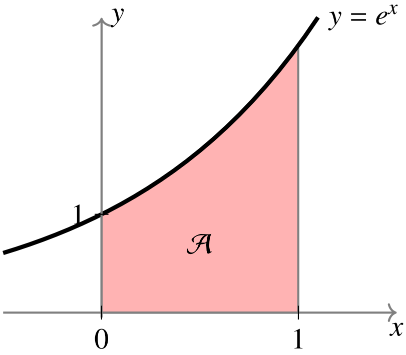
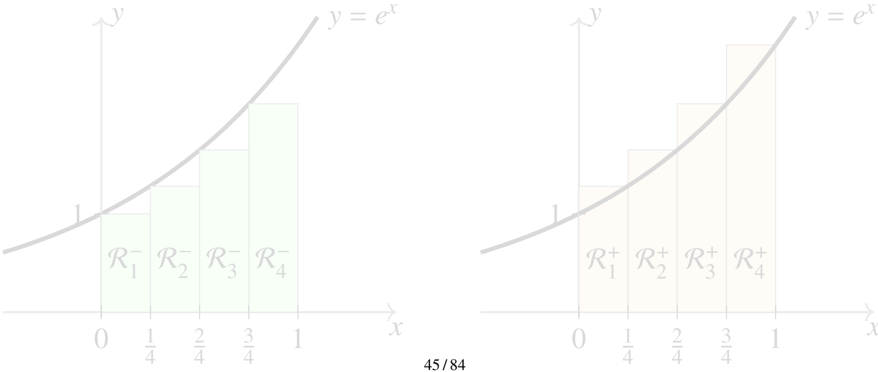
Chapitre 2
Intégrale de Riemann

Motivation. On va introduire l'intégrale à l'aide d'un exemple. Considérons la fonction exponentielle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto e^x$. On veux calculer l'aire $\mathcal{A}$ au dessous de la courbe de f et entre les droites d'équation $(x = 0)$, $(x = 1)$ et l'axe (Ox).



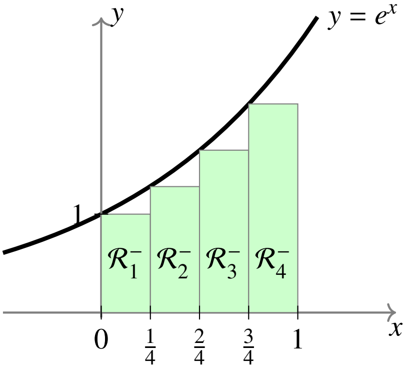
Motivation. On va approcher cette aire par des sommes d'aires des rectangles situés sous la courbe. Plus précisément, soit $n \geqslant 1$ un entier ; découpons l'intervalle $[0, 1]$ à l'aide de la subdivision $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$.

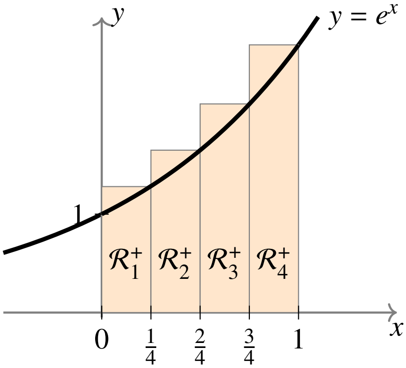
On considère les « rectangles inférieurs » $\mathcal{R}_i^-$, chacun ayant pour base l'intervalle $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ et pour hauteur $f\left(\frac{i-1}{n}\right) = e^{(i-1)/n}$. L'entier i varie de 1 à n. L'aire de $\mathcal{R}_i^-$ est « base × hauteur » : $\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \times e^{(i-1)/n} = \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}}$.



Motivation. On va approcher cette aire par des sommes d'aires des rectangles situés sous la courbe. Plus précisément, soit $n \geqslant 1$ un entier ; découpons l'intervalle $[0, 1]$ à l'aide de la subdivision $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$.

On considère les « rectangles inférieurs » $\mathcal{R}_i^-$, chacun ayant pour base l'intervalle $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ et pour hauteur $f\left(\frac{i-1}{n}\right) = e^{(i-1)/n}$. L'entier i varie de 1 à n. L'aire de $\mathcal{R}_i^-$ est « base $\times$ hauteur » : $\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \times e^{(i-1)/n} = \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}}$.





Motivation.

La somme des aires des $\mathcal{R}_i^-$ se calcule alors comme somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i-1}{n}}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} = \frac{1}{n} \frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}(e-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e-1.$$

Pour la limite on a reconnu l'expression du type $\dfrac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ (avec ici $x = \dfrac{1}{n}$).

Soit maintenant les « rectangles supérieurs » $\mathcal{R}_i^+$, ayant la même base $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ mais la hauteur $f(\frac{i}{n}) = e^{i/n}$. Un calcul similaire montre que $\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n} \to e-1$ lorsque $n \to +\infty$.

L'aire $\mathcal{A}$ de notre région est supérieure à la somme des aires des rectangles inférieurs ; et elle est inférieure à la somme des aires des rectangles supérieurs.

Motivation.

La somme des aires des $\mathcal{R}_i^-$ se calcule alors comme somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i-1}{n}}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} = \frac{1}{n}\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}(e-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e-1.$$

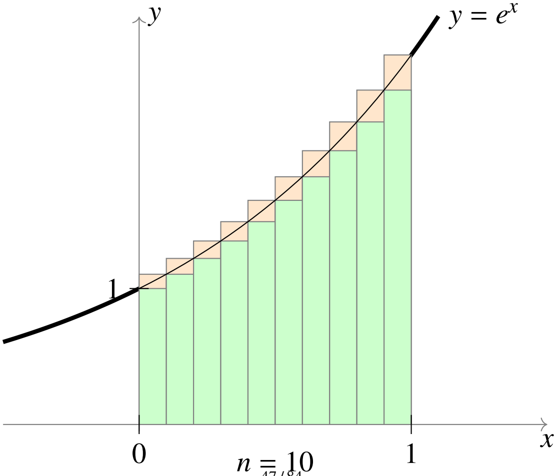
Pour la limite on a reconnu l'expression du type $\dfrac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ (avec ici $x = \dfrac{1}{n}$).

Soit maintenant les « rectangles supérieurs » $\mathcal{R}_i^+$, ayant la même base $\left[\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right]$ mais la hauteur $f\left(\dfrac{i}{n}\right) = e^{i/n}$. Un calcul similaire montre que $\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n} \to e-1$ lorsque $n \to +\infty$.

L'aire $\mathcal{A}$ de notre région est supérieure à la somme des aires des rectangles inférieurs ; et elle est inférieure à la somme des aires des rectangles supérieurs.

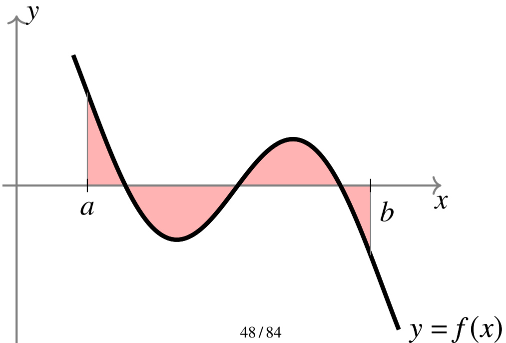
Motivation.

Lorsque l'on considère des subdivisions de plus en plus petites (c'est-à-dire lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$) alors on obtient à la limite que l'aire $\mathcal{A}$ de notre région est encadrée par deux aires qui tendent vers $e-1$. Donc l'aire de la région en question est $\mathcal{A} = e - 1$.



1) Définition de l'intégrale.

Nous allons reprendre la construction faite dans l'introduction pour une fonction f quelconque. Ce qui va remplacer les rectangles seront des *fonctions en escalier*. Si la limite des aires en-dessous égale la limite des aires au-dessus on appelle cette limite commune *l'intégrale* de f que l'on note $\int_a^b f(x)\ dx$. Cependant il n'est pas toujours vrai que ces limites soient égales, l'intégrale n'est donc définie que pour les fonctions *intégrables*. Heureusement nous verrons que si la fonction f est continue alors elle est intégrable.



1) Définition de l'intégrale.

On fixe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Définition 1.1 (subdivision). Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On appelle une *subdivision* de $[a, b]$ une suite finie et strictement croissante $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Une subdivision $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a\,,\, b]$ est dite *régulière* si tous les sous-intervalles de $\mathcal{S}$ ont la même longueur. Ainsi $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Définition 1.2 (fonction en escalier). On dit qu'une fonction $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *fonction en escalier* s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de l'intervalle $[a, b]$ et des nombres réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on ait

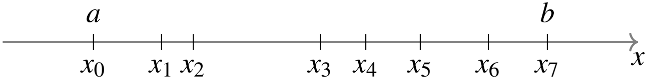
$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \quad f(x) = c_i.$$

Autrement dit, f est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles de la subdivision.

1) Définition de l'intégrale.

On fixe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Définition 1.1 (subdivision). Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On appelle une *subdivision* de $[a, b]$ une suite finie et strictement croissante $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.



Une subdivision $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a\,,\,b]$ est dite *régulière* si tous les sous-intervalles de $\mathcal{S}$ ont la même longueur. Ainsi $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Définition 1.2 (fonction en escalier). On dit qu'une fonction $f\colon\ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *fonction en escalier* s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de l'intervalle $[a, b]$ et des nombres réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on ait

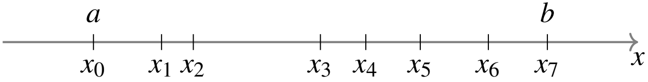
$$\forall\, x \in]x_{i-1}, x_i[, \quad f(x) = c_i.$$

Autrement dit, f est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles de la subdivision.

1) Définition de l'intégrale.

On fixe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Définition 1.1 (subdivision). Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On appelle une *subdivision* de $[a, b]$ une suite finie et strictement croissante $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.



Une subdivision $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a\,,\, b]$ est dite *régulière* si tous les sous-intervalles de $\mathcal{S}$ ont la même longueur. Ainsi $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Définition 1.2 (fonction en escalier). On dit qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *fonction en escalier* s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de l'intervalle $[a, b]$ et des nombres réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on ait

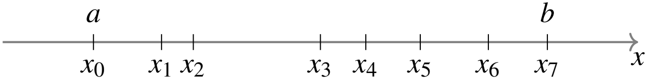
$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \quad f(x) = c_i.$$

Autrement dit, f est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles de la subdivision.

1) Définition de l'intégrale.

On fixe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Définition 1.1 (subdivision). Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On appelle une *subdivision* de $[a, b]$ une suite finie et strictement croissante $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.



Une subdivision $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a\,,\,b]$ est dite *régulière* si tous les sous-intervalles de $\mathcal{S}$ ont la même longueur. Ainsi $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Définition 1.2 (fonction en escalier). On dit qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *fonction en escalier* s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de l'intervalle $[a, b]$ et des nombres réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on ait

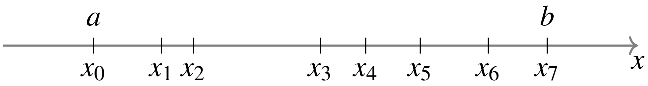
$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \quad f(x) = c_i.$$

Autrement dit, f est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles de la subdivision.

1) Définition de l'intégrale.

On fixe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Définition 1.1 (subdivision). Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On appelle une *subdivision* de $[a, b]$ une suite finie et strictement croissante $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.



Une subdivision $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a\,,\, b]$ est dite *régulière* si tous les sous-intervalles de $\mathcal{S}$ ont la même longueur. Ainsi $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Définition 1.2 (fonction en escalier). On dit qu'une fonction $f\colon\ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *fonction en escalier* s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de l'intervalle $[a, b]$ et des nombres réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on ait

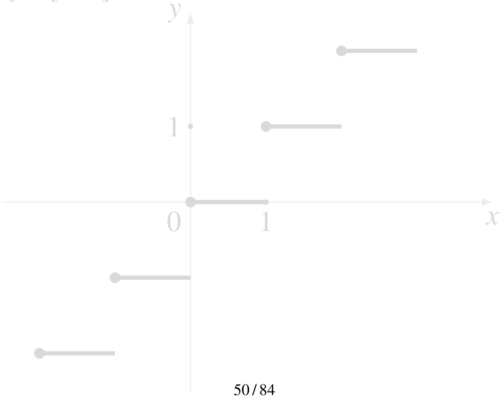
$$\forall\, x \in]x_{i-1}, x_i[, \quad f(x) = c_i.$$

Autrement dit, f est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles de la subdivision.

1) Définition de l'intégrale.

Remarque. La valeur de f aux points x_i de la subdivision n'est pas importante. Elle peut être égale à celle de l'intervalle qui précède ou de celui qui suit, ou encore une autre valeur arbitraire. Cela n'a pas d'importance car l'aire ne changera pas.

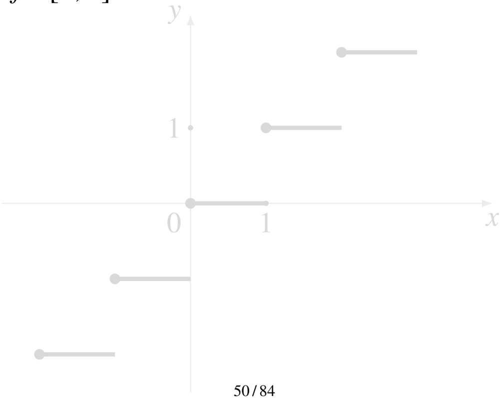
Exemples. 1) Une fonction constante $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$.
2) La fonction partie entière $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$.



1) Définition de l'intégrale.

Remarque. La valeur de f aux points x_i de la subdivision n'est pas importante. Elle peut être égale à celle de l'intervalle qui précède ou de celui qui suit, ou encore une autre valeur arbitraire. Cela n'a pas d'importance car l'aire ne changera pas.

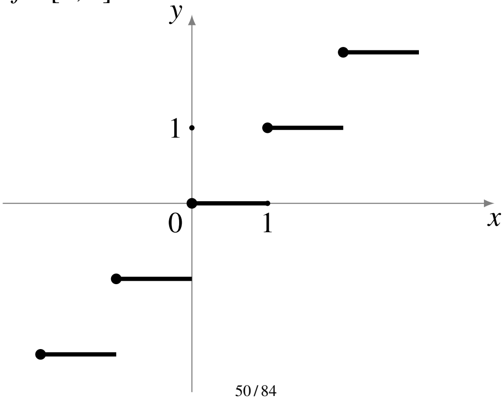
Exemples. 1) Une fonction constante $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$.
2) La fonction partie entière $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$.



1) Définition de l'intégrale.

Remarque. La valeur de f aux points x_i de la subdivision n'est pas importante. Elle peut être égale à celle de l'intervalle qui précède ou de celui qui suit, ou encore une autre valeur arbitraire. Cela n'a pas d'importance car l'aire ne changera pas.

Exemples. 1) Une fonction constante $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.
2) La fonction partie entière $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.



1) Définition de l'intégrale.

Définition 1.2 (intégrale d'une fonction en escalier). Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction en escalier. On appelle *intégrale* de f le nombre réel (noté $\int_a^b f(x)\ dx$) défini par :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).c_i.}$$

Remarque. Remarquons que chaque terme $c_i.(x_i - x_{i-1})$ est l'aire du rectangle compris entre les abscisses x_{i-1} et x_i et de hauteur c_i. Il faut faire attention que l'on compte l'aire avec un signe « + » si $c_i > 0$ et un signe « − » si $c_i < 0$.
L'intégrale d'une fonction en escalier est l'aire de la partie située au dessus de l'axe des abscisses (ici en orange) moins l'aire de la partie située en-dessous (ici en en bleu). L'intégrale d'une fonction en escalier est bien un nombre réel qui mesure l'aire algébrique (c'est-à-dire avec signe) entre la courbe de f et l'axe des abscisses.

1) Définition de l'intégrale.

Définition 1.2 (intégrale d'une fonction en escalier). Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction en escalier. On appelle *intégrale* de f le nombre réel (noté $\int_a^b f(x)\,dx$) défini par :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).c_i.}$$

Remarque. Remarquons que chaque terme $c_i.(x_i - x_{i-1})$ est l'aire du rectangle compris entre les abscisses x_{i-1} et x_i et de hauteur c_i. Il faut faire attention que l'on compte l'aire avec un signe « + » si $c_i > 0$ et un signe « − » si $c_i < 0$.
L'intégrale d'une fonction en escalier est l'aire de la partie située au dessus de l'axe des abscisses (ici en orange) moins l'aire de la partie située en-dessous (ici en en bleu). L'intégrale d'une fonction en escalier est bien un nombre réel qui mesure l'aire algébrique (c'est-à-dire avec signe) entre la courbe de f et l'axe des abscisses.

1) Définition de l'intégrale.

Définition 1.2 (intégrale d'une fonction en escalier). Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction en escalier. On appelle *intégrale* de f le nombre réel (noté $\int_a^b f(x)\ dx$) défini par :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).c_i.}$$

Remarque. Remarquons que chaque terme $c_i.(x_i - x_{i-1})$ est l'aire du rectangle compris entre les abscisses x_{i-1} et x_i et de hauteur c_i. Il faut faire attention que l'on compte l'aire avec un signe « + » si $c_i > 0$ et un signe « − » si $c_i < 0$.
L'intégrale d'une fonction en escalier est l'aire de la partie située au dessus de l'axe des abscisses (ici en orange) moins l'aire de la partie située en-dessous (ici en en bleu). L'intégrale d'une fonction en escalier est bien un nombre réel qui mesure l'aire algébrique (c'est-à-dire avec signe) entre la courbe de f et l'axe des abscisses.

1) Définition de l'intégrale.

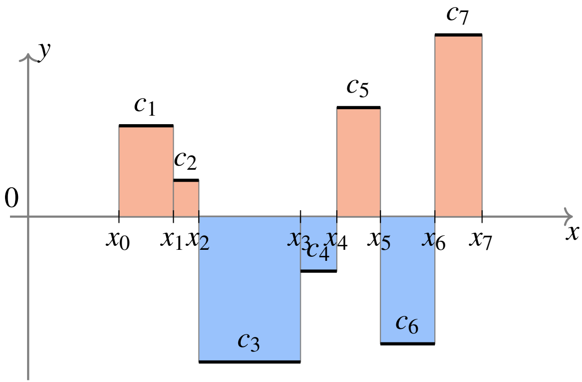


FIGURE – Interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction en escalier.

1) Définition de l'intégrale.

On montre facilement que l'intégrale des fonctions en escalier possède les propriétés suivantes :

Proposition 1.3. Soient $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions en escalier. On a

1) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont deux constantes, alors $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b f(t)dt.$
2) Si $c \in [a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$
3) Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0.$
4) Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt.$

1) Définition de l'intégrale.

On montre facilement que l'intégrale des fonctions en escalier possède les propriétés suivantes :

Proposition 1.3. Soient $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions en escalier. On a

1) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont deux constantes, alors $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b f(t)dt.$
2) Si $c \in [a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$
3) Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0.$
4) Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt.$

1) Définition de l'intégrale.

Rappelons qu'une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est *bornée* s'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b], \quad -M \leqslant f(x) \leqslant M.$$

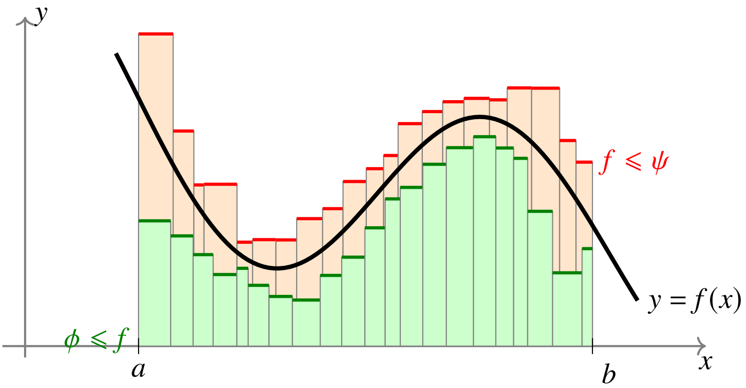
Rappelons aussi que si l'on a deux fonctions $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, alors on note

$$f \leqslant g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in [a,b], \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **bornée** fixée quelconque. On définit deux nombres réels :

$$I^-(f) = \sup\left\{\int_a^b \phi(x)\,dx \mid \phi \text{ en escalier et } \phi \leqslant f\right\} \text{ et } I^+(f) = \inf\left\{\int_a^b \psi(x)\,dx \mid \psi \text{ en escalier et } f \leqslant \psi\right\}$$

1) Définition de l'intégrale.



Pour $I^-(f)$ on prend toutes les fonctions en escalier (avec toutes les subdivisions possibles) qui restent inférieures à f (en vert sur le dessin). On prend l'aire la plus grande parmi toutes ces fonctions en escalier, comme on n'est pas sûr que ce maximum existe on prend la borne supérieure. Pour $I^+(f)$ c'est le même principe mais les fonctions en escalier qui sont supérieures à f (en orange sur le dessin) et on cherche l'aire la plus petite possible.

1) Définition de l'intégrale.

Il est facile de voir que :

Proposition 1.4. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée quelconque. Alors on a toujours $I^-(f) \leqslant I^+(f)$.

Définition 1.5 (fonction intégrable). Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On dit que f est *intégrable* (*au sens de Riemann*) sur $[a, b]$ si $I^-(f) = I^+(f)$. On appelle alors ce nombre *l'intégrale* de f sur $[a, b]$ et on le note $\int_a^b f(x)\, dx$.

Exemples. 1) Les fonctions en escalier sont intégrables ! En effet, si f est une fonction en escalier alors la borne inférieure $I^-(f)$ et supérieure $I^+(f)$ sont atteintes avec la fonction $\phi = f$. Bien sûr l'intégrale $\int_a^b f(x)\, dx$ coïncide avec l'intégrale de la fonction en escalier définie précédement.
2) On va voir dans la section suivante que les fonctions continues et les fonctions monotones sont intégrables.

1) Définition de l'intégrale.

Il est facile de voir que :

Proposition 1.4. Soit $f:\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée quelconque. Alors on a toujours $I^-(f) \leqslant I^+(f)$.

Définition 1.5 (fonction intégrable). Soit $f:\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On dit que f est *intégrable* (*au sens de Riemann*) sur $[a,b]$ si $I^-(f) = I^+(f)$. On appelle alors ce nombre *l'intégrale* de f sur $[a,b]$ et on le note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Exemples. 1) Les fonctions en escalier sont intégrables ! En effet, si f est une fonction en escalier alors la borne inférieure $I^-(f)$ et supérieure $I^+(f)$ sont atteintes avec la fonction $\phi = f$. Bien sûr l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ coïncide avec l'intégrale de la fonction en escalier définie précédement.
2) On va voir dans la section suivante que les fonctions continues et les fonctions monotones sont intégrables.

1) Définition de l'intégrale.

Il est facile de voir que :

Proposition 1.4. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée quelconque. Alors on a toujours $I^-(f) \leqslant I^+(f)$.

Définition 1.5 (fonction intégrable). Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On dit que f est *intégrable* (*au sens de Riemann*) sur $[a, b]$ si $I^-(f) = I^+(f)$. On appelle alors ce nombre *l'intégrale* de f sur $[a, b]$ et on le note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Exemples. 1) Les fonctions en escalier sont intégrables ! En effet, si f est une fonction en escalier alors la borne inférieure $I^-(f)$ et supérieure $I^+(f)$ sont atteintes avec la fonction $\phi = f$. Bien sûr l'intégrale $\int_a^b f(x)\ dx$ coïncide avec l'intégrale de la fonction en escalier définie précédement.
2) On va voir dans la section suivante que les fonctions continues et les fonctions monotones sont intégrables.

1) Définition de l'intégrale.

Il est facile de voir que :

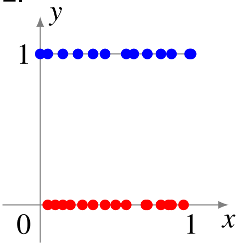
Proposition 1.4. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée quelconque. Alors on a toujours $I^-(f) \leqslant I^+(f)$.

Définition 1.5 (fonction intégrable). Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On dit que f est *intégrable* (*au sens de Riemann*) sur $[a,b]$ si $I^-(f) = I^+(f)$. On appelle alors ce nombre *l'intégrale* de f sur $[a,b]$ et on le note $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Exemples. 1) Les fonctions en escalier sont intégrables ! En effet, si f est une fonction en escalier alors la borne inférieure $I^-(f)$ et supérieure $I^+(f)$ sont atteintes avec la fonction $\phi = f$. Bien sûr l'intégrale $\int_a^b f(x)\ dx$ coïncide avec l'intégrale de la fonction en escalier définie précédement.
2) On va voir dans la section suivante que les fonctions continues et les fonctions monotones sont intégrables.

1) Définition de l'intégrale.

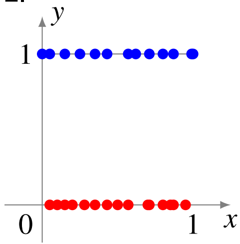
3) Cependant toutes les fonctions ne sont pas intégrables. La fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si x est rationnel et $f(x) = 0$ sinon, n'est pas intégrable sur $[0, 1]$. On montre que si ϕ est une fonction en escalier avec $\phi \leqslant f$ alors $\phi \leqslant 0$ et que si $f \leqslant \psi$ alors $1 \leqslant \psi$. On en déduit que $I^-(f) = 0$ et $I^+(f) = 1$. Les bornes inférieure et supérieure ne coïncident pas, donc f n'est pas intégrable. Voir l'exercice 2 de la série 2.



Il n'est pas si facile de calculer l'intégrale d'une fonction intégrable avec la définition. Nous avons vu l'exemple de la fonction exponentielle dans l'introduction où on a montré que $\int_0^1 e^x \, dx = e - 1$. On va voir dans l'exercice 3 de la série 2 l'exemple de la fonction $f(x) = x^2$. Plus tard dans le chapitre 3, nous verrons que les primitives permettent de calculer simplement beaucoup d'intégrales.

1) Définition de l'intégrale.

3) Cependant toutes les fonctions ne sont pas intégrables. La fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si x est rationnel et $f(x) = 0$ sinon, n'est pas intégrable sur $[0, 1]$. On montre que si ϕ est une fonction en escalier avec $\phi \leqslant f$ alors $\phi \leqslant 0$ et que si $f \leqslant \psi$ alors $1 \leqslant \psi$. On en déduit que $I^-(f) = 0$ et $I^+(f) = 1$. Les bornes inférieure et supérieure ne coïncident pas, donc f n'est pas intégrable. Voir l'exercice 2 de la série 2.



Il n'est pas si facile de calculer l'intégrale d'une fonction intégrable avec la définition. Nous avons vu l'exemple de la fonction exponentielle dans l'introduction où on a montré que $\int_0^1 e^x \, dx = e - 1$. On va voir dans l'exercice 3 de la série 2 l'exemple de la fonction $f(x) = x^2$. Plus tard dans le chapitre 3, nous verrons que les primitives permettent de calculer simplement beaucoup d'intégrales.

1) Définition de l'intégrale.

Convention et notation. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a, b]$ (avec $a < b$).

- On convient que $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Dans la notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, la variable x est *muette*, c.-à-d. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas de x (il dépend de a, b et f), on peut remplacer x par une autre lettre ne figurant pas comme paramètre de l'expression :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\lambda)\,d\lambda.$$

En utilisant la caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure, la définition 1.5 est équivalente à la proposition suivante (qu'on utilise souvent) :

Proposition 1.6. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$ si, et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \text{ et } \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\,dx < \varepsilon.$$

1) Définition de l'intégrale.

Convention et notation. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,b]$ (avec $a < b$).

- On convient que $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Dans la notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, la variable x est *muette*, c.-à-d. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas de x (il dépend de a, b et f), on peut remplacer x par une autre lettre ne figurant pas comme paramètre de l'expression :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\lambda)\,d\lambda.$$

En utilisant la caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure, la définition 1.5 est équivalente à la proposition suivante (qu'on utilise souvent) :

Proposition 1.6. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$ si, et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\,dx < \varepsilon.$$

1) Définition de l'intégrale.

Convention et notation. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,b]$ (avec $a<b$).

- On convient que $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Dans la notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, la variable x est *muette*, c.-à-d. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas de x (il dépend de a, b et f), on peut remplacer x par une autre lettre ne figurant pas comme paramètre de l'expression :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\lambda)\,d\lambda.$$

En utilisant la caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure, la définition 1.5 est équivalente à la proposition suivante (qu'on utilise souvent) :

Proposition 1.6. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$ si, et seulement si pour tout $\varepsilon>0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \ \text{ et } \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\,dx < \varepsilon.$$

1) Définition de l'intégrale.

Convention et notation. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a, b]$ (avec $a < b$).

- On convient que $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Dans la notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, la variable x est *muette*, c.-à-d. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas de x (il dépend de a, b et f), on peut remplacer x par une autre lettre ne figurant pas comme paramètre de l'expression :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\lambda)\,d\lambda.$$

En utilisant la caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure, la définition 1.5 est équivalente à la proposition suivante (qu'on utilise souvent) :

Proposition 1.6. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$ si, et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\,dx < \varepsilon.$$

1) Définition de l'intégrale.

Preuve. $\Longrightarrow$) Supposons que f est intégrable sur $[a\,,\,b]$. Donc $I^{-}(f) = I^{+}(f)$. Notons I cette valeur commune. On a donc $I = \sup\left\{\int_a^b \phi(x)\,dx \mid \phi \text{ en escalier et } \phi \leqslant f\right\}$. La caractérisation de la borne supérieure permet d'affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction escalier $\phi_\varepsilon : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\phi_\varepsilon \leqslant f$ telle que $I - \varepsilon/2 < \int_a^b \phi_\varepsilon(x)\,dx$. D'où

$$\int_a^b -\phi_\varepsilon(x)\,dx < -I + \varepsilon/2. \tag{1}$$

On a aussi $I = \inf\left\{\int_a^b \psi(x)\,dx \mid \psi \text{ en escalier et } f \leqslant \psi\right\}$. La caractérisation de la borne inférieure permet d'affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction escalier $\psi_\varepsilon : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f \leqslant \psi_\varepsilon$ telle que

$$\int_a^b \psi_\varepsilon(x)\,dx < I + \varepsilon/2. \tag{2}$$

La somme de (1)+(2) entraîne que $\int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\,dx < \varepsilon$.

1) Définition de l'intégrale.

Preuve. $\Longleftarrow$) Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \text{ et } \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\, dx < \varepsilon.$$

Comme $I^+(f) \leqslant \int_a^b \psi_\varepsilon(x)\, dx$ et $\int_a^b \phi_\varepsilon(x)\, dx \leqslant I^-(f)$, il vient que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ 0 \leqslant I^+(f) - I^-(f) < \varepsilon.$$

On en déduit que $I^-(f) = I^+(f)$. Ce qui montre que f est intégrable sur $[a, b]$.

Proposition 1.7. 1) Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable et si l'on change les valeurs de f en un nombre fini de points de $[a, b]$ alors la fonction f est toujours intégrable et la valeur de $\int_a^b f(x)\, dx$ ne change pas.
2) Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, alors f est encore intégrable sur tout sous-intervalle $[c, d] \subset [a, b]$.
3) Si $c \in [a, b]$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

1) Définition de l'intégrale.

Preuve. $\Longleftarrow$) Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \text{ et } \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\, dx < \varepsilon.$$

Comme $I^+(f) \leqslant \int_a^b \psi_\varepsilon(x)\, dx$ et $\int_a^b \phi_\varepsilon(x)\, dx \leqslant I^-(f)$, il vient que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ 0 \leqslant I^+(f) - I^-(f) < \varepsilon.$$

On en déduit que $I^-(f) = I^+(f)$. Ce qui montre que f est intégrable sur $[a,b]$.

Proposition 1.7. 1) Si $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable et si l'on change les valeurs de f en un nombre fini de points de $[a\,,\,b]$ alors la fonction f est toujours intégrable et la valeur de $\int_a^b f(x)\, dx$ ne change pas.
2) Si $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, alors f est encore intégrable sur tout sous-intervalle $[c\,,\,d] \subset [a\,,\,b]$.
3) Si $c \in [a\,,\,b]$ et $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a\,,\,c]$ et sur $[c\,,\,b]$, alors f est intégrable sur $[a\,,\,b]$.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Voici maintenant le résultat théorique le plus important de ce chapitre.

Théorème 2.1. Soit $f\colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est continue sur $[a\,,\,b]$, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a\,,\,b]$.

Ainsi on obtient baucoup d'exemples de fontions intégrables :

Exemples. 1) Toute fonction polynômiale est intégrable sur tout segment $[a\,,\,b]$ de $\mathbb{R}$.
2) La fonction exponentielle $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto e^x$ est intégrable sur tout segment $[a\,,\,b]$ de $\mathbb{R}$.
3) La fonction logarithme $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \ln x$ est intégrable sur tout segment $[a\,,\,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$.
4) Les fonctions circulaires $\sin$ et $\cos$ sont intégrables sur tout segment $[a\,,\,b]$ de $\mathbb{R}$.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Voici maintenant le résultat théorique le plus important de ce chapitre.

Théorème 2.1. Soit $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est continue sur $[a\,,\,b]$, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a\,,\,b]$.

Ainsi on obtient baucoup d'exemples de fontions intégrables :

Exemples. 1) Toute fonction polynômiale est intégrable sur tout segment $[a\,,\,b]$ de $\mathbb{R}$.
2) La fonction exponentielle $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto e^x$ est intégrable sur tout segment $[a\,,\,b]$ de $\mathbb{R}$.
3) La fonction logarithme $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \ln x$ est intégrable sur tout segment $[a\,,\,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$.
4) Les fonctions circulaires $\sin$ et $\cos$ sont intégrables sur tout segment $[a\,,\,b]$ de $\mathbb{R}$.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction étant continue sur $[a\,,\,b]$, elle est donc uniformément continue sur $[a\,,\,b]$ d'après le théorème de Heine (voir le cours d'Analyse 1 en S1). Ainsi il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall\, x, x' \in [a\,,\,b],\ |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Mais d'après la propriété d'Archimède, on sait que

$$\exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n > \frac{b-a}{\delta}.$$

Considérons la subdivision régulière $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a\,,\,b]$ d'ordre n, c'est-à-dire telle que $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Soient les fonctions en escalier $\phi_n, \psi_n \colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\forall\, x \in [x_{i-1}\,,\,x_i],\ \begin{cases} \phi_n(x) = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\} = f(x_{m_i}), \\ \psi_n(x) = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\} = f(x_{M_i}). \end{cases}$$

avec $x_{m_i}, x_{M_i} \in [x_{i-1}\,,\,x_i]$ car f est continue sur $[x_{i-1}\,,\,x_i]$, elle est donc bornée et atteint ses bornes sur $[x_{i-1}\,,\,x_i]$ (voir le cours d'Analyse 1 en S1).

2) Exemples de fonctions intégrables.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction étant continue sur $[a\,,\,b]$, elle est donc uniformément continue sur $[a\,,\,b]$ d'après le théorème de Heine (voir le cours d'Analyse 1 en S1). Ainsi il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall\, x, x' \in [a\,,\,b],\ |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Mais d'après la propriété d'Archimède, on sait que

$$\exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n > \frac{b-a}{\delta}.$$

Considérons la subdivision régulière $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a\,,\,b]$ d'ordre n, c'est-à-dire telle que $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Soient les fonctions en escalier $\phi_n, \psi_n \colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\forall\, x \in [x_{i-1}\,,\,x_i],\ \begin{cases} \phi_n(x) = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\} = f(x_{m_i}), \\ \psi_n(x) = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\} = f(x_{M_i}). \end{cases}$$

avec $x_{m_i}, x_{M_i} \in [x_{i-1}\,,\,x_i]$ car f est continue sur $[x_{i-1}\,,\,x_i]$, elle est donc bornée et atteint ses bornes sur $[x_{i-1}\,,\,x_i]$ (voir le cours d'Analyse 1 en S1).

2) Exemples de fonctions intégrables.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction étant continue sur $[a\,,\,b]$, elle est donc uniformément continue sur $[a\,,\,b]$ d'après le théorème de Heine (voir le cours d'Analyse 1 en S1). Ainsi il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall\, x, x' \in [a\,,\,b],\ |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot$$

Mais d'après la propriété d'Archimède, on sait que

$$\exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n > \frac{b-a}{\delta}\cdot$$

Considérons la subdivision régulière $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a\,,\,b]$ d'ordre n, c'est-à-dire telle que $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Soient les fonctions en escalier $\phi_n, \psi_n \colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\forall\, x \in [x_{i-1}\,,\,x_i],\ \begin{cases} \phi_n(x) = \inf\big\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\big\} = f(x_{m_i}), \\ \psi_n(x) = \sup\big\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\big\} = f(x_{M_i}). \end{cases}$$

avec $x_{m_i}, x_{M_i} \in [x_{i-1}\,,\,x_i]$ car f est continue sur $[x_{i-1}\,,\,x_i]$, elle est donc bornée et atteint ses bornes sur $[x_{i-1}\,,\,x_i]$ (voir le cours d'Analyse 1 en S1).

2) Exemples de fonctions intégrables.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction étant continue sur $[a\,,\,b]$, elle est donc uniformément continue sur $[a\,,\,b]$ d'après le théorème de Heine (voir le cours d'Analyse 1 en S1). Ainsi il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall\, x, x' \in [a\,,\,b],\ |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot$$

Mais d'après la propriété d'Archimède, on sait que

$$\exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n > \frac{b-a}{\delta}\cdot$$

Considérons la subdivision régulière $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a\,,\,b]$ d'ordre n, c'est-à-dire telle que $x_i = a + i\cdot\dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Soient les fonctions en escalier $\phi_n, \psi_n\colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\forall\, x \in [x_{i-1}\,,\,x_i],\ \begin{cases} \phi_n(x) = \inf\big\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\big\} = f(x_{m_i}), \\ \psi_n(x) = \sup\big\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\big\} = f(x_{M_i}). \end{cases}$$

avec $x_{m_i}, x_{M_i} \in [x_{i-1}\,,\,x_i]$ car f est continue sur $[x_{i-1}\,,\,x_i]$, elle est donc bornée et atteint ses bornes sur $[x_{i-1}\,,\,x_i]$ (voir le cours d'Analyse 1 en S1).

2) Exemples de fonctions intégrables.

Preuve (suite). Par définition de ϕ_n et ψ_n, on a évidement $\phi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$. De plus et comme $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n} < \delta$, on a $\left|x_{M_i} - x_{m_i}\right| \leqslant x_i - x_{i-1} < \delta$. D'où $f(x_{M_i}) - f(x_{m_i}) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Il vient que

$$
\begin{aligned}
\int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\big(f(x_{M_i}) - f(x_{m_i})\big) \\
&= \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_{M_i}) - f(x_{m_i})\big) \\
&< \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \\
&= \frac{(b-a)}{n} \cdot \frac{n.\varepsilon}{b-a} \\
&\varepsilon.
\end{aligned}
$$

2) Exemples de fonctions intégrables.

Preuve (suite). Par définition de ϕ_n et ψ_n, on a évidement $\phi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$. De plus et comme $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n} < \delta$, on a $\left|x_{M_i} - x_{m_i}\right| \leqslant x_i - x_{i-1} < \delta$. D'où $f(x_{M_i}) - f(x_{m_i}) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(f(x_{M_i}) - f(x_{m_i})) \\
&= \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(x_{M_i}) - f(x_{m_i})) \\
&< \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \\
&= \frac{(b-a)}{n} \cdot \frac{n.\varepsilon}{b-a} \\
&\varepsilon.
\end{aligned}$$

2) Exemples de fonctions intégrables.

Preuve (suite). Par définition de ϕ_n et ψ_n, on a évidement $\phi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$. De plus et comme $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n} < \delta$, on a $\left|x_{M_i} - x_{m_i}\right| \leqslant x_i - x_{i-1} < \delta$. D'où $f(x_{M_i}) - f(x_{m_i}) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Il vient que

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(f(x_{M_i}) - f(x_{m_i})) \\
&= \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(x_{M_i}) - f(x_{m_i})) \\
&< \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \\
&= \frac{(b-a)}{n} \cdot \frac{n.\varepsilon}{b-a} \\
&\varepsilon.
\end{aligned}$$

2) Exemples de fonctions intégrables.

Preuve (suite). Ainsi on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \ \text{ et } \ \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\, dx < \varepsilon.$$

Par suite, f est intégrable sur $[a\,,\, b]$.

2) Exemples de fonctions intégrables.

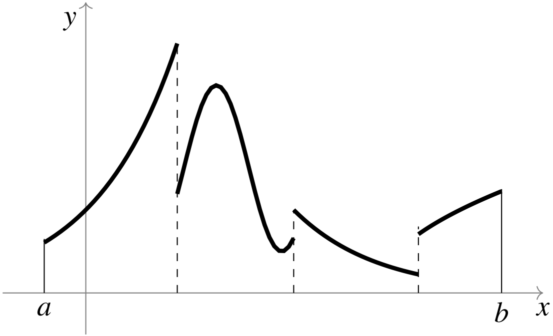
Preuve (suite). Ainsi on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \ \text{ et } \ \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\, dx < \varepsilon.$$

Par suite, f est intégrable sur $[a\,,\, b]$.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Définition 2.2. Une fonction $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a\,,\,b]$ telle que f soit continue sur $]x_{i-1}\,,\,x_i[$ et admette une limite finie à droite en x_{i-1} et une limite finie à gauche en x_i pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.



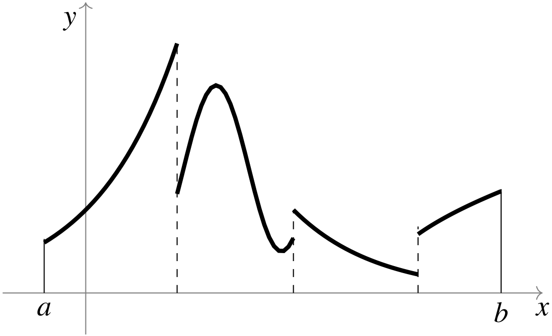
Exemples. 1) Toute fonction continue est continue par morceaux.

2) Toute fonction en escalier (i.e. constante par morceaux) est continue par morceaux.

3) La fonction $f : [0\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ n'est continue par morceaux.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Définition 2.2. Une fonction $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a\,,\,b]$ telle que f soit continue sur $]x_{i-1}\,,\,x_i[$ et admette une limite finie à droite en x_{i-1} et une limite finie à gauche en x_i pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.



Exemples. 1) Toute fonction continue est continue par morceaux.
2) Toute fonction en escalier (i.e. constante par morceaux) est continue par morceaux.
3) La fonction $f : [0\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ n'est continue par morceaux.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Corollaire 2.3. Soit $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est continue par morceaux sur $[a\,,\,b]$, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a\,,\,b]$.

Preuve. D'après le théorème 2.1, le prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f sur $[x_{i-1}\,,\,x_i]$ est intégrable sur $[x_{i-1}\,,\,x_i]$. D'après le point 1) de la proposition 1.7, f est intégrable sur chaque $[x_{i-1}\,,\,x_i]$. Donc d'après le point 3) de la proposition 1.7, f est intégrable sur $[a\,,\,b]$.

Théorème 2.4. Soit $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est monotone sur $[a\,,\,b]$, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a\,,\,b]$.

Preuve. Soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision régulière de $[a\,,\,b]$ d'ordre n, c'est-à-dire telle que $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

1er cas : f est croissante. On a donc

$$\inf\big\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\big\} = f(x_{i-1}) \;\text{ et }\; \sup\big\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\big\} = f(x_i).$$

2) Exemples de fonctions intégrables.

Corollaire 2.3. Soit $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est continue par morceaux sur $[a\,,\,b]$, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a\,,\,b]$.

Preuve. D'après le théorème 2.1, le prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f sur $[x_{i-1}\,,\,x_i]$ est intégrable sur $[x_{i-1}\,,\,x_i]$. D'après le point 1) de la proposition 1.7, f est intégrable sur chaque $[x_{i-1}\,,\,x_i]$. Donc d'après le point 3) de la proposition 1.7, f est intégrable sur $[a\,,\,b]$.

Théorème 2.4. Soit $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est monotone sur $[a\,,\,b]$, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a\,,\,b]$.

Preuve. Soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision régulière de $[a\,,\,b]$ d'ordre n, c'est-à-dire telle que $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

1er cas : f est croissante. On a donc

$$\inf\big\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\big\} = f(x_{i-1}) \ \text{ et } \ \sup\big\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\big\} = f(x_i).$$

2) Exemples de fonctions intégrables.

Corollaire 2.3. Soit $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est continue par morceaux sur $[a\,,\,b]$, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a\,,\,b]$.

Preuve. D'après le théorème 2.1, le prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f sur $[x_{i-1}\,,\,x_i]$ est intégrable sur $[x_{i-1}\,,\,x_i]$. D'après le point 1) de la proposition 1.7, f est intégrable sur chaque $[x_{i-1}\,,\,x_i]$. Donc d'après le point 3) de la proposition 1.7, f est intégrable sur $[a\,,\,b]$.

Théorème 2.4. Soit $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est monotone sur $[a\,,\,b]$, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a\,,\,b]$.

Preuve. Soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision régulière de $[a\,,\,b]$ d'ordre n, c'est-à-dire telle que $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

1er cas : f est croissante. On a donc

$$\inf\big\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\big\} = f(x_{i-1}) \;\text{ et }\; \sup\big\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\big\} = f(x_i).$$

2) Exemples de fonctions intégrables.

Corollaire 2.3. Soit $f: [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est continue par morceaux sur $[a\,,\,b]$, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a\,,\,b]$.

Preuve. D'après le théorème 2.1, le prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f sur $[x_{i-1}\,,\,x_i]$ est intégrable sur $[x_{i-1}\,,\,x_i]$. D'après le point 1) de la proposition 1.7, f est intégrable sur chaque $[x_{i-1}\,,\,x_i]$. Donc d'après le point 3) de la proposition 1.7, f est intégrable sur $[a\,,\,b]$.

Théorème 2.4. Soit $f: [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est monotone sur $[a\,,\,b]$, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a\,,\,b]$.

Preuve. Soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision régulière de $[a\,,\,b]$ d'ordre n, c'est-à-dire telle que $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

1er cas : f est croissante. On a donc

$$\inf\left\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\right\} = f(x_{i-1}) \;\text{ et }\; \sup\left\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\right\} = f(x_i).$$

2) Exemples de fonctions intégrables.

Corollaire 2.3. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$.

Preuve. D'après le théorème 2.1, le prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f sur $[x_{i-1}, x_i]$ est intégrable sur $[x_{i-1}, x_i]$. D'après le point 1) de la proposition 1.7, f est intégrable sur chaque $[x_{i-1}, x_i]$. Donc d'après le point 3) de la proposition 1.7, f est intégrable sur $[a, b]$.

Théorème 2.4. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est monotone sur $[a, b]$, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$.

Preuve. Soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision régulière de $[a, b]$ d'ordre n, c'est-à-dire telle que $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
1er cas : f est croissante. On a donc

$$\inf\big\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\big\} = f(x_{i-1}) \text{ et } \sup\big\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\big\} = f(x_i).$$

2) Exemples de fonctions intégrables.

Soient les fonctions en escalier $\phi_n, \psi_n : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\forall\, x \in [x_{i-1}\,,\,x_i], \begin{cases} \phi_n(x) = f(x_{i-1}), \\ \psi_n(x) = f(x_i). \end{cases}$$

Par définition de ϕ_n et ψ_n, on a évidement $\phi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(b) - f(x_{n-1}) \Big) \\ &= \frac{(b-a)}{n} (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Pour que $\int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)\,dx < \varepsilon$, il suffit que $\dfrac{(b-a)}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon$.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Soient les fonctions en escalier $\phi_n, \psi_n : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\forall\, x \in [x_{i-1}\,,\,x_i],\ \begin{cases} \phi_n(x) = f(x_{i-1}), \\ \psi_n(x) = f(x_i). \end{cases}$$

Par définition de ϕ_n et ψ_n, on a évidement $\phi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$. De plus, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(b) - f(x_{n-1}) \Big) \\ &= \frac{(b-a)}{n} (f(b) - f(a)).\end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Pour que $\int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)\,dx < \varepsilon$, il suffit que $\dfrac{(b-a)}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon$.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Soient les fonctions en escalier $\phi_n, \psi_n : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\forall\, x \in [x_{i-1}\,,\,x_i],\ \begin{cases} \phi_n(x) = f(x_{i-1}), \\ \psi_n(x) = f(x_i). \end{cases}$$

Par définition de ϕ_n et ψ_n, on a évidement $\phi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(b) - f(x_{n-1}) \Big) \\ &= \frac{(b-a)}{n} (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Pour que $\int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)\,dx < \varepsilon$, il suffit que $\dfrac{(b-a)}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon$.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Soient les fonctions en escalier $\phi_n, \psi_n : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\forall\, x \in [x_{i-1}\,,\, x_i],\ \begin{cases} \phi_n(x) = f(x_{i-1}), \\ \psi_n(x) = f(x_i). \end{cases}$$

Par définition de ϕ_n et ψ_n, on a évidement $\phi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\
&= \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\
&= \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(b) - f(x_{n-1}) \Big) \\
&= \frac{(b-a)}{n} (f(b) - f(a)).
\end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Pour que $\int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)\,dx < \varepsilon$, il suffit que $\dfrac{(b-a)}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon$.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Mais d'après la propriété d'Archimède, on sait que

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}.$$

Ainsi on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \text{ et } \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\, dx < \varepsilon.$$

Par suite, f est intégrable sur $[a\,,\,b]$.

2e cas : f est décroissante. Il suffit dans ce cas d'appliquer ce qui précède la fonction $-f$.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Mais d'après la propriété d'Archimède, on sait que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}.$$

Ainsi on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \text{ et } \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\, dx < \varepsilon.$$

Par suite, f est intégrable sur $[a\,,\,b]$.

2e cas : f est décroissante. Il suffit dans ce cas d'appliquer ce qui précède la fonction $-f$.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Mais d'après la propriété d'Archimède, on sait que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}.$$

Ainsi on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon :\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \text{ et } \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\, dx < \varepsilon.$$

Par suite, f est intégrable sur $[a\,,\,b]$.

2e cas : f est décroissante. Il suffit dans ce cas d'appliquer ce qui précède la fonction $-f$.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Mais d'après la propriété d'Archimède, on sait que

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}.$$

Ainsi on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \text{ et } \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\, dx < \varepsilon.$$

Par suite, f est intégrable sur $[a\,,\,b]$.

2e cas : f est décroissante. Il suffit dans ce cas d'appliquer ce qui précède la fonction $-f$.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Définition 2.5. Une fonction $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *monotone par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a\,,\,b]$ telle que f soit monotone sur $]x_{i-1}\,,\,x_i[$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

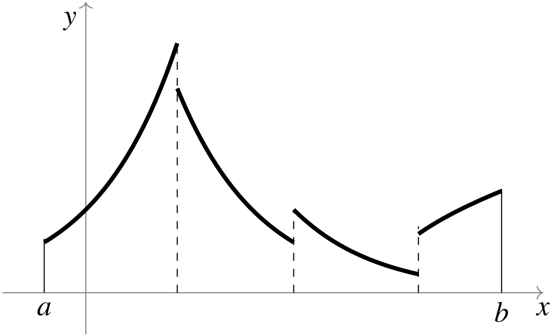
Exemples. 1) Toute fonction monotone est monotone par morceaux.

2) Toute fonction en escalier (i.e. constante par morceaux) est monotone par morceaux.

3) Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont monotons par morceaux sur $[0\,,\,2\pi]$.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Définition 2.5. Une fonction $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *monotone par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a\,,\,b]$ telle que f soit monotone sur $]x_{i-1}\,,\,x_i[$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.



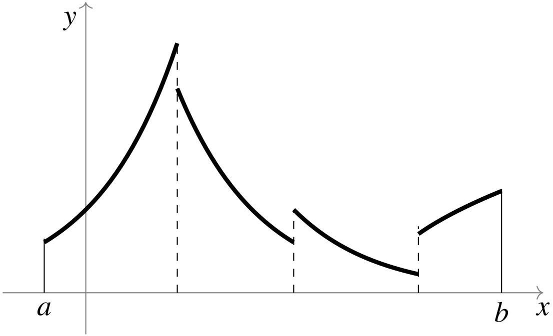
Exemples. 1) Toute fonction monotone est monotone par morceaux.

2) Toute fonction en escalier (i.e. constante par morceaux) est monotone par morceaux.

3) Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont monotons par morceaux sur $[0\,,\,2\pi]$.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Définition 2.5. Une fonction $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *monotone par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a\,,\,b]$ telle que f soit monotone sur $]x_{i-1}\,,\,x_i[$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.



Exemples. 1) Toute fonction monotone est monotone par morceaux.

2) Toute fonction en escalier (i.e. constante par morceaux) est monotone par morceaux.

3) Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont monotons par morceaux sur $[0\,,\,2\pi]$.

2) Exemples de fonctions intégrables.

Corollaire 2.6. Soit $f\colon\ [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est monotone par morceaux sur $[a\,,\,b]$, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a\,,\,b]$.

Sommes de Darboux : Soit $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée quelconque (i.e. pas nécessairement intégrable). Soit $S = (a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b)$ une subdivision de $[a,b]$. La somme de Darboux inférieure $D_S^-(f)$ et la somme de Darboux supérieure $D_S^+(f)$ de f sont définies par :

$$D_S^-(f) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}).m_i \text{ et } D_S^+(f) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}).M_i,$$

avec $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ et $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Remarquons que par définition, on a

$$D_S^-(f) = \int_a^b \phi_0(x)\,dx \text{ et } D_S^+(f) = \int_a^b \psi_0(x)\,dx$$

avec $\phi_0\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\psi_0\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ les fonctions en escalier définies pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\forall\, x \in [x_{i-1}, x_i],\ \ \phi_0(x) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \text{ et } \psi_0(x) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

2) Exemples de fonctions intégrables.

Corollaire 2.6. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est monotone par morceaux sur $[a, b]$, alors f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$.

Sommes de Darboux : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée quelconque (i.e. pas nécessairement intégrable). Soit $S = (a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$. La somme de Darboux inférieure $D_S^-(f)$ et la somme de Darboux supérieure $D_S^+(f)$ de f sont définies par :

$$D_S^-(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).m_i \text{ et } D_S^+(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).M_i,$$

avec $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ et $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$. Remarquons que par définition, on a

$$D_S^-(f) = \int_a^b \phi_0(x)\, dx \text{ et } D_S^+(f) = \int_a^b \psi_0(x)\, dx$$

avec $\phi_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\psi_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ les fonctions en escalier définies pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\forall\, x \in [x_{i-1}, x_i],\ \ \phi_0(x) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ et } \psi_0(x) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

2) Exemples de fonctions intégrables.

De plus, on a aussi par définition $\phi_0 \leqslant f \leqslant \psi_0$. Or

$$I^-(f) = \sup\left\{\int_a^b \phi(x)\,dx | \phi \text{ en escalier et } \phi \leqslant f\right\} \text{ et } I^+(f) = \inf\left\{\int_a^b \psi(x)\,dx | \psi \text{ en escalier et} f \leqslant \psi\right\}.$$

D'où $D_0^-(f) \leqslant I^-(f)$ et $I^+(f) \leqslant D_S^+(f)$. On obtient finalement l'inégalité

$$D_S^-(f) \leqslant I^-(f) \leqslant I^+(f) \leqslant D_S^+(f). \qquad (*)$$

Proposition 2.7. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors pour toute subdivision S de $[a, b]$ on a

$$\boxed{D_S^-(f) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant D_S^+(f).} \qquad (**)$$

2) Exemples de fonctions intégrables.

De plus, on a aussi par définition $\phi_0 \leqslant f \leqslant \psi_0$. Or

$$I^-(f) = \sup\left\{\int_a^b \phi(x)\,dx | \phi \text{ en escalier et } \phi \leqslant f\right\} \text{ et } I^+(f) = \inf\left\{\int_a^b \psi(x)\,dx | \psi \text{ en escalier et } f \leqslant \psi\right\}.$$

D'où $D_0^-(f) \leqslant I^-(f)$ et $I^+(f) \leqslant D_S^+(f)$. On obtient finalement l'inégalité

$$D_S^-(f) \leqslant I^-(f) \leqslant I^+(f) \leqslant D_S^+(f). \qquad (*)$$

Proposition 2.7. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors pour toute subdivision S de $[a, b]$ on a

$$\boxed{D_S^-(f) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant D_S^+(f).} \qquad (**)$$

3) Propriétés de l'intégrale.

Les principales propriétés de l'intégrale sont la relation de Chasles, la croissance et la linéarité.

Proposition 3.1 (relation de Chasles). Soit $c \in [a\,,\,b]$ (i.e. $a < c < b$). Si $f\colon\ [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a\,,\,c]$ et sur $[c\,,\,b]$, alors f est intégrable sur $[a\,,\,b]$. De plus, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Remarque. 1) En utilisant le point 2) de la proposition 1.7, on a en fait :
$f\colon\ [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a\,,\,c]$ et sur $[c\,,\,b]$ si, et seulement si f est intégrable sur $[a\,,\,b]$.
2) D'après la convention $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$, la relation de Chasles peut être utiliser sans se préoccuper de l'ordre des bornes de l'intégrale. C'est-à-dire pour a, b, c quelconques.

3) Propriétés de l'intégrale.

Les principales propriétés de l'intégrale sont la relation de Chasles, la croissance et la linéarité.

Proposition 3.1 (relation de Chasles). Soit $c \in [a\,,\,b]$ (i.e. $a < c < b$). Si $f\colon\,[a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a\,,\,c]$ et sur $[c\,,\,b]$, alors f est intégrable sur $[a\,,\,b]$. De plus, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Remarque. 1) En utilisant le point 2) de la proposition 1.7, on a en fait :
$f\colon\,[a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a\,,\,c]$ et sur $[c\,,\,b]$ si, et seulement si f est intégrable sur $[a\,,\,b]$.
2) D'après la convention $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$, la relation de Chasles peut être utiliser sans se préoccuper de l'ordre des bornes de l'intégrale. C'est-à-dire pour a, b, c quelconques.

3) Propriétés de l'intégrale.

Proposition 3.2 (croissance de l'ntégrale). Soient $f, g \colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $[a\,,\,b]$. Alors on a l'implication

$$f \leqslant g \implies \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

En particulier, l'intégrale d'une fonction positive est positive.

Corollaire 3.3 (positivité de l'ntégrale). Soit $f \colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a\,,\,b]$. Alors on a l'implication

$$0 \leqslant f \implies 0 \leqslant \int_a^b f(x)\,dx.$$

3) Propriétés de l'intégrale.

Proposition 3.2 (croissance de l'ntégrale). Soient $f, g\colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $[a\,,\,b]$. Alors on a l'implication

$$f \leqslant g \implies \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

En particulier, l'intégrale d'une fonction positive est positive.

Corollaire 3.3 (positivité de l'ntégrale). Soit $f\colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a\,,\,b]$. Alors on a l'implication

$$0 \leqslant f \implies 0 \leqslant \int_a^b f(x)\,dx.$$

3) Propriétés de l'intégrale.

Proposition 3.2 (croissance de l'ntégrale). Soient $f, g\colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $[a\,,\,b]$. Alors on a l'implication

$$f \leqslant g \quad\Longrightarrow\quad \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

En particulier, l'intégrale d'une fonction positive est positive.

Corollaire 3.3 (positivité de l'ntégrale). Soit $f\colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a\,,\,b]$. Alors on a l'implication

$$0 \leqslant f \quad\Longrightarrow\quad 0 \leqslant \int_a^b f(x)\,dx.$$

3) Propriétés de l'intégrale.

Proposition 3.4 (linéarité de l'ntégrale). Soient $f, g\colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $[a\,,\,b]$. On a les propriétés suivantes :

- la fonction $f+g$ est intégrable sur $[a\,,\,b]$ et on a $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.
- Pour toute constante $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est intégrable sur $[a\,,\,b]$, et on a $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.
- la fonction $f\cdot g$ est intégrable sur $[a\,,\,b]$, mais en général $\displaystyle\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$.
- la fonction $|f|$ est intégrable sur $[a\,,\,b]$, et on a $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Remarque. Les deux points 1) et 2) sont équivants à : pour tous réels $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a\,,\,b]$ et on a $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$.

3) Propriétés de l'intégrale.

Proposition 3.4 (linéarité de l'ntégrale). Soient $f, g\colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $[a\,,\,b]$. On a les propriétés suivantes :

- la fonction $f+g$ est intégrable sur $[a\,,\,b]$ et on a $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.
- Pour toute constante $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est intégrable sur $[a\,,\,b]$, et on a $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.
- la fonction $f\cdot g$ est intégrable sur $[a\,,\,b]$, mais en général $\displaystyle\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$.
- la fonction $|f|$ est intégrable sur $[a\,,\,b]$, et on a $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Remarque. Les deux points 1) et 2) sont équivants à : pour tous réels $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a\,,\,b]$ et on a $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$.

3) Propriétés de l'intégrale.

Contre-exemple. Il faut faire très attention que même si $f \cdot g$ est intégrable on a en général $\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$.
Par exemple, soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 0$ sinon. Soit $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ et $g(x) = 0$ sinon. Alors $f(x)g(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 0$. Mais $\int_0^1 f(x)\,dx = \dfrac{1}{2}$ et $\int_0^1 g(x)\,dx = \dfrac{1}{2}$.

Preuve de la proposition 3.4. Montrons le point 2). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le cas $\lambda = 0$ est facile.
1er cas : $\lambda > 0$. Puisque f est intégrable sur $[a\,,\,b]$ on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

D'où

$$\lambda\phi_\varepsilon \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\psi_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (\lambda\psi_\varepsilon - \lambda\phi_\varepsilon)(x)\,dx < \varepsilon.$$

Donc λf est intégrable sur $[a\,,\,b]$ car $\lambda\phi_\varepsilon$ et $\lambda\psi_\varepsilon$ sont des fonctions en escaliers.

3) Propriétés de l'intégrale.

Contre-exemple. Il faut faire très attention que même si $f \cdot g$ est intégrable on a en général $\displaystyle\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$.
Par exemple, soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 0$ sinon. Soit $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ et $g(x) = 0$ sinon. Alors $f(x)g(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 0$. Mais $\int_0^1 f(x)\,dx = \dfrac{1}{2}$ et $\int_0^1 g(x)\,dx = \dfrac{1}{2}$.

Preuve de la proposition 3.4. Montrons le point 2). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le cas $\lambda = 0$ est facile.
1er cas : $\lambda > 0$. Puisque f est intégrable sur $[a\,,\,b]$ on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \text{ et } \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

D'où

$$\lambda\phi_\varepsilon \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\psi_\varepsilon \text{ et } \int_a^b (\lambda\psi_\varepsilon - \lambda\phi_\varepsilon)(x)\,dx < \varepsilon.$$

Donc λf est intégrable sur $[a\,,\,b]$ car $\lambda\phi_\varepsilon$ et $\lambda\psi_\varepsilon$ sont des fonctions en escaliers.

3) Propriétés de l'intégrale.

Contre-exemple. Il faut faire très attention que même si $f \cdot g$ est intégrable on a en général
$\displaystyle\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$.
Par exemple, soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 0$ sinon. Soit $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ et $g(x) = 0$ sinon. Alors $f(x)g(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 0$. Mais $\int_0^1 f(x)\,dx = \dfrac{1}{2}$ et $\int_0^1 g(x)\,dx = \dfrac{1}{2}$.

Preuve de la proposition 3.4. Montrons le point 2). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le cas $\lambda = 0$ est facile.
1er cas : $\lambda > 0$. Puisque f est intégrable sur $[a\,,\,b]$ on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \text{ et } \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

D'où

$$\lambda\phi_\varepsilon \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\psi_\varepsilon \text{ et } \int_a^b (\lambda\psi_\varepsilon - \lambda\phi_\varepsilon)(x)\,dx < \varepsilon.$$

Donc λf est intégrable sur $[a\,,\,b]$ car $\lambda\phi_\varepsilon$ et $\lambda\psi_\varepsilon$ sont des fonctions en escaliers.

3) Propriétés de l'intégrale.

Contre-exemple. Il faut faire très attention que même si $f \cdot g$ est intégrable on a en général $\displaystyle\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$.

Par exemple, soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 0$ sinon. Soit $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ et $g(x) = 0$ sinon. Alors $f(x)g(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 0$. Mais $\int_0^1 f(x)\,dx = \dfrac{1}{2}$ et $\int_0^1 g(x)\,dx = \dfrac{1}{2}$.

Preuve de la proposition 3.4. Montrons le point 2). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le cas $\lambda = 0$ est facile.

1er cas : $\lambda > 0$. Puisque f est intégrable sur $[a\,,\,b]$ on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon \text{ et } \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

D'où

$$\lambda\phi_\varepsilon \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\psi_\varepsilon \text{ et } \int_a^b (\lambda\psi_\varepsilon - \lambda\phi_\varepsilon)(x)\,dx < \varepsilon.$$

Donc λf est intégrable sur $[a\,,\,b]$ car $\lambda\phi_\varepsilon$ et $\lambda\psi_\varepsilon$ sont des fonctions en escaliers.

3) Propriétés de l'intégrale.

De plus et d'après la définition de l'intégrale, on a

$$\lambda \int_a^b \phi_\varepsilon(x)\,dx \leqslant \lambda \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \lambda \int_a^b \psi_\varepsilon(x)\,dx \text{ et } \int_a^b \lambda\phi_\varepsilon(x)\,dx \leqslant \int_a^b \lambda f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \lambda\psi_\varepsilon(x)\,dx.$$

Il vient que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$-\varepsilon < \int_a^b \lambda\phi_\varepsilon(x)\,dx - \lambda \int_a^b \psi_\varepsilon(x)\,dx \leqslant \int_a^b \lambda f(x)\,dx - \lambda \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \lambda\psi_\varepsilon(x)\,dx - \lambda \int_a^b \phi_\varepsilon(x)\,dx < \varepsilon.$$

Par suite, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

1e cas : $\lambda < 0$. Ce cas se traite comme le 1e cas en faisant attention au changement du sens des inégalités.

3) Propriétés de l'intégrale.

De plus et d'après la définition de l'intégrale, on a

$$\lambda \int_a^b \phi_\varepsilon(x)\,dx \leqslant \lambda \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \lambda \int_a^b \psi_\varepsilon(x)\,dx \text{ et } \int_a^b \lambda\phi_\varepsilon(x)\,dx \leqslant \int_a^b \lambda f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \lambda\psi_\varepsilon(x)\,dx.$$

Il vient que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$-\varepsilon < \int_a^b \lambda\phi_\varepsilon(x)\,dx - \lambda \int_a^b \psi_\varepsilon(x)\,dx \leqslant \int_a^b \lambda f(x)\,dx - \lambda \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \lambda\psi_\varepsilon(x)\,dx - \lambda \int_a^b \phi_\varepsilon(x)\,dx < \varepsilon.$$

Par suite, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$

1e cas : $\lambda < 0$. Ce cas se traite comme le 1e cas en faisant attention au changement du sens des inégalités.

3) Propriétés de l'intégrale.

De plus et d'après la définition de l'intégrale, on a

$$\lambda \int_a^b \phi_\varepsilon(x)\,dx \leqslant \lambda \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \lambda \int_a^b \psi_\varepsilon(x)\,dx \text{ et } \int_a^b \lambda\phi_\varepsilon(x)\,dx \leqslant \int_a^b \lambda f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \lambda\psi_\varepsilon(x)\,dx.$$

Il vient que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$-\varepsilon < \int_a^b \lambda\phi_\varepsilon(x)\,dx - \lambda \int_a^b \psi_\varepsilon(x)\,dx \leqslant \int_a^b \lambda f(x)\,dx - \lambda \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \lambda\psi_\varepsilon(x)\,dx - \lambda \int_a^b \phi_\varepsilon(x)\,dx < \varepsilon.$$

Par suite, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$

1^e cas : $\lambda < 0$. Ce cas se traite comme le 1^e cas en faisant attention au changement du sens des inégalités.

3) Propriétés de l'intégrale.

Remarque. Soit $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a\,,\,b]$. Le nombre réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ s'appelle **la valeur moyenne de la fonction** f sur $[a\,,\,b]$.

Exemple. Soient $c_1, \ldots, c_n$ des nombres réels fixés et $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction en escalier (constante par morceaux) définie par $f(x) = c_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]$ (avec $x_i = a + i\dfrac{(b-a)}{n}$). Alors **la valeur moyenne** de f sur $[a\,,\,b]$ coincide avec **la moyenne arithmétique** des nombres $c_1, \ldots, c_n$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Théorème 3.5 (formule de la moyenne). Soit $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur $[a\,,\,b]$. Alors il existe $c \in [a\,,\,b]$ tel que

$$\boxed{f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.}$$

3) Propriétés de l'intégrale.

Remarque. Soit $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a\,,\,b]$. Le nombre réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ s'appelle **la valeur moyenne de la fonction** f sur $[a\,,\,b]$.

Exemple. Soient $c_1, \ldots, c_n$ des nombres réels fixés et $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction en escalier (constante par morceaux) définie par $f(x) = c_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $x \in [x_{i-1}\,,\,x_i]$ (avec $x_i = a + i\dfrac{(b-a)}{n}$). Alors **la valeur moyenne** de f sur $[a\,,\,b]$ coincide avec **la moyenne arithmétique** des nombres $c_1, \ldots, c_n$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Théorème 3.5 (formule de la moyenne). Soit $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur $[a\,,\,b]$. Alors il existe $c \in [a\,,\,b]$ tel que

$$\boxed{f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.}$$

3) Propriétés de l'intégrale.

Remarque. Soit $f : [a\,,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a\,,\, b]$. Le nombre réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ s'appelle **la valeur moyenne de la fonction** f sur $[a\,,\, b]$.

Exemple. Soient $c_1, \ldots, c_n$ des nombres réels fixés et $f : [a\,,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction en escalier (constante par morceaux) définie par $f(x) = c_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $x \in [x_{i-1}\,,\, x_i]$ (avec $x_i = a + i\dfrac{(b-a)}{n}$). Alors **la valeur moyenne** de f sur $[a\,,\, b]$ coincide avec **la moyenne arithmétique** des nombres $c_1, \ldots, c_n$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Théorème 3.5 (formule de la moyenne). Soit $f : [a\,,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur $[a\,,\, b]$. Alors il existe $c \in [a\,,\, b]$ tel que

$$\boxed{f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.}$$

3) Propriétés de l'intégrale.

Remarque. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a, b]$. Le nombre réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ s'appelle **la valeur moyenne de la fonction** f sur $[a, b]$.

Exemple. Soient $c_1, \ldots, c_n$ des nombres réels fixés et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction en escalier (constante par morceaux) définie par $f(x) = c_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $x \in [x_{i-1}, x_i]$ (avec $x_i = a + i\dfrac{(b-a)}{n}$). Alors **la valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ coincide avec **la moyenne arithmétique** des nombres $c_1, \ldots, c_n$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Théorème 3.5 (formule de la moyenne). Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\boxed{f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.}$$

3) Propriétés de l'intégrale.

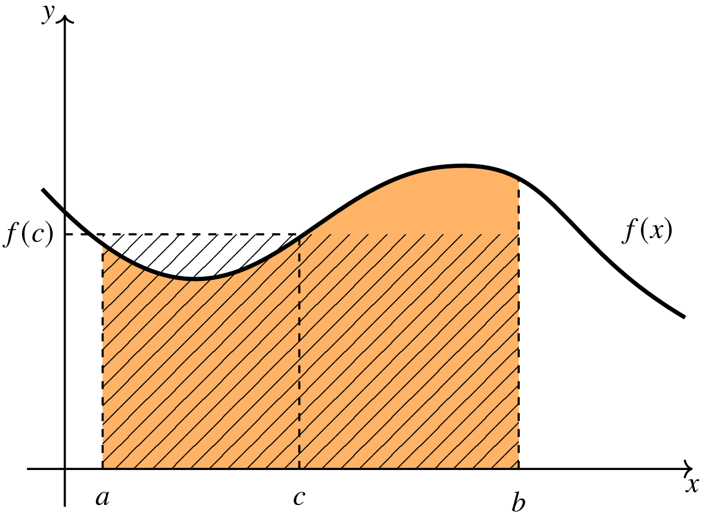


FIGURE – Interprétation géométrique de la formule de la moyenne

3) Propriétés de l'intégrale.

Remarques. 1) Une interprétation géométrique de ce théorème est que l'aire algébrique sous la courbe représentative de f est égale à celle d'un rectangle de base $[a\,,\,b]$ et de hauteur un point moyen de la courbe.
2) L'hypothèse de continuité est essentielle. Par exemple pour $[a\,,\,b] = [0\,,\,1]$ en posant $f(x) = 1$ si $x < 1/2$ et $f(x) = 0$ sinon. La valeur moyenne de f vaut $1/2$, et donc n'est pas réalisée comme valeur de f.

Preuve. Puisque f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$. Ainsi on peut écrire

$$\forall x \in [a, b], \quad \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant f(x) \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x)\cdot \qquad (*)$$

De plus, f est même atteint ses bornes sur $[a, b]$. C'est-à-dire il existe $a_0, a_1 \in [a, b]$ tels que

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(a_0) \text{ et } \sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(a_1)\cdot$$

L'inégalité $(*)$ devient alors

$$\forall x \in [a, b],\ f(a_0) \leqslant f(x) \leqslant f(a_1)\cdot$$

3) Propriétés de l'intégrale.

On a f est intégrable sur $[a, b]$ car f est continue. D'après la croissance de l'intégrale, il vient que

$$(b-a)f(a_0) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant (b-a)f(a_1)\cdot$$

D'où on tire l'inégalité

$$f(a_0) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant f(a_1)\cdot$$

Comme f est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\cdot$$

Le théorème 3.5 est ainsi démontré.

3) Propriétés de l'intégrale.

L'intégrale est définie à partir de limites de sommes. Inversement, on peut calculer des limites de sommes à partir d'intégrales.

Théorème 3.6 (sommes de Riemann). Soit $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a, b]$. Alors 1)

$$\boxed{S_n = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(x)\, dx.}$$

2)

$$\boxed{R_n = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(x)\, dx.}$$

Les sommes S_n et R_n s'appellent les *sommes de Riemann* associées à l'intégrale et correspondent à une subdivision régulièrede l'intervalle $[a, b]$ en n petits intervalles. Pour S_n, la hauteur de chaque rectangle étant évaluée à son extrémité droite. Pour R_n, la hauteur de chaque rectangle étant évaluée à son extrémité gauche.

3) Propriétés de l'intégrale.

L'intégrale est définie à partir de limites de sommes. Inversement, on peut calculer des limites de sommes à partir d'intégrales.

Théorème 3.6 (sommes de Riemann). Soit $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a\,,\,b]$. Alors 1)

$$\boxed{S_n = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx.}$$

2)

$$\boxed{R_n = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx.}$$

Les sommes S_n et R_n s'appellent les *sommes de Riemann* associées à l'intégrale et correspondent à une subdivision régulièrede l'intervalle $[a, b]$ en n petits intervalles. Pour S_n, la hauteur de chaque rectangle étant évaluée à son extrémité droite. Pour R_n, la hauteur de chaque rectangle étant évaluée à son extrémité gauche.

3) Propriétés de l'intégrale.

L'intégrale est définie à partir de limites de sommes. Inversement, on peut calculer des limites de sommes à partir d'intégrales.

Théorème 3.6 (sommes de Riemann). Soit $f:\ [a\,,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a\,,\ b]$. Alors 1)

$$\boxed{S_n = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx.}$$

2)

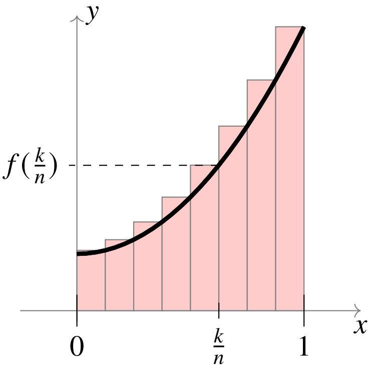
$$\boxed{R_n = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx.}$$

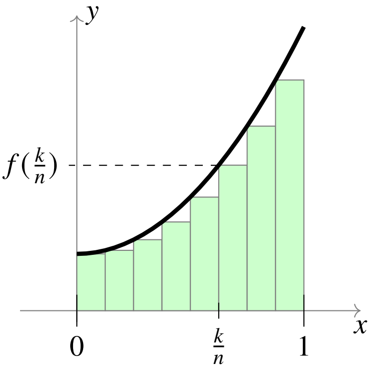
Les sommes S_n et R_n s'appellent les *sommes de Riemann* associées à l'intégrale et correspondent à une subdivision régulièrede l'intervalle $[a, b]$ en n petits intervalles. Pour S_n, la hauteur de chaque rectangle étant évaluée à son extrémité droite. Pour R_n, la hauteur de chaque rectangle étant évaluée à son extrémité gauche.

3) Propriétés de l'intégrale.

Le cas le plus simple est celui où $a = 0$ et $b = 1$. Alors $\dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{n}$ et $f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right) = f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, et ainsi

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx.$$





3) Propriétés de l'intégrale.

Exemples. 1) Calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

On remarque d'abord que

$$S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4},\ S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},\ S_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \cdots$$

La somme S_n s'écrit aussi

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \dfrac{k}{n}}.$$

En posant $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$ et $b = 1$, on reconnaît que S_n est une somme de Riemann. Donc

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\ln|1+x|\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Ainsi $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$.

3) Propriétés de l'intégrale.

Exemples. 1) Calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

On remarque d'abord que

$$S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4},\ S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},\ S_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \cdots$$

La somme S_n s'écrit aussi

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

En posant $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$ et $b = 1$, on reconnaît que S_n est une somme de Riemann. Donc

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \big[\ln|1+x|\big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Ainsi $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$.

3) Propriétés de l'intégrale.

Exemples. 1) Calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

On remarque d'abord que

$$S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4},\ S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},\ S_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \cdots$$

La somme S_n s'écrit aussi

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

En posant $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$ et $b = 1$, on reconnaît que S_n est une somme de Riemann. Donc

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \Big[\ln|1+x|\Big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Ainsi $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$.

3) Propriétés de l'intégrale.

Exemples. 1) Calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

On remarque d'abord que

$$S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4},\ S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},\ S_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \cdots$$

La somme S_n s'écrit aussi

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

En posant $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$ et $b = 1$, on reconnaît que S_n est une somme de Riemann. Donc

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \big[\ln|1+x|\big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Ainsi $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$.

3) Propriétés de l'intégrale.

Exemples. 1) Calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

On remarque d'abord que

$$S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4},\ S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},\ S_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \cdots$$

La somme S_n s'écrit aussi

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

En posant $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 0$ et $b = 1$, on reconnaît que S_n est une somme de Riemann. Donc

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \big[\ln|1+x|\big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Ainsi $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$.

3) Propriétés de l'intégrale.

2) On montre de même que la suite $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{k/n}}{n}$ est une somme de Riemann, et que

$$S'_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{k/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 e^x \, dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1.$$

3) De même la suite $S''_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2}$ est une somme de Riemann, et on a

$$S''_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} \, dx = \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

3) Propriétés de l'intégrale.

2) On montre de même que la suite $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{k/n}}{n}$ est une somme de Riemann, et que

$$S'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{k/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e-1.$$

3) De même la suite $S''_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2}$ est une somme de Riemann, et on a

$$S''_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$