Chap 1: Espaces vectoriels et applicatins linéaires

Pr. Ali KACHA

Université Ibn Tofail,
Faculté des Sciences,
Section SMAI,
Kenitra, 2021-2022

Structure d'espace vectoriel

Définition 1.

On appelle espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, qui est soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$ ou encore un $\mathbb{K}$espace vectoriel, tout ensemble E muni de deux lois:
1. Une loi interne appelée addition, notée " + " telle que $(E,+)$ soit un groupe commuttif.
2. Une loi externe qui à tout couple $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$ fait correspondre un élément de E noté $\lambda.x$, cette loi véirifie les quatre propriétés suivantes:

- $\forall x \in E,\ 1.x = x$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E,\ \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$

les éléments de E s'appellent des vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ sont des scalaires.

Exemples

- $(\mathbb{R}^n, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, pour $n \geq 1$.
- $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Mais, $\mathbb{R}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Mais, $\mathbb{Q}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- L'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fontions numériques définies sur une partie I de $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 2.

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, F une partie non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel (s.s.v) de E si $(F, +, .)$ est aussi un $\mathbb{K}$- espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition 1. *Soit F une partie de E, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*

- $F \neq$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$, $\lambda.x + \mu \in F$.

Exemples

- Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel, $\{0_E\}$ et E sont des sous-espace vectoriel de E.
- Soit $n \in \mathbb{N}*$, $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X], \deg P \leq n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- Pour $n \in \mathbb{N}*$, l'ensemble des polynômes de degré égal à n

Sous-espace vectoriels

Exemples

- L'intersection quelconque d'une famille de s.e.v. d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E est un s.e.v. de E.
- La réunion de deux s.e.v F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E n'est pas toujours un s.e.v de E.

- L'ensemble $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$ des fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Sous-espace engendré par une partie

Définition 3.

Soit $(v_1, ..., v_n)$ un système de vecteurs d'un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E. On dit qu'un vecteur v est combinaison linéaire des vecteurs $v_1, ..., v_n$ s'il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tel que

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n.$$

Les λ_i sont les facteurs de la combinaison linéaire.

Exemples

(i) Le vecteur nul 0_E est combinaison linéaire de toute famille finie de vecteurs de E.
(ii) Dans $E = \mathbb{R}^2$, une combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, 2)$ et $v_2 = (3 - 2)$ est de la forme

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1(1, 2) + \lambda_2(3, -2) = (\lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_1 - 2\lambda_2),\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Théorème 2.

Soit $(v_1, ..., v_n)$ *un système de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*- espace vectoriel E. L'ensemble F des combinaisons linéaires finies des vecteurs* $v_1, ..., v_n$ *est un s.e.v. de E. C'est le plus petit (pour l'inclusion) s.e.v. de E contenant les vecteurs* $v_1, ..., v_n$*.*

On dit aussi que F est le s.e.v. de E engendré par les vecteurs $v_1, ..., v_n$. On note,

$$F = \mathrm{Vect}(v_1, ..., v_n) = \{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n, \lambda_j \in \mathbb{K}\}.$$

Preuve du théorème 2. (i) Soient $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n, v' = \delta v_1 + ... + \delta_n v_n \in F$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors,

$$\alpha v + \beta v' = (\alpha\lambda_1 + \beta\delta_1)v_1 + ... + (\alpha\lambda_n + \beta\delta_n)v_n \in F.$$

Preuve du théorème 2.

(ii) Justifions que F est le plus petit (pour l'inclusion) s.e.v. de E contenant les vecteurs $v_1, ..., v_n$. Soit G un s.e.v. de E qui contient $v_1, ..., v_n$, alors G contient la somme $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ pour tous $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de $\mathbb{K}$. Par suite, G contient F.

Définition 4. Une famille de vecteurs $\{v_1, ..., v_n\}$ de E est dite famille génératrice ou système générateur de E si Vect $(v_1, ..., v_n) = E$. On dit aussi que les vecteurs $v_1, ..., v_n$ engendrent E.

C'est équivalent à ce que

$$\forall v \in E, \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}, v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n.$$

Famille libre, famille liée

Définitions 4.

(1) On dit qu'un système fini de vecteurs $(v_1, ..., v_n)$ de E est libre si

$$\forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ tels que } \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0, \text{ alors } \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0.$$

(2) On dit qu'un système fini $(v_1, ..., v_n)$ de vecteurs est lié s'il n'est pas libre. C'est à dire s'il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0.$$

Propriétés

- Tout vecteur non nul est libre.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute famille (ou système) de vecteurs qui contient le

Famille libre, famille liée

Proposition 2.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Le système $(v_1, ..., v_n)$ est lié si et seulement si l'un au moins des vecteurs v_i s'exprime en combinaison linéaire des autres vecteurs.

Exemples

- La famille $\{(v_1 = (1, 2, 4), v_2 = (3, 7, 0), v_3 = (-1/2, -1, -2)\}$ est liée.
- Justifier que la partie $1, X, X^2, ..., X^n, ...$ est une partie libre de $\mathbb{K}[X]$.
- La partie formée des applications f_n définies par $f_n(x) = e^{nx}, n \in \mathbb{N}$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (récurrence sur n.)

Base et dimension d'un espace vectoriel

Définition 5.

(i) Soit $B = (v_1, ..., v_n)$ un système de vecteurs de E. On dit que B est une base de E si la famille B est à la fois libre et génératrice.
(ii) le cardinal d'une base d'un e.v E s'appelle la dimension de l'e.v E. Rappelons que dans un espace toutes les bases de E admettent un même cardinal.

Théorème 3.

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ un système de vecteurs de E. B est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit d'une manière unique sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, ..., e_n$.
Dans le $\mathbb{K}$-e,v $\mathbb{K}^n$, les vecteurs
$e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), ...$ et $e_n = (0, 0, ..., 1)$ forment une base de cet espace. Alors, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

Espace vectoriel de dimension finie

Définition.

(i) On appelle espace vectoriel de dimension finie tout espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs. Dans le cas contraire, on dit que l'espace vectoriel est de dimension infinie.

(ii) Une famille $\{u_1, ..., u_n\}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une base de E si $\{u_1, ..., u_n\}$ est libre et génératrice.

Exemples

- Les polynômes $1, X, X^2, ..., X^n$ forment une base de l'e.v. $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de bases respectives $(e_1, ..., e_n)$ et $(f_1, ..., f_m)$ alors le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E \times F$ admet pour base $(e_1, O_F), ..., (e_n, 0_F), (0_E, f_1), ..., (0_E, f_m)$.

Remarque. On va voir un lemme fondamental qui nous

Lemme fondamental.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré le système $(e_1, ..., e_n)$ et soit $(f_1, ..., f_m)$ un système de vecteurs de E. Si $m > n$, alors le système $(f_1, ..., f_n)$ est lié.

Preuve.

La preuve se fait par récurrence sur n. Soit $m > n$.
Pour $n = 1$, E engendré par (e_1), si (f_1, f_2) $(m = 2)$ est un système de E. Alors on a $f_1 = \lambda_1 e_1$ et $f_2 = \lambda_2 e_1$. Si l'un au moins des coefficients λ_i est nul, alors (f_1, f_2) est lié. Sinon, on aura

$$\lambda_2 f_1 - \lambda_1 f_2 = 0_E$$

et le système (f_1, f_2) est alors lié.
H. R. On suppose que la propriété est vraie pour $n - 1$.
Justifions la pour n.

Théorème de la base incomplète

Théorème 1.

- Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dim finie admet au moins une base. Plus précisément tout système générateur fini de E contient au moins une base.
- Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre de vecteurs s'appelle la dimension de E, on note $\dim E$.

Preuve: Existence d'une base.

- Soit $(e_1, ..., e_n)$ un système qui engendre E et s'il est est libre, alors il forme une base de E.
- Si $(e_1, ..., e_n)$ est lié, l'un des vecteurs, prenons par exemple e_n, est combinaison linéaire des autres vecteurs. Dans ce cas, on justifie que le système $(e_1, ..., e_{n-1})$ engendre E. On itère le procédé jusqu'à ce qu'on obtiene un système générateur libre. Ctte méthode est constructive.

Théorème de la base incomplète

Preuve du théorème 1.

- Soient $(e_1, ..., e_n)$ et $(f_1, ..., f_m)$ deux bases de e. D'aprś le lemme fondamental, $(e_1, ..., e_n)$ est génŕateur de E et $(f_1, ..., f_m)$ est libre dans E, donc $m \leq n$.
  On a aussi $(e_1, ..., e_n)$ libre et $(f_1, ..., f_m)$ générateur d'où $n \leq m$. Par conséquent, on a $m = n$.

Théorème 2.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. *Tout système libre de E ayant n vecteurs est une base de E.*
2. *Tout système générateur de E ayant n vecteurs est une base de E.*
3. *Soit $F \subset E$ un s.e.v de E. Alors F est de dimension finie et on a $dimF \leq dimE$.*

Remarque. Un autre moyen de former une base est d'utiliser le théorème de la base incomplète suivant.

Théorème de la base incomplète

Théorème 3 : théorème de la base incomplète

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n de base $(e_1, ..., e_n)$ et soit $(f_1, ..., f_m)$ une famille libre. Alors il existe $n - m$ vecteurs parmi les vecteurs $e_1, ..., e_n$ tels que le famille constituée de $(f_1, ..., f_m)$ et de ces $n - m$ vecteurs forme une base de E.

Exemple

$E = \mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4). On veut compléter la famille libre $f_1 = e_1 + 2e_e$ et $f_2 = -e_1 + e_2$ en une base de E. On a :

- (f_1, f_2, e_1) est liée.
- (f_1, f_2, e_2) est liée.
- (f_1, f_2, e_3) est libre. Ensuite, on complète (f_1, f_2, e_3) en une base de E.
- (f_1, f_2, e_3, e_1) est libre.

Rang d'un système fini de vecteurs

Définition 2.

E un e.v. de dim finie n, $S = (u_1, ..., u_p)$ un système de p vecteurs de E ($p \leq n$) On appelle rang du système $(u_1, ..., u_p)$ qu'on note par $\mathrm{rg}(S)$, la dimension de sous-espace vectoriel engendré par ce système.

$$\mathrm{rg}(u_1, ..., u_p) = \dim \mathrm{Vect}\{u_1, ..., u_p\}.$$

Remarque. Le rang d'un système de vecteurs est le nombre maximum de vecteurs libres que l'on peut extraire de ce système.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le système des trois vecteurs

$$u_1 = (1, 0, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0, 0), u_3 = (1, 1, 0, 0).$$

On vérifie que (u_1, u_2, u_3) est lié car $u_3 = u_1 + u_2$.
Deplus,(u_1, u_2) est libre, par conséquent,

$$\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) = \dim \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_p\}$$

$=\mathrm{dim}(\mathrm{Vect}\{\mathrm{u}_1, u_2\}) = 2.$

Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 6.

Soit E un $\mathbb{K}$- e.v., de dimension finie ou non, F et G deux s.e.v. de E. On appelle somme de F et G l'ensemble, noté $F + G$, défini par

$$F + G = \{z = x + y, x \in F, y \in G\}.$$

Proposition 2.

La somme $F + G$ de deux s.e.v d'un e.v. E est un s.e.v de E. Deplus, c'est le plus petit s.e.v de E (au sens de l'inclusion) contenant $F \cup G$.

On vérifie facilement que $F + G$ est un s.e.v de E
Le s.e.v $F + G$ contient F et G, donc il contient $F \cup G$. D'autre part, soit H un s.e.v de E qui contient $F \cup G$, soient $x \in F$ et $y \in G$, alors H contient x et y donc il contient aussi $x + y$. Par suite, H contient $F + G$.

Somme de sous-espaces vectoriels

Remarque.

Si tout élément de $F+G$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $x+y$ avec $x \in F$ et $y \in G$, on dit que la somme $F+G$ est **directe** et on $F \oplus G$.

Proposition 3.

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v, F et G deux s.e.v de E. Il y a équivalence entre:

- La somme $F+G$ est directe.
- $F \cap G = \{0_E\}$.
- Pour tous $x \in E, y \in G$, si $x+y=0_E$ alors $x=y=0_E$.

Rang et somme vectorielle

Remarque

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dim finie. Tout s.e.v F de E admet au moins un supplémentaire G.
Deplus, tous les supplémentaires G ont pour dimension $\dim E - \dim F$.

C'est le théorème de la base incomplète qui nous permet de justifier ceci.

Proposition.

Soient F et G deux s.e.v de dimensions finies d'un espace vectoriel E. Alors $F + G$ est de dim finie et on a:

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Applications linéaires

Définition 7.

Soient E et E' deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f une application de E dans E'. On dit que f est une application linéaire si:

- $f(v+w) = f(v) + f(w), \forall v, w \in E$.
- $f(\lambda v) = \lambda f(v), \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Si deplus, f est bijective, on dit que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

L'ensemble des application linéaire de E dans E' est noté $\mathcal{L}(E, E')$. Si $E = E'$ toute application linéaire de E dans E' est appelée endomorphisme de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Remarque. Soit f une application linéaire de E dans E', 0_E et $O_{E'}$ les vecteurs nuls de E et E' respectivement. Alors, on a

$$f(0_E) = 0_{E'}.$$

Image et noyau d'une application linéaire

Définition 8.

Soit Soit f une application linéaire de E dans E', l'ensemble $f(E) = \{f(v), v \in E\} \subset E'$ est un sous-espace vectoriel de E' appelé image de f et il est noté Imf.

Proptiétés

(a) Si F est un s.e.v de E, f une application linéaire de E dans E', alors $f(F)$ est un s.e.v de E'. C'est à dire que l'image directe d'un s.e.v de E est un s.e.v de E'.

(b) Si F' est un s.e.v de E', f une application linéaire de E dans E', alors l'image réciproque de F', $f^{-1}(F') = \{v \in E, f(v) \in F'\}$ est un s.e.v de E.

Image et noyau d'une application linéaire

Définition du noyau.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$, le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E, il est noté Ker$f$.

$$\text{Ker} f = \{v \in E, f(v) = 0_{E'}\}.$$

C'est l'image réciproque de s.e. v $\{O_{E'}\}$.

Proposition.

Soit f une application linéaire de E dans E',alors on a

- f est injective si et seulement si ker f $= 0_E$.
- Si f est injective et le système $(v_1, ..., v_n)$ est libre dans E alors le système $(f(v_1), ..., f(v_n))$ est libre dans E'.
- Si f est surjective et le système $(v_1, ..., v_n)$ est générateur dans E alors le système $(f(v_1), ..., f(v_n))$ est générateur dans E'.

Théorème de la dimension

Définition et propriété

Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dim finie, f une application linéaire de E dans E'. Alors Im f est un s. e. v de E' de dimension finie. La dimension de Im f est appelée le rang de f. rg$f =$ Im f.

En effet, si $(e_1, .., e_n)$ est une base de E alors la famille $(f(e_1), .., f(e_n))$ engendre Im f. donc Im f est de dim finie avec dim Im $f \leq n$.

Théorème de la dimension.

Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, E')$. Alors, on a

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker f}) + \dim(\text{Im f}).$$