et :
$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=jn) = \frac{1}{\zeta(s)}\sum_{j=1}^{+\infty}(jn)^{-s} = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}\sum_{j=1}^{+\infty} j^{-s} = n^{-s}.$$
   Soit $p_1, p_2, \ldots, p_k$ des nombres premiers distincts. Ces nombres sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss :
$$A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \ldots \cap A_{p_k} = A_{p_1 p_2 \ldots p_k}.$$
   On en déduit :
$$\mathbb{P}\left(A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \ldots \cap A_{p_k}\right) = \mathbb{P}\left(A_{p_1p_2\ldots p_k}\right) = (p_1 p_2 \ldots p_k)^{-s}$$
$$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{-s} = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_{p_i}).$$
   Les événements de la famille $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont donc indépendants.
   On en déduit que $\left(\overline{A_p}\right)_{p\in\mathcal{P}}$ est aussi une famille d'événements indépendants. Notons $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des entiers premiers rangés par ordre croissant. On a :
$$\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \prod_{n\in\mathbb{N}^*}\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right) = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)$$
$$= \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\mathbb{P}\left(\overline{A_{p_n}}\right) = \lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N}\overline{A_{p_n}}\right),$$

par indépendance des événements. Par ailleurs, on a, par continuité décroissante :

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} \overline{A_{p_n}}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_{p_n}}\right).$$

Mais $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_{p_n}} = \{1\}$, car 1 est le seul entier qui n'ait pas de diviseur premier. Comme $\mathbb{P}(\{1\}) = \dfrac{1}{\zeta(s)}$, on en déduit :

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

3. Notons E l'événement « aucun carré différent de 1 ne divise X ». L'événement E est réalisé si, et seulement si, le carré d'aucun nombre premier ne divise X. On a donc $E = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_{p^2}}$ et toujours par indépendance des événements $\overline{A_p}$:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A_{p^2}}\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} \overline{A_{p_n^2}}\right) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_{p_n^2}})$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_n^{2s}}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) = \frac{1}{\zeta(2s)},$$

d'après la question précédente.

16.9 1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{\mathbb{P}(X=n)}{\mathbb{P}(X\geqslant n)}$ et donc :

$$x_n\mathbb{P}(X \geqslant n) = \mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(X\geqslant n) - \mathbb{P}(X\geqslant n+1),$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(X\geqslant n+1) = (1-x_n)\mathbb{P}(X\geqslant n).$$

Comme $\mathbb{P}(X\geqslant 1) = 1$, on en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X\geqslant n) = \prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k) \qquad \text{et} \qquad p_n = x_n \prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k).$$

2. (a) On a $x_n \in [0,1]$, puisque x_n est la probabilité d'un événement. Si $x_n = 1$, alors $\mathbb{P}(X\geqslant n+1) = (1-x_n)\mathbb{P}(X\geqslant n) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc $x_n \in [0,1[$.
On a pour tout $n \geqslant 1$:

$$\ln \mathbb{P}(X\geqslant n+1) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1-x_k).$$

De $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X\geqslant n+1) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X\leqslant n) = 0$ (voir l'exercice 1 de la page 895), on déduit la divergence de la série de terme général $\ln(1-x_n)$. Celle-ci implique la divergence de la série de terme général x_n, car sinon (x_n) tendrait vers 0 et on aurait $\ln(1-x_n) \sim -x_n$ et la convergence de la série de terme général $\ln(1-x_n)$ par théorème de comparaison.

(b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = x_n \prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k)$. Alors $p_n \in [0,1]$. On a pour tout $n \geqslant 1$:

$$p_n = \prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k) - \prod_{k=1}^{n}(1-x_k).$$

On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1-x_k).$$

La série de terme général x_k diverge donc $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}(1-x_k) = 0$ car

$$\ln \prod_{k=1}^{n}(1-x_k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1-x_k) \leqslant -\sum_{k=1}^{n} x_k \to -\infty.$$

On a donc $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$, donc les p_k définissent la loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

De plus, on a $x_k \neq 1$ pour tout $k \geqslant 1$, donc $\mathbb{P}(X < n) = \sum_{k=1}^{n-1} p_k < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit $\mathbb{P}(X \geqslant n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Enfin on a :

$$\mathbb{P}(X = n \mid X \geqslant n) = \frac{\mathbb{P}(X=n)}{\mathbb{P}(X \geqslant n)} = \frac{p_n}{\mathbb{P}(X \geqslant n)}$$

$$= \frac{p_n}{1 - \mathbb{P}(X \leqslant n-1)} = \frac{x_n \prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k)}{\prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k)} = x_n,$$

donc (x_n) est le taux de panne de la variable aléatoire X.

3. • Si X suit la loi géométrique de paramètre p, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X=n) = (1-p)^{n-1}p, \quad \mathbb{P}(X \geqslant n) = (1-p)^{n-1} \quad \text{et} \quad x_n = p.$$

• Si le taux de panne est constant, égal à p, alors $p \in [0,1[$ et on a, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = x_n \prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k) = p(1-p)^{n-1}$.

On voit que p ne peut pas être nul, car $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n = 1$, donc $p \in]0,1[$ et X suit la loi géométrique de paramètre p.

16.10 1. On observe qu'en 1, il y toujours un maximum et un minimum provisoire et donc que X_n et Y_n sont à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.
L'application $f : \Omega \to \Omega$ qui à la permutation σ associe la permutation $\sigma' : k \mapsto n+1-\sigma(k)$ est clairement bijective. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i)$ est

un maximum provisoire de σ si, et seulement si, $\sigma'(i)$ est un minimum provisoire de σ. En effet $\sigma(i) = \max(\sigma(1), \dots, \sigma(i))$ équivaut à :

$$\begin{aligned} n+1-\sigma'(i) &= \max(n+1-\sigma'(1), \dots, n+1-\sigma'(i)) \\ &= n+1-\min(\sigma'(1), \dots, \sigma'(i)) \end{aligned}$$

et donc à $\sigma'(i) = \min(\sigma'(1), \dots, \sigma'(i))$.

On en déduit que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\sigma \in \{X_n = k\} \iff \sigma' \in \{Y_n = k\}.$$

Comme f est bijective, on a $\text{card}\,(\{X_n = k\}) = \text{card}\,(\{Y_n = k\})$, et donc $\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y_n = k)$, car Ω est muni de la probabilité uniforme.

2. (a)
- La permutation σ est dans $\{X_3 = 1\}$ si, et seulement si, $\sigma(1) = 3$. On en déduit $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \dfrac{1}{3}$.
- On a $\{X_3 = 3\} = \left\{\text{Id}_{[\![1,3]\!]}\right\}$. On en déduit $\mathbb{P}(X_3 = 3) = \dfrac{1}{6}$.
- Enfin, $\mathbb{P}(X_3 = 2) = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$.

On obtient $\mathbb{E}(X_3) = \dfrac{11}{6}$ et $\mathbb{V}(X_3) = \dfrac{17}{36}$.

(b) Pour $(k, \ell) \in [\![1, 3]\!]^2$, on a $\mathbb{P}(X_3 = k, Y_3 = \ell) = 0$ si $k + \ell \geqslant 4$. En effet, sauf pour $i = 1$, $\sigma(i)$ ne peut pas être à la fois un maximum provisoire et un minimum provisoire. On obtient :

X \ Y	1	2	3
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0
3	$\frac{1}{6}$	0	0

On trouve $\mathbb{E}(X_3 Y_3) = 3$ et $\text{Cov}(X_3, Y_3) = -\dfrac{13}{36}$.

3. (a) Montrons que les variables $Z_1, \dots, Z_n$ sont indépendantes.
Comme ce sont des variables de Bernoulli, il suffit de montrer que les événements $\{Z_1 = 1\}, \dots, \{Z_n = 1\}$ sont indépendants. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et $i_1, \dots, i_k$ tels que $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n$.
Pour déterminer un élément $\sigma \in \Omega$, pour lequel $\sigma(i_1)$, $\sigma(i_2)$, $\dots$, $\sigma(i_k)$ sont des maximums provisoires :
- on choisit l'ensemble $A_k = \{\sigma(i)\,;\ 1 \leqslant i \leqslant i_k\}$: il y a $\binom{n}{i_k}$ choix possibles ; alors, le plus grand élément de cet ensemble est $\sigma(i_k)$;
- on choisit l'ensemble $A_{k-1} = \{\sigma(i)\,;\ 1 \leqslant i \leqslant i_{k-1}\}$ sous-ensemble de $A_k \setminus \{\sigma(i_k)\}$: il y a $\binom{i_k - 1}{i_{k-1}}$ choix possibles ; le plus grand élément de cet ensemble est $\sigma(i_{k-1})$; on attribue les images $\sigma(i)$ pour $i_{k-1} < i < i_k$ qui sont les $i_k - i_{k-1} - 1$ éléments restants ; il y a $(i_k - i_{k-1} - 1)!$ choix possibles ;

de plus on a $\binom{i_k-1}{i_{k-1}}(i_k - i_{k-1} - 1)! = \dfrac{(i_k-1)!}{i_{k-1}!}$;

- on continue ainsi jusqu'au choix $A_1 = \{\sigma(i)\,;\ 1 \leqslant i \leqslant i_1\}$ sous-ensemble de $A_2 \setminus \{\sigma(i_2)\}$: il y a $\binom{i_2-1}{i_1}$ choix possibles ; le plus grand élément de cet ensemble est $\sigma(i_1)$; on fixe ensuite les images des $\sigma(i)$ pour $i_1 \leqslant i < i_2$; il y a $(i_2 - i_1 - 1)!$ choix possibles ; de plus $\binom{i_2-1}{i_1}(i_2 - i_1 - 1)! = \dfrac{(i_2-1)!}{i_1!}$;
- il reste encore à fixer $\sigma(i)$ pour $i < i_1$ et pour $i > i_k$, ce qui donne $(i_1 - 1)!(n - i_k)!$ choix.

On obtient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k}\{Z_{i_j} = 1\}\right) = \frac{\binom{n}{i_k}\left(\prod_{j=2}^{k}\frac{(i_j-1)!}{i_{j-1}!}\right)(i_1-1)!(n-i_k)!}{n!}$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{k}(i_j-1)!}{\prod_{j=1}^{k} i_j!} = \frac{1}{i_1\, i_2 \ldots i_k}\cdot$$

Le cas où $k = 1$, donne, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(Z_i = 1) = \dfrac{1}{i}\cdot$ On a donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k}\{Z_{i_j} = 1\}\right) = \prod_{j=1}^{k}\mathbb{P}(Z_{i_j} = 1).$$

Les variables Z_1, Z_2, …, Z_n sont donc indépendantes.

(b) Il est clair que $X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$. De l'indépendance des variables Z_k, on déduit $g_n = \prod_{k=1}^{n} h_k$, où h_k est la fonction génératrice de Z_k. Pour tout réel t, on a :

$$k_k(t) = \mathbb{P}(Z_k = 0) + t\,\mathbb{P}(Z_k = 1) = 1 - \frac{1}{k} + \frac{t}{k} = \frac{k-1+t}{k}\cdot$$

On en déduit :

$$g_n(t) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k-1+t}{k} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(k+t).$$

(c) Le coefficient de t^k dans $g_n(t)$ est $\mathbb{P}(X_n = k)$. On obtient :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n},\quad \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right),\quad \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n!}\cdot$$

(d) Pour $n \geqslant 1$ et $t > 0$, on a :

$$\ln g_n(t) = -\ln n! + \sum_{k=0}^{n-1}\ln(k+t)\ \text{ et donc }\ \frac{g_n'(t)}{g_n(t)} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+t}\cdot$$

Comme $g_n(1) = 1$, on obtient :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \mathbb{E}(X_n) = g_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

En dérivant de nouveau, on trouve :

$$\frac{g_n''(t)}{g_n(t)} - \frac{(g_n'(t))^2}{(g_n(t))^2} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+t)^2}.$$

On en déduit :

$$g_n''(1) - (\mathbb{E}(X_n))^2 = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

On a donc :

$$\mathbb{V}(X_n) = g_n''(1) + \mathbb{E}(X_n) - (\mathbb{E}(X_n))^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

On a $\mathbb{E}(X_n) \sim \ln n$ et $\mathbb{V}(X_n) \sim \ln n$ quand n tend vers $+\infty$.

16.11 1. L'application $1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$1 - \prod_{i=1}^{n} \big(1 - \mathbb{1}_{A_i}(\omega)\big) = 1 \iff \exists i \in [\![1, n]\!] \quad \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = 1 \iff \omega \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

On en déduit $1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i}) = \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$. En développant, on obtient :

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = 1 - \sum_{I \subset [\![1,n]\!]} (-1)^{\operatorname{card} I} \prod_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i}$$

$$= \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{\operatorname{card} - 1} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i} \qquad = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{card} I = k}} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}.$$

Sachant que pour tout événement A, on a $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$, on en déduit, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} \Bigg((-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{card} I = k}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \Bigg).$$

2. (a) En posant $I = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, on a :

$$B_{j_1,m} \cap B_{j_2,m} \cap \cdots \cap B_{j_k,m} = \bigcap_{i=1}^{m} \{X_i \notin I\}.$$

Les variables X_i (pour $i \in \mathbb{N}^*$) étant indépendantes, on en déduit :

$$\mathbb{P}(B_{j_1,m} \cap B_{j_2,m} \cap \cdots \cap B_{j_k,m}) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X_i \notin I) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^m.$$

(b) On a $\{X > m\} = \bigcup_{j=1}^{n} B_{j,m}$. On en déduit en appliquant la formule du crible :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > m) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ \text{card } I=k}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in I} B_{j,m}\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\left(\frac{n-k}{n}\right)^m.\end{aligned}$$

On en déduit $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathbb{P}(X > m) = 0$ car on a une combinaison linéaire de suites géométriques de raison appartenant à $]0,1[$. La suite $(\{X > m\})$ décroît donc :

$$0 = \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}(X > m) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{m\in\mathbb{N}^*} \{X > m\}\Big) = \mathbb{P}(X = +\infty).$$

La variable aléatoire X est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

(c) On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > m) &= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\binom{n}{k}\left(\frac{n-k}{n}\right)^m\right.\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{n-k}{n}\right)^m\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{1}{1-\frac{n-k}{n}}\\ &= n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\binom{n}{k}}{k}.\end{aligned}$$

(d) Pour tout $t \in [0,1]$, on pose $f(t) = n\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{\binom{n}{k}t^k}{k}$. La fonction f est dérivable et pour $t \in]0,1]$, on obtient :

$$f'(t) = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}t^{k-1} = -\frac{n}{t}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-t)^k = n\frac{1-(1-t)^n}{t}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = f(1) = \int_0^1 f'(t)dt &= n\int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}dt\\ &= n\int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}du = n\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^1 u^j du\\ &= n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

On en déduit $\mathbb{E}(X) \sim n\ln n$.

Remarque

On retrouve par une autre méthode le résultat de l'exercice 19 de la page 913.

16.12 1. On a $X_i^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{\{U_k=i\}}$. Les variables U_k étant indépendantes, il en est de même des variables $\mathbb{1}_{\{U_k=i\}}$. Pour tout $k \in [\![1,m]\!]$, on a :

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{U_k=i\}}\right) = \mathbb{P}(U_k = i) = \frac{1}{n}\cdot$$

On en déduit que $X_i^{(m)}$ suit la loi binomiale de paramètre $\left(m, \frac{1}{n}\right)$.

2. Par bilinéarité de la covariance, on obtient :

$$\mathrm{Cov}\left(X_i^{(m)}, X_j^{(m)}\right) = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant m} \mathrm{Cov}\left(\mathbb{1}_{\{U_k=i\}}, \mathbb{1}_{\{U_\ell=j\}}\right).$$

- Pour $k \neq \ell$, les variables $\mathbb{1}_{\{U_k=i\}}$ et $\mathbb{1}_{\{U_\ell=j\}}$ sont indépendantes ; leur covariance est nulle.
- Pour $k = \ell$, on obtient :

  $$\mathrm{Cov}\left(\mathbb{1}_{\{U_k=i\}}, \mathbb{1}_{\{U_k=j\}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{U_k=i\}}\mathbb{1}_{\{U_k=j\}}\right) - \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{U_k=i\}}\right)\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{U_k=j\}}\right).$$

  La variable $\mathbb{1}_{\{U_k=i\}}\mathbb{1}_{\{U_k=j\}}$ est nulle donc son espérance est nulle. On a donc $\mathrm{Cov}\left(\mathbb{1}_{\{U_k=i\}}, \mathbb{1}_{\{U_k=j\}}\right) = -\frac{1}{n^2}$.

On obtient :

$$\mathrm{Cov}\left(X_i^{(m)}, X_j^{(m)}\right) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Cov}\left(\mathbb{1}_{\{U_k=i\}}, \mathbb{1}_{\{U_k=j\}}\right) = -\frac{m}{n^2}\cdot$$

Les variables $X_i^{(m)}$ et $X_j^{(m)}$ ne sont pas indépendantes, car leur covariance n'est pas nulle.

3. (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y_i sachant $\{N = m\}$ est la loi de $X_i^{(m)}$. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_i = k) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_i = k \mid N = m)\mathbb{P}(N = m)\\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_i^{(m)} = k \mid N = m)\mathbb{P}(N = m).\end{aligned}$$

La variable aléatoire N est indépendante des U_k donc est indépendante des variables $X_i^{(m)}$, car $X_i^{(m)}$ est une fonction de $U_1, U_2, \ldots U_m$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_i = k) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_i^{(m)} = k)\mathbb{P}(N = m)\\ &= \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)^{m-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}\\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \sum_{m=k}^{+\infty} \lambda^{m-k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m-k}\frac{1}{(m-k)!}\\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k e^{\lambda-\frac{\lambda}{n}} = e^{-\lambda/n}\frac{(\lambda/n)^k}{k!}\cdot\end{aligned}$$

La variable aléatoire Y_i suit la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}\cdot$

(b) Il est clair que, par définition, on a $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = N$.
Soit $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$. On pose $m = k_1 + \cdots + k_n$. On a alors :

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}\big(Y_1 = k_1, \ldots, Y_n = k_n\big) \\ &= \mathbb{P}\big(Y_1 = k_1, \ldots, Y_n = k_n, N = m\big) \\ &= \mathbb{P}\big(Y_1 = k_1, \ldots, Y_n = k_n \mid N = m\big)\,(N = m) \\ &= \mathbb{P}\big(X_1^{(m)} = k_1, \ldots, X_n^{(m)} = k_n \mid N = m\big)\mathbb{P}(N = m) \\ &= \mathbb{P}\big(X_1^{(m)} = k_1, \ldots, X_n^{(m)} = k_n\big)\mathbb{P}(N = m), \end{aligned}$$

car la variable N est indépendante des U_k donc de $(X_1^{(m)}, \ldots, X_n^{(m)})$ qui est une fonction de $U_1, \ldots, U_m$.
L'événement $\{X_1^{(m)} = k_1, \ldots, X_n^{(m)} = k_n\}$ est réalisé si, et seulement si, parmi les variables aléatoires $U_1, \ldots, U_m$, k_1 prennent la valeur 1, k_2 la valeur 2, $\ldots$, k_n la valeur n. On obtient :

$$\mathbb{P}\left(X_1^{(m)} = k_1, \ldots, X_n^{(m)} = k_n\right) = \frac{m!}{\prod_{i=1}^{n} k_i!}\left(\frac{1}{n}\right)^m,$$

car le nombre de façons de choisir dans $[\![1, m]\!]$, k_1 entiers, puis k_2 entiers parmi les entiers restants,$\ldots$, et enfin k_n entiers est :

$$\binom{m}{k_1}\binom{m-k_1}{k_2}\cdots\binom{m-k_1-\ldots k_{n-1}}{k_n} = \frac{m!}{\prod_{i=1}^{n} k_i!},$$

alors que la probabilité que chaque variable aléatoire prenne une valeur donnée est $\dfrac{1}{n}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(Y_1 = k_1, \ldots, Y_n = k_n\big) &= \frac{m!}{\prod_{i=1}^{n} k_i!}\left(\frac{1}{n}\right)^m e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\prod_{i=1}^{n} k_i!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m. \end{aligned}$$

16.13 1. L'application Z est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, ensemble dénombrable.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a $Z(\omega) = n$ si, et seulement si, ω appartient exactement à n des ensembles E_k (pour $k \in \mathbb{N}$). On a donc :

$$\{Z = n\} = \bigcup_{I \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})} \left(\bigcap_{k \in I} E_k\right) \cap \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N} \setminus I} \overline{E_k}\right),$$

où $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ de cardinal n.
Pour tout $I \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})$, $\left(\bigcap_{k \in I} E_k\right) \cap \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N} \setminus I} \overline{E_k}\right)$ est un événement, car c'est l'intersection d'un nombre dénombrable d'événements.

D'autre part, on peut écrire $\mathcal{P}_n(\mathbb{N}) = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n([\![0,N]\!])$, où $\mathcal{P}_n([\![0,N]\!])$ est l'ensemble des parties de cardinal n de $[\![0,N]\!]$. Donc $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ est dénombrable, car réunion dénombrable d'ensembles finis.
Enfin, $\{Z=n\}$ est un événement, car réunion dénombrable d'événements.

- D'autre part $\{Z=+\infty\}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité d'ensembles E_k $(k\in\mathbb{N})$. On a donc :

$$\{Z=+\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} E_p,$$

donc $\{Z=+\infty\}$ est un événement.

Ainsi, $\{Z=x\}$ est un événement, pour tout $x\in Z(\Omega)$, donc Z est une variable aléatoire discrète.

2. La série $\sum \mathbb{P}(E_n)$ converge. Il résulte du premier lemme de Borel-Cantelli (*cf.* l'exercice 5 de la page 853) que

$$\mathbb{P}(Z=+\infty) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} E_p\Big) = 0.$$

3. Comme $Z\geqslant 0$, elle possède une espérance dans $[0,+\infty]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $Z_n = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{E_i}$. Alors $\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{E_i}) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(E_i)$.

Les variables Z_n sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc on a aussi (*cf.* l'exercice 18 de la page 911) $\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > k)$ et, comme Z prend la valeur $+\infty$ avec une probabilité nulle, $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z>k)$.

Soit $k\in\mathbb{N}$. La suite (Z_n) a pour limite Z. On a donc :

$$\{Z>k\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n>k\}.$$

Comme la suite $\big(\{Z_n>k\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissance, on a, par continuité monotone :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n>k) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n>k\}\Big) \geqslant \mathbb{P}(Z>k).$$

Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(Z>k) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(Z_n>k) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_i).$$

Cela est valable pour tout $N\in\mathbb{N}$, donc Z est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(Z) \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_i).$$

Mais d'autre part, on a $Z \geqslant Z_n$ et donc $\mathbb{E}(Z) \geqslant \mathbb{E}(Z_n) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(E_i)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, on obtient $\mathbb{E}(Z) \geqslant \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_i)$ et donc :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_i).$$

16.14 1. Pour tout entier n strictement positif, on a $X_n = \prod_{k=1}^{n} Z_k$. Pour tout $k \geqslant 1$, on a $\mathbb{E}(Z_k) = 1$ et, comme les variables Z_k sont indépendantes :

$$\mathbb{E}(X_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Z_k) = 1.$$

2. Pour tout $k \geqslant 1$, on a $\mathbb{E}(Z_k^2) = \dfrac{(1-a)^2 + (1+a)^2}{2} = 1 + a^2$. Par indépendance des variables Z_k^2, on en déduit :

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Z_k^2) = (1+a^2)^n$$

puis $\mathbb{V}(X_n) = (1+a^2)^n - 1$. Ainsi, $\mathbb{V}(X_n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

3. Les variables aléatoires sont finies donc possèdent une espérance finie et une variance. On obtient, pour tout $k \geqslant 1$, par la formule de transfert :

$$\mathbb{E}(Y_k) = \frac{1}{2}\big(\ln(1-a) + \ln(1+a)\big) = \ln\sqrt{1-a^2}.$$

Les variables Y_k sont indépendantes, car fonctions des variables Z_k qui sont indépendantes, de même loi, possèdent une espérance finie $\ln\sqrt{1-a^2}$ et une variance donc, d'après la loi faible des grands nombres, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\big|\widehat{Y}_n - \ln\sqrt{1-a^2}\big| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$$

Comme $0 \leqslant \mathbb{P}\big(\widehat{Y}_n > \ln\sqrt{1-a^2} + \varepsilon\big) \leqslant \mathbb{P}\big(\big|\widehat{Y}_n - \ln\sqrt{1-a^2}\big| \geqslant \varepsilon\big)$, on a *a fortiori* :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\widehat{Y}_n > \ln\sqrt{1-a^2} + \varepsilon\right) = 0.$$

On a $\ln(1-a^2) < 0$, donc on peut choisir $\varepsilon \in]0, -\ln(1-a^2)[$.

On pose alors $\delta = -\ln\sqrt{1-a^2} - \varepsilon$. On a bien $\delta > 0$ et $\mathbb{P}\big(\widehat{Y}_n > -\delta\big) \to 0$ quand n tend vers l'infini.

4. On remarque que $\widehat{Y}_n = \dfrac{\ln Z_1 + \cdots + \ln Z_n}{n} = \dfrac{\ln X_n}{n}$. On a donc :

$$\mathbb{P}\left(\widehat{Y}_n > -\delta\right) = \mathbb{P}(\ln X_n > -n\delta) = \mathbb{P}(X_n > e^{-n\delta}).$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} e^{-n\delta} = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, on ait $e^{-n\delta} \leqslant \varepsilon$.

Pour $n \geqslant n_0$, on a $\{X_n > \varepsilon\} \subset \{X_n > e^{-n\delta}\}$ et donc :

$$0 \leqslant \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}\big(\widehat{Y}_n > -\delta\big).$$

On en déduit que $\mathbb{P}(X_n > \varepsilon)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

16.15 1. Voir cours.

2. Numérotons les urnes de 1 à n et considérons pour $1 \leqslant i \leqslant n$, la variable X_i indicatrice de l'événement « la i-ème urne est vide ». Il est clair que $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

L'événement $\{X_i = 1\}$ est réalisé si toutes les boules ont été placées dans une des $n-1$ autres urnes. On a donc $\mathbb{P}(X_i = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{na}$. Comme X_i suit une loi de Bernoulli, on en déduit

$$\mathbb{E}(X_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{na} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{na}\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{na}\right).$$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{na}.$$

D'autre part, on a :

$$\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\right).$$

Il faut calculer les covariances. Pour $i \neq j$, on a :

$$\mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{P}(X_iX_j = 1) = \mathbb{P}\big(\{X_i = 1\} \cap \{X_j = 1\}\big) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{na},$$

car il faut que les na boules soient placées dans les $n-2$ urnes restantes. On a donc :

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{na} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2na}.$$

Toutes les variances sont égales, ainsi que toutes les covariances. On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_n) &= \frac{1}{n^2}\left(n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{na}\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{na}\right)\right.\\ &\qquad\left. + n(n-1)\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^{na} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2na}\right)\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{na} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2na} + \frac{n-1}{n}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{na}.\end{aligned}$$

3. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(S_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{na\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{-a}$.

De $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2na} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{na} = e^{-2a}$, on déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{V}(S_n) = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(S_n) = e^{-a}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, on ait $|\mathbb{E}(S_n) - e^{-a}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a par inégalité triangulaire :

$$|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant |S_n - e^{-a}| - \left|\mathbb{E}(S_n) - e^{-a}\right| \geqslant |S_n - e^{-a}| - \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit :

$$\left\{|S_n - e^{-a}| \geqslant \varepsilon\right\} \subset \left\{|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

On a donc, pour $n \geqslant n_0$:

$$\mathbb{P}\big(|S_n - e^{-a}| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \frac{4\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2},$$

d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(S_n) = 0$, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|S_n - e^{-a}| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

16.16 1. On a $u_0 = 0$ et $u_1 = \mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = p_0$.

2. Il est clair que si $X_n = 0$, alors $X_{n+1} = 0$. On a donc

$$\{X_n = 0\} \subset \{X_{n+1} = 0\},$$

ce qui implique $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1, donc elle converge.

3. On écrit, avec la formule des probabilités totales :

$$u_{n+1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = k)\, \mathbb{P}(X_1 = k).$$

On a $\mathbb{P}(X_1 = k) = \mathbb{P}(X = k) = p_k$.

Supposons que $X_1 = k \geqslant 1$. Alors le nombre total de virus le $(n+1)$-ième jour est égal à $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k$, où $Y_1, \ldots, Y_k$ sont des variables indépendantes représentant le nombre de descendants de la n-ième génération de chacun des k virus du premier jour. On a donc, sachant que les variables $Y_1, \ldots, Y_n$ sont également indépendantes de X_1 :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = k) &= \mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_k = 0 \mid X_1 = k)\\ &= \mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_k = 0) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(Y_i = 0).\end{aligned}$$

Comme la loi de reproduction est la même pour touts les virus, on a, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $\mathbb{P}(Y_i = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0) = u_n$ et donc :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = k) = u_n^k.$$

Cette formule reste vraie pour $k = 0$, car si $X_1 = 0$, alors $X_{n+1} = 0$. On obtient :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k u_n^k = f(u_n).$$

4. La limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un point fixe de f. On note que 1 est un point fixe de f. On considère $g = x \mapsto f(x) - x$. On sait que f et, donc g, est dérivable sur $[0,1[$:

$$\forall x \in [0,1[\quad g'(x) = f'(x) - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k x^{k-1} - 1.$$

La fonction g' est strictement croissante sur $[0,1[$, car

$$g''(x) = f''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) p_k x^{k-2} > 0$$

pour $x \in]0,1[$ (sinon $p_k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$ et $p_0 + p_1 = 1$). De plus, on a $g'(1) = \mathbb{E}(X) - 1$ (si $\mathbb{E}(X) = +\infty$, la limite de g' en 1 est $+\infty$).

- Si $\mathbb{E}(X) \leqslant 1$, on a $g'(1) \leqslant 0$ et $g'(x) < 0$ si $0 \leqslant x < 1$. La fonction g est strictement décroissante et ne s'annule qu'en 1. La suite (u_n) converge vers 1.
- Si $\mathbb{E}(X) > 1$, on a $g'(1) > 0$. Comme $g'(0) = p_1 - 1 \leqslant p_0 + p_1 - 1 < 0$, la fonction g' change de signe en x_0 : g décroît puis croît.
  Comme $g(0) = p_0 > 0$ et $g(x_0) < g(1) = 0$, g s'annule une seconde fois sur $[0, x_0[$ en ℓ.
  Comme $u_0 = 0 \leqslant \ell$ et f croît, on a $u_n \leqslant \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ℓ.

On a, comme la suite $(\{X_n = 0\})_{n\in\mathbb{N}}$ croît :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X_n = 0\}\right).$$

La limite est donc la probabilité que la lignée de virus s'éteigne. Si $\mathbb{E}(X) \leqslant 1$, la lignée de virus s'éteint presque sûrement. Si $\mathbb{E}(X) > 1$, la probabilité que la lignée de virus s'éteigne est un réel $\ell \in]0,1[$.

16.17 1. On a $S_N(\Omega) \subset \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} S_n(\Omega)$. Les $S_n(\Omega)$ étant au plus dénombrables, il en est de même de leur union dénombrable, et *a fortiori* $S_N(\Omega)$ est au plus dénombrable. De plus :

$$\forall x \in S_N(\Omega) \quad \{S_N = x\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{S_n = x\} \cap \{N = n\},$$

donc $\{S_N = x\}$, union dénombrable d'événements, est un événement et S_N est une variable aléatoire.

2. (a) On a $S_N(\Omega) = \mathbb{N}$ et d'après la formule des probabilités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(S_N = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_N = k \mid N = n)\, \mathbb{P}(N = n).$$

On remarque que :

$$\mathbb{P}(S_N = k \mid N = n) = \mathbb{P}(S_n = k \mid N = n) = \mathbb{P}(S_n = k),$$

la dernière égalité résultant de l'indépendance des variables X_n par rapport à N. Pour $n \geqslant 1$, S_n est une somme de n variables de Bernoulli, indépendantes, de même paramètre p ; elle suit donc la loi binomiale de paramètre (n, p). On a donc :

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si} \quad k \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k > n. \end{cases}$$

On remarque que cette formule reste vérifiée si $n = 0$, car alors S_n prend la valeur 0, avec la probabilité 1. On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_N = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{(1-p)\lambda} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

La variable aléatoire S_N suit la loi de Poisson de paramètre λp.

(b) On procède comme dans la question précédente. On a $S_N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(S_N = k \mid N = n) = \mathbb{P}(S_n = k \mid N = n) = \mathbb{P}(S_n = k).$$

Comme les variables X_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, il est clair que $\mathbb{P}(S_n = k) = 0$ si $k < n$. Supposons $k \geqslant n$. On peut alors écrire :

$$\{S_n = k\} = \bigcup_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in J_k} \{X_1 = i_1\} \cap \{X_2 = i_2\} \cap \ldots \{X_n = i_n\},$$

où J_k est l'ensemble des n-listes d'entiers strictement positifs $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ tels que $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k$. Le cardinal de J_k est égal au nombre de $(n-1)$-listes $(j_1, j_2, \ldots, j_{n-1})$ d'entiers tels que $1 \leqslant j_1 < j_2 \ldots < j_{n-1} \leqslant k-1$, car à $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, on peut associer bijectivement :

$$(j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}) = (i_1, i_1 + i_2, \ldots, i_1 + i_2 + \cdots + i_{n-1}).$$

On a donc $\text{card}\,(J_k) = \binom{k-1}{n-1}$.

D'autre part, pour $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in J_k$, on a, par indépendance des variables aléatoires X_i :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\{X_1 = i_1\} \cap \{X_2 = i_2\} \cap \ldots \cap \{X_n = i_n\}\right) \\ &\quad = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j = i_j) = \prod_{j=1}^{n} p(1-p)^{i_j - 1} \\ &\quad = p^n (1-p)^{\sum_{j=1}^{n} i_j - n} = p^n (1-p)^{k-n}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$. On en déduit, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_N = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_N = k \mid N = n)\, \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{k} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} p'(1-p')^{n-1} \\ &= pp' \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (1-p)^{k-1-j} (p(1-p'))^{n-1} \\ &= pp'(1-p+p(1-p'))^{k-1} = pp'(1-pp')^{k-1}.\end{aligned}$$

La variable S_N suit la loi géométrique de paramètre pp'.

3. (a) Pour tout $t \in [0,1]$,

$$G_{S_N}(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k \mathbb{P}(S_N = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} t^k \mathbb{P}(\{S_N = k\} \cap \{N = n\}).$$

La famille de réels positifs $\left(t^k \mathbb{P}\left(\{S_N = k\} \cap \{N = n\}\right)\right)_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est donc sommable. On peut donc échanger l'ordre des sommations. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{N}} t^k \mathbb{P}(\{S_N = k\} \cap \{N = n\}) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k \mathbb{P}(\{S_n = k\} \cap \{N = n\}) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k \mathbb{P}(S_n = k) \mathbb{P}(N = n),\end{aligned}$$

car S_n et N sont indépendantes. On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{N}} t^k \mathbb{P}(\{S_N = k\} \cap \{N = n\}) &= G_{S_n}(t) \mathbb{P}(N = n) \\ &= G_{X_1}(t)^n\, \mathbb{P}(N = n),\end{aligned}$$

car $G_{S_n}(t) = G_{X_1 + \cdots + X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) = G_{X_1}(t)^n$, par indépendance des variables X_i. On obtient finalement :

$$\forall t \in [0,1] \quad G_{S_N}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(G_{X_1}(t)\right)^n\, \mathbb{P}(N = n) = G_N\big(G_{X_1}(t)\big),$$

ce qui est le résultat voulu.

(b) Les fonctions G_N et G_{X_1} sont dérivable en 1 et $G_{X_1}(1) = 1$. On en déduit que G_{S_N} est dérivable en 1 à gauche, donc dérivable en 1. Ainsi la variable aléatoire S_N est d'espérance finie :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_N) = G'_{S_N}(1) &= G'_N\left(G_{X_1}(1)\right) G'_{X_1}(1) \\ &= G'_N(1) G'_{X_1}(1) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1).\end{aligned}$$

(c) Les fonctions G_N et G_{X_1} sont deux fois dérivable en 1. On en déduit que G_{S_N}

est deux fois dérivable en 1 et :

$$\begin{aligned} G''_{S_N}(1) &= G'_N\left(G_{X_1}(1)\right) G''_{X_1}(1) + G''_N\left(G_{X_1}(1)\right)\left(G'_{X_1}(1)\right)^2 \\ &= G'_N(1) G''_{X_1}(1) + G''_N(1)\left(G'_N(1)\right)^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(S_N(S_N-1)\right) &= \mathbb{E}(N)\mathbb{E}\left(X_1(X_1-1)\right) + \mathbb{E}\left(N(N-1)\right)\left(\mathbb{E}(X_1)\right)^2 \\ &= \mathbb{E}(N)\left(\mathbb{E}\left(X_1^2\right) - \mathbb{E}(X_1)\right) \\ &\qquad + \left(\mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(N)\right)\left(\mathbb{E}\left(X_1\right)\right)^2. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S_N) &= \mathbb{E}\left(S_N(S_N-1)\right) + \mathbb{E}(S_N) - \left(\mathbb{E}(S_N)\right)^2 \\ &= \mathbb{E}(N)\left(\mathbb{V}(X_1) + \left(\mathbb{E}(X_1)\right)^2 - \mathbb{E}(X_1)\right) \\ &\quad + \left(\mathbb{V}(N) + \left(\mathbb{E}(N)\right)^2 - \mathbb{E}(N)\right)\left(\mathbb{E}\left(X_1\right)\right)^2 \\ &\quad + \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N) - \left(\mathbb{E}\left(X_1\right)\right)^2\left(\mathbb{E}\left(N\right)\right)^2 \\ &= \mathbb{V}(X_1)\mathbb{E}(N) + \left(\mathbb{E}(X_1)\right)^2\mathbb{V}(N). \end{aligned}$$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire S_n est d'espérance finie, comme somme de n variables aléatoires d'espérance finie, donc $|S_n|$ est aussi d'espérance finie. On a, d'après la formule de transfert :

$$\sum_{x \in S_N(\Omega)} |x| \mathbb{P}(S_n = x)\, \mathbb{P}(N = n) = \mathbb{E}(|S_n|)\, \mathbb{P}(N = n).$$

De l'inégalité $|S_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |X_k|$ on déduit, par croissance de l'espérance,

$$\mathbb{E}(|S_n|) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|X_k|) = n\mathbb{E}(|X_1|).$$

La famille $\left(n\mathbb{E}(|X_1|)\mathbb{P}(N=n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, de somme $\mathbb{E}(|X_1|)\mathbb{E}(N)$. *A fortiori*, la famille $\left(\mathbb{E}(|S_n|)\,\mathbb{P}(N=n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable. On en déduit la sommabilité de la famille $\left(x\,\mathbb{P}(S_n=x)\mathbb{P}(N=n)\right)_{(x,n)\in S_N(\Omega)\times N(\Omega)}$.

(b) Notons S la somme de cette famille.
On obtient en refaisant le calcul précédent, mais sans valeur absolue :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{x\in S_N(\Omega)} x\mathbb{P}(S_n = x)\, \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(S_n)\, \mathbb{P}(N=n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{E}(X_1)\, \mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N). \end{aligned}$$

D'autre part, on a, en raisonnant comme dans la question 2 :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} x\,\mathbb{P}(S_n = x)\,\mathbb{P}(N = n) &= x\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(S_n = x \mid N = n)\,\mathbb{P}(N = n)\\ &= x\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(S_N = x \mid N = n)\,\mathbb{P}(N = n)\\ &= x\,\mathbb{P}(S_N = x).\end{aligned}$$

On sait qu'alors, la famille $(x\,\mathbb{P}(S_N = x))_{x\in S_N(\Omega)}$ est sommable de somme S. La variable S_N est donc d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N).$$

16.18 1. (a) On a $\Pi_0 = \Pi_1 = \ldots \Pi_{r-1} = 0$ et $\Pi_r = p^r$.

(b) Pour $n \geqslant 1$, on note S_n l'événement « la n-ième épreuve est un succès » et A_n l'événement « au cours de n-premiers tirages, on a obtenus r succès consécutifs ». On a clairement $A_n \subset A_{n+1}$ et donc $\Pi_{n+1} - \Pi_n = \mathbb{P}(A_{n+1} \setminus A_n)$. L'événement $A_{n+1} \setminus A_n$ est réalisé si on obtient r succès consécutifs pour la première fois entre le $(n-r+2)$-ième et le $(n+1)$-ième tirage, ce qui impose que la $(n-r+1)$-ième épreuve soit un échec et qu'on n'ait pas avant obtenu r succès consécutifs. On a donc :

$$A_{n+1} \setminus A_n = \overline{A_{n-r}} \cap \overline{S_{n-r+1}} \cap S_{n-r+2} \cap \cdots \cap S_{n+1}$$

et par indépendance des épreuves :

$$\Pi_{n+1} - \Pi_n = (1 - \Pi_{n-r})\,(1-p)\,p^r.$$

(c) La suite $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 donc convergente. On note L sa limite. Par passage à la limite dans la relation précédente, on obtient $L - L = (1-L)(1-p)p^r$, et donc $L = 1$, puisque $p \in]0,1[$.

2. (a) Comme la suite (A_n) est croissante, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \Pi_n = 1.$$

On obtient de manière presque sûre une suite de r succès consécutifs au bout d'un nombre fini d'épreuves. Sur un ensemble de probabilité 1, on peut définir l'application T.

On a, par définition $\{T = k\} = A_{k+1} \setminus A_k$, donc $\{T = k\}$ est un événement et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\{T > k] = \overline{A_k}$ et donc $\mathbb{P}(T > k) = 1 - \Pi_k$. D'après la question 1, on a pour tout $k \geqslant 0$:

$$1 - \Pi_k = \frac{\Pi_{k+r+1} - \Pi_{k+r}}{(1-p)p^r}.$$

D'après l'exercice 18 de la page 911, on en déduit :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Pi_{k+r+1} - \Pi_{k+r}}{(1-p)p^r} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} \Pi_n - \Pi_r}{(1-p)p^r} = \frac{1-p^r}{(1-p)p^r}.$$

16.19 1. (a) On a $S_n = 0$ si, et seulement si, parmi les n variables X_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$, il y en a autant qui prennent la valeur 1 et la valeur -1. Cela nécessite n pair. On a donc $u_n = 0$ si n est impair et, si n est pair :

$$u_n = \binom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}}(1-p)^{\frac{n}{2}} = \binom{n}{\frac{n}{2}} \big(p(1-p)\big)^{\frac{n}{2}}.$$

(b) On a, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n} x^n}{4^n}.$$

Or $4p(1-p) \leqslant 1$, donc, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}(4p(1-p))^n x^{2n}}{4^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} x^{2n} = f(x),\end{aligned}$$

car $u_n = 0$ si n est impair.

2. (a) Les événements A_k pour $1 \leqslant k \leqslant n$ sont incompatibles et :

$$\{S_n = 0\} \subset \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k.$$

En effet si $S_n = 0$, en considérant k, le plus petit des entiers j tels que $S_j = 0$, l'événement A_k est réalisé et $1 \leqslant k \leqslant n$.

On a donc $\{S_n = 0\} = \bigcup_{k=1}^{n} (\{S_n = 0\} \cap A_k)$ et comme on a une réunion finie d'événements incompatibles :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\{S_n = 0\} \cap A_k\right).$$

(b) On suppose $1 \leqslant k \leqslant n$. Comme

$$S_1 = X_1, S_2 = X_1 + X_2, \ldots, S_k = X_1 + X_2 + \cdots X_k,$$

on peut écrire A_k sous la forme :

$$A_k = \{f(X_1, X_2, \ldots, X_k) \in N_k\},$$

en posant $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_n)$ et $N_k = \mathbb{N}^{*k-1} \times \{0\}$. On a alors :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\big(\{S_n = 0\} \cap A_k\big) = \mathbb{P}\big(\{X_{k+1} + \cdots + X_n = 0\} \cap A_k\big) \\ &= \mathbb{P}\big(\{X_{k+1} + \cdots + X_n = 0\} \cap \{f(X_1, X_2, \ldots, X_k) \in N_k\}\big) \\ &= \mathbb{P}\big(X_{k+1} + \cdots + X_n = 0\big)\, \mathbb{P}(f(X_1, X_2, \ldots, X_k) \in N_k),\end{aligned}$$

car les variables aléatoires $X_{k+1} + \cdots + X_n$ et $f(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ sont indépendantes (puisque de $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes). On obtient :

$$\mathbb{P}\big(\{S_n = 0\} \cap A_k\big) = \mathbb{P}\big(X_{k+1} + \cdots + X_n = 0\big)\, \mathbb{P}(A_k).$$

Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et suivent la même loi, donc la loi de $X_{k+1} + X_{k+2} + \cdots + X_n$ est la même que celle de $X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-k} = S_{n-k}$. On a donc :

$$\mathbb{P}\big(\{S_n = 0\} \cap A_k\big) = \mathbb{P}\big(S_{n-k} = 0\big)\mathbb{P}(A_k) = u_{n-k}v_k.$$

Comme de plus $v_0 = 0$, on obtient, d'après la question précédente :

$$u_n = \mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}v_k.$$

3. (a) Comme $0 \leqslant v_n \leqslant 1$, le rayon de la série entière définissant $g(x)$ est supérieur ou égal à 1. La fonction fg possède un développement en série entière dont les coefficients sont obtenus en faisant le produit de Cauchy des suites (u_n) et (v_n).

Pour $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{n-k}v_k = u_n$. Pour $n = 0$, $u_0v_0 = 0$. On obtient

$$\forall x \in]-1,1[\quad f(x)g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = f(x) - 1.$$

On en déduit :

$$\forall x \in]-1,1[\quad g(x) = \frac{f(x)-1}{f(x)} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}.$$

(b) On a :

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_k.$$

Comme les A_k sont deux à deux incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k = g(1).$$

On a pour $x \in]-1,1[$, $g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}$.
La série $\sum v_n$ est convergente. Donc la série $\sum v_n x^n$ est une série de fonctions continues, normalement convergente sur $[-1,1]$. La fonction g est donc continue sur $[-1,1]$ et :

$$\mathbb{P}(A) = g(1) = \lim_{x \to 1^-} g(x) = 1 - |2p-1|.$$

- Si $p = \dfrac{1}{2}$, on a $\mathbb{P}(A) = 1$. Il est presque sûr que le mobile repassera à l'origine.
- Si $p \neq \dfrac{1}{2}$, on a $\mathbb{P}(A) < 1$. Le mobile peut ne pas repasser à l'origine.

4. (a) Il est presque sûr qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\{S_n = 0\}$ et réalisé et donc un plus petit entier n pour lequel $\{S_n = 0\}$ est réalisé. On note T ce plus petit entier. On a donc $\{T = k\} = A_k$. Comme A_k est un événement, on définit bien une variable aléatoire T.

(b) On a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} = 1 - \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!x^{2n}}{2^{2n-1}n!(n-1)!}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\binom{2n-2}{n-1}x^{2n}}{n4^n}.$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{2n} = \frac{2\binom{2n-2}{n-1}}{n4^n}.$$

On a bien entendu $v_n = 0$ si n est impair.

(c) La variable T est d'espérance finie si, et seulement si, la série de terme général $2nv_{2n}$ converge. En utilisant la formule de Stirling, on obtient :

$$2nv_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

La série diverge, donc T n'est pas d'espérance finie.

5. (a) Pour $p = \dfrac{1}{2}$, on a $u_{2n} = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$. En remplaçant u_{2n}, u_{2n-2} et v_{2n} par leur valeur, on montre facilement que $v_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}$ pour $n \geqslant 1$.

(b) La probabilité que le mobile ne soit jamais à l'origine à l'issue d'aucun des $2n$ premiers déplacements est :

$$1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{2n} A_k\right) = 1 - \sum_{k=1}^{n} v_{2k} = 1 - \sum_{k=1}^{n} (u_{2k-2} - u_{2k})$$
$$= 1 - (u_0 - u_{2n}) = u_{2n} = \mathbb{P}(S_{2n} = 0),$$

car $u_0 = 1$.

Comme les valeurs prises par $(S_{n+1} - S_n)$ sont ± 1, la suite (S_n) ne peut pas prendre une valeur strictement positive et une valeur strictement négative sans prendre entre les deux la valeur 0. On en déduit :

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, S_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, S_{2n} > 0)$$
$$+ \mathbb{P}(S_1 < 0, S_2 < 0, S_{2n} < 0).$$

Comme $\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a, pour des raisons de symétrie :

$$\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, S_{2n} > 0) = \mathbb{P}(S_1 < 0, S_2 < 0, S_{2n} < 0)$$

et donc :

$$\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, S_{2n} > 0) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, S_{2n} \neq 0) = \frac{1}{2}u_{2n}.$$

16.20 1. (a) Par définition, on a $|g(X_1)| \leqslant c$: la variable aléatoire $g(X_1)$ est bornée donc d'espérance finie.

Les variables $g(X_1)$ et X_1 possèdent une espérance donc il en est de même de $|g(X_1) - X_1|$. Cette espérance est donnée par la formule de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(|g(X_1) - X_1|\right) &= \sum_{x \in X_1(\Omega)} |g(x) - x|\, \mathbb{P}(X_1 = x) \\ &= \sum_{\substack{x \in X_1(\Omega) \\ |x| > c}} |x|\, \mathbb{P}(X_1 = x).\end{aligned}$$

La famille $(|x|\,\mathbb{P}(X_1 = x))_{x \in X_1(\Omega)}$ est sommable de somme $\mathbb{E}(|X_1|)$ donc il existe I, partie finie de $X_1(\Omega)$, telle que :

$$\sum_{x \in X_1(\Omega) \setminus I} |x|\, \mathbb{P}(X_1 = x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose $c = \max_{x \in I} |x|$. On a alors :

$$\mathbb{E}\left(|g(X_1) - X_1|\right) \leqslant \sum_{x \in X_1(\Omega) \setminus I} |x|\, \mathbb{P}(X_1 = x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

(b) On a, puisque X_1 est centrée :

$$|a| = |\mathbb{E}(g(X_1))\,| = |\mathbb{E}\left(g(X_1) - X_1\right)| \leqslant \mathbb{E}\left(|g(X_1) - X_1|\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par inégalité triangulaire et croissance de l'espérance, on en déduit :

$$\mathbb{E}\left(|g(X_1) - X_1 - a|\right) \leqslant \mathbb{E}\left(|g(X_1) - X_1|\right) + |a| \leqslant \varepsilon.$$

(c) Toutes les variables X_n ont même loi, donc il en est de même des variables U_n. La fonction g est bornée, donc ce sont des variables bornées ; elles admettent donc une variance. Comme les variables X_n sont indépendantes, il en est de même des U_n et l'on a donc :

$$\mathbb{V}(Y_n') = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(U_1 + \cdots + U_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(U_k) = \frac{n\mathbb{V}(U_1)}{n^2} = \frac{\mathbb{V}(U_1)}{n}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{V}(Y_n') = 0$.

Par construction, les variables U_n sont centrées. On a donc $\mathbb{E}(Y_n') = 0$ et $\mathbb{V}(Y_n') = \mathbb{E}\left({Y_n'}^2\right)$. De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit :

$$\left(\mathbb{E}\left(|Y_n'|\right)\right)^2 = \left(\mathbb{E}(|Y_n'| \cdot 1)\right)^2 \leqslant \mathbb{E}\left({Y_n'}^2\right)\mathbb{E}(1) \leqslant \mathbb{V}(Y_n').$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{V}(Y_n') = 0$, on a également $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(|Y_n'|) = 0$.

(d) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|Y_n - Y_n'| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k - U_k)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|X_k - U_k|.$$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}\left(|X_k - U_k|\right) \leqslant \varepsilon$, car toutes les variables aléatoires $X_k - U_k$ ont même loi que $X_1 - U_1$. On en déduit, par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}\big(|Y_n - Y_n'|\big) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(|X_k' - U_k|\big) \leqslant \varepsilon.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}(|Y_n|) \leqslant \mathbb{E}(|Y_n - Y'_n|) + \mathbb{E}(|Y'_n|) \leqslant \varepsilon + \mathbb{E}(|Y'_n|).$$

Comme $(\mathbb{E}(|Y'_n|))$ converge vers 0, on en déduit pour n assez grand :

$$\mathbb{E}(|Y_n|) \leqslant 2\varepsilon.$$

Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|Y_n|) = 0.$$

2. On applique l'inégalité de Markov à la variable $|Y_n|$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|Y_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|Y_n|)}{\varepsilon}.$$

Du résultat de la question précédente, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geqslant \varepsilon) = 0$.

3. Il suffit d'appliquer ce qui précède aux variables aléatoires $X_n - m$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

16.21 1. Les coefficients de P sont positifs car ce sont des probabilités et pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=1}^{N} p_{i,j} = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in [\![1, N]\!] \mid X_n = i) = 1.$$

Soit U le vecteur colonne à N lignes, dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a $PU = U$, donc 1 est valeur propre de P.

2. (a) On démontre la propriété par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, on a $\mathbb{P}(X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0) = p_{x_0,x_1}$ par définition.

Supposons la propriété soit vraie au rang $n-1$ $(n \geqslant 2)$ et montrons-la au rang n.

- Si $\mathbb{P}\big(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}\big) \neq 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n \mid X_0 = x_0)\\
=&\frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0)}\\
=&\frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})} \times \frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})}{\mathbb{P}(X_0 = x_0)}\\
=&\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})\\
&\qquad \times \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1} \mid X_0 = x_0)\\
=&p_{x_{n-1},x_n} \times p_{x_0,x_1} p_{x_1,x_2} \cdots p_{x_{n-2},x_{n-1}}\\
=&p_{x_0,x_1} p_{x_1,x_2} \cdots p_{x_{n-2},x_{n-1}} p_{x_{n-1},x_n},
\end{aligned}$$

en utilisant la définition d'une chaîne de Markov et l'hypothèse de récurrence.

- Si $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = 0$, alors on a *a fortiori* :

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n \mid X_0 = x_0) = 0$$

et l'égalité reste vérifiée car, $p_{x_0,x_1} \ldots p_{x_{n-2},x_{n-1}} = 0$ par hypothèse de récurrence.

La propriété est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour obtenir la loi conditionnelle de X_n sachant $X_0 = x_0$, il faut sommer l'égalité précédente par rapport à x_1, …, x_{n-1}. On obtient, pour x_0 et x_n dans $[\![1, N]\!]$:

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_0 = x_0) = \sum_{(x_1,\dots,x_{n-1})\in[\![1,N]\!]^{n-1}} p_{x_0,x_1}p_{x_1,x_2}\cdots p_{x_{n-1},x_n} = p^{(n)}_{x_0,x_n},$$

comme on le voit en réitérant la formule donnant le produit de deux matrices.

(b) L'événement $\{X_0 = x_0\}$ qui contient $\{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\}$ est *a fortiori* de probabilité non nulle et on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_{n+k} = x_{n+k} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)\\
&\quad= \frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n+k} = x_{n+k})}{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)}\\
&\quad= \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{n+k} = x_{n+k} \mid X_0 = x_0)}{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid X_0 = x_0)}\\
&\quad= \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{n+k-1} p_{x_i,x_{i+1}}}{\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} p_{x_i,x_{i+1}}} = \prod_{i=n}^{n+k-1} p_{x_i,x_{i+1}}\\
&\quad= \mathbb{P}(X_1 = x_{n+1}, \dots, X_k = x_{n+k} \mid X_0 = x_n),
\end{aligned}$$

d'après la question précédente.

3. (a) On note ℓ et ℓ' des éléments de $[\![1, N]\!]$ tels que $u_n = p^{(n)}_{\ell,j}$ et $v_n = p^{(n)}_{\ell',j}$. On a, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$:

$$\begin{aligned}
p^{(n+1)}_{i,j} &= \sum_{k=1}^{N} p_{i,k}p^{(n)}_{k,j} = p_{i,\ell'}v_n + \sum_{k\in[\![1,N]\!]\setminus\{\ell'\}} p_{i,k}p^{(n)}_{k,j}\\
&\leqslant p_{i,\ell'}v_n + u_n \sum_{k\in[\![1,N]\!]\setminus\{\ell'\}} p_{i,k} = p_{i,\ell'}v_n + (1 - p_{i,\ell'})u_n.
\end{aligned}$$

La fonction affine $x \mapsto xv_n + (1 - x)u_n$ décroît donc :

$$p^{(n+1)}_{i,j} \leqslant \varepsilon v_n + (1 - \varepsilon)u_n.$$

Comme cela est vrai pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on obtient :

$$u_{n+1} \leqslant (1 - \varepsilon)u_n + \varepsilon v_n.$$

On démontre de même, pour $i \in [\![1, N]\!]$:

$$\begin{aligned}
p^{(n+1)}_{i,j} &= p_{i,\ell}u_n + \sum_{k\in[\![1,N]\!]\setminus\{\ell\}} p_{i,k}p^{(n)}_{k,j} \geqslant p_{i,\ell}u_n + (1 - p_{i,\ell})v_n\\
&\geqslant \varepsilon u_n + (1 - \varepsilon)v_n
\end{aligned}$$

et donc :

$$v_{n+1} \geqslant \varepsilon u_n + (1 - \varepsilon)v_n.$$

(b) Il résulte des inégalités démontrées dans la question précédente que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît. On a de plus

$$0 \leqslant u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant (1-2\varepsilon)(u_n - v_n).$$

La suite $(u_n - v_n)$ est décroissante, car $\varepsilon > 0$, et minorée par 0. Sa limite L vérifie $0 \leqslant L \leqslant (1-2\varepsilon)L$ et donc $L = 0$. Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. Elles convergent vers la même limite.

(c) On note q_j la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant p_{i,j}^{(n)} \leqslant v_n$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{i,j}^{(n)} = q_j$.

On définit ainsi q_j pour tout $j \in [\![1, N]\!]$. Les coefficients q_j sont positifs car limite d'une suite à termes positifs. On a $PU = U$; on en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^nU = U$, c'est-à-dire, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{N} p_{i,j}^{(n)} = 1$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{N} q_j = 1.$$

Si l'on note Z le vecteur ligne QP, on obtient, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$:

$$z_j = \sum_{k=1}^{N} q_k p_{k,j} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} p_{i,k}^{(n)} p_{k,j} = \lim_{n\to+\infty} p_{i,j}^{(n+1)} = q_j.$$

Ainsi, $QP = Q$.

Si R est une probabilité telle que $RP = R$, on a $RP^n = R$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La matrice P^n tend quand n tend vers $+\infty$ vers une matrice M dont les coefficients de la colonne d'indice j sont tous égaux à q_j. L'égalité $RM = R$ donne $r_j = \sum\limits_{i=1}^{N} r_i q_j = q_j$, donc $R = Q$.

16.22 1. (a) On a $\mathbb{P}(X < 0) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = -n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > 0)$. On en déduit :

$$\mathbb{P}(X > 0) = \frac{1 - \mathbb{P}(X = 0)}{2} \leqslant \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(X \geqslant 0) = \frac{1 + \mathbb{P}(X = 0)}{2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

(b) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi. La variable $X - Y$ est aussi à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et, pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbb{P}(X - Y = n) = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 \\ i-j=n}} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = j + n, Y = j)$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = j + n)\, \mathbb{P}(Y = j),$$

par indépendance de X et Y. On en déduit, en faisant un changement d'indice, puis en utilisant le fait que X et Y ont même loi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X-Y=-n) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X=j-n)\,\mathbb{P}(Y=j)\\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=i+n)\\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(Y=i)\,\mathbb{P}(X=i+n).\end{aligned}$$

On a bien $\mathbb{P}(X-Y=-n)=\mathbb{P}(X-Y=n)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

(c) Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. On a, pour tout $n\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=n) &= \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{Z}^2\\ i+j=n}} \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j)\\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=n-i).\end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant le fait que X et Y sont symétriques, puis un changement d'indice :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=-n) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=-n-i)\\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X=-i)\,\mathbb{P}(Y=n+i)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X=j)\,\mathbb{P}(Y=n-j)\\ &= \mathbb{P}(X+Y=n).\end{aligned}$$

.

2. (a) Cela se déduit de la question 1.(b) par récurrence sur k.

(b) Soit $k\in[\![1,n]\!]$.

- On a $\{S_n-S_k\geqslant 0\}\cap\Omega_k\subset\{S_n\geqslant S_k\}\cap\{S_k>x\}\subset\{S_n>x\}$ et donc :
$$\{S_n-S_k\geqslant 0\}\cap\Omega_k\subset\{S_n>x\}\cap\Omega_k.$$
- On a :
$$\{S_n-S_k\geqslant 0\}\cap\Omega_k=\{X_{k+1}+\cdots X_n\geqslant 0\}\cap\Omega_k.$$
On peut écrire Ω_k sous la forme $\{f(X_1,\ldots,X_k)\in A_k\}$, où f est une application de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$ et A_k une partie de $\mathbb{Z}$. Les variables X_1, X_2, …, X_n étant indépendantes, il en est de même de $X_{k+1}+\cdots X_n$ et de $f(X_1,\ldots,X_n)$. On en déduit l'indépendance des événements $\{S_n-S_k\geqslant 0\}$ et Ω_k. On a donc :
$$\mathbb{P}\left(\{S_n-S_k\geqslant 0\}\cap\Omega_k\right)=\mathbb{P}(S_n-S_k\geqslant 0)\,\mathbb{P}\left(\Omega_k\right).$$
La variable S_n-S_k est symétrique, comme somme de variables symétriques indépendantes, donc $\mathbb{P}(S_n-S_k\geqslant 0)\geqslant\dfrac{1}{2}\cdot$ D'où l'inégalité voulue.

(c) L'événement $\left\{ \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} S_j > x \right\}$ est réalisé si, et seulement s'il existe $j \in [\![1, n]\!]$, pour lequel $\{S_j > x\}$ est réalisé. En considérant k, le plus petit des tels entiers j, cela signifie que l'événement Ω_k est réalisé. On a donc :

$$\bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k = \left\{ \max_{1\leqslant j\leqslant n} S_j > x \right\}.$$

(d) Les événements Ω_k, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, sont incompatibles donc :

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} S_j > x \right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\Omega_k).$$

En utilisant la question (b), on obtient :

$$\mathbb{P}(\Omega_k) \leqslant 2\mathbb{P}\left(\{S_n - S_k \geqslant 0\} \cap \Omega_k\right) \leqslant 2\mathbb{P}\left(\{S_n > x\} \cap \Omega_k\right).$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} S_j > x \right) \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\{S_n > x\} \cap \Omega_k\right).$$

Les événements $\{S_n > x\} \cap \Omega_k$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, sont incompatibles donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\{S_n > x\} \cap \Omega_k\right) &= \mathbb{P}\left(\{S_n > x\} \cap \bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k \right) \\ &= \mathbb{P}\left(\{S_n > x\} \cap \left\{ \max_{1\leqslant j\leqslant n} S_j > x \right\} \right) = \mathbb{P}\left(S_n > x\right).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

16.23 1. Si $i = n$, on a $S_n - S_i = 0$ et cette variable aléatoire est indépendante de toute autre variable aléatoire. Supposons donc $i < n$. On a :

$$B_i = \{|S_1| < a\} \cap \ldots \cap \{|S_{i-1}| < a\} \cap \{|S_i| \geqslant a\},$$

donc $S_i \mathbb{1}_{B_i}$ est une fonction des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_i$. D'autre part, on a $S_n - S_i = \sum\limits_{k=i+1}^{n} X_i$, donc $S_n - S_i$ est une fonction des variables aléatoires X_{i+1}, $\ldots$, X_n. Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ étant indépendantes, il en est de même de $S_i \mathbb{1}_{B_i}$ et $S_n - S_i$, d'après la proposition 26 de la page 907.

Les variables aléatoires X_i sont dans $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, donc il en est de même des variables aléatoires S_i. Les variables aléatoires $S_n^2\, \mathbb{1}_{B_i}$, $S_i^2\, \mathbb{1}_{B_i}$ et $(S_n - S_i)^2\, \mathbb{1}_{B_i}$ ont une espérance finie, car, elles sont positives et inférieures respectivement à S_n^2, S_i^2 et $(S_n - S_i)^2$, qui ont une espérance finie. On a, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(S_n^2\, \mathbb{1}_{B_i}\right) - \mathbb{E}\left(S_i^2\, \mathbb{1}_{B_i}\right) &= \mathbb{E}\left((S_n - S_i)(S_n + S_i)\, \mathbb{1}_{B_i}\right) \\ &= \mathbb{E}\left((S_n - S_i)^2\, \mathbb{1}_{B_i}\right) + 2\mathbb{E}\left((S_n - S_i) S_i \mathbb{1}_{B_i}\right).\end{aligned}$$

Les variables aléatoires $S_i \mathbb{1}_{B_i}$ et $S_n - S_i$ sont indépendantes donc :

$$\mathbb{E}\left((S_n - S_i) S_i \mathbb{1}_{B_i}\right) = \mathbb{E}\left(S_i \mathbb{1}_{B_i}\right) \mathbb{E}(S_n - S_i) = 0,$$

car $\mathbb{E}(S_n - S_i) = \sum_{k=i+1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = 0$. On a donc l'égalité voulue.

Soit $\omega \in \Omega$.

- Si $\omega \in B_i$, alors $S_i^2(\omega)\,\mathbb{1}_{B_i}(\omega) = S_i^2(\omega) \geqslant a^2 = a^2\mathbb{1}_{B_i}(\omega)$.
- Si $\omega \notin B_i$, alors $S_i^2(\omega)\,\mathbb{1}_{B_i}(\omega) = a^2\mathbb{1}_{B_i}(\omega) = 0$.

On a donc $S_i^2\mathbb{1}_{B_i} \geqslant a^2\mathbb{1}_{B_i}$, d'où l'on déduit :

$$\mathbb{E}\left(S_i^2\mathbb{1}_{B_i}\right) \geqslant a^2\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{B_i}\right) \geqslant a^2\mathbb{P}(B_i).$$

Comme $\mathbb{E}\left((S_n - S_i)^2\,\mathbb{1}_{B_i}\right) \geqslant 0$, car c'est l'espérance d'une variable positive, on a *a fortiori* $\mathbb{E}\left(S_n^2\,\mathbb{1}_{B_i}\right) \geqslant a^2\mathbb{P}(B_i)$.

2. (a) Soit $\omega \in \Omega$. Alors $\omega \in C$ si, et seulement s'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\omega \in \{|S_k| \geqslant a\}$. Alors i est le plus petit tel entier k si, et seulement si, $\omega \in B_i$. On en déduit que $C = B_1 \cup B_2 \ldots \cup B_n$. Les événements B_1, B_2, …, B_n sont incompatibles, donc :

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i).$$

(b) De la question 1, on déduit :

$$\mathbb{P}(C) \leqslant \frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(S_n^2\,\mathbb{1}_{B_i}\right) \leqslant \frac{1}{a^2}\mathbb{E}\left(S_n^2\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{B_i}\right).$$

Mais $\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{B_i} = \mathbb{1}_C \leqslant 1$, donc $\mathbb{E}\left(S_n^2\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{B_i}\right) \leqslant \mathbb{E}\left(S_n^2\right) = \mathbb{V}(S_n)$, car $\mathbb{E}(S_n) = 0$. On obtient :

$$\mathbb{P}\left(\sup(|S_1|, |S_2|, \ldots, |S_n|) \geqslant a\right) = \mathbb{P}(C) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{a^2}.$$

16.24 1. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|p_k - q_k| \leqslant p_k + q_k$. Les séries de termes généraux p_k et q_k convergent, donc la série de terme général $|p_k - q_k|$ converge également.

(a) Pour toute partie A de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)\right| &= \left|1 - \mathbb{P}(X \in \bar{A}) - 1 + \mathbb{P}(Y \in \bar{A})\right| \\ &= \left|\mathbb{P}(X \in \bar{A}) - \mathbb{P}(X \in \bar{A})\right|.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}2\left|\mathbb{P}\left(X \in A\right) - \mathbb{P}\left(Y \in A\right)\right| &= \left|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(X \in A)\right| \\ &\qquad + \left|\mathbb{P}(X \in \bar{A}) - \mathbb{P}(X \in \bar{A})\right| \\ &= \left|\sum_{k\in A} p_k - \sum_{k\in A} q_k\right| + \left|\sum_{k\in \bar{A}} p_k - \sum_{k\in \bar{A}} q_k\right| \\ &\leqslant \sum_{k\in A}|p_k - q_k| + \sum_{k\in\bar{A}}|p_k - q_k| \\ &\leqslant 2\mathrm{d}(X, Y).\end{aligned}$$

(b) Pour tous réels a et b, $2\min(a,b) = a + b - |a-b|$. On a donc :

$$2\sum_{k\in\mathbb{N}} \min(p_k, q_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k + \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k - \sum_{k\in\mathbb{N}} |p_k - q_k| = 2 - 2\mathrm{d}(X,Y)$$

et donc :

$$\mathrm{d}(X,Y) = 1 - \sum_{k\in\mathbb{N}} \min(p_k, q_k).$$

(c) L'événement contraire de $\{X \neq Y\}$ est :

$$\{X = Y\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{X = k\} \cap \{Y = k\}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'événement $\{X = k\} \cap \{Y = k\}$ est inclus dans $\{X = k\}$ et dans $\{Y = k\}$. Par croissance de $\mathbb{P}$, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\{X = k\} \cap \{Y = k\}\right) \leqslant \min(p_k, q_k).$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}\left(X = Y\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\{X = k\} \cap \{Y = k\}\right) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \min(p_k, q_k).$$

On a donc :

$$\mathrm{d}(X,Y) = 1 - \sum_{k\in\mathbb{N}} \min(p_k, q_k) \leqslant 1 - \mathbb{P}\left(X = Y\right) \leqslant \mathbb{P}\big(X \neq Y\big).$$

2. (a) On montre facilement que f est croissante sur $[0,1]$.
On a donc $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,1]$.

(b) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la variable X_i est à valeur dans $[0,1]$. On a par définition :

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}\big(\{Y_i = 0\} \cap \{U_i = 0\}\big)$$

et par indépendance de U_i et Y_i :

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \exp\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\left(1 - f\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right) = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right).$$

On en déduit que $\mathbb{P}(X_i = 1) = \dfrac{\lambda}{n}$: la variable X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$.

Les variables Y_1, U_1, Y_2, U_2,..., Y_n, U_n sont indépendantes. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i est une fonction de Y_i et U_i. D'après le lemme des coalitions, les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes. On a donc une somme de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre. On en déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi binomiale de paramètre $\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

La variable aléatoire Y, somme de variables mutuellement indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$, suit la loi de Poisson de paramètre λ (voir l'exercice 14 de la page 908).

(c) L'événement $\{X_i = Y_i\}$ est réalisé si $X_i = 0$ et $Y_i = 0$ ou $X_i = 1$ et $Y_i = 1$. On remarque que si $X_i = 0$ alors $Y_i = 0$ et si $Y_i = 1$ alors $X_i = 1$. On a donc :

$$\mathbb{P}(X_i = Y_i) = \mathbb{P}(X_i = 0) + \mathbb{P}(Y_i = 1) = 1 - \frac{\lambda}{n} + \exp\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\frac{\lambda}{n}.$$

On en déduit que :

$$\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) = 1 - \mathbb{P}(X_i = Y_i) = \frac{\lambda}{n}\left(1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\right).$$

Une simple étude de fonction montre que $1 - e^{-t} \leqslant t$ pour tout $t \geqslant 0$. On obtient donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) \leqslant \frac{\lambda^2}{n^2}.$$

(d) On a montré dans la question 1 que $\mathrm{d}(X, Y) \leqslant \mathbb{P}(X \neq Y)$. Pour obtenir l'inégalité voulue, il suffit donc de démontrer :

$$\mathbb{P}(X \neq Y) \leqslant \frac{\lambda^2}{n}.$$

On a $\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = Y_i\} \subset \left\{\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i\right\}$. On en déduit

$$\{X \neq Y\} = \overline{\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i\right\}} \subset \overline{\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = Y_i\}} = \bigcup_{i=1}^{n}\{X_i \neq Y_i\}.$$

Par croissance de $\mathbb{P}$, puis inégalité de Boole, on en déduit :

$$\mathbb{P}(X \neq Y) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X_i \neq Y_i\}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \neq Y_i)$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda^2}{n^2} \leqslant \frac{\lambda^2}{n}.$$

On a donc :

$$\mathrm{d}(X, Y) \leqslant \frac{\lambda^2}{n}.$$

16.25 1. On remarque qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels converge vers x si, et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \geqslant n \quad |x_p - x| \leqslant \frac{1}{k},$$

car pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{k} \leqslant \varepsilon$.

On a donc, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\omega \in B &\iff \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \geqslant n \quad |X_p(\omega) - X(\omega)| \leqslant \frac{1}{k} \\ &\iff \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \geqslant n \quad \omega \in \left\{|X_p - X| \leqslant \frac{1}{k}\right\} \\ &\iff \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \omega \in C_k \\ &\iff \omega \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} C_k.\end{aligned}$$

On a donc $B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} C_k$. La suite $(C_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ étant décroissante, on en déduit :

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}(C_k).$$

2. On obtient, en considérant l'événement contraire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geqslant n} \big\{|X_p - X| \leqslant \varepsilon\big\}\Big) = 1.$$

On prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$, on obtient $\mathbb{P}(C_k) = 1$. En faisant tendre k vers l'infini, on en déduit $\mathbb{P}(B) = 1$: la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X.

3. Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après l'inégalité de Boole :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{p \geqslant n} \big\{|X_p - X| > \varepsilon\big\}\Big) \leqslant \sum_{p=n}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_p - X| > \varepsilon).$$

Le reste d'ordre $n-1$ de la série de terme général $\mathbb{P}\big(|X_n - X| > \varepsilon\big)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc *a fortiori* :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{p \geqslant n} \big\{|X_p - X| \leqslant \varepsilon\big\}\Big) = 0.$$

La suite $\Big(\bigcup_{p \geqslant n} \big\{|X_p - X| \leqslant \varepsilon\big\}\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc, par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geqslant n} \big\{|X_p - X| > \varepsilon\big\}\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{p \geqslant n} \big\{|X_p - X| \leqslant \varepsilon\big\}\Big) = 0.$$

De la question précédente, on déduit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X.

16.26 1. (a) Soit $t \in [a, b]$.

- $*$ Si $u \geqslant 0$, on a :

$$|u|^k e^{tu} \leqslant |u|^k e^{bu} = |u|^k e^{-u\delta} e^{(b+\delta)u}.$$

La fonction $u \mapsto |u|^k e^{-u\delta}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et a pour limite 0 en $+\infty$, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Il existe $C_1 > 0$ tel que l'on ait $|u|^k e^{tu} \leqslant C_1 e^{(b+\delta)u}$ pour tout $u \geqslant 0$.

∗ Si $u \leqslant 0$, on a :

$$|u|^k e^{tu} \leqslant |u|^k e^{au} = |u|^k e^{u\delta} e^{(a-\delta)u}.$$

La fonction $u \mapsto |u|^k e^{u\delta}$ est continue sur $\mathbb{R}_-$ et a pour limite 0 en $-\infty$, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}_-$. Il existe $C_2 > 0$ tel que l'on ait $|u^k| e^{tu} \leqslant C_2 e^{(a-\delta)u}$, pour tout $u \leqslant 0$.

En prenant $C = \max(C_1, C_2)$, on a le résultat voulu.

- On obtient, pour tout $t \in [a, b]$:

$$|X|^k e^{tX} \leqslant C\big(e^{(a-\delta)X} + e^{(b+\delta)X}\big).$$

Comme $a - \delta$ et $b + \delta$ sont dans $]\alpha, \beta[$, les variables $e^{(a-\delta)X}$ et $e^{(b+\delta)X}$ et donc $C\big(e^{(a-\delta)X} + e^{(b+\delta)X}\big)$ ont une espérance finie. On en déduit que $X^k e^{tX}$ est d'espérance finie. Cela est vrai pour tout $[a, b] \subset]\alpha, \beta[$, donc $X^k e^{tX}$ est d'espérance finie pour tout $t \in]\alpha, \beta[$.

(b) Supposons $X(\Omega)$ dénombrable et notons $X(\Omega) = \{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pour tout $t \in]\alpha, \beta[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_k(t) = \mathbb{E}\left(X^k e^{tX}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k e^{tx_n} \mathbb{P}(X = x_n)$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n,k}(t) = x_n^k e^{tx_n} \mathbb{P}(X = x_n)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $[a, b] \subset]\alpha, \beta[$. Il résulte de la question précédente qu'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [a, b]$:

$$|x_n^k| e^{tx} \mathbb{P}(X = x_n) \leqslant C\big(e^{(a-\delta)x_n} \mathbb{P}(X = x_n) + e^{(b+\delta)x_n} \mathbb{P}(X = x_n)\big).$$

On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_n u_{n,k}(t)$ converge uniformément par rapport à t sur $[a, b]$.

D'autre part, on a pour tout $t \in]\alpha, \beta[$, $u'_{n,k}(t) = u_{n,k+1}(t)$.

Du théorème de dérivation des séries de fonctions (théorème 24 de la page 513), on déduit que la fonction f_k est dérivable sur $[a, b]$ de dérivée f_{k+1}. Comme cela est vrai pour tout $[a, b] \subset]\alpha, \beta[$, on conclut que f_k est dérivable sur $]\alpha, \beta[$, de dérivée f_{k+1}.

Comme $f_0 = L_X$, on en déduit que L_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\alpha, \beta[$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $L_X^{(k)} = f_k$.

En prenant $t = 0$, on en déduit que $\mathbb{E}(X^k) = L_X^{(k)}(0)$.

Si $X(\Omega)$ est fini, les résultats précédents restent vrais et sont évidents, car on dérive des sommes finies.

2. (a) Pour tout $t \in]\alpha, \beta[$, on a $L_X(t) > 0$, car c'est l'espérance d'une variable aléatoire strictement positive, donc $\Psi(t)$ est défini. On a :

$$\forall t \in]\alpha, \beta[\quad \Psi'(t) = \frac{L'_X(t)}{L_X(t)} \quad \text{et} \quad \Psi''(t) = \frac{L''_X(t) L_X(t) - \left(L'_X(t)\right)^2}{\left(L_X(t)\right)^2}.$$

On a $L''_X(t) L_X(t) - \left(L'_X(t)\right)^2 = \mathbb{E}\left(X^2 e^{tX}\right) \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) - \left(\mathbb{E}\left(X e^{tX}\right)\right)^2$.

On écrit $e^{tX} = \left(e^{tX/2}\right)^2$ et $X^2e^{tX} = \left(Xe^{tX/2}\right)^2$, ce qui montre que $e^{tX/2}$ et $Xe^{tX/2}$ ont un moment d'ordre 2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\left(\mathbb{E}\left(Xe^{tX}\right)\right)^2 = \left(\mathbb{E}\left(Xe^{tX/2}e^{tX/2}\right)\right)^2 \leqslant \mathbb{E}\left(X^2e^{tX}\right)\mathbb{E}\left(e^{tX}\right).$$

On en déduit que, pour tout $t \in]\alpha, \beta[$, on a $\Psi''(t) \geqslant 0$.
De plus, s'il existe $t \in]\alpha, \beta[$ tel que $\Psi''(t) = 0$, alors X est presque sûrement constante (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz : voir l'exercice 23 de la page 916), ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $\Psi'' > 0$ et Ψ est strictement convexe.

(b) On pose $h_c(t) = ct - \Psi(t)$. La fonction h_c' s'annule en $\gamma = (\Psi')^{-1}(c)$ et comme Ψ' croît, h_c' est positive sur $]\alpha, \gamma[$ et négative sur $]\gamma, \beta[$. On a donc $g(c) = h_c(\gamma)$.
On note que $m = \Psi'(0)$. Donc $m \in I$ et $g(m) = 0$, car :

$$\Psi(0) = \ln L_X(0) = \ln 1 = 0.$$

Si $c \neq m$, alors on a $\gamma \neq 0$ et $g(c) > \Psi(0) = 0$.

(c)
- Si $c < m$, c'est-à-dire $c < \Psi'(0)$, alors $\gamma < 0$. Le maximum de h_c sur $]\alpha, 0[$, atteint en γ, est aussi le maximum de h_c sur $]\alpha, \beta[$, c'est-à-dire $g(c)$.
- De même, si $c > m$, alors $\gamma > 0$ et le maximum de h_c sur $]0, \beta[$ est le maximum de h_c sur $]\alpha, \beta[$, c'est-à-dire $g(c)$.

(d)
- Supposons $c < m$. Considérons $t \in]\alpha, 0[$. On a, d'après l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(X \leqslant c) = \mathbb{P}(e^{tX} \geqslant e^{ct}) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)}{e^{ct}} = e^{\Psi(t)-ct}.$$

  En prenant $t = \gamma$, on obtient l'inégalité voulue.
- Si $c > m$, on obtient l'inégalité de la même manière, en prenant $t \in]0, \beta[$.

3. (a) On remarque que, pour tout $t \in]\alpha, \beta[$, on a $e^{tS_n} = \prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}$. Les variables e^{tX_k} ont une espérance finie $L_X(t)$ et sont indépendantes, donc e^{tS_n} possède une espérance et :

$$\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{tX_k}\right) = (L_X(t))^n = e^{n\Psi_X(t)}.$$

On applique ce qui précède à la variable aléatoire S_n. On a, pour $t \in]\alpha, \beta[$, $\Psi_{S_n}(t) = n\Psi_X(t)$. Le maximum de $\Psi_{S_n}(t) - cnt$ est donc $ng(c)$ et $\mathbb{E}(S_n) = nm$.On a donc :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leqslant c\right) = \mathbb{P}(S_n \leqslant nc) \leqslant e^{-ng(c)} \qquad \text{si} \qquad c < m$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant c\right) = \mathbb{P}(S_n \geqslant nc \leqslant e^{-ng(c)} \qquad \text{si} \qquad c > m.$$

(b) On choisit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $m - \varepsilon$ et $m + \varepsilon$ soient dans I. On a

alors :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-m\right|\geqslant\varepsilon\right)=\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}\leqslant m-\varepsilon\right)+\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}\geqslant m+\varepsilon\right).$$

En appliquant la question précédente, on en déduit :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-m\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant e^{-ng(m-\varepsilon)}+e^{-ng(m+\varepsilon)}\leqslant 2e^{-n\min(g(m+\varepsilon),g(m-\varepsilon))}.$$

(c) Pour tout $\varepsilon>0$ assez petit la série de terme général $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-m\right|\right)$ est donc convergente. D'après le résultat de l'exercice 16.25, on en déduit que la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers m.

16.27 1. (a) Soit $(t,u)\in[0,1]^2$.

- Si $|t-u|\leqslant\eta$, alors $|f(t)-f(u)|\leqslant\varepsilon$.
- Si $|t-u|>\eta$, on a $\dfrac{(t-u)^2}{\eta^2}>1$ et donc :

$$|f(t)-f(u)|\leqslant 2\|f\|_\infty\leqslant\frac{2\|f\|_\infty(t-u)^2}{\eta^2}.$$

Comme ces majorants sont positifs, on a *a fortiori*, dans les deux cas :

$$|f(t)-f(u)|\leqslant\frac{2\|f\|_\infty(t-u)^2}{\eta^2}+\varepsilon.$$

(b) On en déduit que la variable aléatoire Y_n vérifie l'inégalité :

$$|f(Y_n)-f(x)|\leqslant\frac{2\|f\|_\infty(Y_n-x)^2}{\eta^2}+\varepsilon.$$

La variable aléatoire Y_n est finie. Il en est donc de même de $f(Y_n)$ et $(Y_n-x)^2$, qui possèdent donc une espérance. Par croissance, puis par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(f(Y_n)-f(x))|&\leqslant\mathbb{E}(|f(Y_n)-f(x)|)\\&\leqslant\mathbb{E}\left(\frac{2\|f\|_\infty(Y_n-x)^2}{\eta^2}+\varepsilon\right)\\&\leqslant\frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}\mathbb{E}\left((Y_n-x)^2\right)+\varepsilon.\end{aligned}$$

On pose $S_n=X_1+\cdots+X_n$. La variable S_n, somme de variables aléatoires indépendantes de même paramètre x suit la loi binomiale de paramètre (n,x).
On a donc $\mathbb{E}(Y_n)=\dfrac{1}{n}\mathbb{E}(S_n)=\dfrac{nx}{n}=x$.
On en déduit que $\mathbb{E}\left((Y_n-x)^2\right)=\mathbb{V}(Y_n)$. D'où l'inégalité :

$$|\mathbb{E}(f(Y_n))-f(x)|\leqslant\frac{2\|f\|_\infty\mathbb{V}(Y_n)}{\eta^2}+\varepsilon.$$

2. On part de l'inégalité précédente.

On a $f(Y_n) = f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$. Par la formule de transfert, appliquée à la variable aléatoire S_n qui suit une loi binomiale de paramètre (n, x), on obtient :

$$\mathbb{E}\left(f(Y_n)\right) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(S_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = B_n(f)(x).$$

D'autre part, on a :

$$\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \frac{nx(1-x)}{n^2} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

On a donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \frac{2\|f\|_\infty x(1-x)}{n\eta^2} + \varepsilon \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{n\eta^2} + \varepsilon.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{2\|f\|_\infty}{n\eta^2}$ tend vers 0. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{2\|f\|_\infty}{n\eta^2} \leqslant \varepsilon$, pour $n \geqslant n_0$. On obtient donc, pour $n \geqslant n_0$:

$$\forall x \in [0,1] \quad |B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Comme ε est un réel strictement positif quelconque, on en déduit que la suite de fonctions polynomiales $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Cela démontre le théorème de Weierstrass.

16.28 Cette expérience aléatoire peut être modélisée par une suite de variables aléatoires, indépendantes de même loi, correspondant aux choix successifs du guichetier, chaque variable prenant la valeur 1 avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ et chacune des autres valeurs avec la probabilité $\dfrac{1}{2(n-1)}$.

1. À chaque instant le client en première position peut être choisi avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$. Dans le cas contraire, il reste en première position. L'ensemble des valeurs prises par T_1 est donc $\mathbb{N}^*$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(T_1 = k) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}\dfrac{1}{2}$.

En effet, cela signifie que $k-1$ fois, le guichetier ne l'a pas choisi, avant de le choisir la k-ième fois.

Ainsi T_1 suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et l'on a :

$$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{V}(T_1) = 2.$$

2. Pour un client quelconque de la file d'attente, la probabilité d'être servi à un moment donné est supérieure ou égale à $\dfrac{1}{2(n-1)}$ et donc la probabilité de n'être pas servi est inférieure ou égal à $\left(1-\dfrac{1}{2(n-1)}\right)$. On en déduit que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(T_k=\ell) \leqslant \left(1-\dfrac{1}{2(n-1)}\right)^{\ell-1}$, car il faut pour que $\{T_k=\ell\}$ soit réalisé que le client initialement à la k-ième place n'ait pas été choisi $\ell-1$ fois. Ainsi, $\mathbb{P}(T_k=\ell)$ est majorée par une suite géométrique convergente. On en déduit que la série de terme général $\ell\mathbb{P}(T_k=\ell)$ converge. Ainsi T_k est d'espérance finie.
3. Soit $k \geqslant 2$. On note X_1 la variable représentant le premier choix du guichetier. Après ce choix, le client qui est à la k-ième place avance d'une place si $1 \leqslant X_1 \leqslant k-1$, ne bouge pas si $X_1 \geqslant k+1$ et quitte la file si $X_1 = k$. On a donc, pour $\ell \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(T_k=\ell \mid X_1 \leqslant k-1) = \mathbb{P}(T_{k-1}=\ell-1),\\
&\mathbb{P}(T_k=\ell \mid X_1 \geqslant k+1) = \mathbb{P}(T_k=\ell-1)\\
&\mathbb{P}(T_k=\ell \mid X_1 = k) = 0.
\end{aligned}$$

Sachant que :

$$\mathbb{P}(1 \leqslant X_1 \leqslant k-1) = \frac{1}{2}+\frac{k-2}{2(n-1)} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_1 \geqslant k+1) = \frac{n-k}{2(n-k)},$$

on obtient, en appliquant la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(T_k=\ell) = \left(\frac{1}{2}+\frac{k-2}{2(n-1)}\right)\mathbb{P}(T_{k-1}=\ell-1)+\frac{n-k}{2(n-1)}\mathbb{P}(T_k=\ell-1).$$

Comme $\mathbb{P}(T_k=1)=\dfrac{1}{2(n-1)}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_k) &= \frac{1}{2(n-1)} + \left(\frac{1}{2}+\frac{k-2}{2(n-1)}\right)\sum_{\ell=2}^{+\infty}\ell\,\mathbb{P}(T_{k-1}=\ell-1)\\
&\qquad + \frac{n-k}{2(n-1)}\sum_{\ell=2}^{+\infty}\ell\,\mathbb{P}(T_k=\ell-1)\\
&= \frac{1}{2(n-1)} + \left(\frac{1}{2}+\frac{k-2}{2(n-1)}\right)(\mathbb{E}(T_{k-1})+1)\\
&\qquad + \frac{n-k}{2(n-1)}(\mathbb{E}(T_k)+1).
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$(n-2+k)\mathbb{E}(T_k) = (2n-2)+(n-3+k)\mathbb{E}(T_{k-1}).$$

La suite $\big((n-2+k)\mathbb{E}(T_k)\big)$ est arithmétique de raison $2n-2$ et de premier terme $(n-1)\mathbb{E}(T_1)=2n-2$.

On obtient, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $(n-2+k)\mathbb{E}(T_k) = (2n-2)k$ et :

$$\mathbb{E}(T_k) = \frac{(2n-2)k}{n-2+k}.$$

4. Dans une file d'attente classique, le temps d'attente du k-ième client serait k. On observe que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathbb{E}(T_k) \geqslant k$, l'inégalité étant stricte pour $k < n$.

16.29 1. • Si X est presque sûrement constante, alors l'événement $\{X = x\}$ est de probabilité 0 ou 1, pour tout réel x, donc est indépendant de l'événement $\{Y = y\}$, pour tout y réel. Les variables X et Y sont indépendantes. Donc (i) implique (ii). On remarque qu'il suffit qu'une des deux variables aléatoires soit presque sûrement constante pour que (ii) soit vérifié.
La réciproque est fausse. Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\{0,1\}^2$, les variables X et Y suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et sont indépendantes, sans être presque sûrement constantes.

• L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est un théorème du cours.
La réciproque est fausse. Si X est une variable réelle suivant la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et $Y = |X|$, on a $\mathbb{E}(X) = 0$ et $XY = X$, donc $\mathbb{E}(XY) = 0 = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.
Mais X et Y ne sont pas indépendantes, car :

$$\mathbb{P}\big(\{X = 0\} \cap \{Y = 1\}\big) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0)\,\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

2. On suppose que (iii) est vérifié et qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissantes ainsi qu'une variable aléatoire réelle Z telle que $X = f(Z)$ et $Y = g(Z)$.
Comme f et g sont croissantes, $f(a) - f(b)$ et $g(b) - g(a)$ ont le signe de $a - b$, donc $\theta(a, b) \geqslant 0$, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On en déduit que la variable $\theta(Z, Z')$ est à valeurs positives.
On écrit :

$$\theta(Z, Z') = f(Z)g(Z) + f(Z')g(Z') - f(Z)g(Z') - f(Z')g(Z).$$

La variable aléatoire $f(Z)g(Z) = XY$ est d'espérance finie. La variable aléatoire $f(Z')g(Z')$ a même loi que $f(Z)g(Z)$ et donc même espérance.
On a $f(Z) = X$ et $g(Z')$ a même loi que Y. Les variables $f(Z)$ et $g(Z')$ sont indépendantes car Z et Z' le sont, et d'espérance finie. On en déduit que $f(Z)g(Z')$ est d'espérance finie et

$$\mathbb{E}(f(Z)g(Z')) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

On démontre de même que $\mathbb{E}(f(Z')g(Z)) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.
Ainsi $\theta(Z, Z')$ est une somme de variables aléatoires d'espérance finie. Elle est donc d'espérance finie et, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\big(\theta(Z, Z')\big) = 2\mathbb{E}(XY) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0.$$

Comme $\theta(Z,Z')$ est une variable aléatoire positive, on en déduit qu'elle est presque sûrement nulle. Il existe un événement A de probabilité égale à 1 tel que l'on ait $\theta\big(Z(\omega),Z'(\omega)\big)=0$, pour tout $\omega\in A$. Si $\omega\in A$, on a $f(Z(\omega))=f(Z'(\omega))$ ou $g(Z(\omega))=g(Z'(\omega))$ et comme f et g sont strictement croissantes, on a $Z(\omega)=Z'(\omega)$.
Si a et b sont deux réels distincts, l'événement $\{Z=a\}\cap\{Z'=b\}$ est inclus dans $\{Z\neq Z'\}$ et donc dans $\Omega\setminus A$. Il est donc de probabilité nulle. Les variables aléatoires Z et Z' sont indépendantes et Z' a même loi que Z donc :

$$\mathbb{P}(Z=a)\,\mathbb{P}(Z=b)=\mathbb{P}(Z=a)\,\mathbb{P}(Z'=b)=\mathbb{P}\big(\{Z=a\}\cap\{Z'=b\}\big)=0.$$

Soit a tel que $\mathbb{P}(Z=a)\neq 0$ (un tel a existe car $\sum\limits_{a\in Z(\Omega)}\mathbb{P}(Z=a)=1$). On a alors $\mathbb{P}(Z=b)=0$ pour tout $b\neq a$ et donc $\mathbb{P}(Z=a)=1$. La variable Z est donc presque sûrement constante. On en déduit qu'il en est de même des variables aléatoires $X=f(Z)$ et $Y=g(Z)$.

16.30 1. Si f est bornée, il en est de même de la variable aléatoire $f(X_1)$. En notant K un majorant de $|f(X_1)|$, on a $|X_2f(X_1)|\leqslant K|X_2|$, et comme $|X_2|$ est d'espérance finie, il en est de même de $X_2\,f(X_1)$. Le théorème de transfert appliquée à la variable (X_1,X_2) à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ et à la fonction $(x,y)\mapsto yf(x)$ donne :

$$\mathbb{E}(X_2\,f(X_1))=\sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}nf(m)\mathbb{P}\left(\{X_1=m\}\cap\{X_2=n\}\right).$$

La famille $\left(nf(m)\mathbb{P}\left(\{X_1=m\}\cap\{X_2=n\}\right)\right)_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$ est sommable donc on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2f(X))&=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}nf(m)\mathbb{P}\left(\{X_1=n\}\cap\{X_2=n\}\right)\\&=\sum_{m\in\mathbf{Z}}f(m)\sum_{n\in\mathbf{Z}}n\mathbb{P}\left(\{X_1=m\}\cap\{X_2=n\}\right).\end{aligned}$$

Si $\mathbb{P}(X_1=m)\neq 0$, alors on peut écrire

$$\mathbb{P}\left(\{X_1=m\}\cap\{X_2=n\}\right)=\mathbb{P}(X_1=m)\,\mathbb{P}(X_2=n\mid X_1=m),$$

et on a alors :

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}n\mathbb{P}\left(\{X_1=m\}\cap\{X_2=n\}\right)=\mathbb{P}(X_1=m)\sum_{n\in\mathbf{Z}}n\mathbb{P}\left(X_2=n\mid X_1=m\right).$$

La dernière somme est l'espérance de X_2 pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{\{X_1=m\}}$, que l'on note $\mathbb{E}(X_2\mid X_1=m)$.
Par ailleurs $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}n\mathbb{P}\left(\{X_1=m\}\cap\{X_2=n\}\right)=0$ si $\mathbb{P}(X_1=m)=0$ car $\mathbb{P}\left(\{X_1=m\}\cap\{X_2=n\}\right)=0$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$. En posant :

$$\forall m\in\mathbb{Z}\quad h(m)=\begin{cases}\mathbb{E}(X_2\mid X_1=m) & \text{si}\quad \mathbb{P}(X_1=m)\neq 0\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

on obtient :

$$\mathbb{E}(X_2\,f(X_1))=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\mathbb{P}(X_1=m)f(m)h(m).$$

D'après le théorème de transfert, on a :

$$\mathbb{E}(X_2 f(X_1)) = \mathbb{E}\big(h(X_1) f(X_1)\big).$$

Cela est valable pour toute fonction bornée f. En prenant pour f la fonction constante égale à 1, on obtient que $h(X_1)$ possède une espérance égale à $\mathbb{E}(X_2)$. La variable aléatoire $Y_1 = h(X_1)$ a les propriétés voulues.

2. Soit $h'(X_1)$ une autre variable aléatoire ayant les propriétés requises. Considérons $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{P}(X_1 = m) \neq 0$. En prenant $f = \mathbb{1}_m$, on obtient $f(X_1) = \mathbb{1}_{\{X_1 = m\}}$ et l'égalité $\mathbb{E}(X_2 \mathbb{1}_{\{X_1=m\}}) = \mathbb{E}\big(h'(X_1)\mathbb{1}_{\{X_1=m\}}\big)$. Le théorème de transfert donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_2\, \mathbb{1}_{\{X_1=m\}}) &= \sum_{(k,n)\in\mathbb{Z}^2} \mathbb{1}_m(k)\, n\, \mathbb{P}\left(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = n\}\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\mathbb{P}\left(\{X_1 = m\} \cap \{X_2 = n\}\right) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = m) \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\, \mathbb{P}(X_2 = n \mid X_1 = m) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = m)\mathbb{E}(X_2 \mid X_1 = m)
\end{aligned}$$

et $\mathbb{E}\big(h'(X_1)\mathbb{1}_{\{X_1=m\}}\big) = h'(m)\mathbb{P}(X_1 = m)$. On obtient :

$$h'(m) = \mathbb{E}(X_2 \mid X_1 = m) = h(m).$$

Posons $C = \{m \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{P}(X_1 = m) = 0\}$ et $A = \bigcup_{m\in C} \{X_1 = m\}$. Alors A est un événement négligeable, car réunion au plus dénombrable d'ensembles négligeables. Les variables aléatoires $h(X_1)$ et $h'(X_1)$ coïncident sur le complémentaire de A, donc sont presque sûrement égales.

3. Par définition de l'espérance conditionnelle, il existe une fonction k définie sur $\mathbb{Z}$ telle que :

$$\mathbb{E}(X_2\, g(X_1) \mid X_1) = k(X_1).$$

D'après les deux premières questions, on a $k(m) = \mathbb{E}(X_2 g(X_1) \mid X_1 = m)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{P}(X_1 = m) \neq 0$. Le théorème de transfert, appliquée à (X_1, X_2) et à la fonction $(x, y) \mapsto yg(x)$ donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_2\, g(X_1) \mid X_1 = m) &= \sum_{(k,n)\in\mathbb{Z}^2} n g(k) \mathbb{P}\left(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = n\} \mid X_1 = m\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} n g(m) \mathbb{P}\left(\{X_1 = m\} \cap \{X_2 = n\} \mid X_1 = m\right) \\
&= g(m) \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\mathbb{P}\left(X_2 = n \mid X_1 = m\right) \\
&= g(m)\mathbb{E}(X_2 \mid X_1 = m) = g(m)h(m).
\end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{E}(X_2\, g(X_1) \mid X_1) = g(X_1)h(X_1) = g(X_1)\mathbb{E}(X_2 \mid X_1)$ sur le complémentaire de A.

Chapitre 17 : Équations différentielles linéaires

I Équations différentielles linéaires d'ordre 1 1012

1 Définitions et notations 1012

2 Propriétés linéaires : structure de l'ensemble des solutions 1016

3 Théorème de Cauchy linéaire 1017

4 Espace des solutions de l'équation homogène . . . 1018

5 Méthode de variation des constantes 1020

II Équations différentielles linéaires à coefficients constants 1022

1 Résolution pratique de l'équation homogène 1022

2 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice 1025

III Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n 1030

1 Définition 1030

2 Traduction sous la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 1031

IV Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 1034

1 Wronskien 1035

2 Recherche d'une solution particulière : méthode de variation des constantes 1038

3 Techniques classiques d'obtention d'une solution de l'équation homogène 1041

V Exemples de résolution d'équations non résolues 1045

Démonstration du théorème de Cauchy linéaire 1047

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 1049

Exercices 1075

Équations différentielles linéaires



Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\|\cdot\|$.
En première année ont été abordées :

- les équations différentielles linéaires d'ordre 1 de la forme :
$$y' + a(t)\,y = b(t) \quad \text{avec} \quad a : I \to \mathbb{K} \text{ et } b : I \to \mathbb{K} \text{ continues};$$
- les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants de la forme :
$$y'' + a\,y' + b\,y = c(t) \quad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathbb{K}^2 \text{ et } c : I \to \mathbb{K} \text{ continue.}$$

Les objectifs du cours de seconde année sont, toujours en restant dans le cas linéaire :

- pour les équations d'ordre 1, étendre l'étude aux cas de fonctions à valeurs vectorielles (dans un espace de dimension finie) ;
- pour les équations d'ordre 2, étendre l'étude au cas de coefficients non constants.

I Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1 Définitions et notations

Notation Dans tout ce chapitre, afin d'alléger les écritures (et en particulier éviter trop de parenthèses), on convient que si u est un endomorphisme de E et e un vecteur de E, alors la valeur de u en e, notée traditionnellement $u(e)$, sera souvent notée $u \cdot e$.

Soit $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ deux applications continues.
Quand on cherche toutes les applications dérivables $\varphi : I \to E$ vérifiant :
$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + b(t),$$
on dit que l'on résout l'**équation différentielle linéaire du premier ordre** :
$$x' = a(t) \cdot x + b(t). \tag{E}$$

Remarque Sans la convention « $u \cdot e$ » donnée plus haut, la relation ci-dessus s'écrit :

$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = a(t)\big(\varphi(t)\big) + b(t),$$

et l'équation est alors notée :

$$x' = a(t)(x) + b(t).$$

Définition 1

- On appelle **solution** sur I de l'équation différentielle (E) toute application $\varphi : I \to E$ dérivable vérifiant :

$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + b(t).$$

- L'application b est appelée **second membre** de l'équation (E).
- On appelle **équation homogène** (ou **sans second membre**) associée à (E) l'équation :

$$x' = a(t) \cdot x. \qquad (\mathrm{E}_0)$$

Remarque On pourra noter $x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$ l'équation (E) si l'on veut préciser le nom de la variable libre, en particulier s'il y a ambiguïté sur le nom de cette variable.

p.1049

Exercice 1 *Régularité des solutions*

Montrer que si les applications a et b sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors toute solution de (E) est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Remarque Les applications a et b étant *a minima* supposées continues, une solution de (E) est au moins de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple issu de la physique : particule chargée dans un champ électromagnétique

Dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ placée dans un champ électromagnétique uniforme $\big(\vec{E}(t), \vec{B}(t)\big)$ (dépendant continûment du temps). Cette particule est soumise à la force de Lorentz [1] :

$$\vec{f} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}(t) + q\,\vec{E}(t),$$

et donc, en notant $\vec{a}$ son accélération et m sa masse :

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\,\vec{v} \wedge \vec{B}(t) + \frac{q}{m}\,\vec{E}(t).$$

Autrement dit, la vitesse $\vec{v}$ est solution l'équation différentielle :

$$x' = x \wedge \left(\frac{q}{m}\vec{B}(t)\right) + \frac{q}{m}\,\vec{E}(t).$$

1. Pour la définition du produit vectoriel, voir exercice 3 de la page 799.

qui s'écrit aussi :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t)$$

avec, pour tout $t \in I$:

$$a(t) \ : \ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \wedge \left(\frac{q}{m}\,\vec{B}(t)\right) \end{array} \qquad \text{et} \qquad b(t) = \frac{q}{m}\,\vec{E}(t).$$

Traduction matricielle : systèmes différentiels linéaires

Convention Dans la suite, on identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.

Définition 2

On appelle **système différentiel linéaire du premier ordre** toute équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme :

$$X' = A(t)\,X + B(t)$$

avec $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ des applications continues, et où la fonction inconnue X va de I dans $\mathbb{K}^n$.

Un tel système s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1' & = & a_{1,1}(t)\,x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}(t)\,x_n & + & b_1(t) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ x_n' & = & a_{n,1}(t)\,x_1 & + & \cdots & + & a_{n,n}(t)\,x_n & + & b_n(t) \end{array} \right. \qquad \text{(Sys)}$$

où les $a_{i,j}$, appelées **coefficients**, et les b_i, appelées **seconds membres**, sont des applications continues de I dans $\mathbb{K}$.

Interprétation Si l'on munit l'espace vectoriel E d'une base $\mathcal{B}$, alors l'équation différentielle :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \qquad \text{(E)}$$

se traduit matriciellement par le système différentiel linéaire du premier ordre :

$$X' = A(t)\,X + B(t) \qquad \text{(Sys)}$$

où, pour tout $t \in I$:

- $A(t)$ est la matrice de $a(t)$ dans la base $\mathcal{B}$;
- $B(t)$ est la matrice colonne des coordonnées de $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}$.

En effet, une application $\varphi : I \to E$ est solution de (E) si, et seulement si, :

$$\forall t \in I \quad X'(t) = A(t)\,X(t) + B(t)$$

où $X(t)$ est la matrice colonne des coordonnées de $\varphi(t)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque Si $n = 1$, alors le système différentiel (Sys) s'écrit :

$$x_1' = a_{1,1}(t)\, x_1 + b_1(t),$$

et n'est alors rien d'autre qu'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exemple Reprenons l'exemple de la présente page de la particule chargée dans un champ électromagnétique, qui nous a conduit à l'équation différentielle suivante :

$$x' = x \wedge \left(\frac{q}{m}\,\vec{B}(t)\right) + \frac{q}{m}\,\vec{E}(t). \qquad \text{(Eq1)}$$

Supposons que les champs magnétique et électrique $\vec{B}(t)$ et $\vec{E}(t)$ aient une direction constante commune et plaçons-nous dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur est dirigé selon ces champs.
Les composantes de $\frac{q}{m}\,\vec{B}(t)$ et $\frac{q}{m}\,\vec{E}(t)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont alors de la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\frac{q}{m}\,\vec{B}(t)\right) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\frac{q}{m}\,\vec{E}(t)\right) = \begin{pmatrix} \beta(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En notant alors $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ les composantes de $x(t)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(x(t) \wedge \left(\frac{q}{m}\,\vec{B}(t)\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha(t)\, x_3(t) \\ -\alpha(t)\, x_2(t) \end{pmatrix}$$

L'équation différentielle (Eq1) se traduit alors par le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & \beta(t) \\ x_2'(t) & = & \alpha(t)\, x_3(t) \\ x_3'(t) & = & -\alpha(t)\, x_2(t) \end{array} \right. \qquad (\mathrm{Sys}_1)$$

Problème de Cauchy

- On dit qu'une solution φ de l'équation différentielle (E) vérifie la **condition initiale** $(t_0, x_0) \in I \times E$ si l'on a :

$$\varphi(t_0) = x_0.$$

- On appelle **problème de Cauchy**, l'équation (E) munie d'une condition initiale $(t_0, x_0) \in I \times E$:

$$(\mathrm{E}) \ : \ x' = a(t) \cdot x + b(t) \qquad \text{et} \qquad x(t_0) = x_0.$$

- Résoudre ce **problème de Cauchy**, c'est trouver toutes les solutions φ de (E) vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$.

Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy

Proposition 1

Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. Une application $\varphi \in \mathcal{C}(I, E)$ est une solution du problème de Cauchy :

$$(\mathrm{E}) \ : \ x' = a(t) \cdot x + b(t) \qquad \text{et} \qquad x(t_0) = x_0.$$

si, et seulement si, elle satisfait l'équation intégrale :

$$\forall t \in I \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s) \cdot \varphi(s) \, \mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} b(s) \, \mathrm{d}s$$

Démonstration page 1049

2 Propriétés linéaires : structure de l'ensemble des solutions

Notation Pour $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $x : I \to E$, notons $a \cdot x$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} a \cdot x \ : & I & \longrightarrow & E \\ & t & \longmapsto & a(t) \cdot x(t). \end{array}$$

Avec cette notation, l'équation différentielle (E) s'écrit :

$$x' = a \cdot x + b. \tag{E}$$

L'application :

$$\begin{array}{rccc} L \ : & \mathcal{C}^1(I, E) & \to & \mathcal{C}^0(I, E) \\ & x & \mapsto & x' - a \cdot x \end{array}$$

est bien définie, c'est une application linéaire, et l'on constate que les équations (E) et (E_0) se formulent naturellement à l'aide de L :

$$(\mathrm{E}) \ : \ L(x) = b \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{E}_0) \ : \ L(x) = 0.$$

Les propriétés générales des équations linéaires donnent alors les deux résultats suivants.

Proposition 2

- L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (E_0) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$; c'est le noyau de l'application linéaire L introduite ci-dessus.
- Si φ_p est une solution particulière de (E), l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (E) s'écrit :
$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_0.$$
C'est donc un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de direction $\mathcal{S}_0$.

Remarque À ce stade, on peut dire que l'ensemble $\mathcal{S}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I,E)$ dirigé par $\mathcal{S}_0$. En fait, nous verrons (*cf.* théorème de Cauchy linéaire ci-dessous) que l'ensemble $\mathcal{S}$ n'est jamais vide.

Proposition 3 (Principe de superposition)

Supposons que le second membre b de (E) s'écrive :

$$b = \alpha_1\, b_1 + \alpha_2\, b_2 \quad \text{avec} \quad (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{K}^2 \quad \text{et} \quad (b_1,b_2) \in \left(\mathcal{C}(I,E)\right)^2.$$

Si φ_1 et φ_2 sont respectivement solutions des équations :

$$x' = a(t)\cdot x + b_1(t) \quad \text{et} \quad x' = a(t)\cdot x + b_2(t),$$

alors la fonction $\alpha_1\,\varphi_1 + \alpha_2\,\varphi_2$ est solution de (E).

3 Théorème de Cauchy linéaire

Dans cette sous-section, a et b désignent des applications continues sur I à valeurs respectivement dans $\mathcal{L}(E)$ et E. On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$x' = a(t)\cdot x + b(t) \qquad \text{(E)}$$

Théorème de Cauchy linéaire

La démonstration du théorème fondamental suivant n'est pas exigible. Elle est proposée en annexe à la fin du chapitre (page 1047).

Théorème 4 (Théorème de Cauchy linéaire)

Pour tout $(t_0,x_0) \in I\times E$, il existe une et une seule solution φ de l'équation (E) vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$.
Autrement dit, le problème de Cauchy :

$$\text{(E)} \ : \ x' = a(t)\cdot x + b(t) \qquad \text{et} \qquad x(t_0) = x_0$$

possède une unique solution.

Remarque La partie « existence » du théorème de Cauchy linéaire assure que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est non vide (car $I\times E$ est non vide).

p.1049

Exercice 2 Soit φ_1 et φ_2 deux solutions distinctes de (E). Montrer que :

$$\forall t \in I \quad \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t).$$

p.1049

Exercice 3 Montrer qu'une solution non nulle de l'équation homogène (E_0) ne s'annule en aucun point de I.

Remarque La partie « unicité » du théorème de Cauchy linéaire assure :
- que les graphes de deux solutions distinctes de (E) ne se croisent pas (*cf.* exercice 2) ;
- qu'une solution non nulle de (E_0) ne s'annule pas (*cf.* exercice 3).

p.1050

Exercice 4 Soit $A \in \mathcal{C}\big(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$, $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ et $t_0 \in I$.
On considère le système différentiel réel :

$$X' = A(t)X + B(t) \qquad \text{(Sys)}$$

Montrer qu'une solution $\varphi : I \to \mathbb{C}^n$ de (Sys) est réelle (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) si, et seulement si, $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$.

Remarque Le théorème de Cauchy linéaire a été démontré dans le cours de première année pour les équations différentielles linéaires scalaires ($E = \mathbb{K}$) du premier ordre en exhibant la forme explicite des solutions.
Pour ces équations, de la forme :

$$x' + a(t)x = b(t) \quad \text{avec} \quad a : I \to \mathbb{K} \text{ et } b : I \to \mathbb{K} \text{ continues},$$

l'unique solution prenant la valeur x_0 au point $t_0 \in I$ est :

$$t \mapsto \exp\big(-F(t)\big)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\big(F(u)\big)\, b(u)\, \mathrm{d}u\right)$$

où F est la primitive de a sur I s'annulant en t_0.
Cette forme explicite ne s'étend malheureusement pas au cas général où la dimension de E est supérieurs ou égale à 2. En effet, on ne sait pas, en général, expliciter les solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. La démonstration du théorème de Cauchy linéaire se révèle donc plus ardue. Rappelons qu'elle est proposée sous forme d'exercices à la page 1047.

4 Espace des solutions de l'équation homogène

Proposition 5

Soit $t_0 \in I$. Notons $\mathcal{S}_0$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène (E_0) : $x' = a(t) \cdot x$. L'application :

$$\begin{array}{rccc} \delta_{t_0} & : & \mathcal{S}_0 & \to & E \\ & & \varphi & \mapsto & \varphi(t_0) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. L'application δ_{t_0} est évidemment linéaire, et elle est bijective puisque, pour tout $x_0 \in E$, le théorème de Cauchy linéaire assure l'existence d'un et un seul élément $\varphi \in \mathcal{S}_0$ tel que $\varphi(t_0) = x_0$. □

Corollaire 6

L'espace $\mathcal{S}_0$ est de dimension finie égale à celle de E.

Point méthode

Le fait de connaître la dimension de $\mathcal{S}_0$ se révèle utile lors de la résolution de (E_0). En effet, si l'on dispose de n solutions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de (E_0), alors pour obtenir que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_0$ et donc que :

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect}\,(\varphi_1, \dots, \varphi_n),$$

il suffit de montrer, au choix :

- que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre ;
- que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est génératrice (en montrant que toute solution de (E_0) s'écrit nécessairement comme combinaison linéaire de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$).

Exemple Reprenons l'exemple de la particule chargée dans un champ électromagnétique. Supposons cette fois-ci que le champ électrique $\vec{E}$ est nul et que le champ magnétique $\vec{B}$ est constant. Le système différentiel obtenu à l'exemple de la page 1015 s'écrit alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) &=& 0 \\ x_2'(t) &=& \alpha\, x_3(t) \\ x_3'(t) &=& -\alpha\, x_2(t) \end{array}\right. \quad \text{avec } \alpha \text{ une constante positive.}$$

Constatons que les trois fonctions suivantes sont solutions :

$$\varphi_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha\, t) \\ \cos(\alpha\, t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha\, t) \\ -\sin(\alpha\, t) \end{pmatrix}.$$

D'autre part, le système étudié étant un système différentiel linéaire homogène de taille 3, l'espace $\mathcal{S}_0$ de ses solutions est de dimension 3.
Puisque la famille $\big(\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)\big)$ est libre, la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ l'est aussi ; c'est donc une base de $\mathcal{S}_0$. On a donc :

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3).$$

p.1050

Exercice 5 On souhaite résoudre le système différentiel homogène :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) &=& x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &=& 2x_1(t) + x_2(t) \end{array}\right. \qquad \text{(Sys)}$$

1. Soit $f = (f_1, f_2)$ solution de (Sys).
   (a) En sommant les deux équations, montrer qu'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que :
   $$\forall t \in \mathbb{R} \quad (f_1 + f_2)(t) = a\, e^{3t}.$$
   (b) En déduire que $f \in \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$ avec :
   $$\varphi_1 : t \mapsto (e^{-t}, -e^{-t}) \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : t \mapsto (e^{3t}, e^{3t}).$$
2. Conclure la résolution.

5 Méthode de variation des constantes

Il a été vu en première année, dans le cas des équations différentielles linéaires *scalaires* d'ordre 1, la méthode de *variation de la constante* qui permet, si l'on connaît une solution non nulle de l'équation homogène (E_0), de déterminer une solution particulière de (E).

Cette méthode se généralise au cas des équations vectorielles en la **méthode de variation des constantes**.

Commençons par deux exercices qui faciliteront la présentation à suivre de la méthode de variation des constantes.

p.1051

Exercice 6 Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des solutions de l'équation homogène (E_0).

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_0$;

(ii) il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $\big(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)\big)$ soit une base de E ;

(iii) pour tout $t \in I$, la famille $\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\big)$ est une base de E.

Dans la suite, on suppose disposer d'une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de l'espace $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (E_0).

p.1051

Exercice 7 Montrer que toute application $\varphi : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \varphi_k$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}$.

Indication : pour le caractère $\mathcal{C}^1$, utiliser le déterminant.

Point méthode (Méthode de variation des constantes)

La méthode de variation des constantes consiste à rechercher une solution de (E) sous la forme :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \varphi_k \quad \text{avec} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ des fonctions dérivables de } I \text{ dans } \mathbb{K}.$$

En reportant cette expression dans l'équation (E), on obtient, puisque $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont solutions de (E_0) :

$$(\varphi \text{ solution de } (\mathrm{E})) \iff \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k' \, \varphi_k = b \right). \qquad (\star)$$

Par liberté de la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, on peut alors identifier $\lambda_1', \dots, \lambda_n'$.

Le problème se réduit alors à primitiver $\lambda_1', \dots, \lambda_n'$.

Justification de l'équivalence ($\star$) ci-dessus
Pour tout $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k\right)'(t) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t)\, \varphi_k'(t) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k'(t)\, \varphi_k(t).\end{aligned}$$

Comme $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont solutions de (E_0), puis par linéarité de $a(t)$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t)\, \varphi_k'(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t)\, a(t) \cdot \varphi_k(t) = a(t) \cdot \varphi(t)$$

et donc finalement :

$$\varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k'(t)\, \varphi_k(t).$$

Ainsi on obtient l'équivalence :

$$\varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + b(t) \iff \sum_{k=1}^{n} \lambda_k'(t)\, \varphi_k(t) = b(t).$$

p.1052

Exercice 8 *Suite de l'exercice 5 de la page 1019*
Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1'(t) & = & x_1(t) & + & 2x_2(t) & + & e^{-t} \\ x_2'(t) & = & 2x_1(t) & + & x_2(t) & & \end{array}\right. \qquad \text{(Sys)}$$

Remarque Supposons que le second membre de l'équation (E) s'écrive :

$$b = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k.$$

La méthode de variation donne alors :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k \text{ solution de (E)}\right) \iff \Big(\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_k' = \alpha_k\Big).$$

Cela mène à une expression explicite des solutions de (E) :

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\mu_k + \int_{t_0}^{t} \alpha_k(s)\, \mathrm{d}s\right) \varphi_k(t) \quad \text{avec} \quad (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n.$$

II Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

L'équation différentielle linéaire :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t)$$

est dite **à coefficients constants** si la fonction $a : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ t & \longmapsto & a(t) \end{array}$ est constante. On identifie alors a à un élément de $\mathcal{L}(E)$ et l'on note l'équation :

$$x' = a \cdot x + b(t).$$

Si l'on dispose d'une base $\mathcal{B}$ de E et si A et $B(t)$ sont respectivement les matrices de a et $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}$, alors l'équation précédente s'écrit matriciellement :

$$X' = A\,X + B(t).$$

1 Résolution pratique de l'équation homogène

On s'intéresse dans cette partie à une équation homogène de la forme :

$$X' = A\,X \qquad (\mathrm{E}_0)$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'objectif est de présenter la méthode de résolution d'un tel système différentiel. Nous traitons trois situations, de difficulté croissante :

- A est diagonalisable ;
- A est à coefficients réels, diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$;
- A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

D'après le corollaire 6 de la page 1018, on sait déjà que l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_0) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Résoudre l'équation (E_0) revient donc à déterminer une base de $\mathcal{S}_0$.

Cas où A est diagonalisable

p.1052

Exercice 9

1. Soit V un vecteur propre de A ; notons λ la valeur propre associée. Montrer que la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ t & \longmapsto & e^{\lambda t} V \end{array}$ est l'unique solution du problème de Cauchy :
$$X' = AX \qquad \text{et} \qquad X(0) = V.$$
2. Supposons la matrice A diagonalisable. Soit $(V_1, \dots, V_n)$ une base de vecteurs propres de A et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la liste des valeurs propres associées.
Montrer qu'alors, en notant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:
$$\varphi_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ t & \longmapsto & e^{\lambda_k t} V_k \end{array}$$
la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}$.

Le cas où A est diagonalisable se révèle particulièrement simple : l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_0) s'obtient directement à partir des éléments propres de A.

Point méthode (Conséquence de l'exercice précédent)

Si la matrice A est diagonalisable, alors en notant $(V_1, \dots, V_n)$ une base de vecteurs propres et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la liste des valeurs propres associées, on obtient une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de l'espace $\mathcal{S}$ des solutions de (E_0) en prenant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:
$$\varphi_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda_k t} V_k. \end{array}$$

p.1053

Exercice 10 Résoudre le système différentiel $X' = AX$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarques

- Dans le cas où A est à coefficients réels, on peut s'intéresser aux solutions complexes ou réelles de l'équation. Lorsqu'il y a ambiguïté, on note $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ pour éviter toute confusion.
- Si A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et si $(V_1, \dots, V_n)$ est une base de vecteurs propres *réels*, alors les application $\varphi_k : t \mapsto e^{\lambda_k t} V_k$ du point méthode précédent sont à valeurs réelles. On a :
$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$
et la seule différence entre $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ réside alors dans les coefficients des combinaisons linéaires (qui sont ou bien complexes ou bien réels).

Cas où A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$, le paragraphe précédent nous fournit les solutions complexes, mais pas les solutions réelles.

p.1053

Exercice 11 Considérons une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$.

Montrer que, dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$, on a :

$$\mathrm{Vect}(\varphi, \overline{\varphi}) = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Re}(\varphi), \mathrm{Im}(\varphi)\right).$$

Point méthode

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$, on peut déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ des solutions réelles de (E_0) à partir de la diagonalisation de A.

1. On forme une base de vecteurs propres complexes de A telle que :
   - les vecteurs propres associés à des valeurs propres réelles appartiennent à $\mathbb{R}^n$;
   - vis-à-vis des valeurs propres non réelles, on forme des couples de vecteurs propres conjugués (*i.e.* de la forme $(V, \overline{V})$).
2. Dans la base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ évoquée par le point méthode de la page précédente, on voit alors apparaître :
   - pour les valeurs propres réelles, des applications de la forme $t \mapsto e^{\lambda t}V$, qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}^n$;
   - pour les valeurs propres non réelles, des couples de la forme $\left(t \mapsto e^{\lambda t}V, t \mapsto e^{\overline{\lambda} t}\overline{V}\right)$, c'est-à-dire de la forme $(\varphi, \overline{\varphi})$
3. On change les couples de la forme $(\varphi, \overline{\varphi})$ en $\left(\mathrm{Re}(\varphi), \mathrm{Im}(\varphi)\right)$.
   Le résultat de l'exercice 11 assure que la nouvelle famille ainsi obtenue est encore une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$. Cette base de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$:
   - est constituée de solutions de (E_0) à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, *i.e.* d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$,
   - étant libre dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, elle l'est également dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   donc, comme elle comporte n éléments et que $\dim \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = n$, c'est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.

p.1054

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le système différentiel $X' = AX$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cas où la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$

Point méthode

Dans le cas où A est seulement trigonalisable :

1. on trigonalise, c'est-à-dire qu'on écrit $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure ;
2. en posant $Y = P^{-1}X$ et en traduisant sur Y le système différentiel $X' = AX$, on obtient le système différentiel $Y' = TY$; ce système différentiel est triangulaire et on peut le résoudre ligne par ligne, du bas vers le haut ;
3. on obtient alors les solutions cherchées à l'aide de la relation $X = PY$.

Remarque Dans la démarche précédente :

- il n'est en aucun cas nécessaire de calculer P^{-1} ;
- lorsque l'on trigonalise A, on cherchera à obtenir la matrice triangulaire la plus simple possible afin d'obtenir le système différentiel $Y' = TY$ le plus simple possible.

p.1055

Exercice 13 Résoudre le système différentiel $X' = AX$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque La technique consistant à obtenir un système différentiel plus simple par réduction de la matrice A peut aussi s'appliquer pour un système différentiel avec second membre de la forme $X' = AX + B(t)$ (*cf.* exercice 17.4 de la page 1075).

2 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

Exponentielle d'un endomorphisme

On rappelle (*cf.* exercice 22 de la page 305) qu'il existe une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (a,b) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad \|a \circ b\| \leqslant \|a\| \, \|b\|$$

Nous utiliserons une telle norme dans la suite.

Proposition 7

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. La série de terme général $\dfrac{a^k}{k!}$ est absolument convergente.

Démonstration. La norme $\|\cdot\|$ utilisée sur $\mathcal{L}(E)$ étant sous-multiplicative, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \left\| \frac{a^k}{k!} \right\| \leqslant \frac{\|a\|^k}{k!}.$$

Donc, par comparaison, la convergence de la série $\sum \frac{\|a\|^k}{k!}$ (série numérique de l'exponentielle) donne celle de la série $\sum \left\| \frac{a^k}{k!} \right\|$. □

D'où la définition suivante.

Définition 3

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **exponentielle** de a et l'on note $\exp(a)$ ou e^a, la somme de la série absolument convergente :

$$\exp(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}.$$

Remarque Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(t \operatorname{Id}_E) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t \operatorname{Id}_E^k)}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right) \operatorname{Id}_E = e^t \operatorname{Id}_E .$$

En particulier, on a $\exp(0) = \operatorname{Id}_E$.

Exemple Si $a \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotente, et si $p \in \mathbb{N}$ est tel que $a^p = 0$, alors on a :

$$\forall k \geqslant p \quad a^k = 0 \quad \text{et donc} \quad \exp(a) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{a^k}{k!}.$$

Proposition 8

L'application $\exp : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ a & \longmapsto & \exp(a) \end{array}$ est continue.

Principe de démonstration. Montrer la convergence normale sur tout compact.

Démonstration page 1057

Proposition 9

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ t & \longmapsto & \exp(ta) \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) = a \circ \exp(t\,a) = \exp(t\,a) \circ a.$$

Principe de démonstration. Utiliser le théorème de dérivation des séries de fonctions.

Démonstration page 1057

Remarque On obtient par récurrence que l'application $\varphi : t \mapsto \exp(ta)$ de la proposition précédente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi^{(p)}(t) = a^p \circ \exp(ta) = \exp(tA) \circ a^p.$$

Exponentielle d'une matrice

Proposition 10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La série de terme général $\dfrac{A^k}{k!}$ est absolument convergente.

Définition 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **exponentielle** de A et l'on note $\exp(A)$ ou e^A, la somme de la série absolument convergente :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Remarque Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(t\,I_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\,I_n^k)}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\right) I_n = e^t I_n.$$

En particulier, on a $\exp(0) = I_n$.

Exemple Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, et si $p \in \mathbb{N}$ est tel que $A^p = 0$, on a :

$$\forall k \geqslant p \quad A^k = 0 \quad \text{et donc} \quad \exp(A) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{A^k}{k!}.$$

p.1058

Exercice 14 Montrer que si A est la matrice d'un endomorphisme a dans une base $\mathcal{B}$ de E, alors $\exp(A)$ est la matrice dans $\mathcal{B}$ de $\exp(a)$.

Les résultats suivants sont l'adaptation à l'exponentielle de matrices des propositions 8 et 9.

Proposition 11

L'application $\exp : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \exp(A) \end{array}$ est continue.

Proposition 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \exp(tA) \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)\,A.$$

Remarque Plus généralement, l'application $\varphi : t \mapsto \exp(tA)$ de la proposition précédente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi^{(p)}(t) = A^p \exp(tA) = \exp(tA)\,A^p.$$

Exemples de calculs

p.1058

Exercice 15

1. Soit $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale. Déterminer $\exp(A)$.
2. Même question si A est une matrice diagonalisable.

p.1059

Exercice 16 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 - 3A + 2I_n = 0$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer A^k en fonction de A et I_n.
2. En déduire l'expression de $\exp(A)$ en fonction de A et I_n.

Lien avec les systèmes différentiels à coefficients constants

Version vectorielle

Proposition 13

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ et $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$. L'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & E \\ & t & \longmapsto & \exp\left((t-t_0)\,a\right) \cdot x_0 \end{array}$$

est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$x' = a \cdot x \qquad \text{et} \qquad x(t_0) = x_0.$$

Démonstration. L'application φ est solution du problème de Cauchy considéré puisque :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) = \Big(a \circ \exp\left((t-t_0)\,a\right)\Big) \cdot x_0 = a \cdot \varphi(t)$$

$$\varphi(t_0) = \exp\left((t_0 - t_0)\,a\right) \cdot x_0 = \exp(0) \cdot x_0 = \mathrm{Id}_E \cdot x_0 = x_0.$$

D'après le théorème de Cauchy linéaire, c'est l'unique solution. □

Corollaire 14

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ et $x_0 \in E$. L'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & E \\ & t & \longmapsto & \exp(ta) \cdot x_0 \end{array}$$

est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy :

$$x' = a \cdot x \quad \text{et} \quad x(0) = x_0.$$

Version matricielle

Proposition 15 (Résolution d'un problème de Cauchy)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$. L'application :

$$\varphi : t \mapsto \exp\left((t-t_0)\,A\right) X_0$$

est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$X' = A\,X \qquad \text{et} \qquad X(t_0) = X_0.$$

Corollaire 16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$. L'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & t & \longmapsto & \exp(tA)\, X_0 \end{array}$$

est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy :

$$X' = A\,X \quad \text{et} \quad X(0) = X_0.$$

Propriétés classiques de l'exponentielle

On retrouve, par ces résultats, des propriétés classiques de « l'exponentielle ».

Version vectorielle

Proposition 17

Soit a un endomorphisme de E. On a alors :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \exp(t\,a) \circ \exp(s\,a) = \exp\big((t+s)\,a\big).$$

Démonstration page 1059

Corollaire 18

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme $\exp(t\,a)$ est inversible et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \exp(-t\,a) = \big(\exp(t\,a)\big)^{-1}.$$

Démonstration page 1060

Proposition 19

Soit a et b des endomorphismes de E qui commutent. Alors on a :

$$\exp(a) \circ \exp(b) = \exp\big(a+b\big) = \exp(b) \circ \exp(a).$$

Démonstration page 1060

Version matricielle

Proposition 20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \exp(t\,A)\,\exp(s\,A) = \exp\big((t+s)\,A\big).$$

Corollaire 21

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $\exp(t\,A)$ est inversible et l'on a :

$$\big(\exp(t\,A)\big)^{-1} = \exp(-t\,A).$$

Proposition 22

Soit A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $A\,B = B\,A$. Alors on a :

$$\exp(A)\exp(B) = \exp\big(A+B\big) = \exp(B)\exp(A).$$

Expression explicite des solutions à un problème de Cauchy

p.1060

Exercice 17 On considère une équation différentielle à coefficients constants :

$$(\mathrm{E}) \ : \ x' = a \cdot x + b(t) \quad \text{avec} \quad a \in \mathcal{L}(E) \quad \text{et} \quad b \in \mathcal{C}(I, E).$$

Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. Montrer que le problème de Cauchy :

$$x' = a \cdot x + b(t) \qquad \text{et} \qquad x(t_0) = x_0$$

admet comme unique solution :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & I & \longrightarrow & E \\ & t & \longmapsto & \exp\big((t-t_0)a\big) \cdot x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \exp\big((t-s)\,a\big) \cdot b(s)\,\mathrm{d}s. \end{array}$$

Remarque L'expression explicite des solutions obtenue dans l'exercice précédent n'est pas d'un grand intérêt pratique, car il est souvent plus pratique de réduire la matrice associée à a que de calculer son exponentielle.
En revanche, elle peut se révéler utile dans certains exercices théoriques (*cf.* exercice 17.15 de la page 1077).

III Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n

On suppose ici que n est un entier naturel non nul.
Le cas $n = 1$ a été étudié en première année, ainsi que celui des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants.

1 Définition

Définition 5

Soit $(a_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ une famille de n applications continues de I dans $\mathbb{K}$ et b une application continue de I dans $\mathbb{K}$. On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre** n une équation de la forme :

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, x^{(k)} = b(t). \qquad (\mathrm{E})$$

On appelle **solution** de l'équation différentielle linéaire (E) toute application n fois dérivable $\varphi : I \to \mathbb{K}$ vérifiant :

$$\forall t \in I \quad \varphi^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, \varphi^{(k)}(t) = b(t).$$

- L'application $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ s'appelle le **second membre** de (E).
- On dit que l'équation (E) est à **coefficients constants** si toutes les fonctions a_k sont constantes et qu'elle est **homogène** ou **sans second membre** si $b = 0$.
- On appelle **équation homogène** associée à (E), l'équation :

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x^{(k)} = 0 \qquad (\mathrm{E}_0)$$

Remarque L'équation (E) dans la définition 5 de la page ci-contre est écrite sous une forme dite **résolue**, ce qui signifie que le coefficient devant $x^{(n)}$ vaut 1. Si une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n apparaît sous une forme **non résolue**, c'est-à-dire :

$$\alpha_n(t)\, x^{(n)} + \alpha_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0(t)\, x = b(t).$$

alors :

- si la fonction α_n ne s'annule pas sur I, on divise par α_n pour se ramener à une forme résolue ;
- sinon, le problème est plus délicat : quelques exemples de telles équations seront vus dans la partie V.

p.1061

Exercice 18 *Régularité des solutions*

Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que si les applications $a_0, \ldots, a_{n-1}, b$ sont de classe $\mathcal{C}^p$, alors toute solution de (E) est de classe $\mathcal{C}^{n+p}$.

Remarque En particulier, puisque les applications $a_0, \ldots, a_{n-1}, b$ sont *a minima* supposées continues, toute solution de (E) est de classe $\mathcal{C}^n$.

2 Traduction sous la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1

Nous reprenons ici les notations de la définition 5 de la page précédente.
Considérons les applications $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ définies par :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Remarque Pour tout t, la matrice $A(t)$ est la transposée de la matrice compagnon (*cf.* page 81) du polynôme $X^n + a_{n-1}(t)X^{n-1} + \cdots + a_0(t)$.

Les applications A et B ainsi définies permettent de traduire l'équation différentielle scalaire (E) sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1.

Proposition 23

Une fonction $\varphi : I \to \mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, l'application $\Phi : t \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ est solution du système différentiel d'ordre 1 :

$$X' = A(t)X + B(t). \qquad \text{(EM)}$$

Démonstration page 1061

La proposition précédente ramène ainsi l'étude des équations différentielles scalaires d'ordre n à celle des systèmes différentiels du premier ordre. Les résultats qui suivent sont donc des conséquences immédiates de ceux établis dans la partie I.

Propriétés linéaires

Proposition 24 (Structure de l'ensemble des solutions)

- L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (E_0) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.
- Si φ_P est une solution de (E), alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de l'équation de (E) est le sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ passant par φ_P et de direction $\mathcal{S}_0$:

$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_0.$$

Proposition 25 (Principe de superposition)

Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ et $(b_1, b_2) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^2$ tels que $b = \alpha_1\, b_1 + \alpha_2\, b_2$.

Si φ_1 et φ_2 sont respectivement solutions des équations :

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, x^{(k)} = b_1(t)$$

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, x^{(k)} = b_2(t)$$

alors la fonction $\alpha_1\, \varphi_1 + \alpha_2\, \varphi_2$ est solution de (E).

Problème de Cauchy

Reprenons les notations de la proposition 23 de la page ci-contre.
Le théorème de Cauchy linéaire pour les systèmes différentiels nous assure que pour tout couple $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution Φ au système différentiel (EM) vérifiant la condition initiale :

$$\Phi(t_0) = X_0.$$

Puisque $\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} \varphi(t_0) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$, on constate que fixer une condition initiale de la forme $\Phi(t_0) = X_0$ revient à fixer les valeurs de $\varphi(t_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0)$.
Cela mène à la version suivante du théorème de Cauchy linéaire :

Théorème 26 (Théorème de Cauchy linéaire)

Pour tout $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$, il existe une et une seule solution φ de (E) vérifiant :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \varphi^{(k)}(t_0) = x_k.$$

Exemple Sans calculs, le théorème de Cauchy linéaire assure l'existence et l'unicité de la solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy suivant :

$$x'' + \sin(t)\, x' + \cos(t)\, x = t \qquad \text{et} \qquad \big(x(0), x'(0)\big) = (1, 0).$$

Espace des solutions de l'équation homogène

Proposition 27

Soit $t_0 \in I$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \varphi & \longmapsto & \big(\varphi(t_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Corollaire 28

L'espace $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) est de dimension n.

p.1062

Exercice 19 On s'intéresse à une équation différentielle linéaire scalaire homogène à coefficients constants :

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, x^{(k)} = 0. \qquad (\mathrm{E}_0)$$

1. Montrer que, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$ est solution de (E_0) si, et seulement si, λ est racine du polynôme :
$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$
2. En déduire que si le polynôme P est scindé à racines simples $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_0) est :
$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n}\right).$$

IV Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Nous étudions dans ce qui suit une équation linéaire scalaire du second ordre de la forme :

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \qquad (\mathrm{E})$$

où a_0, a_1 et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. Cette équation étant un cas particulier des équations linéaire scalaire d'ordre n évoquées dans la partie précédente, on a les propriétés suivantes :

- l'équation (E) s'interprète sous la forme du système différentiel :
$$X' = A(t)X + B(t) \qquad (\mathrm{EM})$$
avec, pour tout $t \in I$:
$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$
- l'espace vectoriel $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) est de dimension 2 ;
- si φ_P est une solution de (E), alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est :
$$\mathcal{S} = \varphi_P + \mathcal{S}_0 \ ;$$
- le théorème de Cauchy linéaire assure l'existence et l'unicité d'une solution φ de (E) vérifiant une condition initiale de la forme :
$$(\varphi(t_0), \varphi'(t_0)) = (x_0, x_1) \quad \text{avec} \quad (t_0, x_0, x_1) \in I \times \mathbb{K}^2.$$

1 Wronskien

Définition et propriétés

Définition 6

Soit φ_1, φ_2 deux solutions de l'équation homogène (E_0).
On appelle **wronskien** de la famille (φ_1, φ_2) l'application :

$$\begin{array}{rccl} W_{\varphi_1,\varphi_2} : & I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Remarque On a :

$$\forall t \in I \quad W_{\varphi_1,\varphi_2}(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\,\varphi_2(t).$$

Comme φ_1 et φ_2 sont solutions de (E_0), elles sont deux fois dérivables, donc W_{φ_1,φ_2} est dérivable. De plus, sa dérivée se simplifie ainsi :

$$W'_{\varphi_1,\varphi_2} = \varphi_1\,\varphi_2'' - \varphi_1''\,\varphi_2.$$

Proposition 29

Le wronskien d'un couple $(\varphi_1, \varphi_2) \in (\mathcal{S}_0)^2$ est solution sur I de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

$$x' + a_1(t)\,x = 0.$$

Démonstration page 1062

Remarque Si l'équation différentielle considérée est de la forme :

$$(\mathrm{E}) \ : \ x'' + q(t)x = 0 \quad \text{avec} \quad q : I \to \mathbb{K} \text{ une fonction continue,}$$

alors le wronskien W_{φ_1,φ_2} d'un couple $(\varphi_1, \varphi_2) \in (\mathcal{S}_0)^2$ vérifie $W'_{\varphi_1,\varphi_2} = 0$ et donc, I étant un intervalle, il est constant sur I.

Le wronskien de $(\varphi_1, \varphi_2) \in (\mathcal{S}_0)^2$, en tant que solution d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 1 :

- ou bien est la fonction nulle ;
- ou bien ne s'annule pas sur I.

Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 30

Soit φ_1 et φ_2 des solutions de (E_0). Notons W le wronskien de (φ_1, φ_2). Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) (φ_1, φ_2) est une base de $\mathcal{S}_0$;

(ii) $\exists t \in I \quad W(t) \neq 0$;

(iii) $\forall t \in I \quad W(t) \neq 0$.

Démonstration page 1063

p.1063

Exercice 20 Justifier que les fonctions $\varphi_1 : t \mapsto \cos(t)$ et $\varphi_2 : t \mapsto t$ ne sont pas solutions sur $\mathbb{R}$ d'une même équation différentielle linéaire homogène de la forme :

$$x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = 0 \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ continues sur } \mathbb{R}.$$

Utilisation du wronskien

Connaissant une solution non nulle de l'équation homogène (E_0), l'utilisation du wronskien permet en général de terminer la résolution de (E_0).

Point méthode

Supposons connue une solution φ_1 de (E_0). Comme $\dim(\mathcal{S}_0) = 2$, il reste à déterminer une solution non proportionnelle à φ_1.

- Pour $\varphi \in \mathcal{S}_0$, l'équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre vérifiée par le wronskien W de (φ_1, φ) permet d'en obtenir une expression, à une constante proportionnelle près.
- Sur un intervalle où φ_1 ne s'annule pas, on peut considérer la fonction $\left(\dfrac{\varphi}{\varphi_1}\right)$ dont la dérivée est donnée par :

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)' = \frac{\varphi'\,\varphi_1 - \varphi\,\varphi_1'}{\varphi_1^2} = \frac{W}{\varphi_1^2}.$$

En primitivant, on obtient alors une expression de $\dfrac{\varphi}{\varphi_1}$ puis de φ comme combinaison linéaire de deux fonctions.

Mise en oeuvre sur un exemple

Supposons que l'on souhaite résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_0) \ : \ x'' + \frac{x'}{t} - \frac{x}{t^2} = 0,$$

et que l'on a déjà constaté que la fonction $\varphi_1 : t \mapsto t$ est solution. On sait que l'espace $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E_0) est de dimension 2. Pour terminer la résolution il reste donc à obtenir une solution non proportionnelle à φ_1.

- Soit φ une solution de (E_0). Le wronskien W de la famille (φ_1, φ) est solution sur I de l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$x' + \frac{1}{t}\,x = 0.$$

En résolvant cette équation, on obtient $W(t) = \dfrac{\lambda}{t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

D'autre part, comme φ_1 ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, on peut considérer la fonction $\left(\dfrac{\varphi}{\varphi_1}\right)$ dont la dérivée vérifie :

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)' = \frac{\varphi'\,\varphi_1 - \varphi\,\varphi_1'}{\varphi_1^2} = \frac{W}{\varphi_1^2}.$$

Ainsi, on a :

$$\forall t \in]0, +\infty[\quad \left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)' = \frac{\lambda}{t^3}.$$

Il en résulte qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in]0, +\infty[$:

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)} = -\frac{\lambda}{2t^2} + \mu \qquad \text{puis} \qquad \varphi(t) = -\frac{\lambda}{2t} + \mu t.$$

On a donc $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$ avec $\varphi_2 : t \mapsto \dfrac{1}{t}$.

- On peut alors conclure la résolution de (E_0) par différents arguments.
  - ∗ **Premier argument.** Il est facile de vérifier que la fonction φ_2 est solution de (E_0) et que φ_1 et φ_2 sont non proportionnelles. Par suite, comme $\dim \mathcal{S}_0 = 2$, on a nécessairement $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$.
  - ∗ **Second argument.** Dans la première partie du raisonnement on a obtenu :

$$\mathcal{S}_0 \subset \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2).$$

Comme $\dim \mathcal{S}_0 = 2$, on a nécessairement $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$ (et, sans avoir besoin de le vérifier, on peut affirmer que φ_2 est une solution de (E_0) et qu'elle est linéairement indépendante de φ_1).

Remarque L'exemple précédent est favorable car la solution φ_1 dont on est parti ne s'annule pas sur l'intervalle de résolution. Il peut arriver que cette fonction φ_1 s'annule, auquel cas il faut se restreindre à un sous-intervalle $J \subset I$ sur lequel elle ne s'annule pas. La relation :

$$\forall t \in J \quad \varphi = \lambda\,\varphi_1(t) + \mu\,\varphi_2(t)$$

obtenue ne permet pas de conclure directement ; en revanche, si φ_2 est définie sur I tout entier et que l'on pense qu'elle est solution, alors il est facile de le montrer (*cf.* exercice suivant).

p.1064

Exercice 21 On souhaite résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle homogène :

$$(\mathrm{E}_0) \ : \ x'' + \frac{2}{t}\,x' + x = 0.$$

1. Vérifier que la fonction $\varphi_1 : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est solution.
2. En utilisant le wronskien, terminer la résolution de (E_0).

Remarque La solution $\varphi : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ de (E_0) peut s'obtenir par technique « recherche de solutions développables en série entière » (*cf.* exemple de la page de la page 1041).

Méthode alternative à la méthode précédente : variation de la constante
Connaissant une solution non nulle φ_1 de l'équation homogène (E_0), on dispose d'une méthode alternative à la méthode précédente, appelée *méthode de variation de la constante*.
Elle consiste à rechercher d'autres solutions de (E_0) sous la forme :

$$\varphi = \lambda\,\varphi_1 \quad \text{avec } \lambda \text{ une fonction deux fois dérivable.}$$

On a alors :

$$\varphi' = \lambda'\,\varphi_1 + \lambda\,\varphi_1' \qquad \text{et} \qquad \varphi'' = \lambda''\,\varphi_1 + 2\,\lambda'\,\varphi_1' + \lambda\,\varphi'',$$

puis, lorsque l'on injecte φ dans l'équation (E_0), le fait que φ_1 soit solution nous mène à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en λ'. Sur un intervalle où φ_1 ne s'annule pas, on peut alors déterminer λ et obtenir une expression de φ.
Cette méthode de variation de la constante ne figure pas au programme.

2 Recherche d'une solution particulière : méthode de variation des constantes

Nous allons ici adapter la méthode (*cf.* point méthode de la page 1020) visant, pour un système différentiel d'ordre 1, à déterminer une solution particulière connaissant une base de l'espace des solutions de l'équation homogène associée.
Rappelons que l'équation (E) s'interprète matriciellement (*cf.* page 1034) :

$$X' = A(t)X + B(t) \qquad \text{(EM)}$$

Supposons connue (φ_1, φ_2) une base de l'espace $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (E_0). Alors, les applications :

$$\Phi_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Phi_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}$$

forment une base de l'espace des solutions du système différentiel homogène :

$$X' = A(t)X \qquad (\mathrm{EM}_0)$$

La méthode de variation des constantes consiste alors à chercher une solution particulière de (EM) sous la forme :

$$\Phi = \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 \quad \text{avec } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ dérivables de } I \text{ dans } \mathbb{K},$$

et l'on a :

$$(\Phi \text{ solution de (EM)}) \iff \lambda_1' \Phi_1 + \lambda_2' \Phi_2 = B$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1' \varphi_1 + \lambda_2' \varphi_2 &= 0 \\ \lambda_1' \varphi_1' + \lambda_2' \varphi_2' &= b. \end{cases}$$

Puisque la famille (φ_1, φ_2) est une base de $\mathcal{S}_0$, son wronskien ne s'annule pas. Donc, pour tout $t \in I$, le système :

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)\,\varphi_1(t) + \lambda_2'(t)\,\varphi_2(t) &= 0 \\ \lambda_1'(t)\,\varphi_1'(t) + \lambda_2'(t)\,\varphi_2'(t) &= b(t) \end{cases}$$

permet de déterminer $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$. Puis, en primitivant, on obtient une solution Φ de (EM). Cela fournit une solution de (E) car la solution Φ de (EM) obtenue est de la forme $\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}$ avec φ une solution de (E).

Point méthode (Méthode de variation des constantes)

Si l'on connaît une base (φ_1, φ_2) de l'espace des solutions de (E_0), alors on peut rechercher une solution particulière de (E) sous la forme :

$$\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \quad \text{avec } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ dérivables sur } I.$$

Une telle fonction φ est solution de (E) si, et seulement si :

$$\begin{cases} \lambda_1' \varphi_1 + \lambda_2' \varphi_2 &= 0 \\ \lambda_1' \varphi_1' + \lambda_2' \varphi_2' &= b \end{cases}$$

On peut alors déterminer λ_1' et λ_2', puis λ_1 et λ_2 par calcul de primitives.

Exemple Intéressons-nous sur $]0, +\infty[$ à l'équation différentielle suivante :

$$(\mathrm{E}) \ : \ x'' + \frac{1}{t}\,x' - \frac{1}{t^2}\,x = \frac{4\ln t}{t}\cdot$$

L'équation homogène a été résolue précédemment (*cf.* exemple de la page 1036) :

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{avec} \quad \varphi_1 : t \mapsto t \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto \frac{1}{t}\cdot$$

Cherchons une solution particulière sous la forme $\varphi = \lambda_1\,\varphi_1 + \lambda_2\,\varphi_2$.
Une telle fonction φ est solution si, et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1'\,\varphi_1 + \lambda_2'\,\varphi_2 & = & 0 \\ \lambda_1'\,\varphi_1' + \lambda_2'\,\varphi_2' & = & \left(t \mapsto \frac{4\ln t}{t}\right) \end{array}\right.$$

ce qui se traduit par :

$$\forall t \in]0,+\infty[\quad \left\{\begin{array}{rcl} t\,\lambda_1'(t) + \dfrac{1}{t}\,\lambda_2'(t) & = & 0 \\ \lambda_1'(t) - \dfrac{1}{t^2}\,\lambda_2'(t) & = & \dfrac{4\,\ln t}{t} \end{array}\right.$$

et mène à :

$$\forall t \in]0,+\infty[\quad \lambda_1'(t) = \frac{2\,\ln t}{t} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2'(t) = -2\,t\,\ln t.$$

Après primitivation, on peut choisir :

$$\lambda_1 \ : \ t \mapsto \ln^2 t \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 : t \mapsto \frac{t^2}{2} - t^2\,\ln t,$$

et obtenir la solution de (E) donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (\ln^2 t)\,t + \left(\frac{t^2}{2} - t^2\,\ln t\right)\frac{1}{t} \\ &= t\,\ln^2 t - t\,\ln t + \frac{t}{2}\cdot \end{aligned}$$

On peut alors conclure la résolution de (E). Les solutions réelles de (E) sont les fonctions de la forme :

$$\begin{array}{ccccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} & & \text{avec} \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2. \\ t & \longmapsto & t\,\ln^2 t - t\,\ln t + \dfrac{t}{2} + \lambda\,t + \dfrac{\mu}{t} & & \end{array}$$

p.1065

Exercice 22 Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \ : \ x'' + \frac{2}{t}\,x' + x = t.$$

sachant qu'il a été obtenu à l'exercice 21 que l'espace des solutions de l'équation homogène est :

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}(\varphi_1,\varphi_2) \quad \text{avec} \quad \varphi_1 : t \mapsto \frac{\sin t}{t} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto \frac{\cos t}{t}\cdot$$

3 Techniques classiques d'obtention d'une solution de l'équation homogène

Lorsque l'on cherche à résoudre une équation différentielle de la forme :

$$x'' + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = b(t), \qquad \text{(E)}$$

ce qui a été fait précédemment nous dit que :

- à partir d'une solution non nulle de l'équation homogène (E_0), la méthode du wronskien permet de terminer la résolution de (E_0) ;
- à partir d'une base de $\mathcal{S}_0$, la méthode de variation des constantes permet d'obtenir une solution particulière et ainsi d'achever la résolution de (E).

Par conséquent, il apparaît que l'étape manquante est l'obtention d'une solution non nulle de l'équation homogène (E_0). Il n'existe pas méthode systématique pour déterminer une telle solution.
L'objet de cette partie est de présenter quelques techniques pouvant se révéler utiles. Ces techniques ne sont pas réservées aux équations d'ordre 2 et peuvent être mises en place pour des équations d'ordre supérieur.

Recherche de solutions « simples »

Selon l'allure de l'équation, il peut être pertinent de rechercher une solution sous une forme explicite : fonctions polynomiales, exponentielles, trigonométriques, ...

p.1065

Exercice 23 *Recherche d'une solution polynomiale*

Considérons sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène :

$$\left(t^2+2t-1\right)x'' + \left(t^2-3\right)x' - (2t+2)\,x = 0. \qquad (\mathrm{E}_0)$$

1. Soit $t \mapsto P(t)$ une solution polynomiale non nulle de (E_0).
   Montrer que $\deg(P) = 2$.
2. Obtenir alors toutes les fonctions polynomiales solutions de (E_0).

Recherche de solutions développables en série entière

Exemple Considérons sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène :

$$(\mathrm{E}_0) \ : \ t\,x'' + 2\,x' + t\,x = 0.$$

Recherchons les solutions de (E_0) développables en série entière.

- Dans un premier temps, supposons que φ soit une solution de (E_0) développable en série entière sur un intervalle de la forme $]-r,r[$ avec $r>0$.
  Pour $t \in]-r,r[$, on a :

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad \varphi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n t^{n-1} \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}.$$

En reportant dans l'équation (E_0), on a, pour tout $t \in]-r, r[$:

$$t \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n\, t^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + t \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n = 0.$$

puis en réindexant les sommes pour obtenir dans chacune d'entre elles des t^n :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}\, t^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}\, t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}\, t^n = 0,$$

ce qui donne, en regroupant les sommes :

$$2\, a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1}\big)t^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients :

$$a_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1 \quad (n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1} = 0. \tag{$\star$}$$

Il en résulte que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, a_0.$$

Par suite, on a :

$$\varphi(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n}.$$

- Réciproquement :
  - le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n}$ vaut $+\infty$ (on le montre par exemple par le critère de d'Alembert) ;
  - la fonction :
    $$\varphi_1 \ : \ t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n}$$
    est telle que ses coefficients vérifient la propriété $(\star)$, et par suite, d'après les calculs effectués dans la première partie du raisonnement, φ est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$.
  - On peut simplifier l'expression de cette solution φ_1 en remarquant que :
    $$\forall t \in \mathbb{R} \quad t\,\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n+1} = \sin t,$$
    et donc finalement :
    $$\varphi(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(t) = \frac{\sin t}{t}\cdot$$

Remarque L'équation différentielle considérée dans cet exemple est la même que celle de l'exercice 21 de la page 1038, à ceci près que, dans l'exercice 21, elle n'a été considérée que sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et a été mise sous forme résolue.

p.1066

Exercice 24 Considérons, sur $\mathbb{R}$, l'équation homogène :

$$(\mathrm{E}_0) \ : \ 4\,t\,x'' + 2x' - x = 0.$$

1. Déterminer une solution φ_1 de (E_0) développable en série entière vérifiant $\varphi_1(0) = 1$.
2. On se place dans cette question sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   (a) Exprimer φ_1 à l'aide de la fonction ch.
   (b) À l'aide de la méthode du wronskien, conclure la résolution de (E_0).
3. On se place dans cette question sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.
   (a) Exprimer φ_1 à l'aide de la fonction cos.
   (b) À l'aide de la méthode du wronskien, conclure la résolution de (E_0).

Remarque La résolution sur $\mathbb{R}$ tout entier de l'équation (E) de l'exercice précédent est faite à l'exercice 29 de la page 1046.

Changement de variables

Dans certains cas, l'équation différentielle (E) se traduit de manière plus simple sur une fonction de la forme $u \mapsto x(\theta(u))$ (idéalement, une équation à coefficients constants). La résolution de cette équation plus simple peut permettre d'en déduire les solutions de l'équation initiale.
Cette technique n'est pas réservée aux équations homogènes. Pour preuve, l'équation considérée dans l'exemple ci-dessous n'est pas homogène.

Exemple Considérons, sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$(\mathrm{E}) \ : \ t^2\,x'' + 3\,t\,x' + 4\,x = t\ln t.$$

Raisonnons par analyse-synthèse.

- *Analyse.* Soit f une solution de (E).
  * Considérons la fonction :

$$\begin{array}{rccc} g \ : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & f(e^u). \end{array}$$

  Comme f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$g'(u) = e^u f'(e^u) \qquad \text{et} \qquad g''(u) = e^u f'(e^u) + (e^u)^2 f''(e^u).$$

  On constate alors que, pour $u \in \mathbb{R}$:

$$g''(u) + 2\,g'(u) + 4\,g(u) = (e^u)^2 f''(e^u) + 3\,e^u\,f'(e^u) + 4\,f(e^u).$$

  La fonction f étant solution de (E), on obtient, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$g''(u) + 2\,g'(u) + 4\,g(u) = u\,e^u,$$

et donc la fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(\widetilde{E}) \ : \ x'' + 2\,x' + 4\,x = u\,e^u.$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on sait résoudre. Après l'avoir résolue, on en déduit qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$g(u) = a\,e^{-u}\cos\left(\sqrt{3}\,u\right) + b\,e^{-u}\sin\left(\sqrt{3}\,u\right) + \frac{7u-4}{49}\,e^u.$$

∗ Revenons sur la fonction f. Pour tout $t \in]0,+\infty[$, on a :

$$f(t) = f\left(e^{\ln t}\right) = g(\ln t).$$

Par suite, on obtient l'expression suivante de $f(t)$ pour $t \in]0,+\infty[$:

$$f(t) = \frac{a}{t}\cos\left(\sqrt{3}\ln t\right) + \frac{b}{t}\sin\left(\sqrt{3}\,\ln t\right) + \frac{7t\ln t - 4t}{49}.$$

- *Synthèse.* Réciproquement, on vérifie que toute fonction f de la forme ci-dessus est bien solution de (E).

Remarque La partie « synthèse » du raisonnement précédent ne présente pas de difficulté car il suffit de vérifier que les fonctions f considérées sont deux fois dérivables et qu'elles vérifient l'équation différentielle (E). Néanmoins, il est possible d'éviter cette vérification grâce à notre connaissance de la structure de l'ensemble des solutions de (E).
En effet, (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et, puisque l'on travaille sur $]0,+\infty[$, on peut la mettre sous forme résolue. On sait donc que l'ensemble $\mathcal{S}$ de ses solutions est un sous-espace affine de dimension 2.
La partie « analyse » du raisonnement prouve que $\mathcal{S} \subset \varphi_P + \mathrm{Vect}\left(\varphi_1,\varphi_2\right)$ avec :

$$\varphi_P \ : \ t \mapsto \frac{t\ln t}{7} - \frac{4\,t}{49}, \quad \varphi_1 \ : \ t \mapsto \frac{1}{t}\cos\left(\sqrt{3}\,\ln t\right) \quad \text{et} \quad \varphi_2 \ : \ t \mapsto \frac{1}{t}\sin\left(\sqrt{3}\,\ln t\right).$$

Un argument de dimension prouve alors que l'inclusion obtenue est en fait une égalité :

$$\mathcal{S} = \varphi_P + \mathrm{Vect}(\varphi_1,\varphi_2).$$

Remarque culturelle On appelle **équation d'Euler** une équation différentielle linéaire de la forme :

$$a_n\,t^n\,x^{(n)} + a_{n-1}\,t^{n-1}\,x^{(n-1)} + \cdots + a_0\,x = h(t) \quad \text{avec} \quad a_n \neq 0.$$

Comme dans l'exemple précédent, une telle équation peut être ramenée, par un changement de variable en $t = e^u$, à une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

p.1068

Exercice 25 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \ : \ (1+t^2)^2\,x'' + 2\,(t+1)(1+t^2)\,x' + x = 0.$$

Indication : on pourra exploiter le changement de variable $t = \tan u$.

Approfondissement Devant une équation différentielle de la forme :

$$a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = b(t),$$

pour laquelle on pense qu'un changement de variable est pertinent, pour rechercher quelle fonction de la forme $g : u \mapsto f(\theta(u))$ considérer, on peut écrire :

$$g''(u) = \theta'(u)^2\, f''(\theta(u)) + \theta''(u)\, f'(\theta(u))$$

et remarquer que, si $\theta'(u)^2 = a(\theta(u))$, alors le caractère solution de f :

$$a(t)\, f''(t) + b(t)\, f'(t) + c(t)\, f(t) = d(t),$$

se traduit sur g par une équation débutant par :

$$g''(u) + \cdots$$

Cela n'assure en rien que les autres termes de l'équation s'arrangent correctement, mais c'est déjà un bon début...

V Exemples de résolution d'équations non résolues

Étant donné une équation différentielle linéaire scalaire de la forme :

$$a_n(t)\,x^{(n)} + \cdots + a_0(t)\,x = b(t), \tag{E}$$

si la fonction a_n ne s'annule pas sur l'intervalle I de résolution, alors en divisant pas $a_n(t)$, on se ramène à une équation sous forme résolue et on sait alors que l'ensemble solution est de la forme $y_P + \mathcal{S}_0$, l'espace $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène étant de dimension n ; de telles équations ont été traitées dans la partie III.
L'objectif de cette partie est de traiter quelques exemples d'équations ne pouvant être mises sous forme résolue.
Le plan d'étude d'équations non résolues sera en général le suivant :

Point méthode (Étude d'une équation non résolue)

Pour résoudre une équation linéaire de la forme $a_n(t)x^{(n)} + \cdots + a_0(t)x = b$ lorsque la fonction a_n possède des points d'annulation :

- on commence par résoudre l'équation sur tout intervalle sur lequel a_n ne s'annule pas ;
- on cherche ensuite, par analyse-synthèse, les solutions sur l'intervalle entier.

Pour des équations différentielles linéaires non résolues subsistent :

- le principe de superposition
- l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel ;
- la structure de l'ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \varphi_P + \mathcal{S}_0$, où φ_P est une solution particulière ;

En revanche, certaines propriétés ne sont plus vérifiées :

- la dimension de $\mathcal{S}_0$ n'est pas nécessairement égale à l'ordre de l'équation ;
- l'existence et l'unicité de la solution à un problème de Cauchy n'est plus assurée : il peut ne pas y avoir de solution, ou en exister une infinité.

p.1069

Exercice 26 Considérons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ t\,x' - 2\,x = t^3.$$

1. Donner les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ et sur $]0,+\infty[$.
2. Si φ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, prouver que φ est de la forme :
$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda\,t^2 + t^3 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \mu\,t^2 + t^3 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Conclure.

p.1070

Exercice 27 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ t^2\,x' - x = 0.$$

p.1070

Exercice 28 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ (1-t)\,x' - x = t$$

p.1071

Exercice 29 *Suite de l'exercice 24 de la page 1043*

Considérons l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_0) \ : \ 4\,t\,x'' + 2\,x' - x = 0.$$

On a vu à l'exercice 24 que :

- sur $]-\infty,0[$, les solutions sont données par :
$$t \mapsto \lambda_1 \cos\left(\sqrt{-t}\right) + \lambda_2 \sin\left(\sqrt{-t}\right) \quad \text{avec} \quad (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \ ;$$
- sur $]0,+\infty[$, les solutions sont données par :
$$t \mapsto \mu_1 \operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right) + \mu_2 \operatorname{sh}\left(\sqrt{t}\right) \quad \text{avec} \quad (\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Résoudre l'équation (E_0) sur $\mathbb{R}$.

Annexe : démonstration du théorème de Cauchy linéaire

On munit E et $\mathcal{L}(E)$ de normes, toutes deux notées $\|\cdot\|$

Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}(I, E)$ et $(t_0, x_0) \in I \times E$. On cherche à prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \qquad \text{et} \qquad x(t_0) = x_0. \tag{$\mathcal{P}$}$$

Remarque L'espace E étant de dimension finie, il en est de même pour $\mathcal{L}(E)$, si bien que l'application bilinéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) \times E & \longrightarrow & E \\ (u, x) & \longmapsto & u \cdot x \end{array}$$

est continue. Plus précisément (*cf.* le corollaire 25 de la page 304), il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (u, x) \in \mathcal{L}(E) \times E \quad \|u \cdot x\| \leqslant k \|u\| \|x\|, \tag{$\star$}$$

Cette inégalité $(\star)$ sera utilisée dans la suite.

Le résultat de l'exercice suivant sera utilisé dans la preuve.

p.1072

Exercice 30 Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I à valeurs dans E telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I \quad z_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} a(u) \cdot z_n(u) \, \mathrm{d}u.$$

Le but est de prouver que la série de fonctions $\sum z_n$ converge normalement sur tout segment de I. Soit K un segment inclus dans I.

1. Justifier l'existence de deux constantes M, α telles que :
$$\forall u \in K \quad \|z_0(u)\| \leqslant M \quad \text{et} \qquad \|a(u)\| \leqslant \alpha.$$
2. Montrer que :
$$\forall t \in K \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|z_n(t)\| \leqslant M \frac{\left(k\,\alpha\,|t - t_0|\right)^n}{n!}.$$
3. En déduire que la série $\sum z_n$ converge normalement sur K.

Preuve de l'unicité

p.1073

Exercice 31

1. Montrer que si $h : I \to E$ est une fonction continue vérifiant :
$$\forall t \in I \quad h(t) = \int_{t_0}^{t} a(u) \cdot h(u)\,\mathrm{d}u,$$
alors h est l'application nulle.
2. En déduire qu'il existe au plus une solution au problème de Cauchy $(\mathcal{P})$.

Preuve de l'existence

p.1074

Exercice 32 Définissons (w_n) une suite de fonctions sur I par :
$$\forall t \in I \quad w_0(t) = x_0$$
puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall t \in I \quad w_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(a(s) \cdot w_n(s) + b(s)\big)\mathrm{d}s.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (w_n) converge uniformément sur tout segment de I.
Indication : on pourra considérer la série $\sum z_n$ *avec* $z_n = w_{n+1} - w_n$.
2. Montrer que la limite φ de (w_n) est solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P})$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Supposons que a et b sont de classe $\mathcal{C}^k$. Soit φ une solution de (E).

Si φ n'est pas de classe $\mathcal{C}^k$, alors il existe $p < k$ tel que φ soit de classe $\mathcal{C}^p$ mais pas de classe $\mathcal{C}^{p+1}$.

Comme a et φ sont de classe $\mathcal{C}^p$, et par bilinéarité de l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) \times E & \longrightarrow & E \\ (u, e) & \longmapsto & u \cdot e, \end{array}$$

l'application $t \mapsto a(t) \cdot \varphi(t)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^p$. Mais alors, la relation :

$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + b(t)$$

entraîne que φ' est de classe $\mathcal{C}^p$, et contredit le fait que φ n'est pas de classe $\mathcal{C}^{p+1}$.

Proposition 1

- Si $\varphi \in \mathcal{C}(I, E)$ est solution de (E), alors φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie :

  $$\forall s \in I \quad \varphi'(s) = a(s) \cdot \varphi(s) + b(s) \qquad \text{et} \qquad \varphi(t_0) = x_0.$$

  Alors, pour tout $t \in I$, on obtient, en intégrant entre t_0 et t :

  $$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} a(s) \cdot \varphi(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} b(s)\,\mathrm{d}s,$$

  c'est-à-dire puisque $\varphi(t_0) = x_0$:

  $$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s) \cdot \varphi(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} b(s)\,\mathrm{d}s$$

- Réciproquement, supposons que φ vérifie :

  $$\forall t \in I \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s) \cdot \varphi(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} b(s)\,\mathrm{d}s.$$

  * Alors, en évaluant en t_0, on a $\varphi(t_0) = x_0$.
  * De plus φ est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables, et l'on obtient en dérivant :

    $$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + b(t).$$

Exercice 2 S'il existe $t_0 \in I$ tel que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, alors les fonctions φ_1 et φ_2 sont toutes deux solutions du problème de Cauchy :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \qquad \text{et} \qquad x(t_0) = \varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0).$$

et donc, par propriété d'unicité, on a $\varphi_1 = \varphi_2$.

Exercice 3 Soit $\varphi : I \to E$ une solution de (E_0). Supposons que φ s'annule en un point $t_0 \in I$. Alors φ vérifie la condition initiale $\varphi(t_0) = 0$. Or, la fonction nulle est également une solution vérifiant cette condition initiale. Par unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée, on en déduit que φ est la fonction nulle.

Remarque Le résultat de cet exercice est une conséquence immédiate de celui de l'exercice 2 : la fonction nulle étant solution de l'équation homogène (E_0), elle ne croise aucune autre solution.

Exercice 4

- Si φ est une solution réelle de (Sys) alors on a :
$$\forall t \in I \quad \varphi(t) \in \mathbb{R}^n,$$
et donc en particulier $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$.
- Réciproquement, soit φ une solution du système (Sys) telle que $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$. Alors l'application $\overline{\varphi} : t \mapsto \overline{\varphi(t)}$ est aussi une solution de (Sys) puisque, pour tout $t \in I$, en conjuguant la relation $\varphi'(t) = A(t)\,\varphi(t) + B(t)$, on obtient, puisque les matrices $A(t)$ et $B(t)$ sont à coefficients réels :
$$\overline{\varphi'(t)} = \overline{A(t)\,\varphi(t) + B(t)} = A(t)\,\overline{\varphi(t)} + B(t)$$
autrement dit :
$$\overline{\varphi}'(t) = A(t)\,\overline{\varphi}(t) + B(t).$$
Comme $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$, on a $\varphi(t_0) = \overline{\varphi(t_0)} = \overline{\varphi}(t_0)$. Les fonctions φ et $\overline{\varphi}$ sont donc solutions de (Sys) et vérifient la même condition initiale en t_0. Par unicité de la solution vérifiant un problème de Cauchy, on a $\varphi = \overline{\varphi}$, ce qui signifie que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5

1. On a, en sommant les deux équations :
$$(f_1 + f_2)' = 3(f_1 + f_2),$$
donc $f_1 + f_2$ est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = 3y$. On en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_1(t) + f_2(t) = ae^{3t}.$$
2. En remplaçant $f_2(t)$ par $ae^{3t} - f_1(t)$ dans la première équation du système, on trouve :
$$f_1'(t) = -f_1(t) + 2ae^{3t},$$
donc f_1 est solution de l'équation $y' + y = 2ae^{3t}$.
Il existe donc un scalaire b tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_1(t) = be^{-t} + \frac{a}{2}e^{3t};$$
puis
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_2(t) = -be^{-t} + \frac{a}{2}e^{3t}.$$
On a alors :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = b\left(e^{-t}, -e^{-t}\right) + \frac{a}{2}\left(e^{3t}, e^{3t}\right),$$
donc f est combinaison linéaire de $\varphi_1 : t \mapsto (e^{-t}, -e^{-t})$ et $\varphi_2 : t \mapsto (e^{3t}, e^{3t})$.
3. Il s'agit d'un système différentiel linéaire homogène de taille 2, donc l'espace solution $\mathcal{S}_0$ est de dimension 2. D'après la question précédente, on a :
$$\mathcal{S}_0 \subset \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2).$$
La famille (φ_1, φ_2) est donc nécessairement libre et forme une base de $\mathcal{S}_0$.
Conclusion :
$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2).$$

Exercice 6

- L'implication $(iii) \Rightarrow (ii)$ est évidente.
- $(ii) \Rightarrow (i)$. Supposons (ii). Soit $t_0 \in I$ tel que la famille $(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$ soit une base de E. En évaluant en t_0 une relation du type $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k = 0$, on obtient $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k(t_0) = 0$ et donc, par liberté de la famille $(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$, on a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
  Par suite, la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre. Comme c'est une famille à n éléments et que $\dim \mathcal{S}_0 = \dim E = n$, c'est une base de $\mathcal{S}_0$.
- $(i) \Rightarrow (iii)$. Supposons que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ soit une base de $\mathcal{S}_0$. Fixons $t \in I$ et montrons que $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est une base de E. Comme $\dim \mathcal{S}_0 = n$, il suffit de prouver le caractère générateur. Soit $a \in E$. Le théorème de Cauchy linéaire assure l'existence (et l'unicité) d'une solution φ de (E_0) vérifiant la condition initiale $\varphi(t) = a$. Comme $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_0$, cette solution φ s'écrit $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. On a alors :

$$a = \varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k(t).$$

  D'où le caractère générateur de la famille $\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\big)$.

Exercice 7 Comme $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_0$, l'exercice 6 de la page 1020 assure que pour tout $t \in I$, la famille $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est une base de E ; cela justifie l'existence de $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ tels que :

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \varphi_i(t).$$

D'où l'existence des fonctions $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Il reste à justifier que ces applications sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Fixons $i \in [\![1, n]\!]$. Plaçons-nous dans une base $\mathcal{B}$ de E.
Pour tout $t \in I$, on a, par linéarité du déterminant par rapport à la i-ème variable :

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}\big(\varphi_1(t), \dots, \underbrace{\varphi(t)}_{\text{place } i}, \dots, \varphi_n(t)\big) &= \det_{\mathcal{B}}\Big(\varphi_1(t), \dots, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t)\varphi_k(t), \dots, \varphi_n(t)\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) \det_{\mathcal{B}}\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t), \dots, \varphi_n(t)\big).\end{aligned}$$

En utilisant alors le caractère alterné du déterminant, on obtient :

$$\det_{\mathcal{B}}\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi(t), \dots, \varphi_n(t)\big) = \lambda_i(t) \det_{\mathcal{B}}\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_i(t), \dots, \varphi_n(t)\big)$$

ou encore :

$$\lambda_i(t) = \frac{\det_{\mathcal{B}}\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi(t), \dots, \varphi_n(t)\big)}{\det_{\mathcal{B}}\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_i(t), \dots, \varphi_n(t)\big)}.$$

Ainsi, λ_i apparaît comme un quotient de deux applications de classe $\mathcal{C}^1$, donc est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 8 On a obtenu à l'exercice 5 de la page 1019 les solutions du système homogène associé :

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{avec} \quad \varphi_1 : t \mapsto e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cherchons une solution particulière sous la forme :

$$\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \quad \text{avec } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ dérivables sur } \mathbb{R}.$$

Une telle fonction φ est solution de (Sys) si, et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \lambda_1'(t)\,\varphi_1(t) + \lambda_2'(t)\,\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne, après obtention de λ_1' et λ_2' puis primitivation :

$$\lambda_1(t) = \frac{t}{2} + k_1 \quad \text{et} \quad \lambda_2(t) = -\frac{1}{8}\,e^{-4t} + k_2 \quad \text{avec} \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{K}^2.$$

En choisissant $\lambda_1 : t \mapsto \dfrac{t}{2}$ et $\lambda_2 : t \mapsto -\dfrac{1}{8}\,e^{-4t}$, on trouve comme solution particulière :

$$\varphi \ : \ t \mapsto \frac{t}{2}\,e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\,e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que les solutions de (Sys) sont les fonctions :

$$t \mapsto \left(\alpha + \frac{t}{2}\right) e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\beta e^{3t} - \frac{e^{-t}}{8}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2.$$

Exercice 9

1. La fonction $\varphi : t \mapsto \exp(\lambda t)V$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée donnée par :

$$\varphi'(t) = \lambda\, e^{\lambda t}\, V = e^{\lambda t}\, \lambda V = e^{\lambda t}\, AV = A\, e^{\lambda t} V = A\,\varphi(t).$$

Comme de plus $\varphi(0) = V$, φ est bien solution du problème de Cauchy :

$$X' = AX \qquad \text{et} \qquad X(0) = V.$$

Par unicité de la solution à un problème de Cauchy, c'est la seule.

2. D'après la première question, les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont solutions de l'équation (E_0). Comme $\dim(\mathcal{S}) = n$, pour conclure que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}$, il suffit de prouver la liberté. Soit $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k\, \varphi_k = 0.$$

En évaluant en $t \in I$ quelconque, on obtient, par définition de φ_k :

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k \, e^{\lambda_k t} \, V_k = 0.$$

Comme la famille $(V_1, \dots, V_n)$ est libre, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mu_k \underbrace{e^{\lambda_k t}}_{\neq 0} = 0 \quad \text{et donc} \quad \mu_k = 0.$$

D'où la liberté de la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Exercice 10

- Justifions que A est diagonalisable et obtenons ses éléments propres.

  On a $A = I + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

  La matrice J est de rang 1. Son noyau est donc de dimension 2. Plus précisément, une base de $\operatorname{Ker} J$ est donnée par (V_1, V_2) avec :

  $$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

  De plus, on a $3 \in \operatorname{sp}(J)$, et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé.

  La matrice J est donc diagonalisable et (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres associée au triplet $(0, 0, 3)$ de valeurs propres.

- Par suite, A est diagonalisable, et (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres associée au triplet $(1, 1, 4)$ de valeurs propres. Il en résulte qu'une base de l'espace des solutions du système différentiel étudié est (X_1, X_2, X_3) avec :

  $$X_1 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 : t \mapsto e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

- On a $\operatorname{Vect}(\varphi, \overline{\varphi}) \subset \operatorname{Vect}\big(\operatorname{Re}(\varphi), \operatorname{Im}(\varphi)\big)$ du fait des deux relations :

  $$\varphi = \operatorname{Re}(\varphi) + i \, \operatorname{Im}(\varphi) \qquad \text{et} \qquad \overline{\varphi} = \operatorname{Re}(\varphi) - i \operatorname{Im}(\varphi).$$

- L'inclusion réciproque $\operatorname{Vect}\big(\operatorname{Re}(\varphi), \operatorname{Im}(\varphi)\big) \subset \operatorname{Vect}(\varphi, \overline{\varphi})$ vient des relations :

  $$\operatorname{Re}(\varphi) = \frac{\varphi + \overline{\varphi}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(\varphi) = \frac{\varphi - \overline{\varphi}}{2i}.$$

Exercice 12

- Pour $x \in \mathbb{C}$, on a :
$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ -2 & x+1 & -3 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$
et donc, en développant par rapport à la dernière ligne :
$$\chi_A(x) = (x-1)\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^2+1) = (x-1)(x+i)(x-i).$$
La matrice A est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.
- Après calculs :
  - le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1 ;
  - le vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre i ;

  par suite, comme A est à coefficients réels, le vecteur $\overline{V_2}$ est vecteur propre associé à la valeur propre $-i$.
- Ainsi, une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ est donnée par $(X_1, X_2, \overline{X_2})$ avec :
$$X_1 : t \mapsto e^t V_1 \qquad \text{et} \qquad X_2 : t \mapsto e^{it} V_2.$$
- Comme $\text{Vect}(X_2, \overline{X_2}) = \text{Vect}\big(\text{Re}(X_2), \text{Im}(X_2)\big)$ (*cf.* exercice 11 de la page 1024), on en déduit que la famille :
$$\big(X_1, \text{Re}(X_2), \text{Im}(X_2)\big)$$
est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$, et donc de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ car elle est formée d'applications à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.
De manière plus explicite, la base $\big(X_1, \text{Re}(X_2), \text{Im}(X_2)\big)$ est donnée par :
$$X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Re}(X_2)(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$
et
$$\text{Im}(X_2)(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13

- L'étude des éléments propres de A indique que 2 est valeur propre triple de A. Comme $A \neq 2I_3$, on en déduit que A est trigonalisable mais pas diagonalisable. Notons $N = A - 2I_3$. On a :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En posant :

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on a :

$$N\,U_1 = 0, \qquad N\,U_2 = U_1 \qquad \text{et} \qquad N\,U_3 = 0.$$

Ainsi, en notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est inversible, on a :

$$N = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

et donc :

$$A = P\,T\,P^{-1} \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- En notant $Y = P^{-1}X$, on a $X' = AX \iff X' = P\,T\,P^{-1}\,X$ Résolvons le sys-

$$\iff P^{-1}X' = T\,P^{-1}\,X$$
$$\iff Y' = T\,Y.$$

tème différentiel $Y' = T\,Y$, qui, en notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, s'écrit :

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 &+ y_2 \\ y_2' &= &2y_2 \\ y_3' &= & &2y_3 \end{cases}$$

∗ *Analyse.* Supposons que $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ soit solution.

Les deux dernières équations mènent à l'existence $(k_2, k_3) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y_2(t) = k_2\, e^{2t} \quad \text{et} \quad y_3 = k_3\, e^{2t}.$$

La première équation $y_1' = 2y_1 + k_2 e^{2t}$ apparaît alors comme une équation différentielle en y_1 et mène à l'existence de $k_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y_1(t) = k_1\, e^{2t} + k_2\, t\, e^{2t}.$$

On obtient alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Y(t) = k_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} t\, e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

∗ *Synthèse.* De l'analyse précédente il résulte que l'ensemble $\mathcal{S}_T$ des solutions du système différentiel $Y' = T\,Y$ vérifie $\mathcal{S}_T \subset \mathrm{Vect}(Y_1, Y_2, Y_3)$ avec :

$$Y_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t\, e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Or, on sait que $\dim \mathcal{S}_T = 3$; la famille (Y_1, Y_2, Y_3) est donc libre et en forme une base.

- Finalement, en utilisant l'équivalence :

$$X' = AX \iff Y' = TY \quad \text{avec} \quad X = PY,$$

on obtient que l'espace des solutions du système $X' = AX$ est :

$$\mathrm{Vect}(X_1, X_2, X_3) \quad \text{avec} \quad X_1 = PY_1, \quad X_2 = PY_2 \quad \text{et} \quad X_3 = PY_3.$$

De manière plus explicite, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$X_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 8 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} u_n : & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & a & \longmapsto & \dfrac{a^k}{k!} \end{array}$$

est continue. Montrons que la série d'applications $\sum u_k$ converge normalement au voisinage de tout point de $\mathcal{L}(E)$. Il en résultera, par théorème de continuité (*cf.* le corollaire 20 de la page 511), la continuité de l'application :

$$\exp = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \|a\| + 1$. Comme la norme utilisée sur $\mathcal{L}(E)$ est multiplicative, il en résulte que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \|u_k\|_{\infty, B_F(0,M)} \leqslant \frac{M^k}{k!}.$$

Puisque la série numérique $\sum \frac{M^k}{k!}$ converge, il s'ensuit la convergence normale sur $B_F(0, M)$, et donc au voisinage de a, de la série $\sum u_k$.

Proposition 9 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) \quad \text{avec} \quad u_k \ : \ t \mapsto \frac{t^k\, a^k}{k!}.$$

Toutes les applications u_k sont de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a, pour $k \geqslant 1$:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \left(u_0'(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 1 \quad u_k'(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} a^k \right).$$

Si K est un segment de $\mathbb{R}$, alors en notant M tel que $K \subset [-M, M]$, le caractère multiplicatif de la norme utilisée sur $\mathcal{L}(E)$ donne :

$$\forall k \geqslant 1 \quad \left\| u_k' \right\|_{\infty, K} \leqslant \frac{M^{k-1}}{(k-1)!} \|a\|^k.$$

La convergence de la série numérique $\sum \frac{M^{k-1}}{(k-1)!} \|a\|^k$ prouve ainsi la convergence normale sur le segment K de la série d'applications $\sum u_k'$.

D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions (*cf.* le théorème 24 de la page 513), il s'ensuit que l'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$, et l'on a de plus, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\, a^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\, a^{k+1}$$

puis en factorisant par a à droite ou à gauche, on obtient la formule souhaitée :

$$\varphi'(t) = a \circ \exp(t\, a) = \exp(t\, a) \circ a.$$

Exercice 14 Notons φ l'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{rccc} \varphi\ : & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u). \end{array}$$

Puisque $\varphi(a) = A$, on a, par propriété de morphisme d'algèbres de φ :

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \varphi\Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{a^k}{k!}\Big) = \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}. \qquad (\star)$$

L'application φ étant linéaire, elle est continue (car son espace de départ est de dimension finie). Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{a^k}{k!} \to \exp(a)$, on a donc, par continuité de φ en $\exp(a)$:

$$\varphi\Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{a^k}{k!}\Big) \to \varphi\big(\exp(a)\big).$$

Comme d'autre part $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} \to \exp(A)$, la relation $(\star)$ donne, par unicité de la limite :

$$\varphi\big(\exp(a)\big) = \exp(A).$$

Exercice 15

1. Si $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

On a alors, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

2. Supposons A diagonalisable. On peut donc écrire :
$$A = P\,D\,P^{-1} \quad \text{avec} \quad P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$
On a alors :
$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{D^k}{k!} \right) P^{-1}.$$
L'endomorphisme $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & P^{-1}\,M\,P \end{array}$ étant continu, on obtient, en passant à la limite :
$$\exp(A) = P\ \exp(D)\ P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Exercice 16

1. Notons $P = X^2 - 3X + 2$. Comme $\deg(P) = 2$, le théorème de la division euclidienne assure que l'on peut écrire :
$$X^k = P\,Q + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) \leqslant 1.$$
Comme $P = (X-2)(X-1)$, on obtient, en évaluant en 1 et en 2 la relation précédente, $R(1) = 1$ et $R(2) = 2^k$. On trouve finalement :
$$R = (2^k - 1)\,X + (2 - 2^k).$$
Puis, comme P est annulateur de A, on a :
$$A^k = (2^k - 1)\,A + (2 - 2^k)\,I_n = 2^k\,(A - I_n) + (2I_n - A).$$
2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a, d'après la question précédente :
$$\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{2^k}{k!} \right) (A - I_n) + \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \right) (2I_n - A),$$
et qui donne, en passant à la limite :
$$\exp(A) = e^2\,(A - I_n) + e\,(2I_n - A) = (e^2 - e)\,A + (2e - e^2)\,I_n.$$

Proposition 17 Soit $s \in \mathbb{R}$. Pour $x_0 \in E$, on vérifie facilement que les applications :
$$t \mapsto \exp\big((t+s)\,a\big) \cdot x_0 \qquad \text{et} \qquad t \mapsto \big(\exp(t\,a) \circ \exp(s\,a)\big) \cdot x_0$$
sont toutes deux solutions du problème de Cauchy :
$$x' = a \cdot x \quad \text{et} \quad x(0) = \exp(s\,a) \cdot x_0.$$
Donc, par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, on obtient :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \exp\big((t+s)\,a\big) \cdot x_0 = \big(\exp(t\,a) \circ \exp(s\,a)\big) \cdot x_0.$$
Cela étant vrai pour tout $x_0 \in E$, on en déduit :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \exp\big((t+s)\,a\big) = \exp(t\,a) \circ \exp(s\,a)$$
Cela étant vrai pour tout $s \in \mathbb{R}$, le résultat souhaité est démontré.

Corollaire 18 De la proposition précédente il vient, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\exp(t\,a) \circ \exp(-t\,a) = \exp\big((t-t)\,a\big) = \exp(0) = \mathrm{Id}_E\,.$$

L'endomorphisme $\exp(-t\,a)$ est donc l'inverse à droite de $\exp(t\,a)$ et donc, comme ce sont des endomorphismes en dimension finie, c'est également son inverse à gauche.

Proposition 19

- Justifions d'abord que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les endomorphismes $\exp(ta)$ et b commutent. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, notons $c_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{(ta)^k}{k!}$.

  Puisque a et b commutent et que c_p est un polynôme en a, on a :

  $$\forall p \in \mathbb{N} \quad c_p \circ b = b \circ c_p. \qquad (\star)$$

  Comme la suite (c_p) converge vers a et par continuité des applications :

  $$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & u \circ b \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & b \circ u \end{array},$$

  on a, en passant à la limite dans la relation $(\star)$:

  $$\exp(ta) \circ b = b \circ \exp(ta).$$

- Notons $\varphi : t \mapsto \exp(ta) \circ \exp(tb)$.
  Dérivons l'application φ. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

  $$\begin{aligned} \varphi'(t) &= a \circ \exp(ta) \circ \exp(tb) + \exp(ta) \circ b \circ \exp(tb) \\ &= a \circ \exp(ta) \circ \exp(tb) + b \circ \exp(ta) \circ \exp(tb) \quad (\exp(ta) \text{ et } b \text{ commutent}) \\ &= (a+b) \circ \varphi(t). \end{aligned}$$

  On a de plus $\varphi(0) = \exp(0)^2 = \mathrm{Id}_E$.
  Fixons $x_0 \in E$. L'application $t \mapsto \varphi(t) \cdot x_0$ est solution du problème de Cauchy :

  $$x' = (a+b) \cdot x \qquad \text{et} \qquad x(0) = x_0.$$

  Comme l'application $t \mapsto \exp\big(t(a+b)\big) \cdot x_0$ est également solution de ce problème de Cauchy, il en résulte, par unicité, que ces deux applications sont égales :

  $$\forall t \in \mathbb{R} \quad \big(\exp(t\,a) \circ \exp(t\,b)\big) \cdot x_0 = \exp\big(t(a+b)\big) \cdot x_0.$$

  En évaluant pour $t = 1$, on obtient :

  $$\big(\exp(a) \circ \exp(b)\big) \cdot x_0 = \exp\big(a+b\big) \cdot x_0.$$

  Comme x_0 a été fixé quelconque dans E, cela prouve que :

  $$\exp(a) \circ \exp(b) = \exp\big(a+b\big).$$

Exercice 17

- D'après la proposition 13 de la page 1028, l'application

  $$\begin{array}{rccc} \varphi_0 : & I & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ & t & \longmapsto & \exp\big((t-t_0)a\big) \cdot x_0 \end{array}$$

  est l'unique solution de l'équation homogène (E_0) vérifiant $\varphi_0(t_0) = x_0$.

- Montrons que l'application :

$$\begin{array}{rccc}\varphi_P : & I & \longrightarrow & E \\ & t & \longmapsto & \displaystyle\int_{t_0}^{t} \exp\big((t-s)\,a\big)\cdot b(s)\,\mathrm{d}s\end{array}$$

est une solution particulière de (E) et vérifie $\varphi_P(t_0)=0$. Pour $t\in I$, on a :

$$\varphi_P(t)=\exp(t\,a)\cdot\int_{t_0}^{t}\exp(-s\,a)\cdot b(s)\,\mathrm{d}s,$$

puis, en dérivant :

$$\begin{aligned}\varphi_P'(t)&=\big(a\circ\exp(ta)\big)\cdot\int_{t_0}^{t}\exp(-s\,a)\cdot b(s)\,\mathrm{d}s+\big(\exp(t\,a)\circ\exp(-t\,a)\big)\cdot b(t)\\&=a\cdot\varphi_P(t)+b(t).\end{aligned}$$

Donc φ_P est solution de (E). On a de plus $\varphi_P(t_0)=0$.

- L'application $\varphi=\varphi_0+\varphi_P$ est alors solution de (E) car elle est somme d'une solution φ_0 de l'équation homogène et d'une solution φ_P de (E), et vérifie de plus :

$$\varphi(t_0)=\varphi_P(t_0)+\varphi_0(t_0)=x_0.$$

L'application φ est donc solution du problème de Cauchy :

$$x'=a(t)\cdot x+b(t)\qquad\text{et}\qquad x(t_0)=x_0.$$

Par propriété d'unicité, c'est la seule.

Exercice 18 Supposons que les applications $a_0,\dots,a_{n-1},b$ sont de classe $\mathcal{C}^p$.
Soit $\varphi : I\to\mathbb{K}$ une solution de (E). Raisonnons par l'absurde en supposant que φ n'est pas de classe $\mathcal{C}^{n+p}$. Comme φ est n fois dérivable (car c'est une solution de (E)), il existe $k\in[\![n-1,n+p-1]\!]$ tel que φ soit de classe $\mathcal{C}^k$ mais pas de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. La relation :

$$\varphi^{(n)}=b-a_{n-1}\,\varphi^{(n-1)}-\cdots-a_0\,\varphi$$

mène alors à une contradiction car :

- le membre de gauche, $\varphi^{(n)}$, n'est pas de classe $\mathcal{C}^{k-n+1}$;
- le membre de droite est de classe $\mathcal{C}^{k-n+1}$ car :
  - les fonctions $a_0,\dots,a_{n-1},b$ sont de classe $\mathcal{C}^p$, donc $\mathcal{C}^{k-n+1}$;
  - pour $i\in[\![0,n-1]\!]$, la fonction $\varphi^{(i)}$ est de classe $\mathcal{C}^{k-i}$, donc $\mathcal{C}^{k-n+1}$.

Proposition 23 Pour tout $t\in I$, on a :

$$\Phi'(t)=\begin{pmatrix}\varphi'(t)\\ \vdots\\ \varphi^{(n-1)}(t)\\ \varphi^{(n)}(t)\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad A(t)\Phi(t)=\begin{pmatrix}\varphi'(t)\\ \vdots\\ \varphi^{(n-1)}(t)\\ -a_0(t)\varphi(t)-\cdots-a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}.$$

Par suite, on a $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) + B(t)$ si, et seulement si :

$$\varphi^{(n)}(t) = -a_0(t)\varphi(t) - \cdots - a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t) + b(t).$$

Il en résulte que Φ est solution de l'équation différentielle :

$$X' = A(t)X + B(t)$$

si, et seulement si, φ est solution de l'équation différentielle :

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{n-1} + \cdots + a_0(t)x = b(t).$$

Exercice 19

1. L'équivalence cherchée vient du fait que pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad f_\lambda^{(k)}(t) = \lambda^k\, e^{\lambda t}$$

et donc :

$$f_\lambda^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f_\lambda^{(k)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, \lambda^k\, e^{\lambda t} = P(\lambda)\, \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0}.$$

2. Supposons que P possède n racines simples $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
   - Comme (E_0) est une équation différentielle linéaire homogène scalaire d'ordre n, on sait que son ensemble solution $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel de dimension n.
   - D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction $f_{\lambda_k} : t \mapsto e^{\lambda_k\, t}$ est solution de (E_0). On a donc :

$$\mathrm{Vect}\left(f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n}\right) \subset \mathcal{S}_0.$$

   Comme $\dim \mathcal{S}_0 = n$, pour prouver que l'inclusion précédente est une égalité, il suffit de prouver que la famille $(f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n})$ est libre.

   Si l'on considère une combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_{\lambda_k}$ égale à l'application nulle, alors, en dérivant p fois et en évaluant en 0 pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, il vient :

$$\forall p \in [\![0, n-1]\!] \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p\, \alpha_k = 0$$

   Il apparaît un système homogène de Vandermonde et, puisque $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts, la matrice de Vandermonde associée est inversible, ce qui assure $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. D'où la liberté de la famille $(f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n})$.

Proposition 29 L'expression obtenue pour la dérivée du wronskien de (φ_1, φ_2) est :

$$W'_{\varphi_1,\varphi_2} = \varphi_1\, \varphi_2'' - \varphi_1''\, \varphi_2,$$

et donc, puisque φ_1 et φ_2 sont solutions de (E_0) :

$$\begin{aligned} W'_{\varphi_1,\varphi_2} &= \varphi_1 \left(- a_1\, \varphi_2' - a_0\, \varphi_2 \right) - \left(- a_1\, \varphi_1' - a_0\, \varphi_1 \right) \varphi_2 \\ &= -a_1 \left(\varphi_1\, \varphi_2' - \varphi_1'\, \varphi_2 \right) \\ &= -a_1\, W_{\varphi_1,\varphi_2}, \end{aligned}$$

et donc W_{φ_1,φ_2} est solution de l'équation $x' + a_1(t)\, x = 0$.

Proposition 30

- $(iii) \implies (ii)$. Évident.
- $(ii) \implies (i)$. Par la contraposée. Supposons que (φ_1, φ_2) ne soit pas une base de $\mathcal{S}_0$. Comme $\mathcal{S}_0$ est de dimension 2, cela entraîne que φ_1 et φ_2 sont proportionnelles.
  Les applications $t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}$ sont alors elles aussi proportionnelles et l'on obtient la négation de l'assertion (ii) :
  $$\forall t \in I \quad W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = 0.$$
- $(i) \implies (iii)$. Supposons que (φ_1, φ_2) soit une base de $\mathcal{S}_0$. Soit $t \in I$.
  Par le théorème de Cauchy linéaire, on sait que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, il existe une solution ψ de (E_0) vérifiant :
  $$\begin{pmatrix} \psi(t) \\ \psi'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$
  Comme (φ_1, φ_2) est une base de $\mathcal{S}_0$, on peut écrire $\psi = \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$, ce qui donne, en évaluant en t :
  $$\lambda \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$
  Il en résulte que la famille formée par les vecteurs $\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}$ forment une famille génératrice et donc une base de $\mathbb{K}^2$.
  Le déterminant de cette famille, qui n'est rien d'autre que $W(t)$, est donc non nul.

Exercice 20 Si une telle équation différentielle existait, alors les fonctions $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto t$, puisqu'elles ne sont pas proportionnelles, formeraient une base de l'espace $\mathcal{S}_0$ des solutions. Et alors, d'après la proposition 30 de la page 1036, leur wronskien W ne s'annulerait pas sur $\mathbb{R}$. Or ce wronskien est donné par :
$$W(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\,\varphi_2(t) = \cos t + t \sin t,$$
et le théorème des valeurs intermédiaires assure que W s'annule en au moins un point de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ puisque $W\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$ et $W(\pi) = -1 < 0$.

Exercice 21

1. La fonction φ_1 est définie et deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et l'on a :

$$\forall t>0 \quad \varphi_1'(t)=\frac{t\cos t-\sin t}{t^2} \qquad \text{et} \qquad \varphi_1''(t)=-\frac{t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t}{t^3}.$$

On vérifie facilement que :

$$\forall t\in]0,+\infty[\quad \varphi_1''(t)+\frac{2}{t}\,\varphi_1'(t)+\varphi_1(t)=0.$$

2. • Soit φ une solution sur $]0,+\infty[$ de (E_0).
   ∗ Le wronskien W de (φ_1,φ) vérifie sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle :

$$x'+\frac{2}{t}\,x=0.$$

On en déduit qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t\in]0,+\infty[\quad W(t)=\frac{\lambda}{t^2}.$$

   ∗ Plaçons-nous sur un intervalle $J\subset]0,+\infty[$ où φ_1 ne s'annule pas ; prenons par exemple $J=]0,\pi[$. Sur cet intervalle J, on peut considérer la fonction $\left(\dfrac{\varphi}{\varphi_1}\right)$ dont la dérivée vérifie :

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'=\frac{\varphi'\,\varphi_1-\varphi\,\varphi_1'}{\varphi_1^2}=\frac{W}{\varphi_1^2}.$$

Ainsi, on a :

$$\forall t\in J \quad \left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'(t)=\frac{\lambda}{\sin^2 t}.$$

En primitivant, on obtient l'existence de $\mu\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $t\in J$:

$$\frac{\varphi(t)}{\frac{\sin t}{t}}=-\lambda\,\frac{\cos t}{\sin t}+\mu \quad \text{et donc} \quad \varphi(t)=-\lambda\frac{\cos t}{t}+\mu\frac{\sin t}{t}.$$

• Notons alors φ_2 la fonction $t\mapsto\dfrac{\cos t}{t}$. La fonction φ_2 est définie et deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$, et il est facile de vérifier que φ_2 est solution de (E_0). Comme φ_1 et φ_2 ne sont pas proportionnelles, on peut conclure que l'ensemble des solutions de (E_0) est :

$$\mathcal{S}_0=\mathrm{Vect}(\varphi_1,\varphi_2).$$

Remarque Dans le raisonnement précédent, la « méthode du wronskien » ne constitue pas une preuve en tant que telle : elle permet surtout de « découvrir la solution manquante ». Une fois connue cette « solution manquante », il est facile de justifier qu'elle est solution et qu'elle complète la solution déjà connue en une base de $\mathcal{S}_0$.

Exercice 22 Cherchons une solution de (E) sous la forme :

$$\varphi = \lambda_1\,\varphi_1 + \lambda_2\,\varphi_2 \quad \text{avec} \quad \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ dérivables.}$$

Une telle fonction φ est solution si, et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1'\varphi_1 + \lambda_2'\varphi_2 & = & 0 \\ \lambda_1'\varphi_1' + \lambda_2'\varphi_2' & = & (t \mapsto t) \end{array}\right.$$

ce qui s'écrit, pour tout $t \in]0,+\infty[$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\sin t}{t}\,\lambda_1'(t) + \dfrac{\cos t}{t}\,\lambda_2'(t) & = & 0 \\ \dfrac{t\cos t - \sin t}{t^2}\,\lambda_1'(t) - \dfrac{t\sin t + \cos t}{t^2}\,\lambda_2'(t) & = & t \end{array}\right.$$

ou encore :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\sin t)\,\lambda_1'(t) + (\cos t)\,\lambda_2'(t) & = & 0 \\ \big(t\cos t - \sin t\big)\,\lambda_1'(t) - \big(t\sin t + \cos t\big)\,\lambda_2'(t) & = & t^3 \end{array}\right.$$

On obtient, après résolution du système précédent :

$$\forall t \in]0,+\infty[\quad \lambda_1'(t) = t^2\,\cos t \qquad \text{et} \qquad \lambda_2'(t) = -t^2\,\sin t.$$

Après primitivation, on peut choisir :

$$\lambda_1 \ : \ t \mapsto t^2\,\sin t - 2\,\sin t + 2t\,\cos t \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 : t \mapsto t^2\,\cos t - 2\,\cos t - 2t\,\sin t,$$

et obtenir, après simplification, la solution de (E) suivante :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & t - \dfrac{2}{t}\cdot \end{array}$$

En conclusion, les solutions réelles de (E) sont les fonctions :

$$\begin{array}{rccl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} & \text{avec} \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2. \\ t & \longmapsto & t - \dfrac{2}{t} + \lambda\,\dfrac{\sin t}{t} + \mu\dfrac{\cos t}{t} & \end{array}$$

Exercice 23

1. Notons n le degré P, de telle sorte que, comme P est non nul, P s'écrit :

$$P = \alpha_n X^n + \cdots + \alpha_0 \quad \text{avec} \quad \alpha_n \neq 0.$$

En reportant dans l'équation (E_0), on constate que le polynôme :

$$Q = \big(X^2 + 2X - 1\big)\,P'' + \big(X^2 - 3\big)\,P' - (2X+2)\,P$$

est le polynôme nul car il vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Q(t) = 0.$$

Or, le polynôme Q s'écrit :

$$Q = (n-2)\,\alpha_n X^{n+1} + \cdots - (2\alpha_2 + 3\alpha_1 + 2\alpha_0)\,.$$

Comme $\alpha_n \neq 0$, on a nécessairement $n = 2$.

2. D'après la question précédente, on peut rechercher les solutions polynomiales non nulles de (E_0) sous la forme $t \mapsto P(t)$ avec P de la forme :

$$P = \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0 \quad \text{avec} \quad \alpha_2 \neq 0.$$

En reportant dans l'équation (E_0) et, par unicité des coefficients, on obtient que $t \mapsto P(t)$ est solution de (E_0) si, et seulement si :

$$\begin{cases} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_0 &= -\alpha_2. \end{cases}$$

Par suite, les solutions polynomiales de (E_0) sont les fonctions :

$$t \mapsto \lambda\,(t^2 - 1) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 24

1. • Dans un premier temps, supposons que φ soit une solution de (E_0) développable en série entière sur un intervalle de la forme $]-r, r[$ avec $r > 0$.
Pour $t \in]-r, r[$, on a :

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad \varphi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n t^{n-1} \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}.$$

En injectant dans l'équation (E_0), on a, pour tout $t \in]-r, r[$:

$$4\,t \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n\, t^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n = 0.$$

puis en réindexant les sommes pour obtenir dans chacune d'entre elles des termes en t^n :

$$4 \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1}\, t^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1}\, t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n = 0,$$

ce qui donne, en regroupant les sommes :

$$(2\,a_1 - a_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((2n+2)(2n+1) a_{n+1} - a_n\big) t^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (2n+2)(2n+1) a_{n+1} - a_n = 0. \qquad (\star)$$

Il en résulte que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{1}{(2n)!}\, a_0,$$

ce qui donne :

$$\varphi(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(2n)!}.$$

- Réciproquement :
  - le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{t^n}{(2n)!}$ vaut $+\infty$ (on le montre par exemple par le critère de d'Alembert) ;
  - la fonction φ_1 : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(2n)!} \end{array}$

    est telle que ses coefficients vérifient la propriété $(\star)$, et par suite, d'après les calculs effectués dans la première partie du raisonnement, φ_1 est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$. Comme de plus $\varphi_1(0) = 1$, cela répond à la question.

2. (a) Pour $t > 0$, on a $\varphi_1(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{t}\right)^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right)$.

   (b) Sur $]0, +\infty[$, l'équation (E_0) s'écrit sous forme résolue :

$$(\mathrm{E}_0) \ : \ x'' + \frac{x'}{2t} - \frac{x}{4t} = 0.$$

L'espace solution $\mathcal{S}_0$ sur cet intervalle est donc de dimension 2.
Soit φ une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
Le wronskien W de la famille (φ_1, φ) est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$x' + \frac{x}{2\,t} = 0.$$

En résolvant cette équation, on obtient $W(t) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{t}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a d'autre part :

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)' = \frac{\varphi'\,\varphi_1 - \varphi\,\varphi_1'}{\varphi_1^2} = \frac{W}{\varphi_1^2}\cdot$$

et donc :

$$\forall t \in]0, +\infty[\quad \left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{t}\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{t}\right)}\cdot$$

En primitivant, on obtient qu'il existe une constante $\mu \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in]0, +\infty[\quad \frac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)} = 2\lambda \operatorname{th}\left(\sqrt{t}\right) + \mu \quad \text{puis} \quad \varphi(t) = 2\lambda \operatorname{sh}\left(\sqrt{t}\right) + \mu \operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right).$$

Comme la fonction φ a été prise quelconque dans $\mathcal{S}_0$, il en résulte que :

$$\mathcal{S}_0 \subset \operatorname{Vect}\left(t \mapsto \operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right), t \mapsto \operatorname{sh}\left(\sqrt{t}\right)\right),$$

puis, comme $\dim \mathcal{S}_0 = 2$, on obtient :

$$\mathcal{S}_0 = \operatorname{Vect}\left(t \mapsto \operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right), t \mapsto \operatorname{sh}\left(\sqrt{t}\right)\right).$$

Remarque Une fois connue la solution $\varphi_1 \ : \ t \mapsto \operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right)$, on peut, sans utiliser la méthode du wronskien, pressentir que la fonction $\varphi_2 \ : \ t \mapsto \operatorname{sh}\left(\sqrt{t}\right)$ l'est également. On peut alors conclure la résolution de (E_0) en vérifiant simplement que cette fonction φ_2 est bien solution de (E_0) et qu'elle est linéairement indépendante de φ_1.

3. (a) Pour $t<0$, on a :
$$\varphi_1(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\sqrt{-t}\right)^{2n}}{(2n)!}=\cos\left(\sqrt{-t}\right).$$

(b) Sur $]-\infty,0[$, l'équation (E_0) s'écrit également sous forme résolue.
Le même raisonnement qu'à la question précédente prouve que si φ est solution de (E_0) sur $]-\infty,0[$, alors on a :
$$\varphi\in\mathrm{Vect}\left(t\mapsto\cos\left(\sqrt{-t}\right),t\mapsto\sin\left(\sqrt{-t}\right)\right).$$
On conclut alors, pour des raisons de dimensions, que :
$$\mathcal{S}_0=\mathrm{Vect}\left(t\mapsto\cos\left(\sqrt{-t}\right),t\mapsto\sin\left(\sqrt{-t}\right)\right).$$

Exercice 25

- *Analyse.* Soit f une solution de (E).
  - Considérons la fonction :
$$\begin{array}{rccc} g & : & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & f(\tan u). \end{array}$$
Comme f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, g est deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
Fixons $u\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. On a, en notant $t=\tan u$:
$$g'(u)=(1+t^2)\,f'(t)$$
et
$$g''(u)=(1+t^2)^2\,f''(t)+2\,t\,(1+t^2)\,f'(t),$$
et l'on constate que :
$$g''(u)+2\,g'(u)+g(u)=(1+t^2)^2\,f''(t)+2\,(t+1)(1+t^2)\,f'(t)+f(t).$$
En utilisant le fait que f est solution de (E), on obtient :
$$g''(u)+2\,g'(u)+g(u)=0,$$
et donc fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :
$$(\widetilde{E})\ :\ x''+2x'+x=0.$$
Cette équation est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on sait résoudre. On en déduit l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $u\in\mathbb{R}$:
$$g(u)=(a\,u+b)\,e^{-u}.$$
  - Revenons sur la fonction f. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a :
$$f(t)=f\big(\tan(\mathrm{Arctan}\,t)\big)=g(\mathrm{Arctan}\,t).$$
Par suite, on obtient l'expression suivante de $f(t)$ pour $t\in\mathbb{R}$:
$$f(t)=\big(a\ \mathrm{Arctan}\,t+b\big)\,e^{-\mathrm{Arctan}\,t}.$$

- *Synthèse.* Réciproquement, on vérifie que toute fonction f de la forme ci-dessus est bien solution de (E).

  Remarque Pour justifier la partie synthèse sans calculs, on peut remarquer que, d'après la partie « analyse » du raisonnement, on a :

  $\mathcal{S}_0 \subset \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$ avec $\varphi_1 = t \mapsto e^{-\operatorname{Arctan} t}$ et $\varphi_2 : t \mapsto \operatorname{Arctan}(t) e^{-\operatorname{Arctan} t}$.
  Comme l'équation est d'ordre 2 et peut être mise sous forme résolue, on a $\dim \mathcal{S}_0 = 2$. L'inclusion précédente est donc une égalité.

Exercice 26

1. Sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, l'équation se met sous forme résolue.
   - Sur $]-\infty, 0[$, les solutions sont les fonctions :
   $$t \mapsto \lambda t^2 + t^3 \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
   - Sur $]0, +\infty[$, les solutions sont les fonctions :
   $$t \mapsto \mu t^2 + t^3 \qquad \text{avec} \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$
2. Soit φ une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).
   Elle est solution sur $]-\infty, 0[$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$\forall t < 0 \quad \varphi(t) = \lambda t^2 + t^3.$$
   De même, φ est solution sur $]0, +\infty[$, donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$\forall t > 0 \quad \varphi(t) = \mu t^2 + t^3.$$
   La continuité de φ en 0 entraîne alors $\varphi(0) = 0$.
   On a donc la forme recherchée pour φ :
   $$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda t^2 + t^3 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \mu t^2 + t^3 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

   Remarque Pour obtenir $\varphi(0) = 0$, plutôt que d'évoquer la continuité de φ en 0, on peut également utiliser le fait que φ vérifie l'équation en 0, ce qui donne aussi $\varphi(0) = 0$.
3. Réciproquement, soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de la forme :
   $$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda t^2 + t^3 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \mu t^2 + t^3 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
   Montrons que φ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
   - Cette fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et est manifestement solution de l'équation (E) sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
   - On voit rapidement que φ est de plus continue en 0.
   - Pour tout $t < 0$, on a $\varphi'(t) = 2\lambda t + 3t^2$. On a donc $\varphi'(t) \underset{t \to 0^-}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que φ est dérivable à gauche en 0 et $\varphi'_g(0) = 0$.
     De même, on montre que φ est dérivable à droite en 0 et que $\varphi'_d(0) = 0$. Comme $\varphi'_g(0) = \varphi'_d(0)$, la fonction φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.
   - Enfin, on a $0\,\varphi'(0) - 2\varphi(0) = 0$, donc φ vérifie l'équation différentielle en 0.

   La fonction φ est donc solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27

- Tout d'abord, l'équation se met sous forme résolue sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$:
  - sur $]-\infty,0[$, les solutions sont $t\mapsto \lambda e^{-1/t}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$;
  - sur $]0,+\infty[$, les solutions sont $t\mapsto \mu e^{-1/t}$ avec $\mu\in\mathbb{R}$.
- Recherchons par analyse-synthèse les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
  - *Analyse.* Soit φ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
    - Tout d'abord, φ est solution de (E) sur l'intervalle $]-\infty,0[$ et sur l'intervalle $]0,+\infty[$, donc il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall t\in\mathbb{R}\quad \varphi(t)=\begin{cases}\lambda\, e^{-1/t} & \text{si} \quad t<0\\ \mu\, e^{-1/t} & \text{si} \quad t>0.\end{cases}$$
    - De plus, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc continue. En particulier, φ est continue en 0, et donc possède une limite finie à gauche en 0.
      Comme $\lim\limits_{t\to 0^-} e^{-1/t}=+\infty$, on a nécessairement $\lambda=0$.
      La fonction φ vérifie donc :
$$\forall t\in\mathbb{R}\quad \varphi(t)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t\leqslant 0\\ \mu\, e^{-1/t} & \text{si} \quad t>0.\end{cases}$$
  - *Synthèse.* Réciproquement, supposons que φ est de la forme ci-dessus.
    - La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie l'équation sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
    - Puisque $\varphi(t)=0$ pour tout $t\leqslant 0$, la fonction φ est dérivable à gauche en 0 et $\varphi'_g(0)=0$.
    - Puisque $\varphi'(t)=\mu\dfrac{e^{-1/t}}{t^2}$ pour tout $t>0$, on a, par croissances comparées, $\varphi'(t)\underset{t\to 0^+}{\longrightarrow}0$. Comme φ est continue en 0, on en déduit que φ est dérivable à droite en 0 et $\varphi'_d(0)=0$.
    - Comme $\varphi'_g(0)=\varphi'_d(0)$, φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0)=0$.
    - Enfin, il est facile de constater que φ vérifie l'équation en 0.

    Par suite, φ est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28

- Tout d'abord, on constate que l'équation se résout facilement sur les intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$ où elle se met sous forme résolue :
  - sur $]-\infty,1[$, les solutions sont :
$$t\mapsto\frac{\lambda+t^2}{2(1-t)}\quad\text{avec}\quad\lambda\in\mathbb{R}\ ;$$
  - sur $]1,+\infty[$, les solutions sont :
$$t\mapsto\frac{\mu+t^2}{2(1-t)}\quad\text{avec}\quad\mu\in\mathbb{R}.$$

- Recherchons par analyse-synthèse les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
  - *Analyse.* Soit φ une solution sur $\mathbb{R}$.
    - Tout d'abord, φ est solution de (E) sur l'intervalle $]-\infty,1[$ et sur l'intervalle $]1,+\infty[$, donc il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que :
$$\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda+t^2}{2(1-t)} & \text{si} \quad t<1\\ \dfrac{\mu+t^2}{2(1-t)} & \text{si} \quad t>1.\end{cases}$$
    - De plus, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc continue. En particulier, φ est continue en 1, et donc possède une limite finie en 1.
      Cela impose d'avoir $\lambda=\mu=-1$. On obtient :
$$\forall t\in\mathbb{R}^* \quad \varphi(t)=\frac{t^2-1}{2(1-t)}=-\frac{t+1}{2},$$
      et donc, par continuité en 0 :
$$\forall t\in\mathbb{R} \quad \varphi(t)=-\frac{t+1}{2}\cdot$$
  - *Synthèse.* Réciproquement, on vérifie que la fonction :
$$\varphi : t\mapsto -\frac{t+1}{2}$$
    est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. C'est donc l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29

- *Analyse.* Soit φ une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$.
  - Comme φ est solution de (E_0) sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^4$ tel que :
$$\forall t\in\mathbb{R} \quad \varphi(t)=\begin{cases}\lambda_1\cos\left(\sqrt{-t}\right) + \lambda_2\sin\left(\sqrt{-t}\right) & \text{si} \quad t<0\\ \mu_1\operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right) + \mu_2\operatorname{sh}\left(\sqrt{t}\right) & \text{si} \quad t>0.\end{cases}$$
  - La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier continue en 0.
    On a ainsi :
$$\varphi(0)=\lim_{0^-}\varphi=\lim_{0^+}\varphi, \quad \text{et donc} \quad \varphi(0)=\lambda_1=\mu_1.$$
  - La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en 0.
    - Pour tout $t>0$, on a :
$$\varphi'(t)=\frac{\mu_1\operatorname{sh}\left(\sqrt{t}\right)}{2\sqrt{t}}+\frac{\mu_2\operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right)}{2\sqrt{t}}\cdot$$
      Si μ_2 n'était pas nul, alors on aurait $\varphi'(t)\underset{t\to0^+}{\longrightarrow}\pm\infty$ (selon le signe de μ_2), ce qui contredirait la dérivabilité à droite de φ en 0. Donc $\mu_2=0$.

⋆ Pour tout $t<0$, on a :

$$\varphi'(t)=\frac{\lambda_1\,\sin\left(\sqrt{-t}\right)}{2\sqrt{-t}}-\frac{\lambda_2\,\cos\left(\sqrt{-t}\right)}{2\sqrt{-t}}\cdot$$

Si λ_2 n'était pas nul, alors on aurait $\varphi'(t)\underset{t\to0^-}{\longrightarrow}\pm\infty$ (selon le signe de λ_2), ce qui contredirait la dérivabilité à gauche de φ en 0. Donc $\lambda_2=0$.

∗ On obtient que :

$$\varphi(t)=\begin{cases}\lambda_1\cos\left(\sqrt{-t}\right) & \text{si} \quad t<0\\ \lambda_1\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{t}\right) & \text{si} \quad t\geqslant 0\end{cases}$$

et donc finalement :

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad \varphi(t)=\lambda_1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{(2n)!}\cdot$$

- *Synthèse.* Réciproquement, toutes les fonctions de la forme précédente sont solutions de (E_0) : ce sont les solutions développables en série entière déjà obtenues à l'exercice 24 de la page 1043.

Exercice 30

1. - L'application z_0 étant continue, sa restriction au segment K est bornée, ce qui justifie l'existence de M.
   - De même, a étant continue, sa restriction au segment K est bornée, ce qui justifie l'existence de α.
2. Procédons par récurrence.
   - *Initialisation.* D'après la question précédente, on a, en utilisant l'inégalité $(\star)$:
   $$\forall u\in K\quad \|a(u)\cdot z_0(u)\|\leqslant k\,\|a(u)\|\,\|z_0(u)\|\leqslant k\,\alpha\,M.$$
   Donc, par positivité de l'intégrale, on a, pour tout $t\in K$:
   $$\big\|z_1(t)\big\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|a(u)\cdot z_0(u)\|\,\mathrm{d}u\right|\leqslant k\,M\,\alpha\,|t-t_0|.$$
   Cela prouve le résultat au rang 1.
   - *Hérédité.* Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai au rang n.
   Soit $t\in K$. On a, en utilisant les majorations de la question précédente :
   $$\begin{aligned}\big\|z_{n+1}(t)\big\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|a(s)\cdot z_n(s)\|\,\mathrm{d}s\right|&\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}k\,\|a(s)\|\,\|z_n(s)\|\,\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}k\,\alpha\,\|z_n(s)\|\,\mathrm{d}s\right|.\end{aligned}$$
   L'hypothèse de récurrence nous donne de plus :
   $$\forall s\in K\quad \|z_n(s)\|\leqslant M\frac{(k\,\alpha\,|s-t_0|)^n}{n!}$$

et permet donc de poursuivre la majoration :

$$\|z_{n+1}(t)\| \leqslant \frac{M\,(k\,\alpha)^{n+1}}{n!}\left|\int_{t_0}^{t} |s-t_0|^n\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \frac{M\,(k\,\alpha)^{n+1}}{n!}\,\frac{|t-t_0|^{n+1}}{n+1}$$
$$= M\,\frac{(k\,\alpha\,|t-t_0|)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cela prouve le résultat au rang $n+1$.

3. D'après le résultat de la question précédente, on a, en notant ℓ la longueur du segment K :

$$\big\|z_n\big\|_{\infty,K} \leqslant M\,\frac{(k\,\alpha\,\ell)^n}{n!}\cdot$$

Il en résulte, par comparaison, que la série $\sum\big\|z_n\big\|_{\infty,K}$ converge.

Cela prouve la convergence normale sur K de la série de fonctions $\sum z_n$.

Exercice 31

1. Appliquons le résultat de l'exercice 30 en prenant $z_0 = h$.
   - Il a été obtenu que la série $\sum z_n$ converge normalement sur tout segment de I.
   - La relation vérifiée par la fonction h entraîne que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = h.$$

Cela n'est possible que si h est l'application nulle.

2. Soit φ_1 et φ_2 deux solutions du problème de Cauchy $(\mathcal{P})$.
On a alors, pour tout $t \in I$:

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)\cdot\varphi_1(u)\mathrm{d}u + \int_{t_0}^{t} b(u)\mathrm{d}u$$

et

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)\cdot\varphi_2(u)\mathrm{d}u + \int_{t_0}^{t} b(u)\mathrm{d}u$$

et donc en faisant la différence :

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\cdot\big(\varphi_1(u)-\varphi_2(u)\big)\mathrm{d}u.$$

Le résultat de la première question donne alors $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, *i.e.* $\varphi_1 = \varphi_2$.

Exercice 32

1. Notons $z_n = w_{n+1} - w_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, on a :
$$\begin{aligned} z_{n+1}(t) &= w_{n+2}(t) - w_{n+1}(t) \\ &= \left(x_0 + \int_{t_0}^t \big(a(s)\cdot w_{n+1}(s) + b(s)\big)\mathrm{d}s\right) \\ &\qquad - \left(x_0 + \int_{t_0}^t \big(a(s)\cdot w_n(s) + b(s)\big)\mathrm{d}s\right) \\ &= \int_{t_0}^t a(s)\cdot\big(w_{n+1}(s) - w_n(s)\big)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{t_0}^t a(s)\cdot z_n(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$
La suite (z_n) vérifie donc les hypothèses de l'exercice 30. Il en résulte que la série $\sum z_n$ converge normalement sur tout segment de I. Il en découle que cette série de fonctions $\sum z_n$, et donc la suite (w_n), converge uniformément sur tout segment de I.

2. • Prouvons que la suite de fonctions $\big(t \mapsto a(t)\cdot w_n(t) + b(t)\big)$ converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction $t \mapsto a(t)\cdot\varphi(t) + b(t)$.
Soit K est un segment de I.
Puisque a est continue sur K, il existe une constante α telle que :
$$\forall t \in K \quad \|a(t)\| \leqslant \alpha.$$
Pour tout $t \in K$, on a, en utilisant l'inégalité $(\star)$:
$$\begin{aligned} \big\|\big(a(t)\cdot w_n(t) + b(t)\big) - \big(a(t)\cdot\varphi(t) + b(t)\big)\big\| &= \big\|a(t)\cdot\big(w_n(t) - \varphi(t)\big)\big\| \\ &\leqslant k\,\big\|a(t)\big\|\,\|w_n(t) - \varphi(t)\| \\ &\leqslant k\,\alpha\,\big\|w_n(t) - \varphi(t)\big\|. \end{aligned}$$
Par suite, la convergence uniforme sur K de la suite (w_n) vers φ entraîne la convergence uniforme sur K de la suite $\big(t \mapsto a(t)\cdot w_n(t) + b(t)\big)$ vers la fonction $t \mapsto a(t)\cdot\varphi(t) + b(t)$.

• Soit $t \in I$. Par convergence uniforme sur le segment d'extrémités t_0 et t, on a :
$$\int_{t_0}^t \big(a(s)\cdot w_n(s) + b(s)\big)\mathrm{d}s \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{t_0}^t \big(a(s)\cdot\varphi(s) + b(s)\big)\mathrm{d}s.$$
Ainsi, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans la relation :
$$w_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \big(a(s)\cdot w_n(s) + b(s)\big)\mathrm{d}s,$$
il vient, par unicité de la limite :
$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \big(a(s)\cdot\varphi(s) + b(s)\big)\mathrm{d}s.$$
Comme on a de plus $\varphi(t_0) = x_0$, la fonction φ est bien solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P})$.

S'entraîner et approfondir

17.1 Soit $p : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $q : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue.
Montrer qu'il existe une fonction $\alpha : I \to \mathbb{K}$, deux fois dérivable et ne s'annulant pas, telle que l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \ : \ x'' + p(t)\,x' + q(t)\,x = 0$$

se traduise, sur la fonction $z = \dfrac{x}{\alpha}$, en une équation du type :

$$\widetilde{(\mathrm{E})} \ : \ z'' + r(t)\,z = 0 \quad \text{avec } r : I \to \mathbb{K} \text{ continue.}$$

17.2 Résoudre sur $I =]-1, 1[$ l'équation réelle :

$$4\,(1-t^2)\,x'' - 4\,t\,x' + x = 0. \tag{E}$$

On cherchera des solutions développables en série entière.

17.3 *Équation d'Airy*
On considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \ : \ y'' - xy = 0$$

Montrer, sans chercher à les expliciter à l'aide des fonctions usuelles, que toutes les solutions de (E) sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

17.4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système différentiel :

$$(S) \ : \ \begin{cases} x' &= &x &+ &8y &+ &e^t \\ y' &= &2x &+ &y & & \end{cases}$$

17.5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système différentiel (Sys) : $\begin{cases} x' &= &y \\ y' &= &z \\ z' &= &x \end{cases}$

17.6 Résoudre le système réel :

$$(\mathrm{Sys}) \ : \ \begin{cases} x' &= &x &- &ty &+ &t\,e^t \\ y' &= &tx &+ &y & & \end{cases} \tag{1}$$

On pourra chercher une équation différentielle vérifiée par $x + iy$.

17.7 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée.
Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \ : \ y'' + y = g$$

est bornée.

17.8 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f' + f$ tend vers 0 en $+\infty$.
Montrer que f et f' tendent vers 0 en $+\infty$.

17.9 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'' + 3f' + 2f$ tend vers 0 en $+\infty$.
Montrer que f, f' et f'' tendent vers 0 en $+\infty$.

17.10 Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \ : \ y'' + q(t)\, y = 0.$$

Soit u et v deux solutions de (E) linéairement indépendantes.

1. Notons Z_u l'ensemble des zéros (*i.e.* des points d'annulation) de u.
Montrer que tout point de Z_u est isolé, c'est-à-dire que l'on a :
$$\forall t_0 \in Z_u \quad \exists r > 0 \quad Z_u \cap [t_0 - r, t_0 + r] = \{t_0\}.$$
2. Soit t_0 un point d'annulation de u. Supposons que u s'annule sur l'intervalle $]t_0, +\infty[$. Montrer qu'il est licite de considérer t_1 le plus petit point d'annulation de u sur l'intervalle $]t_0, +\infty[$.
3. Montrer que, sur l'intervalle $]t_0, t_1[$, v s'annule une et une seule fois.

17.11 Soit $(a, b) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$. On considère l'équation différentielle homogène :

$$(\mathrm{E}) \ : \ y'' + a\, y' + b\, y = 0,$$

dont on note $\mathcal{S}_0$ l'espace des solutions.
Montrer l'équivalence entre les deux assertions :

(i) il existe une base (f, g) de $\mathcal{S}_0$ avec f paire et g impaire ;

(ii) la fonction a est impaire et la fonction b est paire.

17.12 Soit A une matrice symétrique réelle telle que $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ et φ une solution réelle non nulle sur $\mathbb{R}$ du système différentiel :

$$X' = AX$$

Montrer que l'application $t \mapsto \|\varphi(t)\|$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (la norme $\|\cdot\|$ désignant la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$).

17.13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$\mathrm{sp}\big(\exp(A)\big) = \big\{e^\lambda \,;\, \lambda \in \mathrm{sp}(A)\big\}.$$

17.14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ continue et périodique de période $T > 0$.
Montrer que le système différentiel homogène

$$(\mathrm{Sys}) \ : \ X' = A(t)\, X$$

admet une solution non nulle φ pour laquelle il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t + T) = \lambda\, \varphi(t).$$

17.15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On s'intéresse au système différentiel :

$$(\text{Sys}) \ : \ X' = A\,X.$$

1. (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(\lambda) < 0$ et $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer que :
$$\exp\big(t(\lambda I_p + N)\big) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Indication : on pourra commencer par exprimer $\exp\big(t(\lambda I_p + N)\big)$ *comme un polynôme en* N.
   (b) Montrer que si chaque valeur propre de A est de partie réelle strictement négative, alors toute solution du système (Sys) tend vers 0 en $+\infty$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions du système (Sys) soient bornées sur $\mathbb{R}$

17.16 *(Polytechnique 2015)*

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\beta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ pour que le système différentiel :

$$(\text{Sys}) \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} x'' & = & -\beta(t)\,y' \\ y'' & = & \beta(t)\,x' \end{array} \right.$$

admette une solution périodique non constante.

17.17 *(Polytechnique 2015)*

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique. Existe-t-il une solution 2π-périodique de l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ y^{(4)} + y = \varphi.$$

Solution des exercices

17.1 Soit $\varphi : I \to \mathbb{K}$ une fonction deux fois dérivable. Si $\alpha : I \to \mathbb{K}$ est une fonction deux fois dérivable ne s'annulant pas, alors la fonction $\psi = \dfrac{\varphi}{\alpha}$ est aussi deux fois dérivable et l'on a :

$$\varphi' = \alpha'\,\psi + \alpha\,\psi' \qquad \text{et} \qquad \varphi'' = \alpha''\,\psi + 2\,\alpha'\,\psi' + \alpha\,\psi''.$$

On obtient alors que φ est solution de (E) si, et seulement si, ψ vérifie :

$$\forall t \in I \quad \alpha(t)\psi''(t) + \big(2\alpha'(t)+p(t)\alpha(t)\big)\psi'(t) + \big(\alpha''(t)+p(t)\,\alpha'(t)+q(t)\alpha(t)\big)\psi(t) = 0.$$

Choisissons alors pour α une solution non nulle de l'équation d'ordre 1 :

$$y' + \frac{p(t)}{2}y = 0.$$

Une telle fonction α ne s'annule pas sur I et, puisque p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, α est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. Alors, les solutions φ de l'équation :

$$(\mathrm{E}) : x'' + p(t)\,x' + q(t)\,x = 0$$

sont toutes les fonctions $\varphi : t \mapsto \alpha(t)\psi(t)$ où ψ est solution de l'équation :

$$z'' + r(t)\,z = 0 \quad \text{avec} \quad r = \frac{\alpha'' + p\,\alpha' + q\,\alpha}{\alpha}.$$

Comme p et q sont continues et α de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction r est continue.

17.2 • Commençons par chercher les solutions de (E) développables en série entière.

∗ *Analyse.* Soit φ une solution de (E) sur $]-1,1[$, somme d'une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
Pour $t \in]-1,1[\cap]-R,R[$, on a :

$$4\left(1-t^2\right)\varphi''(t) - 4\,t\,\varphi'(t) + \varphi(t) = 0,$$

ce qui donne, en remplaçant $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$ par leurs développements en série entière et après arrangement du calcul :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(4(n+2)(n+1)a_{n+2} - (4n^2-1)a_n\Big)\,t^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, l'égalité précédente se traduit par le fait que pour pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 4(n+2)(n+1)\,a_{n+2} &= (2n-1)(2n+1)\,a_n \qquad (\star)\\ &= (1-2n)(1-2n-2)\,a_n \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(n+2)(n+1)\,a_{n+2} = \Big(\frac{1}{2}-n\Big)\Big(\frac{1}{2}-n-1\Big)a_n$$

ou encore, en notant $\alpha = \dfrac{1}{2}$:

$$a_{n+2} = \frac{(\alpha-n)(\alpha-n-1)}{(n+2)(n+1)}\,a_n.$$

On obtient ainsi, en distinguant les valeurs paires et impaires (et en utilisant les coefficients binomiaux généralisés) :

$$a_{2n} = \frac{(\alpha)(\alpha-1)\cdots(\alpha-2n+2)(\alpha-2n+1)}{(2n)!}\,a_0 = \binom{\alpha}{2n} a_0$$

et

$$a_{2n+1} = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-2n+1)(\alpha-2n)}{(2n+1)!}\,a_1 = \frac{1}{\alpha}\binom{\alpha}{2n+1} a_1.$$

Il en résulte que pour tout $t \in]-1,1[\cap]-R,R[$:

$$\varphi(t) = a_0\,\varphi_1(t) + \frac{a_1}{\alpha}\,\varphi_2(t)$$

avec :

$$\varphi_1 : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{2n} t^{2n} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{2n+1} t^{2n+1}$$

∗ *Synthèse.* Réciproquement, les fonctions φ_1 et φ_2 sont bien définies et développables en série entière sur $]-1,1[$ (le rayon de convergence des séries entières considérées valant 1), et leurs coefficients vérifient la relation de récurrence $(\star)$. Ainsi, φ_1 et φ_2 sont bien solutions de (E) sur $]-1,1[$.

- De ce qui précède on a, en notant $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des solutions de (E) :

$$\mathrm{Vect}(\varphi_1,\varphi_2) \subset \mathcal{S}.$$

Puisque $\big(\varphi_1(0),\varphi_1'(0)\big) = (1,0)$ et $\big(\varphi_2(0),\varphi_2'(0)\big) = (0,1/2)$, les fonctions φ_1 et φ_2 sont linéairement indépendantes.
Comme de plus l'équation (E) est d'ordre 2, à coefficients continus, et se met sous forme résolue sur l'intervalle $]-1,1[$, on a $\dim \mathcal{S} = 2$.
Ainsi, l'inclusion précédente est une égalité, ce qui conclut la résolution de (E) :

$$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(\varphi_1,\varphi_2).$$

Remarque On peut simplifier le résultat en remarquant que pour $t \in]-1,1[$:

$$(\varphi_1+\varphi_2)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} t^n \quad \text{et} \quad (\varphi_1-\varphi_2)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} t^n$$

autrement dit :

$$(\varphi_1+\varphi_2)(t) = \sqrt{1+t} \quad \text{et} \quad (\varphi_1-\varphi_2)(t) = \sqrt{1-t}$$

Les fonctions $t \mapsto \sqrt{1+t}$ et $t \mapsto \sqrt{1-t}$ étant linéairement indépendantes, on a :

$$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \sqrt{1+t}\,,\, t \mapsto \sqrt{1-t}\right).$$

17.3 • Remarquons tout d'abord que l'équation (E) est une équation linéaire scalaire homogène d'ordre 2, à coefficients continus, et écrite sous forme résolue, donc son ensemble $\mathcal{S}$ de solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Ainsi, pour prouver que toutes les solutions sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, il suffit de prouver qu'il en existe deux linéairement indépendantes.

• Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$ s'écrivant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, après simplification :

$$f''(x) - xf(x) = 2a_2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \big((n+3)(n+2)a_{n+3} - a_n\big)x^{n+1}.$$

Par unicité du développement en série entière, une telle fonction f est donc solution de l'équation (E) si, et seulement si, la suite (a_n) vérifie :

$$a_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n+3)(n+2)a_{n+3} - a_n = 0. \qquad (\star)$$

On peut constater qu'une telle suite (a_n) est entièrement caractérisée par ses deux premiers termes a_0 et a_1 et que tous les termes de la forme a_{3n+2} sont nuls.

• Nous sommes alors en mesure d'expliciter deux solutions linéairement indépendantes φ_1 et φ_2 développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

∗ Considérons la suite (α_n) définie par :

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (1, 0, 0) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{n+3} = \frac{\alpha_n}{(n+3)(n+2)}.$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{3n+1} = \alpha_{3n+2} = 0.$$

Posons, lorsque c'est possible :

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{3n} x^{3n}.$$

La relation de récurrence vérifiée par la suite (α_n) donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\frac{\alpha_{3n+3}\, x^{3n+3}}{\alpha_{3n}\, x^{3n}}\right| = \frac{|x|^3}{(3n+3)(3n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La règle de d'Alembert assure alors que la série entière $\sum \alpha_{3n} t^{3n}$ a un rayon de convergence valant $+\infty$. La fonction φ_1 est donc bien définie sur $\mathbb{R}$, et est donc une solution de (E) développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

∗ De la même manière, si l'on pose :

$$(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = (0, 1, 0) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \beta_{n+3} = \frac{\beta_n}{(n+3)(n+2)},$$

alors la fonction $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{3n+1} x^{3n+1} \end{array}$

est une solution de (E) développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

∗ Comme $\big(\varphi_1(0), \varphi_1'(0)\big) = (1, 0)$ et $\big(\varphi_2(0), \varphi_2'(0)\big) = (0, 1)$, les fonctions φ_1 et φ_2 sont linéairement indépendantes, ce qui termine l'exercice.

17.4 Le système différentiel (S) s'écrit matriciellement, en notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$X' = A\,X + B(t) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'étude des éléments propres de A prouve que A est diagonalisable et que :

$$A = P\,D\,P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

En notant $Y = P^{-1}\,X$, on a alors :

$$\begin{aligned} X' = A\,X + B(t) &\iff X' = P\,D\,P^{-1}\,X + B(t) \\ &\iff P^{-1}\,X' = D\,P^{-1}\,X + P^{-1}\,B(t) \\ &\iff Y' = D\,Y + P^{-1}\,B(t). \end{aligned}$$

Si l'on trouve les solutions Y du dernier système différentiel ci-dessus, alors, via la relation $X = P\,Y$, on en déduira les solutions du système initial. On a :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}\,B(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^t}{4} \\ -\dfrac{e^t}{4} \end{pmatrix}.$$

En notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, le système différentiel $Y' = D\,Y + P^{-1}\,B(t)$ s'écrit :

$$\begin{cases} y_1' &= 5\,y_1 &+ \dfrac{e^t}{4} \\ y_2' &= -3\,y_2 &- \dfrac{e^t}{4} \end{cases}$$

Ce système est constitué de deux équations linéaires d'ordre 1 que l'on sait résoudre. Les solutions obtenues sont :

$$Y : t \mapsto -\frac{e^t}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_1\,e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\,e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ce qui donne les solutions du système initial :

$$X : t \mapsto -\frac{e^t}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_1\,e^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\,e^{-3t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

17.5 • **Première méthode.** Le système différentiel (Sys) se traduit matriciellement :

$$X' = AX \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'étude des éléments propres de A montre que :

∗ $\text{sp}(A) = \{1, j, \overline{j}\}$ (avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$) ;

∗ une base de vecteurs propres associée à $(1, j, \overline{j})$ est $(V_1, V_2, \overline{V_2})$ avec :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ \overline{j} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une base de l'espace $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ des solutions complexes de (Sys) est $\left(X_1, X_2, \overline{X_2}\right)$ avec :

$$X_1 : t \mapsto e^t V_1 \qquad \text{et} \qquad X_2 : t \mapsto e^{jt} V_2$$

et une base de l'espace $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ des solutions réelles est $\left(X_1, \text{Re}(X_2), \text{Im}(X_2)\right)$.
Explicitons $\text{Re}(X_2)$ et $\text{Im}(X_2)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$X_2(t) = e^{-\frac{t}{2}} e^{it\frac{\sqrt{3}}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ e^{\frac{-2i\pi}{3}} \end{pmatrix} = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} e^{it\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ e^{i\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} \\ e^{i\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)} \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$\text{Re}(X_2)(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \\ \cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Im}(X_2)(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \\ \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

• **Deuxième méthode.** Sans traduire matriciellement le système (Sys), on peut remarquer que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est solution de (Sys) si, et seulement si :

$$x''' = x \ ; \quad y = x' \quad \text{et} \quad z = x''.$$

Autrement dit, les solutions sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$ avec x vérifiant $x''' = x$.

Reste alors à résoudre l'équation $x''' = x$. Commençons par la résoudre dans $\mathbb{C}$ (il restera alors à prendre les parties réelles des solutions complexes pour obtenir les solutions réelles).
Comme il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 3 homogène, on sait que ses solutions forment un espace vectoriel de dimension 3.
Remarquons que les trois applications :

$$\varphi_1 : t \mapsto e^t \ ; \quad \varphi_2 : t \mapsto e^{j\,t} \quad \text{et} \quad \varphi_3 : t \mapsto e^{\overline{j}\,t}$$

sont solutions. Il suffit alors de prouver la liberté de la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ pour pouvoir affirmer que c'est une base de l'espace des solutions complexes.
Liberté de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$**.** Remarquons que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sont des vecteurs propres pour l'application dérivation :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

associés respectivement aux trois valeurs propres deux à deux distinctes 1, j et $\overline{j}$. La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est donc libre.

17.6 • *Analyse.* Soit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ une solution de (Sys).
On constate que la fonction $\psi = \varphi_1 + i\varphi_2$ vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi'(t) = (1+it)\,\psi(t) + t\,e^t.$$

En résolvant l'équation scalaire d'ordre 1 (résolution de l'équation homogène puis recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante) :

$$z' = (1+it)\,z + t\,e^t,$$

on obtient l'existence d'une constante $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi(t) = \alpha \exp\left(t + i\frac{t^2}{2}\right) + i\,e^t.$$

Puisque $\varphi_1 = \mathrm{Re}(\psi)$ et $\varphi_2 = \mathrm{Im}(\psi)$, on obtient (en écrivant α sous forme algébrique $\alpha = a + ib$) :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} + ae^t \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{pmatrix} + be^t \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{pmatrix}$$

• *Synthèse.* De la partie « analyse » du raisonnement il résulte que :

$$\mathcal{S} \subset \varphi_P + \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$$

avec

$$\varphi_P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) = e^t \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Comme on sait que $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de dimension 2, il en résulte que l'inclusion précédente est une égalité.

17.7 • L'espace des solutions de l'équation homogène $(\mathrm{E}_0) : y'' + y = 0$ est :

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{avec} \quad \varphi_1 : t \mapsto \cos t \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto \sin t.$$

Il est donc clair que toute solution de l'équation homogène est bornée sur $\mathbb{R}$. Il suffit donc, pour conclure, de prouver qu'il existe une solution bornée de (E).

- Recherchons une solution de (E) sous la forme $\varphi_P = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ avec λ_1 et λ_2 deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Une telle fonction φ_P est solution de (E) si, et seulement si :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1'\,\varphi_1 + \lambda_2'\,\varphi_2 & = & 0 \\ \lambda_1'\,\varphi_1' + \lambda_2'\,\varphi_2' & = & g \end{array}\right.$$
c'est-à-dire :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1'(t)\,\cos(t) + \lambda_2'(t)\,\sin(t) & = & 0 \\ -\lambda_1'(t)\,\sin(t) + \lambda_2'(t)\,\cos(t) & = & g(t) \end{array}\right.$$
ce qui donne, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$\lambda_1'(t) = -\sin(t)\,g(t) \qquad \text{et} \qquad \lambda_2'(t) = \cos(t)\,g(t).$$
En prenant :
$$\lambda_1 : t \mapsto -\int_0^t \sin(u)\,g(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 : t \mapsto \int_0^t \cos(u)\,g(u)\,\mathrm{d}u$$
on obtient la solution de (E) suivante :
$$\varphi_P : t \mapsto -\cos(t)\int_0^t \sin(u)\,g(u)\,\mathrm{d}u + \sin(t)\int_0^t \cos(u)\,g(u)\,\mathrm{d}u.$$
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$\left|\varphi_P(t)\right| \leqslant \left|\int_0^t \sin(u)\,g(u)\,\mathrm{d}u\right| + \left|\int_0^t \cos(u)\,g(u)\,\mathrm{d}u\right|.$$
Pour conclure que φ_P est bornée, il suffit donc de prouver que les fonctions :
$$\alpha : t \mapsto \int_0^t \sin(u)\,g(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad \beta : t \mapsto \int_0^t \cos(u)\,g(u)\,\mathrm{d}u$$
le sont.
  * Pour $t \in \mathbb{R}$, on a, en intégrant par parties :
$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \Big[-\cos(u)\,g(u)\Big]_0^t + \int_0^t \cos(u)\,g'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= g(0) - \cos(t)\,g(t) + \int_0^t \cos(u)\,g'(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$
    Comme g est croissante, sa dérivée g' est à valeurs positives. Comme g est bornée, la fonction g' est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par comparaison, la fonction $t \mapsto \cos(t)\,g'(t)$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$, et donc la fonction :
$$t \mapsto \int_0^t \cos(u)\,g'(u)\mathrm{d}u$$
    est bornée. Ainsi, l'expression obtenue précédemment pour $\alpha(t)$ prouve que la fonction α est bornée.
  * On obtient de même que la fonction β est bornée.

17.8 Comme $f+f' \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, pour obtenir les deux limites $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f' \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, il suffit d'en prouver une seule. Montrons que $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Notons $g = f + f'$. La fonction f est alors solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \ : \ y' + y = g.$$

En résolvant l'équation (E), on obtient l'existence d'une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f(t) = \alpha\, e^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^u\, g(u)\, \mathrm{d}u.$$

Comme $\alpha e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il reste à prouver que $e^{-t} \displaystyle\int_0^t e^u\, g(u)\, \mathrm{d}u \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a, lorsque $u \to +\infty$:

$$e^u g(u) = \mathrm{o}\big(e^u\big),$$

donc, la fonction $u \mapsto e^u$ étant positive et non intégrable, on a par intégration des relations de comparaison lorsque $t \to +\infty$:

$$\int_0^t e^u g(u)\mathrm{d}u = \mathrm{o}\bigg(\int_0^t e^u \mathrm{d}u\bigg).$$

Comme $\displaystyle\int_0^t e^u \mathrm{d}u = e^t - 1 \sim e^t$, on en déduit, lorsque $t \to +\infty$:

$$e^{-t} \int_0^t e^u g(u)\mathrm{d}u = \mathrm{o}(1).$$

17.9 • Montrons d'abord que $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Notons $g = f'' + 3f' + 2f$.

La fonction f est alors solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \ : \ y'' + 3y' + 2y = g.$$

∗ Une base de l'espace $\mathcal{S}_0$ de l'équation homogène associée est formée par :

$$\varphi_1 : t \mapsto e^{-t} \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : t \mapsto e^{-2t}.$$

∗ Cherchons une solution particulière par la méthode de variation des constantes sous la forme $\varphi_P = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ avec λ_1 et λ_2 dérivables.
Une telle fonction est solution si, et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} e^{-t}\, \lambda_1'(t) & + & e^{-2t}\, \lambda_2'(t) & = & 0 \\ -e^{-t}\, \lambda_1'(t) & - & 2e^{-2t}\, \lambda_2'(t) & = & g(t) \end{array} \right.$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \lambda_1'(t) = e^t\, g(t) \qquad \text{et} \qquad \lambda_2'(t) = -e^{2t}\, g(t).$$

En prenant :

$$\lambda_1 : t \mapsto \int_0^t e^u\, g(u)\, \mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 : t \mapsto -\int_0^t e^{2u}\, g(u)\, \mathrm{d}u,$$

on obtient la solution suivante :

$$\varphi_P(t) = e^{-t} \int_0^t e^u\, g(u)\, \mathrm{d}u - e^{-2t} \int_0^t e^{2u}\, g(u)\, \mathrm{d}u.$$

∗ On peut conclure la résolution de (E) et en déduire, comme f est solution de (E), qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+\quad f(t)=e^{-t}\left(\alpha+\int_0^t e^u\,g(u)\,\mathrm{d}u\right)+e^{-2t}\left(\beta-\int_0^t e^{2u}\,g(u)\,\mathrm{d}u\right).$$

∗ Comme g tend vers 0 en $+\infty$, on a, par intégration des relations de comparaison lorsque $t\to+\infty$:

$$\int_0^t e^u\,g(u)\,\mathrm{d}u=\mathrm{o}\left(\int_0^t e^u\,\mathrm{d}u\right)\qquad\text{et}\qquad\int_0^t e^{2u}\,g(u)\,\mathrm{d}u=\mathrm{o}\left(\int_0^t e^{2u}\,\mathrm{d}u\right)$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^t e^u\,g(u)\,\mathrm{d}u=\mathrm{o}\big(e^t\big)\qquad\text{et}\qquad\int_0^t e^{2u}\,g(u)\,\mathrm{d}u=\mathrm{o}\big(e^{2t}\big).$$

L'expression obtenue pour $f(t)$ donne alors $f\underset{+\infty}{\longrightarrow}0$.

- Pour conclure, il reste à prouver que f' et f'' tendent vers 0 en $+\infty$.
  ∗ **Première méthode.** En repartant de l'expression de $f(t)$, on peut dériver pour obtenir une expression de $f'(t)$ et $f''(t)$, et montrer alors que $f'\underset{+\infty}{\longrightarrow}0$ et $f''\underset{+\infty}{\longrightarrow}0$.
  ∗ **Deuxième méthode.** Puisque $f''+3f'+2f\underset{+\infty}{\longrightarrow}0$ et $f\underset{+\infty}{\longrightarrow}0$, on a :

$$f''+3f'\underset{+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Cette dernière propriété nous permet de prouver que f' et f'' tendent vers 0 en $+\infty$ (*cf.* exercice 17.8).

17.10 1. Soit $t_0\in Z_u$. Comme $u(t_0)=0$ et que u n'est pas l'application nulle (car sinon la famille (u,v) serait liée), on a $u'(t_0)\neq0$. En effet, si $u'(t_0)$ était nul, alors u et l'application nulle seraient solutions du même problème de Cauchy :

$$y''+q(t)\,y=0\qquad\text{et}\qquad\big(y(t_0),y'(t_0)\big)=(0,0)$$

et alors la partie « unicité » du théorème de Cauchy linéaire donnerait $u=0$.
Comme u est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle l'est en particulier au point t_0, d'où :

$$\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0}\underset{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}}{\longrightarrow}u'(t_0)$$

autrement dit, comme $u(t_0)=0$:

$$\frac{u(t)}{t-t_0}\underset{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}}{\longrightarrow}u'(t_0).$$

Comme $u'(t_0)\neq0$, la limite précédente assure qu'il existe $r>0$ tel que :

$$\forall t\in\mathbb{R}\cap[t_0-r,t_0+r]\setminus\{t_0\}\quad u(t)\neq0.$$

Cela prouve le résultat souhaité car un tel $r>0$ vérifie :

$$Z_u\cap[t_0-r,t_0+r]=\{t_0\}.$$

2. Notons A l'ensemble des points d'annulation de u sur $]t_0, +\infty[$:

$$A = Z_u \cap]t_0, +\infty[.$$

Montrons que A admet un plus petit élément. L'ensemble A est une partie non vide (car u s'annule sur $]t_0, +\infty[$) et minorée (par t_0) de $\mathbb{R}$, donc possède une borne inférieure.

Notons $t_1 = \inf(A)$ et montrons que $t_1 \in A$.

- Prouvons que $u(t_1) = 0$. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite (α_n) d'éléments de A tendant vers t_1. Le fait que (α_n) soit à valeurs dans A et la continuité de u donnent :

$$\big(\forall n \in \mathbb{N} \quad u(\alpha_n) = 0\big) \qquad \text{et} \qquad u(\alpha_n) \to u(t_1).$$

On a donc $u(t_1) = 0$.

- Prouvons alors que $t_1 \in]t_0, +\infty[$. Sachant que l'on a déjà $t_1 \geqslant t_0$, il suffit de justifier que $t_1 \neq t_0$. D'après la première question, t_0 est un point isolé de A, donc il existe $r > 0$ tel que :

$$Z_u \cap [t_0 - r, t_0 + r] = \{t_0\}.$$

Pour un tel $r > 0$, on a $A \cap [t_0 - r, t_0 + r] = \varnothing$. Donc $t_0 + r$ minore A, ce qui assure $t_0 + r \leqslant t_1$. Par suite, on a $t_1 \neq t_0$.

3. Montrons que la fonction v possède un et un seul point d'annulation dans $]t_0, t_1[$.

- **Existence** Le wronskien $W = u\,v' - u'\,v$ de (u, v) vérifie l'équation différentielle $W' = 0$, donc est constant. Comme il est non nul (car u et v sont linéairement indépendantes), il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u(t)\,v'(t) - u'(t)\,v(t) = k. \qquad (\star)$$

Comme $u(t_0) = 0$, et u n'étant pas la fonction nulle, on a $u'(t_0) \neq 0$.

De même, comme $u(t_1) = 0$, on a $u'(t_1) \neq 0$. D'autre part, u ne s'annulant pas sur l'intervalle $]t_0, t_1[$, elle y garde un signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

On est donc dans l'une des deux situations suivantes :

∗ *Premier cas :* $\forall t \in]t_0, t_1[\quad u(t) > 0$. On a alors :

$$\forall t \in]t_0, t_1[\quad \frac{u(t)}{t - t_0} > 0$$

puis, comme $u'(t_0) = \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \dfrac{u(t)}{t - t_0}$, on a $u'(t_0) \geqslant 0$ et donc $u'(t_0) > 0$.

De la même manière, on obtient $u'(t_1) < 0$.

∗ *Deuxième cas :* $\forall t \in]t_0, t_1[\quad u(t) < 0$. Alors, de même que précédemment, on obtient $u'(t_0) < 0$ et $u'(t_1) > 0$.

Dans les deux cas, la relation $(\star)$, évaluée en t_0 et en t_1, impose d'avoir :

$$v(t_0)\,v(t_1) < 0.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors que la fonction v s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]t_0, t_1[$.

- **Unicité.** À ce stade de l'exercice, on peut affirmer qu'entre deux zéros consécutifs de u la fonction v s'annule au moins une fois. Les rôles de u et v étant symétriques, on en déduit qu'entre deux zéros consécutifs de v la fonction u s'annule au moins une fois. Donc, si v possédait plusieurs points d'annulation sur l'intervalle $]t_0, t_1[$, alors la fonction u devrait aussi s'y annuler, ce qui est contradictoire avec la définition de t_1.

17.11 • Supposons (ii) et montrons qu'il existe une base (f, g) de $\mathcal{S}_0$ avec f paire et g impaire.

∗ Remarquons que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}_0$, la fonction $\tilde{\varphi} : t \mapsto f(-t)$ est également solution de (E). En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\tilde{\varphi}'(t) = -\varphi'(-t) \qquad \text{et} \qquad \tilde{\varphi}''(t) = \varphi''(-t),$$

donc, en utilisant l'imparité de a et la parité de b :

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}''(t) + a(t)\,\tilde{\varphi}'(t) + b(t)\,\tilde{\varphi}(t) &= \varphi''(-t) - a(t)\,\varphi'(-t) + b(t)\,\varphi(-t)\\ &= \varphi''(-t) + a(-t)\,\varphi'(-t) + b(-t)\,\varphi(-t)\\ &= 0.\end{aligned}$$

∗ Par suite, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}_0$, les fonctions :

$$\varphi_P : t \mapsto \varphi(t) + \varphi(-t) \qquad \text{et} \qquad \varphi_I : t \mapsto \varphi(t) - \varphi(-t)$$

sont des solutions de (E) respectivement paire et impaire. S'il existe une solution $\varphi \in \mathcal{S}_0$ qui n'est ni paire ni impaire, alors, les deux fonctions φ_P et φ_I ci-dessus sont toutes deux non nulles donc linéairement indépendantes et forment une base de $\mathcal{S}_0$.

∗ Il reste donc à démontrer qu'il existe une solution de (E) qui ne soit ni paire ni impaire. Pour cela, il suffit de constater que, d'après le théorème de Cauchy linéaire, il existe une solution φ de (E) vérifiant la condition initiale $\big(\varphi(0), \varphi'(0)\big) = (1, 1)$. Une telle solution n'est ni paire (car $\varphi'(0) \neq 0$) ni impaire (car $\varphi(0) \neq 0$).

• Réciproquement, supposons qu'il existe une base (f, g) de $\mathcal{S}_0$ avec f paire et g impaire.

∗ Tout d'abord, le wronskien W de (f, g) :

$$W = fg' - f'g,$$

est une fonction paire et vérifie $W' + aW = 0$, ou encore, puisque W ne s'annule pas : $\dfrac{W'}{W} = -a$. Il en résulte que la fonction a est impaire.

∗ Il reste à montrer que b est paire.
Fixons $t_0 \in \mathbb{R}$ et montrons que $b(-t_0) = b(t_0)$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unique solution de (E) vérifiant $\varphi(t_0) = 1$ et $\varphi'(t_0) = 0$.

⋆ Justifions d'abord que la fonction $\tilde{\varphi} : t \mapsto \varphi(-t)$ est également solution de (E).
Comme φ est solution de (E) et $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}(f, g)$, φ s'écrit :

$$\varphi = \lambda\, f + \mu\, g \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Comme f et g sont respectivement paire et impaire, on montre que :

$$\tilde{\varphi} = \lambda\, f - \mu\, g.$$

On a donc $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Vect}(f, g)$, *i.e.* $\tilde{\varphi}$ est solution de (E).

⋆ En dérivant $\tilde{\varphi}$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \tilde{\varphi}'(t) = -\varphi'(-t) \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}''(t) = \varphi''(-t)$$

donc en particulier :

$$\tilde{\varphi}'(-t_0) = -\varphi'(t_0) \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}''(-t_0) = \varphi''(t_0).$$

Comme $\tilde{\varphi}$ vérifie l'équation (E) en $-t_0$, on obtient :

$$\varphi''(t_0) - a(-t_0)\,\varphi'(t_0) + b(-t_0)\,\varphi(t_0) = 0$$

autrement dit, étant donné la condition initiale vérifiée par φ :

$$\varphi''(t_0) + b(-t_0) = 0.$$

D'autre part, en écrivant que φ vérifie l'équation en t_0 et étant donné la condition initiale vérifiée par φ, on a :

$$\varphi''(t_0) + b(t_0) = 0.$$

Il en résulte que $b(-t_0) = b(t_0)$. D'où le résultat.

17.12 Comme A est symétrique réelle, il existe une base orthonormée $(V_1, \dots, V_n)$ de vecteurs propres de A. Comme $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, les valeurs propres associées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont toutes strictement positives.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons :

$$\begin{array}{rccc} X_k : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & e^{\lambda_k t} V_k. \end{array}$$

La famille $(X_1, \dots, X_n)$ est alors une base de l'espace $\mathcal{S}_0$ des solutions de $X' = AX$.
Il existe donc $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, X_k.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a, puisque $(V_1, \dots, V_n)$ est une base orthonormée :

$$\big\|\varphi(t)\big\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{\lambda_k t} V_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2\, e^{2\lambda_k t}.$$

Comme les α_k ne sont pas tous nuls et que les λ_k sont tous strictement positifs, la fonction $t \mapsto \|\varphi(t)\|^2$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers 0 en $-\infty$.
Comme la fonction $t \mapsto \|\varphi(t)\|^2$ est de plus continue, elle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En composant par la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$, bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$, on obtient le résultat souhaité.

17.13 On sait que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec leur ordre de multiplicité, la matrice A s'écrit :

$$A = P\,T\,P^{-1} \quad \text{avec} \quad P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice T^k est triangulaire supérieure avec une diagonale constitué de $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$. Par suite, la matrice $\exp(T)$ est aussi triangulaire supérieure, de la forme :

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Le spectre de $\exp(T)$ vaut donc $\operatorname{sp}\big(\exp(T)\big) = \big\{e^{\lambda_k}\,;\ k \in [\![1, n]\!]\big\}$.

Cela prouve le résultat souhaité car, comme $\exp(A) = P\exp(T)\,P^{-1}$, les matrices $\exp(A)$ et $\exp(T)$ sont semblables donc ont même spectre.

17.14 Considérons l'application Ψ qui à une fonction $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ associe la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \Psi(X) : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & t & \longmapsto & X(t+T) \end{array}$$

Comme A est T-périodique, si X est solution de (Sys), alors $\Psi(X)$ l'est aussi car pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Psi(X)'(t) = X'(t+T) &= A(t+T)\,X(t+T) \\ &= A(t)\,X(t+T) && (T\text{-périodicité de } A) \\ &= A(t)\,\Psi(X)(t) && (\text{par définition de } \Psi) \end{aligned}$$

Ainsi, l'application Ψ induit un endomorphisme de l'espace $\mathcal{S}$ des solutions de (Sys). Comme $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non nul de dimension finie (il est de dimension n), cet endomorphisme induit admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Un vecteur propre associé à cette valeur propre λ est une solution non nulle φ de (Sys) vérifiant :

$$\Psi(\varphi) = \lambda\,\varphi, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t+T) = \lambda\,\varphi(t).$$

17.15 1. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Puisque les matrices $t\lambda I_p$ et tN commutent, on a :

$$\exp\big(t(\lambda I_p + N)\big) = \exp\big(t\lambda I_p + tN\big) = \exp(\lambda t I_p)\exp(tN) = e^{\lambda t}\exp(tN).$$

Puisque N est nilpotente et appartient à $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on a :

$$\forall k \geqslant p \quad N^k = 0 \qquad \text{et donc} \qquad \exp(tN) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(tN)^k}{k!}\cdot$$

Par suite :

$$\exp\big(t(\lambda I_p + N)\big) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{e^{\lambda t} t^k}{k!}\, N^k.$$

Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, on a $\left|e^{\lambda t} t^k\right| = e^{\mathrm{Re}(\lambda)\, t} |t|^k$, et donc comme $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, les croissances comparées donnent $e^{\lambda t} t^k \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit :

$$\forall k \in [\![0, p-1]\!] \quad \frac{e^{\lambda t} t^k}{k!}\, N^k \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

puis :

$$\exp\big(t(\lambda I_p + N)\big) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b)
- Si l'on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A, on sait que $\mathbb{C}^n$ s'écrit comme somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent. Matriciellement, cela signifie que A s'écrit :

$$A = P\, \widetilde{A}\, P^{-1} \quad \text{avec} \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix} \qquad (\star)$$

où, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, A_k est un bloc diagonal de la forme :

$$A_k = \lambda_k I_{p_k} + N_k \quad \text{avec} \quad \lambda_k \in \mathrm{sp}(A) \quad \text{et} \quad N_k \text{ nilpotente.}$$

- Pour $t \in \mathbb{R}$, en écrivant $t\widetilde{A} = \begin{pmatrix} tA_1 & & \\ & \ddots & \\ & & tA_m \end{pmatrix}$ et en effectuant des produits par blocs, on constate que :

$$\exp(t\widetilde{A}) = \begin{pmatrix} \exp(tA_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(tA_m) \end{pmatrix}.$$

Or, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, comme $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$, le résultat de la première question donne $\exp(tA_k) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On a donc $\exp(t\widetilde{A}) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

- Comme $A = P\, \widetilde{A}\, P^{-1}$, on a :

$$\big(\forall k \in \mathbb{N} \quad (tA)^k = P\, (t\widetilde{A})^k\, P^{-1}\big) \quad \text{puis} \quad \exp(tA) = P\, \exp(t\widetilde{A})\, P^{-1}.$$

Donc, par continuité de l'application $M \mapsto P\, M\, P^{-1}$, on obtient :

$$\exp(tA) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cela répond à la question puisque les solutions du système différentiel :

$$(\text{Sys}) : X' = AX$$

sont les applications de la forme :

$$t \mapsto \exp(tA)\, X_0 \quad \text{avec} \quad X_0 \in \mathbb{C}^n.$$

2. • Supposons que toutes les solutions de (Sys) soient bornées.

∗ Soit λ une valeur propre de A. En prenant V un vecteur propre de A associé à λ, l'application

$$X : t \mapsto e^{\lambda t} V$$

est solution de (Sys). Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\|X(t)\| = e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\, \|V\|$ et donc :

⋆ si $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, alors $\|X(t)\| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$;

⋆ si $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, alors $\|X(t)\| \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par suite, toutes les solutions de (Sys) étant bornées, on a $\mathrm{sp}(A) \subset i\mathbb{R}$.

∗ Montrons maintenant que A est diagonalisable. Par l'absurde : supposons que cela ne soit pas le cas. Reprenons la relation $(\star)$ utilisée à la question 1b. Comme A n'est pas diagonalisable, au moins un des blocs diagonaux A_k n'est pas une matrice d'homothétie, donc est de taille au moins 2 avec une matrice nilpotente N_k non nulle. Fixons une telle valeur de k, et notons :

$$r = \max\{i \in \mathbb{N} \mid N^i \neq 0\}.$$

On a, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\exp(tA_k) = e^{\lambda_k t} \sum_{k=0}^{r} \frac{t^k}{k!} N^k \quad \text{avec} \quad N^r \neq 0$$

puis, comme $\lambda_k \in i\mathbb{R}$:

$$\big\|\exp(tA_k)\big\| = \left\|\sum_{k=0}^{r} \frac{t^k}{k!} N^k\right\| = \frac{|t|^r}{r!} \underbrace{\left\|\sum_{k=0}^{r} \frac{r!\, t^{k-r}}{k!} N^k\right\|}_{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \|N^r\| \neq 0},$$

Comme $r \geqslant 1$, il en résulte que $\big\|\exp(tA_k)\big\| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc :

$$\big\|\exp(tA)\big\| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Si $(E_1, \ldots, E_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$, alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \max\big(\|ME_1\|, \ldots, \|ME_n\|\big) \end{array}$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La propriété :

$$\big\|\exp(tA)\big\| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

appliquée avec cette norme donne que, parmi les fonctions :

$$t \mapsto \exp(tA)\, E_k \quad \text{pour} \quad k \in [\![1, n]\!]$$

au moins une n'est pas bornée. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse initiale car les fonctions précédentes sont solutions de (Sys).

- Réciproquement, supposons A diagonalisable et $\mathrm{sp}(A) \subset i\mathbb{R}$.
  Il existe $(V_1, \dots, V_n)$ une base de vecteurs propres de A. En notant $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la liste des valeurs propres associées, on a :
  $$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_n) \quad \text{avec} \quad \forall k \in [\![1, n]\!] \quad X_k : t \mapsto e^{\lambda_k t} V_k.$$
  Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le fait que λ_k soit imaginaire pure donne :
  $$\forall t \in \mathbb{R} \quad \left|e^{\lambda_k t}\right| = 1 \quad \text{et donc} \quad \left\|X_k(t)\right\| = \|V_k\|.$$
  Ainsi, les applications $X_1, \dots, X_n$ sont bornées, ainsi que tous les éléments de $\mathcal{S}$ car elles en sont des combinaisons linéaires.

17.16 • En notant $z = x + iy$, on constate que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x''(t) &= -\beta(t)\, y'(t) \\ y''(t) &= \beta(t)\, x'(t) \end{cases} \iff z''(t) = i\beta(t) z'(t).$$
Par suite, le système différentiel (Sys) se traduit sur z par l'équation suivante :
$$(\mathrm{E}) \ : \ z'' - i\beta(t) z' = 0$$
et l'existence d'une solution périodique non constante au système (Sys) équivaut à l'existence d'une solution périodique non constante à l'équation (E).

- *Résolution de* (E).
  Notons $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la primitive de β s'annulant en 0 :
  $$\theta : t \mapsto \int_0^t \beta(u)\mathrm{d}u.$$
  Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions dont la dérivée est de la forme :
  $$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \quad \text{avec} \quad & \lambda \in \mathbb{C}, \\ t & \longmapsto & \lambda e^{i\theta(t)} & & \end{array}$$
  ce qui mène à des solutions de la forme :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \lambda \displaystyle\int_0^t e^{i\theta(u)}\mathrm{d}u + \mu \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2. \end{array}$$

- Il reste à savoir s'il existe des solutions de (E) périodiques non constantes.
  Étant donné la forme des solutions de (E), de telles solutions existent si, et seulement si, la fonction :
  $$\begin{array}{rccc} \varphi \ : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \displaystyle\int_0^t e^{i\theta(u)}\mathrm{d}u \end{array}$$

est périodique non constante.

∗ Supposons qu'il existe $T > 0$ tel que φ soit T-périodique.
Les fonctions φ' et φ'' données par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) = e^{i\theta(t)} \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = i\,\beta(t)\,\varphi'(t),$$

sont également T-périodiques. Donc :

(i) la relation $\beta = -i\,\dfrac{\varphi''}{\varphi'}$ assure que la fonction β est T-périodique ;

(ii) comme $e^{i\theta(T)} = \varphi'(T) = \varphi'(0) = e^{i\theta(0)} = 1$, on en déduit que :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta(T) = \int_0^T \beta(u)\mathrm{d}u = 2k\pi \ ;$$

(iii) comme $\varphi(T) = \varphi(0) = 0$, on a :

$$\int_0^T e^{i\theta(u)}\mathrm{d}u = 0.$$

∗ Réciproquement, supposons les trois conditions précédentes vérifiées et montrons que la fonction φ est T-périodique.
Pour cela, montrons que l'application :

$$\psi : t \mapsto \varphi(t+T) - \varphi(t) = \int_t^{t+T} e^{i\theta(u)}\mathrm{d}u$$

est nulle.

⋆ Considérons :

$$\gamma : t \mapsto \int_t^{t+T} \beta(u)\mathrm{d}u.$$

La fonction γ est dérivable et la T-périodicité de β donne :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma'(t) = \beta(t+T) - \beta(t) = 0$$

L'application γ est donc constante et l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma(t) = \gamma(0) = \int_0^T \beta(u)\mathrm{d}u = 2k\pi.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\theta(t+T) = \int_0^{t+T} \beta(u)\mathrm{d}u = \psi(t+T) + \theta(t) = 2k\pi + \theta(t)$$

et donc :

$$e^{i\theta(t+T)} = e^{i\theta(t)}.$$

⋆ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\psi'(t) = e^{i\theta(t+T)} - e^{i\theta(t)} = 0,$$

donc l'application ψ est constante.

⋆ Enfin, on a, d'après (iii) :

$$\psi(0) = \int_0^T e^{i\theta(u)}\mathrm{d}u = 0,$$

donc ψ est l'application nulle.

17.17 En notant :

$$X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix},$$

L'équation (E) se traduit matriciellement par (EM) : $X' = A\,X + B(t)$.

L'existence d'une solution 2π-périodique à (E) équivaut à l'existence d'une solution 2π-périodique à (EM).

- Justifions qu'une solution $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de (EM) est 2π-périodique si, et seulement si, $X(2\pi) = X(0)$.
  - ∗ Un sens est évident : si X est 2π-périodique, alors on a $X(2\pi) = X(0)$.
  - ∗ Réciproquement, si $X(2\pi) = X(0)$, alors la fonction $\widetilde{X} : t \mapsto X(t+2\pi)$ vérifie :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad \widetilde{X}'(t) &= X'(t + 2\pi) \\ &= AX(t + 2\pi) + B(t + 2\pi) \\ &= A\widetilde{X}(t) + B(t) \qquad \text{(car } B \text{ est } 2\pi\text{-périodique)} \end{aligned}$$

  donc $\widetilde{X}$ est solution de (EM). Comme de plus $\widetilde{X}(0) = X(2\pi) = X(0)$, on peut conclure que les fonctions X et $\widetilde{X}$ sont égales car elles sont solutions d'un même problème de Cauchy. Donc X est 2π-périodique.
- On sait exprimer les solutions de (EM) :

$$X : t \mapsto \exp(tA)\left(X_0 + \int_0^t \exp(-sA)B(s)\mathrm{d}s\right) \quad \text{avec} \quad X_0 \in \mathbb{C}^4.$$

  D'après le point précédent, une telle solution X est 2π-périodique si, et seulement si, $X(2\pi) = X(0)$, ce qui s'écrit :

$$\exp(2\pi A)\left(X_0 + \int_0^{2\pi} \exp(-sA)B(s)\mathrm{d}s\right) = X_0,$$

  ou encore :

$$\big(\exp(2\pi A) - I_4\big)\,X_0 = -\exp(2\pi A)\int_0^{2\pi} \exp(-sA)B(s)\mathrm{d}s.$$

- Justifions que la matrice $\exp(2\pi A) - I_4$ est inversible ; cela prouvera l'existence (et l'unicité) de $X_0 \in \mathbb{C}^4$ vérifiant la condition ci-dessus, et donc l'existence (et l'unicité) d'une solution 2π-périodique.
  Pour justifier que $\exp(2\pi A) - I_4$ est inversible, il suffit de constater que, comme :

$$\mathrm{sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda^4 + 1 = 0\},$$

  on a :

$$i\mathbb{Z} \cap \mathrm{sp}(A) = \varnothing, \quad \text{donc} \quad 2i\pi\mathbb{Z} \cap \mathrm{sp}(2\pi A) = \varnothing,$$

  donc 1 n'est pas valeur propre de $\exp(2\pi A)$ (*cf.* exercice 17.13 de la page 1076).

Chapitre 18 : Calcul différentiel

I Introduction 1098
1 Présentation informelle 1098
2 Remarques préliminaires et conventions 1101
II Différentielle d'une fonction 1101
1 Dérivées partielles 1101
2 Différentielle 1105
III Opérations sur les fonctions différentiables 1110
1 Opérations algébriques 1110
2 Composition 1111
3 Application au calcul des dérivées partielles 1116
IV Fonctions numériques 1118
1 Gradient 1118
2 Extrema 1120
V Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ 1123
1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ 1123
2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ 1126
3 Théorème de Schwarz 1129
VI Applications 1133
1 Vecteurs tangents à une partie 1133
2 Exemples d'équations aux dérivées partielles . . . 1137
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 1143
Exercices 1170

Calcul différentiel 18

Dans ce chapitre, tous les espaces vectoriels sont sur $\mathbb{R}$ et E, F et G désignent des espaces vectoriels non nuls de dimension finie. Ils sont munis de normes, notées en général $\|\ \|$. Enfin, U est un ouvert non vide de E et V un ouvert non vide de F.

I Introduction

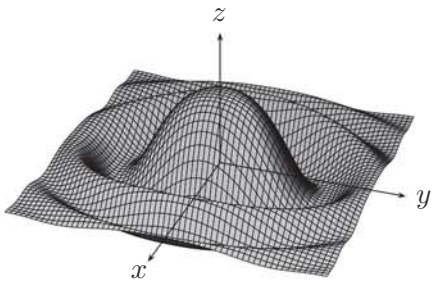
1 Présentation informelle

Ce chapitre a pour but d'étendre si possible aux fonctions définies sur une partie d'un espace vectoriel certains concepts de l'analyse des fonctions de la variable réelle : continuité, dérivabilité, tangente, étude d'extrema, etc.

Considérons une fonction f à valeurs réelles définie sur un ouvert U non vide de $\mathbb{R}^2$. Son graphe :

$$G = \Big\{(x, y, f(x, y))\ ;\ (x, y) \in U\Big\}$$

est alors une surface de $\mathbb{R}^3$.



Pour étudier f, il est naturel de chercher à s'appuyer sur nos connaissances concernant les fonctions de la variable réelle.
Le plus simple est sans doute d'étudier les applications partielles, c'est-à-dire les applications $f_{1,x} : y \mapsto f(x, y)$ et $f_{2,y} : x \mapsto f(x, y)$. D'ailleurs, la représentation des applications partielles est l'un des points de vue adoptés par certains logiciels, tel que PYTHON, pour représenter les surfaces.
Par exemple, dans la figure ci-dessus, les lignes tracées correspondent aux graphes des ces fonctions partielles : intersection de la surface avec des plans verticaux d'équations $x = x_0$ ou $y = y_0$.

Continuité

La démarche qui consiste à étudier les applications partielles est instructive, mais non exempte de pièges. Par exemple, il est facile de vérifier que si f est une fonction continue, alors toutes les applications partielles sont continues. On pourrait facilement penser que la réciproque est vraie, mais il n'en n'est rien.

p.1143

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Démontrer que si f est continue, alors toutes les applications partielles sont continues.
2. En considérant l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) ; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

démontrer que la réciproque est fausse.
Indication. Considérer $x \mapsto f(x,x)$.

De manière générale, pour les limites et la continuité on se reportera au chapitre 5. De plus, dans certains cas, on peut utiliser la méthode ci-dessous.

Point méthode

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant 0 et $f : U \setminus \{0\} \to F$ une fonction.

Pour établir l'existence d'une limite en 0, il est parfois utile d'évaluer $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et de considérer son comportement lorsque r tend vers 0.

p.1143

Exercice 2 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ admet-elle un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$?

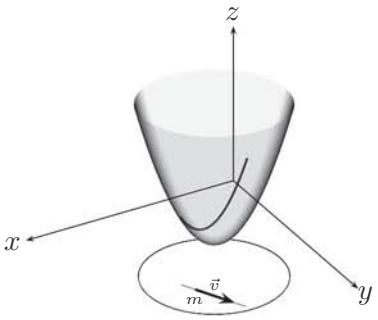
Dérivées partielles

Pour appréhender le comportement d'une fonction au voisinage d'un point (a,b), il est là encore naturel de s'intéresser aux variations de ses applications partielles. Cela conduit à calculer les dérivées de ses applications partielles. Si elles existent, ce sont les dérivées partielles de f, notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, que le lecteur aura déjà rencontrées au cours de ses études dans d'autres disciplines.
Les dérivées partielles constituent un outil pratique, mais à elles seules elles ne permettent pas généraliser la notion de fonction dérivable de manière satisfaisante. L'exercice suivant permet d'appréhender pourquoi.

p.1143

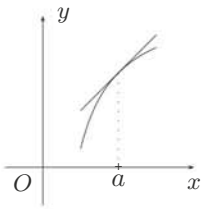
Exercice 3 En prenant l'exemple de l'exercice 1 de la page précédente, montrer qu'une fonction peut avoir des dérivées partielles en $(0,0)$ et pourtant ne pas être continue en ce point.

Étude dans une direction



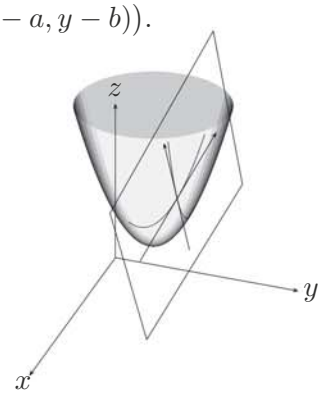
Plus généralement, toujours dans l'optique d'appréhender le comportement d'une fonction au voisinage d'un point $m \in U$, on peut s'intéresser à f dans une direction donnée. Cela veut dire que l'on peut étudier la fonction $t \mapsto f(m+tv)$, où $v \in \mathbb{R}^2$. Pour que cela soit pertinent, il faut pouvoir faire au voisinage de 0 l'étude suivant toutes les directions. C'est pourquoi en calcul différentiel on ne s'intéresse qu'à des fonctions définies sur des ouverts.

Plans tangents



Nous savons que pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable en $a \in I$ si, et seulement si, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Ce développement limité implique que parmi toutes les droites passant par $(a, f(a))$, la tangente, qui est la droite d'équation $y = f(a)+f'(a)(x-a)$, est celle qui approche le mieux le graphe de f en a.
Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ sera différentiable en (a,b) si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en (a,b) c'est-à-dire s'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel qu'au voisinage de (a,b) on ait :

$$f(x,y) = f(a,b) + \alpha(x-a) + \beta(y-b) + o((x-a, y-b)).$$



Cela signifie *grosso modo* que parmi tous les plans affines, le plan d'équation

$$z = f(a,b) + \alpha(x-a) + \beta(y-b)$$

est celui qui approche le mieux le graphe de f en (a,b). C'est le plan tangent au point (a,b,c) à la surface S d'équation $z = f(x,y)$, où l'on a noté $c = f(a,b)$.
Par ailleurs, si $\Gamma(I,\gamma)$ est un arc tracé sur S, il est alors intuitif que la tangente au point (a,b,c) de paramètre t_0 à Γ sera dans le plan tangent au point (a,b,c) à la surface S.

2 Remarques préliminaires et conventions

Invariance par rapport à la norme

Dans la suite du chapitre, nous définirons plusieurs notions telles que les dérivées partielles, les différentielles, etc. Ces définitions se feront à l'aide de limites. Puisque les espaces sont ici tous de dimension finie, ces définitions sont indépendantes du choix des normes.

Identification aux fonctions de plusieurs variables

Lorsque l'on fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E, on sait que l'application Φ définie sur $\mathbb{R}^p$ par $\Phi(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^p$ sur E.

À toute application $f : U \to F$ on peut associer une application $f_{\mathcal{B}}$ définie sur $\Phi^{-1}(U)$ par :

$$f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right).$$

En outre, le domaine de définition de $f_{\mathcal{B}}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. En effet, en tant qu'application linéaire entres des espaces vectoriels de dimension finie, Φ est continue, et donc $\Phi^{-1}(U)$ est un ouvert. De plus, on peut remarquer, en utilisant de plus le fait que Φ^{-1} est continue, que f est une application continue si, et seulement si, $f_{\mathcal{B}}$ l'est.

Il est clair que l'application $f \mapsto f_{\mathcal{B}}$ définit une bijection de $\mathcal{F}(U, F)$ sur $\mathcal{F}\big(\Phi^{-1}(U), F\big)$; ce qui nous autorise à identifier si nécessaire f et $f_{\mathcal{B}}$.

La fonction $f_{\mathcal{B}}$ étant définie sur une partie de $\mathbb{R}^p$, on parle alors de **fonction de plusieurs variables**.

II Différentielle d'une fonction

1 Dérivées partielles

Dérivée suivant un vecteur

Définition 1

Soit $f : U \to F$ une application, a un élément de U et $v \in E$.

La **dérivée de f en a suivant v**, notée $\mathrm{D}_v f(a)$, est, si elle existe, la dérivée de la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ en 0.

Si f admet en tout point de U une dérivée suivant v, l'application $\mathrm{D}_v f : a \mapsto \mathrm{D}_v f(a)$ est l'application **dérivée de f suivant v**.

Remarques

- L'ensemble U étant ouvert, pour tout $a \in U$ la fonction $\varphi : t \mapsto f(a + tv)$ est définie sur un voisinage de 0. En effet, cela est immédiat si $v = 0$. Sinon, il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$, et donc φ est définie sur l'intervalle $\left]-\frac{r}{\|v\|}, \frac{r}{\|v\|}\right[$.

- Pour toute fonction f, on a $\mathrm{D}_0 f(a) = 0$.
- Si U est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $v \neq 0$, et si a est un point de U, alors $\mathrm{D}_v f(a)$ est définie si, et seulement si, la fonction f est dérivable en $a \in U$. On a alors $\mathrm{D}_v f(a) = v f'(a)$.

Exemples

- Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + 5y$, alors $\mathrm{D}_{(2,3)} f(0,0) = 15$. En effet, posons $g : t \mapsto f(2t, 3t)$, qui est définie sur $\mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on a $g(t) = 8t^3 + 15t$ et $g'(t) = 24t^2 + 15$. L'existence de la dérivée de f selon $(2,3)$ en $(0,0)$ en découle et elle vaut 15.
- Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (r,\theta) & \longmapsto & \begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ r\sin\theta & -r\cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$

  Un calcul direct donne $\mathrm{D}_{(1,1)} f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^2. \end{array}$

  Pour $(M,H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
  $$f(M+tH) = M^2 + t(MH + HM) + t^2 H^2.$$
  Il s'ensuit que $\mathrm{D}_H f(M)$ est définie et $\mathrm{D}_H f(M) = MH + HM$.

p.1143

Exercice 4 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\mathrm{D}_H \exp(0)$.

p.1143

Exercice 5 Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_p : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^p. \end{array}$

Pour $(M,H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, calculer $\mathrm{D}_H f_p(M)$.

Dérivées partielles

Définition 2

Supposons $E = \mathbb{R}^p$; soit $j \in [\![1,p]\!]$.

- Pour toute fonction $f : U \to F$ et $j \in [\![1,p]\!]$, la **j-ème application partielle en $a = (a_1, \ldots, a_p)$** est l'application de la variable réelle :
  $$t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \ldots, a_p).$$
- La **j-ème dérivée partielle de f en a** est, si elle existe, la dérivée en 0 de la j-ème application partielle de f en a, que l'on note :
  $$\partial_j f(a) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Remarques

- Puisque U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, les applications partielles sont définies au voisinage de 0.
- La j-ème dérivée partielle de f en a n'est autre que la dérivée de f en a selon le j-ème vecteur de la base canonique.

En fixant une base de E on peut généraliser ces notions aux fonctions définies sur un ouvert d'un espace vectoriel quelconque de dimension finie.

Définition 3

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et une fonction $f : U \to F$.

Pour $a = \sum_{k=1}^{p} a_k e_k \in U$ et $j \in [\![1, p]\!]$:

- la **j-ème application partielle de f en a dans la base $\mathcal{B}$** est la j-ème application partielle de $f_{\mathcal{B}}$ en $(a_1, \dots, a_p)$;
- la **j-ème dérivée partielle de f en a dans la base $\mathcal{B}$**, notée :

$$\partial_j f(a) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

est la j-ème dérivée partielle de $f_{\mathcal{B}}$ en $(a_1, \dots, a_p)$.

Si f admet une j-ème dérivée partielle dans la base $\mathcal{B}$ en tout point, l'application définie sur U par $x \mapsto \partial_j f(x)$ est la **j-ème dérivée partielle de f dans la base $\mathcal{B}$**.

Remarques

- Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la base, on parle plus simplement de « j-ème dérivée partielle de f en a ». Cela est cohérent avec le cas des fonctions de plusieurs variables traité au début de cette section : il s'agit dans ce cas des dérivées partielles dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
- Lorsqu'une fonction de plusieurs variables est définie par une expression du type $f(x, y, z, \dots)$, on peut noter la première dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, la seconde $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, la troisième $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, etc.
  Plus généralement, si $f : U \to F$ est définie par une expression où les variables sont notées u_1, …, u_p (ou toute autre lettre), on pourra noter $\dfrac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial u_p}$ les dérivées partielles.
- Exploitation des symétries. Si $f : U \to F$ est définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$

stable par l'application $(x,y)\mapsto(y,x)$ et si f vérifie :

$$\forall (x,y)\in U \quad f(x,y)=\alpha f(y,x),$$

où $\alpha\in\mathbb{R}^*$, alors $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est définie si, et seulement si, $\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$ l'est et :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(y,x).$$

En effet, en dérivant par rapport à t la relation $f(x,t)=\alpha\, f(t,x)$, on obtient $\partial_2 f(x,t)=\alpha\,\partial_1 f(t,x)$, ce qui donne le résultat en remplaçant t par y et en reprenant la notation traditionnelle des dérivées partielles.

On généralisera sans difficulté aux fonctions définies sur des ouverts de $\mathbb{R}^p$.

Exemples

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2+1}$.

   Un calcul simple donne :

   $$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^2+2xy-x^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

   Puisque $f(x,y)=-f(y,x)$, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

   $$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)=\frac{y^2-2xy-x^2-1}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

2. Si f est l'application définie sur $\mathbb{R}^p$ par :

   $$f(x_1,\dots,x_p)=x_1^1x_2^2\cdots x_p^p,$$

   alors la j-ème dérivée partielle en $x=(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$ est :

   $$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_p)=j\,x_1^1\cdots x_{j-1}^{j-1}x_j^{j-1}x_{j+1}^{j+1}\cdots x_p^p.$$

Attention Rappelons que si $\dim E>1$, une fonction peut avoir toutes ses dérivées partielles en a sans qu'elle soit continue en a (*cf.* l'exercice 3 de la page 1100).

Plus généralement une fonction peut avoir des dérivées en a suivant tout vecteur sans qu'elle soit continue en a.

p.1144

Exercice 6 Soit f la application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\ ;\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. Pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, calculer $\mathrm{D}_{(u,v)}f\,(0,0)$.
2. Calculer $f(x,x^2)$ pour $x\in\mathbb{R}^*$. Conclure.

2 Différentielle

Différentiabilité

Définition 4

Soit $f : U \to F$.

- La fonction f est **différentiable en $a \in U$** s'il existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle qu'au voisinage de 0 :
$$f(a+h) = f(a) + u(h) + \mathrm{o}(h).$$
- La fonction f est **différentiable** si elle est différentiable en tout point de U.

Remarques

- Si f est différentiable en $a \in U$, alors $f(a+h) - f(a) = \mathrm{O}(h)$ au voisinage de 0. En effet l'application u étant linéaire et continue, puisqu'elle est linéaire et définie sur un espace vectoriel de dimension finie, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|u(h)\| \leqslant C\,\|h\|$ pour tout $h \in E$. Par suite, au voisinage de 0 on a $f(a+h) - f(a) = u(h) + \mathrm{o}(h) = \mathrm{O}(h)$.
- On dit qu'une fonction $f : U \to F$ admet un **développement limité à l'ordre 1 en $a \in U$** s'il existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel qu'au voisinage de 0 on ait $f(a+h) = f(a) + u(h) + \mathrm{o}(h)$. Les locutions « être différentiable en a » et « admettre un développement limité à l'ordre 1 en a » sont donc synonymes.
- La notion de différentiabilité est une notion locale : si $f : U \to F$ est une fonction, $a \in U$ et $V \subset U$ est un voisinage ouvert de a, alors f est différentiable en a si, et seulement si, $f_{|V}$ est différentiable en a.
- Contrairement aux fonctions de la variable réelle, pour lesquelles la dérivabilité concerne des fonctions définies sur un intervalle quelconque, la notion de différentiabilité ne s'applique qu'à des fonctions définies sur des ouverts.

Proposition 1 (Différentiabilité et continuité)

Soit $a \in U$ et $f : U \to F$ une fonction différentiable en a. Alors f est continue en a.

Démonstration.

Si f soit différentiable en a, alors au voisinage de 0 on a $f(a+h) - f(a) = \mathrm{O}(h)$. La continuité de f en a en découle. □

Application linéaire tangente

Lemme 2

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle qu'au voisinage de 0 on ait $u(h) = \mathrm{o}(h)$.

L'application u est alors nulle.

Démonstration page 1144

Conséquence Si $f \in \mathcal{F}(U,F)$ et $a \in U$, alors il existe au plus une application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que l'on ait $f(a+h) = f(a) + u(h) + \mathrm{o}(h)$ au voisinage de 0.

Définition 5 (Différentielle en un point)

Soit $f : U \to F$. Si f est différentiable en $a \in U$, l'unique application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que l'on ait $f(a+h) = f(a)+u(h)+\mathrm{o}(h)$ au voisinage de 0 est l'**application linéaire tangente à f en a** ou la **différentielle de f en a**.

Notations

- La différentielle de f en a se note $\mathrm{d}f(a)$.
- La valeur en $h \in E$ de la différentielle de f en a se note $\mathrm{d}f(a) \cdot h$.

Remarques

- La notation $\mathrm{d}f(a) \cdot h$, qui désigne $(\mathrm{d}f(a))(h)$, est utilisée pour alléger les écritures. Noter que le point« $\cdot$ » ne correspond pas à un produit scalaire.
- Puisque $\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire entres espaces vectoriels de dimension finie, $\mathrm{d}f(a)$ est continue et au voisinage de 0 on a $\mathrm{d}f(a)\cdot h = \mathrm{O}(h)$.
- Lorsque $f : U \to F$ est différentiable en a, le développement limité de f en a à l'ordre 1 s'écrit :
$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \mathrm{o}(h).$$
- Caractère local de la différentielle : si $f : U \to F$ est une fonction différentiable en $a \in U$ et $V \subset U$ est un voisinage ouvert de a, alors la différentielle de f en a et la différentielle de $f_{|V}$ en a coïncident.

Proposition 3 (Cas d'une seule variable)

Supposons $E = \mathbb{R}$ et considérons un intervalle ouvert U.

Une application $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$ si, et seulement si, f est dérivable en a et alors $\mathrm{d}f(a)$ est l'application linéaire $h \mapsto h\, f'(a)$.

Principe de démonstration. Utiliser la définition de la dérivabilité et remarquer que les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans F sont les applications de la forme $t \mapsto tu$, avec $u \in F$.

Démonstration page 1144

Remarque Avec les notations de la proposition précédente, $f'(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot 1$.

Définition 6

Soit une application $f : U \to F$.

- Si f est différentiable, alors la **différentielle de f** est l'application :
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f : & U & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ & x & \longmapsto & \mathrm{d}f(x). \end{array}$$
- La fonction f est de **classe $\mathcal{C}^1$** si elle est différentiable et si l'application $\mathrm{d}f$ est continue.

Notation L'ensemble des fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ définies sur U à valeurs dans F est noté $\mathcal{C}^1(U,F)$.

Point méthode

Pour démontrer qu'une fonction $f : U \to F$ est différentiable en a en utilisant la définition :

- il faut trouver au préalable un « candidat » u pour $\mathrm{d}f(a)$,
- il faut ensuite établir $f(a+h) = f(a) + u(h) + \mathrm{o}(h)$ au voisinage de 0.

Pour trouver un « candidat » on peut évaluer $f(a+h) - f(a)$ et chercher à détecter une partie « principale » linéaire.
Toutefois, des méthodes souvent plus efficaces seront données plus loin.

Exemple Si E est un espace euclidien, alors $f : x \mapsto \|x\|^2$ est différentiable.
En effet, E est un ouvert et pour tout $(x,h) \in E^2$:
$$f(x+h) = f(x) + 2(\,x \mid h\,) + \|h\|^2.$$
Ainsi, au voisinage de 0, on a $f(x+h) = f(x) + 2(\,x \mid h\,) + \mathrm{o}(h)$. Puisque l'application $u : h \mapsto (\,x \mid h\,)$ est linéaire, il s'ensuit que f est différentiable en x et $\mathrm{d}f(x) : h \mapsto 2(\,x \mid h\,)$.

p.1145

Exercice 7 Démontrer que la fonction $f : \begin{array}{rccc} & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & M^2 \end{array}$ est différentiable et donner sa différentielle.

p.1145

Exercice 8 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\ ; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
est-elle différentiable en 0 ?

Différentielle et dérivée selon un vecteur

Proposition 4

Soit $f : U \to F$ une fonction différentiable en $a \in U$. Alors la dérivée de f en a selon tout vecteur $v \in E$ existe et :

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot v.$$

Principe de démonstration. Remplacer h par tv dans : Démonstration page 1145

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \|h\| \, \varepsilon(h).$$

Corollaire 5

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $f : U \to F$.

- Si f est différentiable en $a \in U$, alors, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la dérivée partielle $\partial_j f(a)$ est définie et $\partial_j f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot e_j$.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors toutes les dérivées partielles sont définies et continues.

Démonstration page 1146

p.1146 **Exercice 9** Démontrer qu'une norme sur E n'est jamais différentiable en 0.

Corollaire 6

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Si $f : U \to F$ est une fonction différentiable en $a \in U$, alors, pour tout $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$, on a :

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = \sum_{j=1}^{p} h_j \, \partial_j f(a).$$

Principe de démonstration. Utiliser la linéarité de $\mathrm{d}f(a)$ et le corollaire 5.

Démonstration page 1146

Point méthode

Pour démontrer qu'une fonction $f : U \to F$ est différentiable en a en utilisant la définition, on peut introduire une application définie :

- soit par $u : h \mapsto \mathrm{D}_h f(a)$, puis vérifier que u est linéaire,
- soit par $u : h \mapsto \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a)$.

Ensuite, on cherche à démontrer que u est la différentielle de f en a, c'est-à-dire que $f(a+h) - f(a) - u(h) = \mathrm{o}(h)$.

p.1146

Exercice 10 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

est-elle différentiable en 0 ?

Premiers exemples

Proposition 7 (Différentielles des applications constantes)

Soit $f : U \to F$ une fonction constante. Elle est alors de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}f = 0$.

Démonstration page 1147

Remarque La réciproque est fausse. On verra qu'elle est vraie si U est de plus connexe par arcs.

p.1147

Exercice 11 Donner un exemple de fonction différentiable non constante dont la différentielle est nulle.

Proposition 8 (Différentielle d'une application linéaire)

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. L'application u est alors de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}u(a) = u$ pour tout $a \in U$.

Démonstration page 1147

Remarque Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. La restriction $u_{|U}$ est différentiable en tout point a de U et $\mathrm{d}(u_{|U})(a) = u$.

Proposition 9 (Différentielle d'une application bilinéaire)

Toute application bilinéaire $B : E \times F \to G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $(a,b) \in E \times F$ on a :

$$\forall (h,k) \in E \times F \quad \mathrm{d}B(a,b)\cdot(h,k) = B(a,k) + B(h,b).$$

Démonstration page 1147

Matrices jacobiennes

Posons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une base de F. Soit $f : U \to F$ une fonction différentiable en $a \in U$. Notons $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e'_i$. Rappelons que les f_i sont les applications composantes de f dans la base $\mathcal{B}'$. On sait qu'une fonction de la variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie est dérivable si, et seulement si, toutes les applications composantes sont dérivables (*cf.* la proposition 3 de la page 345). Ainsi, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, puisque $\partial_j f(a)$ est définie, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, les dérivées partielles $\partial_j f_i(a)$ sont définies et $\partial_j f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_j f_i(a)\, e'_i$.

Proposition 10

Avec les hypothèses précédentes, la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est $\left(\partial_j f_i(a)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Démonstration page 1148

Remarque Avec les notations de la proposition 10, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors toutes les applications $\partial_j f_i$ sont continues.

Définition 7

Lorsque $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ est une fonction différentiable en $a \in U$, la **matrice jacobienne de f en a**, notée $Jf(a)$ est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques, c'est-à-dire :

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

Remarques La matrice $Jf(a)$ se note également $\left(\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}\right)(a)$.

III Opérations sur les fonctions différentiables

1 Opérations algébriques

Proposition 11 (Linéarité de la différentielle)

Soit f et g deux applications de U dans F.

1. Si f et g sont différentiables en $a \in U$, alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, l'application $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et :
$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda\,\mathrm{d}f(a) + \mu\,\mathrm{d}g(a).$$
2. Si f et g sont différentiables sur U, alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, l'application $\lambda f + \mu g$ est différentiable et :
$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda\,\mathrm{d}f + \mu\,\mathrm{d}g.$$
3. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, l'application $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 1148

Corollaire 12

L'ensemble $\mathcal{C}^1(U,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U,F)$.

Proposition 13 (Produit de fonctions réelles)

Soit f et g deux applications de U dans $\mathbb{R}$.

1. Si f et g sont différentiables en a, alors fg est différentiable en a et :
$$\mathrm{d}(fg)(a) = g(a)\,\mathrm{d}f(a) + f(a)\,\mathrm{d}g(a).$$
2. Si f et g sont différentiables sur U, alors fg est différentiable et :
$$\mathrm{d}(fg) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g.$$
3. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $f\,g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 1148

Corollaire 14

L'ensemble $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ est muni d'une structure d'algèbre pour les lois usuelles.

Démonstration. Les théorèmes 11 de la page ci-contre et 13 donnent facilement que $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(U,\mathbb{R})$. □

Proposition 15

Les applications polynomiales sur E sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 1149

p.1149 **Exercice 12** Justifier que l'application f définie par $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+xyz$ sur $\mathbb{R}^3$ est différentiable et donner $\mathrm{d}f$.

p.1149 **Exercice 13** Justifier que l'application det définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa différentielle.

2 Composition

Théorème 16

Soit $f : U \to F$ et $g : V \to G$ telles que $f(U) \subset V$.

1. Si f est différentiable en $a \in U$ et si g est différentiable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et :
$$\mathrm{d}(g\circ f)(a) = \mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}f(a).$$
2. Si f et g sont différentiables sur U et V respectivement, alors $g \circ f$ est différentiable.
3. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 1150

p.1151

Exercice 14 Avec les notations du théorème 16 de la page précédente, on trouve parfois la formule $\mathrm{d}(g \circ f) = (\mathrm{d}g \circ f) \cdot \mathrm{d}f$. Quel sens donner au « $\cdot$ » dans cette expression ?

Image d'un arc par une fonction différentiable

Proposition 17

Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, ainsi que $\gamma : I \to U$ et $f : U \to F$. Si γ est dérivable en $t_0 \in I$ et si f est différentiable en $a = \gamma(t_0)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et :

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \mathrm{d}f(a) \cdot \gamma'(t_0).$$

Principe de démonstration. Remarquer que $(f \circ \gamma)'(t_0) = \mathrm{d}(f \circ \gamma)(t_0) \cdot 1$ et utiliser le théorème 16 de la page précédente.

Démonstration page 1151

Cas particulier fondamental

Dans le cas où $\gamma : t \mapsto a + th$ est définie sur $[0,1]$, alors, pour tout $t \in [0,1]$ on a $(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(a+th) \cdot h$, *i.e.* :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(a+th)\big) = \mathrm{d}f(a+th) \cdot h = \mathrm{D}_h f(a+th).$$

Un autre cas particulier important

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$. Si $f : U \to F$ est une fonction différentiable et si $t \mapsto \big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big)$ est une fonction dérivable sur un intervalle d'intérieur non vide I à valeurs dans U, alors la fonction $g : t \mapsto f\big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big)$ est dérivable et, pour tout $t \in I$:

$$g'(t) = \sum_{j=1}^{p} x_j'(t)\, \frac{\partial f}{\partial x_j}\big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big).$$

Exemple Considérons une quantité physique qui dépend du temps et de l'espace. Cela peut être modélisé en introduisant une fonction f : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & F \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & f\big(x,y,z,t\big). \end{array}$

La position dans l'espace d'un point matériel au cours du temps est donnée par une fonction $\gamma : t \mapsto \big(x(t), y(t), z(t)\big)$. Posons $h : t \mapsto f\big(x(t), y(t), z(t), t\big)$. Si f est différentiable et γ dérivable, alors la fonction h est dérivable et :

$$h'(t) = x'(t)\, \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(t), t\big) + y'(t)\, \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(t), t\big) + z'(t)\, \frac{\partial f}{\partial z}\big(\gamma(t), t\big) + \frac{\partial f}{\partial t}\big(\gamma(t), t\big).$$

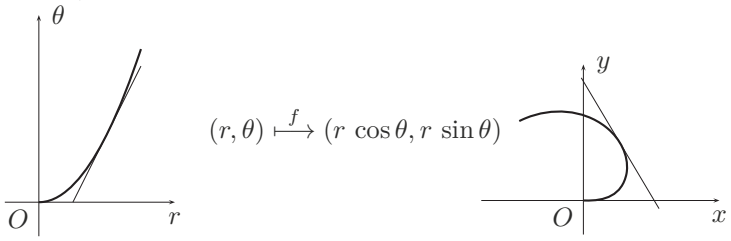
On écrit de manière plus simple, en omettant le point sur lequel les dérivées partielles de f sont évaluées :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(f\big(x(t), y(t), z(t), t\big)\Big) = x'(t)\, \frac{\partial f}{\partial x} + y'(t)\, \frac{\partial f}{\partial y} + z'(t)\, \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Interprétation géométrique

Soit t_0 un paramètre régulier d'un arc Γ paramétré par γ. Si $\mathrm{d}f$ est injective en $a = \gamma(t_0)$, alors t_0 est un paramètre régulier de l'arc $f(\Gamma)$. Dans ce cas, si $a + \mathbb{R}\vec{u}$ est la tangente à Γ au point de paramètre t_0, alors la tangente à $f(\Gamma)$ au point de paramètre t_0 est $f(a) + \mathbb{R}\,\mathrm{d}f(a)\cdot\vec{u}$.

Exemple Considérons l'arc Γ paramétré par $\gamma : t \mapsto (t, t^2)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'application f définie sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $f(r,\theta) = (r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)$.



Admettons que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ (conséquence du fait que ses fonctions composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ par les théorèmes généraux). La matrice de $\mathrm{d}f(r,\theta)$ dans la base canonique est :

$$Jf(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Pour tout $(r,\theta) \in U$, on a $\det\big(Jf(r,\theta)\big) = r$ et donc $\mathrm{d}f(r,\theta)$ est injective. Le point a de Γ de paramètre $r > 0$ est régulier pour Γ ; la tangente en ce point est dirigée par le vecteur $\vec{u} = (1, 2r)$. Ainsi, le point de paramètre r est régulier pour l'arc $f(\Gamma)$. La tangente passe par $b = \gamma(a) = (r\cos r^2, r\sin r^2)$ et elle est dirigée par $\vec{v} = (\cos r^2 - 2r^2\sin r^2, \sin r^2 + 2r^2\cos r^2)$. Ce dernier vecteur peut être obtenu, soit directement en dérivant $r \mapsto (r\cos r^2, r\sin r^2)$, soit matriciellement :

$$V = Jf(r, r^2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2r \end{pmatrix}.$$

Composition par une fonction de la variable réelle

Proposition 18

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, où I est un intervalle d'intérieur non vide et $f(U) \subset I$.
L'application $\varphi \circ f$ est alors différentiable et :

$$\mathrm{d}(\varphi\circ f) = (\varphi'\circ f)\,\mathrm{d}f.$$

Si f et φ sont de plus de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 1151

p.1152

Exercice 15 On suppose que F est un espace euclidien. Soit $f : U \to F$ une fonction différentiable en $a \in U$ telle que $f(a) \neq 0$. Montrer que la fonction $\|f\|$ est différentiable en a et calculer $\mathrm{d}\|f\|(a)$.

Proposition 19 (Différentielle d'une inverse)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction ne s'annulant pas.

- Si f est différentiable en a, alors $1/f$ est différentiable en a et :
$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)(a) = -\frac{\mathrm{d}f(a)}{f^2(a)}.$$
- Si f est différentiable sur U, alors $1/f$ est également différentiable et :
$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\mathrm{d}f}{f^2}.$$
- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $1/f$ est également de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. Il s'agit de la proposition 18 de la page précédente appliquée à f et la fonction $\varphi : t \mapsto 1/t$. □

Exemple Toute fonction rationnelle sur E est différentiable sur tout ouvert où elle est définie.

Différentielles et applications linéaires

Proposition 20 (Composition par une application linéaire)

Soit $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $f : U \to F$.

- Si f est différentiable en $a \in U$, alors $u \circ f$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(u \circ f)(a) = u \circ \mathrm{d}f(a)$.
- Si f est différentiable sur U, alors $u \circ f$ est différentiable et :
$$\mathrm{d}(u \circ f) = u \circ \mathrm{d}f.$$
- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $u \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Principe de démonstration. Utiliser le théorème 16 de la page 1111 et la proposition 8 de la page 1109.

Démonstration page 1152

Corollaire 21

Soit $\mathcal{B}'$ une base de F et $f : U \to F$.

1. La fonction f est différentiable en $a \in U$ si, et seulement si, toutes les applications composantes sont différentiables en a et l'on a alors :
$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \left(\mathrm{d}f(a)\right)_i = \mathrm{d}f_i(a).$$
2. La fonction f est différentiable sur U si, et seulement si, toutes les applications composantes sont différentiables.
3. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si, toutes les applications composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 1152

p.1152

Exercice 16 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M^p$.

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer $\mathrm{d}f$.

Notation différentielle

Cette notation est hors programme, mais elle est omniprésente en physique, en science de l'ingénieur, etc.

On suppose E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, l'application $\sum_{k=1}^{p} x_k e_k \mapsto x_j$ est linéaire. Elle est donc différentiable et égale à sa différentielle en tout point. Cela mène à noter, pour $j \in [\![1, p]\!]$:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}x_j : & E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ & x & \longmapsto & x_j. \end{array}$$

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable en $a \in U$, pour tout $h \in E$ on a :

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, h_k.$$

Puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut alors écrire :

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, \mathrm{d}x_j.$$

Si de plus f est différentiable sur U : $\boxed{\mathrm{d}f = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x_j}$

Différentielles et applications bilinéaires

Théorème 22

Soit F_1 et F_2 deux espaces vectoriels non nuls de dimension finie et $B : F_1 \times F_2 \to F$ une application bilinéaire. Considérons également $f_1 : U \to F_1$ et $f_2 : U \to F_2$ deux applications et posons :

$$B(f_1, f_2) : x \mapsto B\big(f_1(x), f_2(x)\big).$$

- Si f_1 et f_2 sont différentiables en $a \in U$, alors $B(f_1, f_2)$ est différentiable en a et :

  $$\forall h \in E \quad \mathrm{d}\big(B(f_1, f_2)\big)(a) \cdot h = B\big(\mathrm{d}f_1(a) \cdot h, f_2(a)\big) + B\big(f_1(a), \mathrm{d}f_2(a) \cdot h\big).$$

- Si f_1 et f_2 sont différentiables sur U, alors $B(f_1, f_2)$ est différentiable.
- Si f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $B(f_1, f_2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 1152

Remarque On retrouve de manière indépendante le résultat de la proposition 13 de la page 1111 concernat le produit de fonctions différentiables.

Exemple Supposons que F soit un espace euclidien. Si $f : U \to F$ et $g : U \to F$ sont deux applications différentiables en $a \in U$, alors $\varphi = (\, f \mid g \,)$ est différentiable en a et :

$$\forall h \in E \quad \mathrm{d}\varphi(a) \cdot h = (\, \mathrm{d}f(a) \cdot h \mid g(a) \,) + (\, f(a) \mid \mathrm{d}g(a) \cdot h \,).$$

En particulier :

$$\forall h \in E \quad \mathrm{d}\left(\|f\|^2\right)(a) \cdot h = 2\,(\, f(a) \mid \mathrm{d}f(a) \cdot h \,).$$

Corollaire 23

Si F est en plus muni d'une structure d'algèbre, alors $\mathcal{C}^1(U, F)$ est une algèbre pour les lois usuelles.

p.1153

Exercice 17 Soit f l'application définie sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M^{-1}$.

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer $\mathrm{d}f$.

3 Application au calcul des dérivées partielles

Proposition 24 (Matrice jacobienne d'une composée)

Supposons $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^n$ et $G = \mathbb{R}^m$. Soit $f : U \to F$ et $g : V \to G$ telles que $f(U) \subset V$.

Si f est différentiable en $a \in U$ et si g est différentiable en $b = f(a)$, alors :

$$J(g \circ f)(a) = Jg(b) \times Jf(a)$$

Démonstration.

Il s'agit de la traduction matricielle du premier point du théorème 16 de la page 1111. □

La proposition précédente est également un cas particulier du théorème suivant.

Théorème 25

Soit $f : U \to F$ différentiable en $a \in U$ et $g : V \to G$ différentiable en $b = f(a)$ telles que $f(U) \subset V$. On pose $h = g \circ f$.

Dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a alors pour tout $j \in [\![1, p]\!]$:

$$\partial_j h(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_j f_i(a)\, \partial_i g(b).$$

Principe de démonstration. Démonstration page 1153

Utiliser la relation $\partial_j h(a) = \mathrm{d}h(a) \cdot e_j$, ainsi que la différentielle de la composée de deux applications différentiables et l'expression de la différentielle à l'aide des dérivées partielles.

Remarques

- La formule qui est donnée est plus facile à retenir avec les notations $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$:

$$\boxed{\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\,\frac{\partial g}{\partial y_i}(b)} \tag{1}$$

- Dans le cas où g est à valeurs réelles, les $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y_i}(b)$ sont des scalaires. On peut alors réécrire (1) dans un ordre « plus naturel » :

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_i}(b)\,\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\cdot$$

Règle de la chaîne

On rencontre très fréquemment le cas particulier où $E=\mathbb{R}^p$, $F=\mathbb{R}^n$ et $G=\mathbb{R}$. Considérons $f:V\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable ainsi que des fonctions différentiables $x_i:U\to\mathbb{R}$, avec $i\in[\![1,n]\!]$, telles que l'application :

$$\Phi:u\mapsto\big(x_1(u),\dots,x_n(u)\big)$$

soit à valeurs dans V. Considérons enfin g l'application définie par :

$$\forall(u_1,\dots,u_p)\in V\quad g(u_1,\dots,u_p)=f\big(x_1(u_1,\dots,u_p),\dots,x_n(u_1,\dots,u_p)\big),$$

c'est-à-dire $g=f\circ\Phi$. L'application Φ étant différentiable, le théorème 25 de la page précédente donne, pour tout $j\in[\![1,p]\!]$ et $(u_1,\dots,u_p)\in U$:

$$\frac{\partial g}{\partial u_j}(u_1,\dots,u_p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(x_1(u_1,\dots,u_p),\dots,x_n(u_1,\dots,u_p)\big)\,\frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u_1,\dots,u_p)\cdot$$

On retient facilement cette relation, dite **règle de la chaîne**, sous la forme concise ci-dessous, où les points où sont évaluées les dérivées partielles sont sous-entendus.

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial u_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\frac{\partial x_i}{\partial u_j}}$$

Cette notation est certes abusive, mais elle est très efficace. Il faut simplement ne pas perdre de vue, pour chaque dérivée partielle, le point où elle est évaluée.

Exemple Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$. Par opérations sur les fonctions différentiables, les applications $(r,\cos\theta)\mapsto r\cos\theta$ et $(r,\cos\theta)\mapsto r\sin\theta$ sont différentiables. Par conséquent la fonction g est différentiable et pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial r}=\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial g}{\partial\theta}=-r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\cdot$$

p.1153

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.
On pose $g : (x, y) \mapsto f(x+y\,,\, xy)$. Calculer en tout point (x, y) les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

IV Fonctions numériques

1 Gradient

Dans cette section, E est un espace euclidien.
Rappelons (*cf.* le théorème 5 de la page 798) que pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un unique $u \in E$ tel que :

$$\forall h \in E \quad \varphi(h) = (\, u \mid h\,).$$

Il s'ensuit que si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$, il existe un unique $u \in E$ tel que :

$$\forall h \in E \quad \mathrm{d}f(a) \cdot h = (\, u \mid h\,).$$

Cela conduit à la définition suivante.

Définition 8

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $a \in U$. Le **gradient de f en a**, noté $\nabla f(a)$, est l'unique élément de E vérifiant :

$$\forall h \in E \quad \mathrm{d}f(a) \cdot h = (\, \nabla f(a) \mid h\,).$$

Proposition 26 (Composantes du gradient en base orthonormée)

On suppose E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.
Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable en $a \in U$, alors :

$$\nabla f\,(a) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a)\, e_j.$$

Démonstration page 1154

Corollaire 27

On munit $E = \mathbb{R}^p$ du produit scalaire canonique. Si $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $a \in U$, alors :

$$\nabla f\,(a) = (\partial_1 f(a), \ldots, \partial_p f(a)).$$

Remarque Lorsque f et g sont des fonctions réelles différentiables définies sur un ouvert d'un espace euclidien et φ une fonction réelle de la variable réelle, on obtient facilement les relations suivantes, qui ne sont que des reformulations

des calculs de différentielle :

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$
$$\nabla(fg) = g\,\nabla f + f\,\nabla g$$
$$\nabla(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)\,\nabla f$$
$$\nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\nabla f}{f^2}$$

Première interprétation géométrique du gradient

De manière informelle, le gradient donne la direction de « variation maximale » de f. Plus précisément, on dispose du résultat suivant.

Proposition 28

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $a \in U$.
Si $\nabla f(a) \neq 0$, alors la fonction $h \mapsto \mathrm{D}_h f(a)$ restreinte à la sphère unité admet un unique maximum. Celui-ci est le point de la sphère colinéaire et de même sens que $\nabla f(a)$.

Principe de démonstration. Démonstration page 1154

Utiliser l'expression $\mathrm{d}f(a) \cdot h = (\nabla f(a) \mid h)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Interprétation géométrique

La proposition précédente indique que $\nabla f(m)$ donne la direction dans laquelle f croît le plus vite au voisinage de m.
Considérons une surface S d'équation $z = f(x, y)$. On peut de manière informelle interpréter la proposition 28 de la manière suivante : parmi toutes les droites affines tangentes à S en $(x_0, y_0, z_0) \in S$, il en existe une unique de « pente » maximale. Celle-ci est la tangente en 0 à l'arc paramétré par :



$$\gamma : t \mapsto \big(x_0 + ta, y_0 + tb, f(x_0 + ta, y_0 + tb)\big),$$

où $m = (x_0, y_0)$, et $\nabla f(m) = (a, b)$.
Voici une façon ludique de résumer cela : en haut d'une pente de ski, pour dévaler la pente il vaut mieux positionner ses skis dans le sens opposé du gradient, du moins si l'on veut aller vite.

2 Extrema

Définition 9 (Extremum local)

Soit A une partie de E, ainsi qu'une application $f : A \to \mathbb{R}$ et $x \in A$.

- La fonction f admet un **maximum local** en a s'il existe un voisinage W de a tel que :
$$\forall y \in W \cap A \quad f(y) \leqslant f(x).$$
- La fonction f admet un **minimum local** en a s'il existe un voisinage W de a tel que :
$$\forall y \in W \cap A \quad f(y) \geqslant f(x).$$
- La fonction f admet un **extremum local** en a si elle admet un maximum local ou un minimum local.

Remarques

- Il est clair si f admet un extremum (global) en a, alors il admet un extremum local.
- Dans ce contexte, déterminer la nature d'un point x, consiste à déterminer si f admet un maximum, un minimum ou pas, en x.

Théorème 29

Soit une application $f : U \to \mathbb{R}$. Si f admet un extremum local en a et si f est différentiable en a, alors $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Principe de démonstration. Remarquer que si f admet un extremum local en a, alors pour tout $h \in E$ la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto f(a+th)$ admet un extremum local en 0.

Démonstration page 1154

Jusqu'à présent dans ce chapitre nous n'avons considéré que des fonctions définies sur des ouverts. Si A est une partie non vide de E, on dira que $f : A \to F$ est différentiable en a si, et seulement si, $a \in \overset{\circ}{A}$ et $f_{|\overset{\circ}{A}}$ est différentiable en a. Dans ces conditions la différentielle de f en a est celle de $f_{|\overset{\circ}{A}}$.

Définition 10

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$. Le point a est un **point critique de f** :

- si le point a est un élément de l'intérieur de A et
- si la fonction f est différentiable en a avec $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Remarque Les extrema, s'ils existent, d'une fonction différentiable sur un ouvert sont atteints en des points critiques de la fonction.

Attention Un point critique n'est pas un extremum en général.

Exemple Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Il est facile de vérifier que $(0, 0)$ est un point critique de f. Ce n'est pas un extremum local. En effet $f(0, 0) = 0$ tandis que la fonction de variable réelle $x \mapsto f(x, 0)$ définie sur $\mathbb{R}$ prend des valeurs strictement positives dans tout voisinage de 0 et la fonction $y \mapsto f(0, y)$ définie sur $\mathbb{R}$ prend des valeurs strictement négatives dans tout voisinage de 0.

Attention Une fonction peut avoir en un point un minimum local dans toutes les directions, sans pour autant que ce point soit un minimum local.

p.1154

Exercice 19 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y^2(y^2 - x^4). \end{array}$

1. Visualiser sur un dessin (x en abscisse et y en ordonnée) les trois domaines de $\mathbb{R}^2$ où la fonction f est nulle, où elle prend des valeurs strictement positives, et où elle prend des valeurs strictement négatives.
2. Justifier alors rigoureusement ce que la question précédente permet d'intuiter :
   - pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\varphi : t \mapsto f(tu)$ admet un minimum local en 0 ;
   - pourtant, la fonction f ne présente pas de minimum local en 0.

Recherche d'extrema

Point méthode

Pour démontrer qu'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ admet un minimum local en a, on cherche à démontrer que $h \mapsto f(a + h) - f(a)$ est à valeurs positives au voisinage de 0.

Remarque On adaptera *mutatis mutandis* pour démontrer que f admet un maximum local en a.

p.1155

Exercice 20 Le point $(0, 0)$ est-il un extremum local pour la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - x^3 - x^2y^5$?

Point méthode

Pour trouver les extrema (locaux ou globaux) d'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$:

1. on cherche les points critiques,
2. puis on étudie la nature de chacun des points critiques et des points où f n'est pas différentiable, en particulier les points de $A \setminus \overset{\circ}{A}$.

p.1155 **Exercice 21** Déterminer les extrema de $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - x^2 + y^2$.

Utilisation de la compacité

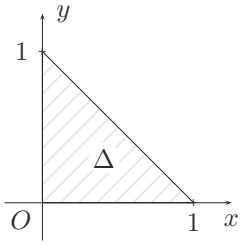
Lorsque l'on cherche les extrema d'une fonction continue sur un compact non vide, les raisonnements sont souvent allégés par le fait que l'on sait *a priori* qu'il y a un maximum et un minimum.

Exemple Déterminons les extrema de :

$$\begin{array}{rccc} f : & \Delta & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy\,(1-x-y)\,, \end{array}$$

où $\Delta = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } x + y \leqslant 1\big\}$.

- La fonction f est continue car polynomiale et sa restriction à $\overset{\circ}{\Delta}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- L'ensemble Δ est un compact. Il est en effet fermé, car c'est l'intersection de trois demi-plans fermés. De plus, pour tout $(x, y) \in \Delta$, on a :
$$0 \leqslant x \leqslant 1 - y \leqslant 1$$
et de même pour y. Par suite, $\Delta \subset [0, 1]^2$. Ainsi, Δ est un fermé borné d'un espace vectoriel de dimension finie, il s'agit bien d'une partie compacte.



- Il est clair que $\overset{\circ}{\Delta} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0 \text{ et } x + y < 1\big\}$. Par ailleurs, pour tout $(x, y) \in \Delta$, on a $f(x, y) \geqslant 0$.
Sur tout point de la frontière, on a $f(x, y) = 0$ et donc tous les points de la frontière sont des point où f atteint son minimum. Puisque f est à valeurs strictement positives sur l'intérieur de Δ, nous avons déterminé tous les minima de f.
- Par continuité et compacité, f admet un maximum et puisque que f n'est pas la fonction nulle, ce maximum est atteint en des points de l'intérieur de Δ. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur, il s'agit de points critiques.
- Pour tout $(x, y) \in \overset{\circ}{\Delta}$ on a :
$$\nabla f(x, y) = \big(y(1 - 2x - y)\,,\, x(1 - x - 2y)\big).$$
Par conséquent, (x, y) est un point critique si, et seulement si, :
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$
i.e. $x = y = 1/3$. Par suite, la fonction f a un seul point critique. Ainsi $(1/3, 1/3)$ est l'unique point où f atteint son maximum.

La compacité peut parfois être utilisée pour établir l'existence d'extrema même lorsque la fonction est définie sur un ouvert.

p.1155

Exercice 22 Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1. Démontrer que f admet un minimum.
2. Que peut-on dire si de plus la fonction f est différentiable et admet un unique point critique ?

V Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Dans toute cette section, E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème fondamental

Théorème 30

Soit $f : U \to F$ une fonction. Les assertions ci-dessous sont équivalentes.

(i) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.

(ii) Toutes les dérivées partielles de f sont définies et continues.

Démonstration (non exigible) page 1156

Point méthode

Pour démontrer qu'une fonction $f : U \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$:

- on cherche d'abord à utiliser les théorèmes généraux de manipulation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$;
- si ceux-ci ne s'appliquent pas, on peut chercher à montrer que dans une base donnée toutes les dérivées partielles de f sont définies et continues sur U.

Exemples

1. Par les théorèmes généraux, la fonction $f : (x, y) \mapsto e^x \ln\left(x^2 + 2y^2 + 1\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. En effet, les fonctions $(x, y) \mapsto x^2 + 2y^2 + 1$ et $(x, y) \mapsto x$ sont polynomiales, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque les fonctions exp et ln sont de classe $\mathcal{C}^1$, par composition et produit, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

   Montrons que $g : (x, y) \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t, y)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

   - Calculons les dérivées partielles de g. Il est immédiat que :

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f(x, y).$$

   Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+$. Notons $I = [0, x]$ si $x > 0$ et $I = [x, 0]$ sinon.

   $*$ Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(t, y)$ est continue.

* Pour tout $t \in I$, l'application $y \mapsto f(t,y)$ est continue.
* Si M est un majorant de $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ sur $I \times [-a,a]$ — il en existe un car la fonction $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ est continue sur le compact $I \times [-a,a]$ —, on a :

$$\forall (t,y) \in I \times [-a,a] \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| \leqslant M$$

et la fonction constante M est intégrable sur le segment I.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre avec hypothèse de domination sur tout segment, la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t,y)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\,\mathrm{d}t.$$

- Démontrons la continuité des dérivées partielles. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x} = f$ est continue. Par ailleurs, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, en posant le changement de variable $t = xu$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(xu,y)\,\mathrm{d}u.$$

Montrons que $\Phi : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(xu,y)\,\mathrm{d}u$ est continue, pour cela nous ferons une domination au voisinage de tout point. Soit $a > 0$. Par continuité, la fonction $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ est majorée par une constante M sur $K_a = [-a,a]^2$ et donc :

* pour tout $(x,y) \in K_a$, la fonction $u \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(xu,y)$ est continue ;
* pour tout $u \in [0,1]$, la fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(xu,y)$ est continue ;
* on a la domination :

$$\forall (x,y) \in K_a \quad \forall u \in [0,1] \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(xu,y)\right| \leqslant M$$

et la fonction constante M est intégrable sur le segment $[0,1]$.

Comme tout point de $\mathbb{R}^2$ se trouve dans l'intérieur d'un tel compact K_a, on a domination de $\frac{\partial f}{\partial y}(xu,y)$ au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, la fonction $(x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(xu,y)\,\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^1$.

p.1157

Exercice 23 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, ainsi que deux fonctions $\alpha : I \to \mathbb{R}$ et $\beta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Déduire de l'exemple 2 de la page 1123 que $F : x \mapsto \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer F'.

p.1157

Exercice 24 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ admet-elle un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et intégration

Théorème 31

Soit $f : U \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour toute application $\gamma : [0,1] \to E$ à valeurs dans U de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, on a :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 1158

Introduire $\varphi : t \mapsto f\big(\gamma(t)\big)$ et justifier $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque

Noter que ce résultat est valable *pour toute application* $\gamma : [0,1] \to E$ à valeurs dans U de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Lemme 32

Supposons que U soit une partie (ouverte) convexe de E ; soit $f : U \to F$.
La fonction f est alors constante si, et seulement si, f est différentiable et $\mathrm{d}f = 0$.

Démonstration page 1158

Théorème 33

Supposons que U soit un ouvert connexe par arcs de E ; soit $f : U \to F$.
La fonction f est alors constante si, et seulement si, f est différentiable et $\mathrm{d}f = 0$.

Démonstration (non exigible) page 1158

2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Dérivées partielles successives

Rappelons que E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.
Les dérivées partielles d'une fonction $f : U \to F$, lorsqu'elles existent en tout point de U sont des applications de U dans F. On peut donc s'intéresser à leurs dérivées partielles éventuelles.

Définition 11

Soit $(j_1, \dots, j_k) \in [\![1, p]\!]^k$.

Lorsqu'elle existe, la fonction $\partial_{j_1}\Big(\partial_{j_2}(\cdots(\partial_{j_k} f)\cdots)\Big)$ est appelée **dérivée partielle de f selon les indices $(j_1, \dots, j_k)$** et notée $\partial_{j_1}\partial_{j_2}\cdots\partial_{j_k} f$ ou $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}}$.

On appelle **dérivée partielle d'ordre k**, une dérivée partielle par rapport à une liste d'indices de longueur k.

Remarque Munissons F d'une base $\mathcal{B}'$. Pour $(j_1, \dots, j_k) \in [\![1, p]\!]^k$, les propriétés de la dérivation dans un espace vectoriel de dimension finie donnent, que $\partial_{j_1}\partial_{j_2}\cdots\partial_{j_k} f$ est définie si, et seulement si, toutes les dérivées partielles selon les indices $(j_1, \dots, j_k)$ des applications composantes sont définies.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 12

Une application $f : U \to F$ est de **classe $\mathcal{C}^k$** si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U.

On note $\mathcal{C}^k(U, F)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de U dans F.

Remarques

- On convient que les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ sont les fonctions continues.
- Lorsque F est muni d'une base $\mathcal{B}'$, le lien entre la continuité d'une fonction à valeurs dans F et la continuité de ses applications composantes, donne qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ si, et seulement si, toutes les applications composantes f_i sont de classe $\mathcal{C}^k$.
- Il est clair que la restriction à un ouvert $V \subset U$ d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ est également de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemples

1. Les fonctions constantes sont de classe $\mathcal{C}^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet, toutes ses dérivées partielles sont nulles.

2. Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors u de classe $\mathcal{C}^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet, toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 sont constantes (*cf.* la proposition 20 de la page 1114) et toutes les dérivées partielles d'ordre $k > 1$ sont nulles.
3. Le **laplacien** d'une application $f \in \mathcal{C}^2(U,F)$ est :
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}.$$
Une application est dite **harmonique** si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et si son laplacien est nul.

Il vient de la définition et du théorème fondamental le résultat suivant.

Proposition 34

Si $f \in \mathcal{C}^k(U,F)$, alors f est de classe $\mathcal{C}^i$, pour tout $i \in [\![0,k]\!]$.

Démonstration page 1158

Corollaire 35

Une application $f : U \to F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geqslant 1$) si, et seulement si, toutes les dérivées partielles de f d'ordre 1 existent et sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Démonstration page 1158

Définition 13

Une application f est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** si elle est de classe $\mathcal{C}^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On note $\mathcal{C}^\infty(U,F)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de U dans F.

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Les résultats sur les opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ se généralisent sans difficulté aux applications de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 36

Soit f et g sont deux applications de U dans F de classe $\mathcal{C}^k$.
Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, l'application $\lambda f + \mu g$ est alors de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration page 1159

Remarque Il s'ensuit que $\mathcal{C}^k(U,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U,F)$.

Proposition 37

Soit F_1 et F_2 deux espaces vectoriels non nuls de dimension finie et $B : F_1 \times F_2 \to F$ une application bilinéaire. Soit également $f_1 : U \to F_1$ et $f_2 : U \to F_2$ deux applications de classe $\mathcal{C}^k$. L'application $B(f_1,f_2)$ est alors de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration page 1159

Exemples

1. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$. Le produit fg est alors de classe $\mathcal{C}^k$.
2. Supposons que F soit un espace euclidien. Si $f : U \to F$ et $g : U \to F$ sont deux applications de classe $\mathcal{C}^k$, alors $\varphi = (\, f \mid g \,)$ est de classe $\mathcal{C}^k$. En particulier $\|f\|^2$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Remarques

- Il vient de la proposition 37 de la page précédente que $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ est une une sous-algèbre de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.
- Plus généralement, si F est une algèbre, alors $\mathcal{C}^k(U\,,\, F)$ est une algèbre.
- En particulier, $\mathcal{C}^k(U\,,\, \mathbb{C})$ est une algèbre, en considérant $\mathbb{C}$ comme une $\mathbb{R}$-algèbre.

Proposition 38

Les applications polynomiales sur E sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration. C'est une conséquence du fait que les dérivées partielles d'une application polynomiale sont elles-mêmes des fonctions polynomiales. □

Exemples

1. L'application det définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
2. Si $p \in \mathbb{N}$ et si f_p est l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f_p(M) = M^p$, alors f_p est de classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème 39

Soit $f : U \to F$ et $g : V \to G$ deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ telles que $f(U) \subset V$. L'application $g \circ f$ est alors de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration page 1159

Exemples

1. Soit $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $f : U \to F$ une fonction classe $\mathcal{C}^k$. L'application $u \circ f$ est alors de classe $\mathcal{C}^k$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$. L'application $g : (x, y) \mapsto f(x + y\,,\, xy)$ est alors de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 40

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ne s'annulant pas. La fonction $1/f$ est également de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration. C'est un cas particulier du théorème 39, en considérant $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1/x$. □

Exemples

1. Toute fonction rationnelle sur E est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout ouvert où elle est définie.
2. L'application définie sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (*cf.* l'exercice 17 de la page 1116).

3 Théorème de Schwarz

Lemme 41

Soit $f : U \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On a alors :

$$\forall (u,v) \in E^2 \quad \mathrm{D}_u\mathrm{D}_v f = \mathrm{D}_v\mathrm{D}_u f$$

Démonstration (non exigible) page 1160

Théorème 42

Soit $f : U \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On a alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 41 à $u = e_i$ et $v = e_j$. □

Corollaire 43

Soit f de classe $\mathcal{C}^k$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_k$.
Pour tout $(j_i, \dots, j_k) \in [\![1,p]\!]^k$, on a $\partial_{j_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{j_{\sigma(k)}} f = \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_k} f$.

Principe de démonstration. Utiliser le fait que toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ est un produit de transpositions du type $(i, i+1)$ (*cf.* l'exercice 1.7 de la page 52). Démonstration page 1161

Notation Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, on écrira donc les dérivées partielles d'ordre k sous la forme $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_p^{\alpha_p}}$, où $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = k$.

p.1161

Exercice 25 Dans cet exercice, $E = \mathbb{R}^p$.

1. Combien y a-t-il de dérivées partielles d'ordre k lorsque E est de dimension p ?
2. Combien suffit-il d'en considérer lorsque la fonction est de classe $\mathcal{C}^k$?

L'existence de dérivées partielles « croisées » ne suffit pas pour démontrer qu'elles sont égales.

p.1162

Exercice 26 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Une application physique : champs de vecteurs dérivant d'un potentiel

Supposons de plus que E soit un espace euclidien.

Un **champ de vecteurs** sur U est une application de U dans E. Le gradient d'une fonction différentiable sur U à valeurs réelles est un exemple de champ de vecteurs.

On dit qu'un champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ sur U **dérive d'un potentiel** s'il existe une fonction f différentiable de U dans $\mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{V} = \nabla f$. La fonction f est alors un **potentiel** de $\overrightarrow{V}$.

Dans le cas où $\overrightarrow{V}$ de classe $\mathcal{C}^1$ dérive d'un potentiel, on a d'après le théorème de Schwarz, en notant $(V_1, \dots, V_p)$ les composantes de $\overrightarrow{V}$ dans une base orthonormale de E :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \quad \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}. \qquad (\star)$$

p.1162

Exercice 27 Le champ de vecteurs $(x,y) \mapsto (xy^2, -xy)$ dérive-t-il d'un potentiel ?

p.1162

Exercice 28 Déterminer un potentiel pour le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2$ par $\overrightarrow{V}(x,t) = (2xy\,,\, x^2+y)$.

p.1163

Exercice 29 Démontrer que le champ de vecteurs $(x,y) \mapsto \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vérifie $(\star)$, mais ne dérive pas d'un potentiel.

Indication. Considérer l'arc paramétré par $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ et le théorème 31 de la page 1125 .

Calcul des dérivées partielles d'ordre k de fonctions composées

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^n$ et $G = \mathbb{R}$.
Soit $k \geqslant 2$. Considérons des fonctions $x_i : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, avec $i \in [\![1, n]\!]$, telles que l'application $\Phi : u \mapsto (x_1(u), \dots, x_n(u))$ soit à valeurs dans V.
Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(U, R)$, par composition la fonction $g = f \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour $j \in [\![1, p]\!]$:

$$\frac{\partial g}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \times \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \Phi \right). \qquad (\star)$$

Cette expression étant valable pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$, elle permet par itération de calculer les dérivées partielles d'ordre k de $g = f \circ \Phi$ pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^k$. Par exemple, si f est de classe $\mathcal{C}^2$, pour tout $(j, k) \in [\![1, p]\!]^2$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u_k \partial u_j} &= \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \times \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \Phi \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_k \partial u_j} \times \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \Phi \right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \times \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial x_\ell}{\partial u_k} \times \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_i} \circ \Phi \right) \right).\end{aligned}$$

Il faut bien reconnaître que ces notations sont très lourdes. On préfère en général rédiger ces calculs avec les conventions données lors de l'introduction de la règle de la chaîne (*cf.* page 1117). Ainsi, on note $(\star)$ sous la forme :

$$\frac{\partial g}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (\star)$$

et pour tout $(j, k) \in [\![1, p]\!]^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u_k \partial u_j} &= \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_k \partial u_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial x_\ell}{\partial u_k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_i} \right).\end{aligned}$$

Il ne faut pas, bien entendu, apprendre cette formule par cœur, mais il faut savoir faire le calcul au cas par cas.

Exemple Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \longmapsto & (u + v, uv). \end{array}$

L'application Φ, dont les applications composantes sont polynomiales sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour toute $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(u, v) = f(u + v, uv)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} + u \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ainsi, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, compte tenu du théorème de Schwarz, on a pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} + u\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + v\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (u+v)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + uv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}.\end{aligned}$$

p.1163

Exercice 30 Le **laplacien** d'une fonction f définie sur $U \subset \mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^2$ est $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (voir page 1127).

Soit $f \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R}\big)$. On définit sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ les fonctions u et g par $u(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en fonction des dérivées partielles de g.
2. Exprimer $(\Delta f)(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en fonction des dérivées partielles de g.

Montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^k$

Point méthode

On essaie tout d'abord d'utiliser les théorèmes généraux ou de s'y ramener.

Point méthode

Dans les cas plus compliqués, pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut chercher une classe $\mathcal{S}$ d'applications telle que :

- $f \in \mathcal{S}$,
- tout élément de $\mathcal{S}$ est continu,
- $\mathcal{S}$ est stable par dérivation partielle.

p.1165

Exercice 31 On considère $\mathbb{C}$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que le rayon de convergence R de la séries entière $\sum a_n z^n$ soit strictement positif. Démontrer que la fonction g définie sur $D_O(0,R) \subset \mathbb{C}$ par $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

VI Applications

1 Vecteurs tangents à une partie

Généralités

Définition 14

Soit X une partie de E et $x \in X$. Un élément $v \in E$ est un **vecteur tangent à X en x** s'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et un arc paramétré par $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ dérivable en 0, tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

Exemples

1. Le vecteur 0 est tangent à X en tout point de X, comme on le voit en considérant un chemin constant.
2. L'ensemble des vecteurs tangents à E en un point $x \in E$ est E.
   En effet, pour $v \in E$, la dérivée en 0 de $\gamma : t \mapsto x + tv$ est v.
3. Plus généralement, si U est un ouvert de E, l'ensemble des vecteurs tangents à U en un point $x \in U$ est E.
4. Si $Y \subset X$ et si v est tangent à $y \in Y$, alors v est tangent à X.

Remarques

- L'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ des vecteurs tangents à X en x est un cône de E, c'est-à-dire une partie stable par toutes les homothéties de E. En effet, soit $v \in \overrightarrow{\mathcal{T}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ a pour dérivée v en 0, alors la dérivée en de 0 de l'application $t \mapsto \gamma(\lambda t)$, qui est définie sur un voisinage de 0 et à valeurs dans X, est λv. Ainsi $\lambda v \in \overrightarrow{\mathcal{T}}$. En d'autres termes, $\mathbb{R}v$ est inclus dans $\overrightarrow{\mathcal{T}}$.
- Caractère local des vecteurs tangents. Soit X une partie de E et $x \in X$. Pour tout voisinage W de x et $v \in V$, le vecteur v est tangent à X en x si, et seulement si, v est tangent à $X \cap W$ en x.

p.1165

Exercice 32 Soit $a \in E$, E_1 un sous-espace vectoriel de E et X le sous-espace affine $a + E_1$. Quels sont les vecteurs tangents à X en a ?

p.1165

Exercice 33 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0. Donner l'ensemble des vecteurs tangents au graphe de f en x_0.

p.1165

Exercice 34

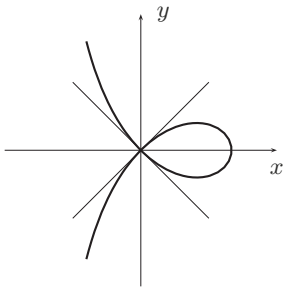
Quels sont les vecteurs tangents à $[-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ en $(0, 0)$? en $(1, 0)$? en $(1, 1)$?

p.1166

Exercice 35 Soit $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$. Déterminer l'ensemble $\vec{\mathcal{T}}_{(0,0)}$ des vecteurs tangents à X en $(0,0)$.

Attention

Soit Γ un arc de classe $\mathcal{C}^1$ paramétré par $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$. Il est clair que $\mathbb{R}\gamma'(t_0)$ est inclus dans l'ensemble des vecteurs tangents à $\gamma(I)$ en $\gamma(t_0)$. Cependant, même lorsque t_0 est un paramètre régulier, l'inclusion peut être stricte.



Exemple Considérons l'arc Γ paramétré sur $\mathbb{R}$ par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = t\,x(t). \end{cases}$$

On a $\gamma(1) = (0,0)$ et $\gamma'(1) = (-1,-1)$, ainsi que $\gamma(-1) = (0,0)$ et $\gamma'(1) = (1,-1)$. Par conséquent, l'ensemble des vecteurs tangents à $\gamma(\mathbb{R})$ contient $\mathbb{R}(1,1) \cup \mathbb{R}(1,-1)$. On peut démontrer, mais nous ne le ferons pas, que cette inclusion est une égalité.

Plans tangents à une surface d'équation $z = f(x,y)$

Considérons $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle d'intérieur non vide I. Il a été vu en première année que la tangente $\mathcal{T}$ à une courbe d'équation $y = g(x)$ en un point de paramètre a tel que g soit dérivable en a, est la droite d'équation :

$$y = f(a) + g'(a)(x-a).$$

Cette définition est cohérente avec la définition de la tangente en un point de paramètre régulier d'un arc paramétré (*cf.* la définition 14 de la page 363). Par ailleurs, nous avons vu en exercice que l'ensemble des vecteurs tangents au graphe G de g en un point $M_a = (a, f(a))$ où g est dérivable est $\vec{\mathcal{T}} = \mathbb{R}(1, g'(a))$ (*cf.* l'exercice 33 de la page précédente). Par conséquent, $\mathcal{T}$ est le sous-espace affine $M_a + \vec{\mathcal{T}}$. Ce point de vue va nous permettre de définir la notion de plan tangent.

Proposition 44

Supposons que $E = \mathbb{R}^2$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. L'ensemble des vecteurs tangents à l'ensemble $S \subset \mathbb{R}^3$ d'équation :

$$x_3 = f(x_1, x_2)$$

en $a = (a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ est alors le plan vectoriel d'équation :

$$v_3 = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).$$

Démonstration page 1166

Définition 15

Supposons que $E = \mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface d'équation cartésienne $z = f(x, y)$.

Le **plan tangent à S en m** est le sous-espace affine $m + \overrightarrow{\mathcal{T}}$ de $\mathbb{R}^3$, où $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ est l'ensemble des vecteurs tangents à S en m.

Proposition 45

Supposons que $E = \mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface d'équation $z = f(x, y)$.
L'espace tangent à S en $m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ a pour équation :

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(m_0).$$

Démonstration page 1167

Exemple Le plan tangent à la surface d'équation $z = xy$ en $(1, 2, 2)$ a pour équation $z = 2x + y - 2$.

Seconde interprétation géométrique du gradient

Proposition 46

Supposons de plus que E soit un espace euclidien. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable et si γ une fonction dérivable d'un intervalle I dans U telle que $f \circ \gamma$ soit constante, alors :

$$\forall t \in I \quad (\gamma'(t) \mid \nabla f(\gamma(t)))$$

On dit que ∇f est **normal** aux **lignes de niveau** de f, c'est-à-dire aux parties de U d'équations $f = k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

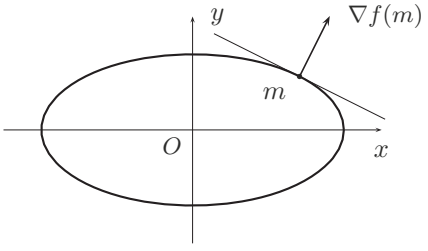
Principe de démonstration. Dériver la fonction $f \circ \gamma$.

Démonstration page 1167

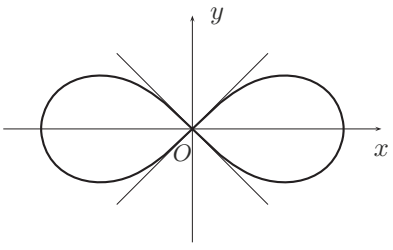
Remarques

- Si C est une partie du plan d'équation $f(x, y) = 0$ et si $m \in C$ est un point **régulier**, c'est-à-dire si $\nabla f(m) \neq 0$, alors l'ensemble des vecteurs tangents à C en m est inclus dans la droite vectorielle $\nabla f(m)^\perp$.

  De même, si S et une partie de l'espace d'équation $f(x, y, z) = 0$ et si $m \in S$ est un point régulier, alors l'ensemble des vecteurs tangents à S en m est inclus dans le plan vectoriel $\nabla f(m)^\perp$.



$x^2 + 4y^2 = 4$



$(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$

- Lorsque $m \in C$ est un point critique de f, alors l'ensemble des vecteurs tangents à S en m peut être la réunion de plusieurs droites vectorielles. En effet la condition que cette ensemble soit inclus dans $\nabla f(m)^\perp$ n'est alors pas contraignante.

Application à l'équation du plan tangent

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble d'équation $f(x,y,z) = 0$ et $m_0(x_0,y_0,z_0) \in S$ un point régulier, où $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable. Si S peut être paramétrée par x et y au voisinage de m_0, c'est-à-dire s'il existe un voisinage ouvert W de m_0, un voisinage ouvert W' de (x_0,y_0) et une fonction différentiable $g : W' \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall (x,y,z) \in W \quad (x,y,z) \in S \iff \big((x,y) \in W' \quad \text{et} \quad z = g(x,y)\big),$$

alors, d'après la proposition 45 de la page précédente, S a un plan tangent en m_0. D'après la proposition 46 de la page précédente l'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ des vecteurs tangents à S en m_0 vérifie $\overrightarrow{\mathcal{T}} \subset \nabla f(m_0)^\perp$. Puisque les deux ensembles sont des espaces vectoriels de dimension 2, on a l'égalité. Par conséquent, puisque m_0 est un point régulier, l'équation du plan tangent $\mathcal{T}$ à S en m_0 est :

$$(\,\nabla f(m_0) \mid m - m_0\,) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{T} : (x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) + (y-y_0)\,\frac{\partial f}{\partial y}(m_0) + (z-z_0)\,\frac{\partial f}{\partial z}(m_0) = 0.$$

On adaptera dans cas où l'on peut paramétrer par x et z, ou par y et z.
L'analyse faite ci-dessous s'adapte aux « courbes » du plan d'équation cartésienne $f(x,y) = 0$.

Exemple Soit $(a,b,c) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$ et S la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

Soit $m_0 = (x_0,y_0,z_0) \in S$. Les coordonnées de m_0 ne sont pas toutes nulle. Pour fixer les idées, supposons $z_0 > 0$. Posons alors $W = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, qui est un voisinage ouvert de m_0 et :

$$\forall (x,y,z) \in W \quad (x,y,z) \in S \iff \left((x,y) \in W' \quad \text{et} \quad z = c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\right),$$

où $W' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1\right\}$ est un voisinage ouvert de (x_0,y_0).
Puisque $g : (x,y) \mapsto c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur W', la surface S admet un plan tangent $\mathcal{T}$ en m_0. Puisque $m_0 \neq 0$ et donc $\nabla f(m_0) = 2\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right) \neq 0$, le point m_0 est régulier et :

$$\mathcal{T} : 2\frac{x_0}{a^2}\,(x-x_0) + 2\frac{y_0}{b^2}\,(y-y_0) + 2\frac{z_0}{c^2}\,(z-z_0) = 0.$$

On arrive à la même relation pour tout $m_0 \in S$ (sans imposer $z_0 > 0$). Compte tenu de la relation $\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{c}\right)^2 = 1$:

$$\mathcal{T} : \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

En particulier, si $a = b = c = R$, la sphère de centre 0 et de rayon R a des plans tangents en tout points. Le plan tangent à la sphère en m_0 est le plan passant par m_0 et orthogonal à m_0.

2 Exemples d'équations aux dérivées partielles

Deux exemples

Commençons par un exemple simple, mais important.

Exemple Déterminons les applications $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

- Soit une applications $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

  Soit $y \in \mathbb{R}^2$. La fonction $x \mapsto f(x, y)$ est définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et a sa dérivée nulle. Par conséquent il existe une constante α, qui dépend *a priori* de y, telle que $f(x, y) = \alpha$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, il existe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

  $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \varphi(y).$$

  La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $\varphi : y \mapsto f(0, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Réciproquement, lorsque $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il est facile de vérifier que la fonction f définie par $f(x, y) = \varphi(y)$ vérifie la relation $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Ainsi l'ensemble des solutions du problème est :

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y) \mapsto \varphi(y)\,;\ \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right\}$$

Remarque Les solutions du problème peuvent être moins simples selon la « forme » du domaine de définition. Voir par exemple l'exercice 18.19 de la page 1173.

p.1167

Exercice 36

En utilisant l'exemple précédent, déterminer les applications $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

Un exemples d'utilisation de changement de variables

Malheureusement tous les cas ne sont pas aussi simple que ceux des exercices précédents. Il arrive toutefois que l'on puisse se ramener à des cas très simples à traiter à l'aide d'un changement de variables.

On note V le demi-plan $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Cherchons à déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (\star)$$

Pour cela, introduisons $\Phi : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta), \end{array}$

où $U = \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Posons le changement de variable polaire $(x, y) = \Phi(r, \theta)$, c'est-à-dire pour tout $(r, \theta) \in U$, on note $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$; posons $f(x, y) = g(r, \theta)$, c'est-à-dire que la fonction g est définie par $g = f \circ \Phi$.

Puisque Φ est de classe $\mathcal{C}^1$, par composition g l'est également. D'après la dérivation des fonctions composées, pour tout $(r, \theta) \in U$:

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

et donc :

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Puisque Φ est surjective sur V, la fonction f est solutions de $(\star)$ si, et seulement si :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = 0. \qquad (\star\star)$$

En d'autres termes l'ensemble des solutions de $(\star)$ est :

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}) \mid f \circ \Phi \in \mathcal{S}'\},$$

où $\mathcal{S}'$ est l'ensemble des solutions de $(\star\star)$. En raisonnant comme à l'exemple de la page précédente : $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$ est solutions de $(\star)$ si, et seulement s'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)$ telle que :

$$\forall (r,\theta) \in U \quad f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r,\theta) = \varphi(\theta).$$

Soyons plus précis. L'application Φ est bijective et

$$\Phi^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ (x,y) & \longmapsto & (\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{Arctan}\frac{y}{x}) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$. Par conséquent :

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}) \mid f \circ \Phi \in \mathcal{S}'\} = \{g \circ \Phi^{-1} ;\ g \in \mathcal{S}'\}.$$

En conclusion, l'ensemble des solutions de $(\star)$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y) \mapsto \varphi\left(\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}\right) ;\ \varphi \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)\right\}$$

ou encore, la fonction Arctan étant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ dont la réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y) \mapsto \psi\left(\frac{y}{x}\right) \ ; \ \psi \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right)\right\}.$$

Un second exemple : l'équation d'onde

Cherchons à déterminer les $f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ vérifiant :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \qquad (\star)$$

où $c \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Il s'agit d'un cas particulier d'équations de propagation, dites aussi équations d'onde.

- Pour cela, considérons :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v), \end{array}$$

avec $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Cette dernière condition s'impose du fait que l'on souhaite φ bijective. Posons le changement de variables :

$$(x,t) = (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$$

ce qui signifie que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on note $x = \alpha u + \beta v$ et $t = \gamma u + \delta v$.

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$; posons :

$$f(x,t) = g(u,v),$$

c'est-à-dire que l'on définit g par $g = f \circ \varphi$.

- Puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$, car les applications composantes sont polynomiales sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, par la règle de la chaîne, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \alpha\,\frac{\partial f}{\partial x} + \gamma\,\frac{\partial f}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial v} = \beta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \delta\,\frac{\partial f}{\partial t}. \qquad (1)$$

En itérant, la formule (1) étant valable pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ et $g = f \circ \varphi$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} &= \alpha\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \delta\,\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \gamma\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \delta\,\frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= \alpha\beta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\alpha\delta + \beta\gamma)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \gamma\delta\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

La dernière relation a été obtenue en utilisant le théorème de Schwarz. En prenant $\alpha = \beta = c$ et $\delta = -\gamma = 1$, on a $\alpha\delta - \beta\gamma = 2c \neq 0$ et ainsi :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

- Il vient de l'étude ci-dessus que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est solution de $(\star)$ si, et seulement si, $g = f \circ \varphi$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0 \qquad (\star\star)$$

D'après l'exercice 36 de la page 1137, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est une solution de $(\star)$ si, et seulement s'il existe $(\Phi_1, \Psi_1) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ tel que :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad f\big(\varphi(u,v)\big) = \Phi_1(u) + \Psi_1(v)$$

L'application φ est bijective et :

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,t) & \longmapsto & \left(\dfrac{x-ct}{2c}, \dfrac{x+ct}{2c}\right). \end{array}$$

Puisque φ^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^2$, en adaptant le raisonnement développé à la page 1138, l'ensemble des solutions de l'équation $(\star)$ est :

$$\mathcal{S} = \{(x,t) \mapsto \Phi(x+ct) + \Psi(x-ct)\,;\ (\Phi, \Psi) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$$

Généralités sur les changement de variables

Pour fixer les idées, on se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$.

- Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\varphi(U) = V$.

Pour tout $(u,v) \in U$ et $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$, on pose :

$$(x,y) = \varphi(u,v) \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = g(u,v),$$

c'est-à-dire $g = f \circ \varphi$. La règle de la chaîne donne :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v}$$

En d'autres termes :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) J\varphi = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)}\right). \qquad (*)$$

- Si de plus on a $\det\big(J\varphi(u,v)\big) \neq 0$ pour tout $(u,v) \in V$, alors la relation $(*)$ devient :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)}\right)^{-1}. \qquad (**)$$

Cela nous donne donc des expressions de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ uniquement en fonction de u, v, $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$.

Notons que si φ^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$, la relation $(**)$ est toujours vérifiée, car alors $\det(J\varphi(u,v)) \neq 0$ pour tout $(u,v) \in V$. En effet, du fait que $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}$, on a pour tout $(u,v) \in V$:

$$J\varphi^{-1}(x,y) \times J\varphi(u,v) = I_2$$

et donc $J\varphi(u,v)$ est inversible.

- **Application aux équations aux dérivées partielles**

Considérons sur $V \subset \mathbb{R}^2$ une équation au dérivées partielles d'ordre 1 :

$$F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, x, y\right) = 0. \tag{1}$$

Il arrive qu'un choix judicieux de changement de variables $(x,y) = \varphi(u,v)$, où $\varphi : U \to V$ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$, donne, éventuellement à l'aide des relations $(**)$, que f est une solution de (1) si, et seulement si, la fonction g définie par $f(x,y) = g(u,v)$ est une solution de :

$$\frac{\partial g}{\partial u} + G(u,v) = 0. \tag{2}$$

Cette dernière équation se résout par primitivation.

Remarques

∗ Si φ^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit les solutions de (1) des solutions de (2), car alors les ensembles $\mathcal{S}_1$ des solutions de (1) et $\mathcal{S}_2$ des solutions de (2) sont liés par :

$$\mathcal{S}_1 = \{f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}) \mid f \circ \varphi \in \mathcal{S}_2\} = \{g \circ \varphi^{-1};\ g \in \mathcal{S}_2\}.$$

∗ Parfois, on propose le changement de variable sous la forme « inverse », à savoir, $(u,v) = \varphi(x,y)$ et $f(x,y) = g(u,v)$, où $\varphi : V \to U$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective. Dans ce cas, il est impératif que φ^{-1} soit également de classe $\mathcal{C}^1$, car g est définie à partir de f par $g = f \circ \varphi^{-1}$. Dans ces conditions, en remarquant que $f = g \circ \varphi$ pour tout $(x,y) \in V$:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial (u,v)}{\partial (x,y)}\right)^{-1}.$$

∗ On ne dispose pas de méthode systématique pour trouver un changement de variable. Concrètement, dans les exercices le changement de variable sera toujours donné.

Exemples de changements de variables

Changement de variables linéaire. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$. Pour tout ouvert V de $\mathbb{R}^2$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (au+bv, cu+dv) \end{array}$$

induit une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de V sur l'ouvert $U = \varphi(V)$. Il est immédiat que $J\varphi(u,v) = \left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = M$. L'expression de φ^{-1} s'obtient à l'aide de M^{-1}.

Changement de variables en polaire. L'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}_-\} \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. L'application réciproque :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,;\ x \in \mathbb{R}_-\} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\\ (x,y) & \longmapsto & \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{array}$$

est également de classe $\mathcal{C}^1$.

p.1167

Exercice 37 À l'aide d'un changement de variables linéaire, déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial t} + c\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, avec $c \in \mathbb{R}_+^*$ (*équation de transport*).

p.1168

Exercice 38

1. Démontrer que :
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & U \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(y - \dfrac{x^2}{2}\,,\, y\right) \end{array}$$
est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U à préciser et que φ^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$.
2. En posant $(u,v) = \varphi(x,y)$, résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $y \mapsto (x,y)$ est une fonction polynomiale, donc continue. Par conséquent, par composition $f_x : y \mapsto f(x,y)$ est continue. On démontre de même que toutes les applications f_y sont continues.
2. Dans ce cas, si $x \neq 0$, la fonction $f_x : y \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ est continue. De plus, f_0 est l'application nulle. Par suite, les fonctions f_x sont continues. Par symétrie, il en est de même des fonctions f_y.
   Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x,x) = \frac{1}{2}$ et donc :
   $$f(x,x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\cdot$$
   Si f était continue en $(0,0)$, on aurait $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x,x) = f(0,0) = 0$.
   Par conséquent, la fonction f n'est pas continue en 0.

Exercice 2 En tant que fonction rationnelle, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$.
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$, il existe $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[$ tel que $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a :
$$\big|f(x,y)\big| = \left|\frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\right| = r\left|\cos^3\theta + \sin^3\theta\right| \leqslant 2r.$$
Puisque $r = \big\|(x,y)\big\|_2$, il s'ensuit par encadrement que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Par suite, la fonction $\widehat{f}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\widehat{f}(x,y) = f(x,y)$ si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ et $\widehat{f}(0,0) = 0$ est continue.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. À l'exercice 1 il a été démontré que f n'est pas continue en $(0,0)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x,0) = 0$. De plus, $f(0,0) = 0$. Ainsi f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Exercice 4 Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On sait que l'application $g : t \mapsto \exp(tH)$ est dérivable et $g'(t) = H\exp(tH)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puisque $\exp(0) = I_n$, on a $\mathrm{D}_H \exp(0) = H$.

Exercice 5 Fixons $(M,H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et notons g_p l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $g_p(t) = (M+tH)^p$.
Pour $p = 1$, on a $g_1(t) = M + tH$ et il est immédiat que $\mathrm{D}_H f_1(M) = H$. Le cas $p = 2$ a été traité en exemple page 1102. En considérant éventuellement le cas $p = 3$, on est amené à émettre l'hypothèse :
$$\mathcal{H}_p : \text{« } g_p \text{ est dérivable et } g_p(0) = \sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-i-1} \text{ »}$$

Démontrons cette assertion par récurrence. Il n'y a plus que l'hérédité à vérifier. Supposons le résultat vrai pour un $p \in \mathbb{N}^*$. Puisque g_p est dérivable et puisque $(A,B) \mapsto AB$ est bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, l'application $g_{p+1} = g_p g_1$ est dérivable et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g'_{p+1}(t) = g'_p(t)g_1(t) + g_p(t)g'_1(t).$$

En particulier, à l'aide de l'hypothèse de récurrence :

$$g'_{p+1}(0) = g'_p(0)g_1(0) + g_p(0)g'_1(0) = \left(\sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-i-1}\right) M + M^p H,$$

et donc $\mathrm{D}_H f_{p+1}(M) = \sum_{i=0}^{p} M^i H M^{p-i}$.

Exercice 6

1. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour tout $t \neq 0$ on a :

   $$f(tu,tv) = t\frac{u^2 v}{t^2u^4 + v^2}.$$

   Cette expression est encore valable pour $t = 0$ et $v \neq 0$.

   Si $v \neq 0$, alors $f(tu,tv) \underset{0}{\sim} t\frac{u^2}{v}$, donc $\mathrm{D}_{(u,v)}f(0,0) = \frac{u^2}{v}$. Si $v = 0$, alors, pour tout t, on a $f(tu,tv) = 0$, donc $\mathrm{D}_{(u,v)}f(0,0) = 0$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x,x^2) = \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que :

   $$f\left(x,x^2\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

   et donc que f n'est pas continue en 0.

Lemme 2 Par définition des relations de comparaison, il existe une boule $B = B_F(0,r)$ de E, avec $r > 0$, et une fonction $\varepsilon : B \to F$ telles que $u(h) = \|h\|\varepsilon(h)$ pour tout $h \in B$ et $\lim_0 \varepsilon = 0$.

Soit $x \in E$. Si $x = 0$, du fait que u est linéaire, on a $u(0) = 0$.

Si $x \neq 0$, pour tout $t \in \left]0, \frac{r}{\|x\|}\right]$, on a $u(tx) = \|tx\|\varepsilon(tx)$ et donc, par linéarité de u et homogénéité de la norme, $tu(x) = t\|x\|\varepsilon(tx)$, d'où :

$$u(x) = \|x\|\varepsilon(tx).$$

Puisque $tx \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $\varepsilon(tx) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ et donc $u(x) = 0$.

Par suite u est l'application nulle.

Proposition 3

- Si f est dérivable en a, alors au voisinage de 0 :

  $$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \mathrm{o}(h).$$

  L'application $u : h \mapsto hf(a)$ étant linéaire, on en déduit que f est différentiable en a et que $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto hf'a)$.

- Si f est différentiable en a, il existe $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ telle qu'au voisinage de 0 on ait :
$$f(a+h) = f(a) + u(h) + \mathrm{o}(h).$$
Par ailleurs, puisque $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$, en posant $\alpha = u(1) \in F$, on a $u : t \mapsto t\alpha$. Ainsi, au voisinage de 0, on a :
$$f(a+h) = f(a) + h\alpha + \mathrm{o}(h)$$
et f est dérivable en a.

Exercice 7 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme $\|\ \|$ sous-multiplicative (*cf.* l'exercice 22 de la page 305), c'est-à-dire telle que :
$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|.$$
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$f(M+H) = f(M) + HM + MH + H^2.$$
Par ailleurs, $\|H^2\| \leqslant \|H\|^2$. Par conséquent, au voisinage de 0, on a $\|H^2\| = \mathrm{o}\big(\|H\|\big)$, c'est-à-dire $H^2 = \mathrm{o}(H)$.
De plus, il est facile de vérifier que l'application $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \longmapsto & MH + HM \end{array}$ est linéaire. Ainsi, au voisinage de 0 :
$$f(M+H) = f(M) + u(H) + \mathrm{o}(H).$$
Par définition, f, qui est définie sur un ouvert, est différentiable en M et, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a :
$$\mathrm{d}f(M) \cdot H = MH + HM.$$

Exercice 8 On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$. Il existe $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ tel que $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a :
$$0 \leqslant f(x,y) = \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r^2\,\big(\cos^4\theta + \sin^4\theta\big) \leqslant 2r^2.$$
Cette dernière inégalité est encore vérifiée lorsque $(x,y) = (0,0)$. Par conséquent, sachant que $r = \|(x,y)\|_2$, on a au voisinage de 0 :
$$f(x,y) = \mathrm{O}\big(\|(x,y)\|_2^2\big)$$
et donc $f(x,y) = f(0) + 0 \cdot (x,y) + \mathrm{o}\big((x,y)\big)$. Par suite, f est différentiable en 0 et $\mathrm{d}f(0)$ est la fonction nulle.

Proposition 4 Par définition, il existe un voisinage W de 0 et une fonction $\varepsilon : W \to F$ telle que :
$$\forall h \in W \quad f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)\cdot h + \|h\|\,\varepsilon(h) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
Fixons $v \in E$ et posons $g : t \mapsto f(a+tv)$. Il existe $r > 0$ tel que $B_F(0, r\|v\|) \subset W$. Par conséquent, pour $t \in\,]-r, r[$:
$$g(t) = f(a+tv) = f(a) + \mathrm{d}f(a)\cdot(tv) + |t|\|v\|\varepsilon\big(|t|\|v\|\big),$$

et donc, en utilisant la linéarité de $\mathrm{d}f(a)$, on a au voisinage de 0 :

$$g(t) = g(0) + t\,\mathrm{d}f(a)\cdot v + \mathrm{o}(t).$$

Par suite, g est dérivable en 0 et $g'(0) = \mathrm{d}f(a)\cdot v$. Ainsi f a une dérivée en a selon v et $\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot v$.

Corollaire 5

- Si f est différentiable en a, alors d'après la proposition 4 de la page 1108, $\mathrm{D}_{e_j} f(a)$ est définie et :
$$\partial_j f(a) = \mathrm{D}_{e_j} f(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot e_j.$$
- Si f est différentiable, on a ainsi, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, la relation $\partial_j = \Phi_j \circ \mathrm{d}f$, où :
$$\begin{array}{rccc}\Phi_j : & \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & F \\ & u & \longmapsto & u\cdot e_j.\end{array}$$
Cette dernière application est linéaire et donc continue puisque $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie. On en déduit, par composition d'applications continues, que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, les fonctions $\partial_j f$ sont continues.

Exercice 9 Soit $\mathcal{N}$ une norme sur E et supposons que cette application soit différentiable en 0. Dans ce cas, $\mathrm{D}_x\mathcal{N}(0)$ est définie pour tout $x \in E$, c'est-à-dire que l'application $g_x : t \mapsto \mathcal{N}(tx)$ est dérivable en 0. Cependant, $g_x(t) = |t|\,\|x\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; cette expression montre que g_x n'est pas dérivable en 0 lorsque $x \neq 0$. Par suite, $\mathcal{N}$ n'est pas différentiable en 0.

Corollaire 6 Par linéarité de $\mathrm{d}f(a)$, pour tout $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$, on a :

$$\mathrm{d}f(a)\cdot h = \mathrm{d}f(a)\cdot\left(\sum_{j=1}^{p} h_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} h_j \mathrm{d}f(a)\cdot e_j,$$

donc, d'après le corollaire 5 de la page 1108, on obtient :

$$\mathrm{d}f(a)\cdot h = \sum_{j=1}^{p} h_j\,\partial_j f(a).$$

Exercice 10 Étudions l'existence de $\mathrm{D}_{(h,k)} f(0,0)$.

Soit $(h,k) \in \mathbb{R}^2$. Si $(h,k) = (0,0)$, alors $\mathrm{D}_{(0,0)} f(0,0) = 0$.

Supposons donc que $(h,k) \neq (0,0)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:

$$f(th,tk) = t\,\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2}\cdot$$

On en déduit que f admet une dérivée en 0 suivant (x,y) et que :

$$\mathrm{D}_{(x,y)} f(0,0) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\cdot$$

On constate que l'application $u : (x,y) \mapsto \mathrm{D}_{(x,y)} f(0,0)$ n'est pas linéaire, car, par exemple, $u(1,0) = u(0,1) = 1$ et $u(1,1) = 1 \neq u(1,0) + u(0,1)$. Par conséquent, f n'est pas différentiable en 0.

Proposition 7 Soit $a \in U$. Pour tout $h \in E$ tel que $a+h \in U$, on a $f(a+h) = f(a)$ et donc au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = f(a) = f(a) + 0 \cdot h + \mathrm{o}(h).$$

Il s'ensuit, l'application nulle étant linéaire, que l'application f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = 0$. Puisque $\mathrm{d}f$ est constante, elle est continue et donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 11 Considérons $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (c'est un produit d'ouverts de $\mathbb{R}$). La fonction indicatrice sur U de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ convient.

Proposition 8 Soit $a \in E$. Pour tout $h \in E$ on a :

$$u(a+h) = u(a) + u(h)$$

et donc au voisinage de 0 :

$$u(a+h) = u(a) + u \cdot h + \mathrm{o}(h).$$

Par suite, l'application u est différentiable en a et $\mathrm{d}u(a) = u$.
Puisque l'application $\mathrm{d}u$ est constante, donc continue, l'application u est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 9 On munit $E \times F$ de la norme définie par $\big\|(x,y)\big\| = \max\big\{\|x\|, \|y\|\big\}$.

Rappelons, B étant une application bilinéaire définie sur le produit de deux espaces vectoriels de dimension finie, qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\big\|B(x,y)\big\| \leqslant C\,\|x\|\,\|y\|$ pour tout $(x,y) \in E \times F$.

- Soit $(a,b) \in E \times F$. Par bilinéarité :

$$\forall (h,k) \in E \times F \quad B(a+h, b+k) = B(a,b) + B(a,k) + B(h,b) + B(h,k).$$

Par ailleurs, pour $(h,k) \in E \times F$:

$$\big\|B(h,k)\big\| \leqslant C\,\|h\|\,\|k\| \leqslant C\,\big\|(h,k)\big\|^2,$$

par conséquent, au voisinage de 0, on a la domination :

$$\big\|B(h,k)\big\| = \mathrm{O}\left(\big\|(h,k)\big\|^2\right) = \mathrm{o}\big((h,k)\big)$$

et donc :

$$B(a+h, b+k) = B(a,b) + B(a,k) + B(h,b) + \mathrm{o}\big((h,k)\big).$$

L'application $u : (h,k) \mapsto B(a,k) + B(h,b)$ étant linéaire, on en déduit que B est différentiable en (a,b) et :

$$\forall (h,k) \in E \times F \quad \mathrm{d}B(a,b) \cdot (h,k) = B(a,k) + B(h,b).$$

- La bilinéarité de B implique que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}B : & E \times F & \longrightarrow & \mathcal{L}(E \times F\,,\, G) \\ & (a,b) & \longmapsto & (h,k) \mapsto B(a,k) + B(h,b) \end{array}$$

est linéaire. Les espaces étant tous de dimension finie, $\mathrm{d}B$ est continue et B est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 10 Il suffit de remarquer que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$:

$$\mathrm{d}f(a) \cdot e_j = \partial_j f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_j f_i(a)\, e_i'.$$

Proposition 11

1. Supposons que f et g soient différentiables en $a \in U$. Ainsi, au voisinage de 0, on a :
$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \mathrm{o}(h) \tag{1}$$
$$g(a+h) = g(a) + \mathrm{d}g(a) \cdot h + \mathrm{o}(h) \tag{2}$$
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$; posons $\varphi = \lambda f + \mu g$. Par combinaison linéaire des égalités (1) et (2), sachant que $\lambda\, \mathrm{d}f(a) + \mu\, \mathrm{d}g(a) \in \mathcal{L}(E, F)$, il vient qu'au voisinage de 0 on a :
$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + \underbrace{\lambda\, \mathrm{d}f(a) \cdot h + \mu\, \mathrm{d}g(a) \cdot h}_{= \left(\lambda\, \mathrm{d}f(a) + \mu\, \mathrm{d}g(a)\right) \cdot h} + \mathrm{o}(h).$$
Il s'ensuit que $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et $\mathrm{d}\left(\lambda f + \mu g\right)(a) = \lambda\, \mathrm{d}f(a) + \mu\, \mathrm{d}g(a)$.
2. Il s'agit d'une conséquence immédiate de ce qui précède.
3. Si f et g sont de classes $\mathcal{C}^1$, les applications $\mathrm{d}f$ et $\mathrm{d}g$ sont continues. Par combinaison linéaire, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, l'application $\lambda\, \mathrm{d}f + \mu\, \mathrm{d}g$ est continue. Par suite $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 13 Pour simplifier, notons $f_1 = f$ et $f_2 = g$ et $\Phi = fg$.

1. Supposons que f_1 et f_2 soient différentiables en a. Il existe alors des fonctions ε_1 et ε_2 définies sur un voisinage W de 0 telles que, pour $i \in \{1, 2\}$:
$$\forall h \in W \quad f_i(a+h) = \underbrace{f_i(a) + \mathrm{d}f_i(a) \cdot h}_{\delta_i(h)} + \|h\|\, \varepsilon_i(h) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_i(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$
   - Il vient pour $h \in W$:
   $$\begin{aligned}\Phi(a+h) &= \big(\delta_1(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\big)\big(\delta_2(h) + \|h\|\varepsilon_2(h)\big) \\ &= \delta_1(h)\, \delta_2(h) + \|h\|\, R(h)\end{aligned}$$
   où :
   $$R(h) = \delta_1(h)\, \varepsilon_2(h) + \delta_2(h)\, \varepsilon_1(h) + \|h\|\, \varepsilon_1(h)\, \varepsilon_2(h).$$
   - Pour $i \in \{1, 2\}$, les applications $\mathrm{d}f_i(a)$ étant continues, on a $\delta_i(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f_i(a)$ et, par définition, $\varepsilon_i(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$. Par opérations sur les limites, on obtient $R(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$. En d'autres termes :
   $$\Phi(a+h) = \delta_1(h)\, \delta_2(h) + \mathrm{o}(h) \tag{1}$$
   - Par ailleurs, on obtient à partir de l'expression (1), que l'on a au voisinage de 0 :
   $$\begin{aligned}&\Phi(a+h) - \Phi(a) - \big(\mathrm{d}f_1(a) \cdot h\big)\, f_2(a) - f_1(a)\, \big(\mathrm{d}f_2(a) \cdot h\big) \\ &\qquad = \big(\mathrm{d}f_1(a) \cdot h\big)\, \big(\mathrm{d}f_2(a) \cdot h\big) + \mathrm{o}(h).\end{aligned}$$

Puisque qu'au voisinage de 0, on a $\big\|\mathrm{d}f_i(a)\cdot h\big\| = \mathrm{O}\big(\|h\|\big)$:

$$\big(\mathrm{d}f_1(a)\cdot h\big)\,\big(\mathrm{d}f_2(a)\cdot h\big) = \mathrm{O}\left(\|h\|^2\right) = \mathrm{o}(h).$$

Par suite :

$$\Phi(a+h) - \Phi(a) - \big(\mathrm{d}f_1(a)\cdot h\big)\,f_2(a) - f_1(a)\,\big(\mathrm{d}f_2(a)\cdot h\big) = \mathrm{o}(h).$$

En remarquant que la fonction $h \mapsto \big(\mathrm{d}f_1(a)\cdot h\big)\,f_2(a) + f_1(a)\,\big(\mathrm{d}f_2(a)\cdot h\big)$ est linéaire, on conclut qu'il s'agit de la différentielle de fg.

2. C'est immédiat.
3. Supposons que f_1 et f_2 soient de classe $\mathcal{C}^1$.
   L'application définie sur $\mathbb{R}\times\mathcal{L}(E,F)$ par $(\lambda,u)\mapsto\lambda\,u$ est bilinéaire et donc continue, puisque $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}(E,F)$ sont de dimension finie. Il s'ensuit alors que $f_1\,\mathrm{d}f_2$ et $f_2\,\mathrm{d}f_1$ sont des applications continues et f_1f_2 est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 15

Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$ une base de E. Pour $j\in[\![1,p]\!]$ notons π_j la j-ème projection, c'est-à-dire l'application qui à $x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k \in E$ associe x_j. Les π_j sont linéaires, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque qu'un produit d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$, pour $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in\mathbb{N}^p$, les applications $\mu_\alpha = \pi_1^{\alpha_1}\cdots\pi_p^{\alpha_p}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. On conclut en remarquant que toute fonction polynomiale est une combinaison linéaire de fonctions μ_α, donc une combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 12

- La fonction f est polynomiale sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$, donc de classe $\mathcal{C}^1$, *a fortiori* elle est différentiable.
- Un calcul direct donne :

  $$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 + yz.$$

  Les calculs de $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ se font de la même manière.
- L'expression de la différentielle d'une fonction différentiable à l'aide de ses dérivées partielles donne, pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

  $$\forall (h,k,\ell)\in\mathbb{R}^3 \quad \mathrm{d}f(x,y,z)\cdot(h,k,\ell) = h\left(3x^2+yz\right) + k\left(3y^2+xz\right) + \ell\left(3z^2+xy\right).$$

Exercice 13

- La fonction $f=\det$ est polynomiale sur l'ouvert $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc de classe $\mathcal{C}^1$.
- Soit $M = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculons les dérivées partielles de la fonction f en M dans cette base, c'est-à-dire les $\mathrm{D}_{E_{i,j}}f(M)$. En utilisant la linéarité par rapport à la j-ème

colonne, pour $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\det(M+tE_{i,j}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j}+t & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \det M + t \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \det M + t(-1)^{i+j}\Delta_{i,j},$$

où $\Delta_{i,j}$ est le mineur d'indice (i,j) de M. Il s'ensuit que :

$$\mathrm{D}_{E_{i,j}} f(M) = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

- L'expression de la différentielle d'une fonction différentiable à l'aide de ses dérivées partielles donne, pour tout $H = (h_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{d}f(M)\cdot H = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j} = \mathrm{Tr}\big(H\,{}^t\mathrm{Com}(M)\big).$$

En particulier, si M est inversible :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \mathrm{d}f(M)\cdot H = (\det M)\ \mathrm{Tr}\big(H\,M^{-1}\big).$$

Théorème 16

1. Supposons que f soit différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $b = f(a)$. La différentiabilité de g en b se traduit par l'existence d'une fonction ε' définie sur $W = -b + V = \{-b+v\,;\ v \in V\}$ telle que :

$$\forall h' \in W \quad g(b+h') = g(b) + \mathrm{d}g(b)\cdot h' + \underbrace{\|h'\|\varepsilon'(h')}_{\alpha(h')} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon'(h') \underset{h'\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, pour $h \in U$ tel que $a+h \in U$:

$$g\big(f(a+h)\big) = g(b) + \mathrm{d}g(b)\cdot\big(f(a+h)-f(a)\big) + \alpha\big(f(a+h)-f(a)\big). \qquad (1)$$

Puisque f est différentiable en a, on a la domination $f(a+h)-f(a) = \mathrm{O}(h)$ au voisinage de 0 et donc :

$$\alpha\big(f(a+h)-f(a)\big) = \mathrm{o}\big(f(a+h)-f(a)\big) = \mathrm{o}(h),$$

ce qui nous donne au voisinage de 0 à partir de la relation (1) :

$$g\big(f(a+h)\big) = g(b) + \mathrm{d}g(b)\cdot\big(f(a+h)-f(a)\big) + \mathrm{o}(h). \qquad (2)$$

La différentiabilité de f en a implique l'existence d'une fonction ε définie au voisinage de 0 telle que :

$$f(a+h)-f(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot h + \|h\|\,\varepsilon(h) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On obtient ainsi au voisinage de 0 à partir de la relation (2) :

$$g\big(f(a+h)\big) = g(b) + \mathrm{d}g(b)\cdot\big(\mathrm{d}f(a)\cdot h\big) + \|h\|\mathrm{d}g(b)\cdot\varepsilon(h) + \mathrm{o}(h).$$

Enfin, puisque $\lim\limits_{0}\varepsilon = 0$, par continuité on a $\mathrm{d}g(b)\cdot\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ et donc au voisinage de 0 :

$$\|h\|\mathrm{d}g(b)\cdot\varepsilon(h) = \mathrm{o}(h).$$

On en conclut que :

$$g\big(f(a+h)\big) = g(b) + \mathrm{d}g(b)\cdot\big(\mathrm{d}f(a)\cdot h\big) + \mathrm{o}(h),$$

ce qui prouve que $g\circ f$ différentiable en a et $\mathrm{d}(g\circ f)(a) = \mathrm{d}g(b)\circ\mathrm{d}f(a)$.

2. C'est immédiat.
3. Supposons que f et g soient de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque f et $\mathrm{d}g$ sont continues, l'application $(\mathrm{d}g)\circ f$ est continue. Par ailleurs, l'application $\mathrm{d}f$ est continue, ce qui implique que l'application :

$$\begin{array}{rccc}\Phi: & U & \longrightarrow & \mathcal{L}(F,G)\times\mathcal{L}(E,F)\\ & x & \longmapsto & \big(\mathrm{d}g\big(f(x)\big),\mathrm{d}f(x)\big)\end{array}$$

est également continue. De plus l'application :

$$\begin{array}{rccc}B: & \mathcal{L}(F,G)\times\mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G)\\ & (v,u) & \longmapsto & v\circ u\end{array}$$

est bilinéaire, donc continue (tous les espaces sont de dimension finie).
Ainsi $\mathrm{d}(g\circ f) = B\circ\Phi$ est continue et $g\circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 14 On sait que par convention $u\cdot x$ désigne $u(x)$ lorsque $\mathcal{L}(E,F)$ et $x\in E$. Cela conduit à convenir, si $\varphi : X\to\mathcal{L}(E,F)$ et $\psi : X\to E$, que $\varphi\cdot\psi$ désigne l'application $x\mapsto\big(\varphi(x)\big)\cdot\big(\psi(x)\big)$.

Proposition 17 L'application γ est dérivable en t_0, donc différentiable en t_0 et, par composition, $f\circ\gamma$ l'est également. Par conséquent :

$$\mathrm{d}(f\circ\gamma)(t_0)\cdot 1 = \mathrm{d}f(a)\cdot\big(\mathrm{d}\gamma(t_0)\cdot 1\big) = \mathrm{d}f(a)\cdot\gamma'(t_0).$$

Ainsi, $(f\circ\gamma)'(t_0) = \mathrm{d}(f\circ\gamma)(t_0)\cdot 1 = \mathrm{d}f(a)\cdot\gamma'(t_0)$.

Proposition 18 L'application φ est dérivable, donc différentiable et, puisque φ est à valeurs réelles, pour tout $t\in I$, on a $\mathrm{d}\varphi(t) : h\to\varphi'(t)\,h$. On en déduit du théorème 16 de la page 1111 que $\varphi\circ f$ est différentiable et, pour $x\in U$, on a :

$$\forall h\in E\quad \mathrm{d}(\varphi\circ f)(x)\cdot h = \varphi'\big(f(x)\big)\big)\,\big(\mathrm{d}f(x)\cdot h\big).$$

Toujours d'après le théorème 16 de la page 1111, si f et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$, la composée $\varphi\circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 15 D'après l'exemple de la page 1107, la fonction $\varphi : x \mapsto (\,x \mid x\,)$ est différentiable sur F et $\mathrm{d}\varphi(x)\cdot h = 2(\,x \mid h\,)$. Par conséquent, par composition avec l'application $\sqrt{\ }$, la fonction $\psi : x \mapsto \|x\|$ est différentiable sur $F\backslash\{0\}$ et $\mathrm{d}\psi(x) : h \to \dfrac{(\,x \mid h\,)}{\|x\|}$.
Par composition, $\|f\|$ est différentiable en $a \in U$ tel que $f(a) \neq 0$ et :

$$\mathrm{d}\left(\|f\|\right)(a)\cdot h = \frac{(\,f(a) \mid \mathrm{d}f(a)\cdot h\,)}{\|f(a)\|}.$$

Proposition 20 D'après la proposition 8 de la page 1109, l'application linéaire u est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}u$ est l'application constante égale à u. Les résultats sont alors une conséquence immédiate du théorème 16 de la page 1111. En particulier, lorsque f est différentiable en $a \in U$:

$$\mathrm{d}(u\circ f)(a) = u\circ \mathrm{d}f(a).$$

Corollaire 21 Posons $\mathcal{B}' = (e'_1,\dots,e'_n)$ et, pour $i \in [\![1,n]\!]$, notons π_i la i-ème projection, c'est-à-dire l'application définie par $\pi_i\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e'_k\right) = x_i$.

1. Supposons que f soit différentiable en a. Dans ces conditions, pour $i \in [\![1,n]\!]$, l'application π_i étant linéaire et donc différentiable, on obtient que $f_i = p_i \circ f$ est différentiable en a.
   Supposons que toutes les applications composantes soient différentiables en a. Alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, l'application $f_i e'_i : x \mapsto f_i(x)e'_i$ est différentiable a (car il s'agit de la composée de f_i et de l'application linéaire $y \mapsto ye'_i$), et :

   $$\forall h \in E \quad \mathrm{d}(f_i e'_i)\cdot h = \big(\mathrm{d}f_i(a)\cdot h\big)e'_i.$$

   Par linéarité, il s'ensuit que $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e'_i$ est différentiable en a et :

   $$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(f_i e'_i)(a) = \sum_{i=1}^{n} \big(\mathrm{d}f_i(a)\big)e'_i.$$

2. Les deux autres points sont des conséquences simples du premier.

Exercice 16

- Les n^2 applications composantes de f_p sont polynomiales sur l'ouvert $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Par suite, f_p est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Le calcul de $\mathrm{D}_H f_p(M)$ a été réalisé à l'exercice 5 page 1102.
  Il s'ensuit, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

  $$\mathrm{d}f_p(M) : H \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-i-1}.$$

Théorème 22 Notons $g = B(f_1, f_2)$. Rappelons que B est de classe $\mathcal{C}^1$.

- Supposons que f_1 et f_2 soient différentiables en a. L'application définie sur E par $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)$ est différentiable en a (puisque ses fonctions composantes le sont) et $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto \big(\mathrm{d}f_1(a)\cdot h, \mathrm{d}f_2(x)\cdot h\big)$. Par composition, puisque B est différentiable, $g = B\circ f$ est différentiable en a et, pour $h \in E$:

  $$\begin{aligned}\mathrm{d}g(a)\cdot h &= \mathrm{d}B\big(f_1(a), f_2(a)\big)\cdot\big(\mathrm{d}f_1(a)\cdot h, \mathrm{d}f_2(a)\cdot h\big)\\ &= B\big(\mathrm{d}f_1(a)\cdot h, f_2(a)\big) + B\big(f_1(a), \mathrm{d}f_2(a)\cdot h\big).\end{aligned}$$

- D'après ce qui précède, si f_1 et f_2 sont différentiables, alors f est différentiable et donc g l'est également par composition.
- De même, si f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc g l'est également par composition.

Exercice 17 Rappelons que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cela est une conséquence de la continuité de l'application déterminant et du fait que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par cette application.

1. La formule $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\,{}^t\mathrm{Com}(M)$ montre que les n^2 applications composantes de l'application $M \mapsto M^{-1}$ sont rationnelles, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Il s'ensuit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$; on a $M \times M^{-1} = I_n$. Par suite, l'application $M \mapsto M \times f(M)$ est constante sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et donc sa différentielle est nulle. Ainsi, le produit matriciel définissant une application bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, les règles de calcul de différentielles déjà vues donnent, pour $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$:
$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad H \times M^{-1} + M \times \big(\mathrm{d}f(M)\cdot H\big) = 0$$
On en déduit, pour $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, que :
$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \mathrm{d}f(M)\cdot H = -M^{-1} \times H \times M^{-1}.$$

Théorème 25 Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots e'_n)$, et soit $j \in [\![1, p]\!]$.
Puisque f est différentiable en a et g est différentiable en b, la fonction h est différentiable en a.
Ainsi en a toutes les dérivées partielles de h sont définies et $\partial_j h(a) = \mathrm{d}h(a)\cdot e_j$.
D'après le théorème 16 de la page 1111 :
$$\partial_j h(a) = \mathrm{d}h(a)\cdot e_j = \mathrm{d}g(b)\cdot\big(\mathrm{d}f(a)\cdot e_j\big).$$
Par ailleurs, d'après le corollaire 6 de la page 1108 $\mathrm{d}g(b) : k \mapsto \sum_{i=1}^{n} k_i \partial_i g(b)$ et l'on a :
$$\mathrm{d}f(a)\cdot e_j = \partial_j f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_j f_i(a)\, e_i.$$
Par suite :
$$\partial_j h(a) = \mathrm{d}g(b)\cdot\big(\mathrm{d}f(a)\cdot e_j\big) = \sum_{i=1}^{n} \partial_j f_i(a)\, \partial_i g(b).$$

Exercice 18 Les applications polynomiales $u : (x, y) \mapsto x + y$ et $v : (x, y) \mapsto xy$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, donc différentiables. D'après la règle de la chaîne, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + y\,\frac{\partial f}{\partial v}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} + x\,\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Proposition 26 Pour tout $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$, on a :

$$\big(\nabla f(a) \,\big|\, h\big) = \mathrm{d}f(a)\cdot h = \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a) = \left(h \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a)\, e_j \right)$$

puisque la base est orthonormée. Par unicité, $\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a)\, e_j$.

Proposition 28 Soit h un vecteur de norme 1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\mathrm{D}_h f(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot h = \big(\nabla f(a) \mid h\big) \leqslant \|\nabla f(a)\|. \tag{1}$$

De plus, on a l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1) si, et seulement si, h est $\mathbb{R}_+^*$-colinéaire à $\nabla f(a)$. Puisque h est normé, l'égalité est réalisée uniquement lorsque $h = \dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.

Théorème 29 Supposons que f admette un extremum local en a et que f soit différentiable en a. Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse d'une maximum. Il existe alors $\eta > 0$ tel que $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in B_F(a,\eta)$.

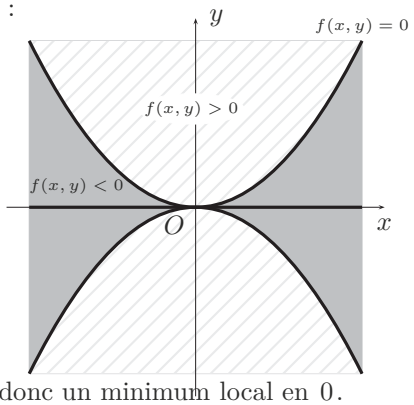
Soit $h \in E \setminus \{0\}$. L'application $\varphi : t \mapsto f(a+th)$ est définie sur l'intervalle ouvert $I = \left]-\frac{\eta}{\|h\|}, \frac{\eta}{\|h\|}\right[$ et φ admet un maximum en 0. Puisque f est différentiable en a, l'application φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = \mathrm{D}_h f(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot h$. On sait que si une fonction réelle de la variable réelle définie sur un intervalle ouvert admet un maximum en un point où elle dérivable, alors sa dérivée est nulle en ce point. Par conséquent :

$$\mathrm{d}f(a)\cdot h = \varphi'(0) = 0.$$

Cette dernière relation étant vérifiée pour tout $h \in E$ (c'est immédiat si $h = 0$), on en déduit que $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Exercice 19

1. On obtient facilement la figure ci-contre.



2. • Soit $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(tu) = t^4 b^2 (b^2 - t^2 a^4).$$

Si $b = 0$, alors $f(tu) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et l'application $t \mapsto f(tu)$ a un minimum local en 0.
Si $b \neq 0$, alors au voisinage de 0, on a $f(tb) \underset{0}{\sim} t^4 b^4$. Puisque la fonction $t \mapsto t^4 b^4$ est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}^*$, l'application $t \mapsto f(tu)$ est à valeurs strictement positives au voisinage de 0. Cette dernière fonction admet donc un minimum local en 0.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$f\left(x, \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{3}{16}\, x^8.$$
Par suite, dans tout voisinage de 0, il existe un point (x, y) tel que $f(x, y) < 0$ et un point (x', y') tel que $f(x', y') > 0 = f(0, 0)$. Par conséquent, la fonction f n'admet pas de minimum local en $(0, 0)$.

Exercice 20 Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$f(x, y) = x^2(1 - x - y^5) + y^2.$$
L'ensemble $W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1-x-y^5 > 0\right\}$ est un ouvert (c'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ par l'application continue $(x, y) \mapsto 1 - x - y^5$), contenant 0. Sur le voisinage W de 0, on a $f(x, y) \geqslant 0$. Par conséquent f admet minimum local en $(0, 0)$.

Exercice 21

- La fonction f est polynomiale sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, donc différentiable et l'on a :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \nabla f(x, y) = \big(2x(2x^2 - 1)\,,\, 2y(2y^2 + 1)\big).$$
Il est alors immédiat que les points critiques de f sont $(0, 0)$ et $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.
- Étudions ces points critiques.
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x, 0) = x^4 - x^2 \underset{0}{\sim} -x^2$, et donc f prend des valeurs strictement négatives dans tout voisinage de $(0, 0)$. De même, en considérant la fonction $y \mapsto f(0, y) = y^4 + y^2$, la fonction f prend, dans tout voisinage de $(0, 0)$, des valeurs strictement positives.
  Il n'y a donc pas d'extremum en $(0, 0)$.
  - En écrivant, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$f(x, y) = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^4 + y^2$$
on voit que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) \geqslant -\frac{1}{4} = f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$
Ainsi la fonction f admet un minimum global en $(1/\sqrt{2}, 0)$et en $(-1/\sqrt{2}, 0)$.

Exercice 22

1. L'hypothèse $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$ implique qu'il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $x \in E$:
$$\|x\| > r \Longrightarrow f(x) \geqslant f(0).$$
Puisque E est de dimension finie, la boule fermée $B = B_F(0, r)$ est compacte. Il s'ensuit que $f_{|_B}$ atteint son minimum en un point x_0. Puisque $0 \in B$, on a $f(x_0) \leqslant f(0)$.

Pour tout $x \in E$, on a $f(x) \geqslant f(x_0)$ si $x \in B$, et si $x \notin B$, on a :

$$f(x) \geqslant f(0) \geqslant f(x_0).$$

Par suite f atteint son minimum en x_0.

2. Puisque la fonction f admet un minimum, si elle est différentiable, le minimum est atteint en un point critique. Si de plus on suppose qu'elle admet un seul point critique, alors il s'agit de l'unique point où le minimum est atteint.

Théorème 30

- Le sens $(i) \Rightarrow (ii)$ est l'objet du corollaire 5 de la page 1108.
- Montrons $(ii) \Rightarrow (i)$. Supposons que toutes les dérivées partielles soient définies et continues. On munit E de la norme $\| \ \|_\infty$ associée à la base $\mathcal{B}$.
  Soit $a \in U$. Supposons d'abord que toutes les dérivées partielles soient nulles en a.
  Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité, il existe un $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in B_F(a, \eta)$ et $j \in [\![1, p]\!]$ on ait $\|\partial_j f(x)\| \leqslant \varepsilon/p$. Soit $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in B_F(0, \eta)$.
  On note $s_k = a + h_1 e_1 + \cdots + h_k e_k$ pour $k \in [\![0, p]\!]$.
  Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et $t \in [0, 1]$, on a :

$$s_{k-1} + t h_k e_k = a + \sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i + t h_k e_k \in B_F(a, \eta).$$

  On peut donc définir, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, une fonction g_k de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ par :

$$g_k(t) = f\left(s_{k-1} + t h_k e_k\right).$$

  Comme $g_k'(t) = h_k \partial_k f(s_{k-1} + t h_k e_k))$ est bornée par $\frac{\varepsilon}{p} |h_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{p} \|h\|$ pour tout $t \in [0, 1]$, on a, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\left\| f\left(s_k\right) - f\left(s_{k-1}\right) \right\| = \left\| g_k(1) - g_k(0) \right\| \leqslant \|h\| \frac{\varepsilon}{p}.$$

  Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \left\| f(a+h) - f(a) \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^{p} \big(f(s_k) - f(s_{k-1}) \big) \right\| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{p} \left\| f(s_k) - f(s_{k-1}) \right\| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{p} \|h\| \, \frac{\varepsilon}{p} = \|h\| \varepsilon. \end{aligned}$$

  Par suite, $f(a+h) = f(a) + \mathrm{o}(h)$ au voisinage de 0 et donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = 0$.

  Dans le cas général, posons $u : h \mapsto \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a)$. Dans ces conditions, toutes les dérivées partielles de $g = f - u$ sont définies et continues. Elles sont de plus toutes

nulles en a. En vertu de ce qui précède, g est différentiable en a. Puisque u est linéaire, u est différentiable en a, et donc $f = g + u$ l'est également.

En conclusion, f est différentiable sur U. En introduisant une base $\mathcal{B}'$ de F, on sait que la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans ces deux bases est la matrice $J(f)(a) = \big(\partial_j f_i(a)\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

Il s'ensuit que l'application $x \mapsto J(f)(x)$ est continue et donc que l'application $\mathrm{d}f$ est continue. Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 23 On conserve les notations de l'exemple 2 de la page 1123.

- Puisque g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et que la fonction β est de classe $\mathcal{C}^1$, l'application $F_1 : x \mapsto g\big(\beta(x), x\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, pour tout $x \in I$, on a, à l'aide de l'exercice précédent :
$$\begin{aligned} F_1'(x) &= \beta'(x)\,\partial_1 g\big(\beta(x), x\big) + \partial_2 g\big(\beta(x), x\big) \\ &= \beta'(x)\,f\big(\beta(x), x\big) + \int_0^{\beta(x)} \partial_2 f\big(t, x\big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$
- De même, $F_2 : x \mapsto g\big(\alpha(x), x\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $x \in I$, on a :
$$F_2'(x) = \alpha'(x)\,f\big(\alpha(x), x\big) + \int_0^{\alpha(x)} \partial_2 f\big(t, x\big)\,\mathrm{d}t.$$
- Par conséquent, $F = F_1 - F_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $x \in I$, on a :
$$F'(x) = \beta'(x)\,f\big(\beta(x), x\big) - \alpha'(x)\,f\big(\alpha(x), x\big) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_2 f\big(t, x\big)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 24

En tant que fonction rationnelle, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

À l'exercice 8 page 1107, il a été montré que la fonction f prolongée par 0 en 0 est différentiable et de différentielle nulle en 0. On note encore f ce prolongement. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

La fonction f sera de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si :
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$
Il est facile de vérifier que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\,\frac{x^5 + 2x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$
Ainsi, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, en posant $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$:
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = r\,\left|\cos^5\theta + 2\cos^3\theta\,\sin^2\theta - \cos\theta\,\sin^4\theta\right| \leqslant 4r = 4\big\|(x,y)\big\|_2.$$
Cette inégalité est encore vérifiée pour $(0,0)$. Par comparaison :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0,$$
et par symétrie $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$. Par suite, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 31 En tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, d'après la proposition 17 de la page 1112 $\varphi'(t) = \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ et donc :

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lemme 32

- Si la fonction f est constante, alors $\mathrm{d}f = 0$ (*cf.* la proposition 7 de la page 1109).
- Supposons $\mathrm{d}f = 0$. En particulier f est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in U$. Pour tout $x \in U$, par convexité, l'application $\gamma : t \mapsto (1-t)a + tx$ définie sur $[0,1]$ est à valeurs dans U et de classe $\mathcal{C}^1$. On a :

  $$f(x) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

  Il s'ensuit que f est une application constante.

Théorème 33

- Si la fonction f est constante, alors $\mathrm{d}f = 0$ (*cf.* la proposition 7 de la page 1109).
- Soit $a \in U$ et posons $A = \{x \in U \mid f(x) = f(a)\}$. Nous allons montrer que $U = A$ en montrant que A est à la fois ouvert et fermé dans U.
  Puisque $A = f^{-1}\big(\{f(a)\}\big)$ et que l'application f est continue, A est un fermé de U.
  Soit $x \in A$. Puisque U est un ouvert de E, il existe $r > 0$ tel que $B_O(x,r) \subset U$. Puisque les boules sont convexes, d'après le lemme 32 de la page 1125, la restriction de f à $B_O(x,r)$ est constante. Il s'ensuit que $B_O(x,r) \subset A$. Par conséquent A est un ouvert de U. Puisque A est non vide et à la fois ouvert et fermé dans U qui est connexe par arcs, on a $A = U$.

Proposition 34 Raisonnons par récurrence descendante. Vu les hypothèses, il suffit de démontrer que si f est de classe $\mathcal{C}^i$, avec $i > 1$, alors f est de classe $\mathcal{C}^{i-1}$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^i$, toutes les dérivées partielles d'ordre i sont définies. Soit une dérivée partielle $\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_{i-1}} f$ d'ordre $i-1$. Toutes les dérivées partielles d'ordre 1 de celle-ci sont définies et continues, car ce sont des dérivées partielles d'ordre i de f. D'après le théorème fondamental $\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_{i-1}} f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc continue. On en conclut que toutes les dérivées partielles d'ordre $i-1$ sont continues et donc que f est de classe $\mathcal{C}^{i-1}$.

Corollaire 35

- Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^k$. D'après la proposition 34 de la page 1127 la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque les dérivées partielles d'ordre k de f sont les dérivées partielles d'ordre $k-1$ de $\partial_1 f$, …, $\partial_p f$, on en déduit que les dérivées partielles d'ordre 1 sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.
- Supposons que toutes les dérivées partielles d'ordre 1 de f soient définies, et qu'elles soient toutes de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Puisque les dérivées partielles d'ordre k de f sont les dérivées partielles d'ordre $k-1$ des fonctions $\partial_1 f$,…, $\partial_p f$, les dérivées partielles d'ordre k de f sont toutes continues et f est de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 36 Démontrons par récurrence, pour $k \in \mathbb{N}$, l'assertion :

$$\mathcal{H}_k \ : \ \forall (f,g) \in \mathcal{C}^k(U,F)^2 \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \lambda f + \mu g \text{ est de classe } \mathcal{C}^k$$

Le cas $k = 0$ correspond à une propriété connue des fonctions continues.

Supposons que $\mathcal{H}_{k-1}$ soit vraie pour un $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : U \to F$ et $g : U \to F$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $j \in [\![1,p]\!]$. Il est immédiat, par linéarité de la dérivation, que :

$$\partial_j(\lambda f + \mu g) = \lambda\, \partial_j f + \mu\, \partial_j g.$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à $\partial_j f$, $\partial_j g$, λ et μ montre que $\lambda\, \partial_j f + \mu\, \partial_j g$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Ainsi, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, les fonctions $\partial_j(\lambda f + \mu g)$ sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, et donc $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$. Cela démontre $\mathcal{H}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Il vient immédiatement de ce qui précède que si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 37 Démontrons par récurrence, pour $k \in \mathbb{N}$, l'assertion :

$$\mathcal{H}_k \ : \ \forall (f_1,f_2) \in \mathcal{C}^k(U,F)^2 \quad B(f_1,f_2) \text{ est de classe } \mathcal{C}^k$$

Le cas $k = 0$ correspond à une propriété connue des fonctions continues.

Supposons $\mathcal{H}_{k-1}$ vrai pour un $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f_1 : U \to F_1$ et $f_2 : U \to F_2$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Soit $j \in [\![1,p]\!]$. D'après les propriétés de la dérivation des fonctions vectorielles, on a :

$$\partial_j\big(B(f_1\,,\,f_2)\big) = B(\partial_j f_1\,,\,f_2) + B(f_1\,,\,\partial_j f_2)\,.$$

Puisque f_1 est de classe $\mathcal{C}^k$ et f_2 est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, car de classe $\mathcal{C}^k$, il vient de l'hypothèse de récurrence, que $B(\partial_j f_1\,,\,f_2)$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. De même, l'application $B(f_1\,,\,\partial_j f_2)$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Par linéarité $\partial_j\big(B(f_1,f_2)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Ainsi, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, les fonctions $\partial_j\big(B(f_1\,,\,f_2)\big)$ sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, et donc $B(f_1\,,\,f_2)$ est de classe $\mathcal{C}^k$. Cela démontre $\mathcal{H}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Il vient immédiatement de ce qui précède que si f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $B(f_1,f_2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Théorème 39 On munit F d'une base $\mathcal{B}'$. Les applications composantes de f dans cette base sont notées f_1, …, f_n. Démontrons par récurrence, pour $k \in \mathbb{N}$, l'assertion :

$$\mathcal{H}_k : \text{« Pour tout } f \in \mathcal{C}^k(U,F) \text{ et tout } g \in \mathcal{C}^k(V,G) \text{ telles que } f(U) \subset V\,,$$
$$\text{l'application } g \circ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^k\,. \text{ »}$$

Le cas $k = 0$ correspond à une propriété connue des fonctions continues.

Supposons que $\mathcal{H}_{k-1}$ soit vraie pour un $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : U \to F$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. En particulier f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ et d'après le théorème 25 de la page 1116, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$:

$$\partial_j(g \circ f) = \sum_{i=1}^{n} \partial_j f_i \times \big((\partial_i g) \circ f\big).$$

Les applications $\partial_j f_i$ et $\partial_i g$ sont toutes de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. De plus, la fonction f étant en particulier de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, l'hypothèse de récurrence donne que les applications $(\partial_i g)\circ f$ sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Par somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, pour tout $j\in[\![1,p]\!]$, l'application $\partial_j(g\circ f)$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Par conséquent $g\circ f$ est de classe C^k. Cela termine la démonstration par récurrence.

Il vient immédiatement de ce qui précède, que si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $g\circ f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Lemme 41 Le résultat est immédiat si $u=0$ ou $v=0$. Désormais $u\neq 0$ et $v\neq 0$.

Puisque U est un ouvert, il existe $r>0$ tel que $B_F(a,r)\subset U$. Soit $(u,v)\in E^2$ tel que $\|u\|+\|v\|\leqslant r$.

Notons $C(u,v)=f(a+u+v)-f(a+u)-f(a+v)+f(a)$.

- Montrons que $C(u,v)=\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 \mathrm{D}_v D_u f(a+su+tv)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$. Pour cela posons la fonction $g:s\mapsto f(a+su+v)-f(a+su)$, définie sur $[0,1]$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$, donc :

$$C(u,v)=g(1)-g(0)=\int_0^1 g'(s)\,\mathrm{d}s=\int_0^1 \mathrm{D}_u f(a+su+v)-\mathrm{D}_u f(a+su)\,\mathrm{d}s.$$

Puisque $\mathrm{D}_u f=\displaystyle\sum_{j=1}^p u_j\partial_j f$, la fonction $\mathrm{D}_u f$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, pour $s\in[0,1]$:

$$\mathrm{D}_u f(a+su+v)-\mathrm{D}_u f(a+su)=\int_0^1 \mathrm{D}_v\mathrm{D}_u(a+su+tv)\,\mathrm{d}t.$$

Il s'ensuit que :

$$C(u,v)=\int_0^1\left(\int_0^1 \mathrm{D}_v\,\mathrm{D}_u f(a+su+tv)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$$

- Montrons que $\dfrac{C(\lambda u,\lambda v)}{\lambda^2}\underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow}\mathrm{D}_v\mathrm{D}_u f(a)$.

Remarquons que $\lambda\mapsto C(\lambda u,\lambda v)$ est définie sur un voisinage de 0 et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$D_{\lambda u}f=\lambda\,\mathrm{D}_u f.$$

Il s'ensuit que pour $\lambda\in\mathbb{R}^*$ vérifiant $|\lambda|\leqslant\lambda_0$, où $\lambda_0=\frac{r}{\|u\|+\|v\|}$:

$$\frac{C(\lambda u,\lambda v)}{\lambda^2}=\int_0^1\left(\int_0^1 \mathrm{D}_v\,\mathrm{D}_u f(a+s\lambda u+t\lambda v)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s.$$

Pour conclure, utilisons la définition de la limite. Soit $\varepsilon>0$. Par continuité, il existe $0<\eta\leqslant r$ tel que $\|\mathrm{D}_v\mathrm{D}_u f(a+h)-\mathrm{D}_v\mathrm{D}_u f(a)\|\leqslant\varepsilon$ pour tout $h\in B_F(0,\eta)$.

Ainsi, pour $|\lambda| \leqslant \frac{\eta}{\|u\|+\|v\|}$, puisque $\|s\lambda u + t\lambda v\| \leqslant \eta$ pour $(s,t) \in [0,1]^2$, on a :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{C(\lambda u,\lambda v)}{\lambda^2} - \mathrm{D}_v\mathrm{D}_u f(a)\right\| &= \left\|\int_0^1 \left(\int_0^1 \mathrm{D}_v\,\mathrm{D}_u f(a+s\lambda u+t\lambda v) - \mathrm{D}_v\mathrm{D}_u f(a)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\right\| \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 \left\|\mathrm{D}_v\,\mathrm{D}_u f(a+s\lambda u+t\lambda v) - \mathrm{D}_v\mathrm{D}_u f(a)\right\|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 \varepsilon\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = \varepsilon.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\dfrac{C(\lambda u,\lambda v)}{\lambda^2} \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{D}_v\mathrm{D}_u f(a)$.

- En particulier, $\dfrac{C(\lambda v,\lambda u)}{\lambda^2} \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{D}_u\mathrm{D}_v f(a)$. Puisque $C(\lambda v,\lambda u) = C(\lambda u,\lambda v)$, on obtient $\mathrm{D}_v\mathrm{D}_u f(a) = \mathrm{D}_u\mathrm{D}_v f(a)$.

Corollaire 43 D'après le théorème de Schwarz, l'ensemble G des $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ telles que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^k(U,F) \quad \forall (j_i,\dots,j_k) \in [\![1,p]\!]^k \quad \partial_{j_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{j_{\sigma(k)}} f = \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_k} f$$

contient les transpositions $(i,i+1)$. Il est facile de vérifier que G est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}_k,\circ)$. Par ailleurs, d'après l'exercice 1.7 de la page 52, le groupe $\mathfrak{S}_k$ est engendré par les transpositions du type $(i,i+1)$. Par suite $G = \mathfrak{S}_k$.

Exercice 25

1. Il y autant de dérivées partielles d'ordre k qu'il y a de k-listes à valeurs dans $[\![1,p]\!]$, c'est-à-dire qu'il y a p^k dérivées partielles d'ordre k en dimension p.
2. Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$, on peut, d'après le théorème de Schwarz, se restreindre aux seules dérivées partielles $\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_p^{\alpha_p}}$, avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = k$. Le problème se ramène donc à compter le nombre de solutions entières de l'équation $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = k$.
   Il y a autant de solutions qu'il y a de manières de disposer k objets indiscernables dans p boîtes de capacité illimitée. À une telle distribution on peut associer une liste de 0 et 1 et *vice versa* : la liste comprend $p+1$ fois le nombre 1 et k fois 0, et elle commence et se termine par 1. La distribution est alors caractérisée par le nombre de 0 entre deux 1 consécutifs. Il suffit donc de compter le nombre de telles listes, qui compte $k+p+1$ éléments. Sachant qu'elles sont caractérisées par la positions des 1 et que deux des 1 ont une position fixe, il y a $\binom{p+k-1}{p-1}$ telles listes.
   En conclusion, il suffit de considérer $\binom{p+k-1}{p-1}$ dérivées partielles d'ordre k en dimension p lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$.

Exercice 26

1. • En tant que fonction rationnelle, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$. Le calcul donne, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$
et puisque $f(t,0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
• Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$, en posant $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$:
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = r\big|\sin\theta\left(\cos^4\theta + 4\cos^2\theta\,\sin^2\theta - \sin^4\theta\right)\big| \leqslant 6r = 6\|(x,y)\|_2.$$
Cette dernière inégalité est encore valable pour $(x,y) = (0,0)$. On en déduit que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Par suite,la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue.
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = -f(y,x)$, et donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$ sur $\mathbb{R}^2$. Il s'ensuit que la fonction f a toutes ses dérivées partielles continues et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y.$$
Cette dernière expression est encore valable lorsque $y = 0$.
Par suite $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$. Cependant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(0,x) = x,$$
et donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.
Comme le montre cet exercice, l'hypothèse de classe $\mathcal{C}^2$ est importante dans l'énoncé du théorème de Schwarz.

Exercice 27 Notons $V(x,y) = \big(V_1(x,y), V_2(x,y)\big)$.
Le calcul donne $\frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y) = 2xy$ et $\frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y) = -y$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Puisque $\frac{\partial V_1}{\partial y} \neq \frac{\partial V_2}{\partial x}$, le champ ne dérive pas d'un potentiel.

Exercice 28 On vérifie pour commencer que la condition de Schwarz est bien satisfaite :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y).$$
Si $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel f, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En fixant un $y \in \mathbb{R}$, on en déduit qu'il existe alors une constante $\varphi(y)$ tel que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = x^2y + \varphi(y).$$
Puisque f est classe $\mathcal{C}^1$, et que $(x,y) \mapsto x^2y$ l'est également, il vient que la fonction φ ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$, car $\varphi(y) = f(0,y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Par ailleurs,

nécessairement $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + y = x^2 + \varphi'(y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ce qui implique qu'il existe une constante β telle que :

$$f : (x,y) \mapsto x^2 y + \frac{y^2}{2} + \beta.$$

Il est alors facile de vérifier que $\overrightarrow{V} = \nabla f$, où $f : (x,y) \mapsto x^2 y + \frac{y^2}{2}$.

Exercice 29 Notons pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$V(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \big(V_1(x,y), V_2(x,y)\big).$$

Le calcul donne :

$$\frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y)$$

et donc f vérifie $(\star)$.

Supposons que V dérive d'un potentiel f. D'après le théorème 31 de la page 1125, on aurait :

$$0 = f(\cos 2\pi, \sin 2\pi) - f(0,0) = \int_0^{2\pi} \nabla f\,(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, pour tout $t \in [0, 2\pi]$:

$$\nabla f\,(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \frac{-\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\cos t = -1.$$

Il s'ensuit que

$$0 = f(\cos 2\pi, \sin 2\pi) - f(0,0) = \int_0^{2\pi} -1\,\mathrm{d}t = -2\pi,$$

ce qui est impossible. Par suite f ne dérive pas d'un potentiel.

Exercice 30 Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, l'application u est de classe $\mathcal{C}^2$. Il s'ensuit que g est de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

et donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}$$

ce qui signifie, rappelons le :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \tag{1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta). \tag{2}$$

2. Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$, en appliquant la relation (1) à $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$, il vient en notant $h : (r,\theta) \mapsto \cos\theta\,\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \dfrac{\sin\theta}{r}\,\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$, que pour tout (r,θ) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\,\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta).$$

En d'autre termes, compte tenu du théorème de Schwarz :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\\ &= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{2\cos\theta\,\sin\theta}{r}\,\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\\ &\qquad + \frac{2\sin\theta\,\cos\theta}{r^2}\,\frac{\partial g}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r}.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\\ &= \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2\cos\theta\,\sin\theta}{r}\,\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\\ &\qquad - \frac{2\sin\theta\,\cos\theta}{r^2}\,\frac{\partial g}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r}.\end{aligned}$$

Par conséquent, en additionnant les deux expressions, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2},$$

ce qui signifie :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad \Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta).$$

Exercice 31 On muni $\mathbb{C}$ de la base $\mathcal{B}=(1,i)$. Soit $R\in\,]0,+\infty[\,\cup\{+\infty\}$.

Considérons $\mathcal{S}_R$ l'ensemble des fonctions f définies sur $D_O(0,R)\subset\mathbb{C}$ pour lesquelles il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f:z\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$. Les théorèmes sur les séries entières garantissent que les éléments de $\mathcal{S}$ sont continus.

Soit $f\in\mathcal{S}$ associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $z\in D_0(0,R)$.

Posons la fonction $u_n:t\mapsto a_n(t+z)^n$. Rappelons que les séries entières $\sum a_nz^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant1}na_nz^{n-1}$ ont même rayon de convergence (*cf.* la proposition 13 de la page 593).

La convergence normale de la série $\sum na_nz^n$ sur $D_F(0,r)\subset\mathbb{C}$, pour un r tel que $|z|<r<R$ montre que la série $\sum u'_n$ converge normalement sur $I=[-\rho,\rho]$, où $\rho=r-|z|$. Puisque la série $\sum u_n$ converge en 0, la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$ est dérivable en $0\in\overset{\circ}{I}$. Par conséquent f a une première dérivée partielle en z et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_nz^{n-1}$. Ainsi, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\in\mathcal{S}$.

De même, en considérant les $v_n:t\mapsto a_n(z+it)^n$, on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z)=i\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_nz^{n-1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}\in\mathcal{S}$.

Par suite $\mathcal{S}\subset\mathcal{C}^\infty(D_0(0,R),\mathbb{C})$.

Exercice 32 Notons $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en a.

- Pour tout $v\in E_1$, en considérant $\gamma:t\mapsto a+tv$, on a que $v\in\overrightarrow{\mathcal{T}}$.
- Soit γ une fonction définie sur un voisinage V de 0 et dérivable en 0, à valeurs dans X. Puisque pour tout $t\in V\setminus\{0\}$ on a $\frac{1}{t}\left(\gamma(t)-\gamma(0)\right)\in E_1$ et puisque E_1 est un fermé de E (sous-espace vectoriel en dimension finie), il vient que $\gamma'(0)=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}\left(\gamma(t)-\gamma(0)\right)\in E_1$.

En conclusion $\overrightarrow{\mathcal{T}}=E_1$.

Exercice 33 Notons $G\subset\mathbb{R}^2$ le graphe de f. Soit $\gamma:t\mapsto\Big(x(t),y(t)\Big)$ une application définie sur un voisinage de 0, dérivable en 0 à valeurs dans G et vérifiant $\gamma(0)=\big(x_0,y_0\big)$.

Puisque γ est à valeurs dans G, $y(t)=f\big(x(t)\big)$ pour tout t. La fonction γ étant dérivable en 0, la fonction x est dérivable en 0 et $\gamma'(0)=x'(0)\big(1,f'(x_0)\big)$. On en déduit facilement que l'ensemble des vecteurs tangents est $\mathbb{R}\big(1,f'(x_0)\big)$.

Exercice 34 Notons $\overrightarrow{\mathcal{T}}_{(x,y)}$ l'ensemble des vecteurs tangents à $[-1,1]^2$ en (x,y).

- Le point $(0,0)$ est intérieur à $[-1,1]^2\subset\mathbb{R}^2$, donc $\overrightarrow{\mathcal{T}}_{(0,0)}=\mathbb{R}^2$ (*cf.* l'exemple 3 de la page 1133).

- Soit $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to [-1,1]^2$ dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = (1,0)$. On note : $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Puisque la fonction dérivable x à valeurs réelles définie sur l'intervalle ouvert $]-\varepsilon, \varepsilon[$ admet un maximum en 0, on a $x'(0) = 0$. Par suite $\overrightarrow{\mathcal{T}}_{(0,0)} \subset \mathbb{R}(0,1)$.
  Pour tout $v = (0,\beta) \in \mathbb{R}(0,1)$, en considérant l'application $t \mapsto (1, t\beta)$ qui est définie au voisinage de 0, à valeurs dans $[-1,1]^2$ et dérivable en 0, on obtient que $v \in \overrightarrow{\mathcal{T}}_{(1,0)}$. Par conséquent $\overrightarrow{\mathcal{T}}_{(1,0)} = \mathbb{R}(0,1)$.
- Soit $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to [-1,1]^2$ dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = (1,0)$. On note : $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Puisque x et y ont des extrema en 0, en reprenant le raisonnement précédent, on a $x'(0) = y'(0) = 0$. Il s'ensuit que $\overrightarrow{\mathcal{T}}_{(1,1)} = \big\{(0,0)\big\}$.

Exercice 35

- En considérant l'application $x \mapsto (x, 0)$, on obtient que $(1,0)$ est un vecteur tangent à X en $(0,0)$. De même $(0,1) \in T_{(0,0)}$. Par suite $\mathbb{R}(1,0) \cup \mathbb{R}(0,1) \subset \overrightarrow{\mathcal{T}}_{(0,0)}$, puisque l'ensemble des vecteurs tangentes est un cône.
- Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. Pour fixer les idées, supposons que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.
  Supposons qu'il existe une application $\gamma : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ définie sur un voisinage de 0 et à valeurs dans X dont la dérivée en 0 soit (α, β). Puisque $x'(0) = \alpha > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $x(t) > 0$ pour $t \in]0, \eta]$. De même, il existe $\eta' > 0$ tel que $y(t) > 0$ pour $t \in]0, \eta']$. Il s'ensuit qu'il existe un réel t tel que $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$, ce qui contredit le fait que γ est à valeurs dans X.

Par suite $\overrightarrow{\mathcal{T}}_{(0,0)} = \mathbb{R}(1,0) \cup \mathbb{R}(0,1)$.

Proposition 44 Soit $a = \big(a_1, a_2, f(a_1, a_2)\big) \in S$.

- Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ une application dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = a$, avec $\varepsilon > 0$. Pour $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on a alors $\gamma_3(t) = f\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$. Ainsi, en dérivant :
$$\gamma_3'(0) = \gamma_1'(0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \gamma_2'(0)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$$
  et donc l'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ des vecteurs tangents à X en a vérifie :
$$\overrightarrow{\mathcal{T}} \subset \Big\{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; v_3 = v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + v_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\Big\}.$$
- Soit $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ et posons $\gamma : t \mapsto \big(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2)\big)$. La fonction γ est définie sur un voisinage de 0 (car U est un ouvert), à valeurs dans S. De plus, γ est dérivable en 0, car f est différentiable, et :
$$\gamma'(0) = \Big(v_1, v_2, v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + v_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\Big).$$
  Par suite :
$$\overrightarrow{\mathcal{T}} = \Big\{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; v_3 = v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + v_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\Big\}.$$

Proposition 45 Le sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne :

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0}(m_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(m_0)$$

est un plan affine de $\mathbb{R}^3$. Il passe par m_0 et il est dirigé par le sous-espace vectoriel-d'équation :

$$w = u\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) + v\frac{\partial f}{\partial y}(m_0),$$

c'est-à-dire, d'après la proposition 44 de la page 1134, dirigé par l'espace des vecteurs tangents à S en m_0. Par conséquent $\mathcal{T}$ est l'espace tangent à S en m_0.

Proposition 46 Par dérivation des fonctions composées, puisque f est différentiable et γ dérivable, on a pour tout $t \in I$:

$$0 = (f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t) = \big(\, \nabla f\big(\gamma(t)\big) \mid \gamma'(t)\,\big).$$

Exercice 36

- Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

  Puisque $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, l'exemple de la page 1137 montre qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

  $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(y).$$

  Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la dérivée sur l'intervalle $\mathbb{R}$ de la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est φ, il existe une constante $\Psi(x)$ telle que :

  $$\forall y \in \mathbb{R} \quad f(x, y) = \Phi(y) + \Psi(x),$$

  où Φ est une primitive de φ. En particulier, Φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, l'application $\Psi : x \mapsto f(x, 0) - \Phi(0)$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
- Réciproquement, si $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$, il est alors facile de vérifier que la fonction $f : (x, y) \mapsto \Psi(x) + \Phi(y)$ vérifie la relation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

Ainsi l'ensemble des solutions du problème est :

$$\mathcal{S} = \big\{(x, y) \mapsto \Psi(x) + \Phi(y)\,;\ (\Phi, \Psi) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2\big\}$$

Exercice 37 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$; posons un changement de variables :

$$(x, t) = (\alpha u + \beta v\,,\, \gamma u + \delta v) \qquad \text{et} \qquad f(x, t) = g(u, v),$$

avec $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Le changement de variables est de classe $\mathcal{C}^1$.
On a, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, d'après la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial u} = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \gamma\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Prenons $\alpha = c$ et $\gamma = 1$. Pour avoir un changement de variables bijectif, il suffit de choisir $\beta = -1$ et $\delta = c$, car alors $\alpha\delta - \beta\gamma = c^2 + 1 \neq 0$. Il s'ensuit que f est une solution du problème si, et seulement si, g est une solution de $\dfrac{\partial g}{\partial u} = 0$. D'après l'exemple de la page 1137, la fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ est une solution du problème si, et seulement s'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad g(u,v) = \varphi(v).$$

Puisque le changement de variables réciproque est linéaire, donc de classe $\mathcal{C}^1$, et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad u = \frac{cx+t}{1+c^2} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{ct-x}{1+c^2},$$

l'ensemble des solutions du problème est :

$$\mathcal{S} = \left\{ (x,t) \mapsto \Phi(x-ct) \ ; \ \Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}.$$

Exercice 38

1. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & U \\ (x,y) & \longmapsto & \left(y - \dfrac{x^2}{2}, y\right) \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, car les applications composantes sont polynomiales sur l'ouvert $V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

   Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons à résoudre dans V l'équation :

   $$\begin{cases} u = y - x^2/2 \\ v = y. \end{cases}$$

   Ce système est équivalent à :

   $$\begin{cases} x^2 = 2(v-u) \\ y = v. \end{cases}$$

   Ce dernier n'a de solutions que si $v > u$, et cette solution est alors unique dans $V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

   Par conséquent, φ définit une bijection de V sur $U = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > u \right\}$, qui est un ouvert et :

   $$\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ (u,v) & \longmapsto & \left(\sqrt{2(v-u)}, v\right). \end{array}$$

   Par suite, l'application φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$; posons :

   $$(u,v) = \varphi(x,y) \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = g(u,v).$$

   D'après la règle de la chaîne :

   $$\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) (J\varphi)^{-1}$$

   Par ailleurs, pour tout $(x,y) \in V$:

   $$J\varphi = \left(\frac{\partial (u,v)}{\partial (x,y)}\right) = \begin{pmatrix} -x & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} -1/x & 1/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier :

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Ainsi, f est solution du problème si, et seulement si, g est une solution de $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$, c'est-à-dire en reprenant le raisonnement de l'exemple de la page 1137, si, et seulement s'il existe $\Phi_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (u, v) \in U \quad g(u, v) = \Phi_1(u).$$

Puisque φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$, l'ensemble des solutions du problème est :

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y) \mapsto \Phi\big(y - x^2/2\big)\,;\ \Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right\}.$$

S'entraîner et approfondir

18.1 On considère $\mathbb{C}$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Démontrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 1/z \end{array}$ est différentiable en tout point et donner sa différentielle.

18.2 Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On dit que $f : U \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in U$ si $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existe.

En notant $P = \operatorname{Re} f$ et $Q = \operatorname{Im} f$, montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in U$ si, et seulement si, f est différentiable en z_0 avec :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0).$$

Ces relations sont connues sous de le nom d'*équations de Cauchy-Riemann*.

★★ **18.3** *(Mines 2015)*
Soit f l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$f(M) = \big(\operatorname{Tr} M, \dots, \operatorname{Tr} M^n\big).$$

1. Démontrer que f est différentiable et calculer $\mathrm{d}f(M)$.
2. Comparer le rang de $\mathrm{d}f(M)$ avec le degré du polynôme minimal μ_M de M.
3. Démontrer que $\big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \chi_M = \mu_M\big\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

★ **18.4** 1. Soit $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable en 0, vérifiant $\gamma(0) = I_n$. Démontrer que $\gamma'(0)$ est une matrice antisymétrique.
2. Démontrer que l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{SO}_n$ en I_n est l'ensemble des matrices antisymétrique réelles d'ordre n.
Indication. Considérer l'application exp *sur l'ensemble* $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ *des matrices antisymétriques réelles.*

★ **18.5** Soit F une algèbre de dimension finie et f une application de U dans F. On suppose que $f(x)$ est inversible dans F pour tout x de U et que f est différentiable au point $a \in U$.
1. Démontrer que l'ensemble V des inversibles de F est un ouvert.
2. Démontrer que l'application $y \mapsto y^{-1}$ définie sur V est différentiable.
Indication. Penser aux séries géométriques.
3. Montrer que la fonction $g : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x)^{-1} \end{array}$ est différentiable en a et :

$$\forall h \in E \quad \mathrm{d}g(a)\cdot h = -f(a)^{-1}\big(\mathrm{d}f(a)\cdot h\big)\, f(a)^{-1}.$$

18.6 *(Mines 2015)*

Soit $p > 0$ et $\mathcal{P}$ la parabole de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y^2 = 2px$. On définit une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{P}$ par $M_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et M_{n+1} est l'autre point d'intersection de la normale à $\mathcal{P}$ en M_n avec $\mathcal{P}$. On note y_n l'ordonnée de M_n.

Étudier la nature de la série de terme général $\sum \dfrac{1}{\ln(1+|y_n|)}$.

18.7 Déterminer les extrema des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$
2. $g(x,y) = (2x^2+3y^2)\exp(-(x^2+y^2))$

18.8 Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Donner l'aire $\mathcal{A}$ du triangle $A(1,0)$, $B(\cos\theta_1, \sin\theta_1)$ et $C(\cos\theta_2, \sin\theta_2)$.
   On se restreindra au cas où $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi$.
2. Déterminer les triangles d'aire maximale inscrits dans un cercle de rayon 1.

18.9 On muni le plan $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique.

1. Démontrer que $(a,b,c) \in \mathbb{R}_+^3$ sont les côtés d'un triangle si, et seulement si :
$$a \leqslant b+c, \qquad b \leqslant a+c, \qquad c \leqslant a+b.$$
2. Démontrer que l'aire d'un triangle ABC de côtés a, b et c est
$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
où $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre (*formule de Héron*).
3. Déterminer les triangles d'aire maximale parmi ceux de périmètre 1.

18.10 On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$.

1. Soit $v \in E$. Démontrer que $g : x \mapsto f(x) - (\,x \mid v\,)$ admet un minimum.
2. En déduire que l'application ∇f est surjective.

18.11 On dit que $f : U \to \mathbb{R}$ est convexe si U est convexe et si :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad \forall t \in [0,1] \quad f\big((1-t)x+ty\big) \leqslant (1-t)\,f(x) + t\,f(y).$$

Soit U un ouvert convexe et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe différentiable. Démontrer que f admet un minimum en a si, et seulement si, a est un point critique de f.

18.12 Soit $U \in \mathbb{R}^n$ et $A\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire une matrice symétrique vérifiant :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad {}^tXAX > 0.$$

Déterminer les extrema de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & {}^tXAX + 2\,{}^tUX. \end{array}$

18.13 On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0) ; \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$

La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$?

18.14 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+$ la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0) ; \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

18.15 On dit qu'une partie C de $\mathbb{R}^n$ est un **cône positif** si pour tout $x \in C$ et $t > 0$ on a $tx \in C$.

Soit C un cône positif de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est **homogène de degré α** si :

$$\forall (x,t) \in E \times \mathbb{R}_+^* \quad f(tx) = t^\alpha f(x).$$

On suppose dans la suite que C est également un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(C, \mathbb{R})$.

1. Démontrer que la fonction f est homogène de degré α, alors les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $\alpha - 1$.
2. Démontrer que la fonction f est homogène de degré α si, et seulement si :

$$\forall x \in U \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha\, f(x). \qquad \textit{(Relation d'Euler)}$$

18.16 Démontrer que les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) ;\ x \in \mathbb{R}\}$ ont un prolongement sur $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. $f(x,y) = \dfrac{e^y - e^x}{y - x}$,
2. $f(x,y) = \dfrac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x}$.

18.17 Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) ;\ x \in \mathbb{R}\}$ par :

$$F(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Démontrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

18.18 On muni $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ telle que Jf soit à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. *Lemme des tresses*
   Soit X un ensemble non vide et $g : X^3 \to \mathbb{R}$ une application antisymétrique par rapport aux deux première variables et symétrique par rapport aux deux dernières. Démontrer que g est nulle .
2. Démontrer que Jf est constante.
3. Déterminer f. *Indication. On pourra utiliser l'égalité de Taylor reste intégral.*

18.19 Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ supposé connexe par arcs.

1. Trouver un exemple d'un tel ouvert U et d'une telle fonction $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ mais que f ne dépende pas seulement de y, autrement dit telle qu'*il n'existe pas* de fonction h à une seule variable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $(x, y) \in U$, $f(x, y) = h(y)$.
2. Donner une condition suffisante simple sur U pour que toute fonction f vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ dépende seulement de y.

⋆ **18.20** Soit l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2. \qquad (E)$$

Résoudre (E) successivement dans $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leqslant 0\}$, dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et dans $\mathbb{R}^2$. On se restreindra aux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

18.21 Par un changement de variable affine, résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles :

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

où l'un au moins des deux nombres a et b est non nul.

18.22 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $b^2 - 4ac > 0$, et $a \neq 0$. Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad (E)$$

par un changement de variables linéaire.

18.23 Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1, 1[$ telles que la fonction g définie sur $]0, \pi[\times \mathbb{R}$ par :

$$g(x, y) = f\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)$$

ait un laplacien nul.

Solution des exercices

18.1 Il est immédiat que $\mathbb{C}^*$ est un ouvert. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $h \in \mathbb{C}$ telle que $|h| < |z|$, on a :

$$f(z+h) - f(z) = -\frac{h}{(z+h)z}\cdot$$

Par ailleurs, $\frac{1}{(z+h)z} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{z^2}$

et donc $\frac{1}{z(z+h)} = \frac{1}{z^2} + \mathrm{o}(1)$. Ainsi, au voisinage de 0 :

$$f(z+h) - f(z) = -\frac{h}{z^2} + h\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+h)z}\right) = -\frac{h}{z^2} + \mathrm{o}(h).$$

Il est clair que l'application $h \mapsto -\frac{h}{z^2}$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Par conséquent f est différentiable en z et :

$$\forall h \in \mathbb{C} \quad \mathrm{d}f(z)\cdot h = -\frac{h}{z^2}\cdot$$

18.2 Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est muni de la base $\mathcal{B} = (1, i)$.

- Supposons que f soit $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Il existe alors un nombre complexe noté $f'(z_0)$ tel que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$.

  Notons u l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $u(h) = hf'(z_0)$. Par définition, au voisinage de 0 :

  $$f(z_0+h) = f(z_0) + hf'(z_0) + \mathrm{o}(h) = f(z_0) + u(h) + \mathrm{o}(h).$$

  De plus u est une application $\mathbb{C}$-linéaire, car il s'agit d'une homothétie. *A fortiori* elle est $\mathbb{R}$-linéaire et donc f est différentiable en z_0.

  Donnons un calcul de $f'(z_0)$. La différentiabilité implique l'existence de $\frac{\partial P}{\partial x}(z_0)$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)$. Par définition, on a :

  $$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^*}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^*}} \frac{\big(P(z_0+h) - P(z_0)\big) + i\big(Q(z_0+h) - Q(z_0)\big)}{h} \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0). \end{aligned}$$

  On a également : $f'(z_0) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^*}} \dfrac{f(z_0+ih) - f(z_0)}{ih}$

  $$\begin{aligned} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^*}} \frac{\big(P(z_0+ih) - P(z_0)\big) + i\big(Q(z_0+ih) - Q(z_0)\big)}{ih} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^*}} \frac{Q(z_0+ih) - Q(z_0) - i\big(P(z_0+ih) - P(z_0)\big)}{h} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(z_0). \end{aligned}$$

En identifiant les deux expressions de $f'(z_0)$, il vient que :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_o)\cdot$$

- Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable en z_0 telle que $\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0)$ et $\frac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)\cdot$ L'expression de la différentielle en termes de dérivées partielles donne, pour tout $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(z_0)\cdot h &= h_1\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\\ &= \left(h_1\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) + h_2\frac{\partial P}{\partial y}(z_0)\right) + i\left(h_1\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) + h_2\frac{\partial Q}{\partial y}(z_0)\right)\end{aligned}$$

En utilisant les relations entre dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(z_0)\cdot h &= \left(h_1\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) - h_2\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)\right) + i\left(h_1\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) + h_2\frac{\partial P}{\partial x}(z_0)\right)\\ &= (h_1 + ih_2)\left(\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, la différentiabilité donne qu'au voisinage de 0 :

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h\ell + \mathrm{o}(h)$$

avec $\ell = \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)$, ce qui implique que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.

18.3 1. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a vu en exercice (*cf.* exercice 16 de la page 1115) que l'application $f_p : M \mapsto M^p$ est différentiable et, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \mathrm{d}f_p(M)\cdot H = \sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-i-1}.$$

Puisque l'application trace est linéaire, on en déduit que l'application $g_p = \mathrm{Tr}\circ f_p$ est différentiable et, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \mathrm{d}g_p(M)\cdot H = \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-i-1}\right).$$

Par propriété de la trace, on a, pour $(M, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$:

$$\mathrm{d}g_p(M)\cdot H = \sum_{i=0}^{p-1} \mathrm{Tr}\left(M^i H M^{p-i-1}\right) = p\,\mathrm{Tr}(M^{p-1}H).$$

Puisqu'une application est différentiable si, et seulement si, ses applications composantes sont différentiables, on en déduit que f est différentiable et :

$$\forall (M, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad \mathrm{d}f(M)\cdot H = \big(\mathrm{Tr}(H), 2\,\mathrm{Tr}(MH), \ldots, n\,\mathrm{Tr}(M^{n-1}H)\big)$$

2. Fixons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (i+1) \operatorname{Tr}(M^i H) = 0. \qquad (*)$$

Cela peut se traduire par :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \operatorname{Tr}\left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (i+1) M^i \right) H \right) = 0,$$

ou encore

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \operatorname{Tr}\big(P(M)H\big) = 0, \qquad (**)$$

où $P = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (i+1) X^i$. Par ailleurs, on sait que $(M, N) \mapsto \operatorname{Tr}\left({}^t MN\right)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La condition $(**)$ se traduit par :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad ({}^t P(M) \mid H) = 0,$$

Par suite $P(M) = 0$.

- Si $\deg \mu_M = n$, alors il n'existe pas de polynôme annulateur de degré inférieur à $n-1$. Il s'ensuit, d'après $(*)$, que $\operatorname{Im} \mathrm{d}f(M)$ n'est inclus dans aucun hyperplan. Dans ces conditions $\operatorname{rg}\big(\mathrm{d}f(M)\big) = n$.
- Si $p = \deg \mu_M < n$, alors les polynômes μ_M, $X\mu_M$, …, $X^{n-1-p}\mu_M$ sont des polynômes annulateurs de M, En notant $\mu_M = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i X^i$, les familles :

$$\Lambda_k = (\lambda_0^{(k)}, \dots, \lambda_{n-1}^{(k)}) = \big(0, \dots, \underbrace{\alpha_0}_{k\text{-ièmeposition}}, \dots, \alpha_p, \dots, 0\big)$$

sont linéairement indépendantes et, d'après le point précédent, l'image de $\mathrm{d}f(M)$ est incluse dans l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} \lambda_0^{(1)} x_1 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(1)} x_n = 0 \\ \\ \lambda_0^{(n-p)} x_1 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(n-p)} x_n = 0. \end{cases}$$

Ce système étant de rang $n-p$, l'image est de dimension au plus p, *i.e.* :

$$\operatorname{rg}\big(\mathrm{d}f(M)\big) \leqslant \deg \mu_M.$$

- Si $\operatorname{rg}\big(\mathrm{d}f(M)\big) = q < n$, alors on peut trouver une équation de l'image sous la forme :

$$\begin{cases} \lambda_0^{(1)} x_1 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(1)} x_n = 0 \\ \\ \lambda_0^{(n-q)} x_1 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(n-q)} x_n = 0. \end{cases}$$

où le rang du système est $n-q$. Cela conduit à une famille libre de $n-q$ polynômes annulateurs de M. Comme :

$$\big\{ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \;\big|\; P(M) = 0 \big\} = \mu_M \mathbb{R}_{n-1-\deg \mu_M},$$

on en déduit que :

$$\dim\big\{P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]\;\big|\;P(M)=0\big\}=n-\deg\mu_M,$$

et donc $n-\deg\mu_M\geqslant n-q$, c'est-à-dire :

$$\deg\mu_M\leqslant \operatorname{rg}\big(\mathrm{d}f(M)\big).$$

En conclusion, dans tous les cas :

$$\deg\mu_M=\operatorname{rg}\big(\mathrm{d}f(M)\big).$$

3. En vertu du théorème de Cayley-Hamilton et de ce qui précède :

$$\begin{aligned}\big\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mid\chi_M=\mu_M\big\}&=\big\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mid\deg\mu_M=n\big\}\\&=\big\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mid\operatorname{rg}\big(\mathrm{d}f(M)\big)=n\big\}.\end{aligned}$$

Pour démontrer que cet ensemble est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il suffit de démontrer que :

$$\big\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mid\operatorname{rg}\big(\mathrm{d}f(M)\big)\leqslant n-1\big\}$$

est un fermé.
Prenons une base $\mathcal{B}=(E_1,\dots,E_{n^2})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une $\mathcal{B}'=(F_1,\dots,F_n)$ de $\mathbb{R}^n$. En notant $Jf(M)$ la matrice jacobienne de f en M dans ces deux bases, il s'agit de montrer que :

$$\big\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mid\operatorname{rg}\big(Jf(M)\big)\leqslant n-1\big\}$$

est un un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On sait que le rang de $A\in\mathcal{M}_{n,n^2}(\mathbb{R})$ est inférieur ou égale à $n-1$ si pour tout $I\subset[\![1,n^2]\!]$ de cardinal n, le determinant de la matrice extraite $A_{[\![1,n]\!],I}$ est nul.
Soit $I\subset[\![1,n^2]\!]$ de cardinal n. L'application $g_I:A\mapsto\det A_{[\![1,n]\!],I}$ est polynomiale, donc continue. Par composition, $h_I=g_I\circ Jf$ est continue. Il s'ensuit que $h_I^{-1}\big(\{0\}\big)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite :

$$\big\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mid\operatorname{rg}\big(\mathrm{d}f(M)\big)\leqslant n-1\big\}=\bigcap_{\substack{I\subset[\![1,n^2]\!]\\|I|=n}}h_I^{-1}\big(\{0\}\big)$$

est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, comme intersection de fermés, ce qui prouve le résultat demandé.

18.4 1. On a, au voisinage de 0, le développement limité :

$$\gamma(s)=I_n+s\gamma'(0)+\mathrm{o}(s)$$

et donc, puisque $\gamma(s)$ est une matrice orthogonale pour tout $s\in\,]-\varepsilon,\varepsilon[$:

$$\begin{aligned}I_n&={}^t\gamma(s)\,\gamma(s)\\&=\big(I_n+s\,{}^t\gamma'(0)+\mathrm{o}(s)\big)\big(I_n+s\,\gamma'(0)+\mathrm{o}(s)\big)\\&=I_n+s\,\big({}^t\gamma'(0)+\gamma'(0)\big)+\mathrm{o}(s).\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, ${}^t\gamma'(0)+\gamma'(0)=0$ et donc $\gamma'(0)$ est une matrice antisymétrique.

2. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrons que l'application $t \mapsto \exp(tA)$ est à valeurs dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Puisque la dérivée en 0 de cette application est A, on déduira que A est un vecteur tangent à $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ en I_n.
   - Démontrons que $\exp(A) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Puisque la transposition est continue, on a ${}^t(\exp A) = \exp\big({}^tA\big)$. Comme ${}^tA = -A$, les matrices ${}^tA$ et A commutent. Par conséquent :
   $$ {}^t(\exp A)(\exp A) = \exp\big({}^tA + A\big) = \exp(0) = I_n. $$
   Il s'ensuit que $\exp A$ est une matrice orthogonale.
   - Démontrons que $\exp(sA) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, $\exp(sA)$ est une matrice orthogonale pour tout s. De plus, par composition, l'application $f : s \mapsto \det\big(\exp(sA)\big)$ est continue. Comme $f(\mathbb{R}) \subset \{-1, 1\}$, on en déduit par continuité que f est constante. Enfin, $f(0) = \det(I_n) = 1$ et donc $\det\big(\exp(sA)\big) = 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
   - L'application $\gamma : s \mapsto \exp(sA)$ est à valeurs dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, dérivable en 0 et $\gamma'(0) = A$. Il s'ensuit que A est un vecteur tangent à $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

   En conclusion, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'espace des vecteurs tangents à $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

18.5 Notons e l'élément unité de F.

1. Montrons que V est un ouvert.
   - L'application $(y, y') \mapsto yy'$ étant bilinéaire sur des espaces vectoriels de dimension finie, il existe $C > 0$ telle que $\|yy'\| \leqslant C\|y\|\,\|y'\|$ pour tout $(y, y') \in F^2$. Il s'ensuit alors que $\|y^n\| \leqslant \dfrac{\big(C\|y\|\big)^n}{C}$ pour tout $(y, n) \in F \times \mathbb{N}^*$. En particulier $y^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dès lors que $\|y\| < \frac{1}{C}$.
   - Soit $y \in F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(e - y)\sum_{k=0}^{n} y^k = e - y^{n+1}$. Ainsi, si $\|y\| < 1/C$, alors :
   $$ (e - y)\sum_{k=0}^{n} y^k = e - y^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e. $$
   Par ailleurs, puisque $\|y^n\| = \mathrm{O}\big((C\|y\|)^n\big)$, la série $\sum y^k$ est absolument convergente. Par conséquent :
   $$ (e - y)\sum_{k=0}^{+\infty} y^k = e. $$
   Par suite la boule $B_O(e, 1/C)$ est incluse dans l'ensemble V des éléments inversibles de F et $(e - y)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} y^k$ pour les $y \in B_O(0, 1/C)$.
   - Soit $y \in V$. Pour tout $h \in F$:
   $$ y + h = y\big(e - (-y^{-1}h)\big) $$

et donc $y+h$ est inversible dès lors que $\|y^{-1}h\| < 1/C$, car alors $y+h$ est le produit de deux éléments inversibles. Cette condition est vérifiée dès que $C\|y^{-1}\|\|h\| < 1/C$, *i.e.* $\|h\| < 1/(C^2\|y^{-1}\|)$.
Par suite la boule ouverte $B_O\big(y, 1/(C^2\|y^{-1}\|)\big)$ est incluse dans V et V est un ouvert. De plus, pour $h \in B_O\big(0, 1/(C^2\|y^{-1}\|)\big)$:

$$(y+h)^{-1} = \big(y(e-(-y^{-1}h)\big)^{-1} = \big(e-(-y^{-1}h)\big)^{-1}y^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-y^{-1}h)^k y^{-1}$$

2. Montrons que l'application $\Phi : y \mapsto y^{-1}$ définie sur V est différentiable. Soit $y \in V$.
Lorsque $h \in F$ vérifie $\|h\| < 1/(C^2\|y^{-1}\|)$, alors la série $\sum(-y^{-1}h)^n y^{-1}$ étant absolument convergente et donc :

$$\left\|\sum_{k=2}^{+\infty}(y^{-1}h)^k y^{-1}\right\| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\|y^{-1}\|\big(C^2\|y^{-1}\|\|h\|\big)^k$$
$$= \|y^{-1}\|\,\frac{\big(C^2\|y^{-1}\|\|h\|\big)^2}{1-C^2\|y^{-1}\|\|h\|}.$$

Ainsi, au voisinage de 0 :

$$\sum_{k=2}^{+\infty}(y^{-1}h)^k y^{-1} = \mathrm{O}\big(\|h\|^2\big) = \mathrm{o}(h),$$

et donc $(y+h)^{-1} = y^{-1} - y^{-1}hy^{-1} + \mathrm{o}(h)$. Comme l'application $h \mapsto -y^{-1}hy^{-1}$, on en déduit que Φ est différentiable en y. En conclusion, Φ est différentiable et :

$$\forall y \in V \quad \forall h \in F \quad \mathrm{d}\Phi(y)\cdot h = -y^{-1}hy^{-1}.$$

3. Par composition de fonctions différentiables, si la fonction f est à valeurs dans V et différentiable en $a \in U$, alors $g = f^{-1} = \Phi \circ f$ est différentiable en a et :

$$\forall h \in F \quad \mathrm{d}g(a)\cdot h = -f^{-1}(a)\,(\mathrm{d}f(a)\cdot h)\,f^{-1}(a).$$

18.6 Posons $f : (x,y) \mapsto 2px - y^2$. On définit ainsi une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, car polynomiale, sur $\mathbb{R}^2$.

- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\nabla f(x,y) = (2p, -2y).$$

Ainsi, tous les points de $\mathbb{R}^2$ sont réguliers pour f.
On sait que la normale en un point $A(a,b)$ de $\mathcal{P}$ est dirigée par $\nabla f(a,b)$. Il s'ensuit qu'une équation de cette normale est :

$$\mathcal{N}_A : b(x-a) + p(y-b) = bx + py - \frac{b^3}{2p} - pb = 0.$$

  * Si $b = 0$, une équation de la normale est : $y = 0$. Cette droite n'a qu'un seul point d'intersection avec $\mathcal{P}$, le point $(0,0)$.

∗ Si $b \neq 0$, les points $M(x,y)$ d'intersection de $\mathcal{N}_A$ et $\mathcal{P}$ sont caractérisés par :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{b}\left(\frac{b^3}{2p} + pb - py\right) \\ 2px - y^2 = 0, \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} y^2 = \frac{2p}{b}\left(\frac{b^3}{2p} + pb - py\right) \\ 2px - y^2 = 0, \end{cases}$$

or :

$$y^2 - \frac{2p}{b}\left(\frac{b^3}{2p} + pb - py\right) = y^2 + \frac{2p^2}{b}y - (b^2 + 2p^2) = P(y).$$

Puisque b est une racine réelle du polynôme P du second degré, on en déduit que l'autre racine b' est réelle et vaut :

$$b' = -\frac{2p^2}{b} - b = -\frac{2p^2 + b^2}{b}$$

On constate que $b' \neq 0$. De plus, on aura $b = b'$ si, et seulement si, :

$$2b = -\frac{2p^2}{b}$$

ce qui implique $b^2 = -p^2$, ce qui est impossible.
En conclusion, $\mathcal{N}_A$ a un unique point d'intersection autre que A avec $\mathcal{P}$ et ce point est différent de $(0,0)$.

• Il vient de l'étude précédente que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, à valeurs dans $\mathcal{P} \setminus \{(0,0)\}$.
Toujours d'après l'étude précédente, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad y_{n+1} = -\frac{2p^2 + y_n^2}{y_n}.$$

Donc la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $z_n = |y_n|$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = \frac{2p^2 + z_n^2}{z_n} = \frac{2p^2}{z_n} + z_n.$$

∗ Étudions la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il est immédiat qu'elle est à valeurs positives et croissante. Si elle admet une limite finie, celle-ci serait strictement positive et, par opérations sur les limites, on aurait l'égalité $\ell = \ell + \frac{2p^2}{\ell}$, ce qui est impossible. Par conséquent, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite finie et puisqu'elle est croissante :

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

∗ Ainsi, puisque z_n tends vers $+\infty$:

$$\ln(1 + z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln z_n.$$

On en déduit que les séries $\sum \frac{1}{\ln(1+|y_n|)}$ et $\sum \frac{1}{\ln z_n}$ sont de même nature.

∗ Donnons un équivalent de z_n. Pour tout entier n, on a :

$$z_{n+1}^2 = z_n^2 + 4p^2 + \frac{4p^4}{z_n^2}\cdot$$

Ainsi, du fait que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $p \neq 0$, on a :

$$z_{n+1}^2 - z_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 4p^2.$$

Par sommation des relations de comparaisons, il vient :

$$z_n^2 - z_0^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 4p^2 n$$

et donc :

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2p\sqrt{n}.$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{\ln z_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\ln n}\cdot$$

Puisque $\frac{1}{n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln n}\right)$, par comparaisons aux séries de Riemann, la série de terme général positif $\sum \frac{1}{\ln n}$ est divergence et, par comparaison, la série $\sum \frac{1}{\ln z_n}$ diverge. Par suite $\sum \frac{1}{\ln\left(1+|y_n|\right)}$ est divergente.

18.7 Dans cet exercice, la norme est la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$

1. La fonction f est polynomiale, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(x^3 - x + y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(y^3 + x - y).$$

Il s'ensuit que si (x,y) est un point critique, alors $x^3 = -y^3$, ce qui implique, puisque x et y sont réels, que $x = -y$. On a alors $x(x^2-2) = 0$.

Ainsi $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ sont les seuls points critiques de f (il est facile de vérifier réciproquement que ce sont effectivement des points critiques).

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x,x) = 2x^4$ et $f(x,0) = x^2(x^2-2)$ et donc, dans tout voisinage de $(0,0)$, il existe de points où f prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives. On en déduit que f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$.
- Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x,y) = f(y,x)$, les deux autres points critiques seront de même nature.
- On sait que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $2|ab| \leqslant a^2 + b^2$. Il s'ensuit que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$(x-y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2) \quad \text{et} \quad (x^2+y^2)^2 \leqslant 2(x^4+y^4)$$

On en déduit que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) \geqslant \frac{\left\|(x,y)\right\|^4}{2} - 4\left\|(x,y)\right\|^2 \underset{\|(x,y)\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par conséquent, il existe $R > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big\|(x,y)\big\| > R \Longrightarrow f(x,y) \geqslant 1.$$

Par suite :

$$\inf_{\|(x,y)\|>R} f(x,y) \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \inf_{\|(x,y)\|\leqslant R} f(x,y) \leqslant f(0,0) = 0.$$

On en déduit l'égalité :

$$\inf_{B_F\big((0,0),R\big)} f(x,y) = \inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y). \qquad (*)$$

La boule fermée $B = B_F\big((0,0),R\big)$ étant un compact de $\mathbb{R}^2$, la restriction de f à B atteint son minimum et ce minimum est le minimum sur $\mathbb{R}^2$ d'après $(*)$. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert, ce minimum est atteint sur un point critique, qui n'est pas $(0,0)$ comme on l'a vu. Par suite, la fonction f atteint son minimum en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

2. Par croissances comparées, la fonction g tend vers 0 à l'infini (*i.e.* lorsque la norme de (x,y) tend vers l'infini) car :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 0 \leqslant g(x,y) \leqslant 3\big\|(x,y)\big\|^2 \exp\Big(-\big\|(x,y)^2\big\|\Big)$$

Elle admet donc un maximum global. En effet, il existe $r > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\big\|(x,y)-(1,1)\big\| > r$ on ait $g(x,y) \leqslant f(1,1)/2$. Il s'ensuit que g est bornée et que :

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y) = \sup_{(x,y)\in B_F\big((1,1),r\big)} g(x,y).$$

Puisque $B_F\big((1,1),r\big)$ est compacte (fermée, bornée en dimension finie) et la fonction g continue, la restriction de g à $B_F\big((1,1),r\big)$ atteint son maximum, qui est donc un maximum global pour g.

Ce maximum est atteint en un point critique, puisque la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. Les dérivées partielles de g sont :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -2xe^{-(x^2+y^2)}(-2+2x^2+3y^2)$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}(-3+2x^2+3y^2).$$

Les points critiques de g s'en déduisent aisément, et sont :

$$(0,0),\ (0,1),\ (0,-1),\ (1,0),\ (-1,0)$$

Comme $g(0,0) = 0$ et que g est positive, le point $(0,0)$ est un minimum global.

Aux points $(1,0)$ et $(-1,0)$, g prend la valeur $2e^{-1}$. Un développement limité de $h \mapsto g(1+h,0)$ au voisinage de 0 donne :

$$g(1+h,0) = 2e^{-1} - 4e^{-1}h^2 + \mathrm{o}(h^2))$$

et un développement limité de $h \mapsto g(1,h)$ au voisinage de 0 donne :

$$g(1,h) = 2e^{-1} + e^{-1}h^2 + \mathrm{o}(h^2).$$

Le premier développent montre que dans tout voisinage de $(1,0)$ il existe un point de la forme $(1+h,0)$ pour lequel $f(1+h,0) < f(1,0)$; le second développent montre que dans tout voisinage de $(1,0)$ il existe un point de la forme $(1,h)$ pour lequel $f(1,h) > f(1,0)$. Ainsi, la fonction f n'atteint pas d'extremum local en $(1,0)$.
Par symétrie, f n'atteint pas d'extremum en $(-1,0)$.

Aux points $(0,1)$ et $(0,-1)$ g prend la valeur $3e^{-1}$, et ce sont donc deux maxima, car g en admet au moins un.

18.8 1. L'interprétation du déterminant en termes d'aires donne $\mathcal{A} = \dfrac{\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|}{2}$.

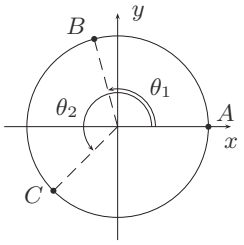
De plus :

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} \cos\theta_1 - 1 & \cos\theta_1 - 1 \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\sin^2\frac{\theta_1}{2} & -2\sin^2\frac{\theta_2}{2} \\ 2\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_1}{2} & 2\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} \end{vmatrix}$$
$$= 4\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\begin{vmatrix} -\sin\frac{\theta_1}{2} & -\sin\frac{\theta_2}{2} \\ \cos\frac{\theta_1}{2} & \cos\frac{\theta_2}{2} \end{vmatrix} = 4\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$$

Puisque $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi$, les réels $\frac{\theta_1}{2}$, $\frac{\theta_2}{2}$ et $\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$ sont dans $[0,\pi]$, il s'ensuit que $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \geqslant 0$ et donc que :

$$\mathcal{A} = 2\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}.$$

2.



Considérons un triangle ABC inscrit dans le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Après rotation et symétrie, on peut supposer que :

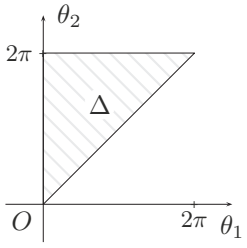
$$A(1,0),\ B(\cos\theta_1,\sin\theta_1)\ \text{ et }\ C(\cos\theta_2,\sin\theta_2),$$

avec $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi$, car cela ne change pas l'aire.
Le problème revient à chercher les maxima de la fonction définie sur :

$$\Delta = \left\{(\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi\right\}$$

par $f(\theta_1,\theta_2) = \sin\dfrac{\theta_1}{2}\sin\dfrac{\theta_2}{2}\sin\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}$.

Par les théorèmes généraux f est continue sur Δ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathring{\Delta}$.



Le domaine Δ est un compact de $\mathbb{R}^2$. En effet, l'ensemble est fermé comme intersection de demi-plans finis. Il est de plus clairement borné et donc par dimension finie, c'est une partie compacte. Il est facile de vérifier que :

$$\overset{\circ}{\Delta} = \big\{(\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi\big\}.$$

La fonction f est à valeurs positives et nulle sur la frontière de Δ. Puisque f est non nulle, les maxima, qui existent par compacité et continuité, sont dans l'intérieur de Δ et donc sont des points critiques.
Soit $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$. Le calcul donne, :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1}(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_2}{2}-\theta_1\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta_2}(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\theta_2-\frac{\theta_1}{2}\right).$$

Sur l'intérieur de Δ on a $0 < \frac{\theta_1}{2} < \pi$ et donc $\sin\frac{\theta_1}{2} \neq 0$. De même $\sin\frac{\theta_2}{2} \neq 0$. Par conséquent, si (θ_1,θ_2) est un point critique, alors :

$$\theta_1 = \frac{\theta_2}{2} \pmod{\pi} \qquad \text{et} \qquad \theta_2 = \frac{\theta_1}{2} \pmod{\pi},$$

soit encore :

$$\begin{cases} 2\theta_1 + \theta_2 = 0 & (\text{mod } 2\pi) \\ \theta_1 + 2\theta_2 = 0 & (\text{mod } 2\pi) \end{cases}$$

ce qui implique $\theta_1 = \theta_2 = 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}}$. Compte tenu de $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$, la fonction f admet un unique point critique $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$. Puisqu'il est unique, d'après la discussion menée plus haut, la fonction f admet un unique maximum en ce point. Les triangles d'aire maximale inscrits dans un cercle sont donc les triangles équilatéraux.

18.9 Le plans $\mathbb{R}^2$ est muni de structure euclidienne canonique.

1. • Soit ABC un triangle de côtés a, b et c. L'inégalité triangulaire donne :

$$a = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}\| \leqslant \|\overrightarrow{BA}\| + \|\overrightarrow{AC}\| = c + b.$$

Par symétrie, on obtient les deux autres inégalités.

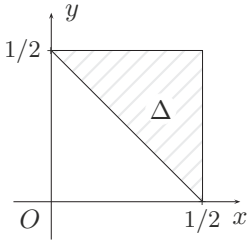
• Soit a, b et c trois réels positifs vérifiant les trois inégalités.
Posons $A = (0,0)$, $B(c,0)$ et $C_t = (b\cos t, b\sin t)$. Il s'agit de démontrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\|\overrightarrow{BC_t}\|^2 = a^2$. Le calcul donne :

$$\varphi(t) = \|\overrightarrow{BC_t}\|^2 = (c - b\cos t)^2 + b^2\sin^2 t = c^2 + b^2 - 2bc\cos t$$

On a $\varphi(\mathbb{R}) = \big[(b-c)^2,(b+c)^2\big]$. Puisque $a \leqslant b + c$, on a $a^2 \leqslant (b+c)^2$et les deux inégalités $b \leqslant a + c$ et $c \leqslant a + b$ donnent $|b - c| \leqslant a$, soit $(b-c)^2 \leqslant a^2$. Par suite, il existe t tel que $f(t) = a^2$.
Ainsi il existe un triangle de côtés a, b et c.

2. L'aire du triangle ABC et $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$. Par ailleurs, la formule d'Al-Kashi donne :
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$
On en déduit que :
$$\begin{aligned}
4\mathcal{A}^2 = b^2c^2\sin^2\widehat{A} &= b^2c^2\left(1-\cos^2\widehat{A}\right)\\
&= b^2c^2\left(1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(a^2-(b-c)^2\right)\left((b+c)^2-a^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(a+c-b\right)\left(a+b-c\right)\left(-a+b+c\right)\left(a+b+c\right)\\
&= \frac{1}{4}(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)(2p)
\end{aligned}$$
Le résultat annoncé s'ensuit.

3. Posons :
$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}_+^3 \mid x+y+z=1,\ x\leqslant y+z,\ y\leqslant x+z,\ z\leqslant x+y\right\}$$
On cherche à maximiser l'aire des triangles de côtés x, y et z, pour $(x,y,z)\in D$. Il est clair que :
$$D = \left\{(x,y,1-x-y)\,;\ 0\leqslant x\leqslant 1-x,\ 0\leqslant y\leqslant 1-y,\ 0\leqslant 1-x-y\leqslant x+y\right\},$$
ou encore $D = \left\{(x,y,1-x-y)\ \middle|\ (x,y)\in\Delta\right\}$, où :
$$\Delta = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2\ \middle|\ x\leqslant 1/2,\ y\leqslant 1/2,\ 1/2\leqslant x+y\leqslant 1\right\},$$
Il s'agit de maximiser $4\mathcal{A}^4$ sur Δ, c'est-à-dire maximiser $f : (x,y)\mapsto(1-2x)(1-2y)\big(2(x+y)-1\big)$.



L'ensemble Δ est fermé (intersection de demi-plans fermés) et inclus dans $[0,1/2]^2$. Par dimension finie, Δ est un compact. De plus, on vérifie que :
$$\overset{\circ}{\Delta} = \left\{(x,y)\in{\mathbb{R}_+^*}^2 \mid x<1/2,\ y<1/2,\ 1/2<x+y\right\}$$
La fonction f est continue sur Δ, car polynomiale et elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{\circ}{\Delta}$. La fonction f est nulle sur la frontière. Puisque f est à valeurs positives et qu'elle est non nulle, la valeur de son maximum (qui existe par continuité et compacité) est strictement positive. Les maxima sont donc atteints en des points de l'intérieur de Δ, donc en des points critiques de f.

Le calcul donne, pour $(x,y)\in\overset{\circ}{\Delta}$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(1-2y)\,(1-2x-y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(1-2x)\,(1-x-2y)\,.$$

Puisque $(x,y) \in \overset{\circ}{\Delta}$, on a $x \neq 1/2$ et $y \neq 1/2$. Si (x,y) est un point critique, alors :

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

Il s'ensuit que $(1/3,1/3) \in \overset{\circ}{\Delta}$ est le seul point critique de f. Ainsi la fonction f atteint son unique maximum en $(1/3,1/3)$. Les triangles correspondants sont donc les triangles équilatéraux de côtés $1/3$.

18.10 1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ non nul. On a :

$$g(x) = \|x\| \left(\tfrac{f(x)}{\|x\|} - \left(\tfrac{x}{\|x\|} \,\middle|\, v \right) \right).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $(\frac{x}{\|x\|} \mid v) \leqslant \|v\|$ et donc :

$$g(x) \geqslant \|x\| \left(\frac{f(x)}{\|x\|} - \|v\| \right).$$

Il s'ensuit que $g(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \geqslant g(0)$ pour tout x vérifiant $\|x\| \geqslant M$. Notons B la boule centrée en 0 et de rayon M. Puisque B est compacte et que g est continue à valeurs réelles, $g_{|_B}$ est minorée et atteint son minimum en x_0. Le point x_0 est un minimum de g sur $\mathbb{R}^n$, car il l'est sur B et si $x \notin B$, on a :

$$g(x) \geqslant g(0) \geqslant g(x_0).$$

La fonction g admet bien un minimum.

2. Avec les notations de la question précédente, puisque g est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$ et admet un minimum en x_0, on a :

$$0 = \nabla g(x_0) = \nabla f(x_0) - v.$$

Puisque cela est vrai pour tout $v \in \mathbb{R}^p$, la fonction ∇f est surjective.

18.11 Il s'agit de démontrer que si a est un point critique de f, alors f admet un minimum en ce point.

Soit $b \in U$. La fonction $\varphi : t \mapsto f\big((1-t)a+tb\big)$ est elle même, par hypothèse, convexe sur l'intervalle $[0,1]$. Elle est de plus dérivable, avec

$$\forall t \in [0,1] \quad \varphi'(t) = (\nabla f\big((1-t)a+tb\big) \mid b-a).$$

En particulier, $\varphi'(0) = (\nabla f(a) \mid b-a) = 0$. Puisque φ est convexe et dérivable, φ' est croissante et donc $\varphi' \geqslant 0$.

Par conséquent, φ est croissante et $f(b) = \varphi(1) \geqslant \varphi(0) = f(a)$. Cela état vrai pour tout $b \in U$, il s'ensuit que f admet un minimum en a.

18.12 • La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomiale sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$. Les extrema, s'ils existent, sont donc des points critiques.

• Pour tout $(X,H)\in(\mathbb{R}^n)^2$ et $s\in\mathbb{R}$ on a :

$$f(X+sH)=f(X)+s\left({}^tXAH+{}^tHAX+{}^tUH\right)+s^2\,{}^tHAH.$$

Compte tenu du fait que la matrice A est symétrique et que ${}^tXAH$ est une matrice carrée d'ordre 1, donc égale à sa transposée, on a :

$$f(X+sH)=f(X)+2s\,{}^tH\,(AX+U)+s^2\,{}^tHAH. \tag{1}$$

Il s'ensuit que :

$$\mathrm{d}f(X)\cdot H=\mathrm{D}_Hf(X)=2\,{}^tH\,(AX+U)$$

et donc que $\nabla f(X)=AX+{}^tU$

• La matrice A est inversible. En effet, si $X\in\operatorname{Ker}A$, alors ${}^tXAX=0$ et donc $X=0$ d'après la définition d'une matrice symétrique définie positive. Par suite $X_0=-A^{-1}U$ est l'unique point critique de f. Par ailleurs, la relation (1) donne pour tout $H\in\mathbb{R}^n$:

$$f(X_0+H)=f(X_0)+{}^tHAH.$$

Par hypothèse, on a pour tout $H\in\mathbb{R}^n$ l'inégalité ${}^tHAH\geqslant 0$. Par conséquent, pour tout $H\in\mathbb{R}^n$ on a $f(X_0+H)\geqslant f(X_0)$ et f admet un minimum en X_0.

18.13 La fonction f est évidemment continue sur $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Munissons $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\|=|x|+|y|$.

Comme $\sin u=\mathrm{O}(u)$ lorsque u tend vers 0, et $xy=\mathrm{O}(\|(x,y)\|^2)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$, $f(x,y)=\mathrm{O}\big(\|(x,y)\|\big)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$, ce qui prouve que f est continue en $(0,0)$. Pour l'existence et la continuité des dérivées partielles il suffit, par symétrie, d'étudier $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Dans chacun des quadrants *ouverts* délimités par les axes, on a $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{\varepsilon x+\eta y}$, où les signes ε et η sont constants sur le quadrant. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ces quadrants, de dérivée partielle par rapport à x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y\cos(xy)}{\varepsilon x+\eta y}-\frac{\varepsilon\sin(xy)}{(\varepsilon x+\eta y)^2}.$$

En un point $(0,y_0)$ tel que $y_0\neq 0$, la fonction est nulle, et, pour $x\neq 0$:

$$\frac{f(x,y_0)-f(0,y_0)}{x}=\frac{\sin(xy_0)}{x(|x|+|y_0|)},$$

qui tend vers $\dfrac{y_0}{|y_0|}$ lorsque x tend vers 0. Donc f admet une dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)=\frac{y_0}{|y_0|}.$$

L'expression de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ écrite plus haut pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$ est donc également valable pour $x = 0$ et $y \neq 0$. De même, pour $y = 0$ et $x \neq 0$, on a $f(x,0) = 0$, ce qui prouve l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,0) = 0$. L'expression de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, que l'on peut aussi écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\cos(xy)}{|x|+|y|} - \frac{\sin\big(|x|y\big)}{\big(|x|+|y|\big)^2}$$

est donc valable sur U, ce qui montre que $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est continue sur U.

Enfin, f n'est pas différentiable en $(0,0)$ bien que ses deux dérivées partielles existent (elle sont évidemment nulles puisque les fonctions partielles sont nulles). En effet,

$$f(x,x) = \frac{\sin(x^2)}{2|x|} \sim \frac{|x|}{2}$$

et donc $x \mapsto f(x,x)$ n'est pas dérivable en 0.

18.14

- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $x \mapsto f(x,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et donc $x \mapsto |x|^{2(\alpha-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Cela impose $2\alpha - 2 > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 3/2$.
- Si $\alpha > 3/2$, alors la fonction $\varphi : x \mapsto |x|^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(x) = \varepsilon(x)\alpha|x|^{\alpha-1}$, où $\varepsilon(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ et $\varepsilon(x) = -1$ sinon. Il s'ensuit, du fait que $f(x,y) = \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{x^2+y^2}$, que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi(y)\,\frac{\varphi'(x)(x^2+y^2) - 2x\varphi(x)}{(x^2+y^2)^2}$$

En posant $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = r^{2\alpha-3}|\sin\theta|^\alpha\big(\alpha\varepsilon(x)|\cos\theta|^{\alpha-1} - 2|\cos\theta|^\alpha\cos\theta\big)$$

et donc $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant r^{2\alpha-3}(\alpha+2)$.

Il s'ensuit que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto f(x,0)$ est nulle, donc, par définition, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Il s'ensuit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en 0. Par symétrie, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en 0. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si, $\alpha > 3/2$.

18.15 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ une fonction α-homogène et $t > 0$. Considérons $h : x \mapsto f(tx)$. Pour tout $x \in C$ et $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = t\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$.
Si de plus f est α-homogène, on a $h(x) = t^\alpha f(x)$ et : $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.
Par conséquent :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = t^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

2. • Supposons que f soit α-homogène.
Soit $x \in C$. En dérivant par rapport à t la relation $f(tx) = t^\alpha f(x)$, il vient :

$$\forall t > 0 \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \alpha t^{\alpha-1} f(x).$$

En particulier, pour $t = 1$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x).$$

• Supposons que f vérifie la relation d'Euler. Soit $x \in C$ et posons $g : t \mapsto f(tx)$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, du fait que C est un cône et par composition. Ainsi :

$$\forall t > 0 \quad g'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx).$$

D'après la relation d'Euler, $tg'(t) = \alpha g(t)$ pour tout $t > 0$. L'intégration de l'équation différentielle $ty' - \alpha y = 0$ est immédiate :

$$\forall t > 0 \quad f(tx) = g(t) = t^\alpha g(1) = t^\alpha f(x).$$

Par suite, la fonction f est α-homogène.

18.16 1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x \neq y$, on a :

$$f(x, y) = e^x \frac{e^{y-x} - 1}{y - x} = e^x \, \varphi(y - x),$$

où φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 ; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction φ est la somme sur $\mathbb{R}$ de la série entière $\sum \frac{t^n}{(n+1)!}$, et donc φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, les fonctions $(x, y) \mapsto e^x$ et $(x, y) \mapsto \varphi(y - x)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\widetilde{f}(x, y) = e^x \varphi(y - x)$$

définit un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ de f à $\mathbb{R}^2$.

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x \neq y$, on a :

$$f(x, y) = 2 \cos\left(\frac{y + x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}{y - x} = \cos\left(\frac{y + x}{2}\right) \psi\left(\frac{y - x}{2}\right),$$

où ψ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 ; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction ψ est la somme sur $\mathbb{R}$ de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n}$, et donc ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, les fonctions $(x,y) \mapsto \cos\left(\frac{y+x}{2}\right)$ et $(x,y) \mapsto \psi\left(\frac{y-x}{2}\right)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\widetilde{f}(x,y) = \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \psi\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

définit un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ de f à $\mathbb{R}^2$.

18.17 Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire :

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t = (y-x) \int_0^1 f'\big(x+\tau(y-x)\big)\,\mathrm{d}\tau.$$

Lorsque $x = y$:

$$\int_0^1 f'\big(x+\tau(y-x)\big)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}\tau = f'(x) = F(x,x).$$

Donc, la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$G(x,y) = \int_0^1 f'\big(x+\tau(y-x)\big)\,\mathrm{d}\tau.$$

est un prolongement de F.

- La continuité de G résulte alors du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, le paramètre étant ici le couple (x,y). En effet, si K est un compact de $\mathbb{R}^2$, la fonction continue f' est bornée sur le compact de I image de $K^2 \times [0,1]$ par l'application continue $(x,y,\tau) \mapsto x+\tau(y-x)$. Une telle borne définit une fonction (constante) intégrable sur $[0,1]$.
- Démontrons que $\frac{\partial G}{\partial x}$ est définie. Pour cela fixons $y \in \mathbb{R}$.
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $\tau \mapsto f'\big(x+\tau(y-x)\big)$ est continue, donc intégrable sur le segment $[0,1]$.
  - Pour tout $\tau \in [0,1]$, l'application $x \mapsto f'\big(x+\tau(y-x)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial f'}{\partial x}\big(x+\tau(y-x)\big) = (1-\tau)\, f''\big(x+\tau(y-x)\big).$$

  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $\tau \mapsto \frac{\partial f'}{\partial x}\big(x+\tau(y-x)\big)$ est continue.
    Soit $a > 0$. La fonction $|f''|$ est majoré par une constante M sur $[y-a, y+a]$.
    Il s'ensuit que :

$$\forall x \in [-a,a] \quad \forall \tau \in [0,1] \quad \Big|(1-\tau) f''\big(x+\tau(y-x)\big)\Big| \leqslant (1-\tau)\, M \leqslant M.$$

    La fonction constante M étant intégrable sur le segment $[0,1]$, nous avons une condition de domination sur tout segment.

En conclusion, le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre nous donne l'existence de $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial G}{\partial x}=\int_0^1 (1-\tau)\,f''\big(x+\tau(y-x)\big)\,\mathrm{d}\tau.$$

Par symétrie, $\frac{\partial G}{\partial y}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial G}{\partial x}(y,x)$.

- De la même manière que nous avons démontré la continuité de G, on démontre la continuité de $\frac{\partial G}{\partial x}$ et $\frac{\partial G}{\partial y}$. Par suite G est de classe $\mathcal{C}^1$.

18.18 1. Soit $(x,y,z)\in X^3$. Alors :

$$g(x,\overset{\frown}{y,z})=g(\overset{\frown}{x,z},y)=-g(z,\overset{\frown}{x,y})=-g(\overset{\frown}{z,y},x)=g(y,\overset{\frown}{z,x})=g(\overset{\frown}{y,x},z)=-g(x,y,z).$$

Par conséquent $g(x,y,z)=0$ et donc $g=0$.

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $Jf(x)$ est une matrice orthogonale. Par conséquent :

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!] \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)\,\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)=\delta_{i,j}. \tag{1}$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, en considérant la ℓ-ième dérivée partielle de la relation (1), on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}^n$:

$$\forall (i,j,\ell)\in[\![1,n]\!] \quad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_\ell\partial x_i}(x)\,\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)+\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_\ell\partial x_j}(x)\,\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)\right)=0. \tag{2}$$

Fixons temporairement x et posons :

$$\forall (i,j,\ell)\in[\![1,n]\!]^3 \quad g(i,j,\ell)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_\ell\partial x_j}(x)\,\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)\cdot$$

D'après le théorème de Schwarz, g est symétrique par rapport aux deux dernières variables. La relation (2) donne que g est antisymétrique par rapport aux deux premières variables. Ainsi, d'après le lemme des tresses, $g=0$.
La nullité de g se traduit par :

$$\forall (j,\ell)\in[\![1,n]\!]^2 \quad \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x)\end{pmatrix}}_{{}^t\big(Jf(x)\big)}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_\ell\partial x_j}(x)\\ \vdots\\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_\ell\partial x_j}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

Puisque $Jf(x)$ est orthogonale, ${}^t\big(Jf(x)\big)$ est inversible et donc, pour $(j,\ell)\in[\![1,n]\!]$ fixé, tous les $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_\ell\partial x_j}(x)$ sont nulles. On en déduit que, pour tous $(i,j,\ell)\in[\![1,n]\!]$, la fonction $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_\ell\partial x_j}$ est nulle. Par caractérisation des fonctions constantes, pour tout $(k,j)\in[\![1,n]\!]$, les fonctions $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ est constantes. En conclusion Jf est constante.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et introduisons $\varphi : t \mapsto f(tx)$. Nous savons par composition que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que :

$$\forall t \in [0,1] \quad \varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx),$$

et donc

$$\forall t \in [0,1] \quad \varphi''(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_j x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(tx) = 0.$$

Par conséquent, d'après la formule de Taylor reste intégral à l'ordre 1,

$$f(x) - f(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,\mathrm{d}t = \varphi'(0) = \mathrm{d}f(0) \cdot x.$$

Par conséquent : $f(x) = f(0) + Jf(0)x$. En conclusion, la fonction f est la composée d'une translation et d'une isomérie vectorielle.

18.19 1. Si U est $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite verticale définie par les équations $x = 0$ et $y \geqslant 0$, on définit f sur U par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ y^2 & \text{si } y \geqslant 0 \text{ et } x > 0, \\ -y^2 & \text{si } y \geqslant 0 \text{ et } x < 0. \end{cases}$$

Cette fonction est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$. Pour montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, on remarque qu'au voisinage d'un point $(x_0, 0)$, avec $x_0 > 0$, on a $f(x,y) = \varphi(y)$, où :

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Lorsque $x_0 < 0$, on a $f(x,y) = -\varphi(y)$ au voisinage de $(x_0, 0)$.

La fonction f convient donc.

On observera que U est un ouvert étoilé par rapport à $(-1, 0)$ et donc que cette condition n'est pas suffisante pour avoir le résultat attendu.

2. Une condition suffisante est que l'intersection de U avec chaque droite Δ_{y_0} d'équation $y = y_0$ soit « un intervalle », c'est-à-dire de la forme $]a(y_0), b(y_0)[\times \{y_0\}$ ($a(y_0)$ ou $b(y_0)$ éventuellement infini). En effet, dans ce cas, l'application partielle $x \mapsto f(x, y_0)$ de $]a(y_0), b(y_0)[$ dans $\mathbb{R}$ a une dérivée nulle, et est donc constante, cette constante sera noté $h(y_0)$.

En particulier, si l'on fait tourner d'un angle droit l'ouvert U de la première question, une fonction f sur U telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ ne dépend que de y.

C'est le cas aussi lorsque U est convexe.

18.20 C'est une équation aux dérivées partielles linéaire. Donc, pour résoudre (E), il suffit de trouver une solution particulière et de résoudre l'équation homogène associée :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (E_0)$$

(l'ensemble des solutions est un sous–espace affine de l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).

- Pour trouver une solution particulière, on peut utiliser l'exercice 18.15 de la page 1172 en remarquant que la fonction φ définie par $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$ est homogène de degré 2.
  Cela étant dit, il est assez naturel aussi de chercher une solution polynomiale, et l'on trouve facilement que la fonction $\varphi/2$ est une solution de (E). Elle est de plus de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

Le problème consiste maintenant à résoudre l'équation homogène (E_0).

- Résolution de (E_0) sur U.
  On peut utiliser un changement de variable polaire $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ défini sur $V = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$. En posant $f(x,y) = g(r,\theta)$, l'équation (E_0) devient $\frac{\partial g}{\partial r} = 0$. Comme l'ouvert V est convexe, on en déduit (*cf.* l'exercice 18.19 de la page 1173) que g ne dépend que de θ.
  Par conséquent, les solutions sont les fonctions :

$$(x,y) \mapsto \varphi(\theta) = \varphi\left(2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

  où $\varphi(\theta) = g(1,\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$.
- Résolution de (E_0) sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$.
  Soit f une solution. La restriction de f à U est donc de la forme précédente. Donc il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ telle que :

$$\forall (x,y) \in U \quad f(x,y) = \varphi(\theta).$$

  Par continuité de f aux points de la forme $(x,0)$, avec $x<0$, on doit avoir :

$$\lim_{-\pi}\varphi = \lim_{\pi}\varphi.$$

  La fonction φ se prolonge en une fonction continue sur $[-\pi,\pi]$.
  En notant $f(x,y) = g(r,\theta)$ pour $(r,\theta) \in V = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$, on a d'après la règle de la chaîne :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r} &= \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= -r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}, \end{cases}$$

  et donc :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \cos\theta & \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) \\ -r\sin\theta & \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \end{vmatrix},$$

et donc, puisque $\frac{\partial g}{\partial r} = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\cos\theta}{r}\,\varphi'(\theta).$$

Ainsi :

$$\varphi'(\theta) = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial y}(\cos\theta,\sin\theta) \underset{\theta\to\pi^-}{\longrightarrow} -\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0),$$

et

$$\varphi'(\theta) = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial y}(\cos\theta,\sin\theta) \underset{\theta\to-\pi^+}{\longrightarrow} -\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0).$$

Par conséquent, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$ avec $\varphi'(\pi) = \varphi'(-\pi)$.

Réciproquement, toute fonction définie par $f(x,y) = \varphi(\theta)$ avec φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$ vérifiant $\varphi'(\pi) = \varphi'(-\pi)$ convient.

- Résolution de (E_0) sur $\mathbb{R}^2$.
  De même, une solution vérifie la condition précédente en dehors de l'origine. Par continuité en $O = (0,0)$ le long de toute demi-droite d'extrémité O, on en déduit :

$$\forall\theta\in\mathbb{R}\quad \varphi(\theta) = f(0,0).$$

  Donc f est constante. Réciproquement, les fonctions constantes sont évidemment des solutions.

18.21 Nous allons chercher les constantes α, β, γ, δ telles que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, et telles que le changement de variable $u = \alpha x + \beta y$, $v = \gamma x + \delta y$ transforme l'équation aux dérivées partielles en une équation de la forme $\dfrac{\partial g}{\partial u} = 0$ lorsque $f(x,y) = g(u,v)$.

Pour tout quadruplet $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ tel que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, l'application $g \mapsto f$, où $f(x,y) = g(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, est bijective de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ dans lui-même. De plus :

$$\begin{aligned} a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} &= a\left(\alpha\frac{\partial g}{\partial u} + \gamma\frac{\partial g}{\partial v}\right) + b\left(\beta\frac{\partial g}{\partial u} + \delta\frac{\partial g}{\partial v}\right)\\ &= (a\alpha + b\beta)\frac{\partial g}{\partial u} + (a\gamma + b\delta)\frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

formule dans laquelle les dérivées partielles de f sont calculées en (x,y) et celles de g en $(u,v) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$.

Choisissons $\gamma = b$ et $\delta = -a$, de sorte que $a\gamma + b\delta = 0$ et $a\alpha + b\beta \neq 0$. Les nombres α et β étant choisis de sorte que $\alpha\delta - \beta\gamma$ soit non nul : par exemple, $\alpha = a$ et $\beta = b$, mais nous verrons que les valeurs numériques de α et β n'interviennent pas dans le résultat, et importent donc peu.

La relation $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad a\dfrac{\partial f}{\partial x} + b\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ est équivalente à la relation :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad \frac{\partial g}{\partial u}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = 0.$$

Comme l'application $(x,y) \mapsto (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ est bijective, cela équivaut à :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0.$$

Ainsi, f vérifie l'équation si, et seulement si, g dépend seulement de v, c'est-à-dire si, et seulement s'il existe une fonction h d'une seule variable et de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(u,v) = h(v)$.

Les fonctions f solutions sont alors les fonctions $f(x,y) = h(bx - ay)$, où h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ d'une seule variable.

18.22 Soit α, β, γ, δ tels que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, l'application :

$$(x,y) \mapsto (u,v) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$$

est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. Soit g la fonction définie par $g(u,v) = f(x,y)$:

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2)D_{11} + (2a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\beta\delta)D_{12} + (a\gamma^2 + b\gamma\delta + c\delta^2)D_{22},$$

où $\quad D_{11} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y), \qquad D_{12} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y),$

et $\quad D_{22} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y).$

Notant λ et μ les deux racines réelles distinctes de l'équation $at^2 + bt + c = 0$ (qui existent puisque le discriminant $b^2 - 4ac$ est supposé strictement positif), on peut poser $\alpha = \lambda$, $\beta = 1$, $\gamma = \mu$ et $\delta = 1$, de sorte que :

$$a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2 = a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

$$a\gamma^2 + b\gamma\delta + c\delta^2 = a\mu^2 + b\mu + c = 0,$$

$$2a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\beta\delta = \frac{4ac - b^2}{a} \neq 0.$$

Ainsi, f vérifie l'équation aux dérivées partielles (E) si, et seulement si, g vérifie :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0. \qquad (E')$$

Cette dernière équation aux dérivées partielles admet pour solutions les fonctions de la forme $g(u,v) = h(u) + l(v)$ où h et l sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ d'une seule variable. En effet, si g est solution de classe $\mathcal{C}^2$ de (E'), alors elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et $g_2 = \dfrac{\partial g}{\partial v}$ vérifie $\dfrac{\partial g_2}{\partial u} = 0$, donc g_2 est de la forme $g_2(u,v) = \varphi(v)$, où φ est de classe $\mathcal{C}^1$, et $g(u,v) = g(u,0) + \displaystyle\int_0^v \varphi(t)\,dt = h(u) + l(v)$. Enfin on voit facilement que $(u,v) \mapsto h(u) + l(v)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si h et l sont de classe $\mathcal{C}^2$. La réciproque est immédiate.

Les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de (E) sont donc les fonctions f de la forme :

$$f(x,y) = h(\lambda x + y) + l(\mu x + y),$$

où h et l sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ d'une seule variable.

18.23 Le laplacien de g est :

$$\Delta g = \frac{1}{\operatorname{ch}^4 y}\left(f''\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)\operatorname{ch}^2 y - f''\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)\cos^2 x - 2f'\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)\cos x \operatorname{ch} y\right)$$

qui s'annule pour tout couple (x,y) si, et seulement si, f vérifie l'équation différentielle (obtenue en divisant le numérateur ci-dessus par $\operatorname{ch}^2 y$) :

$$f''(t) - t^2 f''(t) - 2tf'(t) = (1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) = 0.$$

On reconnaît la dérivée de $(1-t^2)f'(t)$, donc $f'(t) = \dfrac{\lambda}{1-t^2}$, avec λ constante. Les fonctions f solutions sont les fonctions de la forme :

$$f(t) = \frac{\lambda}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} + \mu,$$

où λ et μ sont des constantes.

Index

A

Abel
    lemme d'— 584
absolue
    convergence — d'une intégrale 673
    convergence — d'une série 400, 403
absolument convergente
    intégrale — 671, 673, 674
    série — 400
accroissements finis
    inégalité des — 359
σ-additivité 850
adhérence
    d'une partie 211
    valeur d'— 205, 291
adhérent (point —) 211
adjoint 827
aléatoire
    variable — 892
Alembert (règle de d'—) 406
    pour les séries entières 588
algèbre(s) 29
    isomorphisme d'— 31
    morphisme d'— 31
algébrique
    nombre — 477
algorithme d'orthonormalisation de Schmidt 800
alternée(s)
    critère des séries — 407
    série — 407
anneau(x) 2
    intègre 2, 10, 14
    isomorphisme d'— 5
    morphisme d'— 4
    principal 16
    produit 6
    trivial 2
annulateur
    idéal — 32, 96
    polynôme — 32, 76
application(s)
    continue 263
    dominée 261
    linéaire tangente 1106
    lipschitzienne 264
    multilinéaire 304
    négligeable 261
    partielle 1102, 1103
    polynomiale 32, 302
    uniformément continue 268
arc paramétré 362
    normale à un — 364
    point de paramètre régulier d'un — 363
    point multiple d'un — 362
    point simple d'un — 362
    support d'un — 362
    tangente à un — 363
arithmétique (moyenne —) 164
associés (polynômes —) 14
automorphisme
    de groupe 22
    intérieur 22
    orthogonal 811

B

barycentre 154
Bayes
    formule de — 856
Bessel (inégalité de —) 454, 802
Bézout
    relation de — 18
Bienaymé-Tchebychev
    inégalité de — 917
bilatère (idéal —) 6
Boole (inégalité de —) 852
boule(s) 194

C

caractéristique (polynôme) 82
Carathéodory (théorème de —) 176
Cauchy
    formule de — pour les séries entières 592
    problème de — 1015, 1033
    produit de — 466
    produit de — de deux séries entières 591
    théorème de — linéaire 1017, 1033
Cauchy-Riemann 1170
Cauchy-Schwarz
    inégalité de — 915
centrée (variable aléatoire —) 912
centre
    de gravité 155
    de masses 155
Cesàro 411
chaîne (règle de la —) 1117
champ de vecteurs 1130
changement de variable 679, 680
Chasles (relation de —) 356, 358, 678
chinois (théorème —) 11
classe
    d'une fonction 1127
    fonctions de — 1107
classe $\mathcal{C}^1$ 349
    fonctions de — 349
classe $\mathcal{C}^k$
    fonctions de — 351
coalitions (lemme des —) 908
compacité 290
compagnon
    matrice — 98, 1032
comparaison
    avec une intégrale 409
    théorème de — 669, 671
concave (fonction —) 158
condition initiale 1015
conditionnelle
    loi — 901
    probabilité — 855
cône 1172
congruence 8
conjointe
    loi — 899
connexité par arcs 295
constante(s)
    caractérisation des fonctions — 347
    de Liouville 53, 480
continue par morceaux
    fonction — 353, 664
continuité
    d'une intégrale à paramètre 732–734
    d'une limite uniforme 501
    des applications linéaires 269, 301
    monotone 852
    uniforme 268
convergence
    absolue d'une série 403
    simple d'une suite de fonctions 492
    uniforme au voisinage d'un point d'une suite de fonctions 499
    uniforme au voisinage de tout

point d'une suite de fonctions 499
uniforme d'une suite de fonctions 494
uniforme sur tout segment d'une suite de fonctions 499
uniforme sur une partie d'une suite de fonctions 499
convergence dominée
théorème de — 724
convergence uniforme 494
dérivation d'une limite 504
sur une partie, au voisinage d'un point, au voisinage de tout point, sur tout segment 499
théorème de la double limite 502
convergente
intégrale absolument — 671, 673, 674
intégrale — 665, 672–675
série absolument — 400
convexe
fonction — 158
partie — 157, 160
corps 2, 10
corrélées
variables aléatoires non — 918
couple
de variables aléatoires 898
covariance 918
crible
calcul de l'indicatrice d'Euler par une méthode de — 13
formule du — 853
critère des séries alternées 407
critique (point — d'une fonction) 1120
croissance
de l'espérance 913
cyclique
groupe — 26, 27

D

dénombrable
ensemble au plus — 448
ensemble — 448
$\mathbb{Q}$ est — 450
$\mathbb{R}$ est non — 451
densité 213
dérivabilité 344, 347
à droite 346
à gauche 346
dérivation
d'une intégrale à paramètre 738, 739, 742
terme à terme 513
dérivée(s) 344
à droite 346
à gauche 346
d'une fonction 349
d'une série entière 594
fonction — 347
k-ième 351
partielles 1102, 1103, 1126
série — d'une série entière 593
suivant un vecteur 1101
développement limité 1105
diagonale par blocs 67
diagonalisable
endomorphisme — 86
matrices
orthogonalement — 810
matrice — 86
simultanément — 104
diagonalisation
base de — 87
base de — simultanée 104
différentielle(s)
d'une fonction 1107
en un point 1106
Dini
théorèmes de — 546
Dirichlet
produit de — 478

discrète
loi — 894
disque ouvert de convergence 584
distance
à une partie 193
associée à une norme 191
divergence
grossière d'une série 401
divergente
intégrale — 665, 672–675
dominée
application — 261
norme — 216
suite — 206
théorème de convergence — 724
double
somme — 463
droite
dérivable à — 346
dérivée à — 346
limite à — 346

E

égalité de Parseval-Bessel 802
élément(s)
inversible(s) de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 10
propres 67
régulier 3
ellipse 362
endomorphisme induit 65
engendré
idéal — par un élément 7
idéal — par une partie 7
sous-groupe — par une partie 25
épigraphe 160
équation d'Euler 1044
équation différentielle linéaire 101, 1012
du premier ordre 1012
à coefficients constants 1022
méthode de l'— 607
non résolue 1045
résolue 1031
scalaire d'ordre n 1030
scalaire d'ordre 2 1034
équidistibuées
variables aléatoires — 895
équivalence des normes 218
en dimension finie 299
espace
probabilisable 848
probabilisé 850
espérance
croissance de l'— 913
d'un produit de variables aléatoires indépendantes 914
d'une variable aléatoire discrète 910
d'une variable aléatoire discrète positive 909
linéarité de l'— 912
positivité de l'— 913
euclidienne
norme — 189
Euler
constante d'— 411
équation d'— 1044
indicatrice d'— 12, 27
théorème d'— 29
événement
négligeable 851
presque sûr 851
exponentielle
d'un endomorphisme 1026
d'une matrice 1027
d'une matrice 405
extremum
global 1120
local 1120

F

famille sommable 448
fonction(s)
classe d'une — 1127
composantes 344
continue par morceaux 353, 664
de classe $\mathcal{C}^1$ 349, 1107
dérivée d'une — 347
développable en série entière 595
différentielle d'une — 1107
génératrice 921
d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes 923
d'une somme de variables aléatoires indépendantes 923
gradient d'une — 1118
harmonique 1127
homogène 1172
indicatrice 910
intégrable 671, 673, 674
points critique d'une — 1120
potentiel d'une — 1130
formule
d'Euler 1172
de Bayes 856
de Héron 1171
de Kœnig-Huygens 916, 918
de Leibniz 352
de Taylor avec reste intégral 360
de Taylor-Young 361
des probabilités composées 856
des probabilités totales 856
du crible ou de Poincaré 853
frontière 214

G

gauche
dérivable à — 346
dérivée à — 346
limite à — 346
Gauss (lemme de —) 19
générateur
d'un groupe 26
d'un idéal de $\mathbb{K}[X]$ 17
de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 27
génératrice (fonction —) 921
géométrique
loi — 895
moyenne — 164
série 404
global
minimum —, maximum —, extremum — 1120
gradient
d'une fonction 1118
grands nombres
loi faible des — 920
groupe(s) 2
automorphisme de — 22
cyclique 26, 27
de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ 51
isomorphes 22
isomorphisme de — 22
monogène 26, 27
morphisme de — 21
produit 24

H

harmonique 1127
hélice 362
Héron (formule de —) 1171
Hölder (inégalité de —) 177
homogène (fonction —) 1172

I

idéal(aux)
annulateur 32, 96
bilatère 6
d'un anneau commutatif 6
de $\mathbb{K}[X]$ 16
de $\mathbb{Z}$ 8
engendré par un élément 7
engendré par une partie 7
somme d'— 8

idempotent 33
indépendance
d'une suite de variables aléatoires 908
de deux variables aléatoires 903
deux à deux de variables aléatoires 906
mutuelle de n variables aléatoires 906
indicatrice
d'Euler 12, 27
fonction — 910
indice
de nilpotence 33
induit (endomorphisme —) 65
inégalité
arithmético-géométrique 164
de Bessel 454, 802
de Bienaymé-Tchebychev 917
de Boole 852
de Cauchy-Schwarz 915
de Markov 914
de Minkowski 248, 250
de Taylor-Lagrange 360
des accroissements finis 359
des pentes 161
triangulaire 356
triangulaire(s) 190
initiale (condition —) 1015
intégrable (fonction —) 671, 673, 674
intégrale
à paramètre 724
classe $\mathcal{C}^k$ d'une — 742
continuité d'une — 732–734
dérivation d'une — 738, 739, 742
limite d'une — 735
absolument convergente 671, 673, 674
comparaison avec une — 409
convergente 665, 672–675
de Riemann 669, 672, 673
divergente 665, 672–675
reste d'une — convergente 684
semi-convergente 680
intégration
d'une limite 502
des relations de comparaison 682
terme à terme 512
terme à terme 727
terme à terme d'une série 730
intègre (anneau —) 2, 10, 14
intérieur
automorphisme — 22
d'une partie 210
point — 210
intervalle ouvert de convergence 584
inversibles (éléments — de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) 10
irréductible (polynôme —) 15
isobarycentre 154
isométrie vectorielle 811
isomorphes (groupes —) 22
isomorphisme
d'algèbres 31
d'anneaux 5
de groupes 22

J

jacobienne (matrice —) 1110

K

Ker 24
Kœnig-Huygens (formule de —) 916, 918

L

Lagrange
inégalité de Taylor — 360
théorème de — 52
laplacien 1127, 1132
Leibniz (formule de) 352

lemme
de Gauss 19
des coalitions 908
lignes de niveaux 1135
limite(s)
à droite 346
à gauche 346
caractérisation séquentielle des — 257
d'une intégrale à paramètre 735
interversion somme/— 512
unicité de la — 202, 258
linéarité de l'espérance 912
Liouville (constante de —) 53, 480
local
minimum —, maximum —, extremum — 1120
loi(s)
conditionnelles 901
conjointe 899
d'une variable aléatoire 893
de Poisson 897
discrète 894
faible des grands nombres 920
géométrique 895
marginales 900
quotient sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 9
sans mémoire 897

M

Maertens (théorème de —) 478
marginales (lois —) 900
Markov (inégalité de —) 914
matrice(s)
compagnon 81, 98, 1032
jacobienne 1110
orthogonalement semblables 810
semblables 70, 71
maximum
global 1120
local 1120
méthode
de variation de la constante 1038
de variation des constantes 1020
minimal
polynôme — 33
minimum
global 1120
local 1120
Minkowski (inégalité de —) 177, 248, 250
moments d'une variable aléatoire discrète 915
monogène (groupe —) 26, 27
morphisme
d'algèbres 31
d'anneaux 4
noyau d'un — 5
de groupes 21
image d'un — de groupes 24
noyau d'un — de groupes 24
moyenne
arithmétique 164
géométrique 164
multilinéaire (application —) 304
multiplicité d'une valeur propre (ordre de) 83

N

négligeable
événement — 851
application — 261
suite — 206
neutre (élément) 22
nilpotence (indice de) 33, 104
nilpotent(e) 33
endomorphisme — 104, 105
matrice — 104
nombre
algébrique 477
normale à un arc paramétré 364

norme(s) 188
de le convergence uniforme 494
dominée 216
équivalence des — en dimension finie 299
équivalentes 218, 299
euclidienne 189
induite 199
p 197, 198, 242, 243
sous-multiplicative 305, 318
subordonnée 279
noyau 24
d'un morphisme d'anneaux 5
d'un morphisme de groupes 24

O

O (grand) 206, 261
o (petit) 206, 261
ordre d'un élément d'un groupe 28
orthogonal d'une partie 796
orthogonaux (vecteurs —) 796
orthonormalisation
algorithme d'— de Schmidt 800

P

paquets (sommation par —) 457, 461
paramètre régulier 363
Parseval-Bessel (égalité de) 802
partie(s)
étoilée 297
compacte 290
dense 213
fermée 208
intégration par — 678
ouverte 206
partielle(s)
application — 1102, 1103
dérivée 1102
dérivée — 1103, 1126
PGCD de deux polynômes 18
plan tangent 1135
point(s)
critique 1120
d'un arc paramétré 362
géométrique d'un arc paramétré 362
multiple d'un arc paramétré 362
régulier 1135
simple d'un arc paramétré 362
polynôme(s)
annulateur 32, 76
associés 14
caractéristique 78, 82
de Hermite 806, 808
de Legendre 805
de Tchebychev 805
de seconde espèce 805
irréductible 15
minimal 33, 97
orthogonaux 804
premiers entre eux 16
polynomiale (application —) 32, 302
potentiel d'une fonction 1130
PPCM de deux polynômes 17
premiers entre eux (polynômes —) 16
presque sûr(e)
événement — 851
propriété — 851
primitivation d'une limite 504
primitive
d'une fonction continue 358
d'une séries entière 593
principal (anneau —) 16
principe de superposition 1017, 1032
probabilité 849
conditionnelle 855
sur un univers au plus dénombrable 854
problème
de Cauchy 1015, 1033
procédé diagonal 321

produit
anneau — 6
de Cauchy 466
de Dirichlet 478
groupe — 24
vectoriel 799
produit vectoriel 827
projection orthogonale 799
prolongement par continuité 260
propre
élément — 67
sous-espace — 67, 72
valeur — 67, 72
vecteur — 67, 72

Q

quotient (loi — sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) 9

R

rayon de convergence 584
règle
de d'Alembert 406
de la chaîne 1117
régulier
élément — 3
point — 1135
relatif
fermé — 215
ouvert— 215
voisinage — 215
relation(s)
de Bézout 18
de Chasles 356, 358, 678
de comparaison 206, 261
intégration des — 682
sommation des — 410
reste
d'une intégrale convergente 684
d'une série convergente 401
Riemann
intégrales de — 669, 672, 673
somme de — 356
Riesz (théorème de) 798

S

Schmidt (algorithme d'orthonormalisation de —) 800
semblables
matrices — 70
semi-convergente
intégrale — 680
série 400, 452
absolument convergente 400, 403
alternée 407
de Taylor 595
divergence grossière
d'une — 401
reste d'une — convergente 401
télécospique 402
série(s) de fonctions
continuité 511
dérivation 513
intégration terme à terme
d'une — 512
somme d'une — 505
série(s) entière(s)
dérivée d'une — 594
disque ouvert de convergence
d'une — 584
fonction développable en — 595
intervalle ouvert de convergence
d'une — 584
lemme d'Abel 584
primitive d'une — 593
produit de Cauchy de
deux — 591
rayon de convergence
d'une — 584
série dérivée d'une — 593
somme de deux — 590
simple (convergence —) 492
sommable (famille —) 448
complexe 459
positive 453

sommation
des relations de comparaison 410
par paquets 457, 461
somme
d'idéaux 8
d'une famille sommable
complexe 460
positive 453
réelle 459
de Riemann 356
double 463
interversion —/limite 512
sous-algèbre 30
sous-anneau 3
sous-corps 3
sous-espace propre 67, 72
sous-groupe(s) 2, 23
de $\mathbb{Z}$ 8
engendré par une partie 25
spectral (théorème) 809
spectre 72
stable (sous-espace vectoriel) 64
subdivision (adaptée) 353
substitution polynomiale 31
suite
de variables aléatoires
indépendantes 908
dominée 206
extraite 205
lien —/série 402
négligeable 206
récurrente linéaire 102
totale 803
suite de fonctions
convergence simple d'une — 492
convergence uniforme au voisinage d'un point d'une — 499
convergence uniforme au voisinage de tout point d'une — 499
convergence uniforme d'une — 494
convergence uniforme sur tout segment d'une — 499
convergence uniforme sur une partie d'une — 499
superposition (principe de —) 1017, 1032
support
d'un arc paramétré 362
d'une famille sommable 478
symétrique (endomorphisme —) 806
système complet d'événements 849
associé à un couple 899
associé à une variable aléatoire 893
système différentiel linéaire 1014

T

tangent
plan — 1135
vecteur — à une partie 1133
tangente
à un arc paramétré 363
application linéaire — 1106
taux d'accroissement 344
Taylor
formule de — -Young 361
formule de — avec reste intégral 360
inégalité de — -Lagrange 360
série de — 595
télécospique (série —) 402
théorème
chinois 11
(lemme) d'Abel 584
d'Euler 29
d'intégration terme à terme 727
de Baire 321
de Bolzano-Weierstrass 301

de Carathéodory 176
de Cauchy linéaire 1017, 1033
de comparaison 669, 671
de comparaison pour les séries entières 587
de convergence dominée 724
de Dini 546
de Gauss 19
de Heine 295
de la double limite 502
de Lagrange 52
de Maertens 478
de Riesz 319
de transfert 911
des bornes atteintes 294
des compacts emboîtés 319
transfert (théorème de —) 911
triangulaire
inégalité 373
par blocs 66
tribu 847
trigonalisable
endomorphisme 92
matrice 92
trivial (anneau —) 2

U

uniforme
convergence — 494
convergence — au voisinage d'un point 499
convergence — au voisinage de tout point 499
convergence — sur tout segment 499
convergence — sur une partie 499

V

valeur propre 67, 72
variable (changement de —) 679, 680
variable(s) aléatoire(s)
n-uplet de — 902
équidistribuées 895
centrée 912
couple de — 898
d'espérance finie 910
de même loi 894
loi d'une — 893
non corrélées 918
variance 916
d'une somme de variables aléatoires 919
d'une somme de variables aléatoires indépendantes 919
d'une variable aléatoire discrète 916
vecteur(s)
accélération 351
champ de — 1130
derivée suivant un — 1101
propre 67, 72
tangent à une partie 1133
vitesse instantanée 345
voisinage 209

W

wronskien 1035

Y

Young (formule de Taylor —) 361

Z

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 9