



COURS DE MATHEMATIQUES

DR SESS ADIABOUAH
UFR SEG, Université FHB



$$X_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

PLAN ECUE1

Intégrales généralisées
Equations différentielles ordinaires

INTEGRALES GENERALISEES

Intégrales généralisées ?

Définition.

Soit une fonction f continue sur un intervalle $I_1 = [a; b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ou $I_2 =]a; b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$, on dit que les intégrales

$$\int_a^b f(t) dt \quad \int_b^a f(t) dt$$

sont des **intégrales impropres ou généralisées** en b dans le cas de I_1 et en a dans le cas de I_2 .

CONVERGENCE (1)

Définition.

Soit f une fonction continue sur $]a ; b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t) dt$ est convergente lorsque la

fonction $F : \begin{cases}]a ; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \int_x^b f(t) dt \end{cases}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a^+ .

Si tel est le cas, on la valeur de cette intégrale est :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$$

Dans le cas contraire, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est dite divergente.

Exemples : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$; $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$; $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$; $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx$; $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$

CONVERGENCE (2)

Définition.

Soit f une fonction continue sur $[a ; b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t) dt$ est convergente lorsque la

fonction $F : \begin{cases} [a ; b[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow \int_a^x f(t) dt \end{cases}$ admet une limite finie lorsque x tend vers b^- .

Si tel est le cas, la valeur de cette intégrale est :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$$

Dans le cas contraire, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est dite divergente.

Exercices : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$; $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$

CONVERGENCE (3)

Définition.

Soit f une fonction continue sur $]a ; b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit un réel quelconque $c \in]a, b[$.

On dit que l'intégrale de f est convergente sur $]a ; b[$ ou que **l'intégrale** $\int_a^b f(t) dt$ **est convergente** lorsque

les intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont toutes les deux convergentes.

Si tel est le cas, alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

CONVERGENCE (4)

Définition (Convergence absolue d'une intégrale impropre).

On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente lorsque l'intégrale impropre $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente

Exercice : $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

INTEGRALE DE RIEMAN

Théorème.

Au voisinage de l' ∞ : Soit $a > 0$. Soit $\alpha > 0$.

- ❶ Les intégrales $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_{-\infty}^{-a} \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont convergentes si seulement si $\alpha > 1$.
- ❷ Les intégrales $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_{-\infty}^{-a} \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont divergentes si seulement si $\alpha \leq 1$.

Théorème.

Au voisinage de 0 : Soit $a > 0$ et $\alpha > 0$.

- Les intégrales $\int_0^a \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_{-a}^0 \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont convergentes si seulement si $\alpha < 1$.
- Les intégrales $\int_0^a \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_{-a}^0 \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont divergentes si seulement si $\alpha \geq 1$.

AUTRES THEOREMES

Théorème.

Au voisinage d'une valeur réelle non nulle.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha > 0$.

Les intégrales $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ et $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ sont convergentes si seulement si $\alpha < 1$

Théorème.

Soit une intégrale $I = \int_0^{+\infty} r^x dx$, avec $r > 0$ alors :

- I converge si seulement si $r < 1$;
- I diverge si seulement si $r \geq 1$.

Propriétés

- Soit f et g sont deux fonctions telles que $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, +\infty[$. Les deux fonctions sont continues sur $[a, +\infty[$. Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge. Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge.
- Si au voisinage de $+\infty$ $f(x) \sim g(x)$, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sont de même nature. Il en est de même pour les autres types d'intégrales au voisinage d'un point.
- $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature si $a < b$.
- La somme de 2 intégrales convergentes est convergente. La somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente est divergente.

Exercices

Suggestions d'exercices :

Donner la nature des intégrales : $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$; $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$; $\int_0^1 \frac{dx}{x^3-5}^2$; $\int_0^2 \frac{dx}{x^{\alpha^2}}$; $\int_{-\sqrt{2}}^5 \ln(5-x) dx$

Calculer l'intégrale : $\int_{-\sqrt{2}}^5 \ln(5-x) dx$

INTEGRALES MULTIPLES

Comment calculer une intégrale double ?

Méthodes de calcul

- Intégration par rapport à y (x étant fixé)
- Intégration par rapport à x (y étant fixé)
- Passage en coordonnées polaires

METHODE DE CALCUL (1)

Méthode 1 : Intégrons d'abord par rapport à y (x étant fixé)

Soit l'intégrale double $I = \iint_D f(x, y) dx dy$, avec D l'ensemble ou le domaine d'intégration.

Nous intégrons par rapport à y (x étant fixé), puis nous intégrons par rapport à x .

Alors, pour x fixé entre a et b , y varie de $y_H = y_H(x)$ à $y_K = y_K(x)$

Avec $[HK]$ l'ensemble des points $M(x, y)$ appartenant à D d'abscisse commun x et d'ordonnée y tel que $y_H \leq y \leq y_K$.

$$\text{D'où : } I = \int_a^b \left[\int_{y_H}^{y_K} f(x, y) dy \right] dx$$

Exemple : $I = \iint_D f(x, y) dx dy$, avec $f(x, y) = x(y + 1)$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$

METHODE DE CALCUL (2)

Méthode 2 : Intégrons d'abord par rapport à x (y étant fixé)

Soit l'intégrale double $I = \iint_D f(x, y) dx dy$, avec D l'ensemble ou le domaine d'intégration.

Nous intégrons par rapport à x (y étant fixé), puis nous intégrons par rapport à y .

Alors, pour y fixé entre a et b , x varie de $x_H = x_H(y)$ à $x = x_K(y)$

Avec [HK] l'ensemble des points $M(x, y)$ appartenant à D dont l'ordonnée y est commun et l'abscisse x est tel que $x_H \leq x \leq x_K$.

$$\text{D'où : } I = \int_a^b \left[\int_{x_H}^{x_K} f(x, y) dx \right] dy$$

Exemple : $I = \iint_D f(x, y) dx dy$, avec $f(x, y) = 1$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 ; y \geq 0 ; x^2 + y^2 \leq 1\}$

METHODE DE CALCUL (3)

Méthode 3 : le passage en coordonnées polaires

Cette méthode peut être utilisée quand D est un cercle ou un morceau de cercle.

Soit un cercle de rayon R et de centre $A(a, b)$. On pose le changement de

variables suivant : $\begin{cases} x = r \cos\theta + a \\ y = r \sin\theta + a \end{cases}$. Dans ces conditions, Δ est le nouvel

ensemble d'intégration de l'intégrale double ayant pour variables r et θ .

Exemple : $I = \iint_D f(x, y) dx dy$, avec $f(x, y) = 1$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 ; y \geq 0 ; x^2 + y^2 \leq 1\}$

METHODE DE CALCUL (3 suite)

Méthode 3 : le passage en coordonnées polaires

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) (|J|) dr d\theta,$$

avec **J** le Jacobien

$$J = \begin{vmatrix} \delta x / \delta r & \delta x / \delta \theta \\ \delta y / \delta r & \delta y / \delta \theta \end{vmatrix}$$

Exemple : $I = \iint_D f(x, y) dx dy$, avec $f(x, y) = 1$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0; y \geq 0; x^2 + y^2 \leq 1\}$

Propriétés

Si f et g sont intégrables sur D (l'ensemble ou le domaine d'intégration) de \mathbb{R}^2 , alors :

- $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur D .
- $|f|$ et $|g|$ sont intégrables sur D .
- $f \cdot g$ est intégrable sur D .
- f/g et g/f sont intégrables sur D .

EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES

Equations Différentielles Ordinaires (EDO)

Définition.

Une équation différentielle ordinaire est une égalité contenant une variable t , une fonction inconnue $y(t)$ de t et les dérivées $y', y'', \dots, y^{(n)}$ de $y(t)$.

L'ordre de l'équation différentielle est l'ordre le plus élevé des dérivées de y contenues dans la relation.

Exemples : $y' = 2ty$; $x'' - 4x' + 4x = te^{2t}$.

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Forme : $a(t)y' + b(t)y = c(t)$, où : $a(t), b(t)$ et $c(t)$ sont des fonctions en t , sur un intervalle I .

Résolution de l'équation homogène associée : $a(t)y' + b(t)y = 0$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-b(t)}{a(t)} y ; \frac{dy}{y} = \frac{-b(t)}{a(t)} dt ; \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-b(t)}{a(t)} dt$$

$$\ln|y| = \int \frac{-b(t)}{a(t)} dt + c = H(t) + c, \text{ avec } c = \ln(K) \Rightarrow \ln|y| - \ln|K| = H(t)$$

Solution homogène $y_h = KH_0(t)$,

Solution particulière $y_p = K_p H_0(t)$ avec $K_p = \int \frac{c(t)}{a(t)H_0(t)} dt$

Solution générale : $y = y_h + y_p$

Equations différentielles linéaires d'ordre 1 (suite)

Exercice corrigé : $ty' + (2t - 3)y - 4t^4 = 0$

• L'équation devient : $ty' + (2t - 3)y = 4t^4$ (1)

• Equation homogène associée : $ty' + (2t - 3)y = 0$ (2)

$$t \frac{dy}{dt} = (3 - 2t)y ; \frac{dy}{y} = \left(\frac{3}{t} - 2\right) dt ; \int \frac{dy}{y} = \int \frac{3}{t} dt - \int 2 dt$$

$$\ln y = \ln(t^3) - 2t + c. \text{ Posons } c = \ln(K) \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{Kt^3}\right) = -2t$$

$$\text{Solution homogène } y_h = Kt^3 e^{-2t} ; H_0(t) = t^3 e^{-2t}$$

• Solution particulière $y_p = K_p H_0(t)$ avec

$$K_p = \int \frac{c(t)}{a(t)H_0(t)} dt = \int \frac{4t^4}{t \cdot t^3 e^{-2t}} dt = 2e^{2t} \text{ (ici, la constante d'intégration est égale à 0 puisque nous recherchons simplement une solution particulière).}$$

• Solution générale : $y = y_h + y_p = t^3 (Ke^{-2t} + 2)$

EQUATION DE BERNOUILLI

Forme : $a(t)y' + b(t)y + c(t)y^m = 0$ (1),

où : $a(t), b(t)$ et $c(t)$ sont des fonctions continues en t , sur un intervalle I .
avec $m \neq 1$, on divise (1) par y^m .

Changement de variable : posons $U = \frac{1}{y^{m-1}}$

On obtient : $\frac{a(t)}{-m+1} U' + b(t)U + c(t) = 0$

On sait résoudre cette équation différentielle linéaire en U . On obtient une solution $U(t)$ et on en tire y .

Exemple : $ty' - (2t - 3)y + 4t^4y^2 = 0$

Equation de Bernoulli : exercice corrigé

Exercice corrigé : $ty' - (2t - 3)y + 4t^4y^2 = 0$ (1)

- Ici, $m = 2$, on divise (1) par $y^2 \Rightarrow t \frac{y'}{y^2} - (2t - 3) \frac{1}{y} + 4t^4 = 0$ (2)

- Changement de variable : $U = \frac{1}{y} = y^{-1}$; $U' = -y^{-2}y'$

- L'équation (2) devient : $-tU' - (2t - 3)U = -4t^4$ ou $tU' + (2t - 3)U = 4t^4$ (3)

(3) est l'équation différentielle linéaire en U résolue dans l'exercice précédent.

$$U = t^3(Ke^{-2t} + 2) \text{ or } U = \frac{1}{y}$$

- D'où $y = \frac{1}{t^3(Ke^{-2t} + 2)}$

EQUATION DE RICATTI

Forme : $a(t)y' + b(t)y + c(t)y^2 = d(t)$ (1),

où : $a(t), b(t)$ et $c(t)$ sont des fonctions continues en t , sur un intervalle I .

Déterminer une solution particulière z_p . Posons $y = z_p + z$

(1) Devient une équation de Bernoulli : $az' + (b + 2cz_p)z + cz^2 = 0$ qu'on sait résoudre.

Equation de Ricatti : exercice corrigé

Exercice corrigé : $ty' + (8t^5 - 2t + 3)y + 4t^4y^2 = -4t^6 + 2t^2 - 4t$ (1)

Vérifier $z_p = -t$ est une solution particulière puis résoudre (1).

- $z'_p = -1$ et $z^2_p = t^2$

$z_p = -t$ est bien une solution particulière de (1).

- Posons $y = z_p + z = -t + z$

On en déduit y' et y^2 , l'équation (1) devient : $tz' - (2t + 3)z + 4t^4z^2 = 0$ (2)

- (1) devient une équation de Bernoulli qu'on sait résoudre. Elle correspond à l'équation de l'exercice précédent.

On en déduit que $z = \frac{1}{t^3(Ke^{-2t}+2)}$

D'où $y = -t + \frac{1}{t^3(Ke^{-2t}+2)}$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'ORDRE 2

EQUATION A COEFFICIENTS CONSTANTS (1)

Forme : $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$ (1)

Où $a \neq 0$ et a, b, c sont constants par rapport à t .

Equation homogène associée : $ay'' + by' + cy = 0$ (2)

Equation caractéristique de (2) : $ar^2 + br + c = 0$ (3)

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta > 0$, $y_1 = e^{r_1 t}$ et $y_2 = e^{r_2 t}$, la solution de (2) est $y_H = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

Si $\Delta = 0$, $r = -\frac{b}{2a}$, la solution de (2) est $y_H = (c_1 + tc_2)e^{rt}$

Si $\Delta < 0$, la solution est $y_H = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ avec r_1 et r_2 qui sont des nombres complexes.

EQUATION A COEFFICIENTS CONSTANTS (2)

Recherche d'une solution particulière de l'équation (1)

Supposons $d(t) = \sum_{i=1}^n d_i(t)$ et $d_i(t) = P_i(t)e^{\alpha_i t}$

- Si α_i n'est pas racine de l'équation caractéristique (2), une solution particulière de (1) relative à $d_i(t)$ est de la forme $y_p = Q_i(t)e^{\alpha_i t}$ où $Q_i(t)$ est un polynôme tel que $\deg[Q_i(t)] = \deg[P_i(t)]$.
- Si α_i est racine simple de (2), une solution particulière de (1) relative à $d_i(t)$ est de la forme $y_p = Q_i(t)e^{\alpha_i t}$ où $Q_i(t)$ est un polynôme tel que $\deg[Q_i(t)] = \deg[P_i(t)] + 1$.
- Si α_i est racine double de (2), une solution particulière de (1) relative à $d_i(t)$ est de la forme $y_p = Q_i(t)e^{\alpha_i t}$ où $Q_i(t)$ est un polynôme tel que $\deg[Q_i(t)] = \deg[P_i(t)] + 2$.

Solution générale $y_G = y_H + y_p$

Exercice corrigé

Exercice corrigé : $-2y'' + y' + y = t^2 + 1$ (1)

• Equation homogène associée : $-2y'' + y' + y = 0$ (2)

Equation caractéristique de (2) : $-2r^2 + r + 1 = 0$ (3)

(3) admet deux racines : $r_1 = 1$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$

$$y_H = c_1 e^t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}$$

• Solution particulière

$$d(t) = t^2 + 1 \text{ et } d(t) = P(t)e^{\alpha t} = (t^2 + 1)e^{\alpha t}, \text{ avec } \alpha = 0$$

Comme 0 n'est pas racine de (3), $y_p = q(t)e^{\alpha t} = q(t)$ où $q(t)$ est un polynôme tel que $\deg[q(t)] = \deg[P(t)] = 2 = \deg[y_p]$.

$$y_p = at^2 + bt + c. \text{ On en déduit } y_p' \text{ et } y_p''.$$

$$\text{Alors (1) devient : } -2(2a) + (2at + b) + (at^2 + bt + c) = t^2 + 1$$

$$y_p = t^2 - 2t + 7$$

$$y_G = t^2 - 2t + 7 + c_1 e^t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}$$

Exercices

Exercices :

I. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(25 - 3x)y' + y^2 = 0$

2. $(5x^2 + 3)y' + 3xy - 4x = 0$

3. $y' + xy - x^3y^3 = 0$

II. Soit l'équation différentielle

$$y' + 2xy - y^2 = x^2 + 1$$

1. Trouver une solution particulière de la forme $p(x) = ax + b$

2. Trouver la solution générale

III. Résoudre $x'' - 4x' + 4x = te^{2t} + \frac{1}{2}e^t$



PLAN ECUE 2

Séries numériques

Suites et series de fonctions

SERIES NUMERIQUES

Séries numériques ?

Définition.

Peut-on donner un sens à une somme d'un nombre infini de termes ?

On appelle série numérique dans \mathbb{C} ou \mathbb{R} le couple $((U_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$ où $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique définie par :

$$(S_n) = (S_0, S_1, \dots, S_n, \dots) = (U_0, U_0 + U_1, \dots, U_0 + U_1 + \dots + U_n, \dots).$$

La série est notée $\sum U_n$. Le terme U_n est appelé le $n^{\text{ième}}$ terme de la série ou terme général de la série et S_n est appelée la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série.

GENERALITES (1)

Définition.

Une série $\sum U_n$ est dite convergente si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (admet une limite finie lorsque n tend vers l'infini). Si une série converge alors sa limite est notée S et $S = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_0^k U_p$. La série diverge si la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas finie ou n'existe pas.

Définition (Condition nécessaire de convergence d'une série).

Pour que la série $\sum U_n$ converge, il faut que le terme général U_n tende vers 0 quand n tend vers l'infini. (La réciproque n'est pas nécessairement vraie).

GENERALITE (2)

Définition (Convergence absolue d'une série).

On dit que la série $\sum U_n$ est absolument convergente, lorsque la série $\sum |U_n|$ est convergente. Alors la série $\sum U_n$ converge.

Propriétés

- La nature (convergente ou divergente) d'une série ne change pas si l'on supprime ou si modifie un nombre fini de termes.
- Si la série $\sum U_n$ est convergente et a pour somme S et si la série $\sum V_n$ est convergente et a pour somme T , alors la série $\sum(U_n + V_n)$ est convergente et a pour somme $S + T$.
- Si la série $\sum U_n$ converge et la série $\sum V_n$ diverge, alors la série $\sum(U_n + V_n)$ diverge. On ne peut rien dire de la somme de deux séries divergentes.
- Pour $\lambda \neq 0$, si la série $\sum U_n$ est convergente (resp. divergente) et a pour somme S , alors la série $\sum \lambda U_n$ est convergente (resp. divergente) et a pour somme λS .

SERIES REELLES A TERMES POSITIFS (1)

Définition.

Une série est dite à termes positifs si tous ses termes sont positifs à partir d'un certain rang.

Elle converge **si et seulement si** l'ensemble des sommes partielles S_n est majorée.

Définition (Comparaison et équivalence).

Soient $\sum U_n$ et $\sum V_n$ deux séries réelles à termes positifs telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq V_n$. Alors, si la série $\sum U_n$ diverge, la série $\sum V_n$ diverge et si la série $\sum V_n$ converge, la série $\sum U_n$ converge.

Si U_n et V_n sont équivalents quand n tend vers $+\infty$, alors les séries $\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont de même nature.

SERIES REELLES A TERMES POSITIFS (2)

Théorème.

Règle d'Alembert

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$ existe et est égale à k , alors :

- Si $k < 1$, la série converge
- Si $k > 1$, la série diverge
- Si $k = 1$, on ne peut pas conclure.

Théorème.

Critère de Cauchy

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{U_n}$ existe et est égale à k , alors :

- Si $k < 1$, la série converge
- Si $k > 1$, la série diverge
- Si $k = 1$, on ne peut pas conclure.

SERIES REELLES A TERMES POSITIFS (3)

Théorème.

Comparaison avec une intégrale

Si $U_n = f(n)$, avec f qui est une fonction positive décroissante sur un intervalle $[a, +\infty[$ (où $a > 0$), alors la série $\sum U_n$ est de même nature que l'intégrale. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Définition.

Séries de référence :

- La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.
- La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$.
- La série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$
 - converge si $\alpha > 1$;
 - diverge si $\alpha < 1$;
 - si $\alpha = 1$, elle converge si et seulement si $\beta > 1$.

SERIES ALTERNÉES

Définition.

Une série alternée est une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.

La série $\sum U_n$ est une série alternée si $U_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n \geq 0$.

Théorème.

Nature d'une série alternée

La série alternée $\sum U_n$ converge si $|U_n|$ décroît et tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercices

Suggestion d'Exercices :

1) Déterminer la nature des séries suivantes : $\sum U_n$ avec $U_n = (-1)^n$; $\sum V_n$ avec $V_n = (-1)^{n+1}$; $\sum(U_n + V_n)$.

2) Déterminer la nature $\sum U_n = \sum q^n$ selon la valeur de q .

Donner la nature des séries : 3) $\sum \frac{1}{2n+1}$; 4) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$; 5) $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$; 6) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ et 7) $\sum \frac{a^n}{n!}$.

SUITES DE FONCTIONS SERIES DE FONCTIONS

Définition.

Soit l'ensemble des fonctions numériques définies sur une partie I de \mathbb{R} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on associe la fonction f_n de \mathbb{R} . On note alors **la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions** définies sur I .
 $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit une série $\sum f_n$ dont le terme général est f_n définie sur I . $\sum f_n$ est appelée **une série de fonctions**.

SUITES DE FONCTIONS (1)

Définition.

Une suite (f_n) de fonction, définies sur I , **converge simplement** vers une fonction f définie sur I

si : $\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.

La suite (f_n) **converge uniformément** vers la fonction f définie sur I si : $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f_n, f) = 0$.

Avec $d(f, g) = \text{Sup}\{|f(x) - g(x)|\}$, où f et g sont des fonctions numériques bornées appartenant à \mathbb{R} .

Si la suite de fonction converge uniformément vers f , alors elle converge simplement vers f . (La réciproque n'est pas vraie).

Exercices : Etudier la convergence simple et uniforme (convergence normale pour la suite 2) des suites :

1) $\frac{nx}{1+nx}$ sur $]0,1[$; 2) $\frac{x}{1+nx}$ sur $[0,1]$.

SUITES DE FONCTIONS (2)

Théorème.

Si la suite f_n de fonctions continues sur I converge uniformément vers la fonction f , alors f est continue sur I .

La suite (f_n) converge uniformément, sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset I$, vers la fonction f , définie sur I , alors f est continue sur I .

Théorème.

Soit la suite (f_n) une suite de fonctions dérivables sur I . S'il existe $x_0 \in I$ tel que la suite numérique $(f_n(x_0))$ soit convergente et si la suite (f_n) converge uniformément sur I , alors sa limite f est dérivable sur I et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f'(x)$.

SERIES DE FONCTIONS (1)

Définition.

La série $\sum f_n$ **converge simplement** si la suite (S_n) converge simplement. $S_n = \sum_{i=0}^n f_i$. Dans ce cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$.

La série $\sum f_n$ **converge uniformément** si la suite (S_n) converge uniformément.

La série $\sum f_n$ **converge absolument** si la série $\sum |f_n|$ est simplement convergente.

La série $\sum f_n$ **converge normalement** s'il existe une série convergente $\sum U_n$ telle que $|f_n(x)| \leq U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$. Une série normalement convergente est absolument convergente, simplement convergente.

Exercices : Etudier la convergence simple et uniforme des suites ci – après :

$$3) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \text{ sur } [0,1[; 4) \sum f_n \text{ où } f_n = \frac{x}{n^3+x^3} \text{ sur } [0, +\infty[.$$

SERIES DE FONCTIONS (2)

Théorème.

Continuité. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues. Si $\sum f_n$ converge uniformément, alors la somme S de la série est continue.

\Leftrightarrow Si $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, alors S est continue.

Théorème.

Intégration. Si une série de fonctions continues $\sum f_n$ converge uniformément et a pour somme S , alors la série $\sum F_n$ où $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$, $a \in I$, converge uniformément et a pour somme $T(x)$ avec

$$T(x) = \int_a^x S(t)dt .$$

THE END!



DR SESS ADIABOUAH
UFR SEG, Université FHB

$$\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x$$



$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$