Chapitre 2

Calcul matriciel

Motivation

En général, pour résoudre un système (S) à plusieurs équations et à plusieurs indéterminées, on peut nous ramener à résoudre une seule équation (sera dite matricielle) de la forme $A.X = B$. (où A et B seront deux matrices connues et X une matrice inconnue).

Exemple

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & \sqrt{2}y & - & z & = & 280 \end{array} \right. \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 280 \end{pmatrix}}_{B}$$

En fait :
Les matrices sont des objets mathématiques que l'on rencontre très couramment en mathématiques, que ce soit en algèbre linéaire ou en géométrie.

Leurs intérêts sont notamment les nombreuses interprétations qu'on peut leur donner, en outre le nombre de problèmes qu'elles permettent de résoudre.

N.B. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et m et n deux entiers naturels non nuls.

2.1 Définitions et notations

Définitions 2.1.1

→ *Une matrice A est un tableau de nombres disposés en lignes et en colonnes. Elle est dite d'ordre (ou de type, ou de taille) (m, n) si elle est constituée de m lignes et n colonnes.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow L_i(A) = la\ i^{\text{ème}}\ ligne\ de\ A$$

$$\uparrow$$
$$C_j(A) = la\ j^{\text{ème}}\ colonne\ de\ A$$

On note :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$$

→ *a_{ij} s'appelle le terme (ou le coefficient) de la matrice A.*

→ *Le terme a_{ij} se trouve au croisement de $L_i(A)$ et $C_j(A)$.*

Exemple 2.1.2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ *est une matrice de type* $(2,3)$.
$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ *est une matrice de type* $(2,2)$.

→ Deux matrices sont dites égales si elles ont le même ordre et les coefficients correspondants sont égaux. Ce qui équivaut à dire :
Si $A = (a_{ij})$ est d'ordre (m,n) et $B = (b_{ij})$ est d'ordre (p,q), alors :

$$A = B \iff (m,n) = (p,q) \ \ et \ \ a_{ij} = b_{ij},\ \forall i \in \{1,...,m=p\},\ \forall j \in \{1,...,n=q\}.$$

→ Si $m = n$, alors A est dite carrée d'ordre n. (le nombre de lignes de A est égal à celui de colonnes).
Dans ce cas :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{La diagonale de } A.$$

- $\{a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}\}$ s'appelle la diagonale principale de A.
- Les éléments a_{ii} s'appellent les éléments diagonaux de A.
- Les éléments a_{ij} pour $i \neq j$, s'appellent les éléments hors diagonaux de A.
- On appelle trace de A, qu'on note $tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ = la somme de tous les éléments diagonaux de A.

Notations

→ $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de type (m,n) et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

→ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemples 2.1.3

- $A = \begin{pmatrix} 2i & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ ($B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ *aussi*).

2.2 Matrices de types particuliers

Matrice ligne

Définition 2.2.1
Une matrice ligne (ou uniligne) est une matrice de type $(1, n)$.

Exemple 2.2.2
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$.
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (*Attention ! à ne pas confondre la matrice* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *et le vecteur* $(1, 0, 4)$ *de* $\mathbb{R}^3$).

Matrice colonne

Définition 2.2.3
Une matrice colonne (ou unicolonne) est une matrice de type $(m, 1)$.

Exemple 2.2.4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire (supérieure/inférieure)

Définitions 2.2.5
→ *Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée* $U = (u_{ij}) \ / \ u_{ij} = 0 \ \forall i > j$.

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

→ *Une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée* $L = (l_{ij})\ /\ l_{ij} = 0\ \ \forall i < j$.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{n(n-1)} & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 2.2.6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- *A et B sont triangulaires supérieures.*
- *C est triangulaire inférieure.*

Matrice diagonale

Définition 2.2.7
Une matrice diagonale est une matrice carrée $D = (d_{ij})\ /\ d_{ij} = 0\ \ \forall i \neq j$.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}\ ,\ E = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}\ ,\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice unité

Définition 2.2.9
La matrice unité est la matrice carrée notée I_n (ou simplement I) définie par :

$$I_n = (e_{ij}) = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e_{ij} est dit le symbole de Kronecker).

Exemple 2.2.10

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}).$$

Matrice nulle

Définition 2.2.11
La matrice nulle est une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ / $a_{ij} = 0 \ \forall i, j$. *On la note* $O \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 2.2.12

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Matrice symétrique/antisymétrique

Définitions 2.2.13

→ *Soit* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
On appelle matrice transposée de A, *qu'on note* ${}^tA$ (*ou* A^T), *la matrice d'ordre* (n, m), *obtenue en interchangeant −dans l'ordre− les lignes et les colonnes de* A.

Exemple 2.2.14

$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ *est de type* $(2, 3)$.

${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ *est de type* $(3, 2)$.

→ *Une matrice carrée* A *est dite symétrique si* ${}^tA = A$.

→ *Une matrice carrée* A *est dite antisymétrique si* ${}^tA = -A$. (*Dans ce cas,* $a_{ii} = 0$).

Exemples 2.2.15

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ *est symétrique.*

$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ *est antisymétrique.*

2.3 Opérations sur les matrices

On définit sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ deux lois de composition, l'une interne (l'addition $+$) et la seconde externe (.) comme suit :
$\forall A = (a_{ij})$ *et* $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \ et \ \alpha.A = (\alpha\, a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

Exemple 2.3.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$et \quad -2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -14 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriétés 2.3.2
Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a :

1)
- $A + B = B + A$.
- $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- *O est l'élément neutre pour l'addition ($A + O = A$).*
- *Toute matrice $A = (a_{ij})$ admet un symétrique $-A = (-a_{ij})$. Et on a :*

$$A + (-A) = O.$$

(Ainsi $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif).

2)
- $1.A = A$.
- $\alpha.(\beta.A) = (\alpha\beta).A$.
- $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$.
- $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$.

D'où le résultat suivant :

Proposition 2.3.3
$(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $m \times n$.

Démonstration (Dans le cas $(m, n) = (2, 3)$)
Montrons que $dim\, \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) = 2 \times 3 = 6$. En effet :

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_1} + a_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_2} + a_{13} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_3} + a_{21} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_4} + a_{22} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_5}$$
$$+ a_{23} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_6}$$

Donc $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. On vérifie facilement que $\mathcal{B}$ est libre. Par suite, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. D'où $dim\, \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) = 6$.
$\mathcal{B}$ est dite la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Propriétés 2.3.4
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

2) ${}^t({}^tA) = A$.

3) ${}^t(\alpha.A) = \alpha.({}^tA)$.

Démonstration (Dans le cas $m = n = 2$)
Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

1)

$$ {}^t(A+B) = {}^t\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right] = {}^t\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = {}^tA + {}^tB.$$

2)

$$ {}^t({}^tA) = {}^t\left[{}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = {}^t\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A.$$

3)

$$ {}^t(\alpha.A) = {}^t\left[\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = {}^t\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha.({}^tA).$$

Exercice 2.3.5
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer qu'il existe une matrice symétrique S et une matrice antisymétrique T telles que : $A = S + T$.

2.4 Produit matriciel

Produit de deux matrices de type L.C

Soient $L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ une matrice ligne et $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne.

Le produit $L.C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$

Remarque 2.4.1
Le produit $L.C$ n'est possible que si L et C contiennent le même nombre d'éléments.

Exemple 2.4.2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 2 + (-1) \times (-3) + 0 \times \sqrt{2} + (-8) \times 0 = 5.$$

Produit de deux matrices

Exemple 2.4.3
1) *Soient*

$$A = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad \sqrt{2}} \\ \boxed{-2 \quad -1 \quad 0} \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ 0 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{array}} \end{array} \right) \end{array}$$

Le produit matriciel $A.B$, $-$étant de type $L.C-$ s'effectue en considérant les lignes L_1 et L_2 de A, et les colonnes C_1, C_2 et C_3 de B.

Et pour que le produit des lignes L_i et des colonnes C_j soit possible, il faut que le nombre d'éléments de L_i soit égal à celui de C_j. Ce qui veut dire que le nombre de colonnes de A soit le même que celui des lignes de B. Donc, si A est de type (m, n), B doit être de type (n, q). Par suite :

$$A.B = \begin{array}{c} L_1 \\ \\ L_2 \end{array} \underset{\downarrow \atop (2,\boxed{3})}{\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad \sqrt{2}} \\ \\ \boxed{-2 \quad -1 \quad 0} \end{pmatrix}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \underset{\downarrow \atop (\boxed{3},3)}{\left(\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ 0 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{array}} \end{array} \right)} \end{array} = \begin{pmatrix} L_1C_1 & L_1C_2 & L_1C_3 \\ L_2C_1 & L_2C_2 & L_2C_3 \end{pmatrix} = \underset{\downarrow \atop (2,3)}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}}$$

2)

$$\underset{(3,\boxed{2})}{\underset{\downarrow}{\begin{pmatrix} \boxed{i \quad 0} \\ \boxed{1 \quad -i} \\ \boxed{1 \quad 1} \end{pmatrix}}} \underset{(\boxed{2},1)}{\underset{\downarrow}{\begin{pmatrix} i \\ \\ 1 \end{pmatrix}}} = \underset{(3,1)}{\underset{\downarrow}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ i+1 \end{pmatrix}}}$$

<u>**Généralisation**</u>

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

→ Si $n \neq p$, alors le produit $A.B$ est impossible.

→ Si $n = p$, alors $A.B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$ et $A.B = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq q}}$ telle que :

$$\alpha_{ij} = L_i(A).C_j(B).$$

Propriétés 2.4.4

Soient A, B, C des matrices et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Quand le produit matriciel est possible, on a :

- $A.(B.C) = (A.B).C$.
- $(\alpha.A).B = A.(\alpha.B) = \alpha.(A.B)$.
- $A.(B + C) = A.B + A.C$.
- $A.I_n = A$.
- ${}^t(A.B) = {}^tB\,.\,{}^tA$.
- *En général,* $A.B \neq B.A$.
- *Le produit de deux matrices non nuls peut être nul. (Autrement dit :* $A.B = 0 \not\Longrightarrow A = 0$ *ou* $B = 0$).

Exemple 2.4.5

Soients $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

→ $A.B \neq B.A$.

→ $A \neq 0,\ B \neq 0$, *et pourtant* $A.B = 0$.

2.5 Matrices inversibles

Définition 2.5.1
Une matrice A d'ordre n est dite inversible (ou régulière), s'il existe une matrice B d'ordre n telle que $A.B = B.A = I_n$.
B est dite la matrice inverse de A et est notée A^{-1}.

→ *Si la matrice inverse existe, alors elle est unique.*

→ *Une matrice non inversible est dite singulière.*

Théorème 2.5.2
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$A \text{ est inversible} \iff A \text{ est inversible à gauche} \iff A \text{ est inversible à droite.}$$

Remarque 2.5.3
→ *Grâce au théorème ci-dessus, pour montrer qu'une matrice A est inversible, il suffit de montrer que : $\exists\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ /\ A.B = I_n$ (ou $B.A = I_n$).*

→ *$GL_n(\mathbb{K}) = \{\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ /\ A$ est inversible$\}$, muni de la loi de composition $''$Produit matriciel$''$, est un groupe non commutatif.*

Définition 2.5.4 (matrice orthogonale)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite orthogonale si $A.{}^tA = {}^tA.A = I_n$.

Remarque 2.5.5
Toute matrice orthogonale A est inversible, et $A^{-1} = {}^tA$.

Exemple 2.5.6 (exercice)
1) *Soient A, B et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ /\ 4AB - 8AC + 3I = 0$.*
Montrons que A est inversible.
On a :

$$\begin{aligned} 4AB - 8AC = -3I &\iff -\frac{4}{3}AB + \frac{8}{3}AC = I \\ &\iff A\big(-\frac{4}{3}\,B + \frac{8}{3}\,C\ \big) = I. \end{aligned}$$

Donc A est inversible et son inverse $A^{-1} = -\frac{4}{3}B + \frac{8}{3}C$.

2) *Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.*

a) *Montrons que $A^2 = 2A - I$. En effet :*

- $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

- $$\begin{aligned} 2A - I &= 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a bien $A^2 = 2A - I$.

b) *Montrons que* A *est inversible. Et calculons* A^{-1}.

- *On a :*

$$\begin{aligned} A^2 = 2A - I &\iff A^2 - 2A = -I \iff -A^2 + 2A = I \\ &\iff A(-A + 2I\,) = I. \end{aligned}$$

Donc A *est inversible et* $A^{-1} = -A + 2I$.

- $A^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

2.6 Puissances d'une matrice

2.6.1 Puissances positives

Définition 2.6.1.1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/\; A \neq 0$. *Et soit* $p \in \mathbb{N}^*$.
$A^0 = I_n$.
$A^2 = A.A$.
$A^3 = A.A.A = A^2.A = A.A^2$.
$\vdots$
$A^p = A.A \ldots A$, p *fois.*

Propriétés 2.6.1.2
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $p, q \in \mathbb{N}$. *On a :*

1) $A^p.A^q = A^{p+q}$.

2) $(A^p)^q = A^{pq}$.

Exemple 2.6.1.3

Soit $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$ *une matrice carrée diagonale.*

Et soit $p \in \mathbb{N}$. *On a :*

$$D^p = \begin{pmatrix} d_{11}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^p \end{pmatrix}.$$

En effet : (démonstration par récurrence sur p *).*

- $p = 0$, *on a* $D^0 = I_n = \begin{pmatrix} d_{11}^0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^0 \end{pmatrix}.$
- *Supposons que* $D^p = \begin{pmatrix} d_{11}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^p \end{pmatrix}.$
- *On a :*

$$D^{p+1} = D^p.D = \begin{pmatrix} d_{11}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}^{p+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^{p+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^{p+1} \end{pmatrix}.$$

2.6.2 Formule de binôme de Newton

→ Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ / $A.B = B.A$. Alors,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \, A^k \, B^{p-k} \qquad \text{où } \; C_p^k = \frac{p!}{k!\,(p-k)!}\,.$$

→ Si $B = I$. On a toujours $A.I = A = I.A$. Par suite :

$$(A+I)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \, A^k\,.$$

Cas particuliers :

$$\rightarrow\ p=2\,;\qquad \begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = A.A+A.B+B.A+B.B\,.\\ &= A^2+\underbrace{A.B+B.A}_{\shortparallel}+B^2\\ &= \quad A^2+2A.B+B^2 \qquad si\ A.B=B.A\,.\end{aligned}$$

$$\rightarrow\qquad \begin{aligned}(A+B)(A-B) &= A.A\underbrace{-A.B+B.A}_{\shortparallel}-B.B\,.\\ &= \quad A^2\ +\ 0\ -\ B^2 \qquad si\ A.B=B.A\,.\\ &= A^2-B^2\,.\end{aligned}$$

Exemple 2.6.2.1

Soient $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. *On voit que :*

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\neq(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

2.6.3 Matrice idempotente

Définition 2.6.3.1
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *A est dite idempotente si* $A^2=A$.

Exemple 2.6.3.2 (Exercice)
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que A est idempotente. Montrons que* I_n-A *est aussi idempotente. En effet :*

$$\begin{aligned}(I_n-A)^2 &= I_n^2-2I_nA+A^2 \qquad (\,puisque\ I_n.A=A.I_n\,)\\ &= I_n-2A+A\\ &= I_n-A\,.\end{aligned}$$

2.6.4 Matrice nilpotente

Définition 2.6.4.1
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est dite nilpotente si $\exists p\in\mathbb{N}^*\ /\ A^p=0$ *et* $A^{p-1}\neq 0$. *p est dit le degré de nilpotence de A.*

Exemple 2.6.4.2

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\ est\ nilpotente\ de\ degré\ 2.\ (\,car\ A^2=0\ et\ A\neq 0\,).$$

2.6.5 Matrices semblables

Définitions 2.6.5.1

→ *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

A et B sont dites équivalentes s'il existe deux matrices inversibles $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ / $B = Q.A.P$.

→ *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ / $B = P^{-1}.A.P$.

Remarque 2.6.5.2

→ *L'intérêt de la notion de matrices semblables, c'est qu'on peut calculer les puissances de B si celles de A sont faciles à calculer, (par exemple si A est diagonale). On obtient :*

$$B^k = P^{-1}A\underbrace{P\,.\,P^{-1}}_{\overset{\shortparallel}{I_n}}A\underbrace{P}_{\overset{\shortparallel}{I_n}}\cdots\underbrace{P^{-1}}_{\overset{\shortparallel}{I_n}}.A.P = P^{-1}.\underbrace{A\ldots A}_{k\ fois}.P = P^{-1}.A^k.P\,.$$

→ *Cette notion est très utile dans le chapitre de diagonalisation.*

2.6.6 Puissances négatives d'une matrice inversible

Définition 2.6.6.1

Soit A une matrice inversible. $A^{-p} = \left(A^{-1}\right)^p, \ \forall p \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.6.6.2

Soient A et B deux matrices inversibles de même ordre. On a :

1) $A.B$ *est une matrice inversible et* $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

2) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration.

1) On a :

$$\begin{aligned}(A.B).(B^{-1}.A^{-1}) &= A.B.B^{-1}.A^{-1} = A.(B.B^{-1}).A^{-1} = A.I_n.A^{-1}\\ &= A.A^{-1} = I_n.\end{aligned}$$

2) On a : $({}^tA).{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}.A) = {}^tI_n = I_n$.

Remarque 2.6.6.3

→ *Attention ! on ne peut pas simplifier par une matrice.* ($A.B = A.C \not\Longrightarrow B = C$).

→ *Mais si A est inversible, alors :* $A.B = A.C \Longrightarrow B = C$. *En effet :*
$A.B = A.C \Longrightarrow \underbrace{A^{-1}.A}_{\overset{\shortparallel}{I_n}}.B = \underbrace{A^{-1}.A}_{\overset{\shortparallel}{I_n}}.C \Longrightarrow I_n.B = I_n.C \Longrightarrow B = C$.

(l'autre implication est évidente : $B = C \Longrightarrow A.B = A.C$).

Exemple 2.6.6.4
Soient
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\ et\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
On a :
$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A.C\,.$$
Pourtant $B \neq C$.

Exercice.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que si A est nilpotente, alors elle n'est pas inversible .

2) On suppose que : $\exists p \in \mathbb{N}^* \ /\ A^p + A + I = 0$.
Montrer que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.

Chapitre 3

Déterminant d'une matrice

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'application notée det ;

$$\begin{array}{rcccl} \det & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & \textit{matrice } A & \longmapsto & \det(A) \text{ noté } |A| \end{array}$$

où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$).
Cette application ne s'annule que lorsque la matrice A est non inversible. Ainsi, on a :

$$\det A \neq 0 \Longleftrightarrow A \textit{ est} \text{ inversible.}$$

3.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 1

Soit $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$; $A = (a)$. Alors $\det A = |a| = a$.

Exemple 3.1.1
$A = (-7)$; $\det A = |-7| = -7$.

Attention : la notation du déterminant n'a rien à voir avec la valeur absolue.

3.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Ainsi, $\det A$ est le produit des éléments de la diagonale principale moins celui des éléments de la diagonale non principale.

Exemple 3.2.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \;;\quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0.$$

Donc A est inversible.

3.3 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

3.3.1 Méthode de Sarrus (pour l'ordre 3)

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$
$$= (\, a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\,) - (\, a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\,).$$

Ainsi, pour calculer $\det A$, on recopie les deux premières colonnes, et on calcule la somme des produits des éléments des trois diagonales principales moins la somme des produits des éléments des trois diagonales non principales.

Remarque 3.3.1.1
On peut procéder de la même manière en recopiant les deux premières lignes.

Exemple 3.3.1.2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right.$$
$$= \Big(3 \times 0 \times 1 + (-1) \times (-2) \times 1 + 1 \times 1 \times 2 \Big) - \Big(1 \times 0 \times 1 + 2 \times (-2) \times 3 + 1 \times 1 \times (-1) \Big)$$
$$= 4 - (-13) = 17 \neq 0.$$

Donc A est inversible.

3.3.2 Méthode des cofacteurs

On développe le calcul par rapport à une ligne ou une colonne quelconque, soit par exemple :

$\rightarrow$ Par rapport à la $1^{ère}$ ligne :

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Par rapport à la $2^{ème}$ colonne :

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Exemple 3.3.2.1

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +3 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 17.$$

Exemple 3.3.2.2

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 17.$$

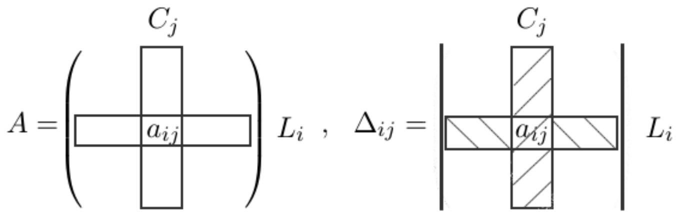
3.4 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

La méthode des cofacteurs est une méthode générale valable pour tout ordre n.

Enonçons d'abord quelques définitions utiles pour décrire cette méthode.

Définition 3.4.1
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\rightarrow$ *On appelle mineur de l'élément* a_{ij} *qu'on note* Δ_{ij}, *le déterminant de la matrice carrée d'ordre* $n-1$ *obtenue en supprimant la ligne* L_i *et la colonne* C_j.



→ *On appelle cofacteur de* a_{ij}, *le scalaire* $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$. *Ainsi* $\det A = \sum_{a_{ij}\in V} a_{ij}A_{ij}$ *où* V *désigne une ligne ou une colonne choisie.*

Exemple 3.4.2 ($V = L_i$)

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{i+1}a_{i1}\Delta_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}\Delta_{in}\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}.\end{aligned}$$

Exemple 3.4.3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 & 3\\ 0 & 4 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 4 & 0\\ 3 & 2 & 7 & 1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.

→ *Développons le calcul suivant la* $1^{\text{ère}}$ *colonne :*

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} \boxed{1} & 8 & 5 & 3\\ \boxed{0} & 4 & 2 & 2\\ \boxed{2} & 0 & 4 & 0\\ \boxed{3} & 2 & 7 & 1\end{vmatrix}\\ &= 1\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 7 & 1\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 8 & 5 & 3\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 7 & 1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 8 & 5 & 3\\ 4 & 2 & 2\\ 2 & 7 & 1\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 8 & 5 & 3\\ 4 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 0\end{vmatrix} = 0\end{aligned}$$

→ *Développons le calcul suivant la* $3^{\text{ème}}$ *ligne :*

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 & 3\\ 0 & 4 & 2 & 2\\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{4} & \boxed{0}\\ 3 & 2 & 7 & 1\end{vmatrix}\\ &= 2\begin{vmatrix} 8 & 5 & 3\\ 4 & 2 & 2\\ 2 & 7 & 1\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 8 & 3\\ 0 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5\\ 0 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 7\end{vmatrix} = 0\end{aligned}$$

Remarques 3.4.4

1) *Le meilleur choix de la ligne (ou la colonne) par rapport à laquelle sera développé le calcul, est celui qui contient le maximum de chiffres 0. Il est donc commode de créer des zéros dans ce déterminant sans lui changer sa valeur.*

2) *On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une ligne (respectivement une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (respectivement colonnes).*
Autrement dit : les seuls opérations qui ne changent pas la valeur d'un déterminant

sont :

$$\begin{cases} C_i \longrightarrow C_i + \sum\limits_{j\neq i} \alpha_j C_j \\ \\ L_i \longrightarrow L_i + \sum\limits_{j\neq i} \alpha_j L_j \end{cases} \quad , \textit{ en particulier } \begin{cases} C_i \longrightarrow C_i + \alpha C_j \quad j \neq i \\ \\ L_i \longrightarrow L_i + \alpha L_j \quad j \neq i \ . \end{cases}$$

On en déduit le résultat suivant :

→ *Si deux lignes ou deux colonnes de A sont proportionnels, (à fortiori égales), alors* $\det A$ *est nul.* $\big($*i.e : Si $C_i = \alpha C_j$ ou $L_i = \alpha L_j$ pour $i \neq j$, alors* $\det A = 0\big)$.

→ *Un déterminant peut changer de signe si on permute deux lignes ou deux colonnes.*

Exemple 3.4.5

$$\begin{array}{r} L_1 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \\ L_4 \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ L_2 - 2L_1 \rightarrow \\ L_3 + L_1 \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -3 & 3 & \boxed{1} \\ 6 & 1 & 7 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} C_1+C_2 \\ \downarrow \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 7 \\ 13 & 8 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} C_2-3C_3 \\ \downarrow \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & -20 & 7 \\ 13 & 5 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 7 & -20 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = 35 + 260 = 295.$$

Notons que :

- *l'opération $L_2 - 2L_1$ n'est vraie qu'au niveau de L_2.*
- *l'opération $C_1 + C_2$ est vraie au niveau de C_1 et au niveau de C_2.*
- *l'opération $2C_1 - C_4$ change la valeur du déterminant.*
- *l'opération $2C_2 + C_3$ est vraie au niveau de C_3.*

Propriétés 3.4.6

1) $\det O = 0$.

2) $\det I_n = 1$.

3) *Si $A = (a_{ij})$ est diagonale, alors* $\det A = \prod\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$.

4) *Si $A = (a_{ij})$ est triangulaire (supérieure ou inférieure), alors* $\det A = \prod\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$.

5) $\det({}^tA) = \det A$.

6) $\det(A.B) = (\det A).(\det B)$.

7) *Si A est inversible, alors* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$. $\big(I = A.A^{-1} \Longrightarrow 1 = \det I = \det(A.A^{-1}) = \det A.\det A^{-1}\big)$.

8) $\det(C_1, ..., C_{i-1}, \alpha C_i, C_{i+1}, ..., C_n) = \det(L_1, ..., L_{j-1}, \alpha L_j, L_{j+1}, ..., L_n) = \alpha \det(C_1, ..., C_n) = \alpha \det(L_1, ..., L_n) = \alpha \det A$, *où* $C_1, C_2, ..., C_n$ *désignent les colonnes de* A *et* $L_1, L_2, ..., L_n$ *désignent les lignes de* A.

9) $\det(\alpha.A) = \alpha^n \det A$.

10)

$$Si\ A = \begin{pmatrix} \boxed{M} & N \\ O & \boxed{P} \end{pmatrix}\ ou\ A = \begin{pmatrix} \boxed{M} & O \\ N & \boxed{P} \end{pmatrix}$$

où M et P sont deux matrices carrées et O est la matrice nulle (A est dite dans ce cas triangulaire par blocs) alors $\det A = \det M.\det P$.

Exemple 3.4.7

1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 9 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2) $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix};\ \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Exemple 3.4.8

1)

$$\begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} (C_1 - 7C_2) & C_2 & (C_3 - 5C_2) & (C_4 - 3C_2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & \boxed{1} & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ -16 & 2 & -6 & -6 \\ -22 & 3 & -8 & -8 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -16 & -6 & -6 \\ -22 & -8 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \quad (\ car\ C_2 = C_3\ ).$$

2)

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 & 4 \\ -4 & 9 & 32 \\ -6 & 18 & 15 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 9 & 32 \\ 3 & 18 & 15 \end{vmatrix} = -2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 9 & 32 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times 3 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 32 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -18 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2-2C_1 & \\ \downarrow & \downarrow & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & \boxed{0} & 4 \\ 2 & \boxed{-1} & 32 \\ 1 & \boxed{0} & 5 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (-18)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 18(5-4) = 18.$$

3.5 Applications

3.5.1 Inversion d'une matrice par la méthode des cofacteurs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche A^{-1} ?
La démarche à suivre se résume dans les étapes suivantes :

- Vérifier que $\det A \neq 0$ (donc A sera inversible).
- Déterminer la comatrice de A, notée $Com\,A$, qui est la matrice carrée d'ordre n obtenue en remplaçant chaque terme de A par son cofacteur.
- Ecrire la transposée de $Com\,A$: ${}^t(Com\,A)$.
- Conclure selon la formule : $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t(Com\,A)$.

Exemple 3.5.1.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $\det A = 3 \neq 0$, *donc A est inversible.*

•

$$Com\,A = \begin{pmatrix} cof(1) & cof(2) & cof(-1) \\ cof(2) & cof(3) & cof(1) \\ cof(1) & cof(0) & cof(2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

- $^tCom\,A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$
- $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

3.5.2 Rang d'une matrice

Définition 3.5.2.1
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Le rang de A*, noté* $rg(A)$*, est le rang du système des vecteurs colonnes* $C_1, C_2, ..., C_n$ *de* A. $(\,C_i \in \mathbb{K}^m\,)$.

Proposition 3.5.2.2
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Le rang de A *est l'ordre du plus grand déterminant non nul extrait de* A.

Remarque 3.5.2.3
$rg(A)$ *est égal aussi au rang du système des vecteurs lignes* $L_1, L_2, ..., L_m$ *de* A *(puisque* $\det {}^tA = \det A$ *).*

Exemple 3.5.2.4
1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\det A = 17 \neq 0$, *donc* $\operatorname{rg} A = 3$. *On en déduit que les systèmes* $S = (C_1, C_2, C_3)$ *et* $S' = (L_1, L_2, L_3)$ *sont libres dans* $\mathbb{R}^3$, *où* $C_1 = (3, 1, 1)$, $C_2 = (-1, 0, 2)$, $C_3 = (1, -2, 1)$, $L_1 = (3, -1, 1)$, $L_2 = (1, 0, -2)$ *et* $L_3 = (1, 2, 1)$.

2)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Même si $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$, *on a* $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, *donc* $\operatorname{rg} B = 2$.

On en déduit que le système $S = (L_1, L_2)$ *est libre dans* $\mathbb{R}^3$, *tandis que* $S' = (C_1, C_2, C_3)$ *est lié dans* $\mathbb{R}^2$ *(ceci est évident car card* $S' = 3 > \dim \mathbb{R}^2 = 2$*).*

3)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{\begin{matrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -3 \\ 0 \end{matrix} \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R}). \quad \operatorname{rg} E \leq 3.$$

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$
  Tous les déterminants d'ordre 3 *extraits de* E *sont nuls. Donc* $\operatorname{rg} E \neq 3$.
- $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, *donc* $\operatorname{rg} E = 2$.
- *On en déduit que le système* $S = (C_1, C_2, C_3)$ *est lié dans* $\mathbb{R}^4$ *et que le système* $S' = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ *est lié dans* $\mathbb{R}^3$ *(ceci est évident car card* $S' = 4 > \dim \mathbb{R}^3 = 3$*).*
- *On peut en tirer aussi que le système* (C_1, C_2) *est libre dans* $\mathbb{R}^4$ *et le système* (L_2, L_3) *est libre dans* $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.5.2.5
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

- $\operatorname{rg} A = 0 \Longleftrightarrow A = 0$.
- $\operatorname{rg} A \leq min(m, n)$.
- $\operatorname{rg}({}^tA) = \operatorname{rg} A$.
- *Si* A *est carrée* $(m = n)$, *alors :*

$$A \text{ est inversible} \Longleftrightarrow \det A \neq 0 \Longleftrightarrow \operatorname{rg} A = n.$$