UNIVERSITÉ MOULAY ISMAIL
FACULTÉ DES SCIENCES MEKNÈS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Support de cours -Algèbre 3-
SMIA
2020-2021

Professeurs : Chahrazade BAKKARI & Mohammed TAMEKKANTE

Vu les conditions du confinement et le temps rétréci accordé au module , ce cours peut servir comme un outil préliminaire, résumé et simple aux étudiants de SMIA (Algèbre 3). On tiendra à renforcer et compléter ce cours par des séances présentielles de travaux dirigés au niveau de SMIA.

Table des matières

Chapitre 1

Les espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.1

$\rightarrow$ *Un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *(ou* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel) est un ensemble non vide* E*, muni de deux lois, l'une interne notée* $''+''$ *et l'autre externe notée* $''\cdot''$ *et qui satisfait les propriétés suivantes :*

$\forall u, v, w \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, *on a :*

1- $u + v = v + u$.

2- $(u + v) + w = u + (v + w)$.

3- *La loi* $''+''$ *admet un élément neutre noté* 0_E $(u + 0_E = u)$.

4- *Tout élément* u *de* E *admet un symétrique pour la loi* $''+''$*, noté* $-u$ $(u + (-u) = 0_E)$.

5- $1.u = u$.

6- $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\,\beta).u$.

7- $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$.

8- $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$.

$\rightarrow$ *Les éléments de* E *sont appelés les vecteurs et les éléments de* $\mathbb{K}$ *sont appelés les scalaires.*

Exemple 1.1.2

1) $(\mathbb{K}^n, +, .)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $(n \in \mathbb{N}^*)$ *où*

$$\begin{cases} (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \ \textit{et} \\ \alpha.(x_1, ..., x_n) = (\alpha.x_1, ..., \alpha.x_n), \end{cases}$$

pour tous $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$.

2) *Soit $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes à l'indéterminée X et à coefficients dans $\mathbb{K}$. On munit $\mathbb{K}[X]$ de la loi interne (l'addition des polynômes) :*

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ (P, Q) &\longmapsto P + Q \end{aligned}$$

et de la loi externe (la multiplication d'un polynôme par un élément de $\mathbb{K}$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ (\alpha, Q) &\longmapsto \alpha.P\,. \end{aligned}$$

Alors $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

3) *Soit X un ensemble et $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ (noté $\mathbb{K}^X$) l'ensemble des applications de X vers $\mathbb{K}$. On munit cet ensemble de l'addition et de la multiplication par un scalaire comme suit : $\forall f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in X$,*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\alpha.f)(x) = \alpha.f(x)\,.$$

$(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

4) *$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

N.B. Dans ce qui suit, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.2 Combinaison linéaire

Définition 1.2.1
Soient $v_1, v_2, ..., v_n$ des vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire de $v_1, ..., v_n$ toute somme :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \qquad \text{où} \;\; \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Exemple 1.2.2
$E = \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}$-espace vectoriel).
Une combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, 2)$ et $v_2 = (-2, 3)$ est de la forme :

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(1, 2) + \beta(-2, 3) = (\alpha - 2\beta, 2\alpha + 3\beta) \quad \text{où} \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

1.3 Sous-espace vectoriel

Définition 1.3.1
Soit $F \subset E$. F est dit sous-espace vectoriel de E si $(F, +, .)$ est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 1.3.2
Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \neq \emptyset$ et
$\forall u, v \in F$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a $\alpha u + \beta v \in F$.

Exemples 1.3.3

1) *$\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E.*

2) *$\forall v_1, ..., v_n \in E$, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $v_1, ..., v_n$ qui est égal à $\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \;/\; \alpha_i \in \mathbb{K}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E noté Vect$(v_1, ..., v_n)$ ou $< v_1, ..., v_n >$.*
Notons que $< v_1, ..., v_n >$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\{v_1, ..., v_n\}$.

3) *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. alors :*

$$F \cap G = \{\, v \in E \,/\, v \in F \text{ et } v \in G \,\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$

$$\text{et } \; F + G = \{\, u + v \;/\; u \in F \text{ et } v \in G \,\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

Par contre $F \cup G$ n'est pas toujours un sous-espace vectoriel de E comme le montre l'exemple ci-dessous :
Soit $F = \{(x, 0),\; x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, y),\; y \in \mathbb{R}\}$.
F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Pourtant $F \cup G$ ne l'est pas puisque $(1, 0) \in F$, $(0, 1) \in G$ et $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F \cup G$.

Notons que $F + G =< F \cup G >$.

1.4 Famille génératrice

Définition 1.4.1
Une famille $\{v_1, ..., v_n\}$ de vecteurs de E est dite famille génératrice de E (ou engendre E) si Vect$(v_1, ..., v_n) = E$. Ce qui équivaut à dire :

$$\forall x \in E,\; \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K} \,/\; x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Propriétés 1.4.2
Soient A et B deux parties de E et $v_1, \ldots, v_n \in E$. On a :

1) *$A \subseteq B \Longrightarrow$ Vect$(A) \subseteq$ Vect(B).*
1) *A est un sous-espace vectoriel de $E \Longleftrightarrow$ Vect$(A) = A$.*
3) *Vect(Vect(A)) = Vect(A).*
4) *Vect$(v_1, \ldots, v_n)$ ne change pas si :*
   a) *on change l'ordre de deux éléments v_i et v_j.*
   b) *on remplace un vecteur v_j par une combinaison linéaire de la forme $\alpha v_j + \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i$, avec $\alpha \neq 0$.*

Démonstration.

1) Si $A \subseteq B$, alors $A \subseteq B \subseteq \text{Vect}(B)$. Comme $\text{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel et il contient A, alors $\text{Vect}(A) \subseteq \text{Vect}(B)$.

2) Si A est un sous-espace vectoriel de E, alors c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A, et donc $\text{Vect}(A) = A$. Réciproquement si $\text{Vect}(A) = A$, alors A est un sous-espace vectoriel de E.
3) $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E. D'après la propriété précédente $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.
4) *a*) Par commutativité de l'addition dans E.

   b) Posons $v'_j = \alpha v_j + \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i$. Il s'agit de montrer que :
   $$\text{Vect}(v_1, \ldots, v'_j, \ldots, v_n) = \text{Vect}(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n).$$
   Puisque v'_j est une combinaison linéaire des éléments $v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n$, alors toute combinaison linéaire des éléments $v_1, \ldots, v'_j, \ldots, v_n$ est aussi combinaison linéaire des éléments $v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n$. Ainsi
   $$\text{Vect}(v_1, \ldots, v'_j, \ldots, v_n) \subseteq \text{Vect}(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n).$$
   D'autre part, on a $v'_j = \alpha v_j + \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i$. Or $\alpha \neq 0$, donc $v_j = \frac{1}{\alpha}(v'_j - \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i)$, c'est-à-dire v_j est une combinaison linéaire des éléments $v_1, \ldots, v'_j, \ldots, v_n$. Ainsi toute combinaison linéaire des éléments $v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n$ est aussi combinaison linéaire des éléments $v_1, \ldots, v'_j, \ldots, v_n$. D'où
   $$\text{Vect}(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n) \subseteq \text{Vect}(v_1, \ldots, v'_j, \ldots, v_n).$$

1.5 Famille libre, Famille liée

Définition 1.5.1
Soient $v_1, ..., v_n \in E$.

$\rightarrow$ *La famille $\{v_1, ..., v_n\}$ est dite libre (ou linéairement indépendante) si :*
$$\forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \implies \alpha_i = 0, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$
$\rightarrow$ *La famille $\{v_1, ..., v_n\}$ est dite liée (ou linéairement dépendante) si elle n'est pas libre. Ce qui équivaut à dire que :*
$$\exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ non tous nuls } / \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0.$$

Exemples 1.5.2
1) *Dans $\mathbb{K}^n$, soient les vecteurs $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$. Alors la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre. En effet :*
   soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0_{\mathbb{K}^n}$ ($0_{\mathbb{K}^n} = (0, 0, \ldots, 0)$). On a $(\alpha_1, 0, \ldots, 0) + (0, \alpha_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, par suite $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0)$. D'où $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots, \alpha_n = 0$.

2) *La famille des fonctions* $(f_1, \ldots, f_n)$ *est libre dans* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *où* $f_k(x) = e^{kx}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. *Montrons ceci par récurrence sur* n.
• *La propriété est vraie pour* $n = 1$ *car* f_1 *est différente de la fonction nulle* θ.
• *Supposons que la propriété est vraie pour* n *et montrons-là pour* $n+1$. *En effet : soient* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n + \alpha_{n+1} f_{n+1} = \theta. \qquad (1)$$

Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \ldots + \alpha_n e^{nx} + \alpha_{n+1} e^{(n+1)x} = 0. \qquad (2)$$

Par dérivation, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 e^x + 2\alpha_2 e^{2x} + \ldots + n\alpha_n e^{nx} + (n+1)\alpha_{n+1} e^{(n+1)x} = 0. \qquad (3)$$

D'autre part, la multiplication de l'équation (2) *par* $(n+1)$ *aboutit à :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \alpha_1(n+1)e^x + \alpha_2(n+1)e^{2x} + \ldots + \alpha_n(n+1)e^{nx} + \alpha_{n+1}(n+1)e^{(n+1)x} = 0. \quad (4)$$

En effectuant la soustraction des équations (3) *et* (4), *on arrive à supprimer le dernier terme :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad n\alpha_1 e^x + (n-1)\alpha_2 e^{2x} + \ldots + \alpha_n e^{nx} = 0.$$

Ce qui équivaut à :

$$n\alpha_1 f_1 + (n-1)\alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n = \theta.$$

L'hypothèse de récurrence implique que tous les coefficients sont nuls. Par suite, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. *Dès lors,* $\alpha_{n+1} = 0$.

Proposition 1.5.3
Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ *une famille libre de* E. *Si* $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ *est une combinaison linéaire des* v_i, *alors la décomposition est unique (c'est-à-dire les* α_i *sont uniques).*

Démonstration.
Si $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$, où $\alpha_i,\ \beta_i \in \mathbb{K}$, alors on a $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$ et par suite $\alpha_1 - \beta_1 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0$. Donc $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$ et la décomposition est unique.

Propriétés 1.5.4
1) $\forall x \in E$; (x) *est libre* $\Longleftrightarrow x \neq 0_E$.
2) *Toute famille qui contient le vecteur nul est liée.*
3) *Les vecteurs d'une famille libre sont tous non nuls.*
4) *Toute famille où l'un des vecteurs est combinaison des autres est liée (à fortiori, toute famille contenant deux vecteurs proportionnels ou égaux est liée).*
5) *Toute sur-famille d'une famille liée est liée.*
6) *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

Démonstration. Exercice.

Exemples 1.5.5

1) $\{v, \alpha v, w\}$ *est liée* $\forall v, w \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$. (*car :* $-\alpha v + \alpha v + 0w = 0$).

2) $\{(1,2,4),(8,9,1),(0,0,0)\}$ *est liée dans* $\mathbb{R}^3$.

3) $\{(\frac{1}{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, 0)\}$ *et* $\{(0,0,\sqrt{7},0)\}$ *sont libres dans* $\mathbb{R}^4$.

4) $\{(1,2,4),(\frac{1}{2},1,2),(3,8,0)\}$ *est liée dans* $\mathbb{R}^3$ *puisque les vecteurs* $(1,2,4)$ *et* $(\frac{1}{2},1,2)$ *sont proportionnels* $\big((\frac{1}{2},1,2) = \frac{1}{2}(1,2,4)\big)$.

1.6 Base

Définition 1.6.1
Soit $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ *un système de vecteurs de* E*. On dit que* $\mathcal{B}$ *est une base de* E *si* $\mathcal{B}$ *est à la fois libre et génératrice de* E*.*

Théorème 1.6.2
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *un système de vecteurs de* E*. On a :*

$\mathcal{B}$ *est une base de* $E \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ \exists!(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ *tel que* $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i e_i$.

Dans ce cas, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *sont appelées les coordonnées de* x *dans la base* $\mathcal{B}$*.*

Démonstration :
$(\Rightarrow)$ Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Si $x \in E$, alors x est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$ (puisque $\mathcal{B}$ est génératrice). L'unicité des coefficients est une conséquence du fait que $\mathcal{B}$ est libre.
$(\Leftarrow)$ Il est clair que $\mathcal{B}$ est génératrice. Et si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha e_n = 0$, donc $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0e_1 + \cdots + 0e_n = 0$. L'unicité de la décomposition du vecteur nul implique que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Proposition 1.6.3
Soit S *un système générateur fini de* E*. Alors on peut en extraire une base de* E*.*

Démonstration :
Soient $S = (v_1, \ldots, v_n)$ un système générateur de E et $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_p})$ un sous-système de S comportant le plus grand nombre possible de vecteurs linéairement indépendants, et $F = Vect(v_{i_1}, \ldots, v_{i_p})$. On a $E = F$, sinon, il existe $x \in E \setminus F$ avec $x \in S$. Par suite $(x, v_{i_1}, \ldots, v_{i_p})$ sera libre (contradiction). D'où $E = F = Vect(v_{i_1}, \ldots, v_{i_p})$ et $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_p})$ est une base de E.

Remarque 1.6.4 (Théorème de la base incomplète)
Si S *est un système libre d'un espace vectoriel de dimension finie, le raisonnement précédent montre que l'on peut compléter* S *en une base de* E*.*

1.7 Dimension d'un espace vectoriel

Proposition 1.7.1
Soit E un espace vectoriel engendré par n vecteurs ($n \geq 0$). Alors tout système libre dans E comporte au plus n vecteurs.

Démonstration.
Soient $S = (v_1, \ldots, v_n)$ un système générateur de E et $(w_1, \ldots, w_m)$ un système libre dans E. Montrons que $m \leq n$.
On a :

$$w_1 = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \text{ où les } \alpha_i \text{ ne sont pas tous nuls.}$$

Supposons par exemple que $\alpha_1 \neq 0$, alors $v_1 = \alpha_1^{-1} w_1 - \alpha_1^{-1}(\alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n)$. Il en résulte que $(w_1, v_2, \ldots, v_n)$ est un système générateur de E. D'où

$$w_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n \text{ où les } \beta_2, \ldots, \beta_n \text{ ne sont pas tous nuls.}$$

Supposons par exemple que $\beta_2 \neq 0$, alors $v_2 = \beta_2^{-1} w_2 - \beta_2^{-1}(\beta_1 w_1 + \beta_3 v_3 + \ldots + \beta_n v_n)$. Il en résulte que $(w_1, w_2, v_3, \ldots, v_n)$ est un système générateur de E.
Par absurde, supposons que $m > n$, alors la substitution de $(w_1, \ldots, w_n)$ à $(v_1, \ldots, v_n)$ sera un système générateur de E. D'où w_{n+1} sera une combinaison linéaire de $w_1, \ldots, w_n$ (absurde).

Corollaire 1.7.2
Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal.

Démonstration.
Soient n et n' les cardinaux de deux bases de E. On a $n \leq n'$ et $n' \leq n$, donc $n = n'$.

Définitions 1.7.3

1) *L'espace E est dit de dimension finie s'il admet un système générateur fini $(v_1, \ldots, v_n)$. Dans ce cas, tout vecteur x de E est combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$. (Notons que la décomposition de x sur les v_i n'est pas en général unique).*
2) *Le cardinal d'une base de E s'appelle la dimension de E, et se note $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou $\dim E$.*
3) *Un espace vectoriel H qui ne possède pas de base finie est dit de dimension infinie. On note $\dim H = \infty$.*

Exemples 1.7.4

1) *Dans $\mathbb{K}^n$, les vecteurs $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots$ et $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ forment une base de $\mathbb{K}^n$. Par suite $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.*
2) *Soit $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes sur $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.*

Remarque 1.7.5
La dimension d'un espace vectoriel est un entier qui dépend du corps de base ; par exemple : $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 ($\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$). Aussi, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 ($\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$) (puisqu'il admet $(1, i)$ comme base).

Propriétés 1.7.6

→ *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que $dim\, E = n$. Et soit $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_p)$ un système de vecteurs de E.*

1) *Si $p > n$, alors $\mathcal{F}$ est non libre.*

2) *Si $p < n$, alors $\mathcal{F}$ est non génératrice.*

3) *Si $p = n$, alors on a :*

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \Longleftrightarrow \mathcal{F} \text{ est génératrice} \Longleftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une base.}$$

→ *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $dim\, F \leq dim\, E$.*

→ *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors*

$$dim\, F = dim\, E \Longleftrightarrow E = F.$$

Exemples 1.7.7

Soit $E = \mathbb{R}^3$ ($dim\, E = 3$).

1) $\mathcal{F} = \big((1,2,0), (0,1,1), (0,4,8), (1,-1,\sqrt{3})\big)$ *est non libre dans $\mathbb{R}^3$ puisque $card\, \mathcal{F} = 4 > 3$.*

2) $\mathcal{F}' = \big((1,2,0), (0,1,1)\big)$ *est un système non générateur de $\mathbb{R}^3$ puisque $card\, \mathcal{F}' = 2 < 3 = dim\, \mathbb{R}^3$.*

3) $\mathcal{F}'' = \big((1,2,3), (0,1,1), (2,0,2)\big)$ *est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet :*
On a $card\, \mathcal{F}'' = 3 = dim\, \mathbb{R}^3$, il suffit donc de montrer que $\mathcal{F}''$ est libre (ou génératrice).

On vérifie que $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(1,2,3) + \beta(0,1,1) + \gamma(2,0,2) = (0,0,0) \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

1.8 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 1.8.1

Soit $\mathcal{F} = \{v_1, ..., v_p\}$ une famille de vecteurs de E. On appelle rang de $\mathcal{F}$ qu'on note $rg\, \mathcal{F}$, la dimension du sous-espace vectoriel $Vect(\mathcal{F})$.

$rg\, \mathcal{F} = rg(v_1, ..., v_p) = dim\ < v_1, ..., v_p >=$ le nombre maximum de vecteurs v_i libres dans E.

Remarque 1.8.2

Par construction, la famille de vecteurs $(v_1, ..., v_p)$ est un système générateur de $< v_1, ..., v_p >$. Et pour chercher une base de $< v_1, ..., v_p >$, il suffit alors d'en tirer le nombre maximum de vecteurs libres.

Exemples 1.8.3

1) $E = \mathbb{R}^4$.
Soit $\mathcal{F} = \big(v_1, v_2, v_3\big)$ où $v_1 = (1,1,0,-1)$, $v_2 = (1,2,1,0)$ et $v_3 = (3,5,2,-1)$. On a $v_3 = v_1 + 2v_2$, donc $\big(v_1, v_2, v_3\big)$ est non libre, par suite $rg(v_1, v_2, v_3) \neq 3$.
$\big(v_1, v_2\big)$ est libre, donc $rg\, \mathcal{F} = 2$.

2) $E = \mathbb{R}^3$.
Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ *où* $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ *et* $v_3 = (-1, -2, -3)$.
$\mathcal{F}$ *est non libre puisque* $v_3 = -v_1$, *donc* $rg\,\mathcal{F} \neq 3$.
(v_1, v_2), (v_1, v_3) *et* (v_2, v_3) *sont liés, donc* $rg\,\mathcal{F} \neq 2$. *Par suite* $rg\,\mathcal{F} = 1$.

3) $E = \mathbb{R}^3$.
Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ *où* $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 3, 4)$ *et* $v_3 = (4, 9, 16)$.
$\mathcal{F}$ *est libre, donc* $rg\,\mathcal{F} = 3$.

4) $E = \mathbb{R}^2$.
Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ *où* $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (1, 3)$ *et* $v_3 = (3, 4)$.

- $\mathcal{F}$ *est non libre puisque* $card\,\mathcal{F} = 3 > 2 = dim\,\mathbb{R}^2$. *Donc* $rg\,\mathcal{F} \neq 3$.
- (v_1, v_2) *est libre, donc* $rg\,\mathcal{F} = 2$.

Propriété 1.8.4

$$rg\,\mathcal{F} \leq min\,(\,card\,\mathcal{F}, dim\,E\,).$$

Remarque 1.8.5
On verra plus loin – comme application des déterminants – une méthode plus simple pour voir si une famille de vecteurs est libre ou liée.

1.9 Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition 1.9.1
Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E.

→ *La somme* $F + G$ *est dite directe si* $F \cap G = \{0_E\}$. *Dans ce cas,* $F + G$ *est notée* $F \oplus G$.

→ *Si* $F \oplus G = E$, *on dit alors que les sous-espaces vectoriels* F *et* G *sont supplémentaires dans* E.

Théorème 1.9.2
Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E, *de bases respectives* B_F *et* B_G. *On a :*

$$E = F \oplus G \iff B_F \cup B_G \text{ est une base de } E.$$

Exemple 1.9.3
Soient $E = \mathbb{R}^2$, $F = <(2, 0)>$ *et* $G = <(0, \sqrt{8})>$.

- $\{(2, 0)\}$ *et* $\{(0, \sqrt{8})\}$ *sont deux bases respectives de* F *et* G.
- $\mathcal{B} = \big((2, 0), (0, \sqrt{8})\big)$ *est libre dans* $\mathbb{R}^2$ *et* $card\,\mathcal{B} = 2 = dim\,\mathbb{R}^2$, *donc* $\mathcal{B}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$. *par suite* $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.

1.10 Exercices compléments de cours

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que :

1) Si G est un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ est un système de vecteurs de E, alors $\mathcal{F} \subseteq G \Longleftrightarrow Vect(\mathcal{F}) \subseteq G$.
2) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux familles de vecteurs de E, alors $Vect(\mathcal{F}) \subseteq Vect(\mathcal{F}') \Longleftrightarrow$ tout vecteur de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}'$.
3) Si $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ est un système de vecteurs de E, et si v_{p+1} est un vecteur de E qui est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$, alors $Vect(\mathcal{F}) = Vect(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1})$.
4) Si $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ est un système de vecteurs de E, alors $\mathcal{F}$ est lié $\Longleftrightarrow \exists i_0 \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $v_{i_0} \in Vect(v_1, \ldots, v_{i_0-1}, v_{i_0+1}, \ldots, v_p)$. Et dans ce cas on a :
$$Vect(\mathcal{F}) = Vect(v_1, \ldots, v_{i_0-1}, v_{i_0+1}, \ldots, v_p).$$
5) Si $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ est un système libre de vecteurs de E, alors $\forall v \in E$,
$$v \notin Vect(\mathcal{F}) \Longrightarrow (v_1, \ldots, v_p, v) \text{ est libre.}$$

Chapitre 4

Applications linéaires

4.1 Définitions et Vocabulaire

4.1.1 Rappel sur les applications

Soient E et F deux ensembles.

$\rightarrow$ Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction.
f est dite une application si tout élément de E admet une seule image dans F. $(\forall x \in E,\ \exists! y \in F,\quad f(x) = y\,)$.

$\rightarrow$ Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$.

- On appelle image directe de A par f, qu'on note $f(A)$, le sous ensemble de F formé par les images des éléments de A ;

$$\begin{aligned} f(A) &= \{\, f(x)\ ;\quad x \in A \,\} \\ &= \{\, y \in F \,/\, \exists x \in A \quad f(x) = y \,\}. \end{aligned}$$

- On appelle image réciproque de B par f, qu'on note $f^{-1}(B)$, le sous ensemble de E formé par les antécédents des éléments de B ;

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in E \,/\quad f(x) \in B \,\}.$$

$\rightarrow$ Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- f est dite injective si tout élément de F admet au plus un antécédent. Autrement dit,
$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow \forall x, x' \in E,\quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$
- f est dite surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent. Autrement dit,
$$\begin{aligned} f \text{ est surjective} &\Longleftrightarrow \forall y \in F,\ \exists x \in E,\quad f(x) = y \\ &\Longleftrightarrow f(E) = F. \end{aligned}$$
- f est dite bijective si f est à la fois injective et surjective.

4.1.2 Définitions et exemples

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et E et F désigneront deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition 4.1.2.1
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
f est dite une application linéaire ou homomorphisme de E vers F si :

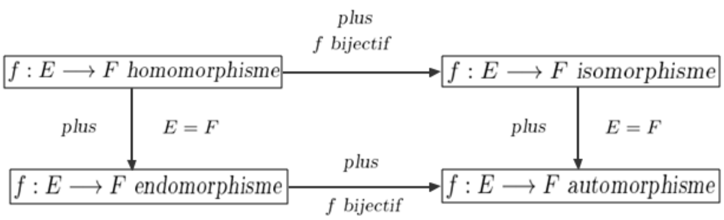
$$\forall u, v \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\quad \begin{cases} \bullet\ f(u+v) = f(u) + f(v)\ \ et \\ \bullet\ f(\alpha u) = \alpha f(u). \end{cases}$$

Remarque 4.1.2.2
On voit facilement que :

$$\begin{aligned} f \text{ est linéaire} &\Longleftrightarrow \forall u, v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \ f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v) \\ &\Longleftrightarrow \forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \ f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v). \end{aligned}$$

Définition 4.1.2.3
Soit $f : E \longrightarrow F$ un homomorphisme .
- $\rightarrow$ *f est dit isomorphisme si f est bijectif .*
- $\rightarrow$ *f est dit endomorphisme si $E = F$.*
- $\rightarrow$ *f est dit automorphisme si f est bijectif et $E = F$.*

On peut voir ça à travers le schéma suivant :



Notation.
- $\rightarrow$ $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E vers F.
- $\rightarrow$ $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemples 4.1.2.4

1) *L'application nulle :*

$$\begin{array}{cccc} \theta & : & E & \longrightarrow & F \\ & & u & \longmapsto & 0_F \end{array}$$

est linéaire.

2) *L'application identité :*

$$\begin{array}{cccc} id_E & : & E & \longrightarrow & E \\ & & u & \longmapsto & u \end{array}$$

est un automorphisme de E.

3)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, 2x-y+z) \end{array}$$

est une application linéaire.

En effet : Soient $u = (x,y,z)$ *et* $v = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $$\begin{aligned} f(u+v) &= f\big((x,y,z)+(x',y',z')\big) = f(x+x', y+y', z+z') \\ &= \Big((x+x')-(y+y'), 2(x+x')-(y+y')+(z+z')\Big) \\ &= \Big((x-y)+(x'-y'), (2x-y+z)+(2x'-y'+z')\Big) \\ &= (x-y, 2x-y+z)+(x'-y', 2x'-y'+z') \\ &= f(x,y,z)+f(x',y',z') \\ &= f(u)+f(v). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha(x,y,z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\ &= (\alpha x - \alpha y, 2\alpha x - \alpha y + \alpha z) \\ &= \alpha(x-y, 2x-y+z) \\ &= \alpha f(x,y,z) \\ &= \alpha f(u). \end{aligned}$$

4) *L'application*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

est non linéaire. En effet :

$$f(2x) = 2x+1 \neq 2f(x) = 2x+2.$$

5) *L'application*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \quad \text{le conjugué de } z. \end{array}$$

f *est linéaire si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et non linéaire si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (*à savoir que* $\mathbb{C}$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $\mathbb{C}$). *En effet :*

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$.

- $f(z+z') = \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} = f(z) + f(z')$.
- $f(\alpha z) = \overline{\alpha z} = \overline{\alpha}\ \overline{z} = \alpha \overline{z}$ *si et seulement si* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(*Notons que si* $\alpha \in i\mathbb{R}$, $f(\alpha z) = \overline{\alpha}\,\overline{z} \neq \alpha\overline{z} = \alpha f(z)$).

Proposition 4.1.2.5

Soient E, F *et* G *des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels.*

1) *Si* f *et* $g \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, *alors* $f+g \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, *où* $(f+g)(u) = f(u)+g(u)$.

2) *Si* $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, *alors* $\lambda f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, *où* $(\lambda f)(u) = \lambda f(u)$.

3) *Si* $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ *et* $g \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(F,G)$, *alors* $g \circ f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,G)$, *où* $(g \circ f)(u) = g(f(u))$.

4) *Si* $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ *et* f *est bijective, alors* $f^{-1} \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(F,E)$.

Démonstration.
1), **2)** et **3)** sont claires.
4) Soient $a, b \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \arrow[l, bend left, dashed, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Montrons que $f^{-1}(\alpha a + b) = \alpha f^{-1}(a) + f^{-1}(b)$.
On a f est bijective, donc $\exists\, x \text{ et } y \in E \,/\, f(x) = a \text{ et } f(y) = b$. Par suite,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha a + b) &= f^{-1}(\alpha f(x) + f(y)) \\ &= f^{-1}(f(\alpha x + y)) \quad (\, car\ f\ est\ linéaire\,) \\ &= \alpha x + y \quad (\, car\ f^{-1} \circ f = id_E\,) \\ &= \alpha f^{-1}(a) + f^{-1}(b) \qquad \Big(car\ x = f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(a)\Big). \end{aligned}$$

On en déduit de **1**) et **2**) de la proposition ci-dessus, le résultat suivant :

Corollaire 4.1.2.6
$(\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F), +, .)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

4.2 Propriétés élémentaires

Mentionnons quelques propriétés élémentaires qui permettent de manipuler la notion d'application linéaire.

Proposition 4.2.1
Soit $f : E \longrightarrow F$ *est une application linéaire.*

1) $\forall (u_1, u_2, ..., u_n) \in E^n,\ \forall (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n,\ \ f\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i)$.
Autrement dit : une application linéaire transforme toute combinaison linéaire d'éléments de E *en une combinaison linéaire d'éléments de* F.

2) $f(0_E) = 0_F$.

3) $f(-u) = -f(u),\ \forall u \in E$.

4) *Si* H *est un sous-espace vectoriel de* E*, alors* $f(H)$ *est un sous-espace vectoriel de* F.

5) *Si* K *est un sous-espace vectoriel de* F*, alors* $f^{-1}(K)$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Démonstration.

1) Démonstration par récurrence sur n.
- Pour $n = 1$, $f(\alpha_1 u_1) = \alpha_1 f(u_1)$ car f est linéaire.

- L'hypothèse de récurrence $(H.R)$ *pour* $n-1$:
  Supposons que $f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{n-1}u_{n-1}) = \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_{n-1}f(u_{n-1})$.
- Pour n :

$$\begin{aligned} f(\underbrace{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{n-1}u_{n-1}}_{v_1} + \underbrace{\alpha_n u_n}_{v_2}) &= f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2) \quad (\textit{car } f \textit{ est linéaire}) \\ &= f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{n-1}u_{n-1}) + f(\alpha_n u_n) \\ &= \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_{n-1}f(u_{n-1}) + \alpha_n f(u_n).\ (H.R) \end{aligned}$$

2) $f(0_E) = f(0.0_E) = 0.f(0_E) = 0_F$.

3) Evidente.

4) Supposons que H est un sous-espace vectoriel de E. Montrons que $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F. Ce qui revient à montrer que $f(H)$ est non vide et stable dans F.
Rappelons que $f(H) = \{\, f(u) /\ u \in H\,\}$.

- $\underline{f(H) \neq \emptyset\ :}$ On a $0_E \in H$, donc $0_F = f(0_E) \in f(H)$.
- $\underline{f(H)\ \textit{est stable dans}\ F\ :}$

  Soient $f(u)$ et $f(v)$ deux vecteurs de $f(H)$ (où u et $v \in H$), et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
  On a $\alpha f(u) + \beta f(v) = f(\alpha u + \beta v)$ car f est linéaire, or $\alpha u + \beta v \in H$ puisque H est stable dans E. Par suite $\alpha f(u) + \beta f(v) \in f(H)$.

5) Soit $\mathbb{K}$ un sous-espace vectoriel de F.
Rappelons que $f^{-1}(K) = \{\, u \in E /\ f(u) \in K\,\}$.

- $\underline{f^{-1}(K) \neq \emptyset :}$ On a $f(0_E) = 0_F \in K \Longrightarrow 0_E \in f^{-1}(K)$.
- $\underline{f^{-1}(K)\ \text{est stable dans}\ E\ :}$

  Soient $u, v \in f^{-1}(K)$ et $\alpha, \beta \in K$. Montrons que $\alpha u + \beta v \in f^{-1}(K)$.
  On a : $f(\alpha u + \beta v) = \alpha \underbrace{f(u)}_{\in K} + \beta \underbrace{f(v)}_{\in K}$ car f est linéaire. Donc $f(\alpha u + \beta v) \in K$ puisque K est stable dans F. Par suite $\alpha u + \beta v \in f^{-1}(K)$.

Remarque 4.2.2
Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est non linéaire, on montre par ordre croissant de difficulté que :

1) $f(0_E) \neq 0_F$.

2) $\exists u \in E,\ \ f(-u) \neq -f(u)$.

3) $\exists u \in E, \exists \alpha \in \mathbb{K},\ \ f(\alpha u) \neq \alpha f(u)$.

4) $\exists u, v \in E,\ \ f(u+v) \neq f(u) + f(v)$.

Exemple 4.2.3

1)

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x-y, y, x+2) \end{array}$$

$f(0,0) = (0,0,2) \neq (0,0,0)$, *donc f est non linéaire.*

2)

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x,y^2) \end{array}$$

- $f(0,0) = (0,0)$.
- $f(-(1,1)) = f(-1,-1) = (-1,1) \neq -f(1,1) = -(1,1) = (-1,-1)$.
  Donc f est non linéaire.

3) *L'application*

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & (xy, y+z, 0) \end{array}$$

est non linéaire $\big(f(2u) \neq 2f(u)$ *où* $u = (1,1,0)\big)$.

4.3 Sous-espaces associés à une application linéaire

On définit l'image et le noyau d'une application linéaire f de E vers F.

Définition 4.3.1

→ *On appelle noyau de f, qu'on note* $\operatorname{Ker} f$*, le sous ensemble de E formé par les antécédents de 0_F.*

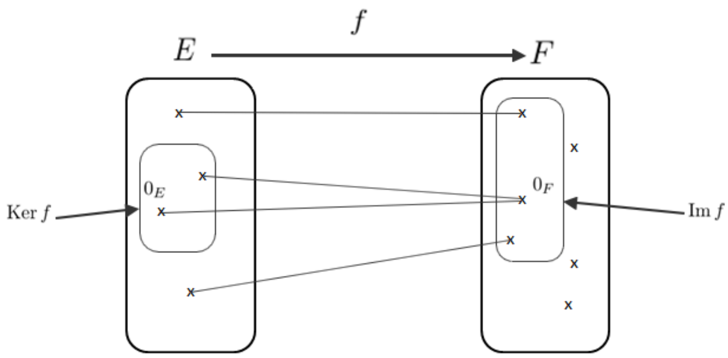
$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{\, x \in E \,/\; f(x) = 0_F \,\}.$$

→ *On appelle image de f, qu'on note* $\operatorname{Im} f$*, le sous ensemble de F formé par les images des vecteurs de E.*

$$\operatorname{Im} f = \{\, f(x) \,/\; x \in E \,\} = f(E).$$

On écrit aussi :

$$\operatorname{Im} f = \{\, y \in F \,/\, \exists x \in E,\; f(x) = y \,\}.$$



Proposition 4.3.2

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On a :

1) $\operatorname{Ker} f$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

2) $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

3) $\operatorname{Ker} f = \{0_E\} \Longleftrightarrow f$ *est injective.*

4) $\operatorname{Im} f = F \Longleftrightarrow f$ *est surjective.*

Démonstration.

1) et **2)** découlent de la proposition précédente. En effet :

1) On a $\{0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de F, donc $f^{-1}(\{0_F\})$ qui est égal à $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

2) On a E est un sous-espace vectoriel de E, donc $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F.

3) $\Rightarrow)$ Supposons que f est injectif.
Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. On a $f(x) = 0_F = f(0_E)$. Or f est injectif, donc $x = 0_E$.

$\Leftarrow)$ Supposons que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
Soient x et $x' \in E$ / $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Longleftrightarrow f(x - x') = 0_F \quad (\textit{car } f \textit{ est linéaire}) \\ &\Longleftrightarrow x - x' \in \operatorname{Ker} f = \{0_E\} \\ &\Longleftrightarrow x - x' = 0_E \\ &\Longleftrightarrow x = x'. \end{aligned}$$

4) Claire.

4.4 Théorème du rang

Définition 4.4.1
On appelle le rang de f, qu'on note $\operatorname{rg} f$, la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$.

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f.$$

Proposition 4.4.2
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
Si $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ est une famille génératrice de E, alors $f(\mathcal{B}) = \{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ est une famille génératrice de $f(E) = \operatorname{Im} f$.

Démonstration.
Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Donc $\exists x \in E$ / $f(x) = y$. Or $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une famille génératrice de E, donc il existe $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que : $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Par suite $f(x) = f(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i)$ puisque f est linéaire. Dès lors, $\{f(e_i)\}_{i=1}^{n}$ engendre $\operatorname{Im} f$.

Théorème 4.4.3 (Théorème du rang)
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Si la dimension de E est finie, alors on a :

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E.$$

Remarque 4.4.4
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Et soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^{n}$ une base de E ($\dim E = n$).

→ *Si f est injective* ($\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$), *alors* $f(\mathcal{B}) = \{f(e_i)\}_{i=1}^n$ *est une base de* $\operatorname{Im} f$.

→ *Si f n'est pas injective* ($\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$), *alors* $f(\mathcal{B})$ *est une famille génératrice de* $\operatorname{Im} f$.

Démonstration.

→ Si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ alors $\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\dim \operatorname{Ker} f} + \dim \operatorname{Im} f = \underset{\overset{\shortparallel}{n}}{\dim E}$, donc $\dim \operatorname{Im} f = n$. Or $\{f(e_i)\}_{i=1}^n$ engendre $\operatorname{Im} f$ et $Card(\{f(e_i)\}_{i=1}^n) = n$, et par suite $\{f(e_i)\}_{i=1}^n$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

→ Evident d'après la proposition précédente.

Corollaire 4.4.5 (Théorème du rang avec $\dim E = \dim F < \infty$ **)**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Si $\dim E = \dim F$, *alors :*

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

Remarque
Ce résultat s'applique en particulier aux endomorphismes.

Démonstration.
On a :

$$\begin{aligned} f \text{ est injetive} &\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_E\} \\ &\Longleftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0 \\ &\Longleftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim E = \dim F \qquad (\,car\ \dim \operatorname{Ker} f + \dim Im\, f = \dim E\,) \\ &\Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = F \qquad (\,car\ \operatorname{Im} f \subset F\,) \\ &\Longleftrightarrow f \text{ est surjective.} \end{aligned}$$

4.5 Exemples d'application

Exemple 4.5.1
Soit

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, x-y+z) \end{array}$$

une application linéaire.

→ *Cherchons* $\operatorname{Ker} f = ?$
$\operatorname{Ker} f = \{\, X \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \,\}$.

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker} f &\Longleftrightarrow X = (x,y,z) \ \ et\ \ f(x,y,z) = (0,0) \\ &\Longleftrightarrow X = (x,y,z) \ \ et\ \ \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow X = (x,y,z) \ \ et\ \ \begin{cases} x = y \\ z = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $X = (y, y, 0) = y(1, 1, 0)$. *Par suite* $\operatorname{Ker} f =< (1, 1, 0) >$.
La famille $\{(1, 1, 0)\}$ *est formée par un seul vecteur non nul, donc elle est automatiquement libre, et par suite c'est une base de* $\operatorname{Ker} f$. *D'où* $\dim \operatorname{Ker} f = card\,\{(1, 1, 0)\} = 1$.

Remarquons que f *est non injective puisque* $\operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

→ *Cherchons* $\operatorname{Im} f =?$
Utilisons le théorème du rang, puisqu'il indique la dimension de $\operatorname{Im} f$ *avant de la déterminer, ce qui simplifie dans ce cas, la recherche de* $\operatorname{Im} f$.
On a $\underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{=1} + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. *Donc* $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

Or $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$. *Par suite,* $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. *Et donc la base canonique* $\{(1, 0), (0, 1)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *sera aussi une base de* $\operatorname{Im} f$.

Remarquons que f *est surjective puisque* $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Exemple 4.5.2
Soit

$$g \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x, x + y, y) \end{array}$$

une application linéaire.

→ *Cherchons* $\operatorname{Ker} g =?$
Il est facile de voir que $\operatorname{Ker} g = \{(0, 0)\}$.

Par suite g *est injective.*

→ *Cherchons* $\operatorname{Im} g =?$
D'après le théorème du rang, on a : $\underbrace{\dim \operatorname{Ker} g}_{=0} + \dim \operatorname{Im} g = \dim \mathbb{R}^2 = 2$. *Donc* $\dim \operatorname{Im} g = 2$.
Or, g *est injective, alors on en déduit directement que l'image d'une base de* $\mathbb{R}^2$ *est une base de* $\operatorname{Im} g$; *soit* $\{g(1, 0), g(0, 1)\} = \{(2, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ *cette base.*

Exemple 4.5.3
Soit l'application linéaire

$$h \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y, x + z, -x - z). \end{array}$$

→ $\operatorname{Ker} h =< (1, 2, -1) >$.
Et $\{(1, 2, -1)\}$ *est bien une base de* $\operatorname{Ker} h$. *(Famille formée par un seul vecteur non nul).*

Remarquons que h *est non injective, ce qui équivaut à dire que* h *est non surjective puisque* h *un endomorphisme.*

→ *Cherchons* $\operatorname{Im} h =?$
Le théorème du rang : $\underbrace{\dim \operatorname{Ker} h}_{=1} + \dim \operatorname{Im} h = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. *Donc* $\dim \operatorname{Im} h = 2$.

(*On peut déduire de ce résultat aussi, que* $\dim \operatorname{Im} h = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$, *ce qui implique que* $\operatorname{Im} h \neq \mathbb{R}^3$, *par suite* h *est non surjective*).

Cherchons une famille génératrice de $\operatorname{Im} h$.
Soit $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$, *qui est évidemment une famille génératrice de* $\mathbb{R}^3$.
On a $\{h(e_1), h(e_2), h(e_3)\}$ *une famille génératrice de* $\operatorname{Im} h$ *où* $h(e_1) = h(1,0,0) = (2,1,-1)$, $h(e_2) = h(0,1,0) = (-1,0,0)$ *et* $h(e_3) = h(0,0,1) = (0,1,-1)$.
Or $\dim \operatorname{Im} h = 2$, *on choisit donc deux vecteurs libres de* $\{(2,1,-1), (-1,0,0), (0,1,-1)\}$.
Soit par exemple, $\{(-1,0,0), (0,1,-1)\} = \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ *est bien une base de* $\operatorname{Im} h$. ($\mathcal{F}$ *est libre et card* $\mathcal{F} = 2 = \dim \operatorname{Im} h$).

4.6 Matrice d'une application linéaire

Dans tout ce paragraphe, E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions m et n, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (u_1, ..., u_p)$ une base de F.

Remarque
Dans ce qui suit, on verra que l'ordre des vecteurs dans une base est intéressant, d'où la notation $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et non pas $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$, vue que la première notation respecte l'ordre des vecteurs contrairement à la seconde. En effet :

$$\{1,4,\alpha\} = \{4,1,\alpha\} = \{\alpha,1,4\} \ \textit{mais} \ (1,4,\alpha) \neq (4,1,\alpha) \neq (\alpha,1,4).$$

4.6.1 Définitions et exemples

Soit

$$\begin{array}{rccc} f \ : & E & \longrightarrow & F \\ & x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i). \end{array}$$

une application linéaire.

L'application f est entièrement déterminée par la donnée de l'image d'une base $(f(e_i))_{i=1}^{n}$.

→ $e_1 \in E$ et $f(e_1) \in F$, donc $f(e_1) = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{p1}u_p$.

→ $e_2 \in E$ et $f(e_2) \in F$, donc $f(e_2) = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{p2}u_p$.

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

→ $e_n \in E$ et $f(e_n) \in F$, donc $f(e_n) = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{pn}u_p$.

Définition 4.6.1.1
On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, la matrice :

$$\mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \\ \vdots \\ \leftarrow u_p \end{array}$$

Notation : Si $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})$ est notée $\mathcal{M}(f,\mathcal{B})$.

Remarque 4.6.1.2

1) *Attention à l'ordre dans l'écriture de $\mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})$.*

2) *Attention ! la matrice dépend des bases choisies dans E et F.* (voir exemple **3)**)

Exemples 4.6.1.3

1) *Soit*

$$\begin{array}{cccc} \theta : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & 0_F \end{array}$$

l'application nulle.

$$\mathcal{M}(\theta,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = O_{pn} \quad \textit{la matrice nulle.}$$

2) *Soit*

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

l'application identité. Et soit $\mathcal{B}$ une base de E.

$$\mathcal{M}(id_E,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

3) *Soit*

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y,y+z) \end{array}$$

Soient $\mathcal{B} = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ et $\mathcal{B}' = \big((2,0,0),(0,-1,0),(0,0,3)\big)$ deux bases de $\mathbb{R}^3$. Et soient $\mathcal{C} = \big((1,0),(0,1)\big)$ et $\mathcal{C}' = \big((2,0),(0,-3)\big)$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.

$$\rightarrow \qquad \mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (1,0) \\ \leftarrow (0,1) \end{array} \quad car:$$

$$\begin{cases} f(1,0,0) = (1,0) = \mathbf{1}(1,0) + \mathbf{0}(0,1) \\ f(0,1,0) = (1,1) = \mathbf{1}(1,0) + \mathbf{1}(0,1) \\ f(0,0,1) = (0,1) = \mathbf{0}(1,0) + \mathbf{1}(0,1). \end{cases}$$

$$\rightarrow \qquad \mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(2,0,0) & f(0,-1,0) & f(0,0,3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (1,0) \\ \leftarrow (0,1) \end{array} \quad car:$$

$$\begin{cases} f(2,0,0) = (2,0) = \mathbf{2}(1,0) + \mathbf{0}(0,1) \\ f(0,-1,0) = (-1,-1) = -\mathbf{1}(1,0) + (-\mathbf{1})(0,1) \\ f(0,0,3) = (0,3) = \mathbf{0}(1,0) + \mathbf{3}(0,1) \end{cases}$$

$$\rightarrow \qquad \mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (2,0) \\ \leftarrow (0,-3) \end{array} \quad car:$$

$$\begin{cases} f(1,0,0) = (1,0) = \mathbf{\tfrac{1}{2}}(2,0) + \mathbf{0}(0,-3) \\ f(0,1,0) = (1,1) = \mathbf{\tfrac{1}{2}}(2,0) - \mathbf{\tfrac{1}{3}}(0,-3) \\ f(0,0,1) = (0,1) = \mathbf{0}(2,0) - \mathbf{\tfrac{1}{3}}(0,-3). \end{cases}$$

Il est clair que $\mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) \neq \mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}) \neq \mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}')$.

4.6.2 Liens avec le calcul matriciel

Proposition 4.6.2.1
Soient f *et* $g \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *On a :*

$\rightarrow$ $\mathcal{M}(f+g,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) + \mathcal{M}(g,\mathcal{B},\mathcal{C})$.

$\rightarrow$ $\mathcal{M}(\lambda f,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \lambda\mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})$.

(puisque $(f+g)(e_i) = f(e_i) + g(e_i)$ *et* $(\lambda f)(e_i) = \lambda f(e_i)$, $\forall e_i \in \mathcal{B}$ *).*

Proposition 4.6.2.2
Soient E, F *et* G *trois* $\mathbb{K}$*-espace vectoriels de bases respectives* $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}$.
Si $f : E \longrightarrow F$ *et* $g : F \longrightarrow G$ *sont deux applications linéaires, alors*

$$\mathcal{M}(g \circ f,\mathcal{B},\mathcal{D}) = \mathcal{M}(g,\mathcal{C},\mathcal{D}) \times \mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}).$$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] & F \arrow[r, "g"] & G \\
\mathcal{B} \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathcal{C} & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

Corollaire 4.6.2.3
Soit $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire telle que* $\dim E = \dim F$. *On a :*

$$f \text{ est bijective} \Longleftrightarrow \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \text{ est inversible.}$$

Et dans ce cas : $\quad \big(\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})\big)^{-1} = \mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{C}, \mathcal{B}).$

Démonstration.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] & F \arrow[r, "f^{-1}"] & E \\
\mathcal{B} \arrow[rr, bend right, "f^{-1} \circ f = id_E"'] & \mathcal{C} & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Le résultat découle du fait que :

$$I_n = \mathcal{M}(id_E, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f^{-1} \circ f, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{C}, \mathcal{B}) \times \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}).$$

4.6.3 Ecriture matricielle

Soit

$$\begin{array}{cccc}
f \ : & E & \longrightarrow & F \\
 & x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & f(x) = y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i u_i.
\end{array}$$

une application linéaire.

Cette écriture vectorielle peut être traduite en une écriture matricielle comme suit :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}).X = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \ ; \ \textit{où}$$

X est la matrice d'ordre $(n, 1)$ formée par les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^{n}$ de E, et Y est la matrice d'ordre $(p, 1)$ formée par les coordonnées du vecteur $y = f(x)$ dans la base $\mathcal{C} = (u_i)_{i=1}^{p}$ de F. Et on a bien :

$$\begin{array}{lcl}
f(x) = y & : & \textit{Ecriture vectorielle} \\
\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})X = Y & : & \textit{Ecriture matricielle.}
\end{array}$$

En effet : $\forall i \in \{1,...,n\}, \quad f(e_i) = \sum_{j=1}^{p} a_{ji}u_j \quad$ *où* $a_{ji} \in \mathbb{K}$.

On a donc ;

$$\begin{aligned}
y = f(x) &= f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n) \\
&= x_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + u_{p1}u_p) + x_2(a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + u_{p2}u_p) + \cdots \\
&+ x_n(a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + u_{pn}u_p) \\
&= \underbrace{(x_1a_{11} + x_2a_{12} + \cdots + x_na_{1n})}_{\overset{\shortparallel}{y_1}} u_1 + \underbrace{(x_1a_{21} + x_2a_{22} + \cdots + x_na_{2n})}_{\overset{\shortparallel}{y_2}} u_2 + \cdots \\
&+ \underbrace{(x_1a_{p1} + x_2a_{p2} + \cdots + x_na_{pn})}_{\overset{\shortparallel}{y_p}} u_p.
\end{aligned}$$

Donc,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} + \cdots + x_na_{1n} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + \cdots + x_na_{2n} \\ \vdots \\ x_1a_{p1} + x_2a_{p2} + \cdots + x_na_{pn} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{\mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{X}}$$

Exemple 4.6.3.1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *une application linéaire, dont la matrice dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^2$ *est :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

→ *Soit* $x = (2, 1, 4)$, *cherchons* $y = f(x) =?$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad Y = M.X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ & & \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Par suite $f(2, 1, 4) = (15, 8)$.

→ *En général, on peut trouver l'expression de* f *:*
Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. $y = f(x) =?$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad Y = A.X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ & & \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Par suite :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 + x_2 + 3x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3). \end{array}$$

4.7 Changement de bases

4.7.1 Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E.
$\forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ e'_i = \alpha_{1i}e_1 + \alpha_{2i}e_2 + \cdots + \alpha_{ni}e_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}e_j.$
Considérons l'application linéaire $id_E : \underset{\mathcal{B}'}{E} \longrightarrow \underset{\mathcal{B}}{E}$.
Dans ce cas ;

$$\mathcal{M}(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} id_E(e'_1) & \cdots & id_E(e'_n) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow e_1 \\ \vdots \\ \leftarrow e_n \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & & e'_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \\ \leftarrow e_n \end{array},$$

c'est ce qu'on appelle la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et qu'on note $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ ou $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.
Retenons donc la définition suivante :

Définition 4.7.1.1
On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = (\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ dont les colonnes sont les coordonnées −dans la base $\mathcal{B}$− des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$.

Proposition 4.7.1.2
La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice inversible, et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Démonstration.
Soit

$$\begin{tikzcd} \underset{\mathcal{B}'}{E} \arrow[r, "id_E"] \arrow[rr, bend left, "id_E"] & \underset{\mathcal{B}}{E} \arrow[r, "id_E"] & \underset{\mathcal{B}'}{E} \end{tikzcd}$$

D'après (4.6.2), on a :

$$\begin{aligned} I_n = \mathcal{M}(id_E, \mathcal{B}') &= \mathcal{M}(id_E \circ id_E, \mathcal{B}') \\ &= \mathcal{M}(id_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}') \cdot \mathcal{M}(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \\ &= P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}. \end{aligned}$$

Il en découle que $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$.

Exemple 4.7.1.3
Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ une autre base de $\mathbb{R}^2$ où

$$\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + 3e_2 \\ e'_2 = e_1 + e_2. \end{cases}$$

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} e'_1 & e'_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \end{array} .$$

$$P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow e'_1 \\ \leftarrow e'_2 \end{array} = (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$\begin{cases} e_1 = -e'_1 + 3e'_2 \\ e_2 = e'_1 - 2e'_2 . \end{cases}$$

4.7.2 Changement de coordonnées d'un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E, et $x \in E$ tel que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i .$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ deux matrices représentant les coordonnées du vecteur x dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement.
On a alors, $X = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \cdot X'$ et $X' = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \cdot X = (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} \cdot X$.

Exemple 4.7.2.1
Dans l'exemple ci-dessus (4.7.1), *soit $x = (3, 5) \in \mathbb{R}^2$.*
$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ *la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.*

$X' = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ *la matrice des coordonnées de* x *dans la base* $\mathcal{B}'$ *qu'on cherche.*

On a $X' = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \cdot X = (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

4.7.3 Action d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire

Définitions 4.7.3.1 (Rappel)

→ *Deux matrices* A *et* A' *carrées d'ordre* n *sont dites semblables s'il existe une matrice carrée* P *inversible d'ordre* n *telle que* $A' = P^{-1}.A.P$ *(ou* $A = P^{-1}.A'.P$ *).*

→ *En général,*
deux matrices A *et* A' *d'ordre* (m, n) *sont dites équivalentes s'il existe deux matrices carrées* P *et* Q *inversibles, d'ordres respectifs* m *et* n *telles que* $A' = Q.A.P$ *.*

Théorème 4.7.3.2
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels,* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases de* E*,* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *deux bases de* F*,* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$ *et* Q *la matrice de passage de* $\mathcal{C}$ *à* $\mathcal{C}'$*.*
$f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire,* $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ *et* $A' = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$*.*
On a :

$$A' = Q^{-1}.A.P \qquad (\, A \text{ et } A' \text{ sont équivalentes}\,).$$

Ce théorème se résume à travers le schéma suivant :

$$f \;:\; \begin{tikzcd} E\ (\mathcal{B}) \arrow[r, "A = \mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})"] & F\ (\mathcal{C}) \arrow[d, shift left, "Q^{-1}"] \\ E\ (\mathcal{B}') \arrow[u, "P"] \arrow[r, dashed, "A' = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}')"] & F\ (\mathcal{C}') \arrow[u, shift left, "Q"] \end{tikzcd}$$

Démonstration.

$$\begin{tikzcd} E\ (\mathcal{B}) \arrow[r, "f"] & F\ (\mathcal{C}) \arrow[d, "id_F"] \\ E\ (\mathcal{B}') \arrow[u, "id_E"] \arrow[r, dashed, "f"] & F\ (\mathcal{C}') \end{tikzcd}$$

$f = id_F \circ f \circ id_E.$

$$\begin{aligned}
A' = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}') &= \mathcal{M}(id_F \circ f \circ id_E, \mathcal{B}', \mathcal{C}') \\
&= \mathcal{M}(id_F, \mathcal{C}, \mathcal{C}') \,.\, \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \,.\, \mathcal{M}(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \\
&= \left[\mathcal{M}(id_F, \mathcal{C}', \mathcal{C})\right]^{-1} . \, A \,.\, P \\
&= Q^{-1} . \, A \,.\, P \,.
\end{aligned}$$

Corollaire 4.7.3.3
Soient $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.

$$\begin{tikzcd}
f \, : \, \underset{\mathcal{B}}{E} \arrow[r, "A = \mathcal{M}(f,\mathcal{B})"] & \underset{\mathcal{B}}{E} \arrow[d, shift left, "P^{-1}"] \\
\underset{\mathcal{B}'}{E} \arrow[u, "P"] \arrow[r, dashed, "A' = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}')"] & \underset{\mathcal{B}'}{E} \arrow[u, shift left, "P"]
\end{tikzcd}$$

On a $A' = P^{-1} . \, A \,.\, P$.
Notons que A et A' sont semblables.

4.7.4 Exemple d'application

Soit

$$\begin{array}{cccc}
f \; : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
& (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, x + y, x + y)
\end{array}$$

un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1) Chercher $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2) On considère la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 2)$ et $u_3 = (0, 0, 2)$.
Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) Calculer $C = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}')$.

4) Calculer C^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

6) Calculer P^{-1} .

7) En déduire A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Solution.

1)

$$\begin{array}{cc}
& \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 = (1,0,0) \\ \leftarrow e_2 = (0,1,0) \\ \leftarrow e_3 = (0,0,1) \end{array} .
\end{array}$$

En effet :

- $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1,1) = 1.(1,0,0) + 1.(0,1,0) + 1.(0,0,1)$.
- $f(e_2) = f(0,1,0) = (1,1,1) = 1.(1,0,0) + 1.(0,1,0) + 1.(0,0,1)$.
- $f(e_3) = f(0,0,1) = (0,0,0) = 0.(1,0,0) + 0.(0,1,0) + 0.(0,0,1)$.

2) On a $card\,\mathcal{B}' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, il suffit donc de vérifier que $\mathcal{B}'$ est libre. En effet,

$$\det(u_1,u_2,u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

(ou bien on vérifie que, $\forall \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}\ \ \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$).

3)

$$C = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \\ \leftarrow u_3 \end{matrix}$$

car,

- $f(u_1) = f(1,1,1) = (2,2,2) = 2(1,1,1) = 2.u_1$.
- $f(u_2) = f(1,-1,2) = (0,0,0) = 0.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3$.
- $f(u_3) = f(0,0,2) = (0,0,0) = 0.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3$.

4) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ étant diagonale, on a :

$$C^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(On peut le montrer aussi par récurrence sur n).

5)

$$P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{matrix}$$

car,

- $u_1 = (1,1,1) = 1.e_1 + 1.e_2 + 1.e_3$.
- $u_2 = (1,-1,2) = 1.e_1 - 1.e_2 + 2.e_3$.
- $u_3 = (0,0,2) = 0.e_1 + 0.e_2 + 2.e_3$.

6) Méthode des cofacteurs :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\, {}^t Com\, P.$$

- $\det P = -4$ (déjà calculé en **2**)).
- $$Com\, P = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
- ${}^t Com\, P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$
- $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

7)

$$\begin{tikzcd} f \ : \ \underset{(\mathcal{B})}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "A = \mathcal{M}(f,\mathcal{B})"] & \underset{(\mathcal{B})}{\mathbb{R}^3} \arrow[d, shift left, "P^{-1}"] \\ \underset{(\mathcal{B}')}{\mathbb{R}^3} \arrow[u, "P"] \arrow[r, dashed, "C = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}')"] & \underset{(\mathcal{B}')}{\mathbb{R}^3} \arrow[u, shift left, "P"] \end{tikzcd}$$

On a : $C = P^{-1}.A.P \Longrightarrow P.C.P^{-1} = \underbrace{PP^{-1}}_{I_3}.A.\underbrace{PP^{-1}}_{I_3} = I.A.I = A\,.$

Donc $A = P.C.P^{-1}$.

Par suite,

$$\begin{aligned}
A^n &= P.C.\underbrace{P^{-1}.P}_{\overset{\shortparallel}{I_3}}.C.\underbrace{P^{-1}.P}_{\overset{\shortparallel}{I_3}}\ldots P.C.\underbrace{P^{-1}.P}_{\overset{\shortparallel}{I_3}}C.P^{-1} \quad (n\ fois).\\
&= P.\underbrace{C.C\ldots C}_{n\ fois}.P^{-1}.\\
&= P\,.\,C^{\,n}\,.\,P^{-1}\ .
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{n+1} & 2^{n+1} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{2^{n+1}}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= 2^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Remarque

Ainsi, on peut calculer toute puissance de A.

Pour $n = 2019$, par exemple, on obtient :

$$A^{2019} = 2^{2018}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Retenons le but de l'exercice.

→ Etant donnés un endomorphisme f et une base de $\mathcal{B}$, on calcule automatiquement $\mathcal{M}(f,\mathcal{B}) = A$. (Question 1 $(Q:1)$).

→ Le but est de calculer A^n $(Q:7)$), ce qui n'est pas simple à faire directement.

→ Pour cela, on propose une autre base $\mathcal{B}'$ $(Q:2)$), dans laquelle la matrice de f $\mathcal{M}(f,\mathcal{B}') = C$ est beaucoup plus simple que A $(Q:3)$ (dans le sens de pouvoir calculer sa puissance $C^{\,n}$ $(Q:4)$).

Notons ici qu'on a **proposé** la base $\mathcal{B}'$, par contre au chapitre suivant (diagonalisation), c'est nous même qui allons **chercher et construire** cette base $\mathcal{B}'$.

→ $(Q:5)$) et $(Q:6)$) permettent de calculer P et P^{-1} qui font le lien entre A et C.