Année universitaire : 2023-2024
Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences de Kénitra

Filière : MIP
Semestre : S2
Module : Analyse 2

Cours d'Analyse 2

Par

Pr. Ahmed Srhir

Contenu du module

Contenu du module

Chapitre 1 : Formules de Taylor, Développement limité et applications ;

Chapitre 2 : Intégrale de Riemann ;

Chapitre 3 : Calcul des primitives ;

Chapitre 4 : Intégrale généralisée ;

Chapitre 5 : Equations différentielles ;

Chapitre 6 : Courbes paramétrées et courbes polaires.

1) Rappels

Théorème 1.1 (théorème de Rolle). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

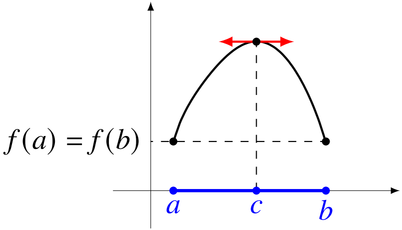
Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{4x}{\pi} - \tan x$. La fonction f est continue sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ et $f(0) = f(\frac{\pi}{4})$. D'après le théorème de Rolle il existe $c \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ tel que $f'(c) = 0$.

1) Rappels

Théorème 1.1 (théorème de Rolle). Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.



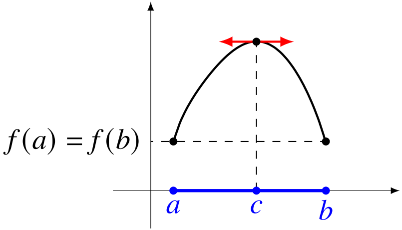
Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{4x}{\pi} - \tan x$. La fonction f est continue sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ et $f(0) = f(\frac{\pi}{4})$. D'après le théorème de Rolle il existe $c \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ tel que $f'(c) = 0$.

1) Rappels

Théorème 1.1 (théorème de Rolle). Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.



Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{4x}{\pi} - \tan x$. La fonction f est continue sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ et $f(0) = f(\frac{\pi}{4})$. D'après le théorème de Rolle il existe $c \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ tel que $f'(c) = 0$.

1) Rappels

Théorème 1.2 (théorème des accroissements finis (T.A.F)). Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b.[$ Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

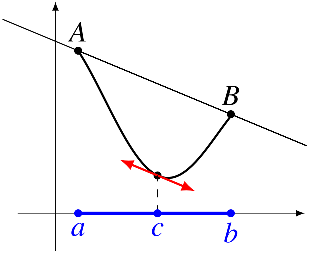
Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

1) Rappels

Théorème 1.2 (théorème des accroissements finis (T.A.F)). Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b.[$ Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.



Théorème 1.3. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors on a

- f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0.$
- f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0.$
- f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0.$

Remarque.

- Si pour tout $x \in I,\ f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.
- Si pour tout $x \in I,\ f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante.

Théorème 1.4 (régle de l'Hôpital). Soient I un intervalle ouvert et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $a \in I$ avec $g' \neq 0$ au voisinage de a. Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

En particulier si $f(a) = g(a) = 0$, on obtient

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Théorème 1.3. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors on a

- f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0.$
- f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0.$
- f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0.$

Remarque.

- Si pour tout $x \in I,\ f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.
- Si pour tout $x \in I,\ f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante.

Théorème 1.4 (régle de l'Hôpital). Soient I un intervalle ouvert et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $a \in I$ avec $g' \neq 0$ au voisinage de a. Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

En particulier si $f(a) = g(a) = 0$, on obtient

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Théorème 1.3. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors on a

- f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0.$
- f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0.$
- f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0.$

Remarque.

- Si pour tout $x \in I,\ f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.
- Si pour tout $x \in I,\ f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante.

Théorème 1.4 (régle de l'Hôpital). Soient I un intervalle ouvert et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $a \in I$ avec $g' \neq 0$ au voisinage de a. Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

En particulier si $f(a) = g(a) = 0$, on obtient

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Théorème 1.3. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors on a

- f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0.$
- f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0.$
- f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0.$

Remarque.

- Si pour tout $x \in I,\ f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.
- Si pour tout $x \in I,\ f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante.

Théorème 1.4 (régle de l'Hôpital). Soient I un intervalle ouvert et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $a \in I$ avec $g' \neq 0$ au voisinage de a. Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

En particulier si $f(a) = g(a) = 0$, on obtient

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

2) Formules de Taylor

Définition 2.1 (dérivées successives). Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est deux fois dérivable sur I si f est dérivable sur I et si la fonction dérivée f' est aussi dérivable sur I. On note $f'' = (f')'$ la *dérivée seconde* de f.

Plus généralement, si $n \geqslant 1$ est un entier on dit que f est n *fois dérivable* sur I si

- f est dérivable sur I
- f' est dérivable sur I
- $\cdots$
- $f^{\overbrace{\prime\prime\cdots\prime}^{n-1 \text{ fois}}}$ est dérivable sur I.

On note alors $f^{(n)} = f^{\overbrace{\prime\prime\cdots\prime}^{n \text{ fois}}}$, et on l'appelle la *dérivée n-ième* de f.

Remarque. 1) Ainsi on a $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$.

2) Par convention, on note $f^{(0)} = f$.

2) Formules de Taylor

Définition 2.1 (dérivées successives). Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est deux fois dérivable sur I si f est dérivable sur I et si la fonction dérivée f' est aussi dérivable sur I. On note $f'' = (f')'$ la *dérivée seconde* de f.

Plus généralement, si $n \geqslant 1$ est un entier on dit que f est n *fois dérivable* sur I si

- f est dérivable sur I
- f' est dérivable sur I
- $\cdots$
- $f^{\overbrace{\prime\prime\cdots\prime}^{n-1 \text{ fois}}}$ est dérivable sur I.

On note alors $f^{(n)} = f^{\overbrace{\prime\prime\cdots\prime}^{n \text{ fois}}}$, et on l'appelle la *dérivée n-ième* de f.

Remarque. 1) Ainsi on a $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$.

2) Par convention, on note $f^{(0)} = f$.

2) Formules de Taylor

Exemples. 1) Si $f = \exp$ est la fonction exponentielle. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = f$.

2) Si $f = c$ est une fonction constante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = 0$.

3) Si $f = x^m$ est une fonction monôme. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+)x^{m-n}$ si $n \leqslant m$, et $f^{(n)} = 0$ si $n > m$.

Théorème 2.2 (formule de Leibniz). Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables, alors

$$\boxed{(f\cdot g)^{(n)} = f^{(n)}\cdot g + C_n^1 f^{(n-1)}\cdot g^{(1)} + \cdots + C_n^k f^{(n-k)}\cdot g^{(k)} + \cdots + f\cdot g^{(n)}.}$$

Autrement dit,

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}.$$

Rappelons que C_n^k désigne le coefficient binomial donné par $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

2) Formules de Taylor

Exemples. 1) Si $f = \exp$ est la fonction exponentielle. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = f$.

2) Si $f = c$ est une fonction constante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = 0$.

3) Si $f = x^m$ est une fonction monôme. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+)x^{m-n}$ si $n \leqslant m$, et $f^{(n)} = 0$ si $n > m$.

Théorème 2.2 (formule de Leibniz). Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables, alors

$$\boxed{(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + \mathrm{C}_n^1 f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \cdots + \mathrm{C}_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} + \cdots + f \cdot g^{(n)}.}$$

Autrement dit,

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

Rappelons que C_n^k désigne le coefficient binomial donné par $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

2) Formules de Taylor

Exemples. 1) Si $f = \exp$ est la fonction exponentielle. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = f$.

2) Si $f = c$ est une fonction constante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = 0$.

3) Si $f = x^m$ est une fonction monôme. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+)x^{m-n}$ si $n \leqslant m$, et $f^{(n)} = 0$ si $n > m$.

Théorème 2.2 (formule de Leibniz). Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables, alors

$$\boxed{(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + C_n^1 f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \cdots + C_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} + \cdots + f \cdot g^{(n)}.}$$

Autrement dit,

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

Rappelons que C_n^k désigne le coefficient binomial donné par $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

2) Formules de Taylor

Définition 2.3 (fonction de classe C^n). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. 1) On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^n sur I si elle est n-fois dérivable, et si sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I.

2) On dit que est de classe C^∞ sur I si f est de classe C^n sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Par convention, f est dite de classe C^0 sur I si elle est continue sur I.

Exemples. 1) La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Toute fonction constante est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3) Toute fonction polynômiale est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

4) La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \ln x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Si f et g sont deux fonctions de classe C^n (resp. C^∞) sur un intervalle I, alors λf, $f+g$ et fg sont de classe C^n (resp. C^∞) sur I.

Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est de de classe C^n (resp. C^∞) sur I.

2) Formules de Taylor

Définition 2.3 (fonction de classe C^n). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. 1) On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^n sur I si elle est n-fois dérivable, et si sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I.

2) On dit que est de classe C^∞ sur I si f est de classe C^n sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Par convention, f est dite de classe C^0 sur I si elle est continue sur I.

Exemples. 1) La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Toute fonction constante est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3) Toute fonction polynômiale est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

4) La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \ln x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Si f et g sont deux fonctions de classe C^n (resp. C^∞) sur un intervalle I, alors λf, $f+g$ et fg sont de classe C^n (resp. C^∞) sur I.

Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est de de classe C^n (resp. C^∞) sur I.

2) Formules de Taylor

Définition 2.3 (fonction de classe C^n). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. 1) On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^n sur I si elle est n-fois dérivable, et si sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I.

2) On dit que est de classe C^∞ sur I si f est de classe C^n sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Par convention, f est dite de classe C^0 sur I si elle est continue sur I.

Exemples. 1) La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Toute fonction constante est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3) Toute fonction polynômiale est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

4) La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \ln x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Si f et g sont deux fonctions de classe C^n (resp. C^∞) sur un intervalle I, alors λf, $f+g$ et fg sont de classe C^n (resp. C^∞) sur I.

Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est de de classe C^n (resp. C^∞) sur I.

2) Formules de Taylor

Théorème 2.4 (formule de Taylor-Lagrange.) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

- La formule de **T.-L.** s'appelle aussi la formule de Taylor-Lagrange en a à l'ordre $n+1$.
- Le terme $R_{n+1}(b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ s'appelle le reste de Lagrange.

Exemple. Soit x un réel tel que $x > 1$. En utilisant la formule de T.-L., il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$x^4 = 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4c(x-1)^3.$$

2) Formules de Taylor

Théorème 2.4 (formule de Taylor-Lagrange.) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\cdot$$

- La formule de **T.-L.** s'appelle aussi la formule de Taylor-Lagrange en a à l'ordre $n+1$.
- Le terme $R_{n+1}(b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ s'appelle le reste de Lagrange.

Exemple. Soit x un réel tel que $x > 1$. En utilisant la formule de T.-L., il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$x^4 = 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4c(x-1)^3.$$

Remarques.

- Si $n = 0$, on retrouve alors la formule des accroissements finis.
- La formule $T.L$ signifie qu'on peut approcher au voisinage de a la fonction f par un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
- Lorsque $b = a + h$, la formule $T.L$ devient : il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Un cas particulier très important est le cas où $a = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.5 (formule de Mac-Laurin.) Soient $a > 0$ et $f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[0, a]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]0, a[$. Alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta h).$$

La formule de Mac-Laurin s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre $n + 1$.

Remarques.

- Si $n = 0$, on retrouve alors la formule des accroissements finis.
- La formule $T.L$ signifie qu'on peut approcher au voisinage de a la fonction f par un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
- Lorsque $b = a + h$, la formule $T.L$ devient : il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Un cas particulier très important est le cas où $a = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.5 (formule de Mac-Laurin.) Soient $a > 0$ et $f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[0, a]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]0, a[$. Alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta h).$$

La formule de Mac-Laurin s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre $n+1$.

Remarques.

- Si $n = 0$, on retrouve alors la formule des accroissements finis.
- La formule $T.L$ signifie qu'on peut approcher au voisinage de a la fonction f par un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
- Lorsque $b = a + h$, la formule $T.L$ devient : il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Un cas particulier très important est le cas où $a = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.5 (formule de Mac-Laurin.) Soient $a > 0$ et $f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[0, a]$ et $(n + 1)$ fois dérivable sur $]0, a[$. Alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta h).$$

La formule de Mac-Laurin s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre $n + 1$.

Remarques.

- Si $n = 0$, on retrouve alors la formule des accroissements finis.
- La formule $T.L$ signifie qu'on peut approcher au voisinage de a la fonction f par un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
- Lorsque $b = a + h$, la formule $T.L$ devient : il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Un cas particulier très important est le cas où $a = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.5 (formule de Mac-Laurin.) Soients $a > 0$ et $f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[0, a]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]0, a[$. Alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta h).$$

La formule de Mac-Laurin s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre $n + 1$.

Exemples. 1) Considérons la fonction $x \longmapsto \exp x$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre 4 au voisinage de 0 s'écrit

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\exp(\theta x),$$

avec $\theta \in]0,1[$. En effet, $x \longmapsto \exp x$ est sa propre dérivée.

2) Considérons la fonction $x \longmapsto \sin x$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre 3 au voisinage de 0 s'écrit

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\cos(\theta x),$$

avec $\theta \in]0,1[$. En effet, les dérivées successives de $\sin x$ en 0 sont données par :

$$\sin(0) = 0, \ \ \sin'(0) = \cos(0) = 1, \ \ \sin''(0) = -\sin(0) = 0, \ \ \ldots$$

Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\sin^{(2k)}(0) = 0 \ \text{ et } \ \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k\cos(0) = (-1)^k.$$

D'où le résultat. Ainsi on peut dire que $x - x/3!$ constitue une valeur approchée de $\sin(x)$ avec une erreur inférieure ou égale à $x^5/5!$.

Exemples. 1) Considérons la fonction $x \longmapsto \exp x$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre 4 au voisinage de 0 s'écrit

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\exp(\theta x),$$

avec $\theta \in]0, 1[$. En effet, $x \longmapsto \exp x$ est sa propre dérivée.

2) Considérons la fonction $x \longmapsto \sin x$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre 3 au voisinage de 0 s'écrit

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\cos(\theta x),$$

avec $\theta \in]0, 1[$. En effet, les dérivées successives de $\sin x$ en 0 sont données par :

$$\sin(0) = 0, \ \ \sin'(0) = \cos(0) = 1, \ \ \sin''(0) = -\sin(0) = 0, \ \ \ldots$$

Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\sin^{(2k)}(0) = 0 \ \text{ et } \ \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k.$$

D'où le résultat. Ainsi on peut dire que $x - x/3!$ constitue une valeur approchée de $\sin(x)$ avec une erreur inférieure ou égale à $x^5/5!$.

3) Soit P un polynôme de degré au plus n. Alors P est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et $P^{(n+1)} = 0$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre $n+1$ s'écrit (pour $b = x$ et $a = 0$)

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \;\; P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{n!}\, x^n.$$

En effet, le reste est nul. Ainsi, les coefficients de P sont donnés par les dérivées successives de P en 0. Ce résultat peut aussi se démontrer par un calcul algébrique (sans recourir à l'analyse).

4) Considérons la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}\frac{2}{(1+\theta x)^3},$$

avec $\theta \in]0,1[$. En effet, les dérivées successives de $\ln(1+x)$ en 0 sont données par : $f(0) = 0$. Ensuite $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ donc $f'(0) = 1$. Ensuite $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ donc $f''(0) = -1$. Puis $f^{(3)}(x) = 2\dfrac{1}{(1+x)^3}$ donc $f^{(3)}(0) = 2$. Par récurrence on montre que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ et donc $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Ainsi pour $n > 0$: $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{n!}x^n = (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$.

3) Soit P un polynôme de degré au plus n. Alors P est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et $P^{(n+1)} = 0$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre $n+1$ s'écrit (pour $b = x$ et $a = 0$)

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{n!}\, x^n.$$

En effet, le reste est nul. Ainsi, les coefficients de P sont donnés par les dérivées successives de P en 0. Ce résultat peut aussi se démontrer par un calcul algébrique (sans recourir à l'analyse).

4) Considérons la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$. La formule Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}\,\frac{2}{(1+\theta x)^3},$$

avec $\theta \in]0,1[$. En effet, les dérivées successives de $\ln(1+x)$ en 0 sont données par : $f(0) = 0$. Ensuite $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ donc $f'(0) = 1$. Ensuite $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ donc $f''(0) = -1$. Puis $f^{(3)}(x) = 2\dfrac{1}{(1+x)^3}$ donc $f^{(3)}(0) = 2$. Par récurrence on montre que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ et donc $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Ainsi pour $n > 0$: $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{n!}x^n = (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$.

2) Formules de Taylor

Corollaire 2.5 (inégalité de Taylor-Lagrange). Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$ telle que $f^{(n+1)}$ est majorée par $M \in \mathbb{R}^+$ sur $]a,b[$. Alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{M.(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemples. Considérons la fonction $x \longmapsto \sin x$. L'inégalité de Taylor-Lagrange pour $n = 2$ sur l'intervalle $[0, \pi/6]$ s'écrit

$$\forall x \in [0, \pi/6], \ |\sin x - x| \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

Ainsi si on approche $\sin x$ par x sur $[0, \pi/6]$, l'erreur commise est majorée par $x^3/6$, soit de l'ordre de 2.10^{-2}.

Pour $n = 4$, l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[0, \pi/6]$ s'écrit

$$\forall x \in [0, \pi/6], \ \left|\sin x - x - \frac{x^3}{6}\right| \leqslant \frac{x^5}{120}.$$

Ainsi si on approche $\sin x$ par $x - x^3/6$ sur $[0, \pi/6]$, l'erreur commise est de l'ordre de 3.10^{-4}.

2) Formules de Taylor

Corollaire 2.5 (inégalité de Taylor-Lagrange). Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$ telle que $f^{(n+1)}$ est majorée par $M \in \mathbb{R}^+$ sur $]a, b[$. Alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{M.(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemples. Considérons la fonction $x \longmapsto \sin x$. L'inégalité de Taylor-Lagrange pour $n = 2$ sur l'intervalle $[0, \pi/6]$ s'écrit

$$\forall x \in [0, \pi/6], \ |\sin x - x| \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

Ainsi si on approche $\sin x$ par x sur $[0, \pi/6]$, l'erreur commise est majorée par $x^3/6$, soit de l'ordre de 2.10^{-2}.

Pour $n = 4$, l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[0, \pi/6]$ s'écrit

$$\forall x \in [0, \pi/6], \ \left| \sin x - x - \frac{x^3}{6} \right| \leqslant \frac{x^5}{120}.$$

Ainsi si on approche $\sin x$ par $x - x^3/6$ sur $[0, \pi/6]$, l'erreur commise est de l'ordre de 3.10^{-4}.

2) Formules de Taylor

Définition 2.6 (extremums). Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in D_f$ tel que f définie au voisinage de a.

- On dit que f admet *un maximum local (ou relatif) en* a si $f(x) \leqslant f(a)$ au voisinage de a, c'est-à-dire s'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[, \ f(x) \leqslant f(a).$$
- On dit que f admet *un minimum local (ou relatif) en* a si $f(x) \geqslant f(a)$ au voisinage de a, c'est-à-dire s'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[, \ f(x) \geqslant f(a).$$
- On dit que f admet un extremum local en a si f admet un maximum local ou un minimum local en a.

Dire que f a un maximum local en a signifie que $f(a)$ est la plus grande des valeurs $f(x)$ pour les x proches de a.

Remarque. On dit que $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ admet *maximum global* en a si

$$\forall x \in D_f, \ f(x) \leqslant f(a).$$

Il est clair que un maximum global est aussi un maximum local, mais la réciproque est fausse.

2) Formules de Taylor

Définition 2.6 (extremums). Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in D_f$ tel que f définie au voisinage de a.

- On dit que f admet *un maximum local (ou relatif) en* a si $f(x) \leqslant f(a)$ au voisinage de a, c'est-à-dire s'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[, \ f(x) \leqslant f(a).$$
- On dit que f admet *un minimum local (ou relatif) en* a si $f(x) \geqslant f(a)$ au voisinage de a, c'est-à-dire s'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[, \ f(x) \geqslant f(a).$$
- On dit que f admet un extremum local en a si f admet un maximum local ou un minimum local en a.

Dire que f a un maximum local en a signifie que $f(a)$ est la plus grande des valeurs $f(x)$ pour les x proches de a.

Remarque. On dit que $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ admet *maximum global* en a si
$$\forall x \in D_f, \ f(x) \leqslant f(a).$$

Il est clair qu'un maximum global est aussi un maximum local, mais la réciproque est fausse.

2) Formules de Taylor

Définition 2.6 (extremums). Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in D_f$ tel que f définie au voisinage de a.

- On dit que f admet *un maximum local (ou relatif) en* a si $f(x) \leqslant f(a)$ au voisinage de a, c'est-à-dire s'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[,\ f(x) \leqslant f(a).$$
- On dit que f admet *un minimum local (ou relatif) en* a si $f(x) \geqslant f(a)$ au voisinage de a, c'est-à-dire s'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[,\ f(x) \geqslant f(a).$$
- On dit que f admet un extremum local en a si f admet un maximum local ou un minimum local en a.

Dire que f a un maximum local en a signifie que $f(a)$ est la plus grande des valeurs $f(x)$ pour les x proches de a.

Remarque. On dit que $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ admet *maximum global* en a si

$$\forall x \in D_f,\ f(x) \leqslant f(a).$$

Il est clair que un maximum global est aussi un maximum local, mais la réciproque est fausse.

2) Formules de Taylor

Définition 2.6 (extremums). Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in D_f$ tel que f définie au voisinage de a.

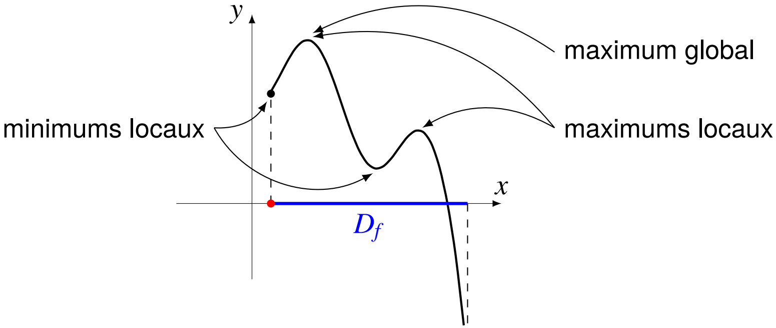
- On dit que f admet *un maximum local (ou relatif) en a* si $f(x) \leqslant f(a)$ au voisinage de a, c'est-à-dire s'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[, \ f(x) \leqslant f(a).$$
- On dit que f admet *un minimum local (ou relatif) en a* si $f(x) \geqslant f(a)$ au voisinage de a, c'est-à-dire s'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[, \ f(x) \geqslant f(a).$$
- On dit que f admet un extremum local en a si f admet un maximum local ou un minimum local en a.

Dire que f a un maximum local en a signifie que $f(a)$ est la plus grande des valeurs $f(x)$ pour les x proches de a.

Remarque. On dit que $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ admet *maximum global* en a si
$$\forall x \in D_f, \ f(x) \leqslant f(a).$$

Il est clair que un maximum global est aussi un maximum local, mais la réciproque est fausse.

2) Formules de Taylor



2) Formules de Taylor

Proposition 2.7. Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in D_f$ tel que f définie au voisinage de a. Si f est dérivable en a et admet un maximum local (ou un minimum local) en a, alors $f'(a) = 0$. On dit que f admet un point critique en a.

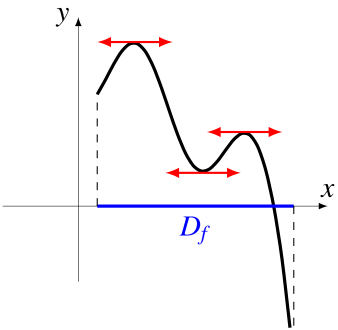
Géométriquement, si f admet un maximum local (ou un minimum local) en a alors au point $(a, f(a))$ la tangente à la courbe représentative de f est horizontale.

Remarque. La réciproque est fausse. Par exemple : $f(x) = x^3$. le point $x_0 = 0$ est un point critique, mais ce n'est ni un maximum local ni un minimum local (c'est un point *d'inflexion*).

2) Formules de Taylor

Proposition 2.7. Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in D_f$ tel que f définie au voisinage de a. Si f est dérivable en a et admet un maximum local (ou un minimum local) en a, alors $f'(a) = 0$. On dit que f admet un point critique en a.

Géométriquement, si f admet un maximum local (ou un minimum local) en a alors au point $(a, f(a))$ la tangente à la courbe représentative de f est horizontale.

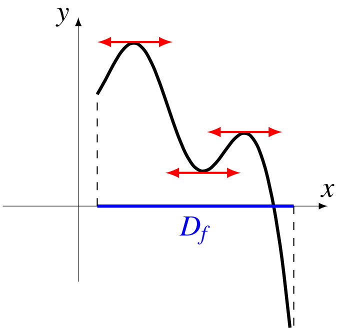


Remarque. La réciproque est fausse. Par exemple : $f(x) = x^3$. le point $x_0 = 0$ est un point critique, mais ce n'est ni un maximum local ni un minimum local (c'est un point *d'inflexion*).

2) Formules de Taylor

Proposition 2.7. Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in D_f$ tel que f définie au voisinage de a. Si f est dérivable en a et admet un maximum local (ou un minimum local) en a, alors $f'(a) = 0$. On dit que f admet un point critique en a.

Géométriquement, si f admet un maximum local (ou un minimum local) en a alors au point $(a, f(a))$ la tangente à la courbe représentative de f est horizontale.



Remarque. La réciproque est fausse. Par exemple : $f(x) = x^3$. le point $x_0 = 0$ est un point critique, mais ce n'est ni un maximum local ni un minimum local (c'est un point *d'inflexion*).

2) Formules de Taylor

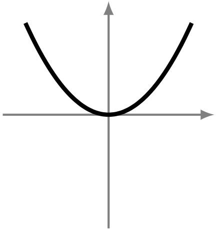
Exemples.

1) La fonction $f : x \mapsto x^2$ admet un minimum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.
2) La fonction $f : x \mapsto -x^2$ admet un maximum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) < 0$.
3) La fonction$f : x \mapsto x^3$ n'admet ni minimum ni maximum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$.

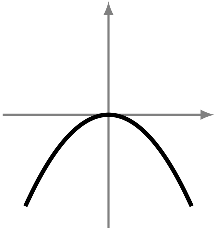
2) Formules de Taylor

Exemples.

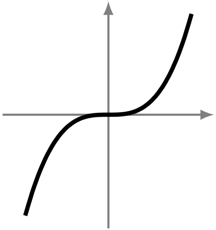
1) La fonction $f : x \mapsto x^2$ admet un minimum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.
2) La fonction $f : x \mapsto -x^2$ admet un maximum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) < 0$.
3) La fonction$f : x \mapsto x^3$ n'admet ni minimum ni maximum local en 0. On a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$.



$f(x) = x^2$



$f(x) = -x^2$



$f(x) = x^3$

2) Formules de Taylor

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.8 (Caractérisation des extremums). Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $a \in I$ un point critique de f, c'est-à-dire $f'(a) = 0$. On a

1) si $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a;
2) si $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a;
3) si $f''(a) = 0$, alors on ne peut pas conclure. Il faut approfondir l'étude.

2) Formules de Taylor

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.8 (Caractérisation des extremums). Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $a \in I$ un point critique de f, c'est-à-dire $f'(a) = 0$. On a

1) si $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a;
2) si $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a;
3) si $f''(a) = 0$, alors on ne peut pas conclure. Il faut approfondir l'étude.

2) Formules de Taylor

Définition 2.6 (fonction convexe). Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convexe si

$$\forall t \in [0,1],\ \forall x_1, x_2 \in I,\ \ f(t.x_1 + (1-t).x_2) \leqslant t.f(x_1) + (1-t).f(x_2).$$

Interprétation géométrique :

FIGURE – Une fonction est convexe ssi sa courbe représentative est au-dessous de toutes ses cordes

2) Formules de Taylor

Définition 2.6 (fonction convexe). Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convexe si

$$\forall\, t \in [0,1],\ \forall\, x_1, x_2 \in I,\ \ f(t.x_1 + (1-t).x_2) \leqslant t.f(x_1) + (1-t).f(x_2).$$

Interprétation géométrique :

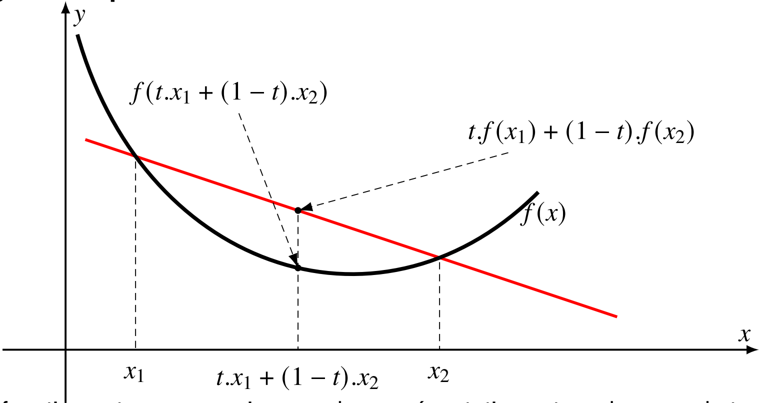


FIGURE – Une fonction est convexe ssi sa courbe représentative est au-dessous de toutes ses cordes

2) Formules de Taylor

Remarque (fonction concave). Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convave si la fonction $-f$ est convexe, c'est-à-dire

$$\forall t \in [0,1],\ \forall x_1, x_2 \in I,\quad t.f(x_1) + (1-t).f(x_2) \leqslant f(t.x_1 + (1-t).x_2).$$

Interprétation géométrique :

FIGURE – Une fonction est concave ssi sa courbe représentative est au dessus de toutes ses cordes

2) Formules de Taylor

Remarque (fonction concave). Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convave si la fonction $-f$ est convexe, c'est-à-dire

$$\forall t \in [0,1],\ \forall x_1, x_2 \in I,\quad t.f(x_1) + (1-t).f(x_2) \leqslant f(t.x_1 + (1-t).x_2).$$

Interprétation géométrique :

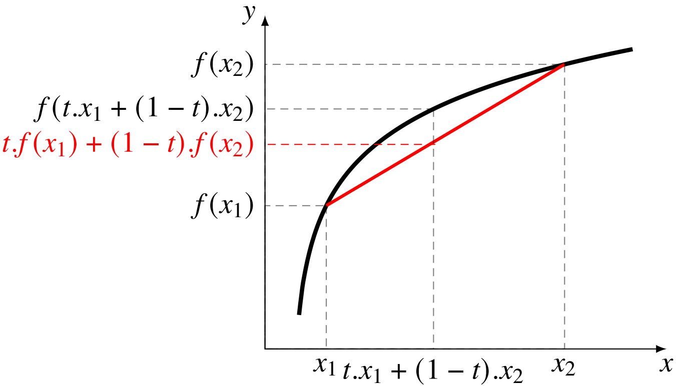


Figure – Une fonction est concave ssi sa courbe représentative est au dessus de toutes ses cordes

2) Formules de Taylor

Exemples.

1) La fonction $f : x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$. La fonction $f : x \longmapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) La fonction $f : x \longmapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$. La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.
3) Les fonctions affines sont des fonctions à la fois convexes et concaves sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Une fonction peut être ni convexe ni convave.

Figure – Une fonction qui ni convexe ni convave.

2) Formules de Taylor

Exemples.

1) La fonction $f : x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$. La fonction $f : x \longmapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) La fonction $f : x \longmapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$. La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.
3) Les fonctions affines sont des fonctions à la fois convexes et concaves sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Une fonction peut être ni convexe ni convave.

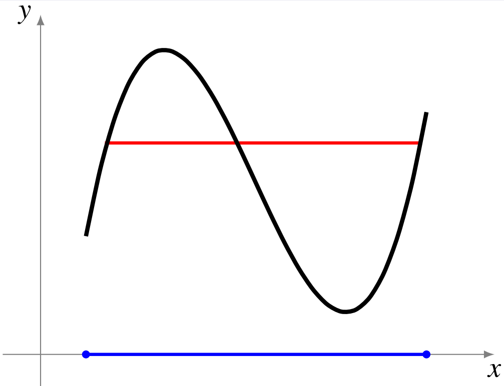


FIGURE – Une fonction qui ni convexe ni convave.

2) Formules de Taylor

Proposition 2.7. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On a

1) Si f est dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si la dérivée f' est croissante sur I.
2) Si f est deux fois dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si la dérivée seconde f'' est positive ou nulle sur I.

Exemples.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \longmapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$ si n est pair. Si n est impair, elle est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$.

Remarque. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si sa courbe représentative est au dessus de chacune de ses tangentes.

2) Formules de Taylor

Proposition 2.7. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On a

1) Si f est dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si la dérivée f' est croissante sur I.
2) Si f est deux fois dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si la dérivée seconde f'' est positive ou nulle sur I.

Exemples.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \longmapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$ si n est pair. Si n est impair, elle est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$.

Remarque. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si sa courbe représentative est au dessus de chacune de ses tangentes.

2) Formules de Taylor

Proposition 2.7. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On a

1) Si f est dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si la dérivée f' est croissante sur I.
2) Si f est deux fois dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si la dérivée seconde f'' est positive ou nulle sur I.

Exemples.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \longmapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$ si n est pair. Si n est impair, elle est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$.

Remarque. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si sa courbe représentative est au dessus de chacune de ses tangentes.

2) Formules de Taylor

Proposition 2.7. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On a

1) Si f est dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si la dérivée f' est croissante sur I.
2) Si f est deux fois dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si la dérivée seconde f'' est positive ou nulle sur I.

Exemples.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \longmapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$ si n est pair. Si n est impair, elle est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$.

Remarque. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si, et seulement si sa courbe représentative est au dessus de chacune de ses tangentes.

2) Formules de Taylor

Théorème 2.8 (formule de Taylor-Young). Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. Si f est n fois dérivable en x_0, alors pour tout x voisin de x_0 on a :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n.\varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction (définie sur un voisinage de x_0) telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- La formule de **T.-Y.** s'appelle aussi la formule de Taylor-Young en a à l'ordre n.
- Le terme $R_{n+1}(x) = (x - x_0)^{n+1}\varepsilon(x)$ s'appelle le reste de Young.

Notation. Le terme $(x - a)^n\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ est souvent abrégé en « *petit o* » de $(x - a)^n$ et est noté $o((x - a)^n)$. Donc $o((x - a)^n)$ est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{o((x - a)^n)}{(x - a)^n} = 0$.

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \sin(x + 1/2)$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de $1/2$ s'écrit

$$\sin(x + 1/2) = \sin 1 + (x - 1/2)\cos 1 - (x - 1/2)^2\frac{\sin 1}{2!} - (x - 1/2)^3\frac{\cos 1}{3!} + (x - 1/2)^3\varepsilon(x),$$

où ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to 1/2} \varepsilon(x) = 0$.

2) Formules de Taylor

Théorème 2.8 (formule de Taylor-Young). Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. Si f est n fois dérivable en x_0, alors pour tout x voisin de x_0 on a :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n.\varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction (définie sur un voisinage de x_0) telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$

- La formule de **T.-Y.** s'appelle aussi la formule de Taylor-Young en a à l'ordre n.
- Le terme $R_{n+1}(x) = (x - x_0)^{n+1}\varepsilon(x)$ s'appelle le reste de Young.

Notation. Le terme $(x - a)^n\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ est souvent abrégé en « *petit o* » de $(x - a)^n$ et est noté $o((x - a)^n)$. Donc $o((x - a)^n)$ est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} \frac{o((x - a)^n)}{(x - a)^n} = 0$.

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \sin(x + 1/2)$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de $1/2$ s'écrit

$$\sin(x + 1/2) = \sin 1 + (x - 1/2)\cos 1 - (x - 1/2)^2\frac{\sin 1}{2!} - (x - 1/2)^3\frac{\cos 1}{3!} + (x - 1/2)^3\varepsilon(x),$$

où ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to 1/2} \varepsilon(x) = 0$.

2) Formules de Taylor

Théorème 2.8 (formule de Taylor-Young). Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. Si f est n fois dérivable en x_0, alors pour tout x voisin de x_0 on a :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n.\varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction (définie sur un voisinage de x_0) telle que $\lim_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$

- La formule de **T.-Y.** s'appelle aussi la formule de Taylor-Young en a à l'ordre n.
- Le terme $R_{n+1}(x) = (x - x_0)^{n+1}\varepsilon(x)$ s'appelle le reste de Young.

Notation. Le terme $(x - a)^n\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ est souvent abrégé en « *petit o* » de $(x - a)^n$ et est noté $o((x - a)^n)$. Donc $o((x - a)^n)$ est une fonction telle que $\lim_{x \to a} \dfrac{o((x - a)^n)}{(x - a)^n} = 0.$

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \sin(x + 1/2)$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de $1/2$ s'écrit

$$\sin(x + 1/2) = \sin 1 + (x - 1/2)\cos 1 - (x - 1/2)^2\frac{\sin 1}{2!} - (x - 1/2)^3\frac{\cos 1}{3!} + (x - 1/2)^3\varepsilon(x),$$

où ε est une fonction telle que $\lim_{x \to 1/2} \varepsilon(x) = 0.$

2) Formules de Taylor

Théorème 2.8 (formule de Taylor-Young). Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. Si f est n fois dérivable en x_0, alors pour tout x voisin de x_0 on a :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n.\varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction (définie sur un voisinage de x_0) telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- La formule de **T.-Y.** s'appelle aussi la formule de Taylor-Young en a à l'ordre n.
- Le terme $R_{n+1}(x) = (x - x_0)^{n+1}\varepsilon(x)$ s'appelle le reste de Young.

Notation. Le terme $(x-a)^n\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ est souvent abrégé en « *petit o* » de $(x-a)^n$ et est noté $o((x-a)^n)$. Donc $o((x-a)^n)$ est une fonction telle que $\lim\limits_{x\longrightarrow a} \dfrac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0$.

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \sin(x + 1/2)$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de $1/2$ s'écrit

$$\sin(x+1/2) = \sin 1 + (x-1/2)\cos 1 - (x-1/2)^2\frac{\sin 1}{2!} - (x-1/2)^3\frac{\cos 1}{3!} + (x-1/2)^3\varepsilon(x),$$

où ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x\longrightarrow 1/2} \varepsilon(x) = 0$.

2) Formules de Taylor

Un cas particulier très important est le cas où $x_0 = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.9 (formule de Mac-Laurin-Young.) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est n fois dérivable en 0, alors pour tout x voisin de 0 on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cette formule s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre n. Avec la notation « petit o » cela donne :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \exp x$. La formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre 5 s'écrit

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

2) Formules de Taylor

Un cas particulier très important est le cas où $x_0 = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.9 (formule de Mac-Laurin-Young.) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est n fois dérivable en 0, alors pour tout x voisin de 0 on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \, \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cette formule s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre n. Avec la notation « petit o » cela donne :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \exp x$. La formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre 5 s'écrit

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \, \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2) Formules de Taylor

Un cas particulier très important est le cas où $x_0 = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.9 (formule de Mac-Laurin-Young.) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est n fois dérivable en 0, alors pour tout x voisin de 0 on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \, \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cette formule s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre n. Avec la notation « petit o » cela donne :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \exp x$. La formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre 5 s'écrit

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \, \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2) Formules de Taylor

Un cas particulier très important est le cas où $x_0 = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.9 (formule de Mac-Laurin-Young.) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est n fois dérivable en 0, alors pour tout x voisin de 0 on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \, \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cette formule s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre n. Avec la notation « petit o » cela donne :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \exp x$. La formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre 5 s'écrit

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \, \varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2) Formules de Taylor

Un cas particulier très important est le cas où $x_0 = 0$, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.9 (formule de Mac-Laurin-Young.) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est n fois dérivable en 0, alors pour tout x voisin de 0 on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cette formule s'appelle aussi la formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre n. Avec la notation « petit o » cela donne :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

Exemple. Considérons la fonction $x \longmapsto \exp x$. La formule de Mac-Laurin avec reste de Young à l'ordre 5 s'écrit

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

3) Développements limités.

Définition 3.1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0 (sauf peut être en 0). On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

- L'égalité précédente s'appelle un DL de f au voisinage de 0 à l'ordre n.
- Le polynôme $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ est appelé la *partie polynomiale (ou gulière)* du DL.
- Le terme $x^n \varepsilon(x)$ est appelé le *reste* (ou *terme complémentaire*) du DL, on le note aussi $o(x^n)$.

Remarque. Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe et finie.

Exemple. Les fonctions $x \longmapsto 1/x$; $x \longmapsto \sin(1/x)$ et $x \longmapsto \cos(1/x)$ n'admettent pas de DL en 0.

3) Développements limités.

Définition 3.1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0 (sauf peut être en 0). On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

- L'égalité précédente s'appelle un DL de f au voisinage de 0 à l'ordre n.
- Le polynôme $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ est appelé la *partie polynomiale (ou gulière)* du DL.
- Le terme $x^n \varepsilon(x)$ est appelé le *reste* (ou *terme complémentaire*) du DL, on le note aussi $o(x^n)$.

Remarque. Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe et finie.

Exemple. Les fonctions $x \longmapsto 1/x$; $x \longmapsto \sin(1/x)$ et $x \longmapsto \cos(1/x)$ n'admettent pas de DL en 0.

3) Développements limités.

Définition 3.1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0 (sauf peut être en 0). On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

- L'égalité précédente s'appelle un DL de f au voisinage de 0 à l'ordre n.
- Le polynôme $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ est appelé la *partie polynomiale (ou gulière)* du DL.
- Le terme $x^n \varepsilon(x)$ est appelé le *reste* (ou *terme complémentaire*) du DL, on le note aussi $o(x^n)$.

Remarque. Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe et finie.

Exemple. Les fonctions $x \longmapsto 1/x$; $x \longmapsto \sin(1/x)$ et $x \longmapsto \cos(1/x)$ n'admettent pas de DL en 0.

3) Développements limités.

Définition 3.1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0 (sauf peut être en 0). On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

avec ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

- L'égalité précédente s'appelle un DL de f au voisinage de 0 à l'ordre n.
- Le polynôme $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ est appelé la *partie polynomiale (ou gulière)* du DL.
- Le terme $x^n \varepsilon(x)$ est appelé le *reste* (ou *terme complémentaire*) du DL, on le note aussi $o(x^n)$.

Remarque. Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe et finie.

Exemple. Les fonctions $x \longmapsto 1/x$; $x \longmapsto \sin(1/x)$ et $x \longmapsto \cos(1/x)$ n'admettent pas de DL en 0.

Proposition 3.2 (propriétés).

1) Si f admet un $DL_n(0)$, alors f admet un $DL_p(0)$ pour tout $p \leqslant n$ obtenu par « troncature » au degré p du $DL_n(0)$.
2) Si une fonction f admet un DL, alors celui-ci est unique (c.-à-d. les coefficients a_k sont uniques).
3) Si f est paire et admet un DL alors la partie régulière de DL est paire (c.-à-d. uniquement avec des exposants pairs).
4) Si f est impaire et admet un DL alors la partie régulière de DL est impaire (c.-à-d. uniquement avec des exposants impairs).

Comme conséquence de la proposition 3.2 (point 2)), on a

Théorème 3.3 (formule de Mac-Laurin-Young.) Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0. Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors f admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Autrement dit, les coefficients de $DL_n(0)$ sont donnés par :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \;\; a_k = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Proposition 3.2 (propriétés).

1) Si f admet un $DL_n(0)$, alors f admet un $DL_p(0)$ pour tout $p \leqslant n$ obtenu par « troncature » au degré p du $DL_n(0)$.
2) Si une fonction f admet un DL, alors celui-ci est unique (c.-à-d. les coefficients a_k sont uniques).
3) Si f est paire et admet un DL alors la partie régulière de DL est paire (c.-à-d. uniquement avec des exposants pairs).
4) Si f est impaire et admet un DL alors la partie régulière de DL est impaire (c.-à-d. uniquement avec des exposants impairs).

Comme conséquence de la proposition 3.2 (point 2)), on a

Théorème 3.3 (formule de Mac-Laurin-Young.) Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0. Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors f admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Autrement dit, les coefficients de $DL_n(0)$ sont donnés par :

$$\forall\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad a_k = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Proposition 3.2 (propriétés).

1) Si f admet un $DL_n(0)$, alors f admet un $DL_p(0)$ pour tout $p \leqslant n$ obtenu par « troncature » au degré p du $DL_n(0)$.
2) Si une fonction f admet un DL, alors celui-ci est unique (c.-à-d. les coefficients a_k sont uniques).
3) Si f est paire et admet un DL alors la partie régulière de DL est paire (c.-à-d. uniquement avec des exposants pairs).
4) Si f est impaire et admet un DL alors la partie régulière de DL est impaire (c.-à-d. uniquement avec des exposants impairs).

Comme conséquence de la proposition 3.2 (point 2)), on a

Théorème 3.3 (formule de Mac-Laurin-Young.) Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0. Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors f admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Autrement dit, les coefficients de $DL_n(0)$ sont donnés par :

$$\forall\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad a_k = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Exemples de DL usuels : ils sont tous à connaître par coeur.

1)

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2)

$$ch\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

3)

$$sh\, x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

4)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

5)

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

6)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

7)

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

8)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

9)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

10)

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n).$$

Opérations sur les développements limités.

Soient f et g deux fonctions qui possèdent les $DL_n(0)$ suivants :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \text{ et } g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n).$$

C'est-à-dire

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \text{ et } g(x) = Q_n(x) + o(x^n).$$

On a les propriétés suivantes :

a) Somme des DL. La fonction $f + g$ admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$(f+g)(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n).$$

Exemple. Le $DL_{2n}(0)$ de la fonction $x \longmapsto e^x - e^{-x}$ est donné par :

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3!} + \cdots + 2\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right).$$

b) Produit des DL par un scalaire. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, La fonction λf admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$\lambda f(x) = f(x) = \lambda\, a_0 + \lambda\, a_1 x + \cdots + \lambda\, a_n x^n + o(x^n).$$

Opérations sur les développements limités.

Soient f et g deux fonctions qui possèdent les $DL_n(0)$ suivants :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \text{ et } g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n).$$

C'est-à-dire

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \text{ et } g(x) = Q_n(x) + o(x^n).$$

On a les propriétés suivantes :

a) Somme des DL. La fonction $f + g$ admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$(f+g)(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n).$$

Exemple. Le $DL_{2n}(0)$ de la fonction $x \longmapsto e^x - e^{-x}$ est donné par :

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3!} + \cdots + 2\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right).$$

b) Produit des DL par un scalaire. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, La fonction λf admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$\lambda f(x) = f(x) = \lambda\, a_0 + \lambda\, a_1 x + \cdots + \lambda\, a_n x^n + o(x^n).$$

Opérations sur les développements limités.

Soient f et g deux fonctions qui possèdent les $DL_n(0)$ suivants :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \text{ et } g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n).$$

C'est-à-dire

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \text{ et } g(x) = Q_n(x) + o(x^n).$$

On a les propriétés suivantes :

a) Somme des DL. La fonction $f + g$ admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$(f+g)(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n).$$

Exemple. Le $DL_{2n}(0)$ de la fonction $x \longmapsto e^x - e^{-x}$ est donné par :

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3!} + \cdots + 2\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right).$$

b) Produit des DL par un scalaire. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, La fonction λf admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$\lambda f(x) = f(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_n x^n + o(x^n).$$

Opérations sur les développements limités.

Soient f et g deux fonctions qui possèdent les $DL_n(0)$ suivants :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \text{ et } g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n).$$

C'est-à-dire

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \text{ et } g(x) = Q_n(x) + o(x^n).$$

On a les propriétés suivantes :

a) Somme des DL. La fonction $f + g$ admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$(f+g)(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n).$$

Exemple. Le $DL_{2n}(0)$ de la fonction $x \longmapsto e^x - e^{-x}$ est donné par :

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3!} + \cdots + 2\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right).$$

b) Produit des DL par un scalaire. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, La fonction λf admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$\lambda f(x) = f(x) = \lambda\, a_0 + \lambda\, a_1 x + \cdots + \lambda\, a_n x^n + o(x^n).$$

Exemple. Les $DL_{2n}(0)$ des fonctions sh et ch sont donnés par :

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \text{ et } ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

c) Produit des DL. La fonction fg admet un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en multipliant $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire :

$$(fg)(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n),$$

avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ pour tout $k = 0, \ldots, n$.

Exemple. Le $DL_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto \sin x \cos x$ est donné par :

$$\sin x \cos x = x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

Exemple. Les $DL_{2n}(0)$ des fonctions sh et ch sont donnés par :

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \text{ et } ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

c) Produit des DL. La fonction fg admet un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en multipliant $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire :

$$(fg)(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n),$$

avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ pour tout $k = 0, \ldots, n$.

Exemple. Le $DL_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto \sin x \cos x$ est donné par :

$$\sin x \cos x = x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

Exemple. Les $DL_{2n}(0)$ des fonctions sh et ch sont donnés par :

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \text{ et } ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

c) Produit des DL. La fonction fg admet un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en multipliant $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire :

$$(fg)(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n),$$

avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ pour tout $k = 0, \ldots, n$.

Exemple. Le $DL_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto \sin x \cos x$ est donné par :

$$\sin x \cos x = x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

d) Quotient des DL. Si $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$ (i.e. $b_0 \neq 0$), alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en divisant à l'ordre n, suivant les puissances croissantes le polynôme $P_n(x)$ par $Q_n(x)$.

Exemples.

i)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5).$$

ii)

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

ii)

$$th\, x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

e) Composition des DL. Si $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (c-à-d si $a_0 = 0$), alors la fonction $g \circ f$ admet un un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en remplaçant dans $Q_n(x)$ la variable x par $P_n(x)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

d) Quotient des DL. Si $\lim_{x \to 0} g(x) \neq 0$ (i.e. $b_0 \neq 0$), alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en divisant à l'ordre n, suivant les puissances croissantes le polynôme $P_n(x)$ par $Q_n(x)$.

Exemples.

i)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5).$$

ii)

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

ii)

$$th\, x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

e) Composition des DL. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ (c-à-d si $a_0 = 0$), alors la fonction $g \circ f$ admet un un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en remplaçant dans $Q_n(x)$ la variable x par $P_n(x)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

d) Quotient des DL. Si $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$ (i.e. $b_0 \neq 0$), alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en divisant à l'ordre n, suivant les puissances croissantes le polynôme $P_n(x)$ par $Q_n(x)$.

Exemples.

i)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5).$$

ii)

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

ii)

$$th\, x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

e) Composition des DL. Si $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (c-à-d si $a_0 = 0$), alors la fonction $g \circ f$ admet un un $DL_n(0)$: sa partie régulière est obtenue en remplaçant dans $Q_n(x)$ la variable x par $P_n(x)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exemple. Les $DL_3(0)$ et $DL_5(0)$ de la fonction de la fonctions $x \longmapsto e^{\sin x}$ sont donnés respectivement par :

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \text{ et } e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + o(x^5).$$

f) Dérivation des DL. Si la fonction f' admet un $DL_n(0)$, alors sa partie régulière est le polynôme dérivé $P_n'(x)$. Autrement dit,

$$f'(x) = P_n'(x) + o(x^{n-1}).$$

f) Primitivation des DL. Si F est une primitive de f, alors F admet un $DL_{n+1}(0)$: sa partie régulière est $F(0) + a_0 x + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Autrement dit,

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exemple. Les $DL_3(0)$ et $DL_5(0)$ de la fonction de la fonctions $x \longmapsto e^{\sin x}$ sont donnés respectivement par :

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \text{ et } e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + o(x^5).$$

f) Dérivation des DL. Si la fonction f' admet un $DL_n(0)$, alors sa partie régulière est le polynôme dérivé $P'_n(x)$. Autrement dit,

$$f'(x) = P'_n(x) + o(x^{n-1}).$$

f) Primitivation des DL. Si F est une primitive de f, alors F admet un $DL_{n+1}(0)$: sa partie régulière est $F(0) + a_0 x + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Autrement dit,

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exemple. Les $DL_3(0)$ et $DL_5(0)$ de la fonction de la fonctions $x \longmapsto e^{\sin x}$ sont donnés respectivement par :

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \text{ et } e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + o(x^5).$$

f) Dérivation des DL. Si la fonction f' admet un $DL_n(0)$, alors sa partie régulière est le polynôme dérivé $P_n'(x)$. Autrement dit,

$$f'(x) = P_n'(x) + o(x^{n-1}).$$

f) Primitivation des DL. Si F est une primitive de f, alors F admet un $DL_{n+1}(0)$: sa partie régulière est $F(0) + a_0 x + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Autrement dit,

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exemples. i) Le $DL_4(0)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$ est donné par :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4).$$

ii) Le $DL_5(0)$ de la fonction $x \longmapsto \arctan x$ est donné par :

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

iii) Le $DL_5(0)$ de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est donné par :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

DL au voisinage de x_0 avec $x_0 \neq 0$ et $x_0 \neq \pm\infty$.

Définition 3.4. Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0). On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 (en abrégé $DL_n(x_0)$) s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + o(x - x_0)^n .$$

Remarque. Si on fait le changement de variable $X = x - x_0$, alors étudier le $DL_n(x_0)$ de f revient à étudier le $DL_n(0)$ de la fonction g définie par $g(X) = f(X + x_0)$.

Exemple. Le $DL_5(0)$ de la fonction $x \longmapsto \cos(x - 1)$ est donné par :

$$\cos(x - 1) = 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^4}{24} + o(x - 1)^5 .$$

DL au voisinage de x_0 avec $x_0 \neq 0$ et $x_0 \neq \pm\infty$.

Définition 3.4. Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0). On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 (en abrégé $DL_n(x_0)$) s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + o(x - x_0)^n .$$

Remarque. Si on fait le changement de variable $X = x - x_0$, alors étudier le $DL_n(x_0)$ de f revient à étudier le $DL_n(0)$ de la fonction g définie par $g(X) = f(X + x_0)$.

Exemple. Le $DL_5(0)$ de la fonction $x \longmapsto \cos(x - 1)$ est donné par :

$$\cos(x-1) = 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^4}{24} + o(x-1)^5 .$$

DL au voisinage de x_0 avec $x_0 \neq 0$ et $x_0 \neq \pm\infty$.

Définition 3.4. Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0). On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 (en abrégé $DL_n(x_0)$) s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n.$$

Remarque. Si on fait le changement de variable $X = x - x_0$, alors étudier le $DL_n(x_0)$ de f revient à étudier le $DL_n(0)$ de la fonction g définie par $g(X) = f(X + x_0)$.

Exemple. Le $DL_5(0)$ de la fonction $x \longmapsto \cos(x-1)$ est donné par :

$$\cos(x-1) = 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^4}{24} + o(x-1)^5.$$

Remarque. Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0). Alors

1) f admet un $DL_0(x_0)$ ssi f admet une limite finie en x_0. Plus précisément

$$f(x) = a_0 + o(1) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = a_0.$$

   f est alors prolongeable par continuité en x_0. On posera $\tilde{f}(x_0) = a_0$.

2) f admet un $DL_1(x_0)$ ssi f est dérivable en x_0 (après prolongement par continuité en x_0). Plus précisément :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = a_0 \text{ et } f'(x_0) = a_1.$$

Attention. L'existence d'un $DL_n(x_0)$ avec $n \geqslant 2$ ne garantit pas l'existence de $f^{(n)}(x_0)$.

Exemple. La fonction $x \longmapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un $DL_2(0)$, mais n'est pas 2 fois dérivable en 0.

Remarque. Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0). Alors

1) f admet un $DL_0(x_0)$ ssi f admet une limite finie en x_0. Plus précisément

$$f(x) = a_0 + o(1) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = a_0.$$

   f est alors prolongeable par continuité en x_0. On posera $\tilde{f}(x_0) = a_0$.

2) f admet un $DL_1(x_0)$ ssi f est dérivable en x_0 (après prolongement par continuité en x_0). Plus précisément :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = a_0 \text{ et } f'(x_0) = a_1.$$

Attention. L'existence d'un $DL_n(x_0)$ avec $n \geqslant 2$ ne garantit pas l'existence de $f^{(n)}(x_0)$.

Exemple. La fonction $x \longmapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un $DL_2(0)$, mais n'est pas 2 fois dérivable en 0.

b) Développement limité au voisinage de l'∞.

Définition 3.5. Soit f une fonction définie au voisinage de l'∞. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de l'∞ (en abrégé $DL_n(\infty)$) s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Le terme $\frac{1}{x^n}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ se note aussi $o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Remarque. Si on fait le changement de variable $X = \frac{1}{x}\cdot$ Alors étudier le $DL_n(\infty)$ de f revient à étudier le $DL_n(0)$ de la fonction g définie par $g(X) = f\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exemple. Soit $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x}\cdot$ Le $DL_2(\infty)$ de f est donné par :

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

b) Développement limité au voisinage de l'∞.

Définition 3.5. Soit f une fonction définie au voisinage de l'∞. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de l'∞ (en abrégé $DL_n(\infty)$) s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Le terme $\frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ se note aussi $o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Remarque. Si on fait le changement de variable $X = \frac{1}{x}\cdot$ Alors étudier le $DL_n(\infty)$ de f revient à étudier le $DL_n(0)$ de la fonction g définie par $g(X) = f\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exemple. Soit $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x}\cdot$ Le $DL_2(\infty)$ de f est donné par :

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

b) Développement limité au voisinage de l'∞.

Définition 3.5. Soit f une fonction définie au voisinage de l'∞. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de l'∞ (en abrégé $DL_n(\infty)$) s'il existe des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Le terme $\frac{1}{x^n}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ se note aussi $o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Remarque. Si on fait le changement de variable $X = \frac{1}{x}$. Alors étudier le $DL_n(\infty)$ de f revient à étudier le $DL_n(0)$ de la fonction g définie par $g(X) = f\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exemple. Soit $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x}$. Le $DL_2(\infty)$ de f est donné par :

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Applications des DL.

a) Calcul des limites des formes indéterminées : L'une des applications des développements limités est la recherche de certaines limites, notament celles des formes indérterminées, et ceci en remplaçant chaque fonction par la partie régulière de son développement limité.

Exemple. Calculons la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}}{\tan x - x}$. Au voisinage de 0, on a $\dfrac{\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}}{\tan x - x}$ est une forme indérterminée de type $\dfrac{0}{0}$. Les $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$ et $\tan x$ sont respectivement :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \text{ et } \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Donc $\ln(1+x) \sim_0 x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ et $\tan x \sim_0 x + \dfrac{x^3}{3}$.

Applications des DL.

a) Calcul des limites des formes indéterminées : L'une des applications des développements limités est la recherche de certaines limites, notament celles des formes indérterminées, et ceci en remplaçant chaque fonction par la partie régulière de son développement limité.

Exemple. Calculons la limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{\tan x - x}\cdot$ Au voisinage de 0, on a $\dfrac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{\tan x - x}$ est une forme indérterminée de type $\frac{0}{0}$. Les $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$ et $\tan x$ sont respectivement :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \text{ et } \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Donc $\ln(1+x) \sim_0 x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ et $\tan x \sim_0 x + \frac{x^3}{3}\cdot$

Ce qui donne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{\tan x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{3}} = 1.$$

b) Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Soit f une fonction dérivable au voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$. Si f admet un $DL_n(x_0)$ de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \frac{a_2}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Alors la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ est la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$. Si r est le plus petit entier tel que $a_r \neq 0$ (avec $2 \leqslant r \leqslant n$), alors on peut écrire

$$f(x) - y = \frac{a_r}{r!}(x - x_0)^r + o((x - x_0)^r)$$

et donc $f(x) - y \sim_{x_0} \frac{a_r}{r!}(x - x_0)^r$.

Ce qui donne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}}{\tan x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^3}{3}}{\dfrac{x^3}{3}} = 1.$$

b) Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Soit f une fonction dérivable au voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$. Si f admet un $DL_n(x_0)$ de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \frac{a_2}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

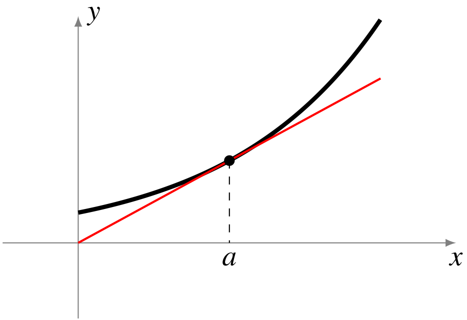
Alors la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ est la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$. Si r est le plus petit entier tel que $a_r \neq 0$ (avec $2 \leqslant r \leqslant n$), alors on peut écrire

$$f(x) - y = \frac{a_r}{r!}(x - x_0)^r + o((x - x_0)^r)$$

et donc $f(x) - y \sim_{x_0} \dfrac{a_r}{r!}(x - x_0)^r$.

Alors on distingue les trois cas suivants :

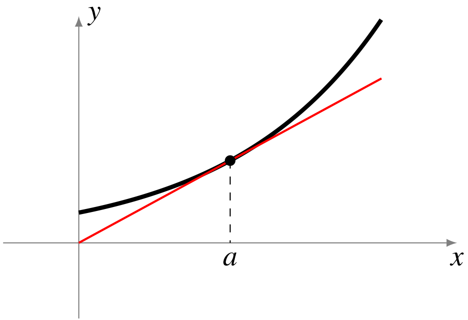
1er cas : Si $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}\dfrac{a_r}{r!}(x-x_0)^r=0^+$, alors la courbe est au dessus de la tangente.



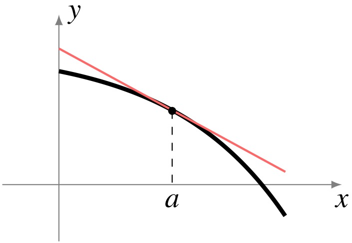
2e cas : Si $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}\dfrac{a_r}{r!}(x-x_0)^r=0^-$, alors la courbe est en dessous de la tangente.

Alors on distingue les trois cas suivants :

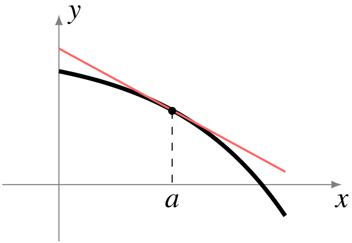
1er cas : Si $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - y) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{a_r}{r!}(x - x_0)^r = 0^+$, alors la courbe est au dessus de la tangente.



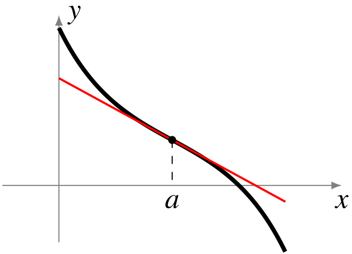
2e cas : Si $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - y) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{a_r}{r!} (x - x_0)^r = 0^-$, alors la courbe est en dessous de la tangente.



3e cas : Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} (f(x) - y) = 0^+$ (resp. 0^-) et $\lim\limits_{x \to x_0^-} (f(x) - y) = 0^-$ (resp. 0^+), alors le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion.



3e cas : Si $\lim_{x \longrightarrow x_0^+} (f(x) - y) = 0^+$ (resp. 0^-) et $\lim_{x \longrightarrow x_0^-} (f(x) - y) = 0^-$ (resp. 0^+), alors le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion.



c) Position d'une courbe par rapport à ses asymptôtes :

Soit f une fonction définie au voisinage de l'∞. Si au voisinage de l'∞ f peut s'écrire sous la forme :

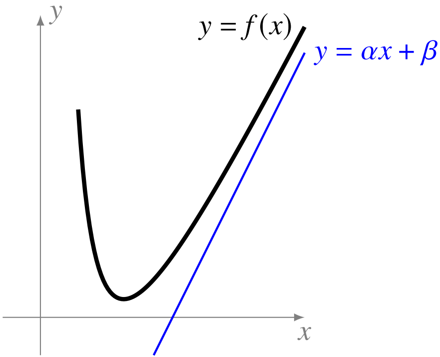
$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

avec $\alpha, \beta, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Alors la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est une asymptôte oblique au graphe de f.

Si r (avec $1 \leqslant r \leqslant n$) est le plus petit entier tel que $a_r \neq 0$, alors

$$f(x) - y = \frac{a_r}{x^r} + o\left(\frac{1}{x^r}\right).$$

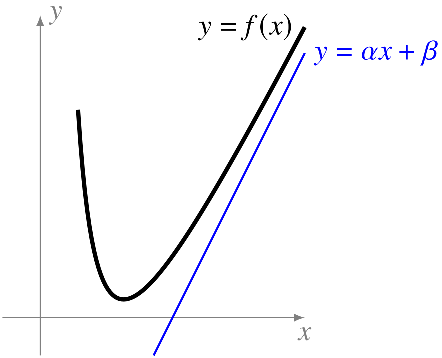
Si $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - y) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_r}{x^r} = 0^-$ (resp. 0^+), alors la courbe est en dessous de l'asymptôte (resp. au dessus de l'asymptôte).



Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{1 + x}$ avec $x \geqslant 0$. Le $DL_2(\infty)$ de f est :

$$f(x) = 2 + x - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

Donc la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptôte oblique. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{x} = 0^-$, alors la courbe est en dessous de l'asymptôte.



Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{1+x}$ avec $x \geqslant 0$. Le $DL_2(\infty)$ de f est :

$$f(x) = 2 + x - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

Donc la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptôte oblique. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{x} = 0^-$, alors la courbe est en dessous de l'asymptôte.