Chapitre 5

Systèmes d'équations linéaires

Soit $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

5.1 Définitions

→ On appelle système linéaire à m équations et n inconnues $x_1, x_2, ..., x_n$, un système de la forme :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

→ On appelle système homogène associé à (S), le système :

$$(SH) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

→ Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

→ Un système est dit compatible s'il admet au moins une solution.

Remarque 5.1.1
Tout système homogène est compatible (*la solution* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ *est évidente*).

Dans ce chapitre, on va présenter deux méthodes pour résoudre un système linéaire ; celle de Gauss (appelée aussi de Gauss-Jordan) et celle de Cramer.

5.2 Résolution d'un système par la méthode de Gauss

5.2.1 Opérations élémentaires (ou transformations de Gauss)

Exemple 5.2.1.1 (motivation)

→ *Soit* $(S):\left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & + & 6y & - & 4z & = & 2 & (L_1) \\ x & + & 4y & - & z & = & 0 & (L_2) \\ 2x & - & 4y & + & 5z & = & 3 & (L_3) \end{array}\right.$

Les transformations de Gauss consistent à transformer le système (S)*, pour obtenir le système* $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right.$ *qui lui est équivalent et qui est plus simple à résoudre.*

→ *Notons que la notation* (L_1) *veut dire la* $1^{ère}$ *ligne. On verra que plusieurs lignes différentes seront notées* (L_1) *car elles sont situées les premières dans leur système.*

→ **Première opération :** $L_1 \longleftrightarrow L_2$.
En permutant la ligne L_1 *et la ligne* L_2*, le système* (S) *ne change pas.*

$$(S) \overset{devient}{\curvearrowright} \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 4y & - & z & = & 0 & (L_1) \\ 2x & + & 6y & - & 4z & = & 2 & (L_2) \\ 2x & - & 4y & + & 5z & = & 3 & (L_3) \end{array}\right.$$

En général, si on permute deux lignes L_i *et* L_j*, le système ne change pas.*
On note $L_i \longleftrightarrow L_j$.

→ **Deuxième opération :** $L_2 \longrightarrow \frac{1}{2}L_2$.
En multipliant (L_2) *par* $\frac{1}{2}$*, le système ne change pas.*

$$(S) \curvearrowright \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 4y & - & z & = & 0 & (L_1) \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 1 & (L_2) \\ 2x & - & 4y & + & 5z & = & 3 & (L_3) \end{array}\right.$$

En général, si on multiplie une ligne L_i *par un scalaire* α *non nul, le système ne change pas. On note* $L_i \longrightarrow \alpha L_i$. $(\alpha \neq 0)$.

Attention ! *si* $\alpha = 0$*, alors la ligne* L_i *va être supprimée.* $(L_i \Longleftrightarrow 0 = 0)$

→ **Troisième opération :** $L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1$.
Si on ajoute à la ligne (L_3) *la ligne* (L_1) *multipliée par* -2*, alors* (S) *ne change pas.*

$$(S) \curvearrowright \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & - & z & = & 0 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 1 \\ & - & 12y & + & 7z & = & 3 \end{array}\right.$$

En général, si on ajoute à une ligne L_i *une autre ligne* L_j $(i \neq j)$ *multipliée par un scalaire* α*, alors* (S) *ne change pas. On note :* $L_i \longrightarrow L_i + \alpha L_j$ $(i \neq j)$.

Attention ! $i \neq j$ *; sinon : pour* $i = j$ *et* $\alpha = -1$*, on obtient* $L_i \longrightarrow L_i - L_i = 0$ *;*
et la ligne L_i *sera supprimée.*

→ *Reprenons le calcul :*

$$\text{On a : } \begin{cases} x + 4y - z = 0 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ \quad - 12y + 7z = 3 \end{cases} \curvearrowright L_2 - L_1 \begin{cases} x + 4y - z = 0 \\ \quad - y - z = 1 \\ \quad - 12y + 7z = 3 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 - 12L_2}{\curvearrowright} \begin{cases} x + 4y - z = 0 \\ \quad - y - z = 1 \\ \quad 19z = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{19} + \frac{88}{19} = \frac{91}{19} \\ y = -1 - \frac{3}{19} = \frac{-22}{19} \\ z = \frac{3}{19} \end{cases}$$

Par suite $S = \{ \left(\frac{91}{19}, \frac{-22}{19}, \frac{3}{19}\right) \}$

Retenons donc la définition suivante.

Définition 5.2.1.2
On appelle opération élémentaire une des trois opérations suivantes :

1) *Permuter deux lignes :* $L_i \longleftrightarrow L_j$.
2) *Multiplier une ligne par un scalaire non nul :* $L_i \longrightarrow \alpha L_i$ $(\alpha \neq 0)$.
3) *Ajouter à une ligne* L_i*, une autre ligne* L_j *multipliée par un scalaire* α *:*
$L_i \longrightarrow L_i + \alpha L_j$ $(i \neq j)$.

Représentation d'un système
Pour alléger l'écriture, on peut écrire le système

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sous la forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

A gauche du trait vertical, on ne fait figurer que les coefficients des inconnues. A droite du trait, on écrit les seconds membres. Cette écriture est pratique mais n'a de sens que si on respecte scrupuleusement l'ordre des inconnues et des colonnes.

Le système (S), ainsi représenté matriciellement, est équivalent −à travers des opérations élémentaires− à un système très simple, qui sera appelé échelonné réduit ligne.

C'est quoi donc un système échelonné ?

5.2.2 Matrice échelonnée

Définition 5.2.2.1

- *On appelle pivot d'une ligne d'une matrice, le premier élément non nul de cette ligne.*
- *Une matrice est dite échelonnée, si le pivot de chaque ligne est à droite (au sens strict) de celui de la ligne précédente. (i.e. le nombre de zéros situés avant le pivot augmente d'une ligne à l'autre).*
- *Un système est dit échelonné si la matrice qui lui est associée est échelonnée.*

Exemple 5.2.2.2

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & -7 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \boxed{\sqrt{2}} & 7 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et I_n sont échelonnées.

$2, 3$ et -2 sont des pivots de A.
1 et 4 sont des pivots de B.

$$\rightarrow E = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas échelonnées.}$$

5.2.3 Matrice échelonnée réduite ligne (e.r.l)

Définition 5.2.3.1

Une matrice est dite échelonnée réduite ligne si :

$$\begin{cases} \bullet \ \text{elle est échelonnée} \\ \text{et} \\ \bullet \ \text{les pivots sont tous égaux à 1.} \end{cases}$$

Exemple 5.2.3.2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I_n \text{ sont échelonnées réduites lignes.}$$

Remarque 5.2.3.3

Toute matrice échelonnée réduite ligne est échelonnée.

Définition 5.2.3.4

Deux matrices sont dites ligne-équivalentes si on passe de l'une à l'autre par des opérations élémentaires.

Proposition 5.2.3.5

Toute matrice non nulle est ligne-équivalente à une matrice échelonnée qui est ligne-équivalente à une matrice échelonnée réduite ligne.

Exemples 5.2.3.6

1)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&3&4&1\\ 1&1&3&2\\ 3&7&1&-6 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} L_2\\ L_1\\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&1&3&2\\ 2&3&4&1\\ 3&7&1&-6 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2-2L_1\\ L_3-3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&1&3&2\\ 0&\boxed{1}&-2&-3\\ 0&4&-8&-12 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3-4L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&1&3&2\\ 0&\boxed{1}&-2&-3\\ 0&0&0&0 \end{array}\right).$$

2)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3&1&0&1\\ -2&1&-1&0\\ -1&0&-2&-2 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} -L_3\\ \\ L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&0&2&2\\ -2&1&-1&0\\ 3&1&0&1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2+2L_1\\ L_3-3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&0&2&2\\ 0&\boxed{1}&3&4\\ 0&1&-6&-5 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3-L_2 \end{array} \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{échelonnée}}}{\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&0&2&2\\ 0&\boxed{1}&3&4\\ 0&0&-9&-9 \end{array}\right)} \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{1}{9}L_3 \end{array} \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{e.r.l}}}{\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1}&0&2&2\\ 0&\boxed{1}&3&4\\ 0&0&\boxed{1}&1 \end{array}\right)}.$$

En pratique : Cette opération traite la colonne 1, puis 2, puis 3.

→ On cherche le pivot $\boxed{1}$.

- Si le pivot est différent de 1, on cherche le $\boxed{1}$ des lignes de dessous, puis on permute les deux lignes.
- Si le $\boxed{1}$ ne figure par dans cette colonne, on utilise $L_i \longrightarrow \alpha L_i$ ($\alpha \neq 0$) ou $L_i \longrightarrow L_i + \alpha L_j$.

→ Puis on crée les zéros à partir du pivot $\boxed{1}$.

Attention ! si vous créez les zéros à partir d'un $\boxed{1}$ qui n'est pas un pivot, vous risquer de perdre les zéros déjà obtenus dans les colonnes précédentes.

5.2.4 Résolution d'un système linéaire

Définition 5.2.4.1

- *Dans un système échelonné, on appelle inconnue principale celle dont le coefficient sur une des lignes est un pivot.*
- *Une inconnue qui n'est pas principale est dite secondaire.*

Exemple 5.2.4.2

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & 3z & - & 5t & = & 3 \\ & & & & z & + & 2t & = & -5 \end{array} \right. \curvearrowright \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & & z & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -5 \end{array} \right) \end{array}.$$

x et z sont principales, y et t sont secondaires.

Solutions d'un système échelonné

Un système peut ne pas avoir de solutions, peut avoir une solution unique, ou une infinité de solutions.

- **Existence (compatibilité)**

  Un système échelonné admet des solutions si et seulement si il n'y a pas de pivot sur la colonne des seconds membres.

  Exemple 5.2.4.3

$$(S) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{array} \right)$$

  $\boxed{3}$ *est un pivot au second membre. Et (S) devient :* $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 3 \end{array} \right.$

  ce qui est impossible. Et donc $S = \emptyset$.

- **Unicité**

  Un système échelonné (compatible) admet une solution unique si et seulement si toutes les inconnues sont principales (i.e. il n'y a pas d'inconnue secondaire).

  Exemple 5.2.4.4

$$(S) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{array} \right). \textit{Donc } (S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ & & y & + & 2z & = & -1 \\ & & & & z & = & 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -17 \\ y = -9 \\ z = 4 \end{array} \right.$$

  Et donc $S = \{(-17, -9, 4)\}$.

- **Solutions multiples**

  Un système échelonné (compatible) admet des solutions multiples si et seulement si il possède au moins une inconnue secondaire.

  Pour exprimer l'ensemble de solutions, on calcule les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires.

Propriété 5.2.1
Si le nombre d'équations est strictement inférieur au nombre d'inconnues, alors le système admet des solutions multiples.

Exemple 5.2.4.5

$$(S) \curvearrowright \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -5 \end{array}\right) \end{array}.$$

Dans l'ensemble des solutions, x et z qui sont principales seront exprimées en fonction de y et t qui sont secondaires. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & 3z & - & 5t & = & 3 \\ & & & & z & + & 2t & = & -5 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2y - 3(-5 - 2t) + 5t \\ z = -5 - 2t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 18 + 2y + 11t \\ z = -5 - 2t \end{cases}$$

Donc $S = \{\big(\underset{\overset{\uparrow}{x}}{18 + 2y + 11t}, \underset{\overset{\uparrow}{y}}{y}, \underset{\overset{\uparrow}{z}}{-5 - 2t}, \underset{\overset{\uparrow}{t}}{t}\big) \ / \ y, t \in \mathbb{R}\}$.

Clairement, lorsque y et t varient dans $\mathbb{R}$, la solution varie aussi. On a donc une infinité de solutions.

5.2.5 Exemples d'application

Résolvons les systèmes linéaires suivants :

1) $(S_1) : \left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 4z & = & -9 \\ x & + & y & - & 2z & = & -1 \\ -x & - & 2y & + & 6z & = & 2 \end{array}\right.$

$$(S_1) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & -9 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 6 & 2 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} L_2 \\ L_1 \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & -9 \\ -1 & -2 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{r} \\ L_2-2L_1 \\ L_3+L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & -7 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ -L_3 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & -7 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{r} \\ \\ L_3+5L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ \\ \frac{-1}{12}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right).$$

On peut remarquer que toutes les inconnues sont principales, on aura donc une solution unique. En effet,

$$(S_1) \curvearrowright \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & -1 \\ & & y & - & 4z & = & -1 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1-y+2z=-2 \\ y=-1+4z=3 \\ z=1 \end{array}\right.$$

Et $S=\{(-2,3,1)\}$.

2) $(S_2):\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x & + & y & + & z & - & 2t & = & 1 \\ 2x & - & y & - & 3z & + & 7t & = & 2 \\ x & + & 3y & + & 5z & - & 2t & = & 3 \\ 3x & - & 2y & - & 5z & + & 7t & = & 1 \end{array}\right.$

$$(S_2) \curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & -5 & 7 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} L_3 \\ \\ L_1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -5 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{r} \\ L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1 \\ L_4-3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & -13 & 11 & -4 \\ 0 & -8 & -14 & 4 & -8 \\ 0 & -11 & -20 & 13 & -8 \end{array}\right).$$

Remarquons que, pour chercher le pivot $\boxed{1}$ dans la colonne deux, le 1 ne figure pas sur toute la colonne, on peut multiplier la ligne 2 par $-\dfrac{1}{7}$, mais on va trainer avec des quotients $-\frac{13}{7}$, $\frac{11}{7}$, $-\frac{4}{7}$ ce qui rend le calcul difficile. Vaut mieux chercher $\boxed{1}$ à travers l'opération $L_2 - L_3$. Et on obtient :

$$(S) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - L_3 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 7 & 4 \\ 0 & -8 & -14 & 4 & -8 \\ 0 & -11 & -20 & 13 & -8 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 + 8L_2 \\ L_4 + 11L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 60 & 24 \\ 0 & 0 & -9 & 90 & 36 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{1}{6}L_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -10 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & 90 & 36 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ \\ L_4 + 9L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On remarque que x, y et z sont principales, tandis que t est secondaire. x, y et z seront exprimées donc en fonction de t. On obtient :

$$(S_2) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 3y & + & 5z & - & 2t & = & 3 \\ & & y & + & z & + & 7t & = & 4 \\ & & & & z & - & 10t & = & -4 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 3y - 5z + 2t = -1 + 3t \\ y = 4 - z - 7t = 8 - 17t \\ z = 10t - 4 \end{array} \right. .$$

Et donc $S = \{(-1 + 3t, 8 - 17t, 10t - 4, t) \ / \ t \in \mathbb{R}\}$ est une infinité de solutions.

3) $(S_3) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & - & 2z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & z & = & -2 \\ 3x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \end{array} \right.$

$$(S_3) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 + 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \frac{1}{7}L_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 + 7L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right)$$

Remarquons qu'on a un pivot au second membre, la solution est donc le vide. En effet :

$$(S_3) \curvearrowright \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & - & 2z & = & 1 \\ & & y & - & \frac{3}{7}z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 1\ . \quad (\textit{impossible}) \end{array} \right.$$

Donc $S = \emptyset$.

Exercice 1
Soit $m \in \mathbb{R}$.
Résoudre le système (S) en discutant les valeurs du paramètre m.

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & 0 \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

Solution.

$$(S) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - mL_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 1 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\underset{(*)}{\uparrow}$$

$\boxed{Si\ m - 1 \neq 0}$ $(m \neq 1)$

$$(S) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \frac{1}{m-1}L_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{m-1} \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1 \end{array} \right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - (1-m)L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & (1-m)(2+m) & 2 \end{array} \right)$$

$$\underset{(**)}{\uparrow}$$

<u>Si $2 + m \neq 0$</u> $(m \neq -2)$

$$(S) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{(1-m)(2+m)}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{2}{(1-m)(2+m)} \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } (S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & 0 \\ & & y & - & z & = & \frac{1}{m-1} \\ & & & & z & = & \frac{2}{(1-m)(2+m)} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{m}{(1-m)(2+m)} \\ y = -\frac{m}{(1-m)(2+m)} \\ z = \frac{2}{(1-m)(2+m)}\ . \end{array} \right.$$

Et $S = \left\{ \left(-\frac{m}{(1-m)(2+m)}\ ,\ -\frac{m}{(1-m)(2+m)}\ ,\ \frac{2}{(1-m)(2+m)} \right) \right\}$.

<u>Si $m + 2 = 0$</u> $(m = -2)$
Vaut mieux remplacer $m = -2$ dans la dernière matrice $(**)$ obtenue juste avant de discuter le cas $m + 2 \neq 0$.

On obtient :

$$(S) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{array}\right) \Longrightarrow S = \emptyset, \ car :$$

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & 0 \\ & & y & - & z & = & \frac{1}{m-1} \\ & & & & 0 & = & 2 \end{array} \right. \quad (\textit{impossible}).$$

(Ceci puisqu'on a un pivot $\boxed{2}$ au second membre).

$\boxed{Si\ m-1=0}$ $(m=1)$

On remplace $m=1$ dans la dernière matrice obtenue $(*)$ juste avant de discuter le cas $m-1 \neq 0$. On obtient :

$$(S) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array} \right. \quad (\textit{impossible}).$$

Donc $S = \emptyset$.

<u>Conclusion</u>

- Si $m \in \{-2, 1\}$, alors $S = \emptyset$.
- Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, alors la solution est unique.

Exercice 2

Résoudre les systèmes suivants :

1) $(S_1) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 5y & - & 2z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \end{array} \right.$

2) $(S_2) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 3z & + & 2t & = & -2 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & + & t & = & -1 \\ 3x & + & 7y & + & z & - & 6t & = & 6 \end{array} \right.$

3) $(S_3) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 5y & & & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \end{array} \right.$

Solution.

1)

$$(S_1) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ -L_3 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{r} \\ \\ L_3 - 4L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{3}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{7}{3} \end{array}\right)$$

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & -1 \\ & & & & z & = & \frac{7}{3} \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{cases} x = z - y = 1 \\ y = -1 + z = \frac{4}{3} \\ z = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Donc $S = \left\{ \left(1, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) \right\}$.

2) Dans (S_2). Notons que le nombre d'équations est strictement inférieur à celui d'inconnues, on aura donc une infinité de solutions.

$$(S_2) \curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & -6 & 6 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & -12 & 12 \end{array}\right)$$

On peut remarquer que $L_3 = 4L_2$, on peut donc supprimer L_2 ou L_3 (puisqu'il s'agit de la même équation), sinon, L_3 va s'annuler par calcul ($L_3 \Leftrightarrow 0 = 0$).
On obtient dans ce cas :

$$(S_2) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ \\ L_3 - 4L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(S_2) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 3z & + & 2t & = & -2 \\ & & y & - & 2z & - & 3t & = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{cases} x = -5 - 5z - 5t \\ y = 3 + 2z + 3t \end{cases}$$

$$S = \{(\overset{x}{\overset{\downarrow}{-5 - 5z - 5t}}\, ,\, \overset{y}{\overset{\downarrow}{3 + 2z + 3t}}\, , z, t) \ / \ z, t \in \mathbb{R}\}.$$

3)

$$(S_3) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \frac{1}{4}L_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 + 4L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \end{array}\right).$$

On a un pivot $\boxed{4}$ au second membre. Donc $S = \emptyset$. En effet :

$$(S_3) : \left\{ \begin{array}{ccccccl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & - & \frac{1}{4}z & = & \frac{3}{4} \\ & & & & 0 & = & 4 \quad (\textit{impossible}). \end{array} \right.$$

5.2.6 Application (Inversion d'une matrice par la méthode de Gauss)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On aimerait inverser A.
Le principe de cette méthode consiste à appliquer des transformations de Gauss sur les lignes de la matrice augmentée $(A \mid I_n)$ d'ordre $(n, 2n)$, pour aboutir à $(I_n \mid B)$. Dans ce cas, A sera inversible et $A^{-1} = B$.

Exemples 5.2.6.1

1) *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$(A \mid I_3) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} L_2 \\ L_1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 + L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ -L_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} L_1 - 2L_2 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{2}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} L_1 - L_3 \\ L_2 + L_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2) *Soit* $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(B \mid I_3): \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} L_2 \\ L_1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - 3L_1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{4}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} L_1 - L_3 \\ L_2 + 3L_1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Donc $B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5.3 Résolution d'un système par la méthode de Cramer

5.3.1 Résolution d'un système de Cramer (cas particulier)(et exemples)

Définition 5.3.1.1
Un système de Cramer est un système linéaire, dont la matrice associée est carrée et inversible.

Exemples 5.3.1.2

1) $(S_1) : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 3y + 3z = -2 \\ -x + 3y + z = 3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ B}}.$

A : la matrice associée à (S) est carrée et est inversible. Donc (S_1) est de Cramer.

2) $(S_2) : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + 3z = -2 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ & & \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \\ -2 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ B}}.$

A est non carrée, donc (S_2) est non de Cramer.

3) $(S_3) : \begin{cases} 3x + 12y = 4 \\ x + 4y = 1 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

A est carrée mais non inversible ($\det A = 0$), donc (S_3) est non de Cramer.

Théorème 5.3.1.3
Tout système de Cramer admet une solution unique.

Démonstration
Soit (S) un système de Cramer. $(S) \Leftrightarrow A.X = B$.
La résolution de (S) est équivalente à celle de l'équation matricielle $A.X = B$ où A est carrée et inversible. Donc $A.X = B \Rightarrow \underbrace{A^{-1}.A}_{\substack{\shortparallel \\ I}}.X = A^{-1}.B \Rightarrow X = A^{-1}.B$ qui est une solution unique puisque A^{-1} et B sont uniques.

Résolution d'un système de Cramer

Soit (S) un système de Cramer à n équations et à n indéterminées $(S) \Leftrightarrow A.X = B$, où $\det A \neq 0$. ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

→ Soit $\Delta = \det A$, écrit sous forme d'un tableau.

→ Pour toute inconnue x_i, on note par Δ_{x_i}, le déterminant d'ordre n obtenu, en remplaçant dans Δ, la colonne des coefficients de x_i par B.

→ La solution (unique) du système est donnée par :

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta} \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Exemple 5.3.1.4
Résolvons le système (S) suivant par la méthode de Cramer,

$$(S) : \begin{cases} 2x & - & 5y & + & 4z & = & -3 \\ x & - & 2y & + & z & = & 5 \\ x & - & 4y & + & 6z & = & 10 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ B}}.$$

$$\to \ \Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

$$\to \ \Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 10 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 124.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & 6 \end{vmatrix} = 75.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -4 & 10 \end{vmatrix} = 31.$$

$$\to \begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{124}{1} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{75}{1} \\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{31}{1} \end{cases} \implies S = \{(124, 75, 31)\}.$$

5.3.2 Résolution d'un système quelconque (cas général)(et exemples)

Soit (S) un système. $(S) \Leftrightarrow A.X = B$.
Si (S) est non de Cramer, alors deux cas se présentent :

$$(A \text{ est non carrée}) \textit{ ou } (A \text{ est carrée et } \det A = 0).$$

Dans ces deux cas, on extrait de (S) le plus grand système de Cramer (S_0) qui admettra une solution unique, sur laquelle on se basera pour chercher la solution finale.

Les exemples suivants traitent tous les cas possibles.

Exemple 1 (A est non carrée)

$$(S):\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 5y & + & 4z & + & t & = & -3\\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & 5\\ x & - & 4y & + & 6z & + & 2t & = & 10\end{array}\right. \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}2 & -5 & 4 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -1\\ 1 & -4 & 6 & 2\end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{A}}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 5\\ 10\end{pmatrix}.$$

→ A est non carrée $\Rightarrow$ (S) non de Cramer.

→ Cherchons donc le plus grand système de Cramer $(S_0)\subset(S)$; ce qui revient à chercher le plus grand déterminant non nul inclus dans A. (On peut avoir plus d'un choix).

→ $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -5 & 4\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -4 & 6\end{vmatrix}=1\neq 0$. Donc le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 5y & + & 4z & = & -3 & - & t\\ x & - & 2y & + & z & = & 5 & + & t\\ x & - & 4y & + & 6z & = & 10 & - & 2t\end{array}\right.$ est de Cramer.

(Attention ! le dernier système obtenu a pour inconnues, x, y et z. Le t n'est pas une inconnue. Par contre, (S) a pour inconnues x, y, z et t).

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{\Delta_x}{1}=\begin{vmatrix}-3-t & -5 & 4\\ 5+t & -2 & 1\\ 10-2t & -4 & 6\end{vmatrix}=16t+124\\[2em] y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{\Delta_y}{1}=\begin{vmatrix}2 & -3-t & 4\\ 1 & 5+t & 1\\ 1 & 10-2t & 6\end{vmatrix}=9t+75\\[2em] z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=\dfrac{\Delta_z}{1}=\begin{vmatrix}2 & -5 & -3-t\\ 1 & -2 & 5+t\\ 1 & -4 & 10-2t\end{vmatrix}=3t+31.\end{array}\right.$$

Donc $S=\{(16t+124, 9t+75, 3t+31, t)\ /\ t\in\mathbb{R}\}$.

<u>Autre choix</u>

$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 6 & 2\end{vmatrix}=9\neq 0$. Donc le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 4z & + & t & = & -3 & + & 5y\\ x & + & z & - & t & = & 5 & + & 2y\\ x & + & 6z & + & 2t & = & 10 & + & 4y\end{array}\right.$ est de Cramer (la solution sera en fonction de y).

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{1}{9}\begin{vmatrix} -3+5y & 4 & 1 \\ 5+2y & 1 & -1 \\ 10+4y & 6 & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{9}(16y-84) \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{1}{9}\begin{vmatrix} 2 & -3+5y & 1 \\ 1 & 5+2y & -1 \\ 1 & 10+4y & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{9}(3y+54) \\ t = \dfrac{\Delta_t}{\Delta} = \dfrac{1}{9}\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3+5y \\ 1 & 1 & 5+2y \\ 1 & 6 & 10+4y \end{vmatrix} = \dfrac{1}{9}(y-75). \end{cases}$$

Donc $S = \{(\frac{1}{9}(16y-84), y, \frac{1}{9}(3y+54), \frac{1}{9}(y-75)\,) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$.

Autre choix

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Donc le système $\begin{cases} 2x - 5y + t = -3 - 4z \\ x - 2y - t = 5 - z \\ x - 4y + 2t = 10 - 6z \end{cases}$ est de Cramer. Et la solution finale sera en fonction de z.

Autre choix

$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$. Donc le système $\begin{cases} -5y + 4z + t = -3 - 2x \\ -2y + z - t = 5 - x \\ -4y + 6z + 2t = 10 - x \end{cases}$ est de Cramer. Et la solution finale sera en fonction de x.

Exemple 2 (A est non carrée)

$$(S) : \begin{cases} x - 3y - 2z = -1 & (E_1) \\ 2x + y - 4z = 3 & (E_2) \\ x + 4y - 2z = 4 & (E_3) \\ x + y - z = 1 & (E_4) \end{cases} \iff \underbrace{\overset{(4,3)}{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}}_{\underset{A}{\shortparallel}} \overset{(3,1)}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \overset{(4,1)}{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Ce choix est non convenable puisqu'il correspond à un système non de Cramer.

Faisons un autre choix.

$\rightarrow$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$. Donc le système $(S_0) : \begin{cases} x - 3y - 2z = -1 & (E_1) \\ 2x + y - 4z = 3 & (E_2) \\ x + y - z = 1 & (E_4) \end{cases}$

est de Cramer. Et on a :

$$(S) : \begin{cases} (S_0) : \begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \\ (E_3) : \quad x + 4y - 2z = 4. \end{cases}$$

$\rightarrow$ (S_0) admet pour solution $S_0 = \left\{ \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) \right\} = \left\{ \left(-\frac{4}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{6}{7} \right) \right\}$.

$\rightarrow$ On remplace cette solution partielle dans l'équation restante (E_3) (pour voir si (E_3) accepte cette solution ou non).

Dans (E_3) : $-\frac{4}{7} + 4 \times \frac{5}{7} - 2 \times \left(-\frac{6}{7} \right) = 4$.

(E_3) accepte bien la solution, donc la solution finale est

$$S = \left\{ \left(-\frac{4}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{6}{7} \right) \right\}.$$

Exemple 3 (A est non carrée)

On reprend le même exemple 2, avec un changement de E_3.

$$(S) : \begin{cases} (S_0) : \begin{cases} x - 3y - 2z = -1 & (E_1) \\ 2x + y - 4z = 3 & (E_2) \\ x + y - z = 1 & (E_4) \end{cases} \\ \quad\quad\;\; x + 4y - 2z = 15 \quad (E_3') \end{cases}$$

Le changement est lorsqu'on remplace la solution S_0 dans l'équation restante (E_3'), on obtient $4 = 15$ ce qui est impossible. (E_3') n'accepte pas donc la solution. Par suite $S = \emptyset$.

Exemple 4 (A est carrée et $\det A = 0$)

$$(S) : \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -3 \\ x - 2y + z = 5 \\ x - 4y + 5z = m \quad (\text{où } m \in \mathbb{R}) \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}}_{\underset{A}{\shortparallel}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ m \end{pmatrix}.$$

$\rightarrow$ $\det A = 0 \Rightarrow (S)$ non de Cramer.

→ Cherchons le plus grand déterminant non nul qu'on peut extraire de A.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Donc

$$(S) : \begin{cases} (S_0) : \boxed{\begin{cases} 2x - 5y = -3 - 4z \\ x - 2y = 5 - z \end{cases}} \longleftarrow \textit{de Cramer.} \\ (E) : \quad x - 4y + 5z = m \end{cases}$$

$$\rightarrow (S_0) : \begin{cases} 2x - 5y = -3 - 4z \\ x - 2y = 5 - z \end{cases} \; de\, Cramer \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \begin{vmatrix} -3-4z & -5 \\ 5-z & -2 \end{vmatrix} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \begin{vmatrix} 2 & -3-4z \\ 1 & 5-z \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 2z + 31 \\ y = 2z + 13\,. \end{cases}$$

→ On remplace cette solution dans l'équation (E), on obtient :

$$3z + 31 - 8z - 52 + 5z = m \Longleftrightarrow -21 = m.$$

<u>Si $m \neq -21$</u> (E) n'accepte pas la solution et donc $S = \emptyset$.

<u>Si $m = -21$</u> (E) accepte la solution, et donc $S = \{(3z + 31, 2z + 13, z) \; / \; z \in \mathbb{R}\}$.

Remarque

Lorsqu'on remplace la solution de (S_0) dans l'équation restante (E), "z" doit disparaitre. Sinon, "z" aura une valeur, par suite x et y l'auront aussi et (S) sera donc de Cramer, ce qui est impossible.

Exemple 5

$$\text{Soit } (S) : \begin{cases} (S_0)\{ \; \textit{Système de Cramer} \\ (E_1) \\ (E_2) \end{cases}$$

Si (S) est un système formé par un système (S_0) de Cramer et des équations restantes, alors la solution de (S_0) sera une solution pour tout le système (S) si toutes les équations restantes l'acceptent.

Si la solution ne vérifie pas l'une des équations restantes, alors $S = \emptyset$.