Cours avec T.D corrigé d'Analyse 2
Filière SMAI-S2

PR. MOHAMMED MOUSSA

Département de Mathématique
Faculté des sciences
Université Ibn Tofail, Kénitra
mohammed.moussa@uit.ac.ma

Mars 2018

Table des matières

Avant-Propos

Ce polycopié est destiné aux étudiants de la filière SMAI (S2), résumant le cours du module d'analyse 2. Le polycopié contient essentiellement les définitions, les théorèmes avec des exemples mais les démonstrations seront présentées aux séances de cours. Donc, pour une bonne assimilation du cours la présence de l'étudiant est indispensable. Les T.D ainsi que leurs corrigés se trouvent à la fin du polycopié .

Le cours comprend quatre chapitres à savoir

1. ***Intégrales de Riemann***
2. ***Calcul des primitives***,
3. ***Intégrales généralisées***,
4. ***Équations différentielles***.

Chapitre 1

Intégrales de Riemann

1.1 Introduction

Dans tout ce chapitre, on considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On introduit, dans ce chapitre, la théorie d'intégration au sens se Riemann, par les sommes de Darboux inférieure et supérieure, ou de façon équivalente, les fonctions en escalier. Les intégrales de Riemann sont définies pour une fonction **bornée** sur un intervalle **fermé borné**, lorsque l'une des hypothèses n'est pas vérifiée, il s'agit d'une intégrale de **Riemann généralisée** qui peut converger ou non. On commence par définir l'intégrale d'une fonction en escalier comme étant la somme de surfaces de rectangle. Après, on encadre une fonction bornée par deux fonctions en escalier, dont la différence des intégrales est négligeable, ce qui servira après par définir l'intégrabilité d'une fonction bornée. On montre ainsi, que la fonction de Dirichlet n'est pas intégrable sur tout intervalle fermé borné, que toute fonction monotone est intégrable, que toute fonction uniformément continue est intégrable et donc, en particulier par le théorème de Heine, toute fonction continue est intégrable. On montre aussi les principales propriétés des intégrales de Riemann, à savoir, la linéarité, la positivité, la croissance, la relation de Chasles et la formule de la moyenne. On montre aussi, que l'intégrale d'une fonction, intégrable au sens de Riemann, est invariant si la fonction change de valeurs en un nombre fini de points.

1.2 Quelques rappels

1. On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ tout ensemble I vérifiant la propriété suivante $\forall x, y \in I$, $x < z < y \Rightarrow z \in I$
2. $\mathbb{R}$ admet la **propriété de la borne supérieure**, c'est à dire, toute partie $A \subset \mathbb{R}$ majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. borne inférieure).
3. **Caractérisation de la borne supérieure**. $M = \sup A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_A \in A, \quad M - \varepsilon < x_A \leq M$
4. Toute partie bornée (majorée et minorée) admet à la fois une borne inférieure et une borne supérieure et on a $A \subset [\inf A, \sup A]$
5. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$, si $A \subset B \subset$ alors $\sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$.
6. En particulier $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ et $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$

1.3 Subdivision d'un intervalle

Définition 1.1 *Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, on appelle* ***subdivision****, $\mathcal{S}$, de $[a, b]$ toute suite finie, $(t_i)_{0\leq i\leq n}$, strictement croissante de $[a, b]$ telle que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.*

On appelle ***pas de la subdivision*** *le nombre strictement positif $\rho(\mathcal{S})$ donné par :*

$$\rho(\mathcal{S}) = \max_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1})$$

On dit que $\mathcal{S}$ est une subdivision ***uniforme****, ou à* ***pas constant*** *si $t_k - t_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Dans ce cas la subdivision est donnée par $t_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$*

Définition 1.2 *Soient $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux subdivisions de $[a, b]$, on dit que $\mathcal{S}_2$ est plus fine que $\mathcal{S}_1$ (ou $\mathcal{S}_1$ est moins fine que $\mathcal{S}_2$) si $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$.*

Remarques 1.1 *$\mathcal{S}_2$ contient les points de $\mathcal{S}_1$ et d'autres points en plus. Par suite le pas de $\mathcal{S}_2$ devient plus petit que celui de $\mathcal{S}_1$. On a alors le résultat suivant*

$$\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2 \Rightarrow \rho(\mathcal{S}_2) \leq \rho(\mathcal{S}_1)$$

$\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ raffine à la fois $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$.

1.4 Fonctions en escalier

Définition 1.3 *Soit $A \subset \mathbb{R}$, on appelle fonction* ***indicatrice*** *de A, la fonction définie par* $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A, \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$

Proposition 1.1 *Soit $A, B \subset \mathbb{R}$, la fonction indicatrice vérifie les propriétés suivantes,*

1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
2. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$
3. *Si $A \cap B = \emptyset$ alors $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$*
4. *Si $\forall 1 \leq i, j \leq n$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, alors $\mathbb{1}_{\cup_{k=1}^{k=n} A_k} = \sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{1}_{A_k}$*

Définition 1.4 (Fonction en escalier) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, on dit que f est une* ***fonction en escalier*** *s'il existe une subdivision,$\mathcal{S}$, de l'intervalle $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $[t_{i-1}, t_i[$, $1 \leq i \leq n$. i.e $f(x) = c_i$ sur l'intervalle $[t_{i-1}, t_i[$, $1 \leq i \leq n$. En utilisant la notation de la fonction indicatrice, on peut écrire alors f sous la forme :*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{[t_{i-1},t_i[}(x)$$

Proposition 1.2 *L'ensemble $\mathcal{E}([a, b])$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.*

1.5 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 1.5 *Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$, donnée par $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{[t_{i-1},t_i[}(x)$. On appelle **intégrale** de f le nombre réel défini par*

$$\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx} = \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i - t_{i-1})$$

Remarques 1.2 *Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$, donnée par $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{[t_{i-1},t_i[}(x)$. Notons par $\mathcal{S}$ la subdivision donnée par la suite $(t_i)_{0\le i\le n}$. Alors pour toute subdivision $\mathcal{S}'$ donnée par la suite $(t_i^{'})_{0\le i\le m}$, $m > n$, plus fine que $\mathcal{S}$, la fonction f est égale à $f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i^{'} \mathbb{1}_{[t_{i-1}^{'},t_i^{'}[}(x)$ et on a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx} = \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{m} c_i^{'}(t_i^{'} - t_{i-1}^{'})$$

Proposition 1.3 (Propriété de l'intégrale d'une fonction en escalier) *On montre que les propriétés suivantes sont vraies*

1. *La fonction constante, $f(x) = C$, pour tout $x \in [a,b]$ est une fonction en escalier et on a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx} = C(b-a)$$

2. *Si f est une fonction en escalier positive, i.e. $c_i \ge 0$, pour tout $1 \le i \le n$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx} \ge 0$*

Proposition 1.4 (Propriété de l'intégrale d'une fonction en escalier)

1. *L'application $f \to \int_a^b f(x)\,\mathtt{dx}$ est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{E}([a,b])$ dans $\mathbb{R}$. C'est à dire, si $f, g \in \mathcal{E}([a,b])$ alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathtt{dx} = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathtt{dx} + \beta \int_a^b g(x)\,\mathtt{dx}$$

2. *Si $f, g \in \mathcal{E}([a,b])$ telles que $f \le g$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx} \le \int_a^b g(x)\,\mathtt{dx}$*

Proposition 1.5 (Propriété de l'intégrale d'une fonction en escalier)

1. *Soit $f \in \mathcal{E}([a,b])$, alors $|f| \in \mathcal{E}([a,b])$ et on a*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx}\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathtt{dx}$$

2. ***(relation de Chasles)** Soit $f \in \mathcal{E}([a,b])$ et $a < c < b$ alors $f \in \mathcal{E}([a,c]) \cap \mathcal{E}([c,b])$ (restriction de f à $[a,c]$ et $[c,b]$ respectivement) et on a la relation de **Chasles** suivante :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx} = \int_a^c f(x)\,\mathtt{dx} + \int_c^b f(x)\,\mathtt{dx}$$

3. *si $a < b$ on pose par convention $\int_b^a f(x)\,\mathtt{dx} = -\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx}$*

1.6 Intégrale au sens de Riemann

Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ bornée. Pour définir son intégrale, on va l'approcher par des fonctions en escalier. Soit $\mathcal{S}$ une subdivision on définit les fonctions en escalier qui minorent et majorent f :

$$E^-_{(f,\mathcal{S})}(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbb{1}_{[t_{i-1},t_i[}(x), \quad E^+_{(f,\mathcal{S})}(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i \mathbb{1}_{[t_{i-1},t_i[}(x)$$

où $m_i = \inf_{[t_{i-1},t_i[} f(x)$ et $M_i = \sup_{[t_{i-1},t_i[} f(x)$

Plus généralement, on peut approcher f par les fonctions en escalier

$$E^\alpha_{(f,\mathcal{S})}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i) \mathbb{1}_{[t_{i-1},t_i[}(x)$$

où $\alpha_i \in [t_i, t_{i+1}[$. Souvent, on prend $\alpha_i = t_i$ i ou $\alpha_i = t_{i+1}$, $\forall i$.

Et quand la subdivision est uniforme, on considère fréquemment les fonctions en escalier suivantes

$$\tilde{E}_{(f,\mathcal{S}_{unif})}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \mathbb{1}_{\left[a+i\frac{b-a}{n}, a+(i+1)\frac{b-a}{n}\right[}(x)$$

Proposition 1.6 *Les fonctions en escalier, qui approchent f, vérifient les propriétés élémentaires suivantes, pour tout x*

1. $E^-_{(f,\mathcal{S})}(x) \leq f(x) \leq E^+_{(f,\mathcal{S})}(x)$,
2. $E^-_{(f,\mathcal{S})}(x) \leq E^\alpha_{(f,\mathcal{S})}(x) \leq E^+_{(f,\mathcal{S})}(x)$,
3. *Si* $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ *alors* $E^-_{(f,\mathcal{S})}(x) \leq E^-_{(f,\mathcal{S}')}(x) \leq f(x) \leq E^+_{(f,\mathcal{S}')}(x) \leq E^+_{(f,\mathcal{S})}(x)$

Définition 1.6 *Étant donnée une subdivision $\mathcal{S}$,*

on appelle ***somme de Darboux inférieure*** *l'intégrale de la fonction en escalier $E^-_{(f,\mathcal{S})}(x)$ c'est à dire la quantité,*

$$I^-(f, \mathcal{S}) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i)$$

on appelle ***somme de Darboux supérieure*** *l'intégrale de la fonction en escalier $E^+_{(f,\mathcal{S})}(x)$ c'est à dire la quantité,*

$$I^+(f, \mathcal{S}) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i)$$

Définition 1.7 *on appelle* ***somme de Riemann*** *l'intégrale de la fonction en escalier $\tilde{E}_{(f,\mathcal{S})}(x)$ c'est à dire la quantité,*

$$R(f, S) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)(t_{i+1} - t_i), \quad \alpha_i \in [t_i, t_{i+1}[$$

Pour la subdivision uniforme, elle devient simplement

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

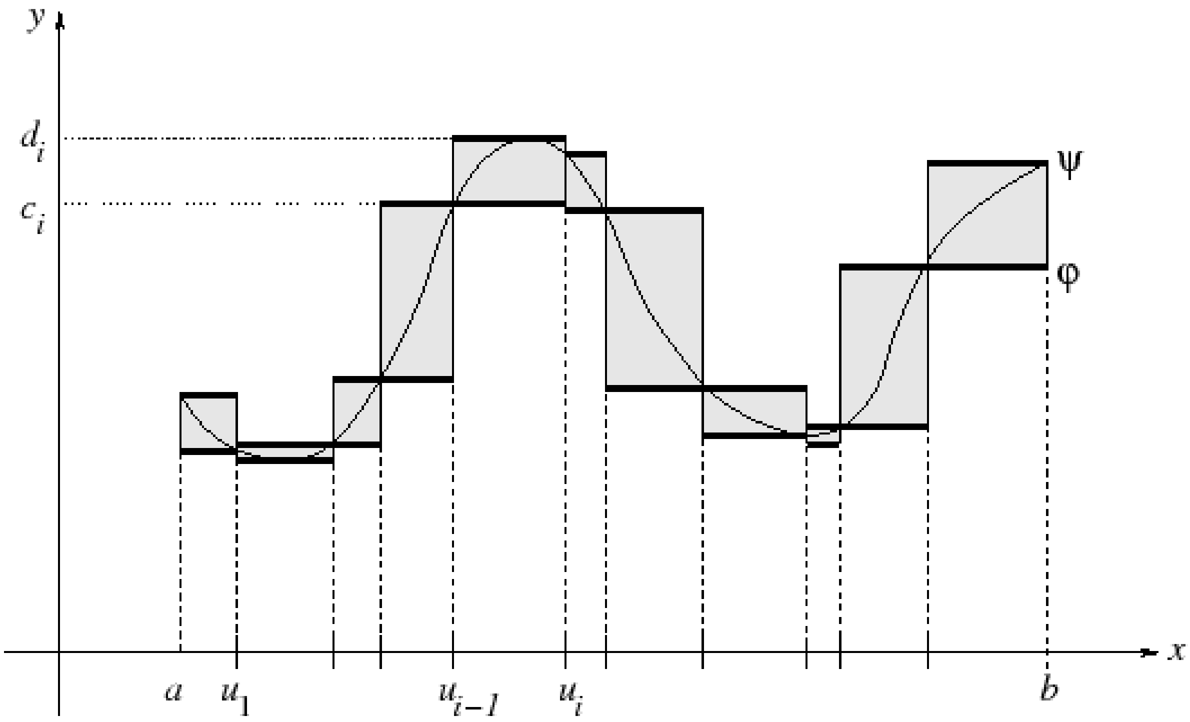

Figure 1.1 – Exemple de sommes de Darboux

Pour $a = 0$ et $b = 1$, la somme de Riemann n'est autre donc que la moyenne arithmétique des valeurs $f(\frac{k}{n})$ c'est à dire

$$R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Proposition 1.7 *Les sommes de Darboux d'une fonctions f, relativement à une subdivision $\mathcal{S}$, vérifient les propriétés élémentaires suivantes,*

1. $I^-(f, \mathcal{S}) \leq R(f, S)) \leq I^+(f, \mathcal{S})$,
2. *Si* $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ *alors* $I^-(f, \mathcal{S}) \leq I^-(f, \mathcal{S}') \leq I^+(f, \mathcal{S}') \leq I^+(f, \mathcal{S})$

Définition 1.8 *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable (sur $[a, b]$) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision $\mathcal{S}$ telle que les sommes de Darboux de f, relativement à la subdivision $\mathcal{S}$, vérifient*

$$I^+(f, \mathcal{S}) - I^-(f, \mathcal{S}) < \varepsilon$$

Où d'une façon équivalente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier, Φ_ε et Ψ_ε telles que $\Phi_\varepsilon \leq f \leq \Psi_\varepsilon$ et

$$\int_a^b (\Psi_\varepsilon - \Phi_\varepsilon)(x)\, \mathtt{dx} < \varepsilon$$

Proposition 1.8 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, alors f est Riemann-intégrable (sur $[a, b]$) si, et seulement si,*

$$\sup_{\mathcal{S}_{[a,b]}} I^-(f, \mathcal{S}) = \inf_{\mathcal{S}_{[a,b]}} I^+(f, \mathcal{S})$$

où $\mathcal{S}_{[a,b]}$ désigne l'ensemble de toutes les subdivisions de l'intervalle $[a, b]$

Définition 1.9 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée Riemann-intégrable, on appelle* ***l'intégrale de*** f*, la valeurs limite des sommes de Darboux inférieures et supérieurs et on note,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx} = \sup_{\mathcal{S}_{[a,b]}} I^-(f, \mathcal{S}) = \inf_{\mathcal{S}_{[a,b]}} I^+(f, \mathcal{S})$$

De façon équivalente,

$$\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx} = \lim_{\rho(\mathcal{S})\to 0} I^-(f, \mathcal{S}) = \lim_{\rho(\mathcal{S})\to 0} I^+(f, \mathcal{S}) = \lim_{\rho(\mathcal{S})\to 0} R(f, \mathcal{S})$$

Proposition 1.9 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, f est Riemann-intégrable si, et seulement si, il existe deux suites de fonctions en escalier Φ_n et Ψ_n telles que $\Phi_n \le f \le \Psi_n$ et*

$$\int_a^b (\Psi_n - \Phi_n)(x)\,\mathtt{dx} \to 0$$

Et on a,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \Psi_n(x)\,\mathtt{dx} = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \Phi_n(x)\,\mathtt{dx} = \int_a^b f(x)\,\mathtt{dx}$$

Proposition 1.10 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée Riemann-intégrable, alors les sommes de Riemann sont convergentes et convergent vers l'intégrale de f, en particulier pour la subdivision uniforme on obtient,*

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathtt{dx}.$$

La réciproque est vraie. Pour $a = 0$ et $b = 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathtt{dx}.$

Proposition 1.11 *(Exemples de fonctions intégrables)*

1. *Toute fonction uniformément continue est Riemann-intégrable,*
2. *Toute fonction continue est Riemann-intégrable.*
3. *Toute fonction monotone est Riemann-intégrable.*

Proposition 1.12 *(Propriétés des intégrales de Riemann)*

1. *L'application $f \to \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx}$ est linéaire et positive de l'espace vectoriel $\mathcal{R}([a, b])$ (Ensemble de fonctions Riemann-intégrable) dans $\mathbb{R}$. C'est à dire, si $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathtt{dx} = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathtt{dx} + \beta \int_a^b g(x)\,\mathtt{dx}$$

2. *Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ telle que $f \ge 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx} \ge 0$*
3. *Si $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ telles que $f \le g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx} \le \int_a^b g(x)\,\mathtt{dx}$*

Proposition 1.13 1. *Soit $f \in \mathcal{R}([a,b])$, alors $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ et comme $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$ alors on a*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathtt{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathtt{d}x$$

2. ***(relation de Chasles)*** *Soit $f \in \mathcal{R}([a,b])$ et $a < c < b$ alors $f \in \mathcal{R}([a,c]) \cap \mathcal{R}([c,b])$ (restriction de f à $[a,c]$ et $[c,b]$ respectivement) et on a la relation de* ***Chasles*** *suivante :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx} = \int_a^c f(x)\,\mathtt{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathtt{d}x$$

Proposition 1.14 *Soit f Riemann-intégrable sur $[a,b]$ positive et telle que $\int_a^b f(x)\,\mathtt{d}x = 0$. Alors f prend la valeur 0 en tout point où elle est continue.*

En particulier, si f est ***continue*** *sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathtt{d}x = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ sur $[a,b]$*

Proposition 1.15 *Soit f Riemann-intégrable sur $[a,b]$ alors toute fonction g égale à f sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points où elle prend des valeurs réels différentes. Alors g est Riemann-intégrable et $\int_a^b g(x)\,\mathtt{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathtt{d}x$*

1.7 Formule de la moyenne

Proposition 1.16 *Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$, g étant une fonction positive. On désigne par m (resp. M) la borne inférieure (resp. supérieure) de f sur $[a,b]$. Alors il existe $m \leq k \leq M$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathtt{dx} = k\int_a^b g(x)\,\mathtt{dx}$$

De plus, si f est continue sur $[a,b]$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathtt{dx} = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathtt{dx}$$

Définition 1.10 *Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx}$ est appelé* ***valeur moyenne de la fonction Riemann intégrable*** *f sur $[a,b]$.*

Proposition 1.17 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, alors il existe $c \in [a,b]$ qui réalise la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ i.e*

$$\exists c \in [a,b], \quad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx}$$

Proposition 1.18 *Soit f une fonction bornée, continue par morceau sur $[a,b]$, c'est à dire qu'elle admet un nombre fini de points de discontinuité, $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ où elle admet des limites à gauche et à droite alors f est intégrable sur $[a,b]$ et on a, en notant $c_0 = a$ et $c_{k+1} = b$*

$$\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx} = \sum_{i=0}^{k+1}\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)\,\mathtt{dx}$$

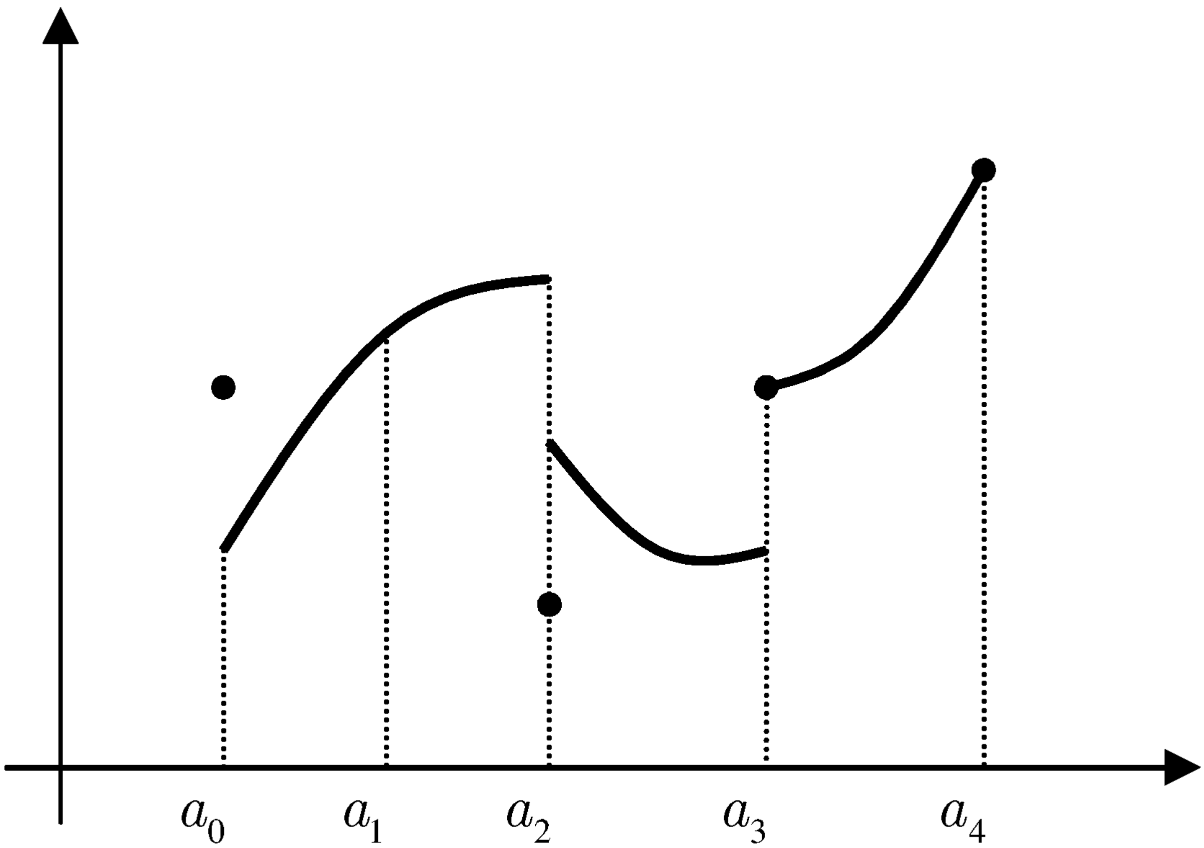

FIGURE 1.2 – Exemple de fonction continue par morceaux

.

Il suffit de montrer le résultat pour une fonction continue sauf en un point c où elle admet une limite à droite et une limite à gauche. Sur l'intervalle $[a, c]$ la fonction est alors continue sauf en c (à gauche) considérons la fonction g égale à f sur $[a, c[$ et $g(c) = \lim_{x\to c^-} f(x)$ alors g devient continue sur $[a, c]$ car $g(c) = \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^-} g(x)$. Par suite g est intégrable sur $[a, c]$ et puisque $f = g$ sauf au point c elle est aussi intégrable et on a $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathtt{d}x = \int_a^c g(x)\,\mathtt{d}x$. De même sur l'intervalle $[c, b]$, f est continue sur $]c, b]$ et admet une limite à droite de c, en posant $h = f$ sur $]c, b]$ et $h(c) = \lim_{x\to c^+} f(x)$ alors h est continue sur $[c, b]$ car $h(c) = \lim_{x\to c^+} h(x)$. Par suite h est intégrable sur $[c, b]$ et puisque $f = h$ sauf au point c elle est aussi intégrable et on a $\displaystyle\int_c^b f(x)\,\mathtt{d}x = \int_c^b g(x)\,\mathtt{d}x$. Par la relation de Chasles f est alors intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b f(x)\,\mathtt{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathtt{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathtt{d}x.$$

Proposition 1.19 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée sur $[a, b]$ et continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.*

Chapitre 2

Intégrale & Primitive

2.1 Fonction définie par une intégrale

Proposition 2.1 *Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors la fonction $x \in [a,b] \to \int_a^x f(t)\,\mathtt{dt}$ est continue.*

Remarques 2.1 *Si $M = \sup_{[a,b]} |f(x)|$, alors la fonction $F : x \in [a,b] \to \int_a^x f(t)\,\mathtt{dt}$ est M-Lipschitzienne sur $[a,b]$.*

En effet, pour $a < x < y < b$,

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathtt{dt} \right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathtt{dt} \leq M|y-x|$$

Proposition 2.2 *Si f admet une limite (resp. à droite, à gauche) en $x_0 \in [a,b]$ alors l'application $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathtt{dt}$ est dérivable (resp. à droite, à gauche) en x_0 de dérivée $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$ (resp. $f(x_0^+)$, $f(x_0^-)$).*

D'après l'existence de la limite ℓ en x_0, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Soit $x > x_0$ (même raisonnement pour $x < x_0$).

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \ell \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^x (f(t) - \ell)\,\mathtt{dt}}{x - x_0} \right| < \varepsilon$$

2.2 Primitive d'une fonction

Corrolaire 2.1 *L'application $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathtt{dt}$ est dérivable en tout point x_0 en lequel f est continue, de dérivée $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Définition 2.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On appelle primitive de f toute application $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui est dérivable sur $[a,b]$ et de dérivée $F' = f$.*

Proposition 2.3 *Si f admet une primitive F, alors toute primitive G de la fonction f est de la forme $F + C$, où C est une constante.*

Démonstration Soit G une primitive de la fonction f alors on a $(G-F)' = G'-F' = f-f = 0$. Donc, $G-F$ est une fonction constante, posons C cette constante, on obtient alors $G = F+C$.

Proposition 2.4 *Soit f une application continue sur $[a,b]$. Alors pour tout point $c \in [a,b]$, l'application intégrale $x \to \int_c^x f(t)\,\mathtt{d}t$ est une primitive de f sur $[a,b]$. Il s'agit de l'unique primitive de f qui s'annule en c. L'ensemble des primitives d'une fonction f continue sur $[a,b]$ est donc de la forme $x \to \int_c^x f(t)\,\mathtt{d}t + K$ pour tout $c \in [a,b]$ et toute constante $K \in \mathbb{R}$.*

Théorème 2.1 *Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Si F est une primitive de f alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathtt{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Autrement dit, $x \to \int_a^x f(t)\,\mathtt{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a. On a donc,

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathtt{d}t\right)' = f(x).$$

Théorème 2.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction bijective de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$ alors on a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathtt{d}x = \int_c^d f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,\mathtt{d}t$$

Théorème 2.3 *Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, alors on a*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathtt{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathtt{d}x$$

2.3 Calcul pratique d'intégrale

Rappelons que toute fraction se décompose de façon unique en élément simple. Dans le cas réel les éléments simples sont de la forme :

1. $\dfrac{1}{(x-a)^n}$, alors $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}$, si $n > 1$ et $\ln|x-a|$ pour $n = 1$.
2. $\dfrac{\alpha x+\beta}{(x^2+2ax+b)^n}$, avec $b-a^2 > 0$ alors $\displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+2ax+b)^n}\,\mathtt{d}x = \int \frac{\alpha}{2}\frac{2x+2a}{(x^2+2ax+b)^n}\,\mathtt{d}x + \int \frac{\beta-\alpha a}{(x^2+2ax+b)^n}\,\mathtt{d}x = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x^2+2ax+b)^{n-1}}$ si $n > 1$ et $\ln(x^2+2a+b)$ pour $n = 1$.
   alors que $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+2ax+b)^n}\,\mathtt{d}x = \int \frac{1}{((x+a)^2+b-a^2)^n}\,\mathtt{d}x$

En posant $\lambda^2 = b-a^2$, et avec la changement de variable $t = \frac{x+a}{\lambda}$, l'intégrale devient de la forme $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \arctan t$ si $n = 1$, puis on obtient une relation de récurrence.

Proposition 2.5 *Soit f une fonction continue sur $[-a,a]$, alors*

1. Si f est paire, $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathtt{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathtt{d}x$

2. Si f est impaire, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Proposition 2.6 *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, T-périodique alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,* $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$

2.4 Primitives de fonctions usuelles

$Fonctions$	$Primitives$	$Fonctions$	$Primitives$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$x^a\ (a \neq -1)$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$
$\sin\omega x\ \ (\omega \neq 0)$	$-\dfrac{1}{\omega}\cos\omega x$	$\cos\omega x$	$\dfrac{1}{\omega}\sin\omega x$
$e^{\alpha x}\ \ (\alpha \neq 0)$	$\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\sinh\alpha x$	$\dfrac{1}{\alpha}\cosh\alpha x$
$\cosh\alpha x$	$\dfrac{1}{\alpha}\sinh\alpha x$	$\dfrac{1}{1+x}\ (x \neq -1)$	$\ln\lvert x+1\rvert$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$	$\dfrac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\mathtt{argth}\frac{x}{a}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$
$\ln x$	$x\ln x - x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

Primitive de la forme $\displaystyle\int P(x)e^{\alpha x}$ On applique $n-1$ fois la formule d'intégration par parties, $n = \mathtt{deg}P$, et l'on obtient un résultat de la forme

$$\int P(x)e^{\alpha x}\,\mathtt{dx} = Q(x)e^{\alpha x}$$

où Q est un polynôme de degré n.

Primitive de la forme $\int P(x)e^{ax}\cos bx$ ou $\int P(x)e^{ax}\sin bx$. On obtient un résultat de la forme

$$\int P(x)e^{ax}\cos bx\,\mathtt{dx} = e^{ax}\left(Q(x)\cos bx + R(x)\sin bx\right)$$

où Q et R sont des polynômes de degré $\leq n$.

Primitive de la forme $\displaystyle\int F(\sin x, \cos x)$

En générale, on pose $t = \tan\frac{x}{2}$, on a alors $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Néanmoins si f est telle que,

1. $f(-x) = f(x)$, on pose $t = \cos x$,
2. $f(\pi - x) = f(x)$, on pose $t = \sin x$,
3. $f(\pi + x) = f(x)$, on pose $t = \tan x$,

Primitive de la forme $\int \sin^p x \cos^q x$ Si, p ou q est impaire, on applique la méthode précédente, s'ils sont tous deux pairs, on linéarise, en utilisant, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

Chapitre 3

Intégrales Généralisées

3.1 Introduction aux intégrales généralisées

Définition 3.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I,*

1. *f est dite localement intégrable sur I si f est Riemann intégrable sur tout intervalle $[\alpha, \beta] \subset I$.*
2. *Soient $I = [a, b[$ ($b = +\infty$ est aussi envisageable) et f localement intégrable sur I. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt}$ est **convergente** en b si la fonction $\int_a^x f(t)\,\mathtt{dt}$ admet une limite finie quand x tend vers b (Cette limite finie est appelée l'intégrale de f sur $[a, b[$ et est notée $\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt}$). Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt}$ est **divergente***

Définition 3.2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, Soient $I =]a, b]$ ($a = -\infty$ est aussi envisageable) et f localement intégrable sur I. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt}$ est **convergente** en a si la fonction $\int_x^b f(t)\,\mathtt{dt}$ admet une limite finie quand x tend vers a (Cette limite finie est appelée l'intégrale de f sur $]a, b]$ et est notée $\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt}$). Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt}$ est **divergente**.*

Définition 3.3 *Soient $I =]a, b[$ ($a = -\infty$ et $b = +\infty$ sont aussi envisageables) et f localement intégrable sur I. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt}$ est **convergente** s'il existe $a < c < b$ tel que $\int_a^c f(t)\,\mathtt{dt}$ et $\int_c^b f(t)\,\mathtt{dt}$ sont convergentes. Par définition on pose,*

$$\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt} = \int_a^c f(t)\,\mathtt{dt} + \int_c^b f(t)\,\mathtt{dt}$$

Remarques 3.1 (fausse singularité d'une intégrale généralisée) — *Si b est **finie**, f continue sur $[a, b[$ et f possède une limite **finie** en b, alors f est prolongeable par continuité en une fonction $\bar{f}$ continue sur $[a, b]$, égale à f sur $[a, b[$: donc $\int_a^b \bar{f}(t)\,\mathtt{dt}$ existe* *et on a* $\forall x \in [a, b[$, $\int_a^x \bar{f}(t)\,\mathtt{dt} = \int_a^x f(t)\,\mathtt{dt}$, *par suite,*

$$\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt} = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathtt{dt} = \lim_{x\to x}\int_a^x \bar{f}(t)\,\mathtt{dt} = \int_a^b \bar{f}(t)\,\mathtt{dt}$$

l'intégrale est donc convergente, on dit qu'il s'agit d'une fausse singularité ou que l'intégrale est propre.

— *Si b est **finie**, f continue sur $[a, b[$ et f bornée au voisinage de b alors l'intégrale converge, là aussi c'est une fausse singularité de l'intégrale.*

Exemples 3.1 1. *On peut donner comme exemple du premier cas les intégrales,*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathtt{d}x, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{x}\,\mathtt{d}x, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x}\,\mathtt{d}x, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathtt{d}x$$

2. *On donne comme exemple de la deuxième situation l'intégrale*

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\,\mathtt{d}x, \int_0^1 e^x\cos\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)\,\mathtt{d}x,$$

Remarques 3.2 (vraies singularité) *Les "**vraies**" intégrales généralisées sont celles pour lesquelles se pose le problème de convergence : elles sont caractérisées par le fait qu'une borne est $-\infty$ ou $+\infty$, ou que les bornes sont finies mais f n'est pas bornée sur $]a, b[$ (plus précisément non bornée autour de a ou de b, sur $]a, a+\varepsilon]$ ou $[b-\varepsilon, b[$, pour un certain $\varepsilon > 0$ Graphiquement : l'une des coordonnées au moins x ou $y = f(x)$ est non bornée, il y a une branche infinie.*

Exemples 3.2

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t-1}\,\mathtt{dt}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathtt{dt}}{\sin 2t}, \quad \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\mathtt{dt}.$$

Proposition 3.1 (Fonction bornée localement intégrable) *Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$ localement intégrable sur $]a, b[$ alors f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$*

3.2 Propriétés des intégrales généralisées

Proposition 3.2 *Linéarité et Chasles Supposons que les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt}$ et $\int_a^b g(t)\,\mathtt{dt}$ sont convergentes (a et/ou b sont infinies ou f et g sont non bornées au voisinage de a et/ou b.)*

1. *Linéarité, i.e*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathtt{dt} = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt} + \beta\int_a^b g(t)\,\mathtt{dt}$$

2. *Relations de Chasles, i.e*

$$\forall a < c < b, \quad \int_a^b f(t)\,\mathtt{dt} = \int_a^c f(t)\,\mathtt{dt} + \int_c^b f(t)\,\mathtt{dt}$$

Proposition 3.3 (Intégration par partie et changement de variables) *1. Intégration par parties Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$ (a et b peuvent être infinis), si le produit fg possède des limites finies en a et en b, on pose $lim_{x\to a} fg = \ell_1$ et $lim_{x\to b} fg = \ell_2$ alors les intégrales généralisées $\int_a^b (fg')(t)\,\mathtt{dt}$ et $\int_a^b (f'g)(t)\,\mathtt{dt}$ sont de même nature et si l'une des deux converge, on a l'égalité*

$$\int_a^b f(t)\times g'(t)\,\mathtt{dt} = \ell_2 - \ell_1 - \int_a^b f'(t)\times g(t)\,\mathtt{dt}$$

2. *Changement de variables, Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$ et strictement monotone, on pose $\alpha = \lim_{x\to a}\varphi(x)$ et $\beta = \lim_{x\to b}\varphi(x)$ $(a,b,\alpha,\beta \in \bar{\mathbb{R}}$, et si f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $]\alpha,\beta[$ ou $]\beta,\alpha[$, alors les intégrales : $\int_\alpha^\beta f(u)\,\mathtt{du}$ et $\int_a^a f\circ\varphi(t)\,\mathtt{dt}$ sont de même nature et si l'une des deux converge alors elles sont égales.*

Proposition 3.4 (Positivité et comparaison) *Supposons que les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt}$ et $\int_a^b g(t)\,\mathtt{dt}$ sont convergentes*

1. *Positivité, si $f(x)\geq 0$ sur $]a,b[$ alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt} \geq 0$ et $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathtt{dt}$ est croissante donc converge si et seulement si elle est bornée.*
2. *comparaison, si $0\leq f(x)\leq g(x)$ sur $]a,b[$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt} \leq \int_a^b g(t)\,\mathtt{dt}$. $\int_a^b g(t)\,\mathtt{dt}$ converge $\Longrightarrow$ $\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt}$ converge et donc, $\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt}$ diverge $\Longrightarrow$ $\int_a^b g(t)\,\mathtt{dt}$ diverge*

Proposition 3.5 (Comparaison) *Soient f et g deux fonctions positives sur $[a,b[$ (resp. sur $]a,b]$) telles que f et g sont de même grandeur, c'est à dire qu'il existe $0<\alpha<\beta$ tels que $\alpha < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \beta$ alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt}$ et $\int_a^b g(t)\,\mathtt{dt}$ sont de même nature*

Proposition 3.6 *Soit f localement intégrable sur $[a,b[$. l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt}$ converge si, et seulement si, $\forall a<c<b$, $\int_c^b f(t)\,\mathtt{dt}$ converge*

Proposition 3.7 (Équivalence) *Soient f et g deux fonctions positives sur $[a,b[$ (resp. sur $]a,b]$) telles que f et g sont équivalentes au voisinage de b (resp. voisinage de ab) c'est à dire $\lim_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ (resp. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$) alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,\mathtt{dt}$ et $\int_a^b g(t)\,\mathtt{dt}$ sont de même nature*

3.3 Intégrales de Riemann

Proposition 3.8 (Convergence au voisinage de l'infini) *On appelle intégrale de Riemann, au voisinage de l'infini, les intégrales de la forme* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$. *L'intégrale de Riemann est convergente (au voisinage de l'infini) si, et seulement si,* $\alpha > 1$

Proposition 3.9 (Convergence au voisinage de 0**)** *On appelle intégrale de Riemann, au voisinage de* 0*, les intégrales de la forme* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. *L'intégrale de Riemann est convergente (au voisinage de* 0 *) si, et seulement si,* $\alpha < 1$

Définition 3.4 (Semi-convergence et convergence absolue) *Soit* f *une fonction localement intégrable, non nécessairement positive, sur* $[a, b[$ *(resp.* $]a, b]$*) on dit que* $\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx}$ *est* ***absolument convergente*** *si* $\int_a^b |f(x)|\,\mathtt{dx}$ *est convergente.*
On dit que $\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx}$ *est* ***semi-convergente*** *si* $\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx}$ *est convergente et que* $\int_a^b |f(x)|\,\mathtt{dx}$ *est divergente.*

Proposition 3.10 *Soit* f *une fonction localement intégrable, non nécessairement positive, sur* $[a, +\infty[$ *(*$a > 0$*) supposons qu'il existe* α *tel que* $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha |f(x)| = \ell$ *alors,*

1. *Si* $\ell = 0$ *et* $\alpha > 1$ *alors* $\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx}$ *est absolument convergente,*
2. *Si* $0 < \ell < +\infty$ *alors* $\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx}$ *est absolument convergente si, et seulement si,* $\alpha > 1$
3. *Si* $\ell = +\infty$ *et* $\alpha \leq 1$ *alors* $\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx}$ *n'est pas absolument convergente*

Proposition 3.11 (Fonction d'Euler) *La fonction d'Euler est définie par* $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathtt{dt}$

1. $D_\Gamma =]0, +\infty[$,
2. $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$,
3. $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n + 1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$

Chapitre 4

Équations différentielles

Définition 4.1 (Équations Différentielles) *On appelle équation différentielle, d'ordre n, toute équation de la forme*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (E.D)$$

où F est une fonction à $(n+2)$ variables. $x \in \mathbb{R}$. y est une fonction de la variable x de classe $\mathcal{C}^n$.

On dit que y est solution de l'équation différentielle $(E.D)$ s'il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0, \qquad \forall x \in I$$

Définition 4.2 (Équations Différentielles du premier ordre) *On appelle équation différentielle du premier ordre, si elle ne fait intervenir que la première dérivée, c'est à dire elle est de la forme*

$$F(x, y, y') = 0$$

Exemples 4.1

$$2y'(x) + 5y(x) = e^x \cos x, \quad xy'(x) + \tan x y(x) = x^2$$

Définition 4.3 *Une équation différentielle de premier ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme*

$$f(y).y' = g(x)$$

Exemples 4.2

$$g(x)y' - f(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Une telle équation différentielle peut s'intégrer facilement : En effet, on écrit $y' = \frac{dy}{dx}$, puis, symboliquement,

$$f(y)dy = g(x)dx \Leftrightarrow \int f(y)\, \mathtt{dy} = \int g(x)\, \mathtt{dx} + C$$

Définition 4.4 *Une équation différentielle d'ordre n est linéaire si, et seulement si, elle est de la forme $L(y) = f(x)$, où*

$$Ly = a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)}$$

L'équation différentielle $L(y) = 0$ s'appelle équation homogène associée à l'équation $L(y) = f(x)$.

Proposition 4.1 *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire est de la forme $y = y_p + y_h$, où y_h est une solution particulière et y_h est solution de l'équation homogène*

Définition 4.5 *Une équation différentielle linéaire (E.D.L) du 1^{er} ordre est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme*

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \qquad (E)$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$, avec $\forall x \in I : a(x) \neq 0$. À cette équation différentielle on peut associer la même équation avec $c = 0$:

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (E_h)$$

C'est l'équation homogène associée à (E.D.L), ou équation sans second membre.

L'équation homogène est une équation différentielle à variables séparées, en l'écrivant $\frac{y'}{y}y = -\frac{b(x)}{a(x)}$. En l'intégrant, on obtient

$$\ln|y| = \int -\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathtt{dx} + C$$

ce qui donne,

$$y(x) = Ke^{F(x)}, \quad K \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int -\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathtt{dx}$$

On cherche la solution particulière sous la forme $y = K(x)e^{F(x)}$, avec K une fonction à déterminer ("variation de la constante"). On trouve que y est solution si, et seulement si,

$$K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)} \Leftrightarrow K(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}\,\mathtt{dx}$$

Une solution particulière est donc de la forme

$$y = e^{F(x)} \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}\,\mathtt{dx}$$

Et la solution générale est de la forme,

$$y = e^{F(x)}\left(K + \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}\,\mathtt{dx}\right), \quad K \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int -\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathtt{dx}$$

Définition 4.6 *Une E.D.L du 2^{nd} ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme*

$$ay" + by' + cy = f(x)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, ($a \neq 0$), et $f \in \mathcal{C}^0(I)$, (I ouvert de $\mathbb{R}$). L'équation homogène (ou sans second membre) associée est

$$ay" + by' + cy = 0$$

L'équation,

$$ar^2 + br + c = 0$$

*s'appelle **l'équation caractéristique de l'équation homogène**.*

Proposition 4.2 *Suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, on a les résultats suivants,*

1. *$\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions réels distincts $r_1 \neq r_2$, et $y_1(x) = e^{r_1 x}$ et $y_2(x) = e^{r_2 x}$ est une base de solutions,*
2. *$\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une solution réelle double $r \in \mathbb{R}$, et $y_1(x) = e^{rx}$ et $y_2(x) = xe^{rx}$ est une base de solutions,*
3. *$\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjugués $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ avec $\beta \neq 0$, $y_1(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ et $y_2(x) = e^{rx} \cos \beta x$ est une base de solutions,*

Dans chacun des cas, la solution générale de l'équation homogène est donc $y = Ay_1 + By_2$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Si $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$, $P \in \mathbb{C}[X]$, on cherche une solution sous la forme $y = e^{\alpha x} Q(x)$ où $Q \in \mathbb{C}[X]$ dont on peut préciser le degré,

1. Si, α n'est pas racine de l'équation caractéristique alors $degQ = degP$,
2. Si, α est une racine simple de l'équation caractéristique alors $degQ = degP + 1$,
3. Si, α est une racine double de l'équation caractéristique alors $degQ = degP + 2$,

Si $f(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$, on distingue deux cas,

1. ω n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution de la forme $y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$
2. ω est une racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution de la forme $y = x\,(A \cos \omega x + B \sin \omega x)$

T.D d'analyse 2. Série N°1
Intégrales de Riemann
Subdivisions, Sommes de Riemann, fonction continue par morceau & formule de la moyenne

Exercice 1 *Donner les sommes de Darboux, inférieure et supérieure de la fonction* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, *par rapport aux subdivisions suivantes* $\mathcal{S}_0 = \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$ *et* $\mathcal{S}_1 = \left\{0, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, 1\right\}$. *Donner un encadrement de nombres rationnelles de* π. *Pour une subdivision uniforme, à quelle valeur de* n *on est sûr qu'on a une valeur approchée de* $\dfrac{\pi}{4}$ *à* 10^{-3} *près.*

Exercice 2 *Calculer la limite de la somme de Riemann suivante,* $R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ *En déduire que la suite* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *est divergente.*

Donner alors la limite de la suite $S_{pn} - S_n$ *puis celle de la suite* $S_{pn} - S_{qn}$ *pour* $q < p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 *Calculer la limite de la somme de Riemann suivante,*

$$S_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n!}{n^n} C_{2n}^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

Donner un équivalent de $\sqrt[n]{C_{2n}^n}$ *au voisinage de l'infini.*

Exercice 4 *Montrer que toute fonction monotone sur un intervalle* $[a, b]$ *est intégrable.*

Exercice 5 *Soit* f *une fonction, positive, bornée* $[a, b]$. *Supposons que* f *soit nulle sauf en un nombre fini de points* $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leq b$ *où* f *est strictement positive. Posons* $M = \max_{1 \leq i \leq k} f(x_i)$.

1. *Montrer que* f *est intégrable et que* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
2. *En déduire que le résultat reste valable, sans l'hypothèse de positivité de la fonction* f.
3. *En déduire que si* f *est une fonctions Riemann-intégrable sur* $[a, b]$ *alors toute fonction* g *telle que* $g = f$ *sur* $[a, b]$ *sauf peut-être en un nombre fini de points est intégrable et on a*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
C'est à dire que l'intégrale d'une fonction ne change pas si la fonction change de valeurs en un nombre fini de points.

Exercice 6 *Montrer que toute fonction, bornée, continue par morceau est intégrable.*

Exercice 7 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue non identiquement nulle.*

1. *supposons que* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. *Montrer que* f *s'annule au moins une fois sur* $[a, b]$.
2. *supposons que* $\displaystyle\int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. *Montrer que* f *s'annule au moins deux fois sur* $[a, b]$.
3. *supposons que* $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, *pour* $k = 0, 1, \ldots, n$. *Montrer que la fonction* f *s'annule au moins* $n+1$ *fois sur* $[a, b]$

T.D d'analyse 2. Série N°2
Intégrales de Riemann
Calcul pratique des intégrales

Exercice 1 *Donner les primitives des fonctions suivantes,*

$$\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}\,\mathrm{d}x, \quad \int e^{2x}\sin 3x, \quad \int (x^2+1)e^{3x}, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x+\sin x}.$$

Exercice 2 *Soit* $f(x) = \dfrac{1}{1-x}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$,

1. *Préciser le domaine de définition de* f,
2. *Donner une primitive de* f *en utilisant le changement de variables,* $x = \sin^2 t$, *tout en précisant l'image du domaine par ce changement de variable.*
3. *Donner une primitive de* f *en utilisant le changement de variable classique pour ce type de fonctions.*
4. *Comparer les deux primitives. Conclure.*

Exercice 3 *Soit* $f(x) = x^n(\ln x)^p$, $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$

1. *Montrer que* f *est intégrable sur* $[0,1]$,
2. *On pose* $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x)^p\,\mathrm{d}x$. *Montrer que* $I_{n,p} = -\dfrac{p}{n+1}I_{n,p-1}$. *Donner la valeur de* $I_{n,p}$ *en fonction de* n *et* p.

Exercice 4 *On pose* $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. *Calculer* $I_n + I_{n+1}$.
3. *On pose* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 5 *on pose* $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$, $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

1. *Montrer que* $B(p,q) = B(q,p)$. *Trouver une relation entre* $B(p+1,q)$ *et* $B(p+1,q-1)$. *En déduire la valeur de* $B(p,q)$.
2. *En utilisant le changement de variables* $x = \sin^2 t$, *calculer* $I(p,q) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}x\cos^{2q+1}x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6 (Intégrales de Wallis) *On pose* $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$

1. *Vérifier que,* $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$,
2. *Vérifier que,* $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le W_n \le \dfrac{\pi}{2}$,
3. *Montrer que* W_n *est décroissante, en déduire que* W_n *est convergente,*

4. *Établir une formule de récurrence entre* W_n *et* W_{n+2},
5. *Calculer alors, en fonction de* n, W_{2n} *et* W_{2n+1},
6. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{n+1} \leq \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leq 1$.
7. *Montrer que la suite* $S_n = nW_nW_{n-1}$ *est constante.*
8. *Donner un équivalent de* W_n *puis un équivalant de* C_{2n}^n.

T.D d'analyse 2. Série N°3
Intégrales Généralisées

Exercice 1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée. montrer que si f est localement intégrable sur $]a, b[$ alors elle est Riemann-intégrable sur $[a, b]$*

Exercice 2 *Étudier la convergence au voisinage de l'infini, suivant les valeurs de α et β, des intégrales de* ***Bertrand*** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$.

Exercice 3 *Soient $0 < a < b$, montrer que l'intégrale $I(a, b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \mathrm{d}x$ est convergente et calculer sa valeur. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} \mathrm{d}x$.*

Exercice 4 *Soit $\alpha > 0$,*

1. *Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}} \mathrm{d}x$ converge. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} \mathrm{d}x$ converge*
2. *On suppose que $0 < \alpha \leq 1$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^\alpha} \mathrm{d}x$ diverge. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$ diverge.*
3. *Vérifier que $t \to +\infty$, $\dfrac{\cos t}{\sqrt{t}} \sim \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}} + \dfrac{\cos^2 t}{t}$. Étudier la nature des intégrales généralisées des deux fonctions $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos^2 x}{x}\right) \mathrm{d}x$*

Exercice 5 *Étudier la convergence des intégrales suivantes, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha + x^\beta}, \quad \int_0^1 \frac{(\ln x)^\alpha}{(1-x)^\beta} \mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} \mathrm{d}t.$$

Exercice 6 *Montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \mathrm{d}x$$

Exercice 7 *Le but de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale de* ***Fresnel*** $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$. *Pour chaque entier n, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} \mathrm{d}t$.*

1. *Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et J_n sont bien définis.*
2. *Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_n - I_{n-1} = 0$. En déduire la valeur de I_n.*
3. *Soit $\phi : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \sin((2n+1)t) \mathrm{d}t$ tend vers 0.*
4. *Vérifier que la fonction $t \to \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.*
5. *En déduire que $J_n - I_n \to 0$.*

6. *Démontrer, en utilisant un changement de variables, que $J_n \to I$. En déduire la valeur de I.*

Exercice 8 *Soit f la fonction définie par* $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f.*
2. *Quel est le sens de variation de f ?*
3. *On admet que f est une fonction continue sur son ensemble de définition. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.*
4. *En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$. Donner un équivalent de f en 0.*

Exercice 9 *Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes*

1. $y' + y = xe^{-x}$
2. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$

Exercice 10 *Résoudre les équations différentielles suivantes*

1. $y'' - 3y' + 2y = xe^x + 2x^2$
2. $y'' + 2y' + 2y = 2x$

Devoir libre du module d'analyse 2.
À rendre avant 1^{er} Mai 2018

Exercice 1 (Application des intégrales de Wallis) *On pose*

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t, \quad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$$

On rappelle que $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$

1. *Vérifier la relation suivante* $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$
2. *En déduire que* $K_{n-1} - K_n = \dfrac{\pi}{4n^2}$
3. *Démontrer la relation* $\dfrac{\pi}{4} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n$
4. *Démontrer que, pour tout réel* $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, *on a :* $x \leq \frac{\pi}{2} \sin x$
5. *En déduire que, pour tout entier* n, *on a*

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)} I_n, \qquad \textit{et} \qquad 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

6. *En déduire que* $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
7. *En écrivant* $\dfrac{\ln t}{t-1} = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k \ln t + t^{n+1} \frac{\ln t}{t-1}$, *montrer que l'intégrale* $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} \, \mathrm{d}t$ *est convergente et* $J = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2 *On se propose de calculer la valeur de l'intégrale* $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} \, \mathrm{d}t$.

1. *Montrer que l'intégrale* $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} \, \mathrm{d}t$ *est convergente.*
2. *Montrer que* $\displaystyle\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} \, \mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$,
3. *Vérifier que*

$$x^2 \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leq x \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$$

4. *En déduire que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} \, \mathrm{d}t = \ln 2$.

Exercice 3 (Constante d'Euler) *On considère la (série harmonique) suivante* $\mathcal{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. *Montrer que* $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathcal{H}_n = +\infty$
2. *Montrer que* $\forall n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq \mathcal{H}_n \leq 1 + \ln n$. *En déduire* $\mathcal{H}_n \simeq \ln n$

3. *On pose* $u_n = \mathcal{H}_n - \ln(n+1)$ *et* $v_n = \mathcal{H}_n - \ln n$. *Montrer que* u_n *et* v_n *sont adjacentes. On notera* $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
4. *Montrer la convergence de l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \mathtt{d}t$.
5. *En écrivant* $\displaystyle e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-(k+1)t} - \frac{e^{-(k+1)t} - e^{-(k+2)t}}{t}\right)$
6. *Montrer que* $\displaystyle\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \mathtt{d}t$.

Exercice 4 (Formule de Stirling) *On considère, pour* $n \geq 1$, *les suite* $u_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ *et* $v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}$

1. *Exprimer simplement* v_n *en fonction* n *et donner un développement limité à l'ordre* 2 *en* $\frac{1}{n}$ *de la suite* $(v_n)_n$.
2. *En déduire que la série* $(\sum_{k=1}^{n} v_k)_n$ *est convergente. Montrer alors que les suites* $(\ln u_n)_n$ *et* $(u_n)_n$ *convergent et donc qu'il existe un réel* $K > 0$ *tel que* $n! \simeq K\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.
3. *En utilisant l'équivalent de l'intégrale de Wallis, montrer que* $n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

Exercice 5 (Intégrale de Gauss) *On pose* $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathtt{d}x$.

1. *Montrer que l'intégrale* I *est convergente.*
2. *Vérifier les inégalités suivantes* $1 - x^2 \leq e^{-x^2}$ *sur* $[0, 1]$ *et* $e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ *sur* $[0, +\infty[$.
3. *En déduire que, pour tout entier* $n \geq 1$,
$$\sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n\, \mathtt{d}x \leq I \leq \sqrt{n}\int_0^{+\infty} \frac{\mathtt{d}x}{(1+x^2)^n}$$
4. *En utilisant, le comportement des intégrales de Wallis au voisinage de l'infini, donner la valeur de l'intégrale de Gauss* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathtt{d}x$.

Corrigé de la série N°1 du T.D. d'analyse 2. Intégrales de Riemann

Corrigé de l'exercice 1 *Par définition, les sommes de **Darboux** inférieure et supérieure de la fonction* $\frac{1}{1+x^2}$*, qui est décroissante, par rapport à la subdivision* $\mathcal{S}_0$ *sont données par,*

$$I^-(f,\mathcal{S}_0) = f\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-0\right) + f(1)\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{1+1^2}\right) = \frac{13}{20}$$

$$I^+(f,\mathcal{S}_0) = f(0)\left(\frac{1}{2}-0\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2}\right) = \frac{9}{10} = \frac{18}{20}$$

On sait que

$$I^-(f,\mathcal{S}_0) \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \le I^+(f,\mathcal{S}_0)$$

et que

$$\max\left(\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - I^-(f,\mathcal{S}_0), I^+(f,\mathcal{S}_0) - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right) \le I^+(f,\mathcal{S}_0) - I^-(f,\mathcal{S}_0)$$

Ce qui donne dans notre cas, $\frac{13}{20} \le \frac{\pi}{4} \le \frac{18}{20}$ *ou encore,* $\frac{13}{5} \le \pi \le \frac{18}{5}$

Pour $\mathcal{S}_1$*, les sommes de **Darboux** inférieure et supérieure de la fonction* $\frac{1}{1+x^2}$*, sont données par,*

$$I^-(f,\mathcal{S}_1) = f\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}-0\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right) + f(1)\left(1-\frac{3}{4}\right)$$

$$I^-(f,\mathcal{S}_1) = \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right)$$

$$I^-(f,\mathcal{S}_1) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{1+(\frac{3}{4})^2} + \frac{1}{1+1^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \frac{1}{2}\right)$$

$$I^-(f,\mathcal{S}_1) = \frac{1}{4}\left(\frac{1012}{425} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\frac{2449}{850}$$

De même,

$$I^+(f,\mathcal{S}_1) = \frac{1}{4}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

Donc,

$$I^+(f,\mathcal{S}_1) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+0^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{1+(\frac{3}{4})^2}\right)$$

$$I^+(f,\mathcal{S}_1) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1012}{425} + 1\right) = \frac{1}{4}\frac{1437}{425} = \frac{1}{4}\frac{2874}{850}$$

C'est à dire que

$$\frac{2449}{850} \le \pi \le \frac{2874}{850}$$

La différence des sommes de Darboux égale à $\frac{1}{n}(f(0) - f(1)) = \frac{1}{2n}$*, la fonction est décroissante, on peut donc approcher l'intégrale de* f *par l'une des deux sommes en étant sûr que l'erreur est petite que* $\frac{1}{2n}$*, donc pour avoir une erreur petite que* 10^{-3}*, il suffit de prendre* $n \ge 500$.

Corrigé de l'exercice 2 *On peut mettre R_n sous la forme,*

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

avec $a = 0$, $b = 1$ *et* $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ *continue sur* $[0,1]$ *par suite* $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$

Comme $R_n = S_{2n} - S_n$ *ne tend pas vers* 0 *c'est à dire que la suite* $(S_n)_{n\geq 1}$ *n'est pas de Cauchy, (ou que la différence de deux sous-suites de* S_n *ne converge pas vers* 0*) donc elle ne converge pas et puisque il s'agit d'une suite positive croissante non convergente on conclut que* $S_n \to +\infty$

En écrivant $S_{pn} - S_{qn} = (S_{pn} - S_{(p-1)n}) + (S_{(p-1)n} - S_{(p-2)n}) + \cdots + (S_{(q+1)n} - S_{qn})$

On remarque maintenant que pour tout $q \leq r \leq p$

$$S_{(r+1)n} - S_{rn} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{rn+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{r+\frac{k}{n}} \to \int_r^{r+1}\frac{dx}{x} = \ln\frac{r+1}{r}$$

On conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} S_{pn} - S_{qn} = \sum_{r=q}^{p}\ln\frac{r+1}{r} = \ln\frac{p}{q}$$

Corrigé de l'exercice 3

$$\ln S_n = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{k=n}\left(\frac{n+k}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$\ln S_n$ *est donc une somme de Riemann de la fonction* $\ln x$ *sur l'intervalle* $[1,2]$*, donc on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\ln S_n = \int_1^2 \ln x\,\mathsf{dx} = 2\ln 2 - 1 = \ln\frac{4}{e}$$

$S_n \cong \dfrac{4}{e} \Longrightarrow \sqrt[n]{C_{2n}^n} \cong \dfrac{4}{e}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ *ce qui est équivalent de dire que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{k}{n}\right)} = \dfrac{4}{e}$

Corrigé de l'exercice 4 *Soit* f *une fonction bornée et monotone, croissante par exemple, sur* $[a,b]$*. Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\dfrac{(f(b)-f(a))(b-a)}{N} < \varepsilon$*. La différence des sommes de Darboux supérieure et inférieure de la fonction* f *relativement à la subdivision uniforme* $t_k = a + k\dfrac{b-a}{N}$ *est donnée par*

$$I^+(f, \mathcal{S}_{unif}) - I^-(f, \mathcal{S}_{unif}) = \frac{b-a}{N}\left(\sum_{k=1}^{n}\big(f(t_k) - f(t_{k-1})\big)\right) = \frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{N} < \varepsilon$$

Corrigé de l'exercice 5 *On a* f*,bornée, positive sur* $[a,b]$*. Supposons que* f *soit nulle sur* $[a,b]$ *sauf en un nombre fini de points* $a = x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k \leq b$ *et posons* $M = \max_{1\leq i\leq k} f(x_i)$*.*

1. *Montrons que f est intégrable. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{kM(b-a)}{N} < \varepsilon$. Les sommes de Darboux supérieure et inférieure de la fonction f relativement à la subdivision uniforme $t_k = a + k\dfrac{b-a}{N}$ sont donnée par $I^-(f,S) = 0$ (sur chaque intervalle $[t_{i-1}, t_i[$, $m_i = \inf_{[t_{i-1},t_i[} f(x) = 0$ ceci étant vrai quelque soit la subdivision de $[a,b]$) et $I^+(f,S) = \dfrac{b-a}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} M_i \leq \dfrac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{k} f(x_i) \leq \dfrac{kM(b-a)}{N} < \varepsilon$. D'où l'intégrabilité de f au sens de Riemann. Par définition de l'intégrale on a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{\mathcal{S}} I^-(f,S) = 0$$

2. *Supposons que f soit nulle sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points où elle prend des valeurs positives ou négatives. En écrivant $f = f^+ - f^-$, $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = \max(-f,0)$ alors f^+ et f^- sont nulles sauf en un nombre fini de points où elles prennent des valeurs positives, d'après la première question, elles sont intégrables d'intégrale nulle sur $[a,b]$ et comme f est une combinaison linéaire de ces deux fonctions elle est aussi intégrable et*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

3. *On a f intégrable sur $[a,b]$ et $g = f$ sauf en un nombre fini de points, posons alors $h = g - f$ alors h est une fonction nulle sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points, donc d'après la question précédente, h est intégrable et $\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0$ comme $g = h + f$ et h et f sont intégrables alors g est intégrable et*

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Corrigé de l'exercice 6 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue non identiquement nulle.*

1. *supposons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Le théorème Formule de la moyenne (**Proposition 1.7**) affirme l'existence d'une $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.*

2. *supposons maintenant que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Raisonnons par l'absurde. Supposons que f ne s'annule qu'une seule fois en c, (d'après question précédente $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$). Supposons, par exemple que $f(x) < 0$ sur $[a,c[$ et $f(x) > 0$ sur $]c,b]$ dans ce cas la fonction $g(t) = (t-c)f(t)$ garde un signe constant (positive) sur $[a,b]$ et sont intégrale est nulle, et comme elle est continue on conclut que g est nulle sur $[a,b]$ tout entier, d'où la contradiction. Conclusion : f s'annule au moins deux fois sur $[a,b]$*

3. *supposons que $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, pour tout $k = 0, 1, \ldots, n$. Toujours par l'absurde, supposons que fonction f s'annule au plus n fois sur $[a,b]$ et posons $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$, $k \leq n$, les points où la fonction f s'annule avec $f(t) < 0$ sur $[a, c_1[$ et posons g la fonction définie par $g(t) = (t-c_1)(t-c_2)\cdots(t-c_k)f(t)$. Remarquons que g est continue. En dressant*

le tableau de signe de la fonction g *on conclut qu'elle garde un signe constant (positive) sur* $[a, b]$*, et comme son intégrale est nulle on conclut que* g *est identiquement nulle sur* $[a, b]$ *ce qui est équivalent à dire que* f *est identiquement nulle sur* $[a, b]$*. Contradiction. Donc,* f *s'annule au moins* $(n + 1)$ *fois. Remarquons que l'hypothèse* $\int_a^b t^k f(t)\,\mathtt{d}t = 0$*, pour tout* $k = 0, 1, \ldots, n$ *implique que pour tout polynôme* $P \in \mathbb{R}_n[X]$ *de degré inférieure ou égale à* n *alors* $\int_a^b P(t)f(t)\,\mathtt{d}t = 0$ *(linéarité de l'intégrale).*

Corrigé de la série N°2 du T.D. d'analyse 2. Calcul Pratique des Intégrales de Riemann

Corrigé de l'exercice 1 *Pour la première primitive il s'agit d'une fraction rationnelle, il faut commencer par la décomposer en élément simple sur* $\mathbb{R}$, *on trouve que*

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+2x+5)} = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+2x+5}\right)$$

Or, $\displaystyle\int \frac{2}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{x-1}$, $\displaystyle\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1|$, $x \neq 1$, *et*
$\displaystyle\int \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)$
Par suite,

$$\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\left(-\frac{2}{x-1} + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right) + C\right)$$

Pour la deuxième primitive, $\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x$, *il faut deux intégrations par partie, la première donne, en posant* $u' = e^{2x}$, $v = \sin 3x$, *donc* $u = \frac{1}{2}e^{2x}$ *et* $v' = 3\cos 3x$,
$\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x$
La deuxième intégration par partie donne, en posant $u' = e^{2x}$, $v = \cos 3x$, *donc* $u = \frac{1}{2}e^{2x}$ *et* $v' = -3\sin 3x$,
$\displaystyle\int e^{2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x$
On trouve alors que $\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x\right)$ *d'où*
$\displaystyle\frac{13}{4}\int e^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x$. *Finalement, on obtient*

$$\int e^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{13}\sin 3x - \frac{3}{13}\cos 3x\right)e^{2x} + C$$

Pour la troisième primitive, $\displaystyle\int (x^2+1)e^{3x}\sin 3x\,\mathrm{d}x$, *c'est le cas d'un polynôme de degré deux multiplié par une exponentielle, il faut faire deux intégrations par partie, ainsi, on pose* $u' = e^{3x}$, $v = x^2+1$, *on obtient* $u = \frac{1}{3}e^{3x}$ *et* $v' = 2x$ *on a alors*
$\displaystyle\int (x^2+1)e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(x^2+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x$
une deuxième intégration par partie donne,
$u' = e^{3x}$, $v = x$, *on obtient* $u = \frac{1}{3}e^{3x}$ *et* $v' = 1$ *on a alors*
$\displaystyle\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}$
Finalement,

$$\int (x^2+1)e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{11}{9}\right)e^{3x} + C.$$

Pour la quatrième primitive, c'est une fraction rationnelle en racine, on commence par le changement de variable $t = \sqrt{x}$, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$, *on obtient,*

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathtt{d}x = \int \frac{2t}{1+t}\,\mathtt{d}t = \int \left(2 - \frac{2}{1+t}\right)\mathtt{d}t = 2t - 2\ln(t+1) + C = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

La dernière primitive est une fraction rationnelle en $\cos$ *et* $\sin$ *on fait le changement de variable classique* $t = \tan\frac{x}{2}$*, donc* $\mathtt{d}x = \frac{2\mathtt{d}}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ *et* $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$*, il vient alors*

$$\int \frac{\mathtt{d}x}{2+\cos x+\sin x} = \int \frac{1}{2\frac{1+t^2}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2\mathtt{d}t}{1+t^2} = 2\int \frac{\mathtt{d}t}{t^2+2t+3} = 2\int \frac{\mathtt{d}t}{(t+1)^2+\sqrt{2}^2}$$

Finalement,

$$\int \frac{\mathtt{d}x}{2+\cos x+\sin x} = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}\right)$$

Corrigé de l'exercice 2 *Soit* $f(x) = \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}$,

1. f *est bien définie si, et seulement si,* $x \neq 1$ *et* $x(1-x) \geq 0$*. D'où* $D_f = [0,1[$
2. *En utilisant le changement de variables,* $x = \varphi(t) = \sin^2 t$*, définit de* $]0, \frac{\pi}{2}[\to]0,1[$*. La fonction* φ *est un changement de variable car elle est de classe* $\mathcal{C}^1$ *(en fait* $\mathcal{C}^\infty$*) avec* $\varphi'(t) > 0$ *et bijective, sa réciproque est aussi de classe* $\mathcal{C}^1$ *puisque* $\varphi'(t) > 0$ *ne s'annule pas sur* $]0, \pi/2[$. $\mathtt{d}x = 2\sin t\cos t\mathtt{d}x$ *et* $\frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{x}{1-x}} = \frac{1}{\cos^2 t}\tan t$ *par suite,*

   $$\int \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathtt{d}x = 2\int \tan^2 t\,\mathtt{d}t = 2(\tan t - t) + C = 2(\tan\arcsin\sqrt{x} - \arcsin\sqrt{x}) + C.$$

   Finalement, on trouve

   $$\int \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathtt{d}x = 2\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} - \arcsin\sqrt{x}\right) + C.$$

3. *le changement de variable classique dans une fraction est de poser* $t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$*, d'où* $x = \frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$, $\mathtt{d}x = \frac{2t}{(1+t^2)^2}\mathtt{d}x$ *et* $\frac{1}{1-x} = 1+t^2$*. Donc,*

   $$\int \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathtt{d}x = 2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathtt{d}t = 2\int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathtt{d}t = 2(t - \arctan t) + C$$

   C'est à dire

   $$\int \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathtt{d}x = 2\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} - \mathit{arctan}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) + C$$

4. *Les deux primitives trouvées sont différentes mais comme les primitives sont égales à une constante près, on conclut que* $\mathit{arctan}\sqrt{\frac{x}{1-x}} = \arcsin\sqrt{x} + C$*, avec* $x \in]0,1[$.

Corrigé de l'exercice 3 *Soit* $f(x) = x^n(\ln x)^p$, $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$

1. f *est continue sur* $]0,1]$ *et comme* $\lim_{x\to 0^+} x^n(\ln x)^p = 0$, f *est prolongeable par continuité en* 0 *donc elle est Riemann-intégrable sur* $[0,1]$.
2. *On pose* $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x)^p \,\mathtt{d}x$. *Une intégration par partie donne, en posant* $u = (\ln x)^p$ *et* $v' = x^n$ *donc* $u' = p\dfrac{(\ln x)^{p-1}}{x}$ *et* $v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$,

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n(\ln x)^p \,\mathtt{d}x = \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}(\ln x)^p\right]_0^1 - \frac{p}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{p-1}\,\mathtt{d}x = -\frac{p}{n+1}I_{n,p-1}$$

Par itération on trouve que

$$I_{(n,p)} = \frac{(-1)^p p!}{n+1}I_{(n,0)} = (-1)^p\frac{p!}{(n+1)^2}$$

.

Corrigé de l'exercice 4 *On pose* $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathtt{d}x$.

1. *On a* $x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{x^n}{1+x} \leq x^n$, *la croissance de l'intégrale donne*

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathtt{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathtt{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. *On a*

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathtt{d}x + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathtt{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,\mathtt{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathtt{d}x = \frac{1}{n+1}$$

3. *On pose* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. *Alors*

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}(I_{k-1}+I_k) = (I_0+I_1)-(I_1+I_2)+(I_2+I_3)-\cdots(-1)^{n-1}(I_{n-1}+I_n) = I_0 \pm I_n$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ *et* $I_0 = \ln 2$ *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

Corrigé de l'exercice 5 *on pose* $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathtt{d}x$, $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

1. *En posant le changement de variable* $t = 1-x$, $\mathtt{d}x = -\mathtt{d}t$, $x = 0 \Rightarrow t = 1$ *et* $x = 1 \Rightarrow t = 0$, *on trouve que*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathtt{d}x = -\int_1^0 (1-t)^p t^q\,\mathtt{d}t = \int_0^1 t^q(1-t)^p\,\mathtt{d}t = B(q,p)$$

Une intégration par partie donne, en posant $u' = x^p$, $v = (1-x)^q$ *donc* $u = \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$ *et* $v' = -q(1-x)^{q-1}$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathtt{d}x = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q\right] + \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\,\mathtt{d}x = \frac{q}{p+1}B(p+1,q-1).$$

Par itération, on trouve que,

$$B(p,q) = \frac{q}{p+1}B(p+1,q-1) = \frac{q}{p+1}\frac{q-1}{p+2}B(p+2,q-2) = \cdots = \frac{p!q!}{(p+q)!}B(p+q,0).$$

D'où $B(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

2. *En posant le changement de variables* $t = \sin^2 x$ *(donc* $1-t = \cos^2 t$ *et* $\mathtt{d}t = 2\sin x\cos x$*) de* $[0,\frac{\pi}{2}] \Rightarrow [0,1]$, *on trouve que*

$$I(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x \cos^{2q+1} x\,\mathtt{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathtt{d}t = \frac{1}{2}B(p,q).$$

Corrigé de l'exercice 6 (Intégrales de Wallis) *On pose* $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathtt{d}x$

1. *Par le changement de variable,* $t = \frac{\pi}{2} - x$, *donc* $\mathtt{d}t = -\mathtt{d}x$, $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ *et* $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$, *on a* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathtt{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\,\mathtt{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathtt{d}t$$

,

2. *On a,* $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le \sin^n x \le 1$, *la croissance de l'intégrale implique que* $0 \le W_n \le \dfrac{\pi}{2}$.
3. *Comme* $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ *alors* $0 \le \sin x \le 1$, *par suite pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $0 \le \sin^{n+1} x \le \sin^n x$ *et la croissance de l'intégrale donne que* $W_{n+1} \le W_n$. *D'où* W_n *est décroissante, comme elle est aussi minorée elle est donc convergente,*
4. *Par une intégration par partie, en posant* $u = \sin^{n+1} x$, $v' = \sin x$, *et* $u' = (n+1)\sin^n x\cos x$, $v = -\cos x$, *on obtient*

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \sin x\,\mathtt{d}x = \left[-\cos x \sin^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x\,\mathtt{d}x$$

C'est à dire que,

$$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2}) \Longrightarrow W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$$

5. *D'après la formule précédente et par itération on obtient,*

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}W_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}W_{2n-4} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 2}W_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

et

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}W_{2n-1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 1}W_1 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

6. *On a déjà montré que* $W_n \geq 0$ *et décroissante, donc pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leq 1$.

   D'autre part, par la relation de récurrence on a $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1} \leq (n+1)W_n$. *Par suite on a bien,*
$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{W_n}{W_{n-1}} \leq 1.$$

7. *Pour tout* $n \geq 1$, $S_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$, *or d'après la relation de récurrence on a* $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}$, *donc* $S_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = nW_nW_{n-1} = S_n$. *D'où* S_n *est constante et*
$$S_n = S_1 = \frac{\pi}{2}$$

8. *D'après les questions* 6 *et* 7, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{nW_n^2}{nW_nW_{n-1}} = 1$ *or* $nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$ *donc*
$$\lim_{n\to+\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2}.$$

   C'est à dire que
$$W_n \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

   D'après la question 5, $W_{2n} = \dfrac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\dfrac{\pi}{2}$. *On conclut que,* $C_{2n}^n \simeq \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

Corrigé du T.D d'analyse 2. Série N°3
Intégrales Généralisées

Corrigé de l'exercice 1 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *bornée et localement intégrable sur* $]a, b[$.

Si f est identiquement constante, elle évidement Riemann intégrable. Supposons donc que f est non constante et posons $m = \inf_{[a,b]} f(x)$ *et* $M = \sup_{[a,b]} f(x)$. *On a bien* $M - m > 0$

Soient $\varepsilon > 0$, α *et* β *tels que* $\max(\alpha - a, b - \beta) < \dfrac{\varepsilon}{4(M-m)}$.

f étant localement intégrable sur $]a, b[$, donc intégrable sur $[\alpha, \beta]$, par suite il existe une subdivision, notée σ, de $[\alpha, \beta]$ telle que la différence des sommes de Darboux

$$S(f_{[\alpha,\beta]}, \sigma) - s(f_{[\alpha,\beta]}, \sigma) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $\sigma_1 = \sigma \cup \{a, b\}$ *est une subdivision de* $[a, b]$, *posons* $m_\alpha = \inf_{[a,\alpha]} f(x)$, $M_\alpha = \sup_{[a,\alpha]} f(x)$, $m_\beta = \inf_{[\beta,b]} f(x)$, $M_\beta = \sup_{[\beta,b]} f(x)$, *alors*

$$S(f, \sigma_1) - s(f, \sigma_1) = (\alpha - a)(M_\alpha - m_\alpha) + S(f_{[\alpha,\beta]}, \sigma) - s(f_{[\alpha,\beta]}, \sigma) + (b - \beta)(M_\beta - m_\beta)$$

Or $(\alpha - a)(M_\alpha - m_\alpha) \leq (\alpha - a)(M - m) < \dfrac{\varepsilon}{4}$,

$S(f_{[\alpha,\beta]}, \sigma) - s(f_{[\alpha,\beta]}, \sigma) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ *et* $(b - \beta)(M_\beta - m_\beta)(b - \beta)(M - m) < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Finalement, on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision de $[a, b]$ tels que la différence des sommes de Darboux de f relativement à cette subdivision est inférieure à ε. D'où, l'intégrabilité de la fonction f sur $[a, b]$ au sens de Riemann.

Corrigé de l'exercice 2 *Considérons les intégrales de* ***Bertrand*** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathtt{d}x}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$.

1. *(**Premier cas :** $\alpha = 1$ Dans ce cas, on peut calculer exactement l'intégrale, en effet,*

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathtt{d}x}{x(\ln x)^\beta} = \left[-\frac{1}{\beta - 1}\frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}}\right]_2^{+\infty} = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-1}\dfrac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}} & si \quad \beta > 1 \\ +\infty & si \quad \beta \leq 1 \end{cases}$$

   Donc, l'intégrale converge (dans le cas $\alpha = 1$)si, et seulement si, $\beta > 1$.

2. *(**Deuxième cas :** $\alpha > 1$) Soit alors $1 < \delta < \alpha$, on a*

$$\lim_{x \to \to +\infty} \frac{x^\delta}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-\delta}(\ln x)^\beta} = 0$$

   Par comparaison avec les intégrales de Riemann ($\delta > 1$ et $\dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} << \dfrac{1}{x^\delta}$), on conclut que l'intégrale de Bertrand $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathtt{d}x}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ est convergente pour tout $\alpha > 1$ indépendamment de la valeur de β.

3. *(**troisième cas :** $\alpha < 1$) On a*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{(\ln x)^\beta} = +\infty$$

   Par comparaison avec les intégrales de Riemann $\dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} >> \dfrac{1}{x}$), on conclut que l'intégrale de Bertrand $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathtt{d}x}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ est divergente pour tout $\alpha < 1$ indépendamment de la valeur de β.

En conclusion, *les intégrales de Bertrand convergent, au voisinage de l'infini, si, et seulement si,* $\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$

En passant, au voisinage de 0*, par le changement de variable en posant* $t = \frac{1}{x}$, $\mathtt{d}x = -\frac{\mathtt{d}t}{t^2}$. *Par suite,*

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathtt{d}x}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \int_0^{1/2} \frac{\mathtt{d}x}{x^{2-\alpha}(-\ln x)^\beta}$$

En conclusion, *les intégrales de Bertrand convergent, au voisinage de* 0*, si, et seulement si,* $\alpha < 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$

Corrigé de l'exercice 3 *On pose, pour* $0 < a < b$, $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathtt{d}t$. *Il s'agit d'une intégrale généralisée avec deux singularités en* 0 *et en* $+\infty$*, on étudie le comportement des deux intégrales* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathtt{d}t$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathtt{d}t$.

Or la fonction $\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ *est prolongeable par continuité en* 0*, en effet,* $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} = b-a$*, donc* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,\mathtt{d}t$ *est une intégrale définie, c'est à dire que* 0 *est une fausse singularité.*

Il ne reste que l'infini comme point de singularité de l'intégrale. On a $t \geq 1$ *donc* $\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} \leq e^{-at}$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at}\,\mathtt{d}t = \frac{1}{a}$ *converge, par critère de comparaison, l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathtt{d}t$ *converge. D'où l'existence de* $I(a,b)$.

Soit $[\alpha,\beta] \subset]0,+\infty[$*, on a par linéarité de l'intégrale et changement de variables*

$$\int_\alpha^\beta \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathtt{d}t = \int_\alpha^\beta \frac{e^{-at}}{t}\,\mathtt{d}t - \int_\alpha^\beta \frac{e^{-bt}}{t} = \mathtt{d}t \int_\alpha^\beta \frac{e^{-at}}{at}\,a\mathtt{d}t - \int_\alpha^\beta \frac{e^{-bt}}{bt}\,b\mathtt{d}t = \int_{\alpha a}^{\beta a} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathtt{d}t - \int_{\alpha b}^{\beta b} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathtt{d}t$$

La relation de Chasles donne,

$$\int_{\alpha a}^{\beta a} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathtt{d}t - \int_{\alpha b}^{\beta b} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathtt{d}t = \int_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathtt{d}t + \int_{\alpha b}^{\beta a} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathtt{d}t - \left(\int_{\alpha b}^{\beta a} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathtt{d}t + \int_{\beta a}^{\beta b} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathtt{d}t\right)$$

Finalement on a

$$\int_\alpha^\beta \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathtt{d}t = \int_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathtt{d}t - \int_{\beta a}^{\beta b} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathtt{d}t$$

Or,

$$e^{-\alpha b}\int_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{\mathtt{d}t}{t} \leq \int_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathtt{d}t \leq e^{-\alpha a}\int_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{\mathtt{d}t}{t}$$

C'est à dire,

$$e^{-\alpha b}\ln\frac{b}{a} \leq \int_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathtt{d}t \leq e^{-\alpha a}\ln\frac{b}{a}$$

de même,

$$e^{-\beta b}\ln\frac{b}{a} \leq \int_{\beta a}^{\beta b} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathtt{d}t \leq e^{-\beta a}\ln\frac{b}{a}$$

Par suite,

$$\left(e^{-\alpha b}-e^{-\beta a}\right)\ln\frac{b}{a} \leq \int_\alpha^\beta \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathtt{d}t \leq \left(e^{-\alpha a}-e^{-\beta b}\right)\ln\frac{b}{a}$$

En passant à la limite $\alpha \to 0$, on obtient, pour tout $\beta > 0$

$$\left(1-e^{-\beta a}\right)\ln\frac{b}{a} \leq \int_0^\beta \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t \leq \left(1-e^{-\beta b}\right)\ln\frac{b}{a}$$

Une autre fois on passe à la limite $\beta \to +\infty$, on trouve,

$$\ln\frac{b}{a} \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d} \leq \ln\frac{b}{a}$$

Conclusion

$$I(a,b) = \ln\frac{b}{a}$$

Pour $a = 1$ et $b = 2$ et par le changement de variable $x = e^{-t}$, on obtient

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-t}-1}{-t}(-e^{-t}\,\mathrm{d}t) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = I(1,2) = \ln 2$$

Corrigé de l'exercice 4 *Soit $\alpha > 0$, considérons l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}$

1. *Il s'agit bien d'une intégrale généralisée avec une singularité en $+\infty$, or $\left|\dfrac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\right| \leq \dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$, et comme $\alpha > 0$ alors $\alpha + 1 > 1$, par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}}$ converge (intégrale de Riemann). Par critère de comparaison, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}$ est **absolument convergente**. Par intégration par partie, $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$, on obtient,*

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\alpha}\frac{\sin x}{x^\alpha}\right]_1^{+\infty} + \frac{1}{\alpha}\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$$

   donc,

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \alpha\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\mathrm{d}x - \sin 1$$

   l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}$ est convergente.

2. *Supposons $0 < \alpha \leq 1$, comme $\dfrac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \dfrac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}$, or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ diverge (intégrale de Riemann avec $0 < \alpha \leq 1$) et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ converge, par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ diverge (La somme de deux intégrales généralisées convergentes est une intégrale convergente). Comme $\left|\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\right| \geq \dfrac{\sin^2 x}{x^\alpha}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ diverge, par le critère de comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ diverge*

3. *On a $\dfrac{\frac{\cos t}{\sqrt{t}}}{\frac{\cos t}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2 t}{t}} = 1 + \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}} \to 1$, quand $t \to +\infty$, d'où $\dfrac{\cos t}{\sqrt{t}} \sim \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}} + \dfrac{\cos^2 t}{t}$, d'après la première question $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ converge et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}\mathrm{d}x$ diverge (remarquer*

que $\dfrac{\cos^2 x}{x^\alpha} = \dfrac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}$*) et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathtt{d}x$ *converge alors* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos^2 x}{x}\right)\mathtt{d}x$ *diverge.*

Malgré l'équivalence des deux fonctions leurs intégrales généralisées ne sont pas de même nature.

Corrigé de l'exercice 5 *Soit* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$*. L'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathtt{d}x}{x^\alpha + x^\beta}$ *présente deux singularités en* 0 *et en* $+\infty$*, on examine donc les deux intégrales généralisées* $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathtt{d}x}{x^\alpha + x^\beta}$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathtt{d}x}{x^\alpha + x^\beta}$.

La fonction $\dfrac{1}{x^\alpha + x^\beta}$ *est positive, on peut appliquer le critère d'équivalence, au voisinage de* 0 *on a* $\dfrac{1}{x^\alpha + x^\beta} \simeq \dfrac{1}{x^{\min(\alpha,\beta)}}$ *et au voisinage de l'infini* $\dfrac{1}{x^\alpha + x^\beta} \simeq \dfrac{1}{x^{\max(\alpha,\beta)}}$ *donc les deux intégrales,* $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathtt{d}x}{x^\alpha + x^\beta}$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathtt{d}x}{x^\alpha + x^\beta}$*, sont convergentes si, et seulement si,*

$$\min(\alpha,\beta) < 1 < \max(\alpha,\beta).$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(-\ln x)^\alpha}{(1-x)^\beta}\,\mathtt{d}x$ *présente deux singularités en* 0 *et en* 1 *(pour* $\beta > 0$*), on examine donc les deux intégrales* $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{(-\ln x)^\alpha}{(1-x)^\beta}\,\mathtt{d}x$ *et* $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{(-\ln x)^\alpha}{(1-x)^\beta}\,\mathtt{d}x$*, par le critère des équivalences on a, au voisinage de* 0*,* $\dfrac{(-\ln x)^\alpha}{(1-x)^\beta} \simeq (-\ln x)^\alpha\alpha$*, les deux fonctions sont positives dans l'intervalle d'étude. Donc, leurs intégrales sont de même nature, or d'après* $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}(-\ln x)^\alpha \to 0$ *et comme l'intégrale* $\int_0^{1/2} \dfrac{1}{\sqrt{x}},\mathtt{d}x$ *est convergente (intégrale de Riemann au voisinage de* 0 $\alpha < 1$*) il en est de même pour l'intégrale* $\int_0^{1/2}(-\ln x)^\alpha,\mathtt{d}x$ *ceci pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

Au voisinage de 1*, si* $\beta > 0$*, la fonction* $\dfrac{(-\ln x)^\alpha}{(1-x)^\beta}$ *se prolonge par continuité en* 1 *pour* $\alpha \geq \beta$ *car* $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{(-\ln x)^\alpha}{(1-x)^\beta} = 0$ *si* $\alpha > \beta$ *et* 1 *si* $\beta = \alpha$*. Donc,* 1 *est une singularité de l'intégrale généralisée seulement dans le cas* $\beta > \max(\alpha, 0)$*. Supposons alors que* $\beta > \max(\alpha, 0)$ *par changement de variables* $t = 1-x$*, on obtient* $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{(-\ln x)^\alpha}{(1-x)^\beta}\,\mathtt{d}x = \int_0^{1/2} \frac{(-\ln(1-t))^\alpha}{t^\beta}\,\mathtt{d}t$*. La dernière intégrale présente une singularité au voisinage de* 0*. or au voisinage de* 0 $-\ln(1-t) \simeq t$ *par suite* $\dfrac{(-\ln(1-t))^\alpha}{t^\beta} \simeq \dfrac{1}{t^{\beta-\alpha}}$ *donc l'intégrale converge si, et seulement si,* $\beta - \alpha < 1$*.*

En conclusion, l'intégrale converge si et seulement si, $\beta < \alpha + 1$

Corrigé de l'exercice 6 *Considérons l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathtt{d}x$*,* 0 *est une fausse singularité car* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$*. Au voisinage de l'infini on a* $\dfrac{1-\cos x}{x^2} \leq \dfrac{2}{x^2}$ *dont l'intégrale converge au voisinage de l'infini, d'où la convergence de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathtt{d}x$.

Une intégration par partie donne avec $u = 1 - \cos x$, $v' = \dfrac{1}{x^2}$ *donc,* $u' = \sin x$ *et* $v = -\dfrac{1}{x}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

D'autre part, par changement de variable

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Corrigé de l'exercice 7 *Posons* $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ *et* $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. *On a* $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin(2n+1)t}{\sin t} = \dfrac{\sin(2n+1)t}{t} = 2n+1$. *Donc, les fonctions considérées sont prolongeables par continuité au voisinage de* 0. *Les deux intégrales sont définies (il s'agit des intégrales propres ou au sens de Riemann) D'où l'existence des suites* $(I_n)_n$ *et* $(J_n)_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Soit* $n \geq 1$, *on a*

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)t &= \sin(2n-1)t \times \cos 2t + \cos(2n-1)t \times \sin 2t\\ &= \sin(2n-1)t \times (1 - 2\sin^2 t) + 2\cos(2n-1)t \times \sin t \times \cos t\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} &= \frac{\sin(2n-1)t}{\sin t} - 2\sin(2n-1)t \times \sin t + 2\cos(2n-1)t \times \cos t\\ &= \frac{\sin(2n-1)t}{\sin t} + 2\cos(2nt)\end{aligned}$$

Par suite, $I_n = I_{n-1} + 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nt)\,\mathrm{d}t = I_{n-1} + \frac{1}{n}\left[\sin(2nt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = I_{n-1}$.

La suite I_n *est constante. Donc* $I_n = I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. *Posons,* $u(t) = \phi(t)$, $v'(t) = \sin(2n+1)t$, *donc* $u'(t) = \phi'(t)$, $v(t) = -\dfrac{\cos(2n+1)t}{2n+1}$, *alors*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\phi(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi'(t)\cos(2n+1)t\,\mathrm{d}t$$

Soit $M \geq \max(\max_{[0,\frac{\pi}{2}]} |\phi(t)|, \max_{[0,\frac{\pi}{2}]} |\phi'(t)|)$, *alors*

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{3M}{2n+1}$$

D'où $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

4. *la fonction* $t \to \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]0, \frac{\pi}{2}]$. *Au voisinage de* 0, *on a* $\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t} = \dfrac{\sin t - t}{t\sin t} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{t^2}{\sin t} + o(t^2)$. *la fonction se prolonge par continuité en* 0 *par* 0 *en calculant le taux de variation de la fonction prolongée en* 0, *qu'on la notera* φ *on trouve que* $\dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{t}{\sin t} + o(t)$, *d'où la fonction prolongée est dérivable au voisinage de* 0 *avec* $\varphi'(0) = -\dfrac{1}{3}$. *La dérivée est continue en* 0. *D'où elle est de classe* $\mathcal{C}^1$.

5. *On a* $J_n - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right) \sin(2n+1)t\,\mathrm{d}t$ *comme* $\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ *se prolonge en une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$*, d'après la question précédente* $J_n - I_n \to 0$.
6. *Comme* I_n *est constante et vaut* $\frac{\pi}{2}$*. Alors,* $J_n \to \frac{\pi}{2}$*. D'autre part, en posant* $x = (2n+1)t$ *on trouve que,*

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)t}\,(2n+1)\mathrm{d}t = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \to \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = I = \frac{\pi}{2}$$

Corrigé de l'exercice 8 *Soit* f *la fonction définie par* $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$

1. *La fonction* $\frac{t^{-x}}{1+t} \simeq \frac{1}{t^{1+x}}$ *au voisinage de l'infini. Par critère d'équivalence des intégrales généralisées on conclut que* $f(x)$ *est définit si, et seulement si,* $x > 0$.
2. $x < y \Rightarrow t^x < t^y \Rightarrow \frac{t^{-y}}{1+t} < \frac{t^{-x}}{1+t}$*. D'où* f *est strictement décroissante.*
3. *On admet que* f *est une fonction continue sur son ensemble de définition.*

$$f(x) + f(x+1) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x} + t^{-x-1}}{1+t} = \int_1^{+\infty} t^{-x-1}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^{-x}}{x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0$$

4. *En déduire la limite de* f *en* 0 *et en* $+\infty$*. Donner un équivalent de* f *en* 0.
5. *Comme* f *est continue sur* $]0, +\infty[$*, donc en* 1 *alors* $\lim_{x\to 0} f(x+1) = f(1)$ *et comme* $xf(x)+xf(x+1) = 1$*, par passage à la limite on trouve que* $\lim_{x\to 0}(xf(x)xf(x+1)) = 1$*. Comme* $\lim_{x\to 0} +xf(x+1) = 0$*, il en découle que,* $\lim_{x\to 0} xf(x) = 1$*. Donc,* $f(x) \simeq \frac{1}{x}$ *au voisinage de* 0.
   Au voisinage de l'infini, pour $x > 1$*, on a*

$$\frac{1}{x+1} = f(x+1) + f(x) < 2f(x) < f(x) + f(x-1) = \frac{1}{x-1}$$

   En passant à la limite, on obtient, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$*. De plus, on a,*

$$\frac{x}{x+1} < 2xf(x) < \frac{x}{x-1}$$

   Ce qui donne $\lim_{x\to+\infty} 2xf(x) = 1$*, c'est à dire que* $f(x) \simeq \frac{1}{2x}$ *au voisinage de l'infini.*

Corrigé de l'exercice 9

1. $y'+y = 0$ *admet* Ke^{-x} *comme solution homogène, la variation de la constante donne* $y_p = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$ *comme solution particulière. Donc, l'ensemble des solutions est donné par* $y_g = \left(\frac{1}{2}x^2 + K\right)e^{-x}$.
2. *On a* Cx *est solution homogène, la variation de la constante donne* $y_p = \frac{x^2}{2} + C$ *comme solution particulière. Donc, l'ensemble des solutions est donné par* $y_g = \frac{1}{2}x^3 + Cx$.

Corrigé de l'exercice 10 *Concernant l'équation,* $y'' - 3y' + 2y = xe^x + 2x^2$*, son équation caractéristique est donnée par* $r^2 - 3r + 2 = 0$ *qui admet* $r_1 = 1$ *et* $r_2 = 2$ *comme racine simple, par suite l'ensemble des solutions homogène est le sous espace engendré par les fonctions* e^x *et* e^{2x}*, donc* $y_h = Ae^x + Be^{2x}$*.*

Pour chercher une solution particulière et comme le second membre est une somme de deux fonctions $f(x) = f_1(x)+f_2(x)$*, on cherche une solution particulière partielle* y_{p_1} *pour la fonction* f_1 *et une solution particulière* y_{p_2} *pour la fonction* f_2 *et la solution particulière de notre équation sera la somme* $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$*.*

Cherchons une solution particulière pour $f_1(x) = xe^x$*, comme 1 est racine de l'équation caractéristique on cherche alors une solution de la forme* $y_{p_1} = (ax^2+bx+c)e^x$*, ce qui implique qu'on doit avoir* $[(ax^2 + bx + c) + 2(2ax + b) + 2a]e^x - 3[(ax^2 + bx + c) + (2ax + b)]e^x + 2(ax^2 + bx + c)e^x = xe^x$ *or* $-3y_{p_1}^{'} = -3[ax^2 + (2a + b)x + b + c]e^x$*, et* $y_{p_1}^{''} = [ax^2 + (4a + 3b)x + 2a + c]$ *ce qui donne,*$y_{p_1}^{''} - 3y_{p_1}^{'} + 2y_{p_1} = [2(b - a)x + (2a - 3b)]e^x$*, donc* $a = -\frac{3}{2}$ *et* $b = -1$*, par suite*
$y_{p_1} = -\dfrac{1}{2}(3x^2 + 1)e^x$

Pour la solution particulière pour $f_2(x) = 2x^2$*, comme 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique on cherche alors une solution de la* $ax^2 + bx + c$*, ce qui implique qu'on doit avoir* $2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2$*, c'est à dire* $2ax^2 + (2b - 6a)x + 2a - 3b + 2c = 2x^2$ *donc* $a = 1$ *et* $2b - 6a = 0$ *et* $2a - 3b + 2c = 0$ *ce qui donne* $a = 1$*,* $b = 3$ *et* $c = \frac{7}{2}$*. Donc,* $y_{p_2} = x^2 + 3x + \frac{7}{2}$*.*

Finalement, l'ensemble des solutions est donnée par,

$$y_g = y_h + y_p = Ae^x + Be^{2x} - \frac{1}{2}(3x^2 + 1)e^x + x^2 + 3x + \frac{7}{2}, \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 2x$ *est donnée par* $r^2 + 2r + 2 = 0$*, qui admet deux solutions complexes* $r_1 = -1 + i$ *et* $r = -1 - i$*.*

La solution homogène est donnée par

$$y_h(x) = (A\cos x + B\sin x)\, e^{-x}$$

On cherche une solution particulière de la forme $ax+b$ *car le second membre est un polynôme de degré 1. On trouve alors* $2a+2(ax+b) = 2x$ *ce qui donne* $a = 1$ *et* $b = -1$*. donc la solution particulière est donnée par* $y_p = x - 1$*.*

L'ensemble des solutions générales est alors
$y_g = y_h + y_p = (A\cos x + B\sin x)\, e^{-x} + x - 1,\ A, B \in \mathbb{R}$