

Cours d'Analyse I : les réels et les fonctions

Lorenzo Brandolese

Université Lyon 1
Institut Camille Jordan – CNRS UMR 5208 FRANCE

Automne 2015 - Licence L1



- 1 Introduction à \mathbb{R}
- 2 Suites numériques
- 3 Fonctions, Limites, continuité
- 4 Dérivées
- 5 Équations différentielles

1 Introduction à \mathbb{R}

1.1 Notations de base

1.2 Définition de \mathbb{R} via l'écriture décimale

1.3 Relations d'ordre. Sup. Inf

1.4 Règles de calculs

1.5 Propriétés d'Archimède, densité de \mathbb{Q} , racines

1.6 Valeur absolue et partie entière

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

5 Équations différentielles

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^*$, etc.
- \forall, \exists , etc.
- \in, \subset , etc.
- \Rightarrow, \iff , etc.

[Détails au tableau]

1 Introduction à \mathbb{R}

1.1 Notations de base

1.2 Définition de \mathbb{R} via l'écriture décimale

1.3 Relations d'ordre. Sup. Inf

1.4 Règles de calculs

1.5 Propriétés d'Archimède, densité de \mathbb{Q} , racines

1.6 Valeur absolue et partie entière

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

5 Équations différentielles

Définition (L'ensemble des nombres réels)

$$\mathbb{R} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ m, \alpha_1 \alpha_2 \dots \mid m \in \mathbb{Z}, \alpha_1, \alpha_2, \dots \in \{0, \dots, 9\}, \right.$$

avec les α_j pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang $\left. \right\}$.

- Pour simplifier les notations on écrit, par exemple

$$4,23 \stackrel{\text{déf}}{=} 4,23000\dots \in \mathbb{R}.$$

- Même si la définition précédente exclut a priori des nombres tels que $5,32999\dots$, on décide de donner un sens à ces nombres en imposant, par exemple, $5,32999\dots = 5,33$, ou encore $0,999\dots = 1$.

Définition (L'ensemble des nombres rationnels)

$$\mathbb{Q} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

L'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ repose sur des faits bien connus :

- Toute fraction $\frac{p}{q}$ (avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$) s'écrit bien sous la forme

$$\frac{p}{q} = m, \alpha_1 \alpha_2 \dots$$

L'algorithme de la division permet de calculer, l'un après l'autre, l'entier $m \in \mathbb{Z}$ et les chiffres $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

- Après un certain rang, un groupe de chiffres se répète indéfiniment (le développement d'un nombre rationnel est **périodique**).
- Ce développement ne se termine jamais par 999...
- Réciproquement, on peut toujours convertir un nombre ayant un développement décimal périodique sous la forme de fraction.

[Explications supplémentaires au tableau]

Exemple

$$\frac{9}{7} = 1, 285714 285714 \dots = 1, \underline{285714}$$

$$\frac{9}{70} = 0, 1 \underline{285714} 285714, \dots = 0, 1 \underline{285714}$$

Les groupe de chiffres souligné (ou "période") se répète indéfiniment.

1 Introduction à \mathbb{R}

1.1 Notations de base

1.2 Définition de \mathbb{R} via l'écriture décimale

1.3 Relations d'ordre. Sup. Inf

1.4 Règles de calculs

1.5 Propriétés d'Archimède, densité de \mathbb{Q} , racines

1.6 Valeur absolue et partie entière

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

5 Équations différentielles

Définition

Une **relation d'ordre** sur un ensemble X est une relation \leq vérifiant les trois conditions suivantes :

(o1) $\forall x \in X, x \leq x.$

(o2) $\forall x, y \in X, \text{ si } x \leq y \text{ et } y \leq x, \text{ alors } x = y.$

(o3) $\forall x, y, z \in X, \text{ si } x \leq y \text{ et } y \leq z \text{ alors } x \leq z.$

Un ensemble X , muni d'une relation d'ordre \leq , est dit **totale-ment ordonné** lorsqu'on a aussi

(o4) $\forall x, y \in X \text{ on a } x \leq y \text{ ou } y \leq x.$

En supposant connue la relation d'ordre usuelle \leq dans \mathbb{Z} , on **définit** facilement une relation d'ordre (compatible) \leq dans \mathbb{R} .

[Détails au tableau]

Conclusion :

(\mathbb{R}, \leq) est un ensemble totalement ordonné.

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est **borné supérieurement** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall a \in A, \quad a \leq M.$$

On dit alors que M est un **majorant** pour A . Si de plus $M \in A$ on dit que M est le **maximum** de A (ou "le plus grand élément de A ") :

$$M = \max(A).$$

- Lorsqu'il existe, le maximum est unique [pourquoi?].

Définition

On dit que A est **borné inférieurement** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall a \in A, \quad m \leq a.$$

On dit alors que m est un **minorant** pour A . Si de plus $m \in A$ on dit que m est le **minimum** de A (ou "le plus petit élément de A ") :

$$m = \min(A).$$

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A borné supérieurement. Supposons que l'ensemble de tous les majorants de A possède un minimum $S \in \mathbb{R}$. Ce nombre S s'appelle la **borne sup** de A :

$$S = \sup(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \min\{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ majorant de } A\}.$$

Si l'ensemble A possède un maximum : $\sup(A) = \max(A)$.

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A borné inférieurement. Supposons que l'ensemble de tous les minorants de A possède un maximum $l \in \mathbb{R}$. Ce nombre l s'appelle la **borne inf** de A :

$$l = \inf(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \max\{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ minorant de } A\}.$$

Noter que $\sup(A)$ et $\inf(A)$, s'ils existent, sont uniques.

Théorème (admis)

Tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non vide et borné supérieurement possède une borne sup dans \mathbb{R} . Tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non vide et borné inférieurement possède une borne inf dans \mathbb{R} .

Conventions :

On écrit $\sup A = +\infty$ lorsque $A \neq \emptyset$ n'est pas borné supérieurement.
Parfois on pose $\sup \emptyset = -\infty$ et $\inf \emptyset = +\infty$.

Question

Vrai ou faux ?

- 1 Tout ensemble $A \subset \mathbb{Z}$ non vide et borné supérieurement possède une borne sup dans \mathbb{Z} .
- 2 Tout ensemble $A \subset \mathbb{Q}$ non vide et borné supérieurement possède une borne sup dans \mathbb{Q} .
- 3 Tout ensemble $A \subset \mathbb{Q}$ non vide et borné supérieurement possède une borne sup dans \mathbb{R} .

Règle pratique pour le calcul de sup et inf

Proposition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ un ensemble borné supérieurement et $S \in \mathbb{R}$.

On a

$$S = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, & a \leq S \\ \forall \epsilon > 0, & \exists a \in A \text{ tel que } S - \epsilon < a. \end{cases}$$

Dém. Au tableau.

Proposition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ un ensemble borné inférieurement et $l \in \mathbb{R}$.

On a

$$l = \inf A \iff \begin{cases} \forall a \in A, & l \leq a \\ \forall \epsilon > 0, & \exists a \in A \text{ tel que } a < l + \epsilon. \end{cases}$$

1 Introduction à \mathbb{R}

1.1 Notations de base

1.2 Définition de \mathbb{R} via l'écriture décimale

1.3 Relations d'ordre. Sup. Inf

1.4 Règles de calculs

1.5 Propriétés d'Archimède, densité de \mathbb{Q} , racines

1.6 Valeur absolue et partie entière

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

5 Équations différentielles

Somme et produit de nombres réels.

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, la définition rigoureuse de

$$x + y \quad \text{et} \quad x \cdot y$$

à partir de leur écriture décimale nécessite l'utilisation de la propriété du sup. Par exemple (dans le cas de nombres réels positifs, pour simplifier) :

Si $x = m, \alpha_1 \alpha_2 \dots$ et $y = n, \beta_1 \beta_2 \dots$, on pose

$$x + y \stackrel{\text{déf}}{=} \sup\{x_k + y_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}, \quad x \cdot y \stackrel{\text{déf}}{=} \sup\{x_k \cdot y_k \mid k \in \mathbb{N}^*\},$$

où x_k et y_k sont les nombres rationnels (que l'on sait déjà sommer ou multiplier entre eux) $x_k = m, \alpha_1 \dots \alpha_k$ et $y_k = n, \beta_1 \dots \beta_k$

Ces opérations ont les propriétés usuelles (commutative, associative, etc.), justifiant les règles usuelles de calcul.

*$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, c'est-à-dire l'ensemble \mathbb{R} , muni des opérations $+$ et \cdot et de la relation d'ordre \leq , a la structure de **corp commutatif totalement ordonné**.*

[Détails au tableau].

Question

- 1 $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ est-il un **corp commutatif totalement ordonné** ?
- 2 Et $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$?
- 3 Et \mathbb{C} (nombres complexes) ?

1 Introduction à \mathbb{R}

1.1 Notations de base

1.2 Définition de \mathbb{R} via l'écriture décimale

1.3 Relations d'ordre. Sup. Inf

1.4 Règles de calculs

1.5 Propriétés d'Archimède, densité de \mathbb{Q} , racines

1.6 Valeur absolue et partie entière

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

5 Équations différentielles

Théorème (\mathbb{R} est archimédien)

Pour tout $x > 0$, et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad nx > y.$$

Dém. On peut se ramener au cas $x = 1$ [pourquoi?]. Ensuite, si $y < 0$ il suffit de prendre $n = 0$. Si $y = 0$ il suffit de prendre $n = 1$. Si $y > 0$ est de la forme $y = m, \alpha_0 \alpha_1 \dots$, il suffit de prendre $n = m + 1$. \square

Théorème (densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R})

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x < y$,

$$\exists q \in \mathbb{Q} \quad \text{tel que} \quad x < q < y.$$

Dém. [Au tableau].

Théorème (existence des racines)

Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique solution $x \in \mathbb{R}^+$ de l'équation.

$$x^n = a.$$

Cette solution est notée $x = \sqrt[n]{a}$ ou sinon $x = a^{1/n}$.

Dém. [Admise : voir les approfondissements].

- Le théorème ci-dessus **ne permet pas** de définir $\sqrt{-7}$, ou $\sqrt[4]{-3}$, ou encore $(-\pi)^{1/2}$ (écritures à proscrire).

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier **impair** et $a \in \mathbb{R}^+$. On pose

$$\sqrt[n]{-a} = (-a)^{1/n} \stackrel{\text{déf}}{=} -\sqrt[n]{a}.$$

1 Introduction à \mathbb{R}

1.1 Notations de base

1.2 Définition de \mathbb{R} via l'écriture décimale

1.3 Relations d'ordre. Sup. Inf

1.4 Règles de calculs

1.5 Propriétés d'Archimède, densité de \mathbb{Q} , racines

1.6 Valeur absolue et partie entière

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

5 Équations différentielles

Définition (Valeur absolue)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$|x| \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ et aussi $|x| \geq \pm x$.
- Si $M \in \mathbb{R}^+$, on a : $|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M$.
- Si $M \in \mathbb{R}^+$, on a : $|x| \geq M \iff x \leq -M$ ou $x \geq M$.
- $|x - a|$ exprime la **distance** entre les réels x et a .

Proposition

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{“inégalité triangulaire”,}$$

et

$$||x| - |y|| \leq |x + y|.$$

Dém. [Au tableau].

Question

Comment tracer le graphe des fonctions

$$y = |f(x)| \quad \text{et} \quad y = f(|x|),$$

en connaissant le graphe de $y = f(x)$?

Définition (parties positives et négatives)

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$x^+ \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \max(x, 0), \quad \text{et} \quad x^- \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \max(-x, 0).$$

Propri\u00e9t\u00e9s

- $x^+ + x^- = \dots$??
- $x^+ - x^- = \dots$??

Question

Comment tracer le graphe des fonctions

$$y = |f(x)| \quad \text{et} \quad y = f(|x|),$$

en connaissant le graphe de $y = f(x)$?

Définition (parties positives et négatives)

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$x^+ \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \max(x, 0), \quad \text{et} \quad x^- \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \max(-x, 0).$$

Propri\u00e9t\u00e9s

- $x^+ + x^- = |x|$
- $x^+ - x^- = x$

Définition (Partie entière)

Soit $x = m, \alpha_1 \alpha_2 \dots$ un nombre réel. La partie entière de x (notée $[x]$ ou $E(x)$) est définie par

$$[x] \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} m & \text{si } x \geq 0 \\ m - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Autrement dit, $[x]$ est le **plus grand entier** $\leq x$.

Propriétés : pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $[x] \in \mathbb{Z}$.
- Pour tout réel x : $[x] \leq x < [x] + 1$.

[Au tableau : graphe de $[x]$, $|x|$, x^+ et x^-].

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

2.1 Raisonnements par récurrence

2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernoulli

2.3 Limite d'une suite

2.4 Propriétés des limites

2.5 Suites monotones

2.6 Suites géométriques et nombre e

2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass

2.8 Suites de Cauchy et complétude de \mathbb{R}

2.9 Suites complexes

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

5 Équations différentielles

Problème : on souhaite démontrer qu'une certaine propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Principe des démonstrations par récurrence :

- Si \mathcal{P}_0 est vraie, *[initialisation]*
- et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$, *[hérédité]*

Alors la propriété \mathcal{P}_n est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Question

Comment calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme de n premiers nombres impairs,

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) ?$$

Définition (Factoriels et puissances)

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$0! \stackrel{\text{déf}}{=} 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! \stackrel{\text{déf}}{=} (n-1)! \cdot n$$

- Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$a^0 \stackrel{\text{déf}}{=} 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^n \stackrel{\text{déf}}{=} a \cdot a^{n-1}.$$

Ceci donne, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

et

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fois}}.$$

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

2.1 Raisonnements par récurrence

2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernoulli

2.3 Limite d'une suite

2.4 Propriétés des limites

2.5 Suites monotones

2.6 Suites géométriques et nombre e

2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass

2.8 Suites de Cauchy et complétude de \mathbb{R}

2.9 Suites complexes

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

5 Équations différentielles

Définition (Coefficient binomial)

Soit $n, k \in \mathbb{N}$. On pose

$$\binom{n}{k} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)! k!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Propriétés [Exercice]

- En particulier, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$.
- Pour $n, k \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Théorème (formule du binôme)

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Dém. [Au tableau].

Corollaire (Inégalité de Bernouilli)

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Dém. [Au tableau].

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

2.1 Raisonnements par récurrence

2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernoulli

2.3 Limite d'une suite

2.4 Propriétés des limites

2.5 Suites monotones

2.6 Suites géométriques et nombre e

2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass

2.8 Suites de Cauchy et complétude de \mathbb{R}

2.9 Suites complexes

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

5 Équations différentielles

Définition (suite)

Une **suite réelle** est une application

$$x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto x_n \in \mathbb{R}$$

Notations alternatives pour les suites : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplement (x_n) .

On appelle aussi “suite réelle ” les applications à valeur réelles dont l'ensemble de départ est \mathbb{N} privé de ses premiers éléments jusqu'à un certain rang.

Voici trois manières différentes de noter la même suite :

- La fonction $x: \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x(n) = n^2$.
- La suite $(n^2)_{n \geq 4}$.
- La suite $(16, 25, 36, \dots)$.

Définition (limite d'une suite)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite (x_n) **converge** si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{R}$ (appelé **limite de la suite**), tel que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que : } \forall n \geq N \quad \text{on a } |x_n - l| < \epsilon.$$

On écrit alors $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, ou $x_n \rightarrow l$.

Une suite **non convergente** est dite **divergente**.

Certaines suites divergentes peuvent avoir une limite infinie :

Définition (limite infinie)

On dit que la suite (x_n) **diverge à l'infini** si :

$$\forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que : } \forall n \geq N, \quad |x_n| \geq M.$$

On écrit dans ce cas $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, ou $x_n \rightarrow \infty$.

Question

Comment donner un sens aux écritures

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty ?$$

Exercice

En utilisant le fait que \mathbb{R} est archimédien, démontrer rigoureusement que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Théorème (Unicité de la limite)

Si la limite ℓ d'une suite réelle existe (finie ou infinie), elle est unique.

Dém. [Au tableau]

Terminologie : une suite réelle (x_n) est dite

- **majorée**, si : $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \leq M$.
- **bornée**, si : $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $|x_n| \leq M$.
- **croissante**, si : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \leq x_{n+1}$.

Ne jamais intervertir $\exists \dots$ et $\forall \dots$ Par exemple,

“ $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \leq M$ ”

n'est pas la même chose que

“ $\forall n \in \mathbb{N} \exists M \in \mathbb{R}$ tel que on a $x_n \leq M$ ”

Proposition

Toute suite réelle convergente est bornée.

Question

① $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \stackrel{?}{\implies} (x_n) \text{ non bornée.}$

② $(x_n) \text{ non bornée} \stackrel{?}{\implies} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$

Théorème (des gendarmes)

Soient (a_n) , (b_n) et (x_n) trois suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq x_n \leq b_n.$$

et

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell$$

(avec $\ell \in \mathbb{R}$, ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$).

Alors la suite (x_n) **possède une limite** et l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell.$$

Dém. Au tableau.

Question

La suite $x_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$ est-elle convergente ?

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

2.1 Raisonnements par récurrence

2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernouilli

2.3 Limite d'une suite

2.4 Propriétés des limites

2.5 Suites monotones

2.6 Suites géométriques et nombre e

2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass

2.8 Suites de Cauchy et complétude de \mathbb{R}

2.9 Suites complexes

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

5 Équations différentielles

Théorème (opération avec les limites)

Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles **convergentes** respectivement vers l et l' . Alors les suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$ sont convergentes et

$$x_n + y_n \rightarrow l + l', \quad \text{et} \quad x_n y_n \rightarrow ll'.$$

De plus, si $y_n \neq 0$ pour tout n :

- $l' \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{l}{l'}$
- $l \neq 0, l' = 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

Question

Comment calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{4n^2 + 5n + 6} \quad ?$$

Sur la démonstration du théorème précédent

Question (autour de la définition de limite)

Soit (x_n) une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. Comparer les trois écritures suivantes :

1

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que : } \forall n \geq N \quad \text{on a } |x_n - \ell| < \epsilon.$$

2

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que : } \forall n \geq N \quad \text{on a } |x_n - \ell| < 2\epsilon.$$

3

$$\exists C > 0, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que : } \forall n \geq N \quad \text{on a } |x_n - \ell| < C\epsilon.$$

Sont-elles équivalentes ?

[Dem. du théorème au tableau]

Théorème (opérations avec des limites infinies)

Soient $x_n \rightarrow \ell$ et $y_n \rightarrow \ell'$.

- Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = +\infty$, alors $x_n + y_n \rightarrow +\infty$.
- Si $\ell > 0$ et $\ell' = +\infty$, alors $x_n y_n \rightarrow +\infty$
- Si $\ell < 0$ et $\ell' = \infty$, alors $x_n y_n \rightarrow -\infty$
- Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = \infty$, alors $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$
- Si $\ell = \ell' = +\infty$, alors $x_n + y_n \rightarrow +\infty$ et $x_n y_n \rightarrow +\infty$.

Tous les cas ne sont pas couverts ! Par exemple :

- $x_n \rightarrow 0$ et $y_n \rightarrow \infty \implies x_n y_n \rightarrow ??$ $[0 \cdot \infty]$
- $x_n \rightarrow +\infty$ et $y_n \rightarrow -\infty \implies x_n + y_n \rightarrow ??$ $[\infty - \infty]$
- $x_n \rightarrow +\infty$ et $y_n \rightarrow +\infty \implies \frac{x_n}{y_n} \rightarrow ??$ $[\frac{\infty}{\infty}]$
- $x_n \rightarrow 0$ et $y_n \rightarrow 0 \implies \frac{x_n}{y_n} \rightarrow ??$ $[\frac{0}{0}]$

Ces cas de figure sont des exemples de **formes indéterminées**.

Utilisation des limites pour le calculs de sup et inf.

Proposition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, A non vide.

- $\sup(A) = +\infty$ si et seulement s'il existe $(a_n) \subset A$ telle que $a_n \rightarrow +\infty$.
- $\sup(A) = S \in \mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $(a_n) \subset A$ telle que $a_n \rightarrow S$ et S est un majorant pour A .

Proposition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, A non vide.

- $\inf(A) = -\infty$ si et seulement s'il existe $(a_n) \subset A$ telle que $a_n \rightarrow -\infty$.
- $\inf(A) = l \in \mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $(a_n) \subset A$ telle que $a_n \rightarrow l$ et l est un minorant pour A .

Dém. [Au tableau]

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

2.1 Raisonnements par récurrence

2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernoulli

2.3 Limite d'une suite

2.4 Propriétés des limites

2.5 Suites monotones

2.6 Suites géométriques et nombre e

2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass

2.8 Suites de Cauchy et complétude de \mathbb{R}

2.9 Suites complexes

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

5 Équations différentielles

Les suites **monotones** sont les suites réelles croissantes ou décroissantes.

Théorème (limites des suites monotones)

Toute suite monotone (x_n) possède une limite. Plus précisément :

- Si (x_n) est croissante et majorée alors (x_n) **converge** vers $S = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.
- Si (x_n) est croissante et non majorée alors $(x_n) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
- Si (x_n) est décroissante et minorée alors (x_n) **converge** vers $l = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.
- Si (x_n) est décroissante et non minorée alors (x_n) , alors $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Dém. [Au tableau].

Proposition (suites adjacentes)

Soit (x_n) une suite croissante et (y_n) une suite décroissante, telles que $x_n \leq y_n$ et $y_n - x_n \rightarrow 0$. Alors (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite.

Dém. [Au tableau.]

Exercice

Soient a, b deux réels, avec $a < b$. Posons

$$x_0 = \sqrt{ab}, \quad y_0 = \frac{a+b}{2}$$

et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Démontrer que ces suites sont adjacentes. Ces suites sont alors convergentes [mais on ne sais pas en expliciter la limite !]

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

2.1 Raisonnements par récurrence

2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernoulli

2.3 Limite d'une suite

2.4 Propriétés des limites

2.5 Suites monotones

2.6 Suites géométriques et nombre e

2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass

2.8 Suites de Cauchy et complétude de \mathbb{R}

2.9 Suites complexes

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

5 Équations différentielles

Définition (suite géométrique)

Une suite de la forme $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $a \in \mathbb{R}$ est dite **géométrique**.

Pour $a = 1$, on obtient la suite constante $(1, 1, \dots)$.

Pour $a = -1$, la suite alternée divergente $(1, -1, 1, -1, \dots)$.

Question

Que peut-on dire de a^n pour $n \rightarrow \infty$ dans les autres cas ?

Théorème

- $a > 1 \implies a^n \rightarrow +\infty$.
- $-1 < a < 1 \implies a^n \rightarrow 0$.
- $a < -1 \implies a^n \rightarrow \infty$.

Dém. [Au tableau.]

Sommes partielles d'une suites géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n a^k = \begin{cases} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} & \text{si } a \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

[Détails au tableau]

Exercice (série géométrique)

En fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$, étudier la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n a^k \right)$

Un critère de convergence vers 0

Lemme

Soit $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 1}{x_n} = l, \quad \text{avec } l < 1,$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Dém. [Au tableau].

Application. Deux théorèmes de comparaison

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^p} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a > 1 \\ 0, & \text{si } -1 < a < 1 \\ \infty, & \text{si } a < -1. \end{cases}$$

Noter que la valeur de p n'affecte pas ces limites.

Le cas $a = \pm 1$ se traite facilement.

[Détails au tableau].

Le nombre e

Nous définirons plus tard $e \stackrel{\text{déf}}{=} \exp(1)$, après avoir introduit la fonction \ln et la fonction \exp .

Signalons ici deux caractérisations remarquables de ce nombre réel e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

et

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

- La deuxième formule permet de démontrer que e est **irrationnel** et que $e \simeq 2,718\dots$
- La première formule met en évidence qu'il y a une autre "forme indéterminée" (notée $[1^\infty]$) :

$$x_n \rightarrow 1, \quad \text{et} \quad y_n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad x_n^{y_n} \rightarrow ??$$

[Voir les TD et les approfondissements pour plus de détails.]

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

- 2.1 Raisonnements par récurrence
- 2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernouilli
- 2.3 Limite d'une suite
- 2.4 Propriétés des limites
- 2.5 Suites monotones
- 2.6 Suites géométriques et nombre e
- 2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass**
- 2.8 Suites de Cauchy et complétude de \mathbb{R}
- 2.9 Suites complexes

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

5 Équations différentielles

Définition

Étant donnée une suite (x_n) , on appelle **suite extraite** (ou **sous-suite**) de (x_n) toute suite de la forme $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, où $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction **strictement croissante**.

Notation alternative : les suites extraites sont notées aussi $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Cela est cohérent, car ϕ définit une suite d'entiers, la suite croissante $n_k = \phi(k)$.

Remarque. Si $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une autre fonction strictement croissante, $x_{\psi \circ \phi(n)} = x_{\psi(\phi(n))}$ sera alors une nouvelle extraction (une sous-sous-suite) de la suite de départ. Ou avec la notation alternative, $(x_{n_{k_\ell}})$.

Proposition

Si (x_n) est une suite convergente vers ℓ , alors toute suite extraite de (x_n) converge vers ℓ .

Dém. [Au tableau].

Question

Vrai ou faux ?

- Si (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent, alors (x_n) converge.
- Si $x_{2n} \rightarrow \ell$ et $x_{2n+1} \rightarrow \ell$, alors $x_n \rightarrow \ell$.
- Si (x_{2n}) , (x_{2n+1}) et (x_{3n}) convergent, alors (x_n) converge.

Théorème (de Ramsey)

Toute suite réelle admet une sous-suite monotone.

Dém. [Voir les approfondissements]

Théorème (de Bolzano-Weierstrass)

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

Dém. [Au tableau]

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

- 2.1 Raisonnements par récurrence
- 2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernoulli
- 2.3 Limite d'une suite
- 2.4 Propriétés des limites
- 2.5 Suites monotones
- 2.6 Suites géométriques et nombre e
- 2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass
- 2.8 Suites de Cauchy et complétude de \mathbb{R}
- 2.9 Suites complexes

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

5 Équations différentielles

Définition

Une suite réelle est dite **de Cauchy** si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que : } \forall m, m \geq n_0 \quad \text{on a } |u_m - u_n| < \epsilon.$$

Lemme

Toute suite de Cauchy est bornée.

Théorème (\mathbb{R} est complet)

Dans \mathbb{R} , une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Dém. [Au tableau]

Définition

Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dit **complet** s'il a la propriété que toute suite de Cauchy (x_n) contenue dans A converge vers une limite $l \in A$.

Question

- \mathbb{Q} est-il complet ?
- Et \mathbb{Z} ?

Exercice (série harmonique)

Vérifier que la suite

$$S_n \stackrel{\text{déf}}{=} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

n'est pas de Cauchy et conclure que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$.

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

2.1 Raisonnements par récurrence

2.2 Formule du binôme et inégalité de Bernoulli

2.3 Limite d'une suite

2.4 Propriétés des limites

2.5 Suites monotones

2.6 Suites géométriques et nombre e

2.7 Sous-suites et théorème de Bolzano–Weierstrass

2.8 Suites de Cauchy et complétude de \mathbb{R}

2.9 Suites complexes

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

5 Équations différentielles

On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes, c'est à dire des nombres de la forme :

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

On munit \mathbb{C} des opérations de sommes et produit définies par

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \text{où } z = a + ib, z' = a' + ib', \quad \text{avec } a, a', b, b' \in \mathbb{R} :$$

$$z + z' \stackrel{\text{déf}}{=} (a + a') + i(b + b')$$

$$zz' \stackrel{\text{déf}}{=} (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Théorème

L'ensemble \mathbb{C} , muni de ces opérations de somme et produit est un corps commutatif.

[Voir les cours d'algèbre pour plus de détails.]

Définition

Si $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ est comme ci-dessus, on appelle a la **partie réelle** et b la **partie imaginaire** de z . Le nombre

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

s'appelle le **module** de z .

Proposition

Si $z \in \mathbb{C}$ est comme ci-dessus, on a $|z| \in \mathbb{R}^+$ et

$$\max\{|a|, |b|\} \leq |z| \leq |a| + |b|.$$

Convergence des suites complexes

Définition

On dit qu'une suite de nombres complexes (z_n) **converge** vers $z \in \mathbb{C}$ (et on écrit $z_n \rightarrow z$) si et seulement si la suite des nombres réels $(|z_n - z|)$ vérifie

$$|z_n - z| \rightarrow 0.$$

Proposition

Soit (z_n) une suite de nombres complexes, avec $z_n = a_n + ib_n$, et $z = a + ib \in \mathbb{C}$, où a_n, a, b_n, b sont les parties réelles et imaginaires de z_n et z respectivement. Alors $z_n \rightarrow z$ si et seulement si $a_n \rightarrow a$ et $b_n \rightarrow b$.

Dém. Cela découle des inégalités (exercice)

$$\max\{|a_n - a|, |b_n - b|\} \leq |z_n - z| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

, et du théorème des gendarmes.

- 1 Introduction à \mathbb{R}
- 2 Suites numériques
- 3 Fonctions, Limites, continuité
 - 3.1 Domaine, Image, Inversibilité
 - 3.2 Fonctions élémentaires
 - 3.3 Limite d'une fonction
 - 3.4 Fonctions continues. Premières propriétés et exemples
 - 3.5 Les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues
- 4 Dérivées
- 5 Équations différentielles

Une **fonction réelle** est une application $f: D \rightarrow A$, où $D \subset \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. L'ensemble D est le **domaine de définition** de f .

Il convient toujours de préciser D avec la définition de f . À défaut, on prend

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ "a un sens"} \}.$$

[Exemples au tableau]

Definition

Soit $f: D \rightarrow A$ une fonction réelle.

- $\text{Im}(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \{f(x) \in A \mid x \in D\}$ est l'**image** de f .
- Si $E \subset D$, on note $f(E) \stackrel{\text{déf}}{=} \{f(x) \in A \mid x \in E\}$ ("image de E par f ")
- Si $B \subset A$, on note $f^{-1}(B) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in D \mid f(x) \in B\}$ ("image réciproque" de B par f).
- $G_f \stackrel{\text{déf}}{=} \{(x, f(x)) \in D \times A \mid x \in D\}$ est le "graphe de f ".

[Exemples au tableau]

Definition (fonctions injectives, surjectives)

- $f: D \rightarrow A$ est **injective** dans D si $\forall x_1, x_2 \in D$, avec $x_1 \neq x_2$, on a $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- $f: D \rightarrow A$ est **surjective** sur A si $\forall y \in A$, $\exists x \in D$ tel que $f(x) = y$.
- $f: D \rightarrow A$ est **bijective** si elle est injective dans D et surjective sur A . Dans ce cas, on peut construire la **fonction réciproque** de f , c'est-à-dire la fonction $f^{-1}: A \rightarrow D$, où

$$\forall x \in D, y \in A, \quad f^{-1}(y) \stackrel{\text{déf}}{=} x \iff f(x) = y$$

Proposition

Un point (y_0, x_0) appartient au graphe de f^{-1} si et seulement si le point (x_0, y_0) appartient au graphe de f . Les graphes de f et f^{-1} sont alors symétriques par rapport à la bissectrice d'équation $y = x$.

Opérations sur les fonctions

- Si $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ on définit la “fonction somme” $f + g$ et la “fonction produit fg ”

$$(f + g)(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x) + g(x), \quad (fg)(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x)g(x).$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ on note λf la fonction

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

- Il y a une relation d'ordre **partielle** :

$$f \leq g \iff \forall x \in D, \quad f(x) \leq g(x).$$

- Si $f: D \rightarrow A$ et $g: A \rightarrow B$, on définit la **composée** f et g :

$$g \circ f: D \rightarrow B, \quad g \circ f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} g(f(x)).$$

Question

L'opération \circ , sur l'ensemble des fonctions : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle associative/commutative ?

Noter que $\forall y \in B$, $f \circ f^{-1}(y) = y$, et $\forall x \in D$, $f^{-1} \circ f(x) = x$.
 En exprimant ceci à l'aide des "fonctions identités" :

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_A, \quad f^{-1} \circ f = \text{Id}_D$$

Ne pas confondre :

$f(x)^{-1}$ (le réciproque du nombre réel $f(x)$), avec
 $f^{-1}(x)$ (la fonction réciproque de f évaluée en x).

Exemple : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = 2x + 3$:

$$f(x)^{-1} = \frac{1}{2x+3}, \quad \text{mais} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Pour éviter ce type de confusion, on donne des noms spéciaux à certaines fonctions réciproques importantes (comme arcsin, arctan, ln etc.).

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

3.1 Domaine, Image, Inversibilité

3.2 Fonctions élémentaires

3.3 Limite d'une fonction

3.4 Fonctions continues. Premières propriétés et exemples

3.5 Les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

4 Dérivées

5 Équations différentielles

Fonctions élémentaires

- Les fonctions affines : $f(x) = ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$
- Les fonctions puissances : $f(x) = x^m$, où $m \in \mathbb{Z}$.
- Les fonctions racines n -ièmes : $f(x) = x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Les fonctions trigonométriques sin, cos et tan.
- Les fonctions exp et ln [sans définition pour l'instant]

[Graphes au tableau]

Définition

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. On dit que f est **paire** si, pour tout $x \in D$, on a $f(-x) = f(x)$ et **impaire** si $f(-x) = -f(x)$.

Définition

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **périodique** de période $T > 0$ si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x + T) = f(x)$.

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

3.1 Domaine, Image, Inversibilité

3.2 Fonctions élémentaires

3.3 Limite d'une fonction

3.4 Fonctions continues. Premières propriétés et exemples

3.5 Les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

4 Dérivées

5 Équations différentielles

Intervalles

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle **non vide**, et **non réduit à un seul point** (c'est-à-dire l'un des ensembles de la forme, pour $a < b$) :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$,
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$, $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$,
- $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$, $] - \infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$,
- $] - \infty, \infty[= \mathbb{R}$.

Soit I un intervalle d'extrémités $a < b$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Définition

- On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a par la droite, et l'on écrit $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que : } (a < x < a + \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

- On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers b par la gauche), et l'on écrit $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \ell$, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que : } (b - \delta < x < b) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

- Si $a < x_0 < b$, on dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 , et l'on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que : } (x \neq x_0, |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Autrement, dit :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell.$$

Remarque. Dans l'écriture $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, la valeur de $f(x_0)$ ne joue aucun rôle. Lorsqu'on a $f(x_0) = \ell$, dit que f est **continue** en x_0 .

Question (limites à l'infini)

Comment définir ces écritures ?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell.$$

Question (limites infinies)

Comment définir ces écritures ?

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

Et celles-ci ?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

[Quelques détails au tableau].

Lien avec la limite des suites

Théorème

Une fonction réelle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite ℓ (avec $\ell \in \mathbb{R}$, ou $\ell = \pm\infty$) en c (avec $c \in \mathbb{R}$, ou $c = \pm\infty$) si et seulement si, pour toute suite $(x_n) \subset I$ telle que $(x_n \rightarrow c$ et $\forall n x_n \neq c)$, on a $f(x_n) \rightarrow \ell$.

Dém. [Au tableau]

Question

Que peut-on dire des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)$?

Conséquences du théorème précédent

Théorème (Unicité de la limite d'une fonction)

Théorème (théorème des gendarmes)

Théorème (somme/produit/quotient de limites de fonctions)

Théorème (Limite des fonctions monotones)

Exercice

En s'inspirant des résultats pour les limites des suites, énoncer ces 4 théorèmes. Les démontrer via le théorème de la diapositive précédente.

Exercice

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{[x]}$.

Voici d'autres propriétés utiles des limites

Proposition (passage à la limite dans une inégalité)

Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que

$$f \leq g \quad \ell = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f(x) \quad \text{et} \quad \ell' = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} g(x)$$

(avec ℓ et ℓ' réels ou $\pm\infty$). Alors

$$\ell \leq \ell'.$$

Dém. [Au tableau]

Théorème (limite de la fonction composée.)

Soient I et J deux intervalles, et $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f(x) = \ell, \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{y \rightarrow \ell \\ y \in J}} g(y) = L$$

avec ℓ et L réels ou éventuellement $\pm\infty$ (et vérifiant de plus $\forall x \in I, f(x) \neq \ell$: mais cette condition est inutile si g est continue en ℓ).
Alors,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} g \circ f(x) = L$$

Dém. [Au tableau]

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x+1}{x-1} + 1}{\frac{2x+1}{x-1} + 2} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y + 1}{y + 2} = \frac{3}{4}.$$

Notion d'équivalent

Définition

On dit que deux fonctions réelles f et g sont **équivalentes** en x_0 , et on écrit $f \sim_{x_0} g$ si l'on peut écrire $f(x) = g(x)(1 + r(x))$, où $\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0$.

Remarque Dans le cas où g ne s'annule pas près de x_0 , on a

$$f \sim_{x_0} g \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Quelques équivalents remarquables

$$\begin{aligned} \sin(x) &\sim_0 x, & \cos(x) - 1 &\sim_0 -\frac{x^2}{2}, & \tan(x) &\sim_0 x \\ \exp(x) - 1 &\sim_0 x, & \ln(1 + x) &\sim_0 x \end{aligned}$$

[Démonstration dans le chapitre suivant]

Utilisation des équivalents

- Si $l \in \mathbb{R}^*$: $f \sim_{x_0} l \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ (“ \Leftarrow ” **fausse** si $l = 0$).
- On peut multiplier et faire le quotient d'équivalents.
- On **ne peut pas sommer ou composer** les équivalents.

[Démonstration au tableau pour le produit.

Contrexemple pour la somme : $f(x) = x + x^3$, $g(x) = -x + x^2$.

Contrexemple pour la composition $g(x) = \exp(x) \not\sim_{+\infty} \exp(x+1)$.]

L'exponentiel et le logarithme

Même si les fonctions exponentielles et logarithme seront définies plus loin, on s'autorisera à utiliser dans les exercices, dès maintenant, les propriétés suivantes :

- $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement positive et strictement croissante
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad e^{a+b} = e^a e^b$ et $e^{-a} = 1/e^a$.

Les notations e^x et $\exp(x)$ sont équivalentes.

- $\ln:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, strictement croissante.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- $\forall a, b > 0, \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln(1/a) = -\ln(a)$.

Les deux fonctions $\exp: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ et $\ln:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sont bijectives et sont **l'une la fonction réciproque de l'autre**

Croissances comparées

Proposition

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^a} = 0$$

et

$$\forall a > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{\ln(x)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln(x) = 0.$$

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

3.1 Domaine, Image, Inversibilité

3.2 Fonctions élémentaires

3.3 Limite d'une fonction

3.4 Fonctions continues. Premières propriétés et exemples

3.5 Les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

4 Dérivées

5 Équations différentielles

Soit I un intervalle, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

Définition (fonction continue)

- On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est continue sur I si $\forall x \in I$, f est continue en x_0 .

Autrement dit : f continue en x_0 si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } (x \in I, \text{ et } |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Ou encore, si et seulement si

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

Théorème (continuité de la somme/produit/quotient/composée)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f et g sont continues en $x_0 \in I$, alors les fonctions $f + g$, fg et λf sont continues en x_0 . La composée de deux fonctions continues est continue.

Dém. Exercice (utiliser le théorème correspondant sur les limites).

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue en $\ell \in I$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de I convergente vers ℓ . Alors $f(x_n) \rightarrow f(\ell)$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Exemples de fonctions continues

- Les fonctions polynômes, la fonction $|\cdot|$ (continues sur \mathbb{R})
- Les fonctions rationnelles (continues sur les intervalles où le dénominateur ne s'annule pas).
- Les fonctions racines : $\sqrt[n]{\cdot}$ (continues sur \mathbb{R}^+ si n est pair et sur \mathbb{R} si n est impair. Admis pour l'instant).
- Les fonctions sin et cos (continues sur \mathbb{R})
- La fonction exp (continue sur \mathbb{R} . Admis pour l'instant.)
- La fonction ln (continue sur $]0, \infty[$. Admis pour l'instant.)

[Détails au tableau]

Quelques fonctions discontinues

- La fonction $E(\cdot)$ (disc. sur les entiers).
- La fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$ (disc. en 0, pour tout $c \in \mathbb{R}$).
- La fonction $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$ (disc. en 0 pour tout $c \in \mathbb{R}$).
- La fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ c & x = 0, \end{cases}$ (disc. en 0 lorsque $c \neq 1$).
- La fonction de Dirichlet : $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ (disc. en tout point de \mathbb{R}).

[Détails au tableau]

- 1 Introduction à \mathbb{R}
- 2 Suites numériques
- 3 Fonctions, Limites, continuité
 - 3.1 Domaine, Image, Inversibilité
 - 3.2 Fonctions élémentaires
 - 3.3 Limite d'une fonction
 - 3.4 Fonctions continues. Premières propriétés et exemples
 - 3.5 Les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues
- 4 Dérivées
- 5 Équations différentielles

Théorème (de Weierstrass)

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes, c'est-à-dire que :

$$\exists c \in [a, b] \quad \text{tel que } f(c) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

et

$$\exists c' \in [a, b] \quad \text{tel que } f(c') = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

- On dit que c est le **point de maximum absolu** pour f dans $[a, b]$ et que $f(c)$ est le **maximum absolu** de f dans $[a, b]$.

Dém. [Voir les approfondissements]

Corollaire

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$. Alors f possède un point de minimum absolu dans \mathbb{R} .

Dém. [Au tableau]

Rappelons que les intervalles de \mathbb{R} sont les parties J de \mathbb{R} caractérisées par la propriété suivante :

$$x, y \in J, \quad x < c < y \quad \Rightarrow \quad c \in J.$$

Théorème (des valeurs intermédiaires)

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Autrement dit : Si f prend dans I les valeurs α et β , alors f prend toutes les valeurs comprises entre α et β .

Dém. [Voir les approfondissements] **Exemple d'application :** Toute équation de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (où $a \neq 0$ et $b, c, d \in \mathbb{R}$) possède au moins une solution $x \in \mathbb{R}$.

Théorème (Continuité de la fonction inverse)

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et injective dans I .
On pose $J = f(I)$. Alors,

- f est strictement monotone dans I .
- la fonction réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est strictement monotone, et continue dans J .

Dém. [Voir approfondissements]

Exemple d'application : la continuité des fonctions racines : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sur \mathbb{R}^+ (si n est pair) ou sur \mathbb{R} (si n est impair).

Définition (fonctions circulaires inverses)

- La fonction arcsin: $[-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est la réciproque de la fonction sin: $[-\pi, \pi] \rightarrow [-1, 1]$
- La fonction arccos: $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ est la réciproque de la fonction cos: $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$.
- La fonction arctan: $\mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est la fonction réciproque de la fonction tan: $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$.

[Dessins au tableau].

Ces fonctions sont continues sur leur ensemble de définition.

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

4.1 Motivation et définition de la dérivée

4.2 Dérivées des fonctions classiques

4.3 Opérations avec les fonctions dérivables

4.4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

4.5 Étude de fonctions et tracé du graphe

4.6 \ln comme primitive de $1/x$ et \exp comme réciproque de \ln

4.7 Dérivées d'ordre supérieure et convexité

5 Équations différentielles

Motivation géométrique

Rappelons que $y = mx + b$ est l'équation d'une droite de pente (ou coefficient directeur) m , passant par b en $x = 0$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$.

La droite d'équation

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

est la droite passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ du graphe de la fonction f .

Intuitivement, en calculant la limite pour $h \rightarrow 0$ on obtiendra l'équation de la droite tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$.

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle d'extrémités $a < b$.

Définition

- On dit que f est dérivable à droite au point a s'il existe **finie** la limite (notée $f'(a^+)$ et appelée **dérivée à droite de f en a**),

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- On dit que f est dérivable à gauche au point b s'il existe **finie** la limite (notée $f'(b^-)$ **dérivée à gauche de f en b**),

$$f'(b^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}.$$

- Si $a < x_0 < b$, on dit que f est dérivable en x_0 si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et les dérivées à gauche et à droite coïncident :

$$f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemple

- La dérivée d'une fonction constante est nulle.
- La fonction $f(x) = |x|$, en $x_0 = 0$ est dérivable à droite et à gauche. On a $f'(0^+) = 1$ et $f'(0^-) = -1$, mais f n'est pas dérivable en 0.
- La fonction $g(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en x_0 , pour tout $x_0 > 0$, avec $g'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle d'extrémités $a < b$ et $a < x_0 < b$ une fonction dérivable en x_0 .

Définition (Droite tangente)

La **droite tangente** au graphe de la fonction f au point x_0 est la droite d'équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

La dérivée $f'(x_0)$ est donc le **coefficient directeur** de la droite tangente au graphe de la fonction au point $(x_0, f(x_0))$.

Définition

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en tout point de I , on peut définir une nouvelle fonction, appelée fonction dérivée de f , notée f' ou $\frac{df}{dx}$, telle que $f'(x) = \frac{df}{dx}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Interpretation cinématique

Considérons un point P qui se déplace le long d'une droite sur l'axe x , occupant à l'instant t la position $p = p(t) \in \mathbb{R}$. La vitesse moyenne de P dans l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + h]$ est $\frac{p(t_0+h) - p(t_0)}{h}$. La **vitesse instantanée** $v(t_0)$ de P à l'instant t_0 est définie, et se calcule, en prenant la limite $h \rightarrow 0$. On a alors

$$v(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{dp}{dt}(t).$$

Notations alternatives

$$p'(t) = \frac{dp}{dt}(t) = \dot{p}(t) = p_t(t).$$

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

4.1 Motivation et définition de la dérivée

4.2 Dérivées des fonctions classiques

4.3 Opérations avec les fonctions dérivables

4.4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

4.5 Étude de fonctions et tracé du graphe

4.6 \ln comme primitive de $1/x$ et \exp comme réciproque de \ln

4.7 Dérivées d'ordre supérieure et convexité

5 Équations différentielles

Définition (Notation de Landau : "petit-o")

Si f et g sont deux fonctions définies dans un intervalle contenant x_0 , dit que f est négligeable devant $g(x)$, et l'on écrit

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{pour } x \rightarrow x_0 \iff \exists \epsilon(x) \text{ telle que } \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0 \text{ et,}$$

$$f(x) = g(x)\epsilon(x)$$

- $f(x) = o(1)$ pour $x \rightarrow x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
- $x^2 = o(x)$ pour $x \rightarrow 0$. D'autre part $x = o(x^2)$ pour $x \rightarrow +\infty$.
- Si $f_1(x) = o(g_1(x))$ et $f_2(x) = o(g_2(x))$ alors $f_1 f_2(x) = o(g_1 g_2(x))$, pour $x \rightarrow x_0$.
- $(f_1 + f_2)(x) = o(g_1(x)) + o(g_2(x)) = o(g_1(x))$, si $g_2(x) = o(g_1(x))$ ou $g_1(x) \sim g_2(x)$ pour $x \rightarrow x_0$
 $(f_1 + f_2)(x) = o(g_1(x)) + o(g_2(x)) = o(g_2(x))$, si $g_1(x) = o(g_2(x))$ ou $g_1(x) \sim g_2(x)$ pour $x \rightarrow x_0$
- On a **pas le droit** soustraire/simplifier les $o(\dots)$.

Proposition

f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + o(h), \quad \text{pour } h \rightarrow 0.$$

Dans ce cas, on a $m = f'(x_0)$.

On déduit de cette proposition que :

f dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ continue en x_0 .

Exemples de fonctions dérivables

Les fonctions suivantes sont dérivables dans leur ensemble de définition.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = nf(x)^{n-1}$.
- Si $f(x) = \sin(x)$, alors $f'(x) = \cos(x)$.
- Si $f(x) = \cos(x)$, alors $f'(x) = -\sin(x)$.
- Si $f(x) = \exp(x)$, alors $f'(x) = \exp(x)$
- Si $f(x) = \ln(x)$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$, pour tout $x > 0$.

[Dém. Admis pour \exp et \ln . Au tableau les autres.

En particulier, on démontre ici géométriquement les limites remarquables en 0, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h^2} = \frac{1}{2}$.]

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

4.1 Motivation et définition de la dérivée

4.2 Dérivées des fonctions classiques

4.3 Opérations avec les fonctions dérivables

4.4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

4.5 Étude de fonctions et tracé du graphe

4.6 \ln comme primitive de $1/x$ et \exp comme réciproque de \ln

4.7 Dérivées d'ordre supérieure et convexité

5 Équations différentielles

Théorème

Soient f et g deux fonctions dérivables en x . Alors $f + g$ et fg sont dérivables en x . Si $g(x) \neq 0$, f/g est dérivable en x . De plus, on a les formules :

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

[Dém. Au tableau]

Exemple

- La dérivée d'une fonction polynomiale est une fonction polynomiale.
- Si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$. Cette formule, déjà rencontrée pour $n \in \mathbb{N}$, reste vraie si $n \in \mathbb{Z}$.
- Si $f(x) = \tan(x)$, alors $f'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} .

Théorème (Dérivée de la fonction composée)

Si $f: I \rightarrow J$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ sont telles que f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 , et on a la formule

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Exemple

$$f(x) = (\sin x)^{10} \Rightarrow f'(x) = 10(\sin x)^9 \cos x.$$

Théorème (Dérivée de la fonction inverse)

Soit $f: I \rightarrow J$ une fonction bijective, dérivable en $x_0 \in I$, avec $f'(x_0) \neq 0$. Alors la fonction réciproque $f^{-1}: J \rightarrow I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0) \in J$, et l'on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Applications

- Si $a = \frac{m}{n}$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, et $f(x) = x^a$, on a $f'(x) = ax^{a-1}$, pour $x > 0$. En particulier (si $a = 1/2$), si $f(x) = \sqrt{x}$, on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, pour $x > 0$.
- La fonction $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est dérivable en $] -1, 1[$ et $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- La fonction $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ est dérivable en $] -1, 1[$ et $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- La fonction $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

4.1 Motivation et définition de la dérivée

4.2 Dérivées des fonctions classiques

4.3 Opérations avec les fonctions dérivables

4.4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

4.5 Étude de fonctions et tracé du graphe

4.6 \ln comme primitive de $1/x$ et \exp comme réciproque de \ln

4.7 Dérivées d'ordre supérieure et convexité

5 Équations différentielles

Définition

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$. On dit que x_0 est un point de **minimum local** pour f s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x_0) = \min_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} f(x)$. On dit que x_0 est un point de **maximum local** pour f s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x_0) = \max_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} f(x)$.

Proposition

Soit $I =]a, b[$ et $x_0 \in I$ un extremum local (c'est-à-dire un minimum ou un maximum local) de la fonction f , alors $f'(x_0) = 0$.

Théorème (de Rolle)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dans $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $x \in]a, b[$ tel que $f'(x) = 0$.

Théorème (de Cauchy)

Soient f et g deux fonctions continues dans l'intervalle $[a, b]$ et dérivables dans $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Dém. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction

$$x \mapsto (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)).$$

Le cas particulier $g(x) = x$ du théorème de Cauchy donne le résultat fondamental suivant :

Théorème (des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dans $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Applications

Sous les hypothèses du théorème ci-dessus on obtient une inégalité très importante :

Inégalité des accroissements finis

$$|f(b) - f(a)| \leq \left(\sup_{c \in]a, b[} |f'(c)| \right) |b - a|.$$

Et voici une autre application du théorème des accroissements finis.

Corollaire

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point de l'intervalle I .

- La fonction f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$ dans I . Elle est décroissante si et seulement si $f' \leq 0$ dans I .*
- Si $f' > 0$ dans I alors f est strictement croissante dans I . Si $f' < 0$ dans I alors f est strictement décroissante.*

Le théorème suivant est un outil très pratique dans le calcul des limites se présentant sous la forme indéterminée $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Théorème (de l'Hospital)

Soit $a \in I$. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $I \setminus \{a\}$, telles que $f(a) = g(a) = 0$ et g, g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$. On suppose en outre que f'/g' a une limite ℓ (finie ou infinie) en x_0 . Alors,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

Dém. Considérer une suite $x_n \rightarrow a^+$, ensuite une suite $x_n \rightarrow a^-$ et appliquer le théorème de Cauchy. (Plus de détails au tableau).

Variantes du théorème de l'Hospital

- En imposant des conditions convenables sur f et g , on a aussi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- La formule de l'Hospital s'applique aussi aux limite sous la forme indéterminée $[\infty/\infty]$.

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

4.1 Motivation et définition de la dérivée

4.2 Dérivées des fonctions classiques

4.3 Opérations avec les fonctions dérivables

4.4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

4.5 Étude de fonctions et tracé du graphe

4.6 \ln comme primitive de $1/x$ et \exp comme réciproque de \ln

4.7 Dérivées d'ordre supérieure et convexité

5 Équations différentielles

Comment tracer le graphe d'une fonction ?

- 1 Reconnaître si la fonction est paire, impaire ou périodique, ou si elle présente d'autres symétries évidentes.
- 2 Déterminer le domaine de définition D de la fonction.
- 3 Étudier le signe de f et si possible en trouver les zéros.
- 4 Étudier les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers les bords du domaine D . Si D est non borné, étudier les limites pour $x \rightarrow \pm\infty$ et chercher les éventuels **asymptotes** en $\pm\infty$ ¹.
- 5 Trouver les éventuels points de discontinuité de f . Calculer f' . Trouver les éventuels points de non dérivabilité et étudier la limite de f' en ces points.
- 6 Chercher à résoudre dans D les inégalités $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) \leq 0$. En déduire le tableau des variations des la fonction f , c'est à dire les intervalles où f est croissante et décroissante.
- 7 Déduire du tableau des variations les point d'extrema locaux de f . Si possible calculer la valeur de f en ces points.
- 8 Tracer le graphe en prenant en compte **tous** ces éléments.

1. On dit qu'une droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote pour la fonction f en $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$. Noter que les formules $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x$ et $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax$ permettent de trouver l'équation de l'asymptote

Exemple

Étudier et tracer le graphe de la fonction $f(x) = \frac{(x-a)^{2/3}}{x}$, où $a > 0$ est un paramètre.

Exemple

Toute fonction rationnelle de la forme

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0},$$

avec $a_n \neq 0$ et $b_{n-1} \neq 0$, (n entier ≥ 2) possède des asymptotes en $\pm\infty$, d'équation

$$y = \frac{a_n}{b_{n-1}} x + \frac{b_{n-1} a_{n-1} - a_n b_{n-2}}{b_{n-1}^2}.$$

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

4.1 Motivation et définition de la dérivée

4.2 Dérivées des fonctions classiques

4.3 Opérations avec les fonctions dérivables

4.4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

4.5 Étude de fonctions et tracé du graphe

4.6 \ln comme primitive de $1/x$ et \exp comme réciproque de \ln

4.7 Dérivées d'ordre supérieure et convexité

5 Équations différentielles

Notion de primitive

Définition

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle. Toute fonction $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$ s'appelle **primitive** de f .

Théorème

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I . Alors f admet une primitive. De plus, si F est une primitive de f sur I alors G est une autre primitive sur I si et seulement si $G = F + c$, où $c \in \mathbb{R}$ est constante.

Dém. Voir le cours d'Analyse II : il s'agira de définir $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ où a est un point arbitrairement choisi de I .

Remarque. La fonction discontinue de Heaviside, $H(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $H(x) = 0$ si $x < 0$ n'admet pas de primitive sur \mathbb{R} .

Le logarithme naturel

Définition (logarithme naturel ou néperien)

La fonction $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie comme l'unique primitive sur l'intervalle de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en $x = 1$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{pour } x > 0, \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0.$$

À partir de cette définition, on trouve facilement les propriétés suivantes

- 1 \ln est croissante sur $]0, \infty[$.
- 2 $\forall x, y > 0$, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$.
- 3 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $\ln(x^n) = n \ln(x)$, $\frac{1}{n} \ln(x) = \ln(\sqrt[n]{x})$.
- 4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$.
- 5 $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective.

Notation ambiguë : pour les mathématiciens, $\log(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \ln(x)$. Pour les autres (et sur les calculatrices) $\log(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \ln(x)/\ln(10)$, ce qui correspond au logarithme en base 10 de x .

La fonction exponentielle

Définition

La fonction $\exp: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est la fonction réciproque de la fonction $\ln:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$:

$$\forall x > 0, \quad \exp(\ln(x)) = x, \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\exp(x)) = x$$

Notation. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $e^x = \exp(x)$.

Voici les conséquences immédiates de cette définition

- ① $\exp: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est bijective. De plus, $\exp(0) = 1$.
- ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
- ③ \exp est dérivable dans \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
- ④ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{x-y} = e^x / e^y$, $e^{nx} = (e^x)^n$.

Définition

On définit le nombre $e = \exp(1)$.

On obtient ainsi un nombre irrationnel, qui vaut environ 2,718... (voir cours d'Analyse II). On peut démontrer que $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

Puissance réelle d'un réel positif

Définition

Si $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose

$$x^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} e^{\alpha \ln(x)}.$$

Cette définition est compatible avec la définition usuelle de puissance lorsque $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. On observera qu'alors $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$ et $(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$. On remarque la formule :

$$f(x) = x^\alpha \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

En particulier la fonction x^α est croissante. On vérifie immédiatement que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$. En appliquant des variantes du théorème de l'Hospital on obtient les **résultats de croissance comparée**.

Proposition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0.$$

1 Introduction à \mathbb{R}

2 Suites numériques

3 Fonctions, Limites, continuité

4 Dérivées

4.1 Motivation et définition de la dérivée

4.2 Dérivées des fonctions classiques

4.3 Opérations avec les fonctions dérivables

4.4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

4.5 Étude de fonctions et tracé du graphe

4.6 \ln comme primitive de $1/x$ et \exp comme réciproque de \ln

4.7 Dérivées d'ordre supérieure et convexité

5 Équations différentielles

Définition

Une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **convexe** dans I si sont pour tout $x_0 < x_1$ dans I , le graphe de la fonction dans l'intervalle $[x_0, x_1]$ reste en dessous du segment d'extrémités $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$. Autrement dit :

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1).$$

On dit que f est **concave** dans I si $-f$ est convexe dans I .

Exemple

La fonction $f(x) = x^3$ est convexe dans \mathbb{R}^+ et elle est concave dans \mathbb{R}^- . L'origine est un point d'inflexion pour f (on point où la fonction change de concavité)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que la fonction dérivée f' est elle-même dérivable dans I . La dérivée de la fonction f' s'appelle **dérivée seconde** de f elle est notée f'' . On définit de la même manière les dérivées d'ordre plus élevé, f''' , etc.

Le théorème principal sur les fonctions convexe est le suivant :

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable dans I . Alors :

- f est convexe si et seulement si son graphe est au-dessus de chacune de ses droites tangentes.
- f est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante sur I .
- f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde $f'' \geq 0$ (sous l'hypothèse supplémentaire que f est deux fois dérivable dans I).

Dém. [Admise]

La notion de convexité joue un rôle important in optimisation. Par exemple, on peut démontrer que si x_0 est un point interne à l'intervalle I vérifiant $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un **minimum local**. Si de plus $f'' > 0$ dans I , alors x_0 est un point de **minimum global** sur I .

- 1 Introduction à \mathbb{R}
- 2 Suites numériques
- 3 Fonctions, Limites, continuité
- 4 Dérivées
- 5 Équations différentielles
 - 5.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Introduction

Une équation différentielle (ED) d'ordre 1 est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (où I est un intervalle), que l'on cherche à trouver à partir d'une relation donnée entre f et sa dérivée f' , de la forme

$$\Phi(x, f(x), f'(x)) = 0, \quad x \in I, \quad (\text{ED})$$

où $\Phi = \Phi(x, u, v)$ est une fonction donnée de trois variables. Dans ce cours nous verrons comment résoudre des équations différentielles de la forme suivante :

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x), \quad x \in I \quad (\text{NH})$$

où $a: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $b: I \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions **continues** sur I données, et f est la fonction inconnue.

Cela correspond dans (ED) au choix $\Phi(x, u, v) = v + a(x)u - b(x)$. En particulier, l'application $(u, v) \mapsto \Phi(x, u, v)$ est linéaire pour tout x . C'est pourquoi on dit que (NH) est une équation différentielle **linéaire** d'ordre 1 (non-homogène).

Un exemple d'une ED non-linéaire serait par exemple $f'(x) + f(x)^3 = x$, ou encore $\sin(f'(x))f(x) = 1$: dans le premier cas $\Phi(x, u, v) = u^3 + v - x$ et dans le second $\Phi(x, u, v) = -1 + u \sin(v)$. Ce ne sont pas des applications linéaires en (u, v) . On ne sait pas résoudre en général des ED non-linéaires.

Commençons par traiter un cas particulier simple de (NH), celui des équations dites **homogènes**, c'est-à-dire de la forme

$$f'(x) + a(x)f(x) = 0, \quad x \in I. \quad (\text{H})$$

Théorème

Soit $a: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Les solutions $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation différentielle (H) sont toutes de la forme $f(x) = \lambda \exp(-A(x))$ où A est une primitive de a et λ une constante réelle.

Dém. Au tableau.

Bien souvent, dans les équations différentielles la variable x s'interprète comme un temps, et on a en général une information supplémentaire sur f , de la forme $f(x_0) = y_0$. Autrement dit, on suppose connue qu' "à l'instant x_0 f vaut y_0 ". On appelle cet information une **condition initiale**.

Exemple (datation par le carbone 14)

Une matière radioactive perd dans l'unité de temps une proportion constante ($= a$) de sa masse : $\Delta M = -aM\Delta t$. La masse vérifie alors l'ED $M'(t) = -aM(t)$. La proportion de masse radioactive restante après un temps t est donc $M(t)/M(0) = e^{-at}$.

Dans le cas du carbone 14, on sait que $M(t)/M(0) = 1/2$ après 5500 années (ceci permet de calculer le paramètre a) et ensuite de dater des ossements en mesurant la quantité de carbone 14 restante $M(t)$ par la formule $t = \frac{1}{a} \ln(M(0)/M(t))$.

Résolution des équations différentielles de la forme (NH)

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x), \quad x \in I \quad (*)$$

Théorème

- Soit g une solution de (NH). Alors les fonctions f de la forme $f(x) = g(x) + \lambda \exp(-A(x))$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont aussi solution de (NH), et il n'y en a pas d'autres.
- Si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, alors il existe une et une seule solution $f(x)$ de l'équation (NH) vérifiant de plus la condition $f(x_0) = y_0$.

On exprime la première partie du théorème en disant que la solution générale de (NH) est égale à la solution générale de (H) plus une solution particulière de (NH).

Dém. Au tableau.

La méthode de variation de la constante

Cette méthode permet de construire une fonction $g(x)$ solution particulière de l'équation (NH) . La méthode consiste à chercher $g(x)$ parmi les fonctions de la forme

$$g(x) = \lambda(x) \exp(-A(x)),$$

où $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ est à déterminer. Un petit calcul montre que $\lambda(x)$ vérifie :

$$\lambda'(x) = b(x) \exp(A(x)).$$

Il suffit alors de *calculer d'une primitive* de $b(x) \exp(A(x))$, ce qui est toujours possible si $b(x)$ est continue sur I .

Comment trouver une primitive d'une fonction ?

On a vu que la résolution d'équations différentielles de la forme (NH) se réduit au calcul d'une primitive $A(x)$ de $a(x)$ et ensuite d'une primitive de la fonction $b(x) \exp(A(x))$.

Pour trouver une primitive d'une fonction $f(x)$ dans la pratique on peut :

- Si la fonction f est dans le tableau ci-dessous, alors une primitive F est à connaître par cœur :

$f(x)$	$F(x)$
x^a	$x^{a+1}/(a+1), \quad a \neq -1$
$1/x$	$\ln(x)$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\phi'(x)g(\phi(x))$	$G(\phi(x)),$ où G primitive de g

Comment trouver une primitive d'une fonction ? [suite]

- Ou sinon, en cherchant des primitives $F(x)$ de la même forme que la fonction $f(x)$: cela marche bien lorsque $f(x) = P(x) \exp(cx)$, ou $f(x) = P(x)(a \sin(x) + b \cos(x))$, avec $P(x)$ polynômiale.
- Ou en appliquant des techniques telles que l'intégration par parties ou l'intégration par changement de variable (voir cours d'Analyse II).

Exemple

Trouver l'unique solution $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ du système suivant (dit "problème de Cauchy") :

$$\begin{cases} f'(x) + 4f(x) = x^2 + 1 \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Équations pouvant se ramener à la forme (NH)

Pour résoudre les équations de la forme

$$\alpha(x)f'(x) + a(x)f(x) = b(x), \quad x \in I$$

on divisee par $\alpha(x)$ et on se ramène à une équation de type (*).

Cependant, si $\alpha(x)$ s'annule en I ceci exige de découper I en plusieurs intervalles où $\alpha(x)$ ne s'annule pas, et d'étudier séparément l'équation

$f'(x) + \frac{a(x)}{\alpha(x)}f(x) = \frac{b(x)}{\alpha(x)}$ en ces sous-intervalles. Ensuite il s'agit d'étudier les raccordements de ces solutions.

Équations à variables séparables

Ce sont les équations différentielles (d'inconnue $f = f(x)$) pouvant se ramener aux équations de la forme

$$f'(x)g(f(x)) = h(x), \quad x \in I. \quad (\infty)$$

Si G est une primitive de g et H est une primitive de h , alors on a $G(f(x)) = H(x) + c$, où c est une constante. Cette relation peut être utilisée pour calculer $f(x)$.

Exemple

Un TGV de 400 tonnes est équipé d'un moteur de 8 MeW. Initialement à l'arrêt, le train accélère avec pleine puissance. Quelle sera sa vitesse après 10 secondes, si l'on néglige les forces de friction ?

Réponse. On note $x(t)$ la distance parcourue à l'instant t , $v(t) = x'(t)$ la vitesse, $f(t) = mx''(t)$ la force exercée par le moteur (loi de Newton), où $m = 400 \cdot 10^3$ Kg est la masse. La puissance (supposée ici constante) est donnée par la relation $P(t) = f(t)v(t) = P_0 = 8 \cdot 10^6$ W. On a $mv'(t)v(t) = P_0$, qui est une équation différentielle à variables séparables, d'inconnue $v = v(t)$. De plus v vérifie la condition initiale $v(0) = 0$. Ainsi, $v(t) = \sqrt{2P_0 t/m}$. Après $t = 10$ secondes, on a $v = 20$ metres/seconde (= 72 Km/h).