

UNIVERSITE IBN TOFAIL
Faculté des Sciences
Département de Physique
Kénitra

COURS DE PHYSIQUE III

ELECTROSTATIQUE
&
ELECTROCINETIQUE
Filières SMA&SMI

Année universitaire 2019-2020

M. HAB1BI

ELECTROSTATIQUE

Chap 1. Charges et champs.

I- Phénomène d'électrisation et charges électriques.

1 Phénomène d'électrisation.

a- Electrification par frottement:

On sait depuis l'antiquité que l'ambre, qui est une résine fossile, frotté avec de la laine acquiert la propriété d'attirer les corps légers. Pourtant ce n'est qu'à la fin XVI^e siècle qu'on étudia ce phénomène en détail et établit que beaucoup d'autres substances possédaient la même propriété. On proposa d'employer le terme électrisé (dérivé de l'électron qui est le mot grec pour ambre) pour désigner les corps qui sont capables, après être frottés, d'attirer comme l'ambre les corps légers. Actuellement, on dit que les corps se trouvant dans un tel état portent des charges électriques et on donne à ces corps le nom de corps chargés.

Exemples :

On constate fréquemment ce phénomène dans les opérations suivantes:

- * Un stylo frotté sur un vêtement attire des petits morceaux de papier.
- * Crépitements quand des tissus synthétiques sont froissés ou glissent l'un sur l'autre.
- * Cheveux secs qu'on peigne.
- * Les charges accumulées sur une voiture qui roule et qui proviennent du frottement des pneus sur la route.

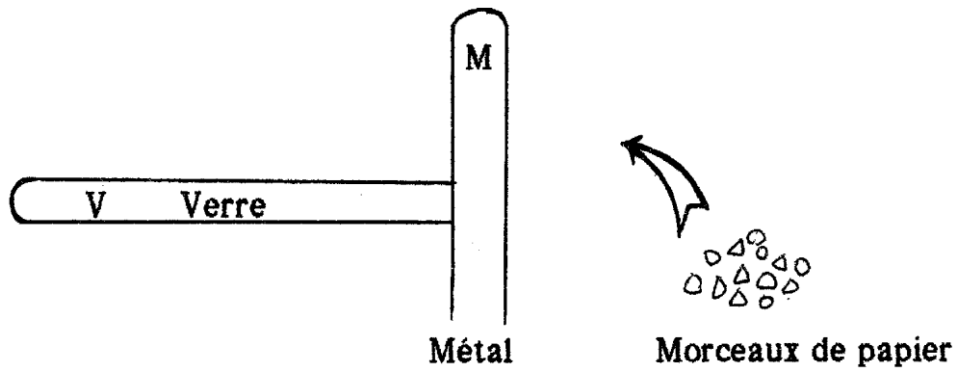
b- Electrification par contact:

En mettant en contact une baguette électrisée par frottement avec une baguette non électrisée, c'est-à-dire neutre primitivement, cette dernière devient elle-même électrisée.

c- Electrification par influence:

Un corps conducteur placé au voisinage d'un corps électrisé s'électrise. Il revient à l'état neutre lorsqu'on l'éloigne du corps influençant.

2- Isolants et conducteurs.



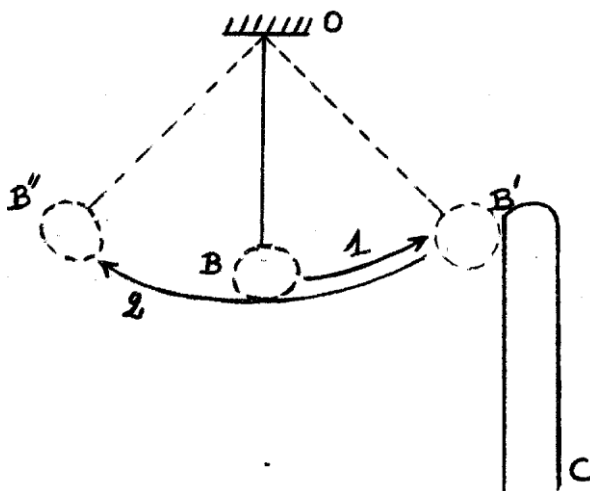
La plaque métallique M frottée, tenue par la tige isolante V attire les morceaux de papier.

Le corps M frotté attire les morceaux de papier. Si on touche le corps M par le doigt pendant ou après le frottement, celui-ci n'attire plus les morceaux de papier, le frottement étant fait sur une extrémité et le toucher sur l'autre extrémité. Le métal est un conducteur, par contre le verre est un isolant.

3- Charges électriques positive et négative.

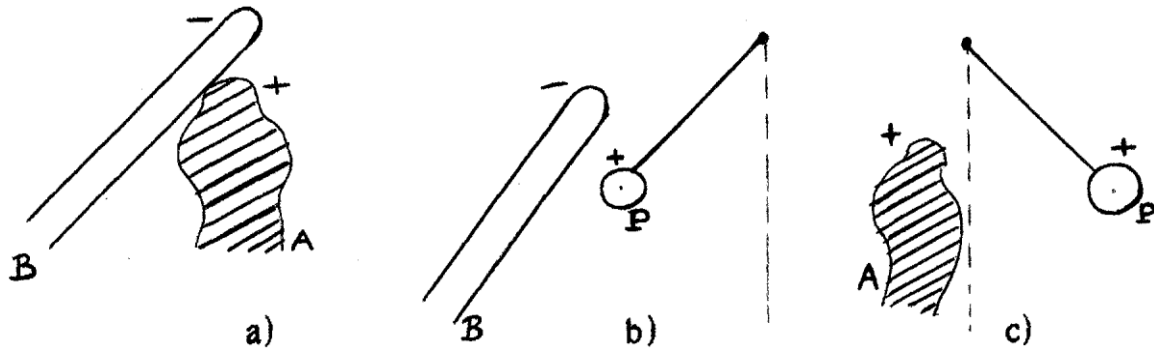
Expériences:

*La boule métallisée B, suspendue par un fil isolant en soie et primitivement à l'état neutre, est d'abord attirée par la tige de verre frottée C : elle vient en B' et prend, par contact, une partie de la charge de C elle est alors repoussée jusqu'en B''.



Attraction (1) et répulsion (2)
électriques d un pendule

*Un bâton d'ébonite et le morceau de drap qui a servi à le frotter exercent l'un une répulsion, l'autre une attraction sur un même corps électrisé :



Le bâton B et le chiffon A électrisés par frottement l'un contre l'autre, exercent des forces de signes contraires sur un même pendule électrisé P.

Donc il existe deux espèces de charges électriques et deux seulement, les unes sont dites **positives** et les autres **négatives**, et qu'il y a attraction entre charges de signes contraires, répulsion entre charges de même signe.

La convention fixant le signe de chacune des deux espèces de charges est **arbitraire**, mais universelle.

4- Quantités d'électricité. Principe de conservation de l'électricité.

Définitions

a) Deux charges sont dites égales quand elles produisent sur une même autre charge, à la même distance, des forces égales en grandeur et signe, elles sont opposées quand ces forces sont égales et de sens contraires.

b) Une charge est égale à la somme algébrique de deux autres quand la force qu'elle produit est la résultante de celles que produit séparément ces dernières, placées au même endroit. En particulier, deux charges opposées placées simultanément se neutralisent.

Les charges électriques sont donc des grandeurs mesurables. On les appelle aussi quantités d'électricité (symboles Q et q). Leur unité dans le Système International (S.I) est le Coulomb (C). La charge élémentaire est celle d'un électron :

$$e^- = -1,6.10^{-9} \text{ C}$$

Dans le cas d'un système isolé, l'expérience montre que l'apparition d'une charge d'un certain signe est toujours accompagnée de celle d'une charge de signe opposé, égale en valeur absolue. La somme algébrique des charges existantes est donc constante, c'est là le principe de conservation de l'électricité, énoncé dès 1750, et qui s'est révélé toujours rigoureusement valable.

II- Interaction entre charges au repos. Loi de Coulomb.

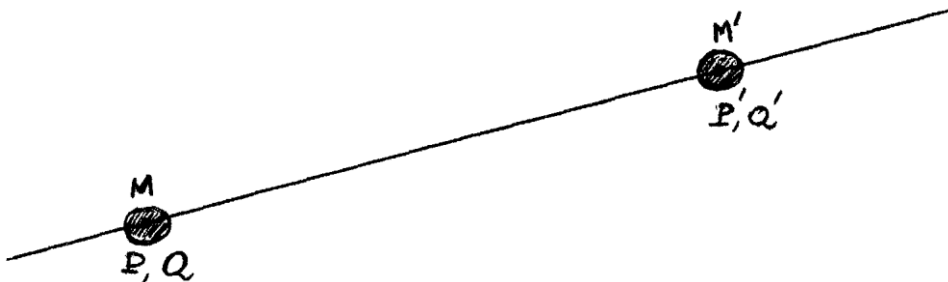
1- Module de la force électrostatique F.

En s'inspirant de la loi de Newton relative à la gravitation :

$$F = G.m.m'/r^2$$

Coulomb a émis l'hypothèse que toute particule assimilable à un point P, et portant une charge électrique Q , subit de la part de toute autre particule P', portant une charge Q' , une force répulsive ou attractive, selon que Q et Q' sont ou non de mêmes signes, de module :

$$F = K_e.Q.Q'/r^2$$



-5-

Q et Q' : charges ponctuelles au repos.

$r = |MM'|$: distance entre les deux charges.

K_e est une constante positive qui dépend des unités choisies.

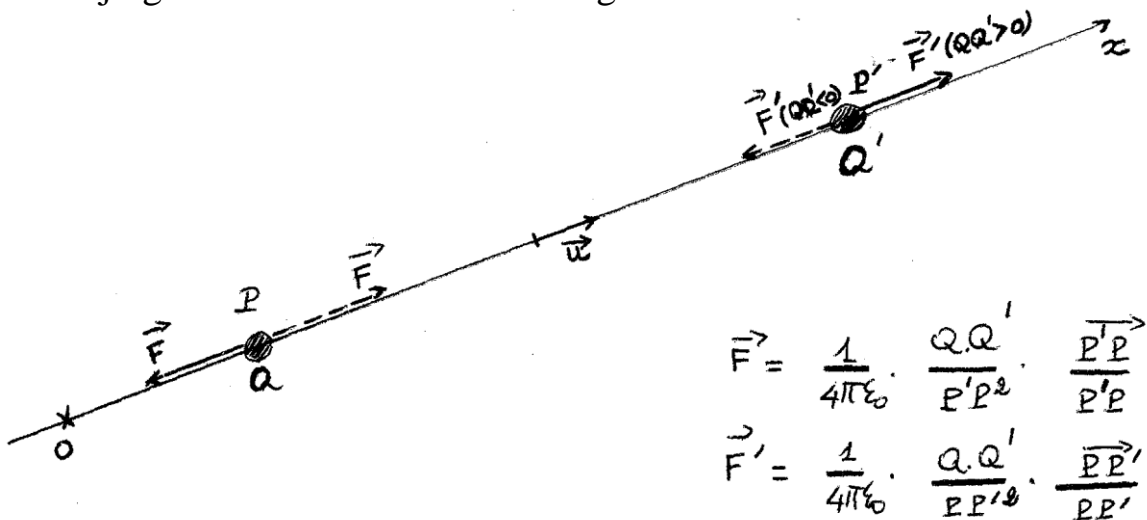
Dans le Système International (S.I) : $K_e = 1/4\pi\epsilon_0 = 9.10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$ (dans le vide)

avec :

$$\epsilon_0 = 8,85.10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 = 1/36\pi 10^9 \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

2- Expression vectorielle de la force électrostatique \vec{F} :

On choisit un sens, donc un vecteur unitaire \vec{u} colinéaire avec la droite joignant les axes des deux charges.



\vec{F} est la force électrostatique exercée par Q' sur Q .

\vec{F}' est la force électrostatique exercée par Q sur Q' .

$\vec{u} = \vec{PP}' / PP' = \vec{r} / r$ est le vecteur unitaire porté par l'axe Ox .

La somme:

$$\vec{F} + \vec{F}' = \vec{0}$$

montre l'égalité de l'action et de la réaction.

* Si Q et Q' sont de **même signe**, alors $QQ' > 0$ et \vec{F} est dirigée de P' vers P (**répulsion**).

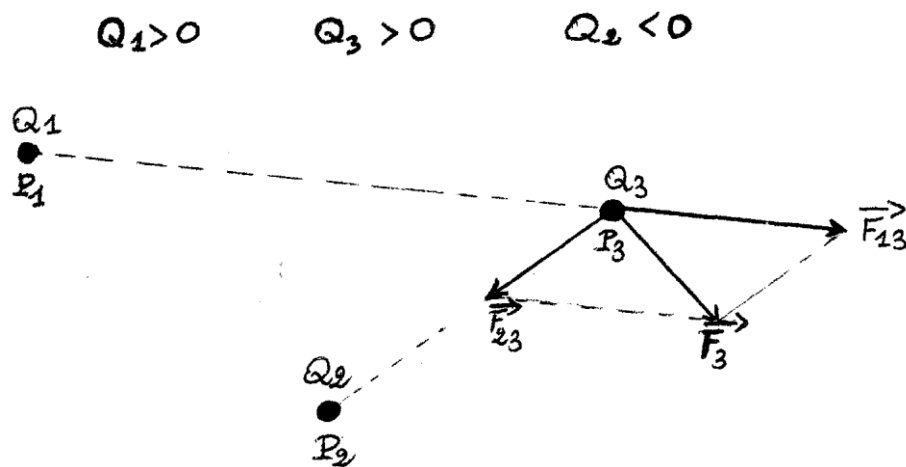
* Si Q et Q' sont de **signes contraires**, alors $QQ' < 0$ et \vec{F} est dirigée de P vers P' (**attraction**).

3- Système de charges ponctuelles au repos.

La force avec laquelle interagissent deux charges, n'est pas modifiée par la présence d'une troisième charge.

La force qui agit sur une charge quelconque d'un système est la somme vectorielle des forces que chaque charge, prise séparément, exercerait sur cette charge en ce point.

Exemple :



La force qu'exerce Q_1 sur Q_3 est : $\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_3}{P_1 P_3^2} \frac{\overrightarrow{P_1 P_3}}{P_1 P_3}$

La force qu'exerce Q_2 sur Q_3 est : $\vec{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2 Q_3}{P_2 P_3^2} \frac{\overrightarrow{P_2 P_3}}{P_2 P_3}$

Le système de charges Q_1 et Q_2 exerce la force \vec{F}_3 sur Q_3 telle que :

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

D'une façon générale :

$$\vec{F}_j = \sum_1^n \vec{F}_{ij}$$

\vec{F}_j est la force exercée sur la charge j par l'ensemble des autres charges.

4- Distribution de charges. Densité de charge.

La charge Q d'un corps étant une grandeur algébrique mesurable, on peut admettre qu'elle est la somme de chacune des charges élémentaires q_i :

$$Q = \sum_i q_i$$

A la limite on utilise la notion de densité de charge qui permet une représentation quantitative des différentes distributions de charges que l'on peut rencontrer.

* Pour une électrisation **superficielle** (cas des conducteurs) :

$$\text{Densité surfacique : } \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$$

* Pour une électrisation **répartie dans un volume** (cas des diélectriques):

$$\text{Densité volumique : } \rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$$

* Pour une électrisation répartie **le long d'un fil** :

$$\text{Densité linéique : } \lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$$

Si l'électrisation est **uniforme**, c'est-à-dire si la densité de charge est **constante** quel que soit le point considéré, on a :

$$Q_s = \sigma \cdot S$$

$$Q_v = \rho \cdot V$$

$$Q_l = \lambda \cdot l$$

III- Le champ électrostatique:

Introduction

Les charges électriques ont un rôle :

- actif en exerçant des forces sur les autres charges;
- passif en subissant les forces exercées par les autres charges.

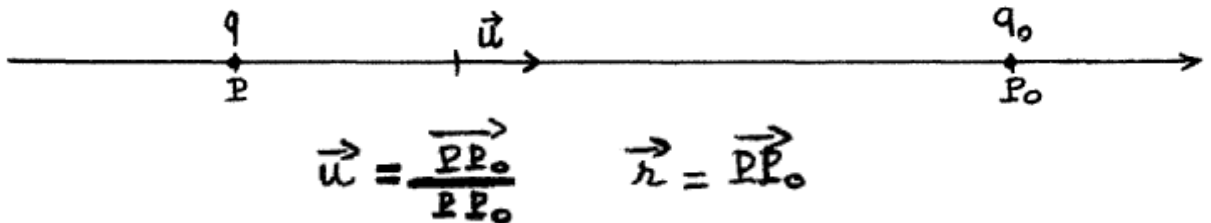
Physiquement, ces deux aspects sont indissociables. Toutefois, dans le but de faciliter l'étude des phénomènes électrostatiques on ne s'intéressera qu'au rôle actif d'une charge q .

Dans l'énoncé de la loi de Coulomb, les forces électrostatiques apparaissent comme des actions à distance sans connexion matérielle entre les corps qui y participent.

1- Champ créé par une charge ponctuelle.

a- Calcul de champ \vec{E}

Soient deux charges ponctuelles $q > 0$ et $q_0 > 0$ placées en deux points P et P₀:



La force \vec{F} qu'exerce q sur q_0 est:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_0}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_0}{r^2} \cdot \vec{u}$$

En divisant \vec{F} par q_0 on obtient une quantité vectorielle qui ne dépend pas de q_0 :

$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{u}$$

On appelle cette quantité vectorielle vecteur champ électrostatique que l'on note \vec{E} :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{u}$$

\vec{E} ne dépend donc que de la charge q qui le produit et de la distance à laquelle il est produit. **La source du champ électrostatique \vec{E} est la charge q .**

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \text{ (N/C)}$$

Unité :

Donc si, dans une région de l'espace où règne un champ électrostatique \vec{E} , on place une charge q_0 alors on a :

$$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}$$

\vec{F} est la force électrostatique qui s'exerce sur la charge q_0 .

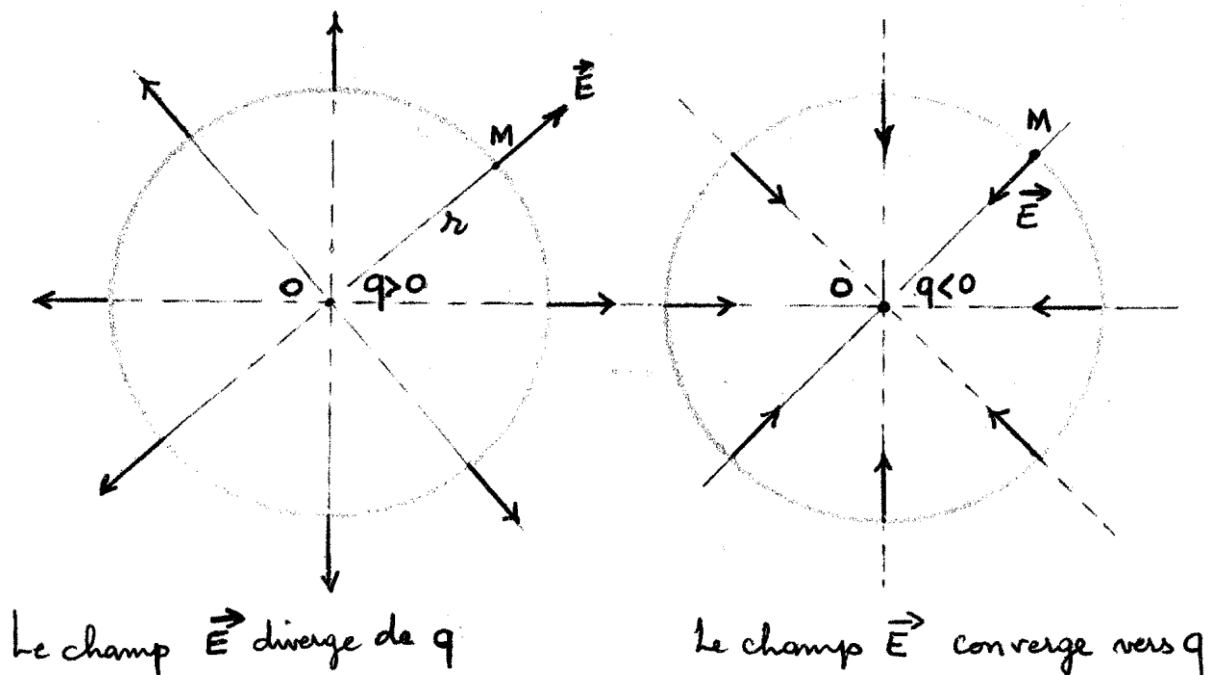
Remarques:

- La direction de \vec{E} passe par le point où est placée la charge q **qui le crée : champ radial.**

- Le module de \vec{E} est le même à égale distance de q : **champ à symétrie sphérique.**

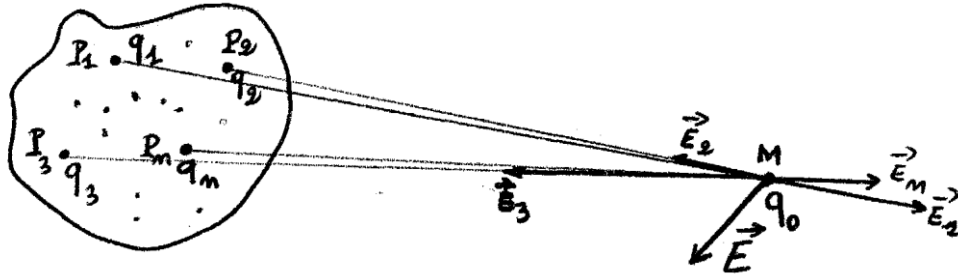
-Le sens de \vec{E} est celui de $q \cdot \vec{r}$.

b- Représentation du champ:



2- Système de charges:

Considérons un système de charges ponctuelles $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$ et plaçons une charge q_0 positive à proximité de ce système :



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^m \vec{E}_i$$

avec :

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

$$\vec{r}_i = \vec{P}_i \cdot \vec{M}$$

La force \vec{F}_0 qu'exerce le système de charges $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$ sur q_0 est:

$$\vec{F}_0 = \sum_{j=1}^m \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0 \cdot q_j}{r_j^2} \cdot \frac{\vec{P}_j \cdot \vec{M}}{r_j \cdot M}$$

En divisant \vec{F}_0 par q_0 on obtient une quantité vectorielle qui ne dépend que de la structure du système original de charges $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$. Cette quantité est le champ électrostatique dû au système de charges précédent et dont l'expression est:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_j}{r_j^2} \cdot \frac{\vec{P}_j \cdot \vec{M}}{r_j \cdot M}$$

Ce champ électrostatique est en fait la somme vectorielle de tous les champs électrostatiques créés par chacune des n charges du système de charges $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$. Celui-ci s'exprime alors comme :

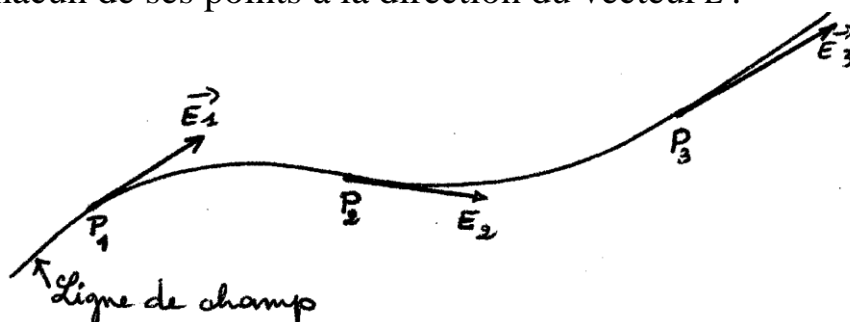
$$\vec{E} = \sum_{j=1}^m \vec{E}_j$$

La source du champ électrostatique est le système de charges $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$.

3- Lignes de champ. Surfaces de niveau. Tubes de champ.

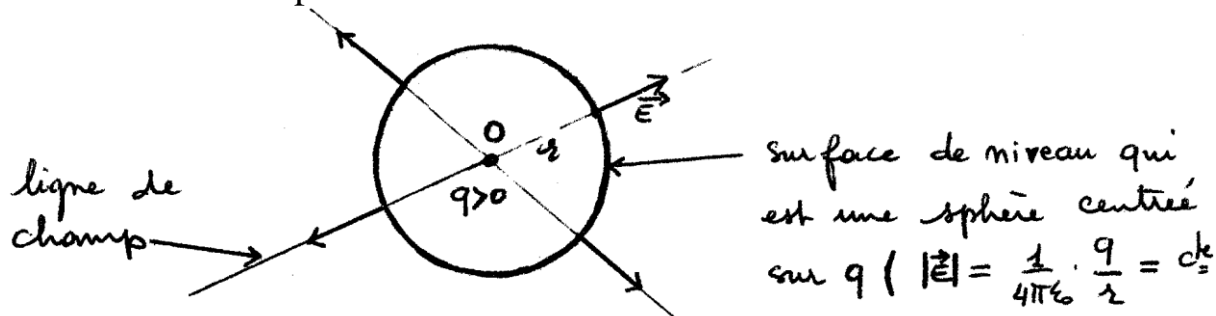
a- Lignes de champ:

On appelle ligne de champ toute courbe qui reste constamment tangente en chacun de ses points à la direction du vecteur \vec{E} .



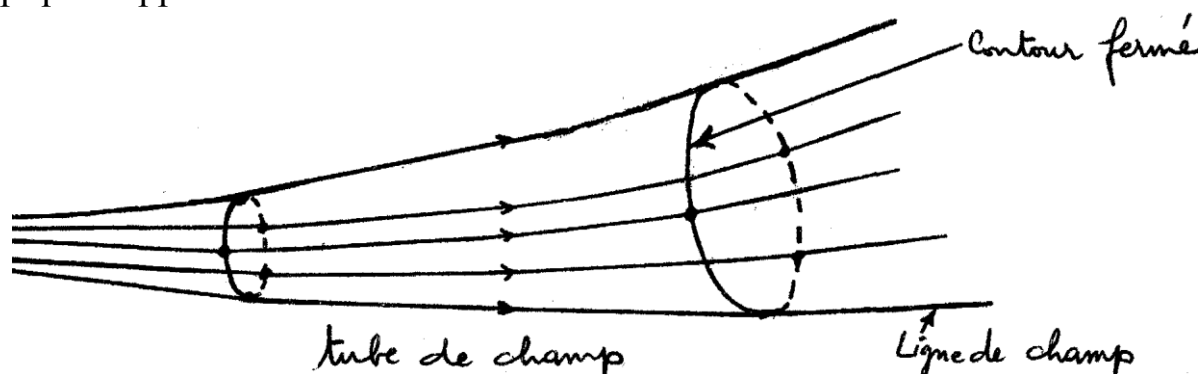
b- Surfaces de niveau:

On appelle surface de niveau tous les points qui correspondent à une même intensité de champ.



c- Tubes de champ:

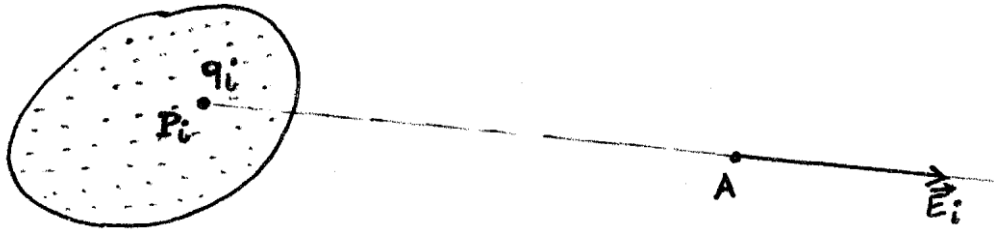
Un tube de champ est la surface formée par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé.



Un champ de vecteurs est dit uniforme si, en tous les points de la région considérée, les vecteurs ont même grandeur, même direction et même sens.

4- Calcul du champ électrostatique dû à des charges réparties.

Soit une distribution continue de charges, le champ dû à celle-ci est la somme des champs dus à chaque élément de charge pris suffisamment petit pour qu'il puisse être considéré comme ponctuel.



On prend autour de chaque point P_i de la distribution un élément de charge q_i . Le champ élémentaire \vec{E}_i produit par l'élément de charge q_i est :

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_i$$

avec:

$$q_i = \Delta q$$

$$r_i = |\vec{P}_i A|$$

$$\vec{u}_i = \frac{\vec{P}_i A}{P_i A}$$

En A le champ résultant est :

$$\vec{E}_A = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta q}{r_i^2} \cdot \vec{u}_i$$

A la limite, lorsque Δq est suffisamment petit, c'est-à-dire Δq tend vers **zéro**, l'expression discrète du champ précédente s'écrit sous la forme d'une intégrale telle que :

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{dq}{r^2} \cdot \vec{u}$$

Ainsi pour les trois distributions on aura :

Distribution volumique : $dq = \rho \cdot dv$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint_V \frac{\rho dv}{r^2} \cdot \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint_V \rho \frac{\vec{r}}{r^3} dv$$

Distribution surfacique : $dq = \sigma \cdot dS$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iint_S \frac{\sigma ds}{r^2} \cdot \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iint \sigma \frac{\vec{r}}{r^3} ds$$

Distribution linéique : $dq = \lambda \cdot dl$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_l \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_l \lambda \frac{\vec{r}}{r^3} dl$$

Résumé du chapitre 1:

Le frottement fait apparaître des **charges électriques**. Les corps frottés sont dits **électrisés**.

Un corps dans lequel peuvent se déplacer librement les charges électriques sont dits **conducteurs**.

Un corps dans lequel les charges restent localisées aux points où elles ont été développées sont dits **isolants** ou **diélectriques**.

Il y a deux électricités: **positive** et **négative**. Celles de même espèce se repoussent et celles d'espèces différentes s'attirent.

Dans le vide, la loi **de coulomb** est :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

La charge électrique totale **d'un système isolé**, c'est-à-dire la somme algébrique des charges positives et négatives, présentes à un instant quelconque, reste toujours constante (**principe de la conservation de charges ou de l'électricité**).

L'expression vectorielle d'un champ électrostatique dans une région où se trouve une charge ponctuelle q est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

r est la distance entre la charge q et le point considéré du champ.

Une charge q' se trouvant dans une région où règne un champ électrostatique \vec{E} subit la force électrostatique :

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

Pour un système de charges $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$ le champ électrostatique résultant en un point de l'espace est :

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i$$

Pour une distribution continue de charges on a:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho \frac{\vec{r}}{r^3} dV \quad (\text{répartition volumique})$$

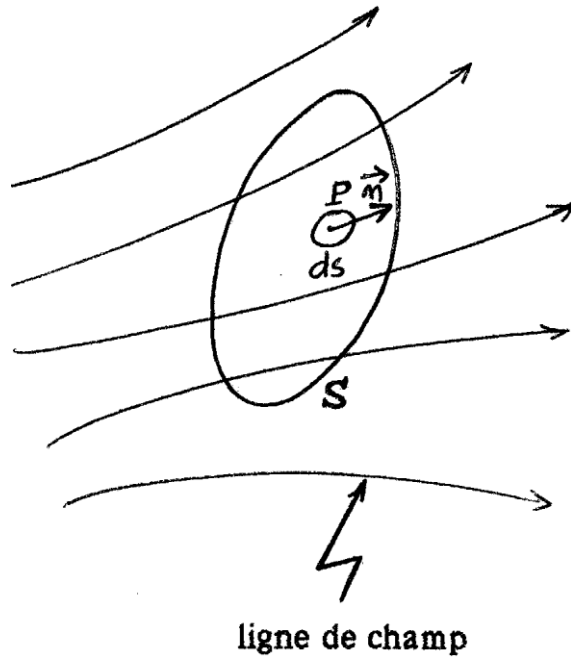
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma \frac{\vec{r}}{r^3} dS \quad (\text{répartition surfacique})$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \lambda \frac{\vec{r}}{r^3} dl \quad (\text{répartition linéique})$$

Chap.2: Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss

I- Définition du flux de champ électrostatique.

Considérons une région où règne un champ électrostatique quelconque et, dans cette région, une surface arbitraire fermée formant une sorte de ballon de forme quelconque :



Autour de chaque point P de la surface S on détermine un élément de surface dS orienté par la normale extérieure \vec{n} . Le vecteur $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ représente le vecteur élément d'aire orientée.

1- Flux à travers une surface élémentaire dS :

On définit le flux de \vec{E} à travers la surface élémentaire dS par :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$\vec{E} \cdot d\vec{S}$ est le produit scalaire de \vec{E} par $d\vec{S}$.

2- Flux à travers toute la surface S :

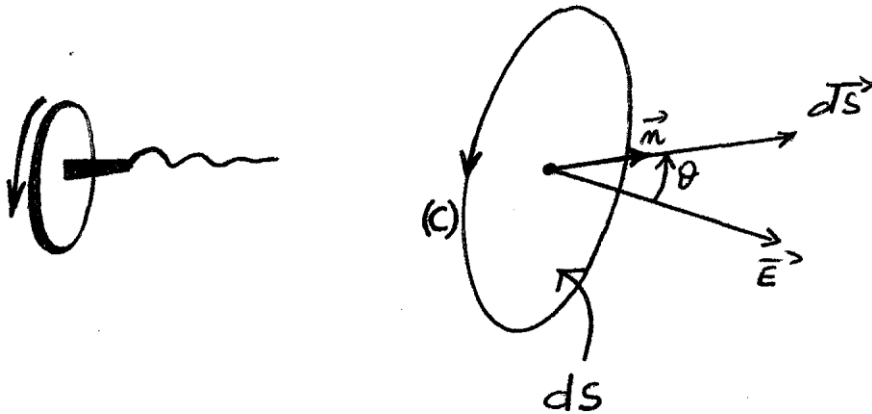
Le flux de \vec{E} à travers toute la surface S est :

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Remarque :

* Dans le cas d'une surface fermée, la normale positive est celle dirigée vers l'extérieur.

* Si la surface n'est pas fermée on peut l'orienter en définissant un sens au contour (C) sur lequel repose celle-ci : tourné dans le sens de (C), le tire-bouchon progresse dans le sens de \vec{n} (Règle du tire-bouchon de Maxwell) :



Règle du tire-bouchon de Maxwell

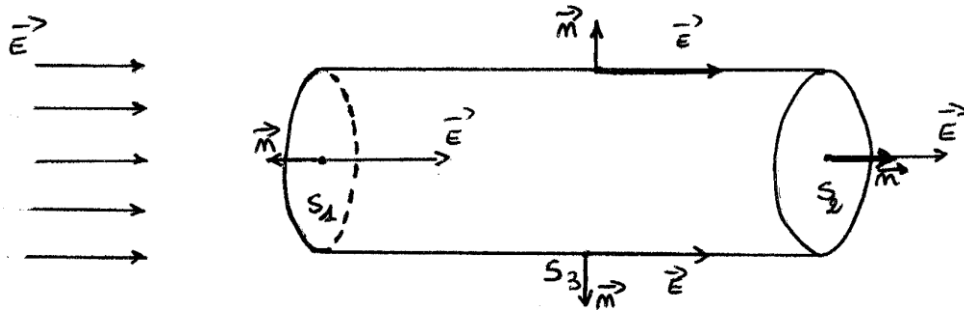
$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos\theta$$

- | | | |
|-----------------------|--------|-------------|
| Si θ est aigu | =====> | $d\phi > 0$ |
| Si $\theta = \pi/2$ | =====> | $d\phi = 0$ |
| Si θ est obtus | =====> | $d\phi < 0$ |

II- Exemples de calcul de flux.

1- Champ uniforme à travers une région dépourvue de charges.

Le champ électrostatique étant uniforme, le tube de champ est un cylindre :



La surface fermée du cylindre est $S = S_1 + S_2 + S_3$; S_3 étant la surface latérale.

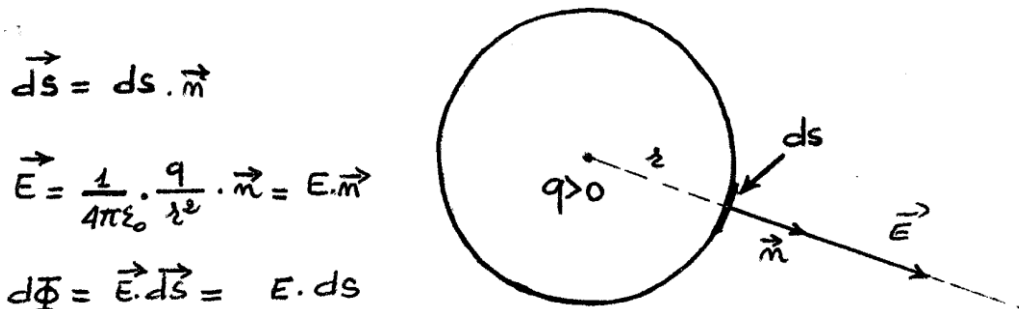
Le flux total est : $\Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} + \Phi_{S_3} = 0$ car $S_1 = S_2$ et :

$$\Phi_{S_3} = 0 \text{ puisque } \theta = \pi/2.$$

$\Phi_{S_1} = - E.S_1$, négatif puisque \vec{E} et \vec{n} sont de sens opposés, c'est un flux entrant.

$\Phi_{S_2} = + E.S_2$, positif puisque \vec{E} et \vec{n} sont colinéaires, c'est un flux sortant.

2- Flux à travers une sphère centrée sur une charge ponctuelle q.



$$d\vec{s} = ds \cdot \vec{n}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{n} = E \cdot \vec{n}$$

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot ds$$

L'élément de surface d'une sphère de rayon r est :

$$ds = r d\theta \cdot r \sin\theta d\varphi = r^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

Les variations de φ et de θ sont respectivement de 0 à 2π et de 0 à π .

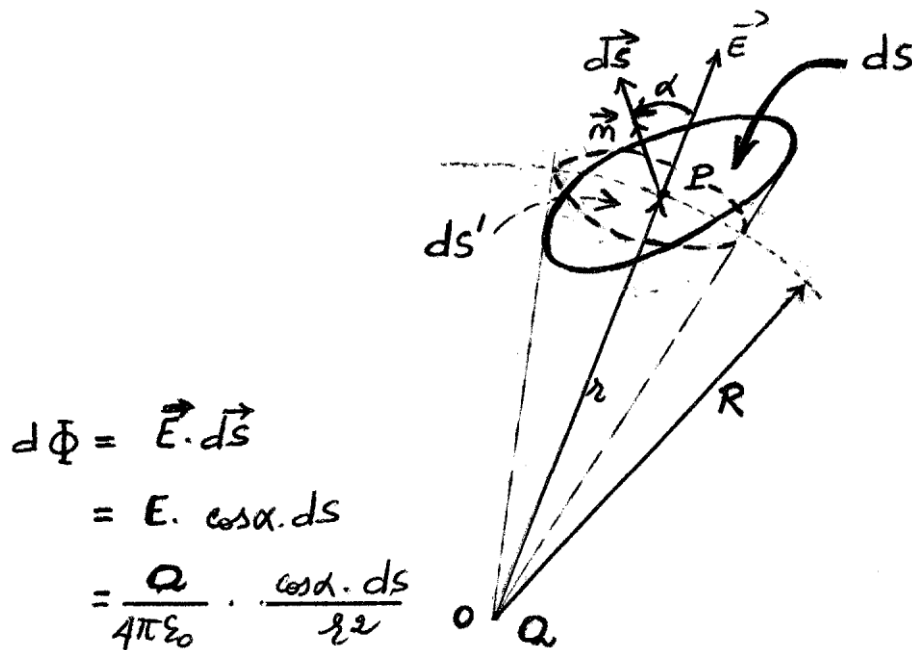
$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

III- Théorème de GAUSS.

1-Notion d'angle solide:

Si le champ électrostatique \vec{E} en un point P est créé par une charge ponctuelle Q placée en O à la distance r de P, le flux de \vec{E} à travers une surface d'aire dS entourant P a pour valeur (dans le vide) :



$$\begin{aligned} d\Phi &= \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= E \cdot \cos\alpha \cdot dS \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot dS}{r^2} \end{aligned}$$

On appelle angle solide élémentaire la quantité $d\Omega = \cos\alpha \cdot dS/r^2$. C'est la valeur de l'angle sous lequel on voit de O la *face négative* de dS. Si dS' est la projection de dS sur la sphère de rayon $r=R$, alors $\cos\alpha \cdot dS = dS'$. Dans ce cas on a:

$$d\Omega = dS'/R^2$$

L'angle solide sous lequel on voit l'espace est:

$$\Omega = S'/R^2 = 4\pi R^2/R^2 = 4\pi$$

Pour la moitié de l'espace on a:

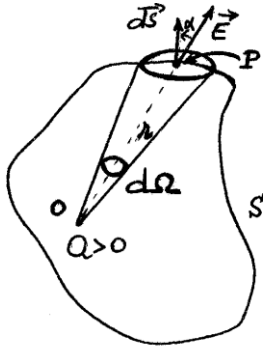
$$\Omega = 2\pi$$

Remarque:

Si on prend $r = 1$, on trouvera exactement les mêmes résultats que ci-dessus.

2- Application : calcul du flux de \vec{E} à travers une surface fermée S quelconque.

i- La surface S entoure la charge Q :

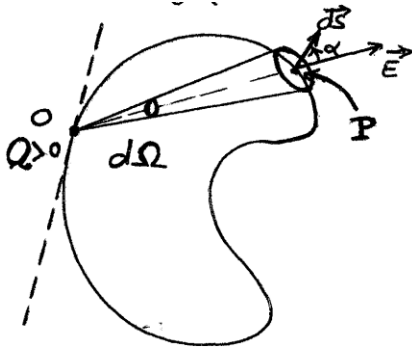


$$d\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot ds}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\Omega$$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iint_{\text{espace}} d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi$$

$$\boxed{\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

ii- La charge Q se trouve sur la surface S :

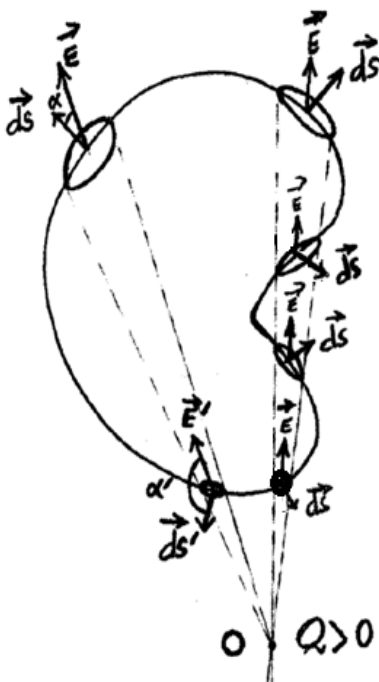


$$d\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\Omega$$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iint_{\frac{1}{2}\text{espace}} d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi$$

$$\boxed{\Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0}}$$

iii- La surface S n'entoure pas la charge Q :



$$d\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot ds}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\Omega$$

$$d\Phi_{E'} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\alpha' \cdot ds'}{r'^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\Omega'$$

$$\text{or } d\Omega = -d\Omega'$$

$$\Rightarrow d\Phi = d\Phi_E + d\Phi_{E'} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi = 0}$$

3- Énoncé du théorème de Gauss.

Théorème: Le flux électrostatique sortant d'une surface *fermée* est égal au produit par $1/\epsilon_0$ de la somme algébrique des charges intérieures, à laquelle on ajoute la demi-somme des charges superficielles:

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \left[\sum Q_i + \frac{1}{2} \cdot \sum Q_s \right]$$

Dans le cas où les charges sont réparties à l'intérieur d'un volume avec une densité ρ ou sur la surface avec une densité σ , la relation ci-dessus devient :

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \left[\iiint_{\text{volume}} \rho \, dV + \frac{1}{2} \cdot \iint_{\text{surface}} \sigma \, ds \right]$$

Remarque :

Pour utiliser le théorème de GAUSS, il faut que la configuration du système de charges et principalement sa symétrie soient suffisamment simples pour permettre d'utiliser une surface à travers laquelle le flux sortant puisse être évalué facilement.

IV- Le champ électrostatique est à flux conservatif.

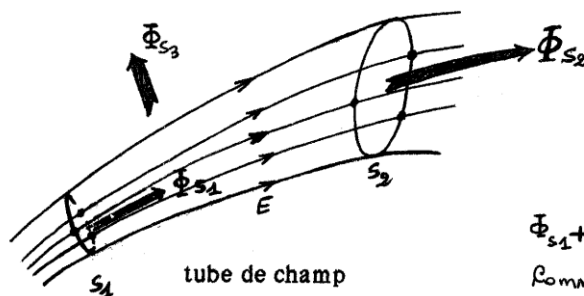
Lorsque le flux d'un vecteur est nul à travers toute surface fermée, dans une certaine région de l'espace, soit :

$$\oiint_S \vec{\nabla} \cdot d\vec{s} = 0,$$

ce flux est dit conservatif dans cette région.

Exemple : Le flux électrostatique est conservatif, dans le vide, pour toute région à l'intérieur de laquelle il n'y a pas de charges électriques.

Démonstration: Considérons une portion d'un tube de champ,



$$\begin{aligned} \Phi_{S1} + \Phi_{S2} + \Phi_{S3} &= 0 \\ \text{Comme } \Phi_{S3} &= 0, \text{ alors} \\ \Phi_{S1} &= -\Phi_{S2} \end{aligned}$$

Autrement:

$$\vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = 0 \Rightarrow E_1 \cdot dS_1 = E_2 \cdot dS_2$$

A travers toutes les sections d'un tube de champ, le flux du champ électrostatique est invariant, c'est-à-dire: $\mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 = \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = \dots = \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{S}_n$.

Remarque :

Si le vecteur \vec{E} a une direction constante, les lignes de champ sont des droites parallèles, les tubes de champ des cylindres et ainsi $dS_1 = dS_2$. Par la suite $E_1 = E_2$, le champ est donc uniforme, c'est-à-dire a un module constant.

V- Divergence d'un vecteur. Théorème de GREEN.

Le flux total d'un vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur étendue au volume limité par cette surface :

$$\Phi = \oint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{V} \cdot dv$$

Cette formule traduit le théorème de Green.

Il en résulte que *la condition nécessaire et suffisante* pour que le flux d'un vecteur \vec{V} à variation continue dans une certaine région de l'espace y soit conservatif est que la divergence de \vec{V} y soit partout nulle.

Remarques :

- 1- Le théorème de Green permet de remplacer une intégrale de surface (flux) par une intégrale de volume, en faisant intervenir la divergence.
- 2- La valeur de la divergence est indépendante du choix des axes de coordonnées.
- 3- La divergence d'un vecteur qui est le rotationnel d'un autre vecteur est identiquement nulle : $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = 0$.

VI- Expression locale du théorème de GAUSS.

Appliquons le théorème de GREEN et le théorème de GAUSS au flux électrostatique à travers une surface fermée, à l'intérieur de laquelle existe une densité volumique de charges électriques ρ :

$$\begin{aligned} \text{T h. de GREEN:} \quad \phi &= \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} - \iiint_{\sigma'} \text{div} \vec{E} \cdot d\vec{v} & (1) \\ \text{T h. de GAUSS:} \quad \phi &= \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} - \iiint_{\sigma'} \rho \cdot d\vec{v} / \epsilon_0 & (2) \end{aligned}$$

De (1) et (2) on tire:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{expression locale du Théorème, de Gauss})$$

et $\text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho$ (équation de Poisson)

Résumé du chapitre 2:

Le flux du champ électrostatique \vec{E} à travers une surface élémentaire dS est calculé par:

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} \text{ et } \phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Théorème de CAUSS Le flux électrostatique sortant d'une surface fermée est égal au produit par $1/\epsilon_0$ de la somme algébrique des charges intérieures, à laquelle on ajoute la demi-somme des charges superficielles:

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \left[\sum q_i + \frac{1}{2} \cdot \sum q_s \right] \quad (\text{distribution discrète})$$

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \left[\iiint_V \rho dv + \frac{1}{2} \cdot \iint_S \sigma ds \right] \quad (\text{distribution continue})$$

(distribution discrète)

(distribution continue)

Relation locale du théorème de GAUSS:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

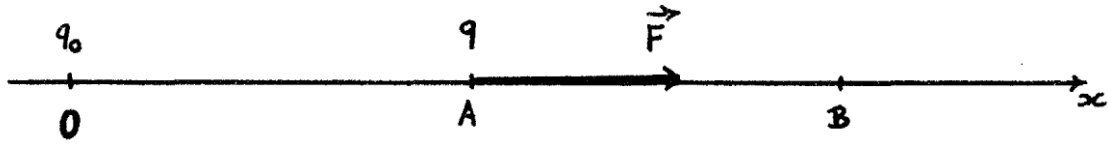
Le flux électrostatique est conservatif, dans le vide, pour toute région à l'intérieur de laquelle il n'y a pas de charges électriques:

$$\Phi = 0 \text{ ou } \text{div} \vec{E} = 0.$$

Chap3: Le potentiel électrostatique

I- Travail des forces électrostatiques.

Soit un système de deux charges positives (q_0 et q). On place q en A à la distance $r = OA$ de q_0 , q_0 étant maintenue fixe en O.



système de deux charges

Le système des deux charges (q_0, q) possède de l'énergie potentielle puisqu'en libérant q , q s'écartera de q_0 sous l'action de la force électrostatique. Ce faisant, l'énergie du système diminuera et tendra vers zéro en même temps que les forces de Coulomb lorsque la distance tendra vers l'infini. Pendant ce déplacement la force électrostatique \vec{F} aura effectué un travail moteur ou positif.

Par définition on dit que la diminution de l'énergie potentielle du système est égale au travail des forces intérieures.

Soit :

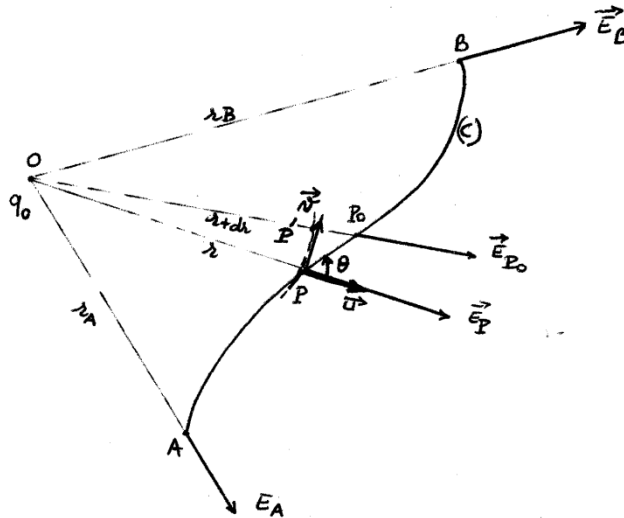
$$\begin{aligned} W_A^B &= \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{x} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_A^B -\vec{F}_i \cdot d\vec{x} = - \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{x} \\ &= \int_B^A \vec{F}_i \cdot d\vec{x} = U_A - U_B \end{aligned}$$

Comme $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, W_A^B est la variation de l'énergie potentielle de la charge q lorsqu'elle se déplace dans le champ dû à q_0 :

$$W_A^B = q \cdot \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{x} = U_A - U_B$$

II- Circulation du champ électrostatique.

Prenons deux points A et B quelconques dans la région où existe le champ électrostatique produit par q_0 placée en O.



L'intégrale curviligne $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ s'appelle circulation de \vec{E} suivant un certain parcours qui va de A à B (courbe C). On la note par :

$$\mathcal{C} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{ou} \quad \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{ou} \quad \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Considérons un trajet élémentaire $\vec{PP}_0 = d\vec{l}$ suffisamment petit pour être considéré comme rectiligne. Exprimons la circulation élémentaire du vecteur \vec{E} dans le déplacement $d\vec{l}$:

$$d\mathcal{C} = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Comme $d\vec{l} = dl \cdot \cos\theta \cdot \vec{u} + dl \cdot \sin\theta \cdot \vec{v}$ et $\vec{E} = E \cdot \vec{u}$, alors $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot \cos\theta \cdot dl$.

Or $\cos\theta \cdot dl = dr$ et $E = q_0 / (4\pi\epsilon_0 r^2)$, la circulation élémentaire a donc pour expression :

$$d\mathcal{C} = q_0 / (4\pi\epsilon_0) \cdot dr / r^2$$

Ainsi :

$$\mathcal{C} = q_0 / (4\pi\epsilon_0) \cdot \int_{r_A}^{r_B} dr / r^2 = q_0 / (4\pi\epsilon_0) \cdot (1/r_A - 1/r_B)$$

La circulation du champ électrostatique entre deux points A et B est indépendante de la trajectoire AB suivie. Elle ne dépend absolument que des points de départ et d'arrivée.

Donc :

$$\mathcal{C}' = \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 / (4\pi\epsilon_0) \cdot (1/r_B - 1/r_A) = -\mathcal{C}$$

et
$$\oint_{AA} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

La circulation du champ électrostatique sur un parcours fermé est nulle :



$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Lorsque cette dernière propriété est vérifiée, on dit que le champ \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire.

III Différence de potentiels électrostatiques.

On a :

$$W_A^B / q = U_A / q - U_B / q = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

En posant :

$$\begin{aligned} W_A^B / q &= V_A^B \\ U_A / q &= V_A \\ U_B / q &= V_B \end{aligned}$$

on peut écrire :

$$V_A^B = V_A - V_B = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

La différence de potentiels $V_A^B = V_A - V_B$ entre deux points A et B d'un espace où règne un champ électrostatique est égale à l'énergie nécessaire au déplacement d'une charge unité entre ces points; sa dimension est celle d'une énergie par unité de charge, évaluée en J/C ou volts.

IV- Potentiel en un point d'un champ électrostatique dû à une charge ponctuelle.

On avait établi que :

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 / (4\pi\epsilon_0) \cdot (1/r_A - 1/r_B)$$

On peut définir le potentiel électrostatique en un point, comme la différence entre ce point et un point particulier possédant un potentiel de référence.

Si on prend B à l'infini, on aura r_B qui tend vers l'infini, et nous savons que si nous considérons une charge q au point B cette charge possède une énergie :

$$U_B = q \cdot V_B$$

Comme B est à l'infini, $U_B = 0$ et par la suite $V_B = 0$; donc le potentiel à l'infini est nul ($V_{\text{infini}} = 0$, on suppose qu'à l'infini il n'y a pas de charges).

En prenant le potentiel de B comme nul, on peut poser comme définition de la fonction potentiel au point A :

$$V_A = \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 / (4\pi\epsilon_0) \cdot 1/r_A$$

ou en généralisant :

$$V = q_0 / (4\pi\epsilon_0) \cdot 1/r$$

C'est la fonction potentiel due à une charge ponctuelle q_0 .

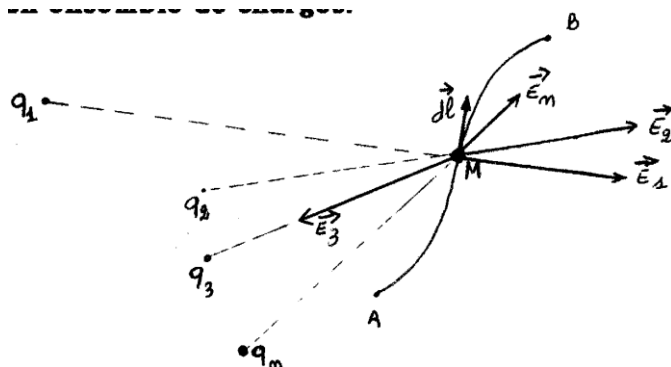
Remarques :

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] \\ \Rightarrow V_A &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_A} + V_B - \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_B} \\ \text{ou } V_A - \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_A} &= V_B - \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_B} = V_C - \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_C} = \dots = c^k \\ \Rightarrow \boxed{V} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0}{r} + c^k \end{aligned}$$

1- Le potentiel n'est défini qu'à une constante près.

2- Pratiquement l'infini étant inaccessible, on utilisera un point directement relié à la terre, par rapport auquel se feront toutes les mesures de potentiel. On considérera la Terre comme étant au potentiel zéro.

V- Potentiel dû à un ensemble de charges.



Au point M le champ \vec{E} est la résultante des champs $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \dots, \vec{E}_n$.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n.$$

Le potentiel en M est donc, le potentiel à l'infini étant supposé nul:

$$V_M = \int_M^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_M^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_M^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots + \int_M^{\infty} \vec{E}_n \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow V_M = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

Dans le cas où la charge est répartie dans une région de l'espace, le potentiel électrostatique aura pour expression :

$$V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (\text{obtenu à partir de } V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i})$$

Pour les trois distributions possibles nous avons :

- Cas d'une distribution de surface $dq = \sigma \cdot dS$:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma \cdot \frac{dS}{r}$$

- Cas d'une distribution de volume: $dq = \rho \cdot dv$

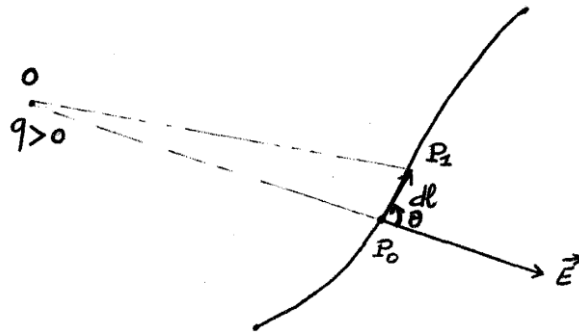
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho \cdot \frac{dv}{r}$$

- Cas d'une distribution linéique: $dq = \lambda \cdot dl$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \lambda \cdot \frac{dl}{r}$$

VI- Relation entre champ et potentiel

1- Relation fondamentale



La circulation élémentaire du champ électrostatique \vec{E} , considéré comme constant le long de $d\vec{l}$ est :

$$d\mathcal{C} = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

En introduisant la notion de potentiel on a :

$$d\mathcal{C} = V_{P_0}^{P_1} = V_{P_0} - V_{P_1} \quad (d\vec{l} = \vec{P_0P_1})$$

Appelons V le potentiel au point P_0 et $V + dV$ le potentiel au point P_1 , dV est l'accroissement du potentiel lors du passage de P_0 en P_1 et s'entend comme la valeur finale moins la valeur initiale :

$$dV = V_{P_1} - V_{P_0} = (V + dV) - V$$

Donc :

$$d\mathcal{C} = \vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV$$

ou :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Comme :

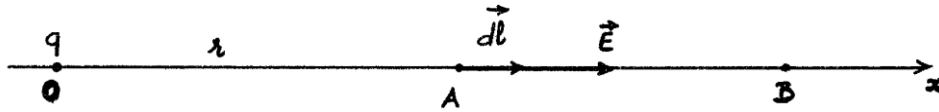
$$dV = \vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l}$$

nous obtenons **alors** :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$$

On dit que le champ électrostatique \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire V .

2- Cas particulier du déplacement le long d'une ligne de champ.



On a :

$$- dV = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot dl$$

ou

$$E = - dV/dl$$

Si le déplacement a lieu dans le sens du champ on a :

$$\begin{aligned} E \cdot dl > 0 & \implies -dV = V_A - V_B > 0 \\ & \implies V_A > V_B \end{aligned}$$

Le champ \vec{E} est dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

Exemple : Calculons le champ électrostatique en A.

Le potentiel électrostatique dû à q au point A est :

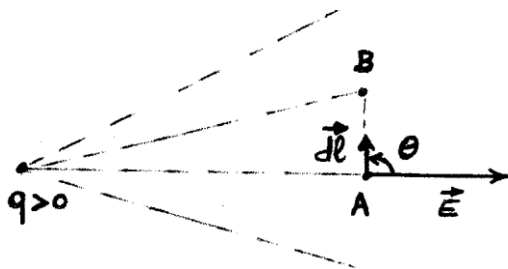
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \quad (V_\infty = 0)$$

Le champ électrostatique dû à q au point A est :

$$E = - \frac{dV}{dr} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Ce qui est bien l'expression du champ électrostatique en A dû à une charge ponctuelle q.

Remarque :



* $\theta = 0 \implies -dV = E \cdot dl$ est maximal.

* $\theta = \pi/2 \implies -dV = 0$.

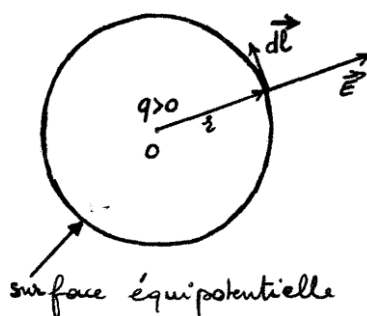
VII- Surfaces équipotentielles.

Une surface équipotentielle est le lieu des points où le potentiel a une valeur constante V_0 .

Exemple: Cas d'une charge ponctuelle q .

Pour une charge ponctuelle q le potentiel est :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$



$V = \text{cte}$ si $r = \text{cte}$, tous les points situés à une distance $r = \text{cte}$ de q sont au même potentiel. C'est une sphère centrée sur q .

Le potentiel ayant une valeur unique en chaque point de l'espace, il ne peut donc passer qu'une équipotentielle en un point donné, autrement dit *deux surfaces équipotentiennes ne peuvent se couper*.

En effet :

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot dl \cdot \cos\theta.$$

Sur une surface équipotentielle $dV = 0$, donc $\cos\theta = 0$ et ainsi $\theta = \pi/2$.

Remarque :

a- unité du champ électrostatique :

$$E = -dV/dl \text{ (V/m, dans le Système International SI)}$$

b- $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}V}) = -\text{div}\vec{E}$

ou

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\rho/\epsilon_0$$

C'est-à-dire : $\Delta V = -\rho/\epsilon_0$ (Equation de Poisson)

Dans une région où il n'existe pas de charge, l'équation de Poisson devient :

$$\Delta V = 0 \quad \text{(Equation de Laplace)}$$

Résumé du chapitre 3:

La circulation du champ électrostatique entre deux points A et B est indépendante de la trajectoire AB suivie. Elle ne dépend absolument que des points de départ et d'arrivée.

La propriété:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

montre que le champ \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire V et :

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

On traduit cette dernière relation localement par:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$$

Le potentiel dû a une charge ponctuelle q est :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

Pour un ensemble de charges ponctuelles:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum \frac{q_i}{r_i}$$

Pour une répartition continue de charge :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{dq}{r}$$

a- répartition linéique:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{\lambda \cdot dl}{r}$$

b- répartition surfacique :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iint_S \frac{\sigma \cdot ds}{r}$$

C- répartition volumique :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint \frac{\rho \cdot dv}{r}$$

Chap. 4: Equilibre électrostatique des conducteurs

I- Cas d'un conducteur en équilibre électrostatique.

1- Champ, potentiel et charges dans un conducteur homogène en équilibre.

On a vu l'étude des actions électrostatiques entre charges électriques isolées ou groupées suivant des lignes ou des surfaces dans le vide. Passons maintenant au cas des volumes conducteurs, supposés encore dans le vide (ou, pratiquement, dans l'air).

Les déplacements d'électricité dans les conducteurs s'expliquent par la présence de charges libres (électrons dans les métaux, ions dans les électrolytes et les gaz ionisés). Les mouvements de ces charges étant dus à des forces électriques, on définit le champ en un point d'un conducteur, de même que dans le vide, comme le quotient $\vec{E} = \vec{F} / q$ de la force agissant sur une particule électrisée par la charge de cette dernière.

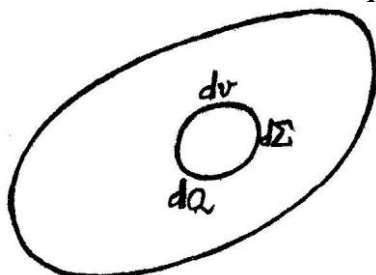
Dans la suite, on considère des **conducteurs homogènes, à température uniforme et placés dans le vide.**

Les mouvements de charges dans les conducteurs ne se font pas nécessairement sans frottements. Mais les forces de frottement diminuent en même temps que la vitesse et sont **nulles au repos.**

On doit donc **admettre** que les charges ne peuvent demeurer en **équilibre** en un point d'un conducteur si elles sont soumises **à une force.** Ainsi, dans la matière d'un conducteur en équilibre, le champ électrostatique \vec{E} est nul en tout point (sans quoi ses charges libres seraient entraînées).

Le potentiel, dont le gradient $\overrightarrow{grad}V = -\vec{E}$ est nul en tout point, a donc partout la même valeur. Un conducteur en équilibre constitue un volume équipotentiel; sa surface est une surface équipotentielle.

Soit le volume conducteur en équilibre électrostatique suivant:



volume conducteur en équilibre électrostatique

Appliquons le théorème de Gauss au volume dV dont la surface est $d\Sigma$:

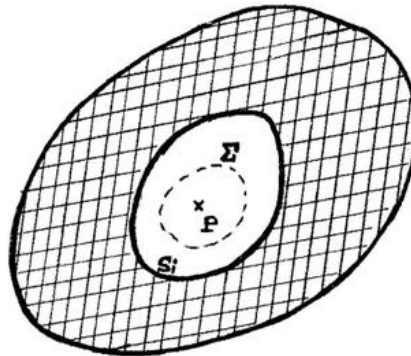
$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = dQ/\epsilon_0$$

Comme $\vec{E} = \vec{0}$ alors on a $dQ = 0$ et $\rho = dQ/dV = 0$.

Ainsi à l'intérieur d'un volume conducteur en équilibre électrostatique la charge électrique totale dQ et par la suite la densité volumique de charge ρ sont nulles.

2- Potentiel et champ électrostatiques dans une enceinte conductrice fermée, sans charges intérieures.

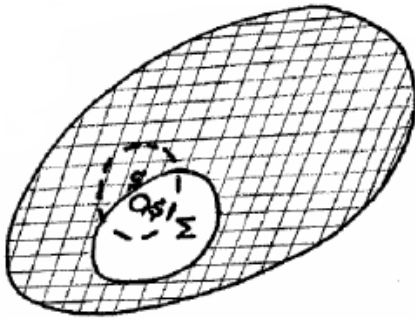
Dans une cavité complètement entourée par un conducteur en équilibre, et dans laquelle on n'a pas placé de charges électriques, *le potentiel est constant.*



En effet, sur la surface conductrice qui limite la cavité S_i , le potentiel V est partout le même; il ne doit pas subir de discontinuité quand on pénètre dans la cavité. S'il variait à l'intérieur de celle-ci, il s'y trouverait au moins un point P où V serait maximal ou minimal. Il y aurait alors autour de P un gradient de potentiel; donc un champ électrique: à travers une surface fermée entourant P , le flux électrique ne serait pas nul. Or il doit l'être, d'après le théorème de GAUSS, puisque, par hypothèse, il n'y a aucune charge dans la cavité.

De plus, il n'y a pas de charges sur la surface intérieure S_i de l'enceinte.

Appliquons le théorème de GAUSS à la surface Σ :



$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma} &= \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = Q_{\Sigma} / \epsilon_0 \\ \implies Q_{\Sigma} &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion :

Lorsqu'un conducteur en équilibre électrostatique porte des charges, celles-ci sont **réparties sur sa surface extérieure seulement** (on parle, ici encore des charges résultant d'un excès ou d'un défaut d'électrons, et non pas de celles qui existent en quantités opposés dans les atomes à l'état neutre).

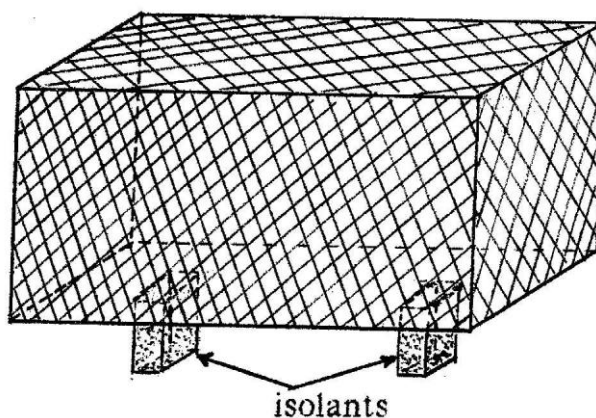
3- Application aux écrans électriques.

a- D'une part, on a prouvé l'absence de champ électrique à l'intérieur du conducteur creux. D'autre part, on montre que l'approche d'un corps électrisé conducteur creux ne perturbe pas l'état électrique des corps placés à l'intérieur de celui-ci.

Conclusion :

Une enveloppe conductrice forme donc un écran électrique pour les corps situés à l'intérieur

b- L'effet d'écran se produit même lorsque la surface du conducteur n'est pas continue. La cage de FARADAY en constitue un exemple de parfait écran électrique:



à l'intérieur:

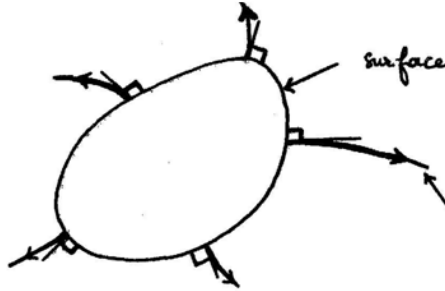
$$\vec{E} = \vec{0}$$

$$V = C^{te}$$

\implies les objets intérieurs ne manifestent aucune action électrique.

4- Champ au voisinage immédiat et sur la surface d'un conducteur chargé. Pression électrostatique.

On vient de voir que la surface d'un conducteur est une équipotentielle et qu'à l'intérieur de ce conducteur le champ est partout nul. Les lignes de champ sont donc normales (perpendiculaires) à cette surface. Le champ est donc normal à la surface sur celle-ci et dans son voisinage immédiat, et nul à l'intérieur.



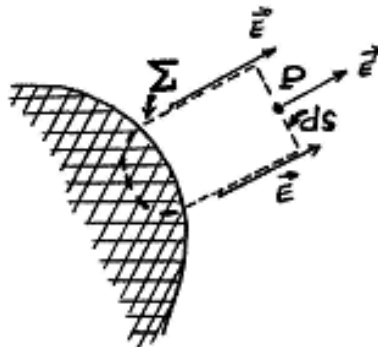
a- Théorème de Coulomb:

En un point P situé dans le vide au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur, le champ \vec{E} normal à la surface, a pour valeur:

$$E = \sigma/\epsilon_0$$

σ étant la densité surfacique ou superficielle sur le conducteur au voisinage du point considéré.

Démonstration



la surface dS porte la charge $\sigma dS = dq$

Le flux de \vec{E} à travers Σ fermée (\vec{E} étant nul à l'intérieur du conducteur et parallèle aux génératrices du cylindre de base dS qui est le tube de champ) est :

$$d\Phi = E \cdot dS = dq/\epsilon_0 = \sigma \cdot dS/\epsilon_0 \text{ (Théorème de GAUSS)}$$

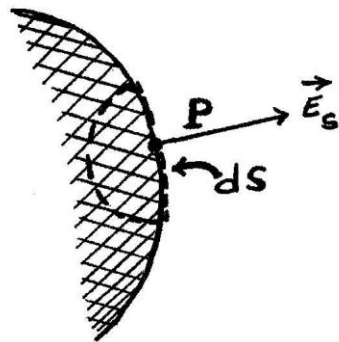
$$\Rightarrow E = \sigma/\epsilon_0$$

b- champ à la surface du conducteur:

En un point de la surface du conducteur, le champ, toujours normal à cette surface, a pour valeur :

$$E_S = \sigma / (2\epsilon_0)$$

Démonstration.



la surface dS porte la charge $\sigma \cdot dS = dq$

Le flux de \vec{E} à travers Σ fermée (étant nul à l'intérieur du conducteur et perpendiculaire au disque de surface dS) est :

$$\begin{aligned} d\Phi &= E_S \cdot dS = dq / (2\epsilon_0) = \sigma \cdot dS / \epsilon_0 \text{ (Théorème de GAUSS)} \\ \Rightarrow E_S &= \sigma / (2\epsilon_0) \end{aligned}$$

c- Pression électrostatique:

L'élément de surface dS , de charge $\sigma \cdot dS$, placé dans le champ est soumis à une force électrostatique toujours dirigée vers l'extérieur de la surface conductrice (car E_S et σ changent de signes à la fois,) et égale à :

$$df = \sigma \cdot E_S \cdot dS \text{ (} df = dq \cdot E_S \text{)}$$

On appelle *pression électrostatique* la valeur de cette force rapportée à l'unité de surface, soit dans le vide:

$$\mathbf{p} = d\mathbf{f}/dS = \sigma \cdot E_S = \sigma^2 / (2\epsilon_0)$$

5 . Capacité d'un conducteur seul dans l'espace.

Le potentiel d'un conducteur, qui est le même en tous ses points, peut être calculé en l'un quelconque d'entre eux par la relation :

$$V = 1/(4\pi\epsilon_0)\iint_S \sigma \cdot dS/r$$

On a d'autre part:

$$Q = \iint_S \sigma \cdot dS$$

Si σ est multiplié par un facteur quelconque, il en est de même de V et de Q . Le rapport constant entre Q et V est appelé *capacité* du conducteur :

$$C=Q/V$$

La capacité dépend des dimensions et de la forme de la surface du conducteur.

Exemple :

Le potentiel V d'une sphère de rayon R seule dans l'espace est lié à sa charge Q par la relation:

$$\begin{aligned} V &= 1/(4\pi\epsilon_0) \cdot \iint_S \sigma \cdot dS/r \\ &= 1/(4\pi\epsilon_0) \cdot \iint_S \sigma \cdot dS/R \\ &= 1/(4\pi R\epsilon_0) \cdot \iint_S \sigma \cdot dS \\ &= 1/(4\pi\epsilon_0) \cdot Q/R \end{aligned}$$

$$\text{=====> } \quad \mathbf{C = 4\pi\epsilon_0 \cdot R}$$

II- Cas de plusieurs conducteurs en équilibre électrostatique.

1- Problème général de l'équilibre électrostatique

a- * Lorsque plusieurs conducteurs se trouvent en présence les uns des autres dans le vide, les phénomènes d'influence électrostatique modifient la répartition des charges sur chacun deux.

* Si un conducteur est électriquement isolé, l'influence ne modifie pas alors la valeur de sa charge totale (d'après le principe de conservation de l'électricité), mais son potentiel.

* Si un conducteur est maintenu à un potentiel constant, l'influence intervient alors pour déterminer sa charge.

* A l'équilibre, il n'y a de charges qu'à la surface des conducteurs.

Le problème consiste à déterminer la fonction potentiel V , nulle à l'infini, vérifiant en tout point hors des charges la relation de LAPLACE : $\Delta V = 0$, et prenant des valeurs constantes sur les conducteurs. Une fois cette fonction connue, on obtiendra en tout point le champ par la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ et la densité superficielle par le théorème de COULOMB ($E = \sigma/\epsilon_0$ au voisinage immédiat d'un conducteur).

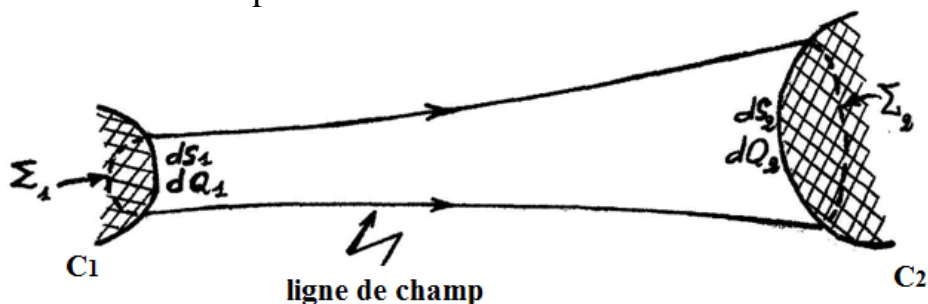
On admet que pour tout ensemble de données du problème, charges ou potentiels, il existe un seul état d'équilibre. On peut superposer ces états et obtenir un nouvel état d'équilibre ainsi qu'il résulte de la forme linéaire en V et q des relations:

$$V = 1/(4\pi\epsilon_0) \cdot \Sigma(q/r)$$

b- Les lignes de champ électrique satisfont à certaines conditions:

1°- L'une des extrémités au moins de chaque ligne de champ naît ou se termine sur la surface d'un conducteur. L'autre ne peut aboutir sur le même conducteur, puisque le potentiel varie toujours dans le même sens le long de la ligne de champ; elle peut, soit arriver sur un autre conducteur dont le potentiel est différent de celui du premier, soit s'éloigner à l'infini.

2°- Eléments correspondants



Appliquons le théorème de GAUSS à la surface fermée Σ constituée par la surface du tube S_L et les surfaces s'appuyant sur dS_1 et dS_2 :

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma} &= \Phi_{\Sigma_1} + \Phi_{\Sigma_2} + \Phi_{S_L} = dQ_1/\epsilon_0 + dQ_2/\epsilon_0 \\ \Phi_{S_L} &= 0 & (\vec{E} \perp d\vec{S}) \\ \Phi_{\Sigma_1} = \Phi_{\Sigma_2} &= 0 & \text{car à l'intérieur du conducteur } \vec{E} = \vec{0} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\Phi_{\Sigma} = dQ_1/\epsilon_0 + dQ_2/\epsilon_0 = 0$$

Alors :

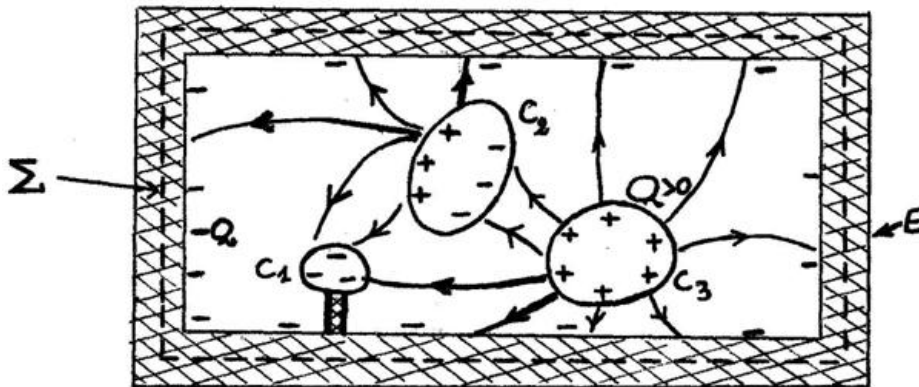
$$dQ_1 = -dQ_2$$

dS_1 et dS_2 sont appelées *surfaces ou éléments correspondants*. C'est le conducteur qui porte la surface chargée positivement qui est au potentiel le plus élevé.

3°- Le théorème de Coulomb reste valable dans un ensemble de conducteurs.

2- Equilibre électrostatique dans une cavité à parois conductrices.

a- Soit E l'enceinte renfermant les conducteurs C_1, C_2, \dots chargés ou non dont la somme algébrique de leurs charges est Q :



La charge totale intérieure à Σ est nulle d'après le théorème de GAUSS, car le champ est nul en tout point de Σ . Il existe donc sur la surface interne de E une charge totale $-Q$, produite par influence, égale en valeur absolue et de signe contraire à la charge totale Q des corps contenus dans E. On dit qu'il y a *influence totale*.

b- Deux cas principaux sont à considérer:

1°- **L enceinte E est isolée et non chargée.**

Le principe de conservation de l'électricité exige que la surface extérieure de E porte une charge totale $-Q$. Cette charge pourra modifier l'état électrique des conducteurs placés à l'extérieur de E.

Les charges extérieures à E peuvent développer des charges sur E par influence, mais la distribution de ces charges crée un champ nul dans la cavité E. E et constitue un *écran électrique* pour les conducteurs intérieurs, la réciproque n'est pas vraie.

2°- **E est mise au sol.**

La charge $-Q$ de la face interne demeure maintenue par l'attraction des charges des conducteurs intérieurs. Mais l'enceinte n'exerce alors aucune influence sur les corps extérieurs, puisque sa charge *extérieure est constamment nulle*. Ainsi une *enceinte conductrice maintenue au potentiel du sol ou un potentiel constant constitue un écran électrique parfait ; elle empêche les actions électrostatiques réciproques des corps intérieurs et extérieurs*.

Application :

On utilise les écrans électriques pour protéger les appareils de mesure.

3- Potentiels et charges dans une enceinte conductrice.

a- Il y a trois catégories de conducteurs contenus dans une enceinte:

* Ceux tels que C_1 qui sont reliés électriquement à E et ont même potentiel que E, soit $V=0$,

* Ceux tels que C_2 qui sont isolés et ont une charge totale nulle,

* Ceux tels que C_3 qui sont isolés et chargés.

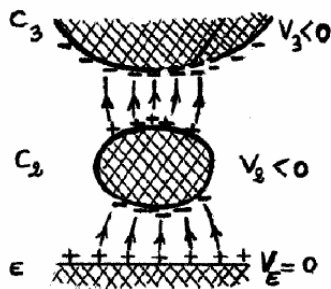
Toute l'électricité que les conducteurs des deux premières catégories portent sur leur surface est induite par les charges des conducteurs de la dernière.

Supposons que C_3 porte une charge positive Q . Les lignes de champ partant de C_3 aboutissent soit à la surface des autres conducteurs, soit à la surface interne de E , car on sait qu'elles ne peuvent revenir sur C_3 . C_2 sera chargé par influence (la charge totale de C_2 restant toujours nulle). C_3 ne portera jamais une charge négative et E une charge positive. Le potentiel d'un conducteur quelconque du groupe C_2 est intermédiaire entre celui de C_3 et celui de E .

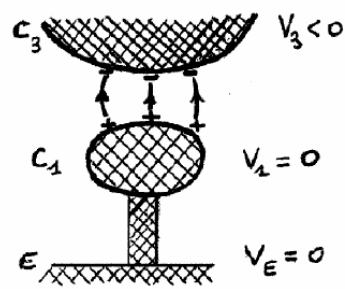
b- Si plusieurs conducteurs sont en présence les uns des autres, un corps chargé n'a pas nécessairement un potentiel du même signe que sa charge. Cela n'est toujours le cas que si le corps est seul.

Exemples d'effets d'influence:

a - $Q_2 = 0$ et $V_2 < 0$



b - $Q_1 > 0$ et $V_1 = 0$



4- Capacités et coefficients d'influence dans un ensemble de conducteurs.

Soient, dans une enceinte conductrice E , des conducteurs fixes $C_1, C_2, C_3 \dots C_p$; le milieu intérieur à l'enceinte est le vide (pratiquement l'air). Selon la convention prise, on prendra comme **potentiel zéro** celui de l'enceinte (qui sera constituée souvent par les parois de la salle d'expériences).

a- **Supposons que le conducteur C_1 seul soit chargé** et soit Q_1 sa charge, l'enceinte prend sur sa surface intérieure une charge $-Q_1$. Soit $V_{1,1}$ le potentiel de C_1 , $V_{1,1}$ est proportionnel à Q_1 .

b- En effet si $Q_1' = k.Q_1$ alors sur la face intérieure on a $-k.Q_1$. On obtient un nouvel état d'équilibre. Le champ est multiplié par k et par suite il en est de même pour $V_{1,1}$ qui est le travail du champ quand on va du conducteur C_1 à l'enceinte.

Comme Q_1 étant aussi multiplié par k , Q_1 et $V_{1,1}$ sont proportionnels et on peut écrire :

$$V_{1,1} = \gamma_{1,1} \cdot Q_1$$

L'un quelconque C_i des autres conducteurs dont la charge totale est nulle, est alors à un potentiel $V_{i,1}$ et on a de même $V_{i,1}$ proportionnel à Q_1 :

$$V_{i,1} = \gamma_{i,1} \cdot Q_1 \quad (i = 2, 3, \dots p)$$

b- Si on fait le même raisonnement pour C_2 chargé par Q_2 on obtient :

$$V_{2,2} = \gamma_{2,2} \cdot Q_2 \text{ Cor}$$

et $V_{i,2} = \gamma_{i,2} \cdot Q_2$ ($i = 1, 3, \dots p$) (potentiel du conducteur C_i)

c- *Superposons sous les états d'équilibre* où un seul conducteur était chargé; nous aurons un nouvel état d'équilibre, dans lequel les charges des conducteurs seront respectivement $Q_1, Q_2 \dots Q_p$. Les potentiels s'ajoutent, et l'on a pour C_1 , par exemple :

$$V_1 = V_{1,1} + V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots + V_{1,p}.$$

On calcule de même $V_2, V_3, \dots V_p$:

$$V_2 = V_{2,1} + V_{2,2} + V_{2,3} + V_{2,4} + \dots + V_{2,p}.$$

.

.

$$V_p = V_{p,1} + V_{p,2} + V_{p,3} + V_{p,4} + \dots + V_{p,p}.$$

On écrit alors :

$$V_i = \sum_{j=1}^p \gamma_{i,j} \cdot Q_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots p)$$

Les potentiels sont des fonctions linéaires des charges.

d- En résolvant le système d'équations précédent on peut écrire :

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{1,1} \cdot V_1 + C_{1,2} \cdot V_2 + \dots + C_{1,p} \cdot V_p \\ Q_2 &= C_{2,1} \cdot V_1 + C_{2,2} \cdot V_2 + \dots + C_{2,p} \cdot V_p \end{aligned}$$

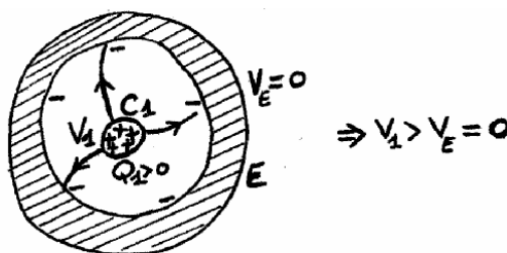
$$Q_p = C_{p,1} \cdot V_1 + C_{p,2} \cdot V_2 + \dots + C_{p,p} \cdot V_p$$

Les charges sont des fonctions linéaires des potentiels

Les coefficients C_{ij} ne dépendent que des dimensions et positions des conducteurs.

En particulier, supposons que tous les conducteurs aient le même potentiel que l'enceinte sauf C_1 , c'est-à-dire si V_2, V_3, \dots, V_p sont nuls alors :

$$Q_1 = C_{1,1} \cdot V_1$$



Si Q_1 est positif, V_1 l'est aussi. Donc $C_{i,i}$ est toujours positif. Les coefficients $C_{1,1}, C_{2,2}, C_{3,3} \dots, C_{p,p}$ **tous positifs** sont appelés **les capacités** des conducteurs C_1, C_2, \dots, C_p (dans leurs positions relatives actuelles, c'est-à-dire en présence des autres conducteurs).

Dans les mêmes conditions, les charges de tous les autres conducteurs sont négatives, car, étant au potentiel de l'enceinte, ils peuvent être considérés comme faisant partie de celle-ci. Pour C_i , par exemple, on a :

$$Q_i = C_{i,1} \cdot V_1$$

et le coefficient $C_{i,1}$ est nécessairement négatif; on l'appelle **coefficient d'influence** du conducteur C_1 sur le conducteur C_i . On démontre que :

$$C_{i,j} = C_{j,i}$$

Le coefficient d'influence d'un premier conducteur sur un second est égal au coefficient d'influence du second sur le premier.

Unités (SI) : Le **FARAD** pour $C_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, p$).

Résumé du chapitre 4

- Le champ est nul l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique. La charge ne peut être que superficielle.

- Le champ est normal à la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique.

- Le champ est nul à l'intérieur d'une cavité creusée dans la matière conductrice sans communication avec l'extérieur et ne renfermant pas de corps électrisé.

- Un conducteur creux joue le rôle d'écran électrostatique puisque le champ est nul à l'intérieur. Application la cage de Faraday.

- Au voisinage immédiat d'un conducteur en équilibre électrostatique le champ a pour valeur $\mathbf{E} = \sigma/\epsilon_0$ (théorème de Coulomb) et $\mathbf{E} = \sigma/(2\epsilon_0)$ sur la surface.

- Les charges de deux éléments correspondants sont égales et de signes contraires (influence partielle).

- Les charges induites sur les surfaces interne et externe d'un conducteur creux sont égales en valeur absolue à la charge inductrice contenue dans la cavité (influence totale).

- Pour un système de p conducteurs en équilibre électrostatique on a:

$$Q_1 = C_{1,1} \cdot V_1 + C_{1,2} \cdot V_2 + \dots + C_{1,p} \cdot V_p$$

$$Q_2 = C_{2,1} \cdot V_1 + C_{2,2} \cdot V_2 + \dots + C_{2,p} \cdot V_p$$

$$Q_p = C_{p,1} \cdot V_1 + C_{p,2} \cdot V_2 + \dots + C_{p,p} \cdot V_p$$

Chap. 5: Condensateurs. Energie Electrostatique.

I- Condensateurs.

1- Phénomènes d'influence.

a- Influence partielle:



En approchant un corps A chargé positivement d'un corps B, initialement neutre on obtient la répartition des charges sur B suivant:

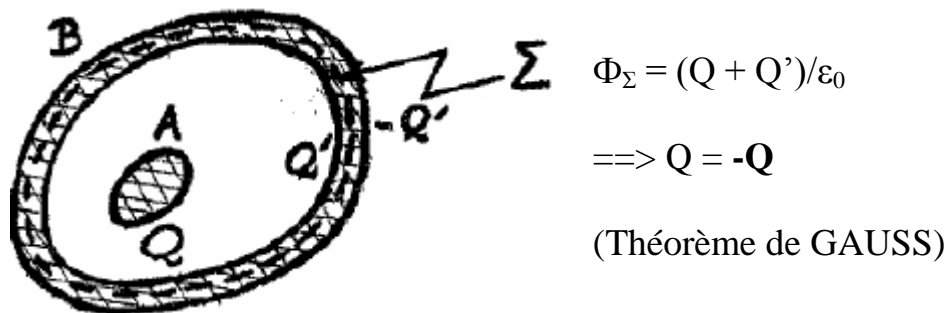
- La zone 1 est chargée négativement,
- La zone 2 est neutre,
- La zone 3 est chargée positivement.

On dit alors que B est *influencé* par A.

Si A est retiré, B redevient neutre. Si B est relié au sol l'électricité positive s'écoule (en fait, les électrons du sol sont attirés par la charge positive de B), et B devient chargé négativement. Il *le reste* même si A est retiré.

b- Influence totale:

Soit un conducteur B creux neutre initialement contenant un conducteur A chargé positivement ($Q > 0$). Par influence la surface intérieure de B portera la charge Q' et la surface extérieure $-Q'$. Le conducteur étant en équilibre électrostatique, le champ \vec{E} à l'intérieur de la matière du conducteur B est donc nul. Le flux de \vec{E} à travers la surface fermée Σ est nul :

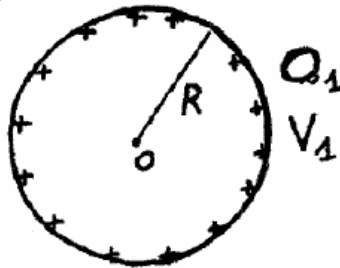


On parle ainsi d'influence totale entre le corps A et la surface intérieure de B.

2- Capacité d'un conducteur unique dans le vide.

Soit une sphère conductrice de rayon R portant une charge Q_1 . Son potentiel est :

$$V_1 = Q_1 / (4\pi\epsilon_0 R)$$



Si Q_1 est multipliée par k , le potentiel devient :

$$V_2 = Q_2 / (4\pi\epsilon_0 R) \quad (\text{avec } Q_2 = k.Q_1) \text{ et } V_2 = k.V_1.$$

$$\implies Q_2/V_2 = Q_1/V_1 = Q/V = \text{constante} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Cette constante est définie comme étant la capacité que possède un conducteur unique d'accumuler des charges électriques :

$$C = Q/V \quad \left\{ \begin{array}{ll} Q \text{ Coulomb (C)} \\ V \text{ volt (V)} \\ C \text{ Farad (F)} \end{array} \right.$$

Exemple: Calcul de la capacité de notre planète la Terre.

$$V = Q / (4\pi\epsilon_0 R) \implies C = 4\pi\epsilon_0 R = 0,71 \cdot 10^{-3} \text{ Farad}$$

avec :

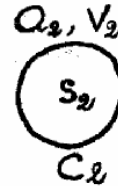
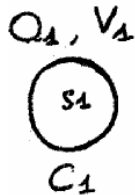
$$R = 6400 \text{ Km} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m et } \epsilon_0 = 1 / (36\pi \cdot 10^9) \text{ (SI)}$$

Le Farad est une unité énorme. On préfère utiliser les sous-multiples du Farad :

$$\begin{aligned} 1 \mu\text{F} &= 10^{-6} \text{ F} \\ 1 \text{nF} &= 10^{-9} \text{ F} \\ 1 \text{pF} &= 10^{-12} \text{ F} \end{aligned}$$

3- Partage des charges entre deux conducteurs.

a- Considérons deux sphères conductrices suffisamment éloignées l'une de l'autre pour qu'il n'y ait pas d'influence entre elles.



On a :

$$Q_1 = C_1 \cdot V_1 \text{ et } Q_2 = C_2 \cdot V_2$$

b- Relions ces deux sphères, elles sont donc au même potentiel d'équilibre V . Après mise en communication on a :



avec:

$$Q'_1 = C_1 \cdot V \text{ et } Q'_2 = C_2 \cdot V$$

D'après le principe de la conservation de la charge on a:

$$Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$$

ou

$$C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2 = C_1 \cdot V + C_2 \cdot V$$

Alors:

$$V = (C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2) / (C_1 + C_2) \text{ (potentiel d'équilibre)}$$

$$Q'_1 / Q'_2 = C_1 / C_2$$

$$Q'_1 = C_1 \cdot (Q_1 + Q_2) / (C_1 + C_2)$$

$$Q'_2 = C_2 \cdot (Q_1 + Q_2) / (C_1 + C_2)$$

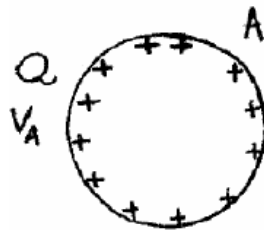
Remarque: si on met un conducteur chargé en communication avec la Terre qui possède une capacité très grande, celle-ci prendra la totalité de la charge et l'on peut considérer le conducteur comme déchargé. Le potentiel commun sera celui de la Terre. **Mettre un conducteur à la Terre, c'est le placer au potentiel de la Terre.**

4- Condensateurs.

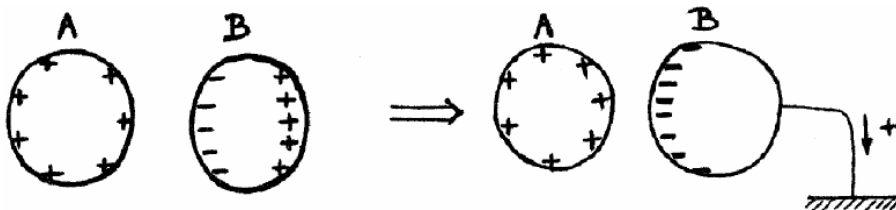
a- Condensation des charges électriques.

Il semblerait que la seule façon d'augmenter la charge d'un conducteur, donc sa capacité ($C=Q/V$), sous un potentiel donné est d'augmenter sa surface extérieure, mais on est rapidement limité par l'encombrement. Une autre façon de le faire est de utiliser le phénomène d'influence.

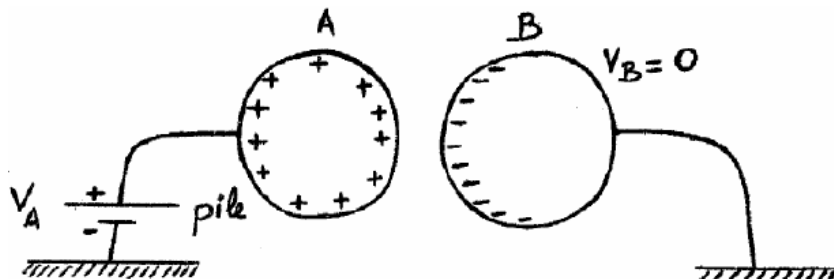
Soit un conducteur sphérique A, par exemple, portant une charge positive Q et maintenu au potentiel V_A :



Plaçons à proximité de A un conducteur sphérique B dont le potentiel V_B est nul en le reliant avec la Terre :



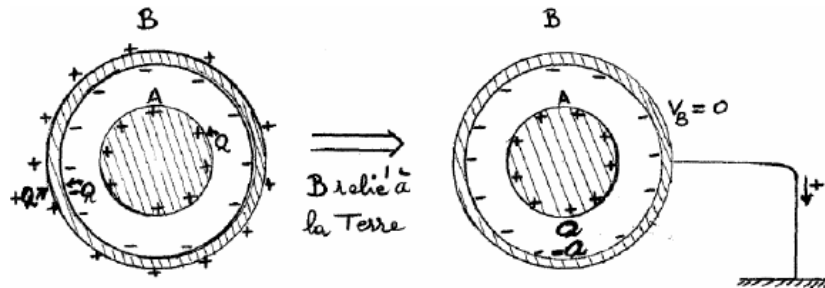
Si on maintient le potentiel de A constant, c'est-à-dire égal à V_A , par une source, les charges négatives de B vont attirer par influence d'autres charges positives donc il y a modification de la répartition des charges de A :



On obtient ainsi une augmentation de charge de A donc augmentation de C . C'est le **phénomène de condensation**.

A potentiel donné la condensation est maximum lorsqu'il y a influence totale et lorsque les conducteurs sont le plus près possible l'un de l'autre. Le condensateur théorique idéal est constitué de deux conducteurs dont l'un enveloppe complètement l'autre.

b-- capacité d'un condensateur.



Puisque l'armature externe est reliée au sol, $V_B = 0$ et la capacité du condensateur est :

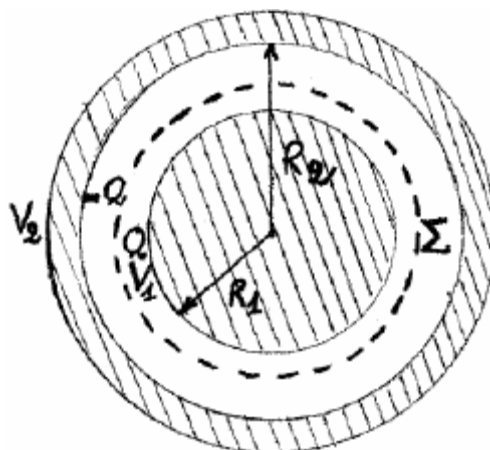
$$C = Q/V_A$$

Si $V_B \neq 0$ alors :

$$C = Q/(V_A - V_B)$$

c- Méthode de calcul de la capacité d'un condensateur.

Considérons un condensateur sphérique :



En un point quelconque P, on sait que:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

La circulation élémentaire de \vec{E} est :

$$d\mathcal{E} = \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot d\vec{l} = - dV$$

où $d\vec{l}$ est un déplacement élémentaire quelconque. Ce qui implique :

$$V_1 - V_2 = - \int_{R_1 \rightarrow R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Dans le cas du condensateur sphérique précédent, le champ électrique étant radial, la circulation élémentaire selon une ligne de champ est :

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot dr = - dV \quad (1)$$

Calculons \vec{E} en utilisant le théorème de GAUSS:

$$\Phi_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q/\epsilon_0$$

Or $\vec{E} // d\vec{S}$ et $\|\vec{E}\| = \text{cte}$ sur une surface sphérique Σ de rayon r , $\Sigma = 4\pi r^2$. Alors :

$$E = Q/(\Sigma \cdot \epsilon_0) = Q/(4\pi\epsilon_0 \cdot r^2) \quad (2)$$

En utilisant (1) et (2) on obtient:

$$dV = - Q/(4\pi\epsilon_0) \times dr/r^2 = Q/(4\pi\epsilon_0) \times d(1/r)$$

$$\implies \int_{V_1}^{V_2} dV = Q/(4\pi\epsilon_0) \times \int_{R_1}^{R_2} d(1/r)$$

Donc:

$$V_1 - V_2 = Q/(4\pi\epsilon_0) \times (1/R_1 - 1/R_2) > 0$$

et

$$C = Q/(V_1 - V_2) = 4\pi\epsilon_0 R_1 \cdot R_2 / (R_2 - R_1)$$

Remarque: Si $R_2 - R_1 = e$ et $R_2 \neq R_1$ ou $R_1 R_2 \neq R_1^2$, alors $C = 4\pi\epsilon_0 \cdot R_1^2 / e$. Comme la surface de l'armature interne est $S = 4\pi R_1^2$, on peut écrire : $C = \epsilon_0 \cdot S / e$. Cette dernière expression est celle de la capacité d'un condensateur plan.

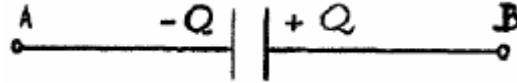
La même démarche permet de calculer la capacité d'un condensateur cylindrique de longueur L et de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 :

$$C = 2\pi\epsilon_0 \cdot L / \log(R_2/R_1)$$

Si l'épaisseur $R_2 - R_1 = e$ est très petite, alors $C \neq \epsilon_0 \cdot S / e$, où S est la surface de l'armature interne du cylindre

5- Association de condensateurs.

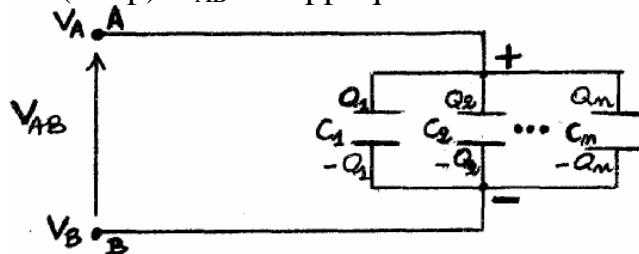
Un condensateur est schématisé par le symbole suivant :



Le conducteur A portant la charge $-Q$ ($Q > 0$) est au potentiel V_A (borne négative). Le conducteur B portant la charge $+Q$ est au potentiel V_B (borne positive), avec $V_B > V_A$.

a- Association en parallèle:

On réunit les bornes négatives ensemble et positives ensemble. La même différence de potentiels (d.d.p) V_{AB} est appliquée à leurs bornes.



La ddp entre les bornes A et B s'écrit:

$$V_{AB} = V_A - V_B = Q_1/C_1 = Q_2/C_2 = \dots = Q_n/C_n$$

La charge totale du conducteur A est :

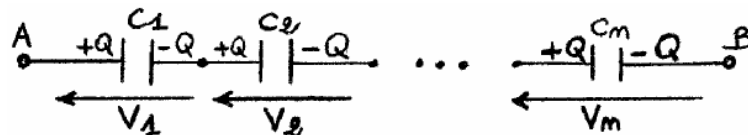
$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = C_1 \cdot V_{AB} + C_2 \cdot V_{AB} + \dots + C_n \cdot V_{AB}$$

$$Q = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \cdot V_{AB} = C \cdot V_{AB}$$

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

b- Association en série:

On réunit la borne négative d'un condensateur avec la borne positive du suivant :



En appliquant une d.d.p $V_{AB} = V_A - V_B$ aux bornes de l'ensemble, si une charge Q apparaît sur la première armature, alors une charge $-Q$ est induite sur celle qui lui fait face. Le phénomène se répercute jusqu'à la dernière armature.

On a donc:

$$Q = C_1 \cdot V_1 = C_2 \cdot V_2 = \dots = C_n \cdot V_n$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = V_1 + V_2 + \dots + V_n = Q/C_1 + Q/C_2 + \dots + Q/C_n$$

$$= Q \cdot (1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_n) = Q/C$$

$$\rightarrow 1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_n$$

II- Energie électrostatique.

1- Energie d'un condensateur chargé.

a- Lorsqu'on décharge un condensateur, en reliant ses deux armatures par un conducteur, une étincelle se produit un peu avant que le contact soit établi; en outre, le conducteur de jonction s'échauffe d'une façon qu'il est parfois possible de mettre en évidence. Ces dégagements de chaleur correspondent à la libération d'une certaine énergie W qui avait été emmagasinée lors de la charge du condensateur.

Illustration : Un fil métallique de 0,05 mm de diamètre et de quelques cm de longueur est fondu ou volatilisé par la décharge d'une batterie portée à un potentiel élevé.

b- Pour évaluer W , prenons comme zéro des potentiels celui de l'armature externe C_2 ; soit, à un instant donné, q la charge de l'armature interne C_1 , $v = q/c$ son potentiel. Pour faire passer de C_2 sur C_1 une charge supplémentaire dq , il faut effectuer contre les forces électrostatiques un travail élémentaire :

$$dW = v \cdot dq = qdq/C$$

Illustration :

Diagram illustrating the work done to move a charge dq from the outer plate C_2 to the inner plate C_1 of a capacitor. The inner plate C_1 is positively charged with potential v and charge q . The outer plate C_2 is grounded and has potential 0 . An electric field E points from C_1 to C_2 . A force $f_e = dq \cdot E$ acts on the charge dq . The work done is calculated as the negative of the integral of $f_e \cdot d\vec{l}$ from C_2 to C_1 , which equals $-dq \cdot (v_{C1} - v_{C2}) = -v \cdot dq$.

Ainsi le travail élémentaire à effectuer contre f_e est:

$$dW = - \int_{C_2}^{C_1} f_e \cdot d\vec{l} = v \cdot dq = q/C \cdot dq$$

A la charge totale Q ramenée sur l'armature interne C_1 correspond pour le condensateur une énergie:

$$W = \int_0^Q q \cdot dq/C = 1/2 \times Q^2/C = 1/2 \times C \cdot V^2 = 1/2 \times V \cdot Q$$

V étant la d.d.p correspondant à la charge totale Q du condensateur.

2- Energie d'un système de conducteurs électrisés.

Considérons un certain nombre de conducteurs A_1, A_2, \dots, A_n à l'intérieur d'une enceinte E , dont le potentiel est pris égal à zéro; soient Q_1, Q_2, \dots, Q_n leurs charges et V_1, V_2, \dots, V_n leurs potentiels.

On sait que la variation d'énergie d'un système ne dépend que de son état initial et de son état final.

Hypothèse :

On suppose qu'on fasse varier simultanément les charges q_1, q_2, \dots, q_n des divers conducteurs de façon telles soient à chaque instant proportionnelles aux charges finales Q_1, Q_2, \dots, Q_n . On pourra poser :

$$q_1 = xQ_1, q_2 = x.Q_2, \dots, q_n = x.Q_n$$

et, pendant la charge, x variera de 0 à 1.

Donc à chaque instant les potentiels des conducteurs seront:

$$v_1 = x.V_1, v_2 = x.V_2, \dots, v_n = x.V_n,$$

V_1, V_2, \dots, V_n étant les potentiels finaux.

Pour réaliser la condition précédente, il suffira d'apporter simultanément sur les conducteurs les charges infiniment petites :

$$dq_1 = Q_1.dx, dq_2 = Q_2.dx, \dots, dq_n = Q_n.dx$$

Pendant cette opération, le travail qu'on aura fourni sera :

$$dW = v_1.dq_1 + v_2.dq_2 + \dots + v_n.dq_n$$

$$dW = x.V_1.Q_1.dx + x.V_2.Q_2.dx + \dots + x.V_n.Q_n.dx$$

$$dW = (V_1.Q_1 + V_2.Q_2 + \dots + V_n.Q_n).x.dx$$

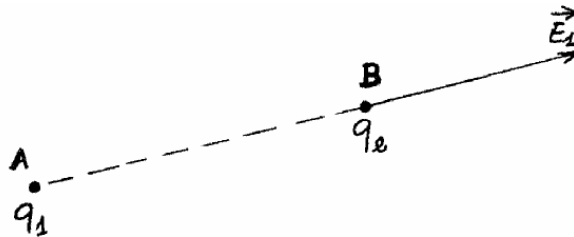
Pour effectuer la charge totale il faudra fournir le travail :

$$W = (V_1.Q_1 + V_2.Q_2 + \dots + V_n.Q_n). \int_0^1 x. dx$$

$$W = 1/2. \sum_{i=1}^{i=n} Q_i. V_i$$

3- Energie électrostatique d'un système de charges ponctuelles.

Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 , q_1 étant placée en A et q_2 en B.



A l'état initial l'énergie électrostatique du système est nulle, car lorsque la charge q_1 a été amenée de l'infini en A, l'opération n'a exigé aucun travail ($\vec{E} = \vec{0}$ et q_2 se trouve à l'infini).

L'énergie électrostatique du système constitué de q_1 et q_2 placées en A et B est donc égale au travail qu'il faut fournir pour amener la charge q_1 de l'infini au point B. La charge q_2 se trouve dans le champ \vec{E}_1 que crée la charge q_1 fixée en A. Le travail qu'il faut fournir pour vaincre la force électrostatique agissant sur q_2 est :

$$W = \int_{\infty}^B -\vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^B -q_2 \cdot \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = q_2 \cdot \int_{\infty}^B -\vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = q_2 \cdot \int_{\infty}^B dV = q_2 \cdot (V_B - V_{\infty})$$

Or $V(\infty) = 0$ et $V_B = q_1/(4\pi\epsilon_0 \cdot r)$ avec $r = AB$, alors:

$$W = q_1 \cdot q_2 / (4\pi\epsilon_0 \cdot r) = q_2 \cdot V_B$$

Pour constituer ce même système, on aurait pu procéder de manière inverse : la charge q_2 placée en B, on amène q_1 de l'infini au point A. Alors le travail que nécessite cette opération est égal à :

$$W' = q_1 \cdot V_A = q_1 \cdot q_2 / (4\pi\epsilon_0 \cdot r) = W \quad (r = AB = BA)$$

L'énergie électrostatique du système peut donc s'écrire:

$$\mathcal{E}_e = 1/2 \cdot q_2 \cdot (q_1 / (4\pi\epsilon_0 \cdot r)) + 1/2 \cdot q_1 \cdot (q_2 / (4\pi\epsilon_0 \cdot r)) = 1/2 \cdot q_2 \cdot V_B + 1/2 \cdot q_1 \cdot V_A$$

$$\mathcal{E}_e = 1/2 \cdot \sum_{i=1}^{i=2} q_i \cdot V_i$$

V_A est le potentiel dû à la charge q_2 au point A.

V_B est le potentiel dû à la charge q_1 au point B.

Pour n charges ponctuelles l'énergie électrostatique est :

$$\mathcal{E}_e = 1/2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} q_i \cdot V_i$$

où V_i est le potentiel électrostatique au point où se trouve la charge q_i , c'est-à-dire le potentiel créé par toutes les charges autres que q_i au point où se trouve q_i .

Résumé du chapitre 5

La capacité d'un condensateur, dont les armatures A_1 et A_2 portent les charges $+Q$ et $-Q$ et dont les potentiels sont respectivement V_1 et V_2 , est :

$$C = Q/(V_1 - V_2),$$

avec C toujours positive.

En particulier, le condensateur plan a une capacité égale :

$$C = \epsilon_0 \cdot S/e$$

ϵ_0 : permittivité du *vide*, S la surface de l'armature et e la distance entre les armatures (épaisseur).

Pour un condensateur sphérique ou cylindrique de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 la différence de potentiels est définie par:

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

La capacité d'une association en série de n condensateurs est définie par:

$$1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_n$$

La capacité d'une association en parallèle de n condensateurs est définie par:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

L'énergie électrostatique d'un condensateur chargé est :

$$W = 1/2 \cdot Q^2/C = 1/2 \cdot C \cdot V^2 = 1/2 \cdot V \cdot Q$$

L'énergie électrostatique d'un ensemble de n conducteurs en équilibre électrostatique est :

$$W = 1/2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} Q_i \cdot V_i$$

Pour n charges ponctuelles:

$$\mathcal{E}_e = 1/2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} q_i \cdot V_i$$

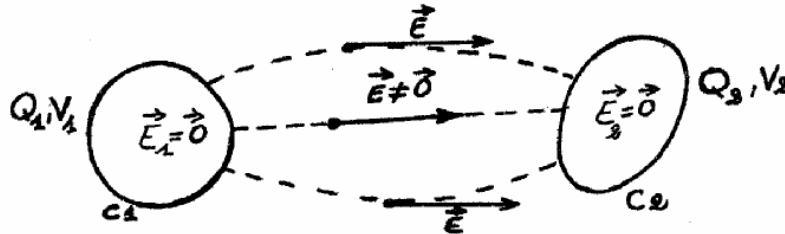
ELECTROCINETIQUE

Chap. 1 : Courant électrique. Résistance.

I- Courant électrique

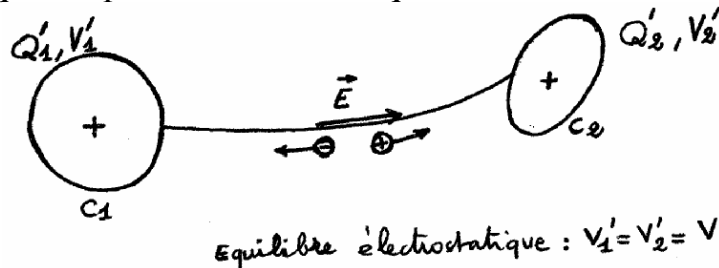
1- Définition du courant électrique.

Prenons deux conducteurs C_1 et C_2 , isolés, en équilibre électrostatique :



Le conducteur C_1 est au potentiel V_1 et porte une charge Q_1 . Le conducteur C_2 est au potentiel V_2 et porte une charge Q_2 .

On sait que le champ électrique est nul à l'intérieur de C_1 et C_2 et existe en dehors d'eux. Supposons que $V_1 > V_2$ alors le champ, entre eux, est dirigé de C_1 vers C_2 . En reliant C_1 à C_2 par l'intermédiaire d'un fil conducteur, il y a migration de charges d'un conducteur à l'autre. On a ainsi une rupture de l'équilibre électrostatique. L'ensemble des deux conducteurs reliés constitue un seul et unique conducteur non équipotentiel. La migration de charges est due alors à l'existence d'un champ à l'intérieur du conducteur de liaison. Ce champ devient nul lorsque l'équilibre électrostatique est établi de nouveau :

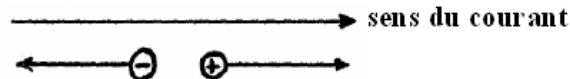


Si par exemple, $Q_1 > Q_2 > 0$ alors $V_1 > V_2$. A l'équilibre électrostatique le conducteur C_1 est au potentiel V et porte la charge Q_1' , et le conducteur C_2 est au même potentiel V que C_1 mais porte la charge Q_2' . Comme le potentiel de C_2 était inférieur à celui de C_1 les charges positives vont se déplacer de C_1 à C_2 . Autrement dit les charges négatives se déplacent de C_2 vers C_1 sous l'effet du champ \vec{E} .

Le mouvement de charges constitue ce qu'on appelle **courant électrique**. Ce courant s'arrête lorsque l'ensemble des deux conducteurs se trouve au même potentiel. Le champ est alors nul à l'intérieur du conducteur de liaison.

2-Sens du courant.

Par convention, le sens du courant est l'inverse de celui des déplacements des charges négatives (électrons):



3-Intensité du courant

L'intensité d'un courant est la quantité d'électricité Δq qui traverse une section S d'un plan d'observation pendant le temps Δt .

L'intensité instantanée du courant (ou courant instantané) est définie par:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta q / \Delta t = dq^+ / dt$$

Unité:

L'Ampère (A): c'est l'intensité d'un courant qui transporte 1 Coulomb par seconde (s) ;

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$$

Sous-multiples : le milliampère (mA) = 10^{-3} A

Le microampère (μA) = 10^{-6} A

On distingue:

- Un courant continu: son intensité ne varie pas dans le temps $I = Q/T = C^{te}$.
- Un courant variable: son intensité varie dans le temps $i = dq/dt$,

* dq est la somme algébrique des charges positives qui traversent pendant l'unité de temps la section dans le sens choisi comme positif, et des charges négatives qui le traversent en sens opposé.

4- Calcul de l'intensité d'un courant continu.

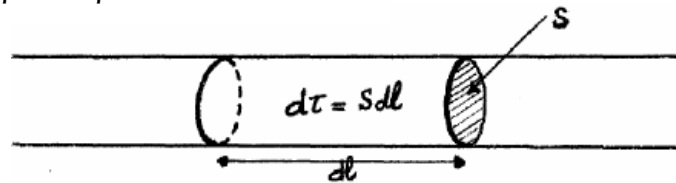
Soit n le nombre de charges élémentaires par unité de volume qui passe dans un conducteur. La densité volumique de charge est donc:

$$\rho = n.e = dq/d\tau$$

($d\tau$: élément de volume du conducteur, $dq > 0$ ou $dq < 0$: *même type de charges qui se déplacent*).

Soit v la vitesse de déplacement des charges (v est appelée vitesse de dérive). La charge qui a traversé la section s pendant le temps dt est :

$$dq = \rho.d\tau = \rho.s.dl$$



Comme $v = dl/dt$ (les lignes de courant sont parallèles à \vec{dl}), $dl = v.dt$, alors:

$$dq = \rho.s.v.dt \quad \text{et} \quad i = dq/dt = \rho.s.v = n.e.s.v$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{i} = \mathbf{n.e.s.v} = \mathbf{I} = \mathbf{C}^{te} \quad (v = C^{te})$$

s : surface en m^2

n : nombre d'électrons libres par m^3

e : charge de l'électron

v : vitesse de dérive en mètre par seconde (m/s)

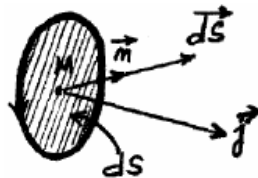
Remarque : Si l'on a plusieurs sortes de particules chargées, l'intensité devient :

$$\mathbf{I} = s(\mathbf{n}_1.e_1.v_1 + \mathbf{n}_2.e_2.v_2 + \mathbf{n}_3.e_3.v_3 + \dots) \quad \text{somme algébrique}$$

II- Densité de courant.

1- Définition.

Considérons une surface élémentaire dS orientée par le vecteur \vec{n} :



Nous avons vu que dans l'expression de l'intensité du courant i intervient la surface S traversée par les charges. Donc il existe un vecteur noté \vec{j} dont le flux est égal à l'intensité de ce courant:

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

\vec{j} est appelé densité de courant, c'est un vecteur tangent aux trajectoires des particules (ou lignes de courant), il est orienté dans le **sens** du mouvement des charges si elles sont **positives** (inverse si elles sont négatives).

Dans le cas général on a:

$$i = \iint_S j \cdot \cos\theta \cdot dS$$

l'intégration est étendue à toute la surface S de toute section du conducteur.

Dans le cas d'un courant constant, dans un conducteur à section droite constante, caractérisé par une densité volumique de charge ρ constante, \vec{dS} et \vec{j} sont colinéaires :

$$j = i/S = S \cdot n \cdot e \cdot v / S = n \cdot e \cdot v = \rho \cdot v,$$

ce que l'on peut écrire aussi:

$$\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}.$$

$$\text{Unité: } di = \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS \cdot \theta = 0 \quad \rightarrow \quad j = di/dS \text{ (A/m}^2\text{)}$$

2 Equation de continuité.

Considérons l'intérieur d'un conducteur parcouru par un courant, une surface fermée quelconque Σ et désignons par \mathbf{j}_n la projection du vecteur densité de courant \vec{j} ($\mathbf{j}_n = j \cdot \cos\theta$) sur la normale extérieure à un élément de surface $d\Sigma$. Alors, de la définition même de la densité de courant, il découle que la valeur de la charge positive sortant, par unité de temps, vers l'extérieur, par toute la surface Σ est égale à :

$$\oiint_{\Sigma} j_n \cdot d\Sigma = \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{d\Sigma} \text{ (}\mathbf{j}_n \text{ de même sens que les charges positives)}$$

où l'intégration est étendue à toute la surface fermée.

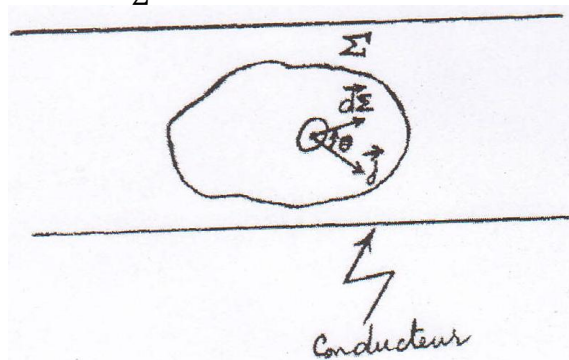
Dun autre côté, en vertu du principe de la conservation de l'électricité qui est l'une des lois fondamentales de l'électricité, les charges électriques ne peuvent ni s'annihiler (disparaître), ni être créées: elles ne peuvent que se redistribuer entre les corps (ou entre les différentes parties d'un corps), mais la somme totale des charges positives et des charges négatives produites est nulle. C'est pourquoi, si dq/dt est la variation, par unité de temps, de la charge positive contenue à l'intérieur de la surface fermée Σ , nous pouvons écrire :

$$-dq/dt = \oint_{\Sigma} j_n \cdot d\Sigma = \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{d\Sigma}$$

C'est l'équation de continuité.

D'après le théorème de Green nous avons :

$$\iiint_{\tau} \text{div} \vec{j} \cdot d\tau = \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{d\Sigma}$$



Localement nous pouvons écrire :

$$-d(dq/dt) = \text{div} \vec{j} \cdot d\tau$$

Comme $dq = \rho \cdot d\tau$, alors:

$$-d(\rho \cdot d\tau/dt) = \text{div} \vec{j} \cdot d\tau$$

Donc :

$$\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Dans le cas du courant continu $\rho = \text{cte}$ et $\text{div} \vec{j} = 0$.

III- Energie et puissance transportées par un courant.

Une charge dq , en se déplaçant d'un potentiel V_A a un potentiel V_B , effectue un travail :

$$dW = dq \cdot (V_A - V_B) = dq \cdot V_{AB} = i \cdot dt \cdot V_{AB} \quad (dq = i \cdot dt)$$

C'est l'énergie que fournit le courant i pendant le temps dt . Pour une durée de temps T , celle-ci est:

$$W = \int_0^T dW = V_{AB} \cdot \int_0^T i \cdot dt$$

Si le courant est constant nous avons:

$$i = I = \text{Cte} \quad \text{et} \quad W = V_{AB} \cdot I \cdot T$$

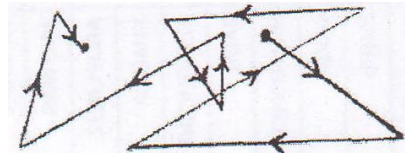
La puissance est l'énergie par unité de temps :

$$p = dW/dt = V_{AB} \cdot i$$

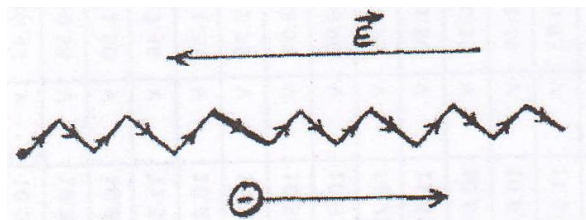
V_{AB} en Volt	(V)
i en Ampère	(A)
p en Watt	(W)
W en Joule	(J)

IV- Courant dans les conducteurs. Loi d'Ohm.

Dans un conducteur, **sous** le seul effet de l'agitation thermique, les électrons libres sont en perpétuel mouvement. Le mouvement est désordonné. En l'absence de champ électrique la vitesse moyenne de ces électrons est nulle.



Si nous appliquons un champ électrique \vec{E} à ces charges libres, celui-ci exerce une force électrique sur chacune d'entre elles. Ce champ électrique tend à orienter leurs trajectoires dans sa direction :



La vitesse moyenne de ces charges n'est plus nulle. Elle est appelée vitesse moyenne de dérive et notée v_d .

Exemple :

Soit un électron libre dans une portion de conducteur dans lequel règne un champ électrique \vec{E} . Cet électron est soumis à une force électrique dont l'expression est :

$$\vec{f}_e = e \cdot \vec{E}$$

Au cours de son déplacement, cet électron va subir des chocs de la part des autres particules. Sa trajectoire va être déviée et sa progression (son mouvement) sera freinée. Les chocs exercent sur cet électron une force de rappel proportionnelle à sa vitesse :

$$\vec{f}_r = -k \cdot \vec{v}$$

k est un coefficient de proportionnalité positif.

L'électron de masse m est soumis donc à une force totale :

$$\vec{f}_e + \vec{f}_r = m \cdot \vec{\gamma} \text{ (relation fondamentale de la dynamique)}$$

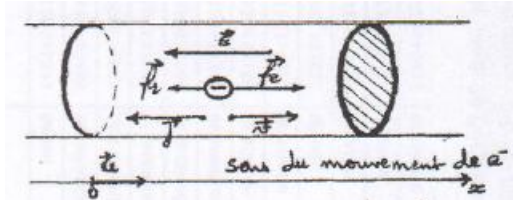
où $\vec{\gamma} = d\vec{v}/dt$ est l'accélération de l'électron.

Cette relation s'écrit comme suit:

$$e.\vec{E} - k.\vec{v} = m.d\vec{v}/dt$$

ou

$$d\vec{v}/dt e.\vec{E} - (k/m).\vec{v} = (e/m).\vec{E}.$$



Comme \vec{v} et \vec{E} sont colinéaires mais de sens opposés, cette dernière expression devient :

$$dv/dt + (k/m).v = - (e/m).E$$

La résolution de cette équation différentielle avec second membre donne :

$$\mathbf{v} = - (e.E/k).(1 - \exp(-k.t/m))$$

avec $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C, charge de l'électron.

Le terme $\exp(-k.t/m)$ correspond au courant transitoire qui s'annule à partir d'un certain temps. Un courant permanent s'établit et la vitesse correspondante est :

$$\mathbf{v}_d = e.E/k$$

ou

$$\vec{v} = \vec{v}_d = - e.\vec{E}/k$$

On pose $\mu = - e/k$, μ est appelé mobilité de l'électron. C'est la propriété que possède un matériau de mettre en mouvement, plus ou moins rapidement, ses électrons sous l'effet d'un champ électrique :

$$\mu = v/E$$

Comme $\vec{j} = \rho.\vec{v}$, alors $\vec{j} = n.e.\vec{v} = - n.e. \mu. \vec{E} = \gamma.\vec{E}$, γ est appelée conductivité du matériau. C'est la propriété que possède un matériau d'être le siège d'un courant sous l'effet d'un champ électrique.

La relation:

$$\vec{j} = \gamma.\vec{E},$$

est valable dans le cas où le matériau est homogène, isotrope et à température constante. Elle constitue la loi d'Ohm. Puisque \vec{j} et \vec{E} sont colinéaires, les lignes de courant sont confondues avec celle du champ :

$$\vec{E} = (1/\gamma).\vec{j} = \rho_r.\vec{j}$$

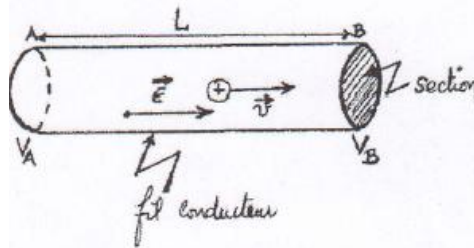
$\rho_r = 1/\gamma$ est appelée résistivité du matériau.

V- Résistance d'un conducteur. Loi d'Ohm.

1- Résistance.

Soit un conducteur filiforme de section constante S traversé par un courant constant i . La densité de courant est :

$$j = i/S = C^{te}.$$



Le champ électrique E correspondant est :

$$E = \rho_r \cdot j = C^{te}$$

Comme :

$$E = (V_A - V_B)/L$$

L étant la longueur du fil, on écrit :

$$(V_A - V_B)/L = \rho_r \cdot i/S$$

et

$$(V_A - V_B) = (\rho_r \cdot L/S) \cdot i$$

On pose:

$$\mathbf{R} = \rho_r \cdot L/S,$$

R est appelée résistance de la longueur L du fil conducteur entre les points A et B.

2- Loi d'Ohm.

La relation:

$$\mathbf{V_A - V_B = R \cdot i}$$

exprime la loi d'Ohm.

En appliquant une différence de potentiels (d.d.p) $V_A - V_B$ à un conducteur de résistance R , le courant qui le traverse est :

$$\mathbf{i = (V_A - V_B)/R = V_{AB}/R}$$

i : en Ampères	(A)
V_{AB} : en Volts	(V)
R : en Ohms	(Ω)

L'Ohm est la résistance d'un conducteur qui laisse passer un courant de **1 Ampère** lorsqu'on lui applique une d.d.p de **1 Volt**.

Multiples:	le Kilo Ohm,	$1 \text{ K}\Omega = 10^3 \Omega$
	e Meg Ohm,	$1 \text{ M}\Omega = 10^6 \Omega$
Sous-multiples:	Le Micro Ohm	$1 \mu\Omega = 10^{-6} \Omega$

3- Résistivité.

On sait que:

$$\begin{aligned}R &= \rho_r \cdot L/S, \\ \rho_r &= 1/\gamma, (\gamma \text{ conductivité}) \\ \rho_r &= R \cdot S/L\end{aligned}$$

La résistivité est donc la résistance d'un conducteur de section et de longueur unitaires (égales à 1).

R : en Ω

S : en m^2

L: en m

ρ_r : en $m \cdot \Omega$ (parfois en $cm \cdot \Omega$)

En général la résistivité dépend de la température :

$$\rho_r = \rho_0 \cdot (1 + \alpha t)$$

ρ_0 : résistivité à $0^\circ C$

α : coefficient qui caractérise l'influence de la température sur la substance considérée.

t : température en $^\circ C$

VI- Effet Joule.

L effet joule est le dégagement de chaleur créée dans une résistance par le passage d'un courant électrique :

$$dW_{AB} = V_{AB} \cdot i \cdot dt$$

Si cette énergie est fournie à une résistance R, elle est entièrement transformée en chaleur. Comme on a:

$$V_{AB} = Ri \quad (\text{loi d'Ohm})$$

alors

$$dW_{AB} = R \cdot i^2 \cdot dt \quad (\text{loi de Joule})$$

La puissance perdue par effet Joule est :

$$p = dW_{AB}/dt = R \cdot i^2 = V_{AB}^2/R$$

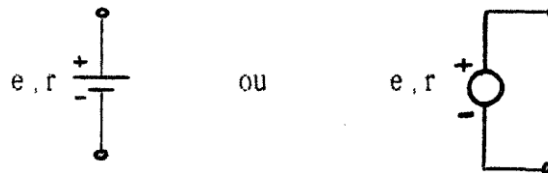
Chap.2 : Réseaux électriques.

I Définitions.

1- Générateur:

C'est un élément polarisé qui transforme de l'énergie chimique en énergie électrique (pile, accumulateur) ou de l'énergie mécanique en énergie électrique (dynamo, turbines hydrauliques). Il impose au circuit extérieur sa propre polarité et le sens de circulation du courant. Il possède une force électromotrice e (f.e.m) et une résistance interne r .

Symbole:



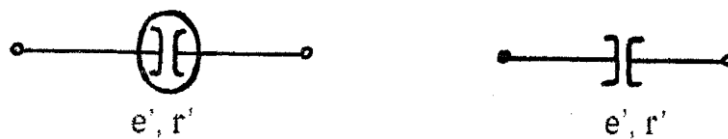
pile **ou** accumulateur

Un générateur de tension est parfait lorsque sa résistance interne est nulle sinon il est réel.

2- Récepteur:

Un récepteur est soit un élément passif (résistance), soit actif (accumulateurs en charge, cuves d'électrolyses) transformant de l'énergie électrique en énergie chimique ou de l'énergie électrique en énergie mécanique (moteurs). Un récepteur absorbe donc de l'énergie électrique. On lui impose un courant en sens inverse de sa polarité. Sauf la résistance, un récepteur actif possède une force contre- électromotrice e' (f.c.e.m) et une résistance interne r' .

Symbole:



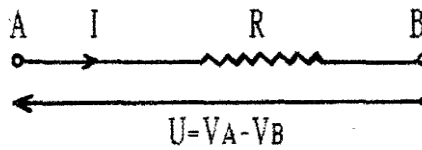
récepteur actif

II- Loi d'Ohm généralisée.

1- Convention:

Soit une résistance R parcourue par un courant d'intensité I . La loi d'Ohm s'écrit :

$$U = R.I$$



La différence de potentiels (d.d.p) $U = V_A - V_B$ est, d'après la convention, représentée par une flèche dont l'origine est en B et l'extrémité en A. Le courant d'intensité I est représenté par une flèche inverse à celle de U .

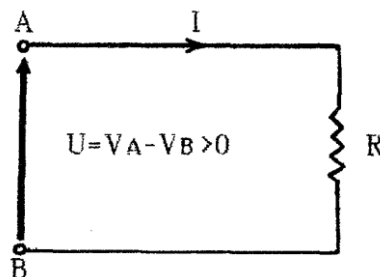
En effet on a:

$$U = V_A - V_B = RI \quad (R > 0)$$

Si I est pris comme positif dans le sens de A vers B, la d.d.p $U = V_A - V_B$ est positive aussi. Donc le potentiel en A est supérieur au potentiel en B.

Le sens positif du courant d'intensité I impose celui de la différence de potentiels. Les flèches représentant U et I sont donc de sens contraires.

On peut représenter la résistance par :



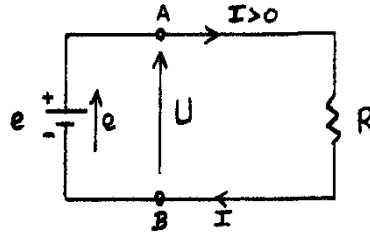
Remarque:

La résistance R est un élément passif, donc non polarisée.

2- Exemples:

Calculons le courant qui traverse une résistance branchée aux bornes d'un générateur de tension ou débité dans un récepteur actif.

a- Générateur de tension parfait.

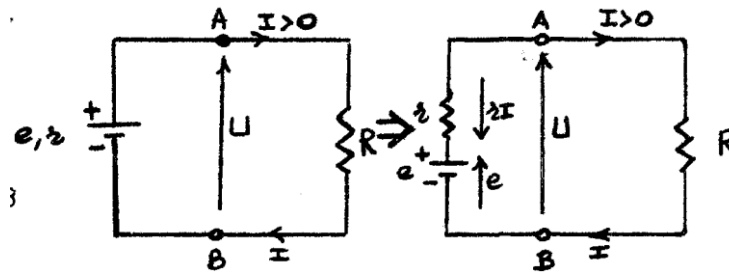


La résistance interne du générateur est nulle :

$$U = e = R \cdot I = V_A - V_B$$

$$\implies I = e/R$$

b- Générateur de tension réel,

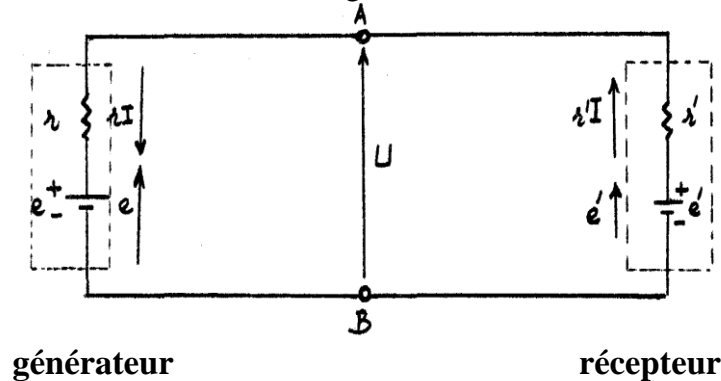


La résistance interne du générateur est non nulle :

$$U = e - r \cdot I = R \cdot I = V_A - V_B$$

$$\implies I = e/(r + R)$$

c- Récepteur actif aux bornes d'un générateur réel.



$$U = e - r \cdot I = e' + r' \cdot I = V_A - V_B \implies I = (e + e')/(r + r')$$

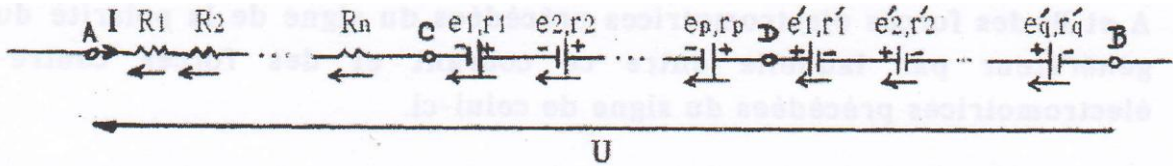
Remarques :

* Un récepteur actif est polarisé. C'est le générateur qui impose le sens du courant.

* Si $e > e' \implies I > 0$ donc nous avons bien un générateur à gauche et un récepteur à droite, sinon les rôles sont inversés.

3- Loi d'Ohm généralisée.

Soit un circuit comportant en série des résistances R_i , des générateurs de forces électromotrices e_i et de résistances internes r_i , et des récepteurs de forces contre-électromotrices e_i' et de résistances internes r_i' . Un courant d'intensité I le parcourt dans le sens de A vers B :



La différence de potentiels entre A et B est $U = V_A - V_B$:

$$U = V_A - V_B = \sum_{i=1}^n R_i \cdot I - \sum_{i=1}^p e_i + \sum_{i=1}^p r_i \cdot I + \sum_{i=1}^q e_i' + \sum_{i=1}^q r_i' \cdot I$$

Les forces électromotrices e_i ont le signe de la borne par laquelle le courant d'intensité I entre dans le générateur et les forces contre-électromotrices e_i' ont le même signe que I .

Si on pose:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i + \sum_{i=1}^p r_i + \sum_{i=1}^q r_i'$$

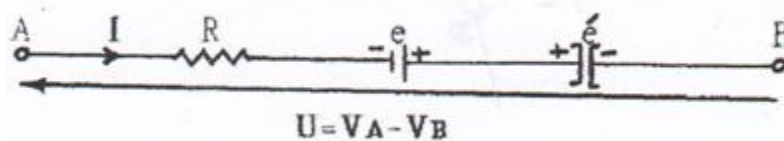
$$e = \sum_{i=1}^p e_i$$

$$e' = \sum_{i=1}^q e_i'$$

nous aurons :

$$U = V_A - V_B = R \cdot I - e + e'$$

ce qui correspond à un circuit comportant une résistance R , un générateur parfait de force électromotrice e et un récepteur de force contre-électromotrice e' et de résistance interne nulle :



La relation,

$$V_A - V_B = R.I - e + e'$$

constitue la loi d'Ohm généralisée.

La différence de potentiels entre deux points A et B d'un circuit parcouru par un courant d'intensité I de A vers B est égale à la somme des chutes de tensions dans l'ensemble des résistances comprises entre A et B, des forces électromotrices précédées du signe de la polarité du générateur par laquelle entre ce courant et des forces contre-électromotrices précédées du signe de celui-ci.

Remarque:

On distingue deux sortes de récepteurs :

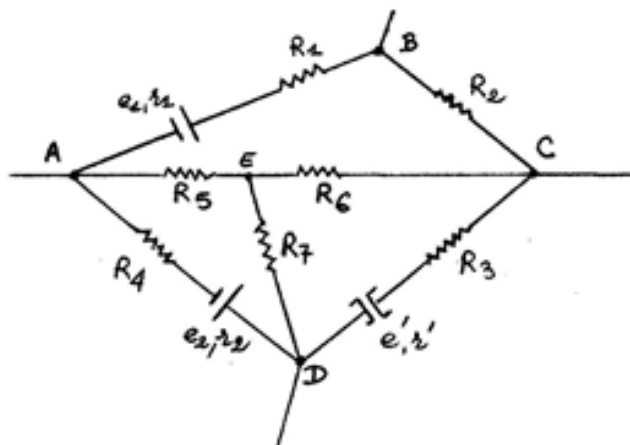
- les récepteurs non polarisés : moteurs, résistance morte;
- les récepteurs polarisés : accumulateurs, etc

III- Calcul de courants et de tensions dans un réseau électrique.

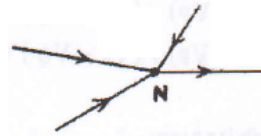
1- Définitions :

a- Réseau électrique : un réseau électrique est une association d'un ensemble d'éléments passifs (résistances) et actifs (générateurs, récepteurs polarisés, ...) accomplissant une tâche bien déterminée (la charge d'accumulateurs, l'électrolyse, ...).

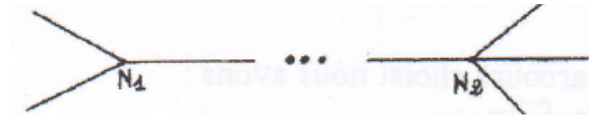
Exemple :



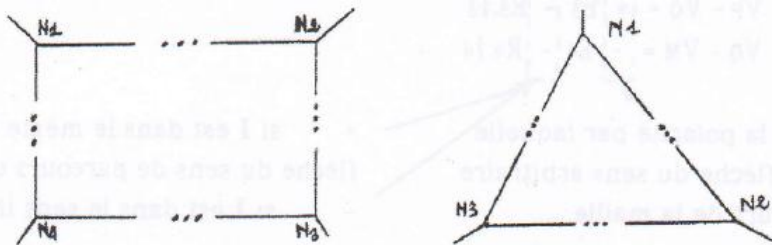
b- Nœud : On appelle nœud dans un réseau, un point où se rejoignent au moins trois courants (ou trois fils).



c- Branche : On appelle branche une portion de circuit comprise entre deux nœuds consécutifs.



d- Maille : On appelle maille tout circuit constitué d'un nombre quelconque de branches en série.



2- Lois de Kirchhoff.

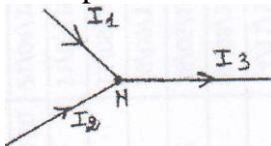
a- **Enoncé des lois.**

i- Loi des nœuds : pour chaque nœud d'un réseau nous avons,

$$\sum I_k = 0,$$

c'est-à-dire la somme algébrique des intensités des courants qui passent par un nœud est nulle.

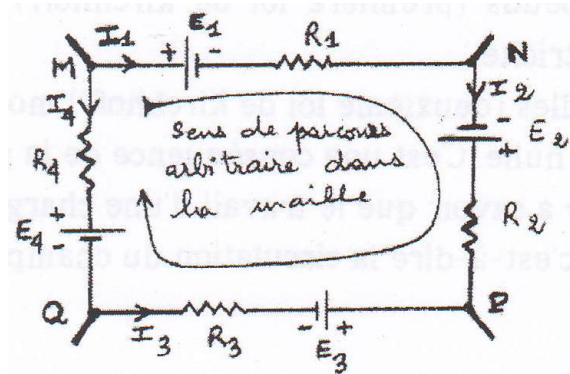
Exemple:



$$I_3 = I_1 + I_2 \text{ ou } I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

ii- Loi des mailles : cette loi résulte de l'application de la loi d'Ohm généralisée au parcours complet d'une maille.

Exemple:



Nous écrivons tout d'abord :

$$V_M - V_M = (V_M - V_N) + (V_N - V_P) + (V_P - V_Q) + (V_Q - V_M)$$

$$0 = (V_M - V_N) + (V_N - V_P) + (V_P - V_Q) + (V_Q - V_M)$$

Ensuite nous fixons de façon arbitraire :

- un sens de parcours dans la maille,
- le sens des courants dans chaque branche.

D'après le sens de parcours choisi nous avons :

D'après le sens de parcours choisi nous avons :

$$\begin{array}{l} V_M - V_N = \left[\begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ - \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} + \\ + \\ - \\ - \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} R_1 \cdot I_1 \\ R_2 \cdot I_2 \\ R_3 \cdot I_3 \\ R_4 \cdot I_4 \end{array} \right] \\ V_N - V_P = \\ V_P - V_Q = \\ V_Q - V_M = \end{array}$$

Signe de la polarité par laquelle entre la flèche du sens arbitraire de parcours de la maille.

+ si I est dans le même sens que la flèche du sens de parcours de la maille.
- si I est dans le sens inverse.

En additionnant membre à membre ces égalités, on trouve que la somme des premiers membres est nulle, d'où :

$$E_1 + R_1 \cdot I_1 - E_2 + R_2 \cdot I_2 + E_3 - R_3 \cdot I_3 - E_4 - R_4 \cdot I_4 = 0$$

ou $R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 - R_4 \cdot I_4 = -E_1 + E_2 - E_3 + E_4$

Donc :

$$\sum R_i \cdot I_i = \sum E_j$$

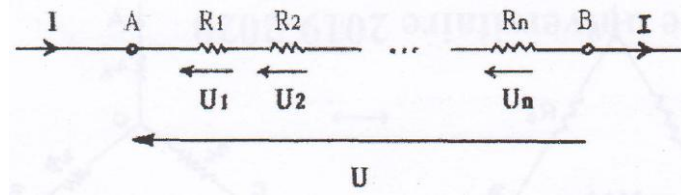
Une telle relation peut être obtenue pour n'importe quelle autre maille. Ainsi, dans une maille, la somme algébrique de toutes les chutes de tension est égale à la somme algébrique de toutes les forces électromotrices.

Remarques:

- La loi des nœuds (première loi de Kirchhoff) traduit le principe de la conservation de l'électricité.
- La loi des mailles (deuxième loi de Kirchhoff) montre que la tension le long d'un circuit fermé est nulle. C'est une conséquence de la propriété fondamentale du champ électrostatique à savoir que le travail d'une charge se déplaçant le long d'un circuit fermé est nul, c'est-à-dire la circulation du champ le long d'un circuit fermé est nulle.

b- Application.

1/- Calculons la résistance équivalente à n résistances groupées en série :



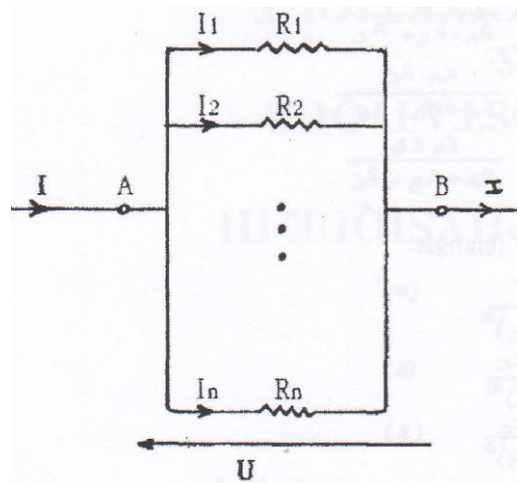
$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$U_1 = R_1 \cdot I, \quad U_2 = R_2 \cdot I, \quad \dots \quad U_n = R_n \cdot I.$$

$$\implies U = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + \dots + R_n \cdot I = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \cdot I = R_S \cdot I.$$

$$\implies \mathbf{R_S = R_1 + R_2 + \dots + R_n}$$

2/- Calculons la résistance équivalente à n résistances groupées en parallèle :



$$U = R_1 \cdot I_1 = R_2 \cdot I_2 = \dots = R_n \cdot I_n.$$

$$\implies I_1 = U/R_1, \quad I_2 = U/R_2 \quad \dots \quad I_n = U/R_n$$

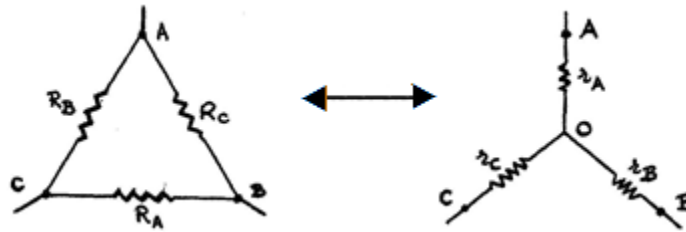
Or :

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = U/R_1 + U/R_2 + \dots + U/R_n = U/R_p \text{ (loi des nœuds)}$$

$$\implies \mathbf{1/R_p = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_n}$$

3)- Transformation de Kennely:

C'est une transformation d'un réseau étoile en réseau triangle réciproquement.



i/ Passage triangle \rightarrow étoile :

$$R_{AC} = i_A + i_C = \frac{R_B \cdot (R_A + R_C)}{R_A + R_B + R_C} \quad (1)$$

$$R_{AB} = i_A + i_B = \frac{R_C (R_A + R_B)}{R_A + R_B + R_C} \quad (2)$$

$$R_{BC} = i_B + i_C = \frac{R_A (R_B + R_C)}{R_A + R_B + R_C} \quad (3)$$

$$\Rightarrow i_A + i_B + i_C = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} \quad (4)$$

$$(4) - (3) \Rightarrow i_A = \frac{R_B \cdot R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

$$(4) - (1) \Rightarrow i_B = \frac{R_A \cdot R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

$$(4) - (2) \Rightarrow i_C = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$$

ii/ Passage étoile \rightarrow triangle :

$$i_A \cdot i_B = \frac{R_A \cdot R_B \cdot R_C^2}{(R_A + R_B + R_C)^2} \quad (5)$$

$$i_B \cdot i_C = \frac{R_A^2 \cdot R_B \cdot R_C}{(R_A + R_B + R_C)^2} \quad (6)$$

$$i_A \cdot i_C = \frac{R_A \cdot R_B^2 \cdot R_C}{(R_A + R_B + R_C)^2} \quad (7)$$

$$(5) + (6) + (7) \Rightarrow i_A \cdot i_B + i_B \cdot i_C + i_A \cdot i_C = \frac{R_A \cdot R_B \cdot R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

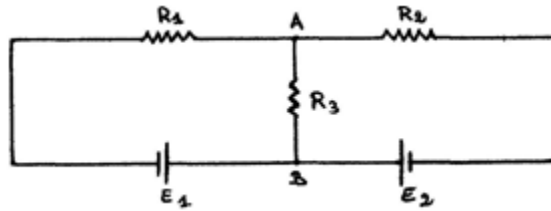
$$\Rightarrow R_A = \frac{i_A \cdot i_B + i_B \cdot i_C + i_A \cdot i_C}{i_A}$$

$$R_B = \frac{i_A \cdot i_B + i_B \cdot i_C + i_A \cdot i_C}{i_B}$$

$$R_C = \frac{i_A \cdot i_B + i_B \cdot i_C + i_A \cdot i_C}{i_C}$$

4/- Exemple de calcul de courants dans un réseau:

Soit le réseau suivant :



Déterminer les intensités de courant dans les différentes branches ?

Résolution :

1/ On commence par introduire les inconnues I_1, I_2, \dots, I_n représentant les intensités de courant dans les n branches du réseau, et donner un sens arbitraire aux courants.

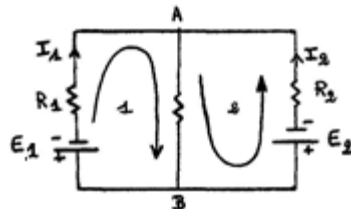
2/ Appliquer les lois de Kirchhoff:

- lois des nœuds
- lois des mailles

On aboutit à un système de n équations à n inconnues.

Dans le cas de l'exemple précédent nous avons :

$$\begin{array}{ll} I_1 + I_2 - I_3 = 0 & \text{Nœud (A) ou Nœud (B)} \\ R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 + E_1 = 0 & \text{Maille (1)} \\ R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 + E_2 = 0 & \text{Maille (2)} \end{array}$$



D'où le système d'équations :

$$\begin{array}{l} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ R_1 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 = - E_1 \\ 0 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 = - E_2 \end{array}$$

A.N. :

$$R_1 = 1 \Omega \quad R_2 = 2 \Omega \quad R_3 = 4 \Omega \quad E_1 = 16 \text{ V} \quad E_2 = 10 \text{ V}$$

Le système devient :

$$\begin{array}{l} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 + 0 \cdot I_2 + 4 \cdot I_3 = - 16 \\ 0 \cdot I_1 + 2 \cdot I_2 + 4 \cdot I_3 = - 10 \end{array}$$

La résolution de ce système donne des valeurs algébriques des intensités de courant dans les différentes branches du circuit :

$$I_1 = -4 \text{ A}$$

$$I_2 = 1 \text{ A}$$

$$I_3 = -3 \text{ A}$$

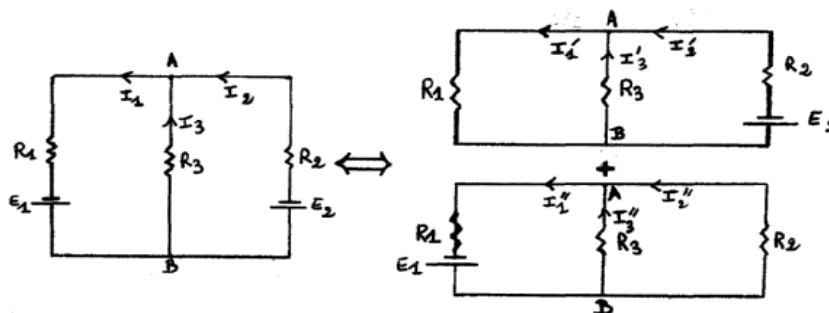
Remarque:

Le sens conventionnel des courants d'intensités I_1 et I_3 est l'inverse de celui choisi arbitrairement sur le réseau car I_1 et I_3 sont négatifs.

3- Théorème de superposition.

Lorsque dans un réseau de conducteurs, on superpose plusieurs systèmes de f.e.m et f.c.e.m, l'intensité du courant dans chaque branche est la somme des intensités dans cette branche dues à chacun des systèmes agissant seul.

Exemple :



a- 1er système : $E_1 = 0$

$$I_1' = I_2' + I_3'$$

Nœud (A)

$$I_1' - I_2' - I_3' = 0$$

$$R_1 \cdot I_1' + R_3 \cdot I_3' = 0$$

Maille (1) \implies

$$R_1 \cdot I_1' + R_3 \cdot I_3' = 0$$

$$R_2 \cdot I_2' - R_3 \cdot I_3' + E_2 = 0$$

Maille (2)

$$R_2 \cdot I_2' - R_3 \cdot I_3' = -E_2$$

On obtient :

$$I_1' = -R_3 \cdot E_2 / D$$

$$I_2' = -(R_1 + R_3) \cdot E_2 / D$$

$$I_3' = R_1 \cdot E_2 / D$$

avec : $D = R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3$

b- 2eme système :

$$\begin{array}{llll}
 I_1'' = I_2'' + I_3'' & \text{Nœud (A)} & & I_1'' - I_2'' - I_3'' = 0 \\
 R_1 \cdot I_1'' + R_3 \cdot I_3'' - E_1 = 0 & \text{Maille (1)} & \implies & R_1 \cdot I_1'' + R_3 \cdot I_3'' = E_1 \\
 R_2 \cdot I_2'' - R_3 \cdot I_3'' = 0 & \text{Maille (2)} & & R_2 \cdot I_2'' - R_3 \cdot I_3'' = 0
 \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 I_1'' &= (R_2 + R_3) \cdot E_1 / D \\
 I_2'' &= R_3 \cdot E_1 / D \\
 I_3'' &= R_2 \cdot E_1 / D
 \end{aligned}$$

c- On superpose les deux systèmes précédents; les courants dans chaque branche deviennent:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_1' + I_1'' = ((R_2 + R_3) \cdot E_1 - R_3 \cdot E_2) / (R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3) \\
 I_2 &= I_2' + I_2'' = (R_3 \cdot E_1 - (R_1 + R_3) \cdot E_2) / (R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3) \\
 I_3 &= I_3' + I_3'' = (R_2 \cdot E_1 + R_1 \cdot E_2) / (R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3)
 \end{aligned}$$

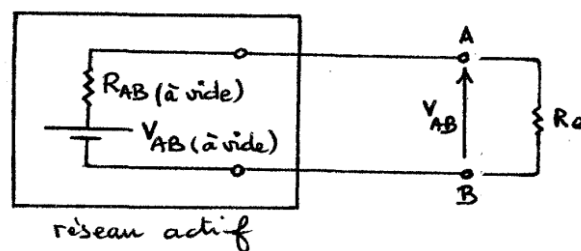
A.N. :

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 1 \, \Omega & R_2 &= 2 \, \Omega & R_3 &= 4 \, \Omega & E_1 &= 16 \, \text{V} & E_2 &= 10 \, \text{V} \\
 \implies & I_1 &= 4 \, \text{A} \\
 & I_2 &= 1 \, \text{A} \\
 & I_3 &= 3 \, \text{A}
 \end{aligned}$$

On retrouve les mêmes résultats que précédemment en tenant compte du sens des courants bien sûr.

2- Théorème de Thévenin.

Soit un réseau constitué de générateurs et de récepteurs. Considérons deux points A et B du circuit.



Si on branche entre A et B une résistance extérieure R_e , l'intensité du courant I_{AB} parcourant cette résistance est donnée d'après le théorème de Thévenin par l'expression:

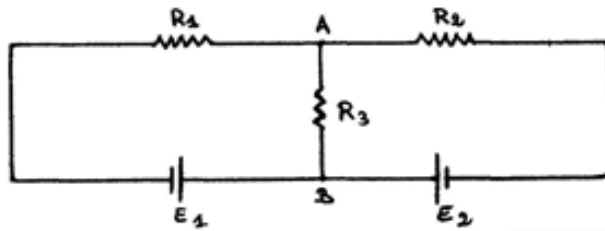
$$I_{AB} = V_{AB}/(R_e + R_{AB})$$

où :

- V est la différence de potentiels entre A et B, **Re étant enlevée.**
- R_{AB} est la résistance vue entre A et B en remplaçant les f.e.m et f.c.e.m par leurs résistances internes, **Re étant toujours enlevée.**

Exemple:

Calculer, par le théorème de Thévenin, le courant qui circule dans la branche AB, contenant la résistance R_3 , du réseau suivant :



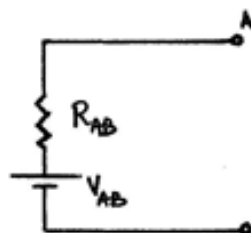
Résolution :

On procède en deux étapes:

a- La branche AB étant enlevée, on calcule **la tension V_{AB}** qui apparaît entre les bornes A et B. Cette tension constitue la f.e.m du générateur de Thévenin.

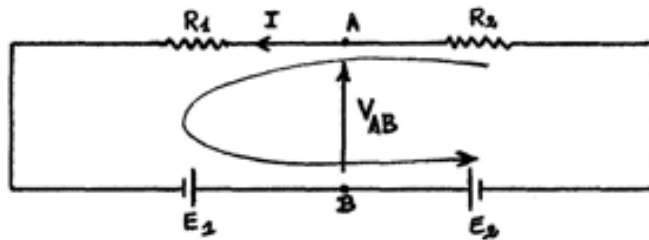
b- La branche AB étant toujours enlevée, on court-circuite les f.e.m des générateurs tout en maintenant dans les différentes branches leurs résistances internes et on calcule **R_{AB}** entre les bornes A et B. Cette résistance est la résistance interne du générateur de Thévenin.

Le générateur de Thévenin est schématisé par :



Dans le cas de l'exemple précédent nous avons :

i/ R_3 enlevée ; le circuit devient :



Avant de calculer V_{AB} , on commence par chercher l'intensité I du courant qui circule dans la maille. On adopte ainsi un sens de parcours dans cette maille :

$$R_1 \cdot I - E_1 + E_2 + R_2 \cdot I = 0 \quad (\text{loi d'Ohm généralisée})$$

$$\implies I \cdot (R_1 + R_2) = E_1 - E_2$$

et :

$$I = (E_1 - E_2) / (R_1 + R_2)$$

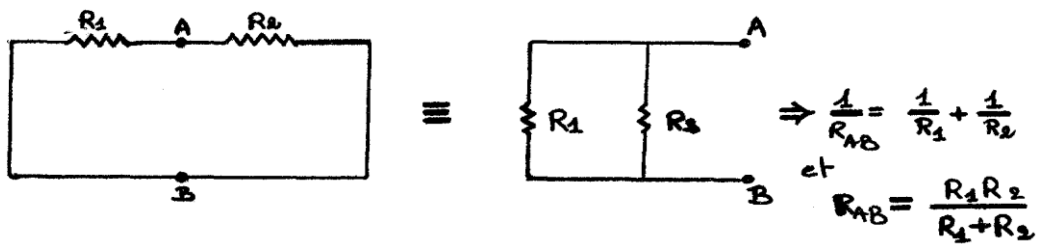
L'expression de V_{AB} est :

$$V_{AB} = V_A - V_B = R_1 \cdot I - E_1 = -E_2 - R_2 \cdot I$$

A.N. :

$$I = 2A \quad V_{AB} = -14V$$

ii/ R_3 toujours enlevée, on détermine la résistance équivalente R_{AB} en court-circuitant les générateurs. Le circuit devient :



A.N. :

$$R_{AB} = 2/3 \Omega = 0,667 \Omega$$

iii/ Calcul de I_{AB} :

$$I_{AB} = V_{AB} / (R_e + R_{AB})$$

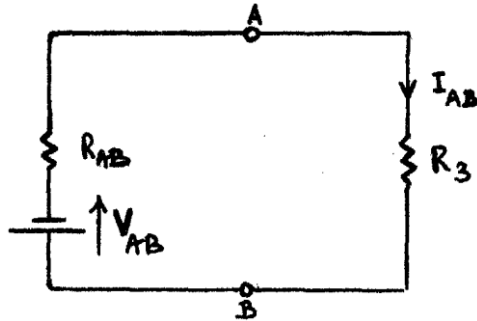
avec,

$$V_{AB} = -14V \quad R_{AB} = 2/3 \Omega \quad R_e = R_3 = 4 \Omega$$

$$\implies I = -3A$$

Conclusion :

Le schéma du générateur de Thévenin est tel que :

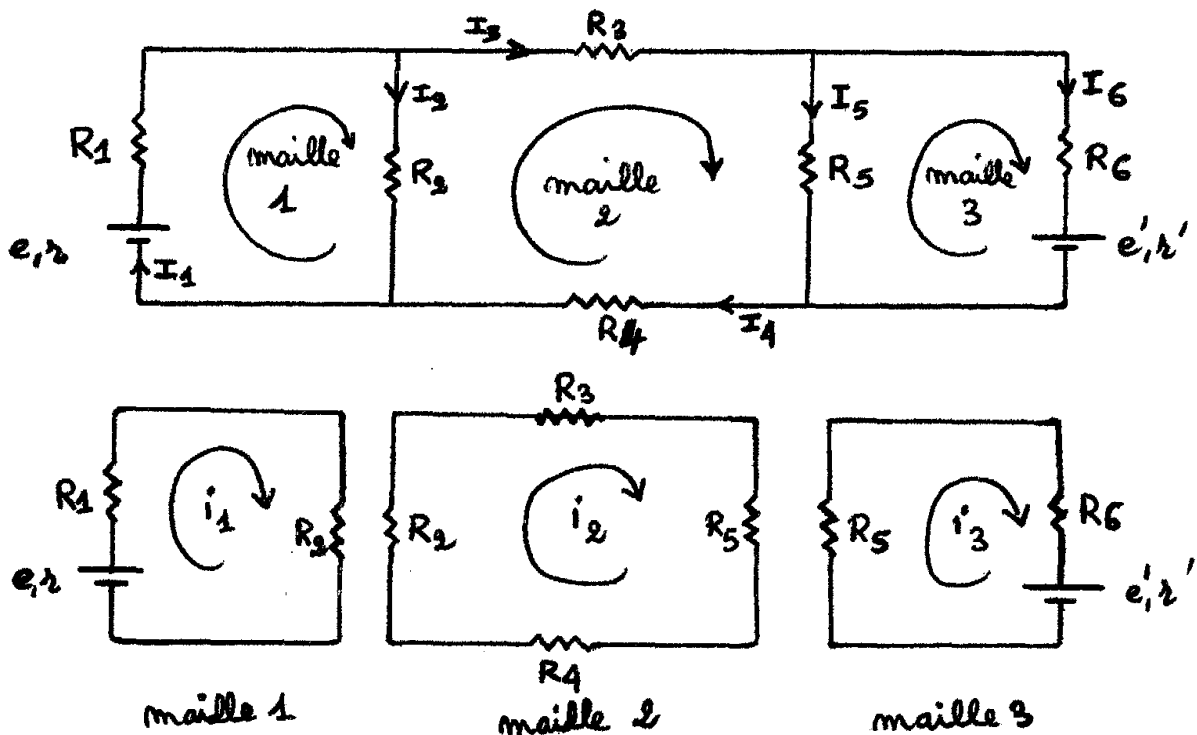


Le potentiel en B est supérieur au potentiel en A.

5- Méthode des mailles indépendantes.

Pour des réseaux plus complexes, comportant plus de deux mailles, il est plus commode d'utiliser la méthode des mailles indépendantes. Pour illustrer celle-ci nous traitons l'exemple suivant. Soit à calculer les courants dans chaque branche I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 et I_6 .

Le réseau comporte trois mailles indépendantes, maille 1, maille 2, et maille 3. Nous séparons celles-ci comme suit :



Nous fixons arbitrairement dans chaque maille un sens de parcours qui coïncidera avec le sens du courant qui la parcourt.

La résistance R_2 est parcourue à la fois par i_1 et i_2 et la résistance R_5 est parcourue par i_2 et i_3 ; car ces deux résistances sont communes aux maille 1 et maille 2 d'une part et aux maille 2 et maille 3 d'autre part. Les courants dans chaque branche du réseau précédent sont déterminés en fonction des courants i_1 , i_2 et i_3 par :

$$I_1 = i_1 \quad I_2 = i_1 - i_2 \quad I_3 = i_2 \quad I_4 = i_2 \quad I_5 = i_2 - i_3 \quad I_6 = i_3$$

En appliquant la loi d'Ohm généralisée dans chacune des trois mailles indépendantes nous obtenons le système d'équations suivant :

$$-e + r.i_1 + R_1.i_1 + R_2.(i_1 - i_2) = 0 \quad \text{maille 1}$$

$$R_2.(i_2 - i_1) + R_3.i_2 + R_5.(i_2 - i_3) + R_4.i_2 = 0 \quad \text{maille 2}$$

$$R_5.(i_3 - i_2) + R_6.i_3 + e' + r'.i_3 = 0 \quad \text{maille 3}$$

ou

$$(r + R_1 + R_2).i_1 - R_2.i_2 = e \quad (1)$$

$$-R_2.i_1 + (R_2 + R_3 + R_4 + R_5).i_2 - R_5.i_3 = 0 \quad (2)$$

$$-R_5.i_2 + (R_5 + R_6 + r').i_3 = -e' \quad (3)$$

Ainsi nous sommes passés d'un système de 6 inconnues I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 et I_6 à un système à 3 inconnues i_1, i_2 et i_3 . La connaissance de ces trois courants permet de calculer le courant dans chaque branche du réseau.

A.N. :

Si toutes les résistances sont égales 1Ω , $e = 25 \text{ V}$ et $e' = 2 \text{ V}$, nous avons :

$$3i_1 - i_2 = 25 \quad i_1 = 9,1 \text{ A}$$

$$-i_1 + 4i_2 - i_3 = 0 \quad \implies i_2 = 2,3 \text{ A}$$

$$-i_2 + 3i_3 = -2 \quad i_3 = 0,1 \text{ A}$$

Et enfin les courants recherchés sont :

$$I_1 = 9,1 \text{ A}$$

$$I_2 = 6,8 \text{ A}$$

$$I_3 = 2,3 \text{ A}$$

$$I_4 = 2,3 \text{ A}$$

$$I_5 = 2,2 \text{ A}$$

$$I_6 = 0,1 \text{ A}$$