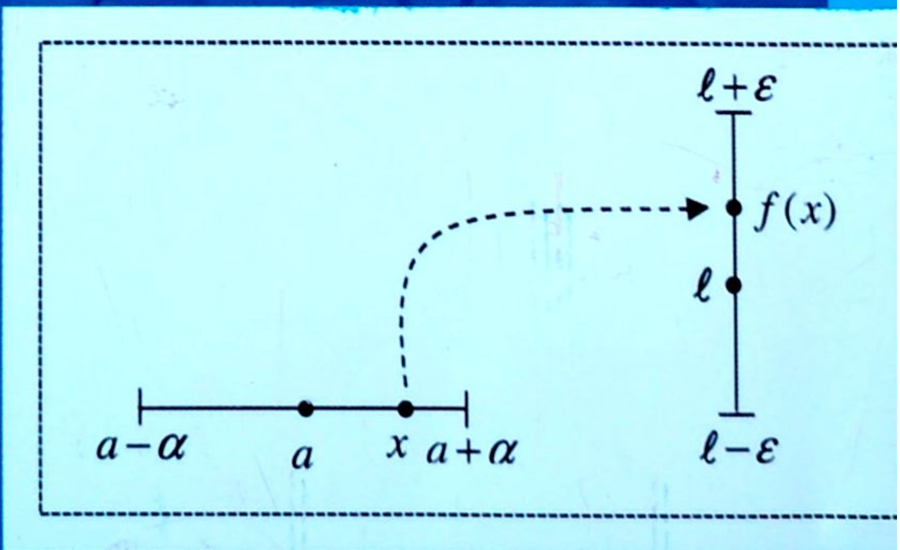
Mohammed Hazi

م . براوي

AU CARREFOUR DES EXAMENS DE TOPOLOGIE

Problèmes et exercices résolus



Pour les deuxièmes et troisièmes années des universités et Grandes Ecoles Scientifiques.

OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

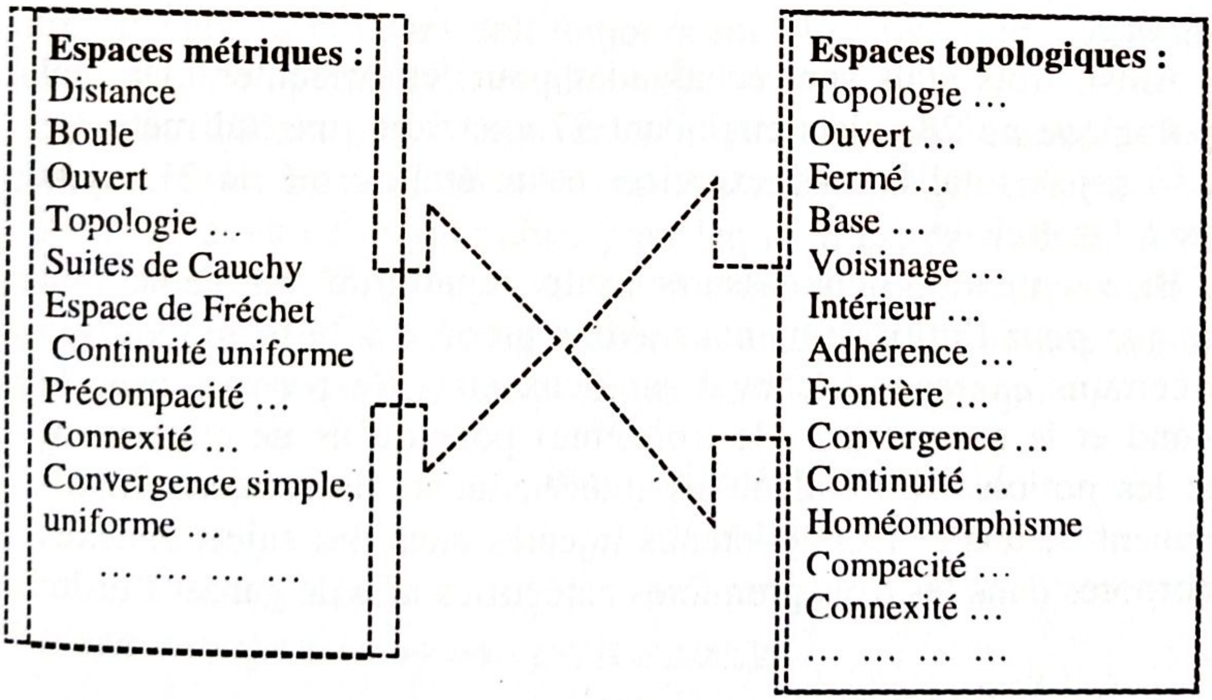
Notes introductives

Les espaces compacts sont pour la topologie générale ce que sont les espaces finis pour la théorie des ensembles.

Jean Dieudonné.

Les sujets ramenés ici proviennent dans leur grande majorité du stock d'examens dispensés au département de mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure de Kouba lors des dix dernières années. Ils concernent le module M 216, (plus connu des étudiants sous le sobriquet de « topologie »,) des diplômes des professeurs des enseignements secondaire et Moyen.Néanmoins, le cadre s'y prêtant, on a jugé utile d'injecter quelques autres sujets dénichés ça et là. Bien plus, nous ne sommes pas empêchés de concocter quelques exercices et problèmes hors stock et qui auraient pu faire objet d'examens. Cela ne peut qu'auréoler le livre et réjouir l'utilisateur d'autres horizons comme notamment celui poursuivant les modules d'Analyse 3 et 4 des licences de mathématiques du système LMD.

Ces examens sont agencés suivant l'avancement dans le programme que voici :



Espaces normés :
Norme, Boule, Ouvert, Base, Topologie, Espaces de Banach, Espaces normés de dimensions finies, Espace normé des applications linéaires, Espaces de Hilbert, Orthogonalité, Projection orthogonale, Séries de Fourier … …

A l'Ecole Normale Supérieure de Kouba, le nombre annuel d'examens est en général de quatre dont trois fondamentaux d'évaluation trimestrielle et un quatrième, dit de rattrapage, pour les étudiants recalés lors de la première session. Ce nombre est parfois revu à la hausse pour inclure un cinquième pour les étudiants absents avec justificatifs à l'une des trois premières épreuves.

Ceux sont des épreuves dont la durée varie d'une heure trente au minimum à deux heures au maximum.

Le premier examen concerne essentiellement les notions fondamentales des espaces topologiques tels que retracées ci-dessus. Le second couvre les dernières notions de la première partie et les premières de la seconde partie du programme. Le troisième prend en charge la troisième partie. Enfin, le quatrième est sensé être une synthèse en recouvrant des notions prises du programme dans sa globalité.

Ainsi, trois étals sont échafaudés pour les présenter : Un étal topologique de 28 sujets englobant 97 exercices, un étal métrique de 14 sujets totalisant 46 exercices et un étal normé de 21 sujets avec 67 exercices.

Bien entendu, pour assurer cette répartition au demeurant pratique pour l'utilisateur, nous avons procédé à la recomposition de certains examens à cheval sur deux étals (le premièr avec le second et le second avec le troisième) pour qu'ils ne concernent que les notions de l'étal où ils interviennent. Ils sont systématiquement défaits et leurs contenus injectés dans des sujets annexes incorporés dans les trois premières catégories afin de garder l'ordre chronologique des notions qu'ils traitent. Nous avons dans cette action veillé autant que faire se peut, à assurer aux sujets concernés leur équilibre en termes de difficultés notionnelles et de durées temporelles.

Il est bien assis dans le monde d'apprentissage, celui des mathématiques notamment, que refaire les examens passés est un outil d'une efficacité insoupsonnée et une méthode autrement plus bénéfique, ayant fait ses preuves dans la préparation des examens à venir, contribuant par là à consolider l'autonomie de l'utilisateur dans son amorce de nouvelles démonstrations. Cela, les étudiants ne l'ignorent pas ! Ne les a-t-on pas conseillés de faire de la curiosité une de leur grande qualité à même d'élargir leurs horizons.

C'est armé de cette conviction que nous avons puisé l'énergie nécessaire pour revisiter les stocks d'examens de la dernière décennie, les trier puis les réorganiser et détailler leurs solutions.

Même si le titre suggère qu'il est destiné à la révision et la préparation et donc suppose une avancée dans le programme, on conseille qu'on peut l'utiliser et le rentabiliser dès l'entame du programme en se limitant chaque fois aux questions supportant les notions traitées en cours. Il va de soi que l'utilisateur ne peut tirer profit de ce livre et le rentabiliser qu'une fois armé de son cours (définitions, propriétés, théorèmes…etc.). Les solutions, même ramenées avec minutie et moult détails, sont toujours à prendre à titre indicatif. L'étudiant doit toujours chercher à se surpasser pour les dépasser en pondant de meilleures.

Enfin, il n'est plus à prouver qu'un livre ne peut espérer vivre et durer, aussi grands soient le soin et l'attention apportés par son auteur, qu'avec l'aide du public pour lequel il est destiné. Il vit en osmose avec lui. Tout en y puisant des apports pour sa formation, ce public peut lui rendre la meilleure ensignalant[↓] toutes sortes d'erreurs le ternissant ou autres anomalies l'obscurcissant.

Semmache le 3 Mars 2017
Mohammed Hazi.

[↓] Il suffit d'un clic à cetteadresse : hazi@hotmail.fr.

Un mot sur le mot « topologie »

Qui parmi le nouveau publique fraichement débarqué de la première année universitaire, toutes spécialités confondues, n'a pas eu à traiter la notion de limite d'une fonction réelle d'une variable réelle en un point? Il est fort à parier que le symbole $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ est le plus récurrent dans les réponses à la question traitant cette notion. Si on lui demande qu'a-t-il compris ou retenu de la définition de cette limite, une multitude de réponses fuserait parmi lesquelles:

$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a (sans l'atteindre).

Des variantes au verbe tendre font légion aussi : s'approcher, aller vers, être près de , petit, très petit, grand, très grand, …

Ales regarder de près, un étudiant attentif se rendrait très vite compte que ces termes sont pour le moins approximatifs sinon inappropriés. Cela ne peut être autrement puisque notre étudiant est armé de la caractéristique fondamentale des nombres réels stipulant qu'entre deux réels existent une infinité d'autres réels. Que signifie alors dans ce cadre qu'un réel est proche d'un autre ! Comment peut prétendre tendre vers zéro celui qui est par avance convaincu qu'à chaque pas fait vers zéro, une infinité de nombres l'en sépare !

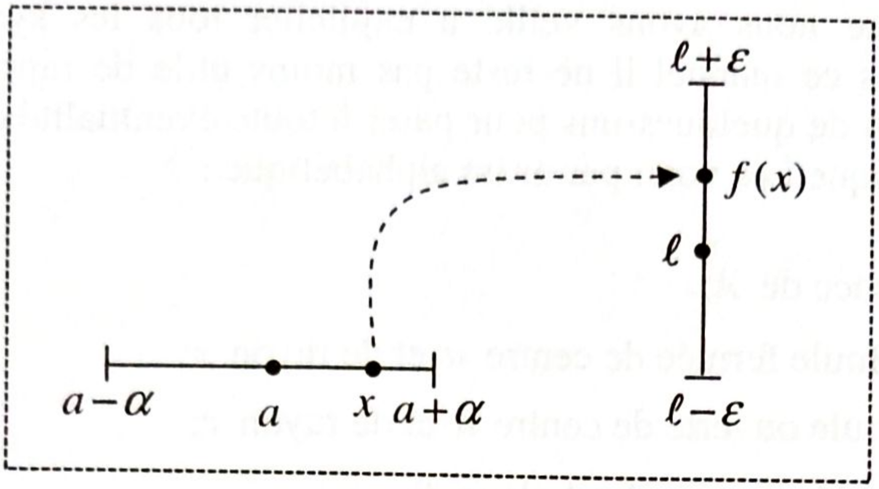
Si l'on reprend cette notion en faisant intervenir ∞ avec $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, par exemple, la situation devient intenable, puisque ∞ n'est même pas localisable et donc il serait incongru de prétendre s'approcher d'un lieu dont on ignore d'avance l'emplacement…

Quelle attitude tenir alors ? Un début de réponse réside, et comme toujours, dans un retour attentif à la définition. Celle-ci indique :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \rho(\varepsilon, x_0) > 0 \ / \ \forall x \in D_f : \ 0 < |x - x_0| \leq \rho \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon,$$

ou :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \rho(\varepsilon, x_0) > 0 \ /$$
$$\forall x \in D_f : \ x \in \left]a - \rho, a + \rho\right[\ \Rightarrow \ f(x) \in \left]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon\right[.$$



Autrement dit, ℓ est une limite de f quand x tend vers a si elle satisfait à la condition suivante :

Quel que soit l'intervalle ouvert I_ℓ centré en ℓ il existe un intervalle ouvert I_a centré en a tel que $f(I_a \cap D_f) \subset I_\ell$.

En convenant d'appeler les intervalles I_ℓ et I_a **voisinage** de ℓ et a respectivement on lit finalement :

ℓ est la limite de f en a si pour tout voisinage I_ℓ de ℓ il existe un voisinage I_a de a tel que l'image de tout point x de I_a (en lequel f est définie) est dans I_ℓ.

L'un des avantages didactiques de cette formulation est qu'elle éloigne les termes inappropriés précédemment cités dans le sillage de la notion de limite et libère celle-ci de son sens courant usité dans la vie courante que colporte l'étudiant avec lui.

Cette approche géométrique est intuitivement ce que véhiculele mot « topologie ». Le rôle fondamental de celle-ci est l'étude des lieux et positions des points, les uns par rapport aux autres, sans tenir compte d'aucun autre attribut, comme leur nombre, leurs formes, … etc. D'ailleurs, on retrouve ce sens véhiculé étymologiquement dans sa dénomination elle-même. C'est du grec « topos » signifiant lieu et « logos » : étude ! ...

Quelques Notations

Bien que nous avons veillé à expliciter tous les symboles utilisés dans ce manuel il ne reste pas moins utile de rappeler la signification de quelques-uns pour parer à toute éventualité d'oubli ou d'équivoque.Les voici par ordre alphabétique :

$\overline{A}$: Adhérence de A;

$B_f(a,r)$: Boule fermée de centre a et de rayon r;

$B(a,r)$: Boule ouverte de centre a et de rayon r;

$C_E A$: Complémentaire de A dans E;

A' : Ensemble (dérivé) des points d'accumulation de A;

$\mathscr{V}(x)$: Famille de voisinages de x;

$\mathscr{F}_r(A)$: Frontière de A;

$\overset{\circ}{A}$: Intérieur de A;

$F^{\perp}$:orthogonal de F;

$[a]$: Partie entière de a;

$(\mathbb{R},|.|)$: $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle ;

$\mathscr{W}(x)$: Système fondamental de voisinages de x.

Etal topologique

Sujet 1

1. Enoncer le second axiome de dénombrabilité et la définition de séparabilité d'un espace topologique.

2. 1) Etant donnés deux sous-ensembles A et B d'unespace topologique (E,τ) montrer que :

i) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$,

ii) $\overset{\circ\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$.

2) On suppose que l'intersection de tous les voisinages fermés de tout point a de E coïncide avec $\{a\}$. Montrer alors que (E,τ) est séparé.

3) On considère dans l'espace usuel $(\mathbb{R},|.|)$ le sous-ensemble $A=\{2\}\cup[0,1[$. Déterminer alors $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, A', $\overset{\circ\circ}{A}$, $\overline{\overline{A}}$ et $(A')'$.

3. Pour tout réel a on pose $O_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y=x+a\}$.

1) Décrire O_2 puis représenter-le sur un repère orthonormé.

2) Montrer que $\mathbb{R}^2=\bigcup_{a\in\mathbb{R}} O_a$.

3) Montrer que la famille τ constituée du vide ϕ et de toutes les réunions des parties (O_a) définit une topologie sur $\mathbb{R}^2$.

4) Montrer que O_a est ouvert et fermé.

5) Déterminer la frontière $\mathscr{F}_r(\{(1,1)\})$.

6) Montrerque l'espace $(\mathbb{R}^2,\tau)$ n'est pas séparé.

7) Déterminer latopologie τ_A induitesur $A=\{(1,0),(0,1)\}$.

8) Montrer que l'axe des abscisses est partout dense.

9) Déterminer un système fondamental de voisinages du point $(1,1)$.

10) Soit (u_n) la suite définie dans $(\mathbb{R}^2, \tau)$ par $u_n = (n, n)$.

i) Montrer que $(1,1)$ est une limite de (u_n).

ii) Déterminer toutes les autres limites.

Solution

1. Consultez vos notes !

2. 1 .i) On a :

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\circ}{A} \subset A \\ \overset{\circ}{B} \subset B\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset A \cup B \;\Rightarrow\; \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}.$$

ii) Tout d'abord, on sait que $\overset{\circ\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A}$. Inversement, et comme $\overset{\circ}{A}$ est ouvert il est voisinage de tous ses points. Donc, tous ses points lui sont intérieurs. Autrement dit, $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ\circ}{A}$. D'où l'égalité.

2) Considérons deux éléments distincts a et b de E. Il en résulte par hypothèse qu'il existe un voisinage fermé V_a de a ne contenant pas b. Il s'en suit qu'il existe un ouvert Ω_a satisfaisant à :

$$a \in \Omega_a \subset \overline{\Omega_a} \subset V_a.$$

On en déduit que b n'est pas dans $\overline{\Omega_a}$. On conclut que Ω_a et $C_E \overline{\Omega_a}$ sont deux ouverts disjoints, le premier contenant a et le second contenant b. E est donc séparé.

3) En rappelant que :

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in A / \exists r > 0 :]x-r, x+r[\subset A\},$$

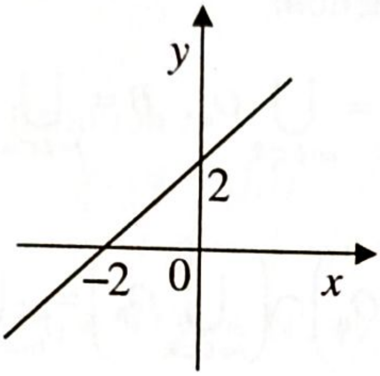
$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} / \forall r > 0 :]x-r, x+r[\cap A \neq \phi\},$$

$$A' = \{x \in \mathbb{R} / \forall r > 0 :]x-r, x+r[\cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi\};$$

il vient aussitôt :

$$\overset{\circ}{A} =]0,1[\,;\ \overline{A} = \{2\} \cup [0,1];\ A' = [0,1];\ \overset{\circ\circ}{A} = \overset{\circ}{A} =]0,1[\,;$$
$$\overline{\overline{A}} = \overline{A} = \{2\} \cup [0,1];\ (A')' = [0,1].$$

3. 1) O_2 est la droite passant par les deux points $(0,2)$ et $(-2,0)$. Voici sa représentation graphique :



2) On a d'une part:

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \ O_a \subset \mathbb{R}^2.$$

Donc, $\bigcup_{a\in\mathbb{R}} O_a \subset \mathbb{R}^2$. D'autre part, on sait que si (b,c) est un point quelconque de $\mathbb{R}^2$ on le trouve appartenant à la droite O_{c-b}. Par suite, $\mathbb{R}^2 \subset \bigcup_{a\in\mathbb{R}} O_a$. Ainsi, $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} O_a$.

3) τ est une topologie sur $\mathbb{R}^2$ si elle satisfait aux trois axiomes de Hausdorff[1].

i) τ contient ϕ par construction et $\mathbb{R}^2$ d'après la question précédente.

ii) Si $(\Omega_i)_{i\in I}$ est une sous-famille de τ on écrit concernant chacun de ses éléments Ω_i :

$$\Omega_i = \bigcup_{a\in K_i \subset \mathbb{R}} O_{a,i};$$

1. Félix Hausdorff (8/11/1868-26/1/1942) : Mathématicien Allemand. Il est considéré comme l'un des fondateurs de la topologie moderne. Il contribua significativement à la théorie des ensembles et à l'analyse fonctionnelle.

D'où :

$$\bigcup_{i\in I}\Omega_i=\bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{a\in K_i}O_{a,i}\right)=\bigcup_{(i,a)\in I\times K_i}O_{a,i}\in\tau.$$

On en déduit que τ est stable par rapport à la réunion.

iii) Soient A et B deux parties propres de $\mathbb{R}^2$ appartenant à τ. On écrit par construction:

$$A=\bigcup_{a\in K\subset\mathbb{R}}O_a;\quad B=\bigcup_{b\in L\subset\mathbb{R}}O_b.$$

D'où :

$$A\cap B=\left(\bigcup_{a\in K}O_a\right)\cap\left(\bigcup_{b\in L\subset\mathbb{R}}O_b\right)=\bigcup_{(a,b)\in K\times L}(O_a\cap O_b).$$

En remarquant que l'intersection $O_a\cap O_b$ est ou vide ou coïncide avec $O_a=O_b$ il vient aussitôt :

$$A\cap B=\bigcup_{a\in K\cap L}O_a\in\tau.$$

Il s'avère ainsi que τ est stable par intersection finie. Elle est, en conclusion, une topologie sur $\mathbb{R}^2$.

4) O_a est ouvert car c'est un élément de τ. Il est aussi fermé car son complémentaire $C_{\mathbb{R}^2}O_a=\bigcup_{b\in\mathbb{R}\setminus\{a\}}O_b$ est ouvert.

5) $(\mathbb{R}^2,\tau)$ n'est pas séparé car tous les voisinages de chaque deux points pris dans un O_a se rencontrent.

6) On a clairement :

$$\overset{\circ}{\overbrace{\{(1,1)\}}}=\phi;\quad\overline{\{(1,1)\}}=O_0=\{(x,x),x\in\mathbb{R}\}.$$

D'où :

$$\mathscr{F}_r(\{(1,1)\})=\overline{\{(1,1)\}}\setminus\overset{\circ}{\overbrace{\{(1,1)\}}}=O_0.$$

7) La topologie trace τ_A est la famille de toutes les intersections

des ouverts de τ avec A. On trouve :

$$\tau_A = \{\phi, A, A \cap O_{-1}, A \cap O_1\} = \{\phi, A, \{(1,0)\}, \{(0,1)\}\}.$$

Elle est discrète.

8) Tout ouvert O_a coupe l'axe des abscisses en $(-a,0)$. Il en résulte que cet axe est partout dense.

9) La famille $\mathscr{W}((1,1)) = \{O_0\}$ est un système fondamental de voisinages de $(1,1)$.

10) i) Rappelons cette définition :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = (1,1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall V_{(1,1)} \in \mathscr{W}((1,1))\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \ \Rightarrow\ u_n \in V_{(1,1)}.$$

Il ressort de ce qui précède que $\mathscr{W}((1,1))$ ne contient que le seul élément $V_{(1,1)} = O_0$. Ce voisinage renferme la suite toute entière (à compter de $n_0 = 0$). On conclut alors que (u_n) converge vers $(1,1)$.

ii) Un point $\ell(\ell_1, \ell_2)$ de $\mathbb{R}^2$ admet $\mathscr{W}((\ell_1, \ell_2)) = \{O_{\ell_2 - \ell_1}\}$ comme système fondamental de voisinages. Donc, il sera limite de (u_n) s'il existe un rang n_0 de telle sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \ \Rightarrow\ u_n \in O_{\ell_2 - \ell_1}.$$

C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ n \geq m \ \Rightarrow\ n = n + \ell_2 - \ell_1 \ \Rightarrow\ \ell_2 = \ell_1.$$

On en déduit que les limites de notre suite sont tous les points de la première bissectrice O_0.

Sujet 2

1. Enoncer la définition d'une valeur d'adhérence d'une suite (x_n) d'un espace topologique (E,τ). Quel lien avec la notion de point d'adhérence ?

2. Soient (A,τ_A) un sous-espace d'un espace topologique (E,τ) et σ une base de τ. On pose :

$$\sigma_A = \{G \in \sigma / \exists H \in \tau : G = H \cap A\}.$$

Montrer que σ_A est une base de la topologie trace τ_A.

3. On munit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ de la topologie τ admettant une base $\mathscr{B}$ définie par :

$$\mathscr{B} = \{]a,b];\ a,b \in \mathbb{R}\}.$$

1) Montrer que la famille $\mathscr{W}(a) = \{]x,a];\ x \in \mathbb{R}\}$ constitue un système fondamental de voisinages du point a.

2) Montrerque τ est séparée.

3) L'espace $(\mathbb{R},\tau)$ est-il séparable ?

4) On pose $A = \{2,5,8\} \cup]9,16]$. Déterminer alors l'intérieur $\mathring{A}$ l'adhérence $\overline{A}$ et l'ensemble dérivé A'.

5) Montrer que zéro n'est pas une valeur d'adhérence pour la suite $u_n = \dfrac{1}{n}$. Est-il de même pour la suite $v_n = -\dfrac{1}{n}$?

6) Montrer que l'identité $id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R},\tau) \to (\mathbb{R},|.|)$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$ alors que sa réciproque $id_{\mathbb{R}}^{-1} : (\mathbb{R},|.|) \to (\mathbb{R},\tau)$ ne l'est en aucun point.

7) Comparer les topologies τ et l'usuelle $|.|$.

4. Pour tout entier naturel n on pose :

$$O_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(x, y) \leq n\}.$$

puis on note τ la famille constituée du vide ϕ et de toutes les réunions des sous-ensembles O_n.

1) Etant donnés deux entiers naturels distincts m et n, déterminer les ensembles $O_m \cap O_n$ et $O_m \cup O_n$.

2) Montrer que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ est un espace topologique.

3) Montrer que l'espace $(\mathbb{R}^2, \tau)$ satisfait au second axiome de dénombrabilité.

4) On pose :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 6x + 5 \leq 0\}.$$

Déterminer la frontière $\mathscr{F}_r(A)$ et l'ensemble dérivé A'.

5) L'espace $(\mathbb{R}^2, \tau)$ est-il séparé ? Séparable ? Justifier.

6) Montrer que la suite $u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ est convergente vers $\ell = (7,9)$.

7) Montrer que la fonction $f : (\mathbb{R}^2, \tau) \to (\mathbb{R}, |.|)$ définie par $f(x, y) = 2x$ n'est pas séquentiellement continue au point $(7,9)$.

8) Montrer de deux manières distinctes que f n'est pas continue au point $(7,9)$.

Solution

1. Se repporter au cours !

2. Soit O un ouvert de τ_A. On écrit par définition :

$$\exists G \in \tau : O = G \cap A.$$

Or, il existe une sous famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ de σ telle que $G = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, donc

$$O = \bigcup_{i \in I} \Omega_i \cap A = \bigcup_{i \in I} (\Omega_i \cap A).$$

On déduit que σ_A est une base pour τ_A.

3. 1) Soit V_a un voisinage d'un point a de $\mathbb{R}$. On écrit par définition :

$$\exists \Omega_a \in \tau : a \in \Omega_a \subset V_a.$$

Comme $\Omega_a = \bigcup_{\substack{(r,s)\in K\times L\subset\mathbb{R}^2 \\ r<s}}]r,s]$ on conclut que :

$$\exists (r_0, s_0) \in K\times L : a \in]r_0, s_0] \subset V_x.$$

Par suite, $]r_0, a] \subset V_a$. Il en découle que la famille $\mathscr{W}(a)$ est un système fondamental de voisinages de a.

2) En s'appuyant sur les définitions adéquates on trouve :

$$\overset{\circ}{A} =]9,16];\ \overline{A} = \{2,5,8\} \cup]9,16];\ A' =]9,16].$$

3) On remarque que pour tout réel négatif r_0 le sous-ensemble $V_0 =]r_0, 0]$ est un voisinage de 0, ne contenant aucun élément de la suite (u_n). De ce fait, 0 ne peut être limite de (u_n). Par contre, On observe concernant (v_n) que la famille $\mathscr{W}(0) = \{]-\varepsilon, 0];\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\}$ constitue un système fondamental de voisinages de 0. D'où :

$$-\varepsilon \leq -\frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq n.$$

Ainsi, il suffit de prendre le rang $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ pour affirmer que (v_n) converge vers 0.

4) On remarque que pour tout $\varepsilon > 0$ on a:

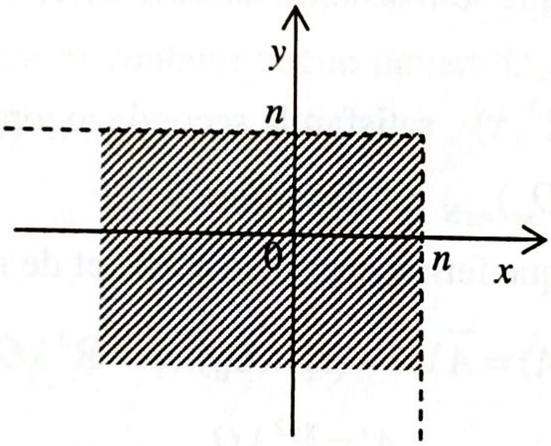
$$id_{\mathbb{R}}^{-1}\left(]id_{\mathbb{R}}(x_0) - \varepsilon, id_{\mathbb{R}}(x_0) + \varepsilon[\right) = id_{\mathbb{R}}^{-1}\left(]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\right)$$
$$=]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\in \mathscr{V}(x_0);$$

car contenant $]x_0 - \varepsilon, x_0]$. Donc, $id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, |.|)$ est continue en tout point x_0 de $\mathbb{R}$. D'autre part, l'application inverse $id_{\mathbb{R}}{}^{-1}$ est discontinue sur $\mathbb{R}$ car :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad id_{\mathbb{R}}\left(\left]id_{\mathbb{R}}{}^{-1}(x_0)-\varepsilon, id_{\mathbb{R}}{}^{-1}(x_0)\right]\right) = \left]x_0-\varepsilon, x_0\right] \notin \mathscr{V}(x_0).$$

5) La continuité de $id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, |.|)$ implique que τ est plus fine que l'usuelle, alors que la discontinuité de $id_{\mathbb{R}}{}^{-1}$ montre que cette dernière n'est pas plus fine que τ.

4. 1) Observons de prime abord que O_n est la portion hachurée du plan dans la représentation ci-après.



Ceci étant, on a clairement:

$$O_m \cap O_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(x,y) \le \min(m,n)\right\} = O_{\min(m,n)};$$
$$O_m \cup O_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(x,y) \le \max(m,n)\right\} = O_{\max(m,n)}.$$

2) ϕ est dans τ parconstruction. D'autre part, on a trivialement $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} O_m \subset \mathbb{R}^2$. De plus, si (a,b) est un point de $\mathbb{R}^2$ ses coordonnées vérifient l'inégalité :

$$\max(a,b) < \max\left(\max\left([a],[b]\right)+1, 0\right),$$

ce qui le rend dans $O_{\max(\max([a],[b])+1,0)}$ et assure l'inclusion inverse avec laquelle s'achève le premier axiome de Hausdorff.

Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une sous-famille quelconque de τ. On a :

$$\bigcup_{i\in I}\Omega_i=\bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{m_i\in K_i\subset\mathbb{N}} O_{m_i}\right)=\bigcup_{(i,m_i)\in I\times K_i} O_{m_i}\in\tau.$$

Donc,le second axiome de Hausdorffest satisfait.

Enfin, si A et B sont eux éléments de τ on écrit :

$$A\cap B=\left(\bigcup_{m\in L\subset\mathbb{N}} O_m\right)\cap\left(\bigcup_{n\in M\subset\mathbb{N}} O_n\right)=\bigcup_{(m,n)\in L\times M}(O_m\cap O_n)$$
$$=\bigcup_{(m,n)\in L\times M} O_{\min(m,n)};$$

ce qui met en exergue le troisième axiome de Hausdorff et clôt la question.

3) L'espace $(\mathbb{R}^2,\tau)$ satisfait le seconde axiome de dénombrabilité, car sa base $(O_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est dénombrable.

4) A est le disque fermé centré en $(3,0)$ et de rayon 2. On a :

$$\mathscr{F}_r(A)=\overline{A}\setminus\overset{\circ}{A}=(\mathbb{R}^2\setminus O_0)\setminus\phi=\mathbb{R}^2\setminus O_0.$$

$$A'=\mathbb{R}^2\setminus O_1.$$

5) L'espace $(\mathbb{R}^2,\tau)$ n'est pas séparé car tous ses ouverts se coupent en O_0. Par contre, il est séparable car il renferme (par exemple) le sous-ensemble dénombrable et partout dense $\{-1\}\times\mathbb{Z}$.

6) La famille $\mathscr{W}(\ell)=\{O_9\}$ est un système fondamental de voisinages du point $\ell=(7,9)$. Comme O_9 contient la suite (u_n) toute entière on conclut que celle-ci converge vers $(7,9)$.

7) On a $f(7,9)=18$. D'autre part, la suite ci-dessus converge vers $(7,9)$ alors que son image $f(u_n)=\dfrac{2}{n}$ converge dans $(\mathbb{R},|.|)$

vers 0. Comme $f(7,9)=18\neq 0$ on conclut que f n'est pas séquentiellement continue en $(7,9)$.

8) f n'est pas continue en $(7,9)$ car elle ne l'est pas séquentiellement.

On peut l'élucider autrement en usant de la définition. Pour tout $\varepsilon>0$, l'image réciproque :

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\left]f(7,9)-\varepsilon, f(7,9)+\varepsilon\right[\right) &= f^{-1}\left(\left]18-\varepsilon,18+\varepsilon\right[\right) \\ &= \left]9-\frac{\varepsilon}{2},9+\frac{\varepsilon}{2}\right[\times\mathbb{R}, \end{aligned}$$

d'un voisinage de l'image $f(7,9)=18$ n'est pas un voisinage de $(7,9)$ car ne pouvant contenir aucun ouvert O_n. Donc, f n'est pas continue en $(7,9)$ comme annoncé.

Sujet 3

1. Citer les définitions d'une base d'une topologie et d'un système fondamental de voisinages d'un point d'un espace topologique.

2. Etant donnée une partie A d'un espace topologique (E,τ), montrer que $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$.

3. On munit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ de la topologie σ définie par :

$$\sigma = \left\{\phi, \mathbb{R}, \left\{\sqrt{2}\right\}, \mathbb{Q}, C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}, \mathbb{Q} \cup \left\{\sqrt{2}\right\}\right\}.$$

1) Donner une base de σ.

2) L'espace $(\mathbb{R},\sigma)$ satisfait-il le second axiome de dénombrabilité ? Justifier.

3) L'espace $(\mathbb{R},\sigma)$ est-il séparé ? Justifier.

4) Donner un sous-ensemble propre ouvert et fermé et un autre ni ouvert ni fermé.

5) Déterminer les familles de voisinages $\mathscr{V}(-1)$ et $\mathscr{V}\left(\sqrt{2}\right)$ et les systèmes fondamentaux de voisinages $\mathscr{W}(-1)$ et $\mathscr{W}(\sqrt{2})$.

6) Donner l'adhérence $\overline{\mathbb{N}}$ et l'intérieur $\mathring{\mathbb{N}}$. En déduire la nature topologique de $\mathbb{N}$.

7) On pose $A = \left\{-1, 2, \sqrt{3}\right\}$. Déterminer l'ensemble dérivé A' et la frontière $\mathscr{F}_r(A)$.

8) A est-il partout dense ? $(\mathbb{R},\sigma)$ est-ilséparable ?Justifier.

9) Les sous-ensembles $B = \{-1, 2\}$ et $C = \left\{2, \sqrt{3}\right\}$ sont-ils ouverts dans le sous-espace (A, σ_A)?

10) Comparer σ et la topologie cofinie τ sur $\mathbb{R}$.

11) Déterminer les limites des suites de termes généraux

$u_n = -n$ et $v_n = \sqrt{n}$.

12) Donner les valeurs d'adhérence de la suite de terme général $w_n = -\dfrac{\sqrt{2}}{n}$.

13) Etudier en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ la continuité de la fonction $f : (\mathbb{R}, \sigma) \to (\mathbb{R}, \sigma)$ définie par $f(x) = 2x$.

14) f est-elle ouverte ? Fermée ? Un homéomorphisme ?

Solution

1. Revisitez vos notes !

2. On a $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$ et $\overline{\overset{\circ}{A}}$ fermé donc, $\overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}} \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$. Inversement, on a $\overset{\circ}{A} \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$ et $\overset{\circ}{A}$ ouvert, donc $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}$; par suite $\overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}}$. l'égalité est achevée.

On a $\overset{\circ}{\overline{A}} \subset \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$ et $\overset{\circ}{\overline{A}}$ ouvert donc $\overset{\circ}{\overline{A}} \subset \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}}$. Inversement, on a $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overline{A}$ et $\overline{A}$ fermée, donc $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}} \subset \overline{A}$; par suite $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}} \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$. D'où l'égalité posée.

3. 1) La base visée est $\mathscr{B} = \left\{\left\{\sqrt{2}\right\}, \mathbb{Q}, C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}\right\}$.

2) Oui, car la base $\mathscr{B}$ est dénombrable.

3) Non, car tous les voisinages de deux rationnels (par exemple) se rencontrent.

4) $\mathbb{Q}$ et $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ étant dans σ on conclut qu'ils sont tous deux ouverts et fermés. Par contre, $\mathbb{N}$ et son complémentaire n'étant pas dans σ ne sont ni ouverts ni fermés.

5) On a par définition :

$$\mathscr{V}(-1) = \{V \subset \mathbb{R} / \mathbb{Q} \subset V\}; \quad \mathscr{V}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{V \subset \mathbb{R} / \sqrt{2} \in V\right\};$$

$$\mathscr{W}(-1) = \{\mathbb{Q}\}; \mathscr{W}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{\left\{\sqrt{2}\right\}\right\}.$$

6) On a par définition $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{Q}$ et $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \phi$. Il en résulte que $\mathbb{N}$ n'est ni ouvert (puisque distinct de son intérieur) ni fermé (car ne coïncidant pas avec son adhérence) .

7) On a par définition :

$$A' = \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\right\};$$

$$\mathscr{F}_r(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \left(\mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt{2}\right\}\right) \setminus \phi = \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt{2}\right\}.$$

8) Non, car $\overline{A} = \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt{2}\right\} \neq \mathbb{R}$.

$(\mathbb{R}, \sigma)$ est séparable car la partie dénombrable $\mathbb{N} \cup \left\{\sqrt{2}\right\}$ (par exemple) est partout dense.

9) B est dans σ_A car $\{-1, 2\} = A \cap \mathbb{Q}$ et C non, car :

$$C \neq A \cap \Omega, \; \forall \Omega \in \sigma.$$

Bien entendu, cela est plus visible si l'on explicite :

$$\sigma_A = \left\{\phi, A, \{-1, 2\}, \left\{\sqrt{3}\right\}\right\}.$$

10) $\mathbb{R}^*$ est ouvert dans τ et ne l'est pas dans σ. Par contre, $\mathbb{Q}$ est ouvert dans σ et ne l'est pas dans τ. Donc, aucune des deux topolo-gies n'est plus fine que l'autre. Elles ne sont pas comparables.

11) Pour tout rationnel ℓ on a $\mathscr{W}(\ell) = \{\mathbb{Q}\}$. Comme $\mathbb{Q}$ contient la suite (u_n) toute entière on conclut que ℓ est une limite de cette dernière. D'autre part, On a :

$$\forall \ell \in C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} \quad \mathscr{W}(\ell) = \begin{cases} \{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}\} & \text{si } \ell \neq \sqrt{2}, \\ \left\{\left\{\sqrt{2}\right\}\right\} & \text{si } \ell = \sqrt{2}. \end{cases}$$

$C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ et $\left\{\sqrt{2}\right\}$ ne renfermant aucun élément de (u_n) on en déduit qu'aucun irrationnel ne peut lui être limite.

La suite (v_n) est divergente. Autrement dit, elle ne peut admettre aucune limite. En effet, si $\sqrt{n}$ est rationnel (respectivement irrationnel) il existe un entier naturel m lequel est supérieur à n et tel que $\sqrt{m}$ soit irrationnel (respectivement rationnel). Ainsi, si ℓ est un rationnel, son voisinage $\mathbb{Q}$ ne peut renfermer la suite (v_n) à partir d'un certain rang. Il en sera de même s'il est irrationnel, puisque $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ et $\{\sqrt{2}\}$ ne peuvent chacun contenir tous les éléments de (v_n) à partir d'un certain rang.

12) $\sqrt{2}$ n'est pas une valeur d'adhérence de la suite (w_n) car le voisinage $\{\sqrt{2}\}$ de $\sqrt{2}$ ne contient aucun élément de (w_n).

Par contre, tout autre irrationnel est une valeur d'adhérence de (w_n) car $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ contient tous les éléments de (w_n).

Enfin, aucun rationnel ne peut être valeur d'adhérence de (w_n). Cela tient du fait que le voisinage $\mathbb{Q}$ de tout rationnel ne contient aucun de ses éléments.

13) On distingue les trois cas possibles suivants.

i) $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

On a :

$$\mathscr{W}(f(x_0)) = \mathscr{W}(\sqrt{2}) = \{\{\sqrt{2}\}\};$$

$$f^{-1}(\{\sqrt{2}\}) = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \notin \mathscr{V}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Donc, f n'est pas continue en x_0.

ii) x_0 est un irrationnel distinct de $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

On a :

$$\mathscr{W}(f(x_0)) = \mathscr{W}(2x_0) = \{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}\};\ f^{-1}(C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}) = C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} \in \mathscr{V}(x_0).$$

Donc, f est continue en x_0.

iii) x_0 est rationnel.

On a :

$$\mathscr{W}^{\frown}\left(f(x_0)\right)=\mathscr{W}^{\frown}(2x_0)=\{\mathbb{Q}\};\ f^{-1}(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}\in\mathscr{V}^{\frown}(x_0).$$

On conclut que f est continue en x_0.

14) f n'est pas ouverte car $\left\{\sqrt{2}\right\}$ est un ouvert alors que son image $f\left(\left\{\sqrt{2}\right\}\right)=\left\{2\sqrt{2}\right\}$ ne l'est pas.

Elle n'est pas fermée, non plus, car $\mathbb{R}\setminus\left\{\sqrt{2}\right\}$ est un fermé tandis que son image $f\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\sqrt{2}\right\}\right)=\mathbb{R}\setminus\left\{2\sqrt{2}\right\}$ ne l'est pas.

Enfin, f ne peut pas être un homéomorphisme car elle est discontinue en $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (On peut aussi rétorquer qu'elle n'est ni ouverte ni fermée.)

Sujet 4

1. Soit (E,τ) un espace topologique séparé.

1) Montrer que pour toute partie finie A de E l'ensemble $\overline{A}\setminus A$ est vide.

2) Que conclure ?

2. Soit (A,τ_A) un sous-espace d'un espace topologique (E,τ). Montrer que :

1) Tout fermé de (A,τ_A) est une trace sur A d'un fermé de E.

2) Tout voisinage d'un point b dans (A,τ_A) est une trace sur A d'un voisinage de b dans (E,τ).

3. Soit τ la sous-famille de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ formée de ϕ et de toute partie dont le complémentaire est inclus dans $\mathbb{N}$.

1) Montrer que τ est une topologie sur $\mathbb{R}$.

2) Comparer τ et la topologie cofinie σ sur $\mathbb{R}$.

3) L'espace $(\mathbb{R},\tau)$ est-il séparé ? Justifier.

4) Caractériser les fermés propres de $(\mathbb{R},\tau)$.

5) Déterminer la topologie trace $\tau_{\mathbb{N}}$ induite par τ sur $\mathbb{N}$.

6) Montrer que « la propriété de séparation » est héréditaire.

7) Montrer en s'aidant du cas présent qu'un espace non séparé peut admettre des sous-espaces séparés.

8) Soient (u_n) et (v_n) les suites réelles données par $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$. Montrer que (u_n) est divergente et (v_n) est convergente.

9) Déterminer les valeurs d'adhérence de (u_n) et (v_n).

10) Soit $f:(\mathbb{R},\tau)\to\left(\mathbb{R},|.|\right)$ la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\in\mathbb{N},\\ 1 \text{ si } x\notin\mathbb{N}.\end{cases}$$

Etudier sa continuité en tout point x_0 de $\mathbb{R}$.

Solution

1. 1) Si A est vide l'affirmation est évidente. Sinon, on procède par l'absurde. Si $\overline{A} \setminus A$ n'est pas vide il contiendrait au moins un point b. En Posant $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$, le fait que E est séparé, assure, pour tout indice i de $\{1, 2, ..., p\}$, l'existence de deux voisinages disjoints V_{a_i} de a_i et W_b^i de b. Il en résulte aussitôt que $\bigcap_{i=1}^{p} W_b^i$ est un voisinage de b ne rencontrant pas A. Absurde !

2) On déduit de ce qui précède que $\overline{A} = A$. Par suite, A est fermée.

2. 1) Soit F un fermé de (A, τ_A). Son complémentaire $C_A F$ est dans τ_A. Donc :

$$\exists \Omega \in \tau / C_A F = \Omega \cap A.$$

Par suite:

$$F = C_A(\Omega \cap A) = C_A\Omega = C_E\Omega \cap A.$$

Comme $C_E\Omega$ est fermé dans (E, τ), F est sa trace dans (A, τ_A).

2) Soit V_b un voisinage de b dans (A, τ_A). On a par définition:

$$\exists \Omega \in \tau_A / b \in \Omega \subset V_b.$$

Ω étant dans τ_A on affirme qu'il existe un ouvert O dans τ tel que $\Omega = \mathrm{O} \cap A$. Il en résulteen prenant $W = \mathrm{O} \cup V_b$ que ce dernier est un voisinage de b dans (E, τ) et que $V_b = W \cap A$.

3. 1) ϕ est dans τ par hypothèse. C'est le cas aussi de $\mathbb{R}$ car $C_{\mathbb{R}}\mathbb{R} = \phi$ est une partie de $\mathbb{N}$. Par ailleurs, si $(\Omega_i)_{i \in I}$ est une sous-famille (ne renfermant pas $\mathbb{R}$) de τ on obtient :

$$C_{\mathbb{R}}(\Omega_i \cap \Omega_j) = C_{\mathbb{R}}\Omega_i \cup C_{\mathbb{R}}\Omega_j \subset \mathbb{N};$$

$$C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i\in I}\Omega_i\right)=\bigcap_{i\in I}C_{\mathbb{R}}\Omega_i\subset\mathbb{N}.$$

On voit ainsi que τ satisfait les trois axiomes de Hausdorff. Elle est alors une topologie sur $\mathbb{R}$.

2) On remarque que $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ est dans σ et n'est pas dans τ. De même, si A est une partie infinie de $\mathbb{N}$ le sous-ensemble $\mathbb{R}\setminus A$ est dans τ mais pas dans σ. On déduit que σ et τ ne sont pas comparables.

3) $(\mathbb{R},\tau)$ n'est pas séparé. Tous ses ouverts propres sont deux à deux concourants :

$$\Omega_1\cap\Omega_2=C_{\mathbb{R}}A_1\cap C_{\mathbb{R}}A_2=C_{\mathbb{R}}(A_1\cup A_2)\neq\phi;\ \ (A_1\subset\mathbb{N},A_2\subset\mathbb{N}).$$

4) F fermé $\Leftrightarrow$ $C_{\mathbb{R}}F$ ouvert $\Leftrightarrow$ $C_{\mathbb{R}}\left(C_{\mathbb{R}}F\right)=F\subset\mathbb{N}$.

On lit : Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}$ est fermé si, et seulement s'il est une partie de $\mathbb{N}$.

5) On remarque que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad C_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{N}\setminus\{n\}\right)\cap\mathbb{N}=\{n\}.$$

On en déduit que la topologie trace $\tau_{\mathbb{N}}$ est discrète : $\tau_{\mathbb{N}}=\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

6) Soient x et y deux points distincts d'un sous-espace (A,θ_A) d'un espace séparé (E,θ). On écrit par définition :

$$\exists V_x,W_y\in\theta\,/\ V_x\cap W_y=\phi.$$

D'où :

$$\exists(V_x\cap A),(W_y\cap A)\in\theta_A\,/\ (V_x\cap A)\cap(W_y\cap A)=\phi.$$

Ainsi, (A,θ_A) est séparé.

7) Il suffit de voir ici que le sous-espace $(\mathbb{N},\tau_{\mathbb{N}})$ discret est séparé alors que $(\mathbb{R},\tau)$ ne l'est pas.

8) On observe que :

$$\forall\ell\in\mathbb{R}\ \ \exists V_\ell=\mathbb{R}\setminus\left(\mathbb{N}\setminus\{\ell\}\right):\ V_\ell\cap\{(u_n)\}=\phi.$$

Il s'avère ainsi que la suite (u_n) n'admet aucune limite. Elle est divergente.

De même, on remarque que :

$$\forall \ell \in \mathbb{R} \quad \forall V_\ell = \mathbb{R} \setminus \left(A \setminus \{\ell\} \right) : \quad \{(v_n)\} \setminus \{0\} \subset V_\ell,$$

A étant une partie non vide de $\mathbb{N}$. Donc, tout réel ℓ est limite de la suite (v_n). Celle-ci est alors convergente.

9) De ce qui précède on déduit que (u_n) n'admet aucune valeur d'adhérence alors que tout réel en est une pour (v_n).

10) Si x_0 est dans $\mathbb{N}$ alors $f(x_0)=0$. On remarque que $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ est un voisinage de 0 alors que $f^{-1}\left(\mathbb{R}\setminus\{1\}\right)=\mathbb{N}$ n'en est pas un pour x_0. Donc, f n'est pas continue sur $\mathbb{N}$.

Si x_0 est dans $C_{\mathbb{R}}\mathbb{N}$ alors $f(x_0)=1$. De plus, pour toute partie non vide A de $\mathbb{N}$ on a :

$$f^{-1}\left(C_{\mathbb{R}}\left(A\setminus\{1\}\right)\right)=\begin{cases}\mathbb{R} & \text{si } \ 0 \notin A, \\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{N} & \text{si } \ 0 \in A.\end{cases}$$

Comme $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ sont des voisinages de x_0 on déduit que f est continue sur $C_{\mathbb{R}}\mathbb{N}$.

Sujet 5

1. Soit b un point d'un sous-espace (A, τ_A) d'un espace topologique (E, τ). Montrer que pour tout système fondamental de voisinages $\mathscr{W}(b)$ de b relativement à τ, la famille :

$$\mathscr{W}_A(b) = \{V \cap A;\ V \in \mathscr{W}(b)\},$$

constitue un système fondamental de voisinages de b par rapport à τ_A.

2. 1) Etant donnés deux sous-ensembles A et B d'un espace topologique (E, τ) montrer que :

i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

ii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

2) On suppose que (E, τ) séparé. Montrer alors que l'intersection de tous les voisinages fermés de tout point a de E coïncide $\{a\}$.

3) On considère dans l'espace usuel $(\mathbb{R}, |.|)$ le sous-ensemble $A = \mathbb{N} \cup [-3, 0[$. Déterminer alors $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, A', $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$, $\overline{\overline{A}}$ et $(A')'$.

3. Pour tout entier naturel m on pose :

$$O_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < m\}.$$

1) Décrire O_2 puis représenter-le sur un repère orthonormé.

2) Montrer que la famille τ constituée du vide ϕ et de toutes les réunions des parties (O_m) définit une topologie sur $\mathbb{R}^2$.

3) Montrerque l'espace $(\mathbb{R}^2, \tau)$ satisfait au second axiome de dénombrabilité.

4) Déterminer la frontière $\mathscr{F}_r(\{(-1, 0)\})$.

5) Montrer que l'espace $(\mathbb{R}^2, \tau)$ est séparable mais non séparé.

6) Donner un système fondamental de voisinages de $(2,2)$.

7) $\cdot$Etant donnée dans $(\mathbb{R}^2,\tau)$ la suite (u_n) de terme général $u_n=(2n+1,-2n+3)$, montrer qu'elle converge vers $(2,2)$ puis déterminer toutes ses autres limites.

8) Soit $f:(\mathbb{R}^2,\tau)\to(\mathbb{R},|.|)$ la fonction définie par $f(x,y)=y$.

i) Montrerque f n'est pas séquentiellement continue en $(2,2)$.

ii) Etudier la continuité de f en tout point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$.

9) Pour tout réel a on définit la fonction $g_a:(\mathbb{R},|.|)\to(\mathbb{R}^2,\tau)$ par $g_a(x)=(x,a)$. Montrer que g_a est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution

1. Soit W_b unvoisinage de b relativement à τ_A. On écrit par définition:

$$\exists O_b\in\tau_A : b\in O_b\subset W_b.$$

D'autre part, O_b étant dans τ_A il existe un ouvert Ω_b dans τ tel que $O_b=\Omega_b\cap A$. Or, Ω_b est lui-même un voisinage de b par rapport à τ, ; donc, il existe un élément V_b dans $\mathscr{W}(b)$ tel que $V_b\subset\Omega_b$. Il en ressort finalement que :

$$V_b\cap A\subset\Omega_b\cap A\subset W_b.$$

$V_b\cap A$ étant dans $\mathscr{W}_A(b)$ la question est close.

2. 1.i) On a :

$$\left.\begin{array}{l} A\subset\overline{A}\\ B\subset\overline{B}\end{array}\right\}\Rightarrow\ A\cup B\subset\overline{A}\cup\overline{B}\ \Rightarrow\ \overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}.$$

D'autre part, on a de même :

$$\left.\begin{array}{l} A\subset A\cup B\\ B\subset A\cup B\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} \overline{A}\subset\overline{A\cup B}\\ \overline{B}\subset\overline{A\cup B}\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}.$$

La conjonction des deux inclusions achève l'égalité.

ii) On a par définition $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. D'autre part, En notant $\mathscr{V}(x)$ la famille de voisinages d'un point x on écrit:

$$x \in \overline{\overline{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \forall V \in \mathscr{V}(x) \quad V \cap \overline{A} \neq \phi.$$

V étant considéré, sans risque de restriction de généralité, ouvert. Le sous-ensemble non vide $V \cap \overline{A}$ renferme au moins un élément y pour lequel V est un voisinage. Donc, $V \cap A \neq \phi$. Il s'en suit que x est dans $\overline{A}$. Ainsi, $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. L'égalité posée est achevée.

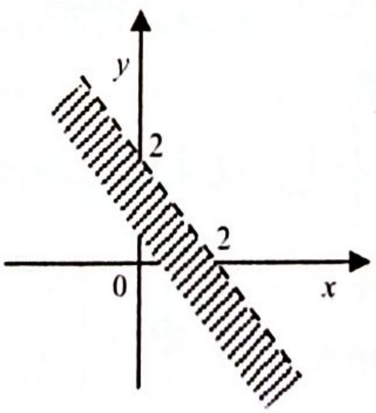
2) On procède par l'absurde. Si la dite intersection contenait un autre point b on assurerait du fait que E est séparé, l'existence de deux voisinages ouverts disjoints S_a de a et T_b de b. Il en résulterait que $C_E T_b$ serait un voisinage fermé de a ne contenant pas b. Absurde !

3) On a,en s'aidant des définitions requises :

$$\overset{\circ}{A} =]-3,0[\,; \; \overline{A} = \mathbb{N} \cup [-3,0]; \; A' = [-3,0];$$

$$\overset{\circ\circ}{A} = \overset{\circ}{A} =]-3,0[\,; \overline{\overline{A}} = \overline{A} = \mathbb{N} \cup [-3,0]; \; (A')' = [-3,0].$$

3. 1) O_2 est le demi plan inférieur ouvert délimité par la droite d'équation $y = -x + 2$. Voici sa représentation graphique :



2) τ est une topologie sur $\mathbb{R}^2$ si elle satisfait aux trois axiomes de Hausdorff.

i) τ contient ϕ par construction. Vérifions que τ renferme aussi $\mathbb{R}^2$. D'une part, On a clairement:

$$\forall m \in \mathbb{N}\ O_m \subset \mathbb{R}^2.$$

Donc, $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} O_m \subset \mathbb{R}^2$. D'autre part, on sait que si (b,c) est un point quelconque de $\mathbb{R}^2$ on le trouve appartenant au demi plan $O_{\max([b+c]+1,0)}$ ($[.]$ désignant la partie entière). Par suite, $\mathbb{R}^2 \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} O_m$. Ainsi, $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} O_m$; donc il est dans τ.

ii) Si $(\Omega_i)_{i\in I}$ est une sous-famille de τ on écrit concernant chacun de ses éléments (non vides) $\Omega_i = \bigcup_{m\in K_i\subset\mathbb{N}} O_{m,i}$. D'où :

$$\bigcup_{i\in I}\Omega_i = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{m\in K_i\subset\mathbb{N}} O_{m,i}\right) = \bigcup_{i\in I} O_{\sup K_i} = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } \sup_{i\in I}(\sup K_i) = +\infty, \\ O_{\sup_{i\in I}(\sup H_i)} & \text{si } \sup_{i\in I}(\sup K_i) < +\infty. \end{cases}$$

On en déduit que τ est stable par rapport à la réunion. (Remarquer qu'en fait, elle l'est par construction !).

iii) Soient A et B deux parties propres de $\mathbb{R}^2$ appartenant à τ. On écrit par construction:

$$A = \bigcup_{p\in K\subset\mathbb{N}} O_p;\ \ B = \bigcup_{q\in L\subset\mathbb{N}} O_q.$$

D'où :

$$\begin{aligned} A\cap B &= \left(\bigcup_{p\in K\subset\mathbb{N}} O_p\right)\cap\left(\bigcup_{q\in L\subset\mathbb{N}} O_q\right) \\ &= \left(\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } \sup K = +\infty, \\ O_{\sup K} & \text{si } \sup K < +\infty. \end{cases}\right)\cap\left(\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } \sup L = +\infty, \\ O_{\sup K} & \text{si } \sup L < +\infty. \end{cases}\right) \\ &= \left(\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } \sup K = \sup L = +\infty, \\ O_{\min(\sup K, \sup L)} & \text{si } \min(\sup K, \sup L) < +\infty. \end{cases}\right) \in \tau. \end{aligned}$$

Donc, τ est stable par intersection finie.

3) La famille $(O_m)_{m\in\mathbb{N}}$ constitue une base de τ. Comme elle est dénombrable, $(\mathbb{R}^2,\tau)$ jouit du second axiome de dénombrabilité.

4) On remarque que $\overset{\circ}{\overbrace{\{(-1,0)\}}}=\phi$ et pour tout entier naturel m on a $\{(-1,0)\}\subset O_m$. Donc, $\overline{\{(-1,0)\}}=\mathbb{R}^2$, par suite :

$$\mathscr{F}_r\left(\{(-1,0)\}\right)=\overline{\{(-1,0)\}}\setminus\overset{\circ}{\overbrace{\{(-1,0)\}}}=\mathbb{R}^2.$$

5) $(\mathbb{R}^2,\tau)$ est séparable car il renferme (par exemple) le sous-ensemble dénombrable et partout dense $\{(-1,0)\}$. Par contre, il n'est pas séparé car tous ses ouverts (non vides) se rencontrent, (ce qui prive tout couple de points d'avoir des voisinages disjoints).

6) La famille $\mathscr{W}((2,2))=\{O_5\}$ est un système fondamental de voisinages du point $(2,2)$.

7) Rappelons que :

$$\lim_{n\to\infty}u_n=(2,2)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall V_{(2,2)}\in\mathscr{W}((2,2))\ \exists n_0\in\mathbb{N}/\forall n\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0\ \Rightarrow\ u_n\in V_{(2,2)}.$$

Il ressort de ce qui précède que $\mathscr{W}((2,2))$ ne contient que le seul élément $V_{(2,2)}=O_5$. Ce voisinage renferme la suite toute entière (à compter de $n_0=0$. On conclut alors que (u_n) converge vers $(2,2)$.

Par ailleurs, un point $\ell(a,b)$ de $\mathbb{R}^2$ admet la famille $\left\{O_{\max([a+b]+1,0)}\right\}$ comme système fondamental de voisinages. Donc, il sera limite de (u_n) s'il existe un rang s de telle sorte que :

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ n\geq s\ \Rightarrow\ u_n\in O_{\max([a+b]+1,0)}.$$

C'est-à-dire :

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ n\geq s\ \Rightarrow\ -2n+3<-2n-1+\max\left([a+b]+1,0\right).$$

Ainsi, les limites de notre suite sont tous les points du plan satisfaisant la contrainte $[a+b]>3$.

8) i) f n'est pas séquentiellement continue en $(2,2)$ car la suite (u_n) converge vers ce point dans $(\mathbb{R}^2,\tau)$ alors que la transformée $(f(u_n))=(-2n+3)$ de celle-ci est divergente dans $(\mathbb{R},|.|)$.

ii) Soient (x_0,y_0) un point de $(\mathbb{R}^2,\tau)$ et $V_{y_0}=]y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon[$ avec ε pris dans $\mathbb{R}_+^*$, un voisinage de $f(x_0,y_0)=y_0$. Le sous-ensemble $f^{-1}(V_b)=\mathbb{R}\times]y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon[$ ne pouvant contenir aucun ouvert (non vide), ne peut prétendre être voisinage de (x_0,y_0). Donc, f est non continue en ce point.

9) Pour tout x_0 de $(\mathbb{R},|.|)$ la famille $\mathscr{W}((x_0,a))=\left\{O_{\max([x_0+a]+1,0)}\right\}$ constitue un système fondamental de voisinage de l'image $g_a(x_0)$.

Comme :

$$g_a^{-1}\left(O_{(\max[x_0+a]+1,0)}\right)=]-\infty,\max\left([x_0+a]+1,0\right)-a\Big[,$$

est voisinage de x_0 on affirme que g_a est continue en x_0.

Remarque :

On peut remarquer que :

$$\forall m\in\mathbb{N}\ \ g_a^{-1}(O_m)=]-\infty,m-a[.$$

Autrement dit, l'image réciproque de tout élément O_m de la base de τ est un ouvert de $(\mathbb{R},|.|)$. Donc, g_a est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Sujet 6

1. Définir la notion de continuité séquentielle d'une fonction $f:(E,\tau)\to(F,\theta)$.

Quel rapport a-t-elle avec celle de la continuité tout court ?

2. On munit l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ de la topologie τ définie par $\mathbb{N}$ et toute partie Ω dont le complémentaire $C_{\mathbb{N}}\Omega$ contient le jour a, le mois b et l'année c de votre date de naissance.

1) Quelle est la nature topologique des sous-ensembles $\{3017,3018\}$, $\{c,2013\}$ et $\{0,a,b,c\}$. Justifier.

2) Comparer la topologie usuelle $|.|_{\mathbb{N}}$ avec la présente τ.

3) Montrer que 0 n'est pas une valeur d'adhérence pour la suite $(u_n)_n$ donnée par $u_n=n$.

4) Déterminer toutes les limites de la suite $(u_n)_n$.

3. Etant donné un réel a on pose :

$$\Omega_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y-ax+3a=0\},$$

$$\Omega_\infty=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=3\}.$$

On note σ la famille constitué du vide ϕ et de toutes les réunions des sous-ensembles Ω_a (a étant pris dans $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$).

1) Montrer que σ n'est pas une topologie sur $\mathbb{R}^2$.

2) Avec quelle condition renforcer σ pour qu'elle définisse une topologie sur $\mathbb{R}^2$.

On suppose dans toute la suite cette condition réalisée.

3) Déterminer la frontière $\mathscr{F}_r(\{(3,0)\})$.

4) L'espace $(\mathbb{R}^2,\sigma)$ est-il séparé ? Séparable ? Justifier.

5) On considère le cercle $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=4\}$.

i) Déterminer les équations des deux tangentes à C menées du point $(3,0)$.

ii) Déterminer l'adhérence $\overline{C}$, l'intérieur $\overset{\circ}{C}$ et l'ensemble dérivé C'.

6) Donner un ouvert propre du sous-espace (C,σ_C).

7) Déterminer un système fondamental de voisinages du point $(0,6)$.

8) Soit (u_n) la suite définie dans $(\mathbb{R}^2,\sigma)$ par $u_n=(n,-2n+6)$. Montrer qu'elle converge vers $(0,6)$.

9) Caractériser toutes les suites convergeant vers $(3,0)$.

Solution

1. Consultez vos notes !

2. 1) Signalons de prime abord cette caractérisation :

Un sous-ensemble Ω de $(\mathbb{N},\tau)$ est ouvert si $\{a,b,c\}$ n'est pas de ses parties. Ainsi, on conclut clairement que:

$\{3017,3018\}$ est un ouvert non fermé ;

$\{c,2013\}$ n'est ni ouvert ni fermé ;

$\{0,a,b,c\}$ est un fermé non ouvert.

2) On sait que la topologie trace usuelle $|.|_{\mathbb{N}}$ est discrète. Donc, elle est plus fine que τ. Inversement, celle-ci n'est pas plus fine que l'usuelle $|.|_{\mathbb{N}}$ car $\{c,2013\}$ est ouvert dans $(\mathbb{N},|.|_{\mathbb{N}})$ mais pas dans $(\mathbb{N},\tau)$.

3) 0 est valeurd'adhérence de (u_n) si chacun de ses voisinages contient une infinité d'éléments de $(u_n)_n$. Ce n'est pas le cas ici car $\{0\}$ est un voisinage de 0 ne contenant qu'un seul élément de la suite (0 lui même !).

4) On distingue deux cas.

i) Tout entier naturel ℓ de $C_{\mathbb{N}}\{a,b,c\}$ admet le singleton $\{\ell\}$ comme voisinage ne contenant qu'un seul élément de la suite $(u_n)_n$: ℓ lui-même ! Donc, il ne peut être sa limite.

ii) Tout élément ℓ de $\{a,b,c\}$ n'admet que $\mathbb{N}$ comme unique voisinage. Celui-ci contenant la suite $(u_n)_n$ toute entière, on conclut que cette dernière converge vers chacun de ces points.

3. 1) σ n'est pas une topologie car elle n'est pas stable par intersection, puisque pour tous réels distincts a et b on a:

$$\Omega_a \cap \Omega_b = \{(3,0)\} \notin \sigma.$$

2) σ contient ϕ par construction. D'autre part, on remarque que $\bigcup_{a\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}} \Omega_a \subset \mathbb{R}^2$. Comme:

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : (\alpha,\beta)\in\begin{cases}\Omega_{\frac{\beta}{\alpha-3}} & \text{si } \alpha\neq 3,\\ \Omega_\infty & \text{si } \alpha=3,\end{cases}$$

on déduit que $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{a\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}} \Omega_a$. Par suite, $\mathbb{R}^2$ est dans σ. Celle-ci satisfait (sans aucune contrainte) au premier axiome de Hausdorff.

σ est stable par rapport à la réunion par construction. Donc, le second axiome de Hausdorff est satisfait (sans aucune condition).

σ n'est pas stable par rapport à l'intersection d'après la première question. On en déduit que la condition visée est l'appartenance de $\{(3,0)\}$ à σ.

3) On a:

$$\mathscr{F}_r(\{(3,0)\}) = \overline{\{(3,0)\}} \setminus \overset{\circ}{\widehat{\{(3,0)\}}} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(3,0)\}.$$

4) $(\mathbb{R}^2,\sigma)$ n'est pas séparé car tous ses ouverts (non vides) se coupent en $\{(3,0)\}$. Par contre, il est séparable car il renferme la partie dénombrable et partout dense $\{(3,0)\}$.

5) i) Un point $M(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ appartient à la tangente à C menée de $(3,0)$ si le système algébrique :

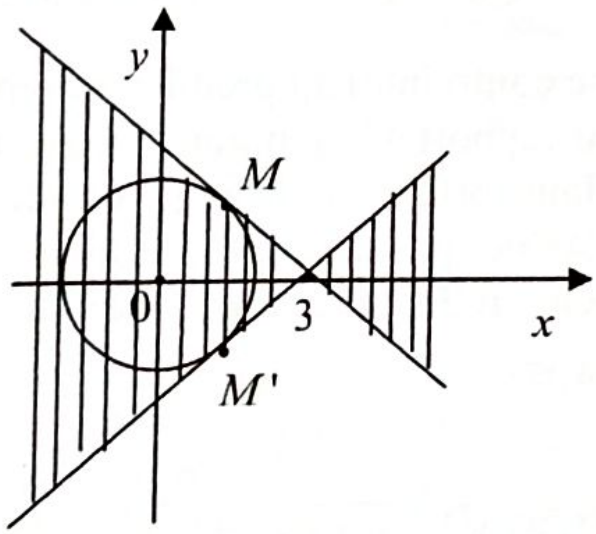
$$\begin{cases} y = a(x-3), \\ x^2 + y^2 = 4, \end{cases}$$

admet une unique solution. Une simple substitution mène à l'équation du second degré :

$$(*) \qquad (a^2+1)x^2 - 6a^2x + 9a^2 - 4 = 0,$$

dont le discriminant $\Delta' = 4 - 5a^2$ doit être nul. Cela se réalise si $a = \pm\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$. Il en ressort aussitôt que les deux tangentes visée sont $\Omega_{\frac{2}{5}\sqrt{5}}$ et $\Omega_{\frac{-2}{5}\sqrt{5}}$.

ii) On a $\overline{C} = \bigcup_{a \in \left[\frac{-2}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}\right]} \Omega_a \setminus \{(3,0)\}$. C'est la portion du plan comprise entre les deux tangentes $\Omega_{\frac{2}{5}\sqrt{5}}$ et $\Omega_{\frac{-2}{5}\sqrt{5}}$.



$\overset{\circ}{C} = \phi$: Le cercle ne pouvant contenir aucune droite (et encore moins une réunion de droites !).

$$C' = \overline{C} \setminus \{M, M'\} = \bigcup_{a \in \left[\frac{-2}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}\right]} \Omega_a \setminus \{(3,0), M, M'\}$$

$$= \bigcup_{a \in \left[\frac{-2}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}\right]} \Omega_a \setminus \left\{(3,0), \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{5}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}\sqrt{5}\right)\right\}$$

où M et M' désignent les deux points de tangence.

6) Un ouvert O_C de (C, σ_C) est l'intersection du cercle C avec une droite passant par $(3,0)$. On peut par exemple prendre :

$$O_C = C \cap \Omega_0 = \{(2,0), (-2,0)\}.$$

7) La droite $\Omega_{\frac{6-0}{0-3}=-2}$ est un voisinage ouvert du point $(0,6)$. On en déduit que la famille $\mathscr{W}((0,6)) = \{\Omega_{-2}\}$ constitue un système fondamental de voisinages de ce dernier.

8) L'unique élément de $\mathscr{W}((0,6))$ contient la suite (u_n) toute entière. Donc, cette suite converge vers $(0,6)$.

9) Le singleton $\{(3,0)\}$ est un voisinage ouvert de $(3,0)$. Il en résulte que les suites convergeant vers ce point sont les seules suites stationnaires.

Sujet 7

1. 1) Soit A un sous-ensemble non vide d'un espace topologique (E,τ). Montrer que :

i) $C_E(\overset{\circ}{A}) = \overline{C_E A}$;

ii) A ouvert et fermé $\Leftrightarrow \mathscr{F}_r(A) = \phi$.

2) i) Montrer de deux manières différentes que dans l'espace usuel $(\mathbb{R}, |.|)$ tout nombre irrationnel est limite d'une suite rationnelle.

ii) En déduire que $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé.

2. Etant donné un réel positif ou nul r on pose :

$$\Omega_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = r\cos t,\ y = r\sin t;\ t \in [0, 2\pi[\right\},$$

et on considère la famille $\sigma = \{\Omega_r, r \in \mathbb{R}_+\}$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la topologie τ admettant σ comme base et on pose :

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x+y| > 2\right\}.$$

1) Représenter A dans un repère orthonormé.

2) Déterminer l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ et l'adhérence $\overline{A}$.

3) En déduire la nature topologique de A.

3. On note τ la sous-famille de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ constituée de $\mathbb{R}$ et de toute partie ne contenant pas 2012.

1) Montrer que $(\mathbb{R}, \tau)$ est un espace topologique.

2) $(\mathbb{R}, \tau)$ est-il séparé ? Justifier.

3) Donner les deux familles de voisinages $\mathscr{V}(0)$ et $\mathscr{V}(2012)$ et un système fondamental de voisinages $\mathscr{W}(0)$ de 0.

4) Donner une base σ de la topologie τ.

5) Déterminer l'intérieur $\overset{\circ}{\mathbb{N}}$, l'adhérence $\overline{\mathbb{N}}$, l'ensemble dériv $\mathbb{N}'$ et l'extérieur $Ex(\mathbb{N})$.

6) Déterminer l'adhérence de tout sous-ensemble non vide A de $\mathbb{R}$.

7) $(\mathbb{R}, \tau)$ est-il séparable ? Justifier.

8) Comparer la topologie τ avec l'usuelle $|.|$.

9) Déterminer la topologie trace $\tau_{\mathbb{Z}}$.

10) Etudier dans $(\mathbb{R}, \tau)$ la nature de la suite $(u_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$.

11) Déterminer dans $(\mathbb{R}, \tau)$ les valeurs d'adhérence de la suite $(v_n)_n = (n)_n$.

Solution

1. 1.i) $\mathscr{V}(x)$ désignant lafamille de voisinages de x, on a aussitôt:

$$x \in \overline{C_E A} \Leftrightarrow V \cap C_E A \neq \phi,\ \forall V \in \mathscr{V}(x)$$

$$\Leftrightarrow A \notin \mathscr{V}(x) \Leftrightarrow x \notin \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow x \in C_E \overset{\circ}{A}.$$

ii) De même, on a :

$$A \text{ ouvert et fermé } \Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A} = \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \phi \Leftrightarrow \mathscr{F}_r(A) = \phi.$$

2) i) Si α est un réel irrationnel, la suite rationnelle $x_n = \frac{[\alpha n]}{n}$, par exemple, l'admet comme limite.

Une autre méthode consiste à écrire en vertu de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall \alpha \notin \mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \ \left]\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}\right[\cap \mathbb{Q} \neq \phi.$$

Il en résulte qu'il existe une suite rationnelle (y_n) telle que :

$$\alpha - \frac{1}{n} < y_n < \alpha + \frac{1}{n}.$$

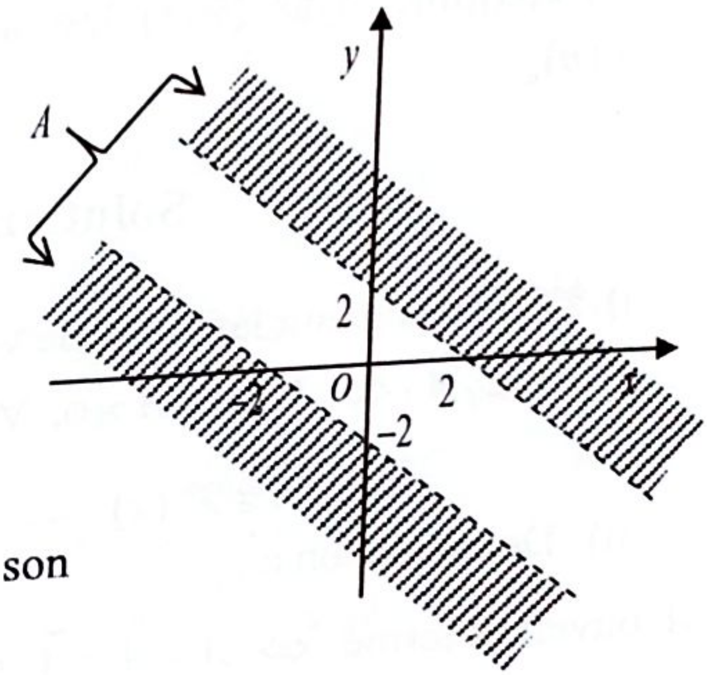
Le théorème des gendarmes permet de conclure que la suite (y_n) converge vers l'irrationnel α.

ii) $\mathbb{Q}$ ne renfermant pas les limites de certaines de ses suites est nécessairement distinct de son adhérence, donc non fermé.

2. 1) Observons de prime abord que σ est l'ensemble des cercles concentrés en l'origine. A présent, A s'écrit :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x+y| > 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y > 2,\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y < -2\}.$$

C'est la portion du plan hachurée ci-contre.



2) On a $\overset{\circ}{A} = \phi$ et $\overline{A} = \mathbb{R}^2 \setminus D$, où D est le disque fermé centré en $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

3) A n'est ni ouvert (cardistinct de son intérieur) ni fermé (puisque distinct de son adhérence).

3. 1) Il est aisé (à présent !) de s'assurer que τ satisfait aux trois axiomes de Hausdorff.

2) $(\mathbb{R}, \tau)$ n'est pas séparé car l'unique voisinage $\mathbb{R}$ du point 2012 rencontre tous les voisinages de tout autre point.

3) On a, en s'adossant aux définitions requises:

$$\mathscr{V}(0) = \{V \subset \mathbb{R} / 0 \in V\};$$
$$\mathscr{V}(2012) = \{\mathbb{R}\};$$
$$\mathscr{W}(0) = \{\{0\}\}.$$

4) La famille $\sigma = \{\mathbb{R}, \{x\}, x \in \mathbb{R} \setminus \{2012\}\}$ est une base de τ.

5) On a :

$\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \setminus \{2012\}$; $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$; $\mathbb{N}' = \{2012\}$; $Ex(\mathbb{N}) = C_{\mathbb{R}} \overline{\mathbb{N}} = C_{\mathbb{R}} \mathbb{N}$.

6) Pour toute partie non vide A de $\mathbb{R}$ on a $\overline{A} = A \cup \{2012\}$.

7) Non, c'est une conséquence immédiate de (6).

8) On remarque que $\{0\}$ est dans τ mais pas dans $|.|$ alors que $]0, 2013[$ est dans $|.|$ et pas dans τ. On déduit qu'aucune des deux topologies n'est plus fine que l'autre. Elles ne sont pas comparables.

9) On a $\tau_{\mathbb{Z}} = \mathscr{P}(\mathbb{Z}) \setminus \{A \subset \mathbb{Z} / 2012 \in A\}$.

10) Le point 2012 n'admettant que le seul voisinage $\mathbb{R}$ est évidemment limite de $(u_n)_n$. Tout autre point ℓ de $\mathbb{R}$ ne peut être limite car admettant le voisinage singleton $\{\ell\}$, lequel ne peut contenir éventuellement qu'un seul point de la suite : ℓ lui-même. Ainsi, on conclut que $(u_n)_n$ est convergente !

11) Pour les mêmes raisons ci-dessus, la suite $(v_n)_n$ ne peut admettre que la seule valeur d'adhérence 2012. (C'est d'ailleurs sa limite !)

Remarque

Il est à présent clair que les conclusions des deux dernières questions sont valables pour n'importe qu'elle autre suite.

Sujet 8

1. On munit $\mathbb{R}$ des cinq topologies suivantes : la grossière τ, la discrète θ, la cofinie σ la codénombrable ω et l'usuelle $|.|$. Lequel des cinq espaces topologiques associés est séparé non séparable, séparable non séparé, séparé et séparable et enfin non séparé et non séparable ?

2. 1) Caractériser les suites convergentes d'un espace topologique codénombrable E.

2) En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite d'un tel espace.

3. Pour tout réelpositif (ou nul) r on pose :

$$\Omega_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = r^2\right\},$$

et onnote τ la sous-famille de $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ formée de l'ensemble vide ϕ et de toutes les réunions des cercles Ω_r concentrés en l'origine.

1) Montrer que τ est une topologie sur $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que chaque Ω_r est ouvert et fermé.

3) Comparer les topologies τ et $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$.

4) Déterminer un système fondamental de voisinage $\mathscr{W}((0,0))$ pour $(0,0)$ et un autre $\mathscr{W}((1,2))$ pour $(1,2)$.

5) L'espace $(\mathbb{R}^2, \tau)$ est-il séparé ? Justifier.

6) Déterminer l'adhérence $\overline{\{0\} \times \mathbb{N}}$ et la frontière $\mathscr{F}_r(\{(3,0)\})$.

7) On note $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\right\}$ la diagonale de $\mathbb{R}^2$.

i) Déterminer $\mathring{\Delta}$ et $\overline{\Delta}$.

ii) Quelle est la nature topologique de Δ ?

8) On pose $A = [-2,2] \times [-3,3]$.

i) Déterminer $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ puis représenter-les graphiquement sur un même repère orthonormé.

ii) Quelle est la nature topologique de A?

iii) Exhiber deux ouverts propres du sous-espace (A, τ_A).

9) Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies par $u_n = (\cos n, \sin n)$ et $v_n = ((-1)^n + 2, (-1)^n + 3)$.

i) Déterminer toutes les limites de $(u_n)_n$.

ii) Montrer que $(v_n)_n$ est divergente.

iii) Déterminer toutes les valeurs d'adhérence de $(v_n)_n$.

10) Etant donné un réel a on considère les deux fonctions $\varphi : (\mathbb{R}^2, \tau) \to \left(\mathbb{R}^2, |.|\right)$ et $\psi : \left(\mathbb{R}^2, |.|\right) \to (\mathbb{R}^2, \tau)$ définies par :

$$\varphi(x, y) = x; \ \psi(x) = (x, a).$$

i) Etudier la continuité de φ et ψ sur leur domaine de définition.

ii) φ et ψ sont-elles des homéomorphismes ?

Solution

1. Tout d'abord, on rappelle qu'un espace (E, T) est dit séparé (ou de Hausdorff) si chaque deux points distincts possèdent deux voisinages disjoints.

Il est dit séparable s'il renferme une partie dénombrable et partout dense. Ainsi :

L'espace grossier $(\mathbb{R}, \tau)$ ne possédant qu'un seul ouvert non vide, est séparable et non séparé.

L'espace discret $(\mathbb{R}, \theta)$, où tout singleton est ouvert, est séparé et non séparable.

L'espace cofini $(\mathbb{R}, \sigma)$ dont tout ouvert est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points, est séparable et non séparé.

L'espace codénombrable $(\mathbb{R}, \omega)$ est non séparé et non séparable. Tout sous-ensemble dénombrable étant fermé, il ne peut être partout dense.

L'espace usuel $(\mathbb{R},|.|)$ est, comme déjà vu, séparé et séparable.

2. 1) Soit $(u_n)_n$ une suite de E. La famille de tous les voisinages De tout point ℓ de E, est :

$$\mathscr{V}(\ell)=\{V_\ell = E\setminus(A\setminus\{\ell\}),\ A\ dénombrable\}.$$

Notons B l'ensemble des valeurs de $(u_n)_n$. Deux cas se présentent.

i) Si $(u_n)_n$ est stationnaire de valeur principale ℓ, alors tout voisinage $V_\ell = E\setminus(A\setminus\{\ell\})$ de ℓ contient tous les éléments de la suite $(u_n)_n$, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux. Celle-ci est alors convergente vers ℓ.

ii) Si $(u_n)_n$ est non stationnaire alors le voisinage $V_\ell = E\setminus(B\setminus\{\ell\})$ de ℓ ne peut contenir au plus que ℓ. Donc, $(u_n)_n$ ne peut converger vers ℓ.

2) Il est immédiat, au vu de ce qui précède, que seules les suites stationnaires de E possèdent chacune une valeur d'adhérence (leur limite). L'ensemble des valeurs d'adhérence de toute autre est vide.

3. 1) ϕ est dans τ par construction. Pourque $\mathbb{R}^2$ soit lui aussi dans τ il suffit d'avoir $\mathbb{R}^2=\bigcup_{r\in\mathbb{R}_+}\Omega_r$. Il est évident que $\bigcup_{r\in\mathbb{R}_+}\Omega_r\subset\mathbb{R}^2$.

D'autre part, tout point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$ étant dans le cercle $\Omega_{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$ on conclut que $\mathbb{R}^2\subset\bigcup_{r\in\mathbb{R}_+}\Omega_r$. D'où l'égalité visée. Ainsi, τ satisfait au premier axiome de Hausdorff.

τ est par construction stable par rapport à la réunion. Donc, le second axiome de Hausdorff est satisfait.

Montrons enfin qu'il va de même du troisième axiome. Autrement dit, testons la stabilité de τ par rapport à la l'intersection finie. Pour ce faire, on remarque d'abord que :

$$\forall r,s\in\mathbb{R}_+ \ \Omega_r\cap\Omega_s=\begin{cases}\phi & \text{si } r\neq s,\\ \Omega_r & \text{si } r=s.\end{cases}$$

A présent, si A et B sont deux éléments non vides de τ on obtient aussitôt :

$$A\cap B=\left(\bigcup_{r\in L_1\subset\mathbb{R}_+}\Omega_r\right)\cap\left(\bigcup_{s\in L_2\subset\mathbb{R}_+}\Omega_s\right)=\bigcup_{(r,s)\in L_1\times L_2}\Omega_r\cap\Omega_s\in\tau.$$

La question est achevée.

2) Ω_r appartient à τ, donc il est par définition ouvert. De plus, son complémentaire $C_{\mathbb{R}^2}\Omega_r=\bigcup_{\substack{s\in\mathbb{R}_+\\ s\neq r}}\Omega_s$ est lui aussi ouvert. Donc Ω_r est fermé.

3) La topologie discrète $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ est bien entendu plus fine que τ. Par contre, cette dernière n'est pas plus fine que la discrète puisque tout singleton distinct de $\{(0,0)\}$ est ouvert dans $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ et ne l'est pas dans τ.

4) Il suffit de prendre :

$$\mathscr{W}((0,0))=\{\{(0,0)\}\}=\{\Omega_0\};\ \mathscr{W}((1,2))=\{\Omega_{\sqrt{5}}\}.$$

5) Chaque deux points pris d'un même cercle Ω_s ne possèdent pas de voisinages disjoints. Donc, l'espace $(\mathbb{R}^2,\tau)$ n'est pas séparé.

6) En s'adossant aux définitions adéquates, on obtient :

$$\overline{\{0\}\times\mathbb{N}}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n;$$

$$\mathscr{F}_r(\{(3,0)\})=\overline{\{(3,0)\}}\setminus\overset{\circ}{\overbrace{\{(3,0)\}}}=\Omega_3\setminus\phi=\Omega_3.$$

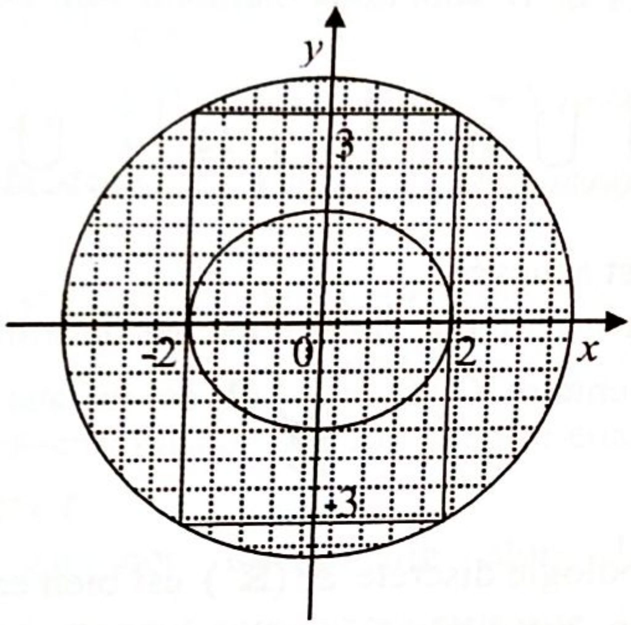
7) i) De même, on a $\overset{\circ}{\Delta}=\{(0,0)\}$ et $\overline{\Delta}=\mathbb{R}^2$.

ii) La diagonale Δ n'est ni ouverte (car distincte de son intérieur) ni fermée (car distincte de son adhérence).

8) i) On a :

$$\overline{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} / x^2 + y^2 \leq 2^2 + 3^2 = 13\right\} = \bigcup_{r=0}^{\sqrt{13}} \Omega_r ; \ \overset{\circ}{A} = \bigcup_{r=0}^{2} \Omega_r .$$

Voici leur représentation.



ii) A ne coïncide ni avec son intérieur ni avec son adhérence. Donc, il n'est ni ouvert ni fermé.

iii) Il suffit de prendre :

$$O_2 = \Omega_1 \cap A = \Omega_1 ,$$

$$O_3 = \Omega_{\sqrt{13}} \cap A = \left\{(2,3), (2,-3), (-2,3), (-2,-3)\right\}.$$

9) i) La suite $(u_n)_n$ est portée par le cercle unité Ω_1. Ce dernier étant voisinage de chacun de ses points, on déduit que tous ses points sont des limites pour $(u_n)_n$. Tous les autres points de $\mathbb{R}^2$ ne le sont pas.

ii) La suite $(v_n)_n$ possède deux valeurs : $(1,2)$ et $(3,4)$. Comme aucun cercle centré en $(0,0)$ ne peut les contenir à la fois on conclut que $(v_n)_n$ est divergente.

iii) L'ensemble des valeurs d'adhérence de (v_n) est la réunion des cercles $\Omega_{\sqrt{5}}$ et Ω_5, lesquels contiennent respectivement les deux valeurs $(1,2)$ et $(3,4)$.

10) i) φ et ψ sont définies sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ respectivement.

Soit (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On observe que pour tout $\varepsilon > 0$, le voisinage $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ de $\varphi(x_0, y_0) = x_0$ est d'image réciproque $\varphi^{-1}(]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\times \mathbb{R}$, laquelle n'est pas voisinage de (x_0, y_0). Il en résulte que φ n'est continue en aucun pointde $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

En l'origine $(0,0)$, l'image réciproque $\varphi^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[) =]-\varepsilon, \varepsilon[\times \mathbb{R}$ est voisinage de $(0,0)$. Donc, φ y est continue.

De même, si x_0 est un réel quelconque, le voisinage $\Omega_{\sqrt{x_0{}^2 + a^2}}$ de son image $\psi(x_0) = x_0{}^2 + a^2$ est d'image réciproque :

$$\psi^{-1}\left(\Omega_{\sqrt{x_0{}^2 + a^2}}\right) = \{-x_0, x_0\},$$

laquelle n'est pas voisinage de x_0. On conclut que ψ n'est continue en aucun point x_0.

ii) φ et ψ n'étant pas continues, cela suffit pour affirmer qu'elles ne sont pas des homéomorphismes.

Sujet 9

1. Enoncer l'axiome de Borel[2]–Lebesgue[3] sur la compacité et le théorème de compactification d'Alexandroff[4].

2. Soit $f:(E,\tau)\to(F,\sigma)$ une fonction définie d'un espace topologique (E,τ) vers un autre (F,σ). Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:

i) $\forall A\subset E,\ f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$;

ii) $\forall B\subset F,\ f^{-1}(\overset{\circ}{B})\subset\overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$.

3. Etant donné un entier relatif n on pose :

$$\Omega_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y>n\right\},$$

et on note σ la sous-famille de $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ formée de l'ensemble vide ϕ et de toutes les réunions des sous-ensembles (Ω_n).

1) Décrire et représenter graphiquement Ω_3 sur un repère orthonormé.

2) Montrer que $(\mathbb{R}^2,\sigma)$ est un espace topologique.

3) Déterminer l'adhérence $\overline{\{3\}\times\mathbb{N}}$, la frontière $\mathscr{F}r\left(\{(3,0)\}\right)$ et

---

2. Emile Borel (7/1/1871-3/2/1956) : Mathématicien français. Il est avec Baire et Lebesgue, le fondateur de la théorie de la mesure. Il a aussi grandement contribué au développement du calcul des probabilités.

3. Henri Léon Lebesgue (28/6/1875-26/7/1941) : Mathématicien Français. C'est dans sa these de doctorat, soutenue en 1902 sous le titre : *Intégrale, longueur, aire*, qu'il présenta la théorie d'une nouvelle intégrale, qui porte son nom de nos jours

4. Aleksandr Sergeevich Alexsandroff (7/5/1896-16/11/1982) : Mathématicien Russe. Il a travaillésur divers domaines notamment, les fonctions d'une variable réelle, la topologie et la théorie de Galois. Les notions d'espace compact et d'espace localement compact sont dues à lui et Urysohn.

l'ensemble dérivé $\left(\mathbb{N}\times\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$.

4) L'espace $(\mathbb{R}^2,\sigma)$ est-il séparé ? séparable ? Justifier.

5) Soit $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-x^2+8x-17\right\}$.

i) Décrire et représenter graphiquement A sur un repère orthonormé.

ii) Déterminer $\overline{A}$.

6) Déterminer un système fondamental de voisinages $\mathscr{W}(-1,2)$ du point $(-1,2)$.

7) Montrer que la suite $u_n=(n,n)$ converge vers $(-1,2)$.

8) Déterminer toutes les autres limites de $(u_n)_n$.

Solution

1. Retournez à vos notes !

2. i) $\Rightarrow$ ii)

Soit B une partie quelconque de F. En prenant $A=f^{-1}(C_F B)$ dans (i) il vient :

$$f\left(\overline{f^{-1}(C_F B)}\right)\subset\overline{f\left(f^{-1}(C_F B)\right)}\subset\overline{C_F B}=C_F\overset{\circ}{B}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overline{f^{-1}(C_F B)}\subset f^{-1}(C_F\overset{\circ}{B})=C_E f^{-1}(\overset{\circ}{B})$$

$$\Updownarrow$$

$$f^{-1}(\overset{\circ}{B})\subset C_E\overline{f^{-1}(C_F B)}=\overset{\circ}{\overbrace{C_E f^{-1}(C_F B)}}=\overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}.$$

ii) $\Rightarrow$ i)

De même, si A une partie quelconque de E, en prenant $B=f(C_F A)$ dans (ii) il vient :

$$f^{-1}(\overline{\overset{o}{f(C_E A)}}) \subset \overline{\overset{o}{f^{-1}(f(C_E A))}} \Leftrightarrow f^{-1} C_F \overline{f(A)} \subset \overline{\overset{o}{C_E f^{-1}(f(A))}}$$

$$\Leftrightarrow C_E f^{-1} \overline{f(A)} \subset C_E \overline{f^{-1}(f(A))}$$

$$\Leftrightarrow \overline{f^{-1}(f(A))} \subset f^{-1} \overline{f(A)}$$

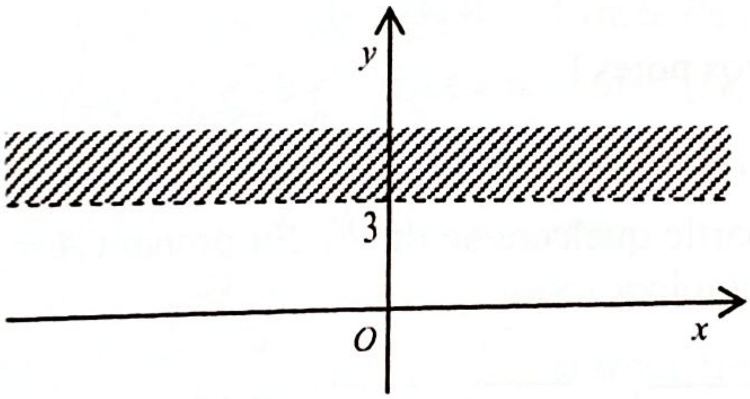
$$\Leftrightarrow \overline{A} \subset f^{-1} \overline{f(A)}$$

$$\Leftrightarrow f(\overline{A}) \subset f\left(f^{-1} \overline{f(A)}\right) \subset \overline{f(A)}.$$

Remarque :

Il ne vous a certainement pas échappé que ces deux propositions caractérisent la continuité de f sur E.

3. 1) Ω_3 est le demi-plan supérieur ouvert délimité par la droite $y = 3$. Ilest représenté par la partie hachurée de la figure ci-aaprès.



2) Il s'agit de montrerque σ estunetopologie. Celle-cicontient ϕ par construction. Par ailleurs, on remarque que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n \subset \mathbb{R}^2$. Inversement, tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ appartenant au demi-plan $\Omega_{[y]-1}$ on affirme que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n \subset \mathbb{R}^2$. Ainsi, $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. Par suite, $\mathbb{R}^2$ appartient à σ. Le premier axiome de Hausdorff est satisfait.

Il en est de mêmedu second axiome puisque σ est, par construction, stable par rapport à la réunion.

Arrêtons-nous sur le troisième. Remarquons de prime abord que si r et s sont deux entiers distincts on a clairement :

$$\Omega_r \cap \Omega_s = \Omega_{\max(r,s)}.$$

Par suite, si A et B sont deux éléments non vides de σ s'écrivant $A = \bigcup_{i \in K \subset \mathbb{Z}} \Omega_i$ et $B = \bigcup_{j \in L \subset \mathbb{Z}} \Omega_j$ il vient :

$$A \cap B = \left(\bigcup_{i \in K \subset \mathbb{Z}} \Omega_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in L \subset \mathbb{Z}} \Omega_j \right)$$
$$= \bigcup_{(i,j) \in K \times L \subset \mathbb{Z}^2} (\Omega_i \cap \Omega_j) = \bigcup_{(i,j) \in K \times L \subset \mathbb{Z}^2} \Omega_{\max(i,j)} \in \sigma.$$

La question est achevée.

3) On a sans peine:

$$\overline{\{3\} \times \mathbb{N}} = \mathbb{R}^2;$$

$$\mathscr{F}_r(\{(3,0)\}) = \overline{\{(3,0)\}} \setminus \overset{0}{\overline{\{(3,0)\}}} = C_{\mathbb{R}^2}\Omega_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\};$$

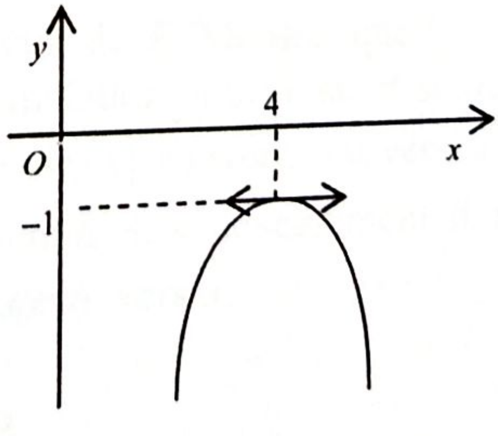
$$\left(\mathbb{N} \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right)' = C_{\mathbb{R}^2}\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 1\}.$$

4) $(\mathbb{R}^2, \sigma)$ n'est pas séparé car ses ouverts (non vides) sont d'intersection non vide. Par contre, il est séparable car il renferme le sous-ensemble dénombrable et partout dense $\{3\} \times \mathbb{N}$.

5) i) On a :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x^2 + 8x - 17 = -(x-4)^2 - 1\}.$$

C'est la parabole régulière de foyer $(4,-1)$.



ii) On a :

$$\bar{A} = C_{\mathbb{R}^2}\Omega_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq -1\}.$$

6) On a :

$$\mathscr{W}(-1,2) = \{\Omega_1\}.$$

7) Le voisinage Ω_1 contient tous les éléments de la suite (u_n) à partir du rang $n_0 = 2$. Donc, cette suite converge vers $(-1,2)$.

8) Tout point (a,b) de $\mathbb{R}^2$ admet un système fondamental de voisinages du genre :

$$\mathscr{W}(a,b)=\begin{cases}\{\Omega_{b-1}\} & \text{si } b\in\mathbb{Z},\\ \{\Omega_{[b]}\} & \text{si } b\notin\mathbb{Z};\end{cases}$$

$[b]$ désignant la partie entière de b. Il en ressort aussitôt que tout voisinage pris dans $\mathscr{W}(a,b)$ contienttoute la suite à partir du rang $n_0=\max\left(0,[b]\right)$. On déduit que tout point (a,b) de $\mathbb{R}^2$ est limite de (u_n).

Sujet 10

1. Donner les définitions d'un espace topologique localement compact, d'une composante connexe et d'un espace topologique localement connexe.

2. Soit (E,τ) un espace topologique séparé.

1) Montrer toute partie finie A de E n'admet aucun point d'accumulation.

2) Que conclure ?

3) En notant $\Delta = \{(x,x),\ x \in E\}$ la diagonale de $E \times E$, montrer que $\overline{\Delta} \setminus \Delta = \phi$.

4) Que conclure ?

3. 1) Caractériser les suites convergentes d'un espace cofini E.

2) En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite d'un tel espace.

4. Soit E un espace topologique satisfaisant le premier axiome de dénombrabilité;

1) Montrer que tout point x de E admet (un autre) système fondamental dénombrable de voisinages emboités $(V_n)_n$ (i.e. : vérifiant $V_{n+1} \subset V_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.)

2) Soit A un sous-ensemble non vide de E. Montrer que :

i) Un point x de E est d'accumulation pour A si, et seulement si, il existe une suite de points de $A \setminus \{x\}$ convergeant vers x.

ii) Un point x de E est adhérent à A, si et seulement si, il existe une suite de points de A convergeant vers x.

Solution

1. Consultez vos notes !

2. 1) Si A est vide l'affirmation est évidente. Sinon, on procède par l'absurde. Supposons que A possède un point d'accumulation b. On écrit par définition :

$$\forall V_b \in \mathscr{V}(b) \quad V_b \cap \left(A \setminus \{b\}\right) \neq \phi.$$

Comme E est séparé, toutes ses parties finies son fermées. Il en résulte que $C_E\left(A \setminus \{b\}\right)$ est un voisinage ouvert de b ne rencontrant pas $A \setminus \{b\}$. Absurde !

2) On conclut que dans un espace séparé,toute partie ne jouissant pas de point d'accumulation est nécessairement finie.

3) On procède par l'absurde. Si $\overline{\Delta} \setminus \Delta$ n'est pas vide il contiendrait au moins un point (a,b). Il en ressort que a et b sont distincts. Comme E est séparé, on affirme qu'ils admettent chacun un voisinage ne rencontrant pas l'autre. Soient V_a et W_b ces deux voisinages respectifs. Il en résulte que $V_a \times W_b$ est un voisinage de (a,b) ne rencontrant pas Δ. Absurde !

4) On déduit que $\overline{\Delta} = \Delta$. Autrement dit, Δ est fermée.

3. 1) Soit $(u_n)_n$ une suite de E. On observe que tout point ℓ de E est de famille de voisinages :

$$\mathscr{V}(\ell) = \left\{V_\ell = E \setminus \left(A \setminus \{\ell\}\right),\ A \text{ finie}\right\}.$$

Notons B l'ensemble des valeurs de $(u_n)_n$. Trois cas possibles se présentent.

i) Si B est fini et $(u_n)_n$ est stationnaire de valeur principale ℓ, alors pour toute partie finie A de E, le voisinage $V_\ell = E \setminus \left(A \setminus \{\ell\}\right)$ de ℓ contient tous les éléments de la suite $(u_n)_n$, sauf peut-être un nombre fini. Celle-ci est alors convergente vers ℓ.

ii) Si B est fini et $(u_n)_n$ est non stationnaire alors le voisinage $V_\ell = E \setminus \left(B \setminus \{\ell\}\right)$ de ℓ ne peut contenir tous les éléments de la suite $(u_n)_n$ à partir d'un certain rang. Celle-ci ne peut alors converger vers ℓ.

iii) Si B est infini alors $V_\ell = E\setminus\left(A\setminus\{\ell\}\right)$ contient toute la suite, sauf peut-être un nombre fini de ses éléments. Il en découle aussitôt que ℓ est une limite de $(u_n)_n$.

2) On déduit de ce qui précède que l'ensemble des valeurs d'adhérence de toute suite de E est l'ensemble de ses limites.

4. 1) Soit x un point d'un tel espace. Il possède par hypothèses, un système fondamental dénombrable de voisinages que l'on note (W_n). La famille $(V_n)_n$ définie par $V_n = \bigcap_{i=1}^{n} W_i$ résout notre problème.

2) i) Soient x un point d'accumulation de A et (V_n) une suite décroissante de ses voisinages. L'ensemble $V_n \cap \left(A\setminus\{x\}\right)$ n'est pas vide. On y choisit un élément x_n. On construit ainsi une suite (x_n) convergeant vers x. En effet, si U est un voisinage de x, il existe par hypothèse un indice p tel que $V_p \subset U$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; n \geq p \;\Rightarrow\; x_n \in V_p \subset U.$$

La réciproque est évidente.

ii) Si x est un point de A, il y est adhérent. Par conséquent, la suite constante $x_n = x$ convient. Par contre, si x est un point adhérent à A sans y appartenir, alors il en est d'accumulation. En vertu du résultat (i), il existe une suite de points de A convergeant vers x.

La réciproque est comme précédemment, évidente.

Sujet 11

1. i) Citer l'xiome de Borel-lebesgue sous sa seconde version.

ii) lesquelles des deus assetions ci-après est vraie :

a) Dans espace topologique toute partie fermée est compacte ;

b) Dans espace topologique toute partie compacte est fermée.

2. Soient R et S deux sous-ensembles d'un espace topologique (E, τ).

1) Montrer que $\overset{\circ}{R} \cup \overset{\circ}{S} \subset \overset{\circ}{\widehat{R \cup S}}$.

2) Exhiber dans $(\mathbb{R}, |.|)$ un exemple où cette inclusion est stricte.

3) Montrer que si $\overline{R} \cap \overline{S} = \phi$ alors il y a égalité: $\overset{\circ}{\widehat{R \cup S}} = \overset{\circ}{R} \cup \overset{\circ}{S}$.

4) On suppose dans la suite que R et S sont fermés disjoints.

Montrer que :

i) $\mathscr{F}_r(R) \cap \mathscr{F}_r(S) = \phi$;

ii) $\mathscr{F}_r(R \cup S) = \mathscr{F}_r(R) \cup \mathscr{F}_r(S)$.

5) En déduire que si la frontière $\mathscr{F}_r(A)$ d'une partie fermée A de E est connexe alors il en est de même pour A.

3. Pour tout réel positif (ou nul) r on pose :

$$\Omega_r = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8 \geq r^2\right\}.$$

On note τ la famille constituée des ensembles ϕ, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$ et de tous les éléments Ω_r.

1) Etant donné un réel positif r, décrire Ω_r et représenter-le sur un repère orthonormé.

2) Montrer que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ est un espace topologique.

3) Déterminer la frontière $\mathscr{F}_r(\{(-2,2)\})$ et l'adhérence $\overline{\{-2\} \times \mathbb{Z}}$.

4) En déduire la nature topologique du singleton $\{(-2,2)\}$.

5) Déterminer l'ensemble dérivé du segment $A=\{0\}\times[-1,0]$.

6) Montrer que l'espace $(\mathbb{R}^2,\tau)$ est séparable mais non séparé.

7) Soient (u_n) et (v_n) les suites de termes généraux $u_n=(n,n)$ et $v_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$. Déterminer les limites et les valeurs d'adhérence de chacune d'elles.

8) Soit $f:(\mathbb{R}^2,\tau)\to(\mathbb{R},|.|)$ la fonction définie par $f(x,y)=5y$.

i) Montrer que f est discontinue sur $\mathbb{R}^2$.

ii) Montrer que f n'est pasfermée.

Solution

1. Renseignez-vous !

2. 1) On clairement :

$$R\subset R\cup S \Rightarrow \overset{\circ}{R}\subset \overset{\circ}{\overbrace{R\cup S}},$$

$$S\subset R\cup S \Rightarrow \overset{\circ}{S}\subset \overset{\circ}{\overbrace{R\cup S}}.$$

D'où $\overset{\circ}{R}\cup\overset{\circ}{S}\subset\overset{\circ}{\overbrace{R\cup S}}$.

2) En prenant $R=\mathbb{Q}$ et $S=C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ on obtient aisément :

$$\overset{\circ}{\mathbb{Q}}\cup \overset{\circ}{C_{\mathbb{R}}}\mathbb{Q}=\phi\cup\phi=\phi\neq\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{Q}\cup C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}}}=\mathbb{R}.$$

On peut aussi prendre $R=[-1,1[$ et $S=[1,2[$ pour avoir :

$$\overset{\circ}{\overbrace{[-1,1[}}\cup\overset{\circ}{\overbrace{[1,2[}}=]-1,1[\cup]1,2[\neq\overset{\circ}{\overbrace{[-1,1[\cup[1,2[}}=\overset{\circ}{\overbrace{[-1,2]}}=]-1,2[.$$

3) Seule reste à montrer l'inclusion $\overset{\circ}{\overbrace{R\cup S}}\subset\overset{\circ}{R}\cup\overset{\circ}{S}$. Pour ce faire, on écrit :

$$x\in\overset{9}{\overbrace{R\cup S}} \Leftrightarrow R\cup S\in\mathscr{V}(x) \Leftrightarrow \exists\Omega\in\tau/x\in\Omega\subset R\cup S$$

Comme $\overline{R}\cap\overline{S}$ est vide on déduit que $\Omega\cap R\cap S$ l'est de même ;

donc, $\Omega \subset C_E(R \cap S)$. Ainsi, il vient :

$$x \in \Omega \subset R \cup S \Rightarrow x \in \Omega \subset (R \setminus S) \cup (S \setminus R)$$
$$\Rightarrow \left((R \setminus S) \in \mathscr{V}(x)\right) \text{ou} \left((S \setminus R) \in \mathscr{V}(x)\right)$$

Autrement dit :

$$x \in \overset{\circ}{\overbrace{R \cup S}} \Rightarrow x \in (\overset{\circ}{R} \cup \overset{\circ}{S}).$$

C'est l'inclusion voulue.

4) i) On sait que $\mathscr{F}_r(R) \subset \overline{R}$ et $\mathscr{F}_r(S) \subset \overline{S}$. Comme R et S sont fermés disjoints on déduit aussitôt que leurs frontières le sont de même.

ii) En prenant compte de la question (3) on écrit:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_r(R) \cup \mathscr{F}_r(S) &= \left(\overline{R} \cap \overline{C_E R}\right) \cup \left(\overline{S} \cap \overline{C_E S}\right) \\
&= \left(\left(\overline{R} \cap \overline{C_E R}\right) \cup \overline{S}\right) \cap \left(\left(\overline{R} \cap \overline{C_E R}\right) \cup \overline{C_E S}\right) \\
&= \left(\left(\overline{R} \cup \overline{S}\right) \cap \left(\overline{C_E R} \cup \overline{S}\right)\right) \cap \left(\left(\overline{R} \cup \overline{C_E S}\right) \cap \left(\overline{C_E R} \cup \overline{C_E S}\right)\right) \\
&= \left(\overline{R \cup S}\right) \cap \overline{C_E R} \cap \overline{C_E S} = \left(\overline{R \cup S}\right) \cap \left(C_E \overset{\circ}{R} \cap C_E \overset{\circ}{S}\right) \\
&= \left(\overline{R \cup S}\right) \cap \left(C_E \left(\overset{\circ}{R} \cup \overset{\circ}{S}\right)\right) = \left(\overline{R \cup S}\right) \cap C_E \left(\overset{\circ}{\overbrace{R \cup S}}\right) \\
&= \left(\overline{R \cup S}\right) \cap \overline{C_E(R \cup S)} = \mathscr{F}_r(R \cup S).
\end{aligned}$$

5) Si A n'était pas connexe il admettrait une partition fermée (L, M). Il en résulte à la lumière de la question précédente que :

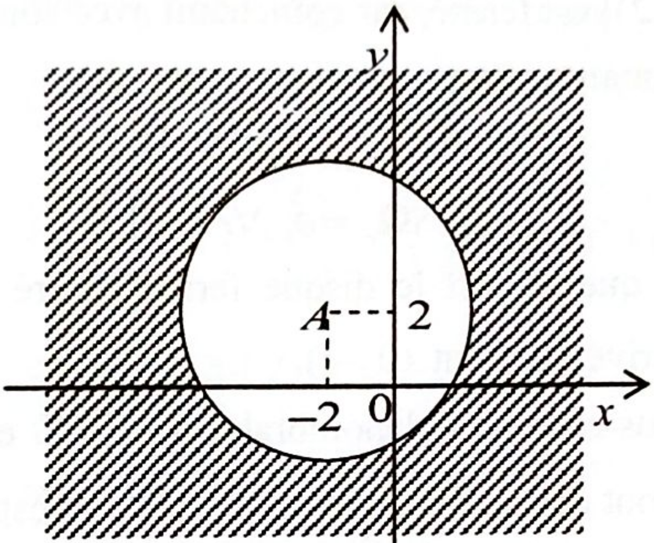
$$\begin{cases} \mathscr{F}_r(A) = \mathscr{F}_r(L \cup M) = \mathscr{F}_r(L) \cup \mathscr{F}_r(M), \\ \mathscr{F}_r(L) \cap \mathscr{F}_r(M) = \phi. \end{cases}$$

Autrement dit, la frontière $\mathscr{F}_r(A)$ n'est pas connexe. C'est en contradiction avec les hypothèses.

3. 1) En écrivant :

$$x^2+y^2+4x-4y+8=(x+2)^2+(y-2)^2 \geq r^2,$$

on déduit aussitôt que Ω_r est le plan tout entier privé du disque ouvert centré en $A(-2,2)$ et de rayon r. Il est représenté (pour $r>0$) par la portion du plan hachurée dans la figure ci après.



2) Remarquons de prime abord que pour tous réels positifs r et s on a :

$$\Omega_r \cap \Omega_s = \Omega_{\max(r,s)} \; ; \Omega_r \cup \Omega_s = \Omega_{\min(r,s)} .$$

A présent, on rappelle que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ est un espace topologique si τ satisfait aux trois critères de Hausdorff. En effet, le premier de ces axiomes est vérifié puisque ϕ et $\mathbb{R}^2$ sont dans τ : le premier par construction et le second grâce à l'égalité $\mathbb{R}^2 = \Omega_0$.

Par ailleurs, si $(\Omega_r)_{r\in A\subset \mathbb{R}_+}$ est une sous-famille de τ on obtient :

$$\bigcup_{r\in A} \Omega_r = \Omega_{\inf A} \in \tau.$$

Ainsi, le second axiome est satisfait.

Enfin, Le troisième axiome est satisfait car, à la lumière de la remarque ci-dessus, τ est stable par intersection finie.

3) On a clairement $\overline{\{(-2,2)\}} = \{(-2,2)\}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{\{(-2,2)\}}} = \phi$. D'où :

$$\mathscr{F}_r(\{(-2,2)\}) = \overline{\{(-2,2)\}} \setminus \overset{\circ}{\overline{\{(-2,2)\}}} = \{(-2,2)\}.$$

D'autre part, on remarque que :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+ \;\; \Omega_r \cap (\{-2\} \times \mathbb{Z}) \neq \phi.$$

Donc, $\{-2\} \times \mathbb{Z}$ est partout dense, autrement dit, $\overline{\{-2\} \times \mathbb{Z}} = \mathbb{R}^2$.

4) $\{(-2,2)\}$ est fermé, car coïncidant avec son adhérence.

5) On remarque que :

$$A \cap \Omega_{\sqrt{13}} = \{(0,-1)\};$$

$$A \cap \Omega_r = \phi, \;\; \forall r > \sqrt{13}.$$

Il en résulte que A' est le disque fermé centré en $(-2,2)$ et de rayon $\sqrt{13}$, privé du point $(0,-1)$.

6) Le sous-ensemble dénombrable $\{-2\} \times \mathbb{Z}$ est, d'après ce qui précède, partout dense. On conclut que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ est séparable.

Par contre, on remarque que deux points distincts pris dans tout ouvert Ω_r ne peuvent avoir (du fait que tous les ouverts se rencontrent) de voisinages disjoints. Donc, $(\mathbb{R}^2, \tau)$ n'est pas séparé.

7) Rappelons de prime abord cette définition :

$$\lim_{x \to \infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \forall V_\ell \in \mathscr{W}(\ell) \; \exists n_0(V_\ell) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow u_n \in V_\ell$$

A présent, commençons par (u_n). Soit $\ell(a,b)$ un point de $\mathbb{R}^2$.

La famille $\mathscr{W}(\ell) = \left\{\Omega_{\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}}\right\}$ est un système fondamental de ses voisinages. On a :

$$u_n \in \Omega_{\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}} \Leftrightarrow (n+2)^2 + (n-2)^2 \geq (a+2)^2 + (b-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 \geq (a+2)^2 + (b-2)^2 - 8$$

Deux cas se présentent :

i) Si $\sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2} \leq \sqrt{8}$ il suffit de prendre $n_0 = 0$. ℓ est alors limite de (u_n).

ii) Si $\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2} > \sqrt{8}$ alors il suffit de prendre $n_0 = \left[\sqrt{\dfrac{(a+2)^2+(b-2)^2}{2}} - 4\right] + 1$. ℓ est encore limite de (u_n). On voit en conclusion que (u_n) converge vers tout point (a,b) de $\mathbb{R}^2$.

Abordons la seconde suite (v_n). Au vu de ce qui précède on écrit :

$$v_n \in \Omega_{\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n}+2\right)^2 + \left(\frac{1}{n}-2\right)^2 \geq (a+2)^2+(b-2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n^2} \geq (a+2)^2+(b-2)^2-8 \qquad (*)$$

On distingue deux cas :

i) Si $\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2} \leq \sqrt{8}$ alors il suffit de prendre $n_0 = 1$. Le point $\ell(a,b)$ est alors limite de (v_n).

ii) Si $\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2} > \sqrt{8}$ l'inéquation (*) a pour solutions tout entier naturel n tel que $n \leq \sqrt{\dfrac{2}{(a+2)^2+(b-2)^2-8}}$. Autrement dit, $\Omega_{\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}}$ ne peut contenir qu'un nombre fini d'éléments de (v_n). Il en ressort que $\ell(a,b)$ n'est pas limite decette dernière. En résumé, (v_n) converge vers tout point (a,b) du disque fermé $D\left((2,-2),\sqrt{8}\right)$ de centre $(2,-2)$ et de rayon $\sqrt{8}$.

Enfin, il est immédiat que l'ensemble des valeurs d'adhérence de chacune des deux suites est l'ensemble de ses limites : $\mathbb{R}^2$ pour (u_n) et $D\left((2,-2),\sqrt{8}\right)$ pour (v_n).

8) i) Soit (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$. Etant donné un réel $\varepsilon > 0$ on a:

$$f^{-1}\left(\left]5y_0-\varepsilon, 5y_0+\varepsilon\right[\right)=\mathbb{R}\times\left]y_0-\frac{\varepsilon}{5}, y_0+\frac{\varepsilon}{5}\right[.$$

Cet ensemble ne pouvant contenir aucun ouvert Ω_r, n'est pas un voisinage de (x_0, y_0). Donc, f n'est pas continue en (x_0, y_0).

ii) L'image $f\left(C_{\mathbb{R}^2}(\Omega_1)\right)=]5,15[$ du fermé $C_{\mathbb{R}^2}(\Omega_1)$ n'est pas fermée. Donc, f n'est pas fermée.

Sujet 12

1. Montrer que si une partie A d'un espace topologique (E,τ) ne possède pas de point isolé il en est de même de son adhérence $\overline{A}$.

2. Soient U et V deux ouverts non vides d'un espace topologique E.

1) Montrer que si U et V ne se rencontrent pas alors $\overset{\circ}{\overline{U}}$ et $\overset{\circ}{\overline{V}}$ font de même.

2) Montrer par un contre-exemple que cette affirmation peut ne pas être vraie si U et V ne sont pas ouverts.

3. Soient (E,τ) un espace topologique, $A \subset E$ et 1_A la fonction indicatrice de A définie par :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

On considère 1_A comme une application de (E,τ) dans $(\mathbb{R},|.|)$.

1) Montrer que 1_A est continue en un point a de E si et seulement si a n'appartient pas à la frontière $\mathscr{F}_r(A)$.

2) En déduire que la fonction de Dirichlet[5] $\varphi : (\mathbb{R},|.|) \to (\mathbb{R},|.|)$ donnée par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}, \end{cases}$$

est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

3) En notant τ la topologie codénombrable de $\mathbb{R}$, déduire le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où la fonction $\varphi : (\mathbb{R},\tau) \to (\mathbb{R},|.|)$ est continue.

5. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13/2/1805-5/5/1859) : Mathématicien Allemand, d'origine Belge. Ses travaux portent sur l'analyse, l'algèbre et la mécanique.

4) Donner une condition nécessaire et suffisantepour que 1_A soit continue sur E.

Solution

1. On procède par l'absurde. Si $\overline{A}$ possède un point isolé b on affirme par définition de ce dernier qu'il existe un voisinage V_b de b de telle sorte que $\overline{A} \cap V_b = \{b\}$. Il en ressort que V_b doit rencontrer A et il ne peut le faire qu'en b. Ce dernier est alors un point isolé de A. Absurde !

2. 1) On a à montrer :

$$U \cap V = \phi \Rightarrow \overset{\circ}{\overline{U}} \cap \overset{\circ}{\overline{V}} = \phi.$$

On procède par l'absurde. Supposons que $U \cap V$ soit vide sans que $\overset{\circ}{\overline{U}} \cap \overset{\circ}{\overline{V}}$ le soit. Soit a un point de cette dernière intersection. $\overline{U}$ et $\overline{V}$ sont alors de ses voisinages. Par suite, $\overline{U} \cap \overline{V}$ est, lui aussi, un voisinage de a. Ce dernier contient donc un ouvert W de telle sorte que $a \in W \subset \overline{U} \cap \overline{V}$. Il en ressort que $W \cap U$ est un ouvert non vide ne pouvant rencontrer V. Cela contredit l'adhérence des points de W à V.

2) Le cas de $\mathbb{Q}$ et $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ dans l'espace usuel $(\mathbb{R}, |.|)$ est édifiant. On a bien $\mathbb{Q} \cap C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \phi$ mais $\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

On peut aussi citer le cas de deux parties propres disjointes U et V d'un espace grossier (E, τ), puisque $\overline{U} \cap \overline{V} = E$.

3. 1) La condition est nécessaire :

On procède par l'absurde. Supposons que 1_A soit continue en un point x_0 et que celui-ci soit dans $\mathscr{F}_r(A)$. Il en découle que tout voisinage V de x_0 rencontre, à la fois, A et $C_E A$. Or, si l'on suppose $1_A(x_0) = 0$ et l'on choisisse ε tel que $0 < \varepsilon \leq 1$, on établit grâce à la continuité de 1_A en x_0, que $1_A^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)$ est un voisinage de x_0 ne rencontrant pas A. Celaest en contradiction avec notre hypothèse. On conclut donc que x_0 n'est pas dans la frontière $\mathscr{F}_r(A)$.

Le cas $1_A(x_0)=1$ mène, par analogie, à la même conclusion.

La condition est suffisante :

Si x_0 n'appartient pas à $\mathscr{F}_r(A)$, il est alors ou dans $\overset{\circ}{A}$ ou dans $\overset{\circ}{\widehat{C_E A}}$. Supposons qu'il soit dans $\overset{\circ}{A}$. Il s'en suit que $1_A(x_0)=1$ et:

$$\forall\varepsilon>0 \quad 1_A^{-1}(]1-\varepsilon,1+\varepsilon[)=\begin{cases} A & \text{si } \varepsilon\le 1, \\ E & \text{si } \varepsilon>1. \end{cases}$$

A et E étant deux voisinages de x_0, on conclut que 1_A est continue en x_0.

Avec un raisonnement analogue, on arrive à la même conclusion dans le cas où x_0 est dans $\overset{\circ}{\widehat{C_E A}}$.

2) C'est bien le cas car $\varphi=1_{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}}$ et $\mathscr{F}_r(C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q})=\mathbb{R}$.

3) $\varphi=1_{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}}$ est continue sur :

$$C_{\mathbb{R}}\left(\mathscr{F}_r(C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q})\right)=C_{\mathbb{R}}\left(\overline{C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}}\cap\overline{\mathbb{Q}}\right)=C_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\cap\mathbb{Q})=C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}.$$

4) Il faut et il suffit que $\mathscr{F}_r(A)$ soit vide, ce qui revient à dire que A doit être à la fois ouvert et fermé.

Sujet 13

1. Pour tout réel a on pose $I_a =]-\infty, a]$ et on note $\mathscr{B} = \{I_a, a \in \mathbb{R}\}$.

Soit τ la topologie engendrée par $\mathscr{B}$.

1) Préciser les formes des ouverts et des fermées de $(\mathbb{R}, \tau)$.

2) Donner les frontières et les ensembles dérivés des parties $A = \{-5, 1\}$, $B =]-5, 1[$ et $C = \mathbb{N}^*$.

3) L'espace $(\mathbb{R}, \tau)$ est-il séparé? séparable? compact? connexe? Justifier.

2. Soit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ un produit de p espaces topologiques, muni de la topologie produit.

1) Montrer que pour toute partie $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_p$ de E on a :

i) $\overline{\prod_{i=1}^{p} A_i} = \prod_{i=1}^{p} \overline{A_i}$;

ii) $\overset{\circ}{\overbrace{\prod_{i=1}^{p} A_i}} = \prod_{i=1}^{p} \overset{\circ}{A_i}$.

2) En déduire qu'un produit est fermé si, et seulement si, chacun de ses facteurs l'est.

3) Montrer que pour que E soit séparé il faut et il suffit chaque E_i le soit.

3. Soit (E, τ) un espace topologique séparé. Démontrer que :

1) Toute partie finie A de E est fermée.

2) Un point a de E est un point d'accumulation d'une partie B de E si, et seulement si, tout voisinage de a rencontre B en une infinité de points.

3) l'ensemble B' des points d'accumulation de B est fermé.

Solution

1. 1) Un ouvert Ω de $(\mathbb{R},\tau)$ est par construction, ou vide ou est de la forme:

$$\Omega = \bigcup_{a\in A\subset\mathbb{R}} I_a = \begin{cases}]-\infty, \max A] & \text{si } \sup A \in A, \\ ]-\infty, \sup A[& \text{si } \sup A \notin A, \\ \mathbb{R} & \text{si } \sup A = +\infty. \end{cases}$$

Il en résulte aussitôt par passage aux complémentaires qu'un fermé F de $(\mathbb{R},\tau)$ est ou vide ou est de l'une des deux formes $F =]a,+\infty[$ ou $F = [b,+\infty[$, a et b étant deux réels quelconques.

2) On a conformément aux définitions requises :

$$\mathscr{F}_r(A) = \overline{\{-5,1\}} \setminus \overset{\circ}{\widehat{\{-5,1\}}} = [-5,+\infty[\setminus \phi = [-5,+\infty[;$$

$$\mathscr{F}_r(B) = \overline{]-5,1[} \setminus \overset{\circ}{\widehat{]-5,1[}} =]-5,+\infty[\setminus \phi =]-5,+\infty[;$$

$$\mathscr{F}_r(C) = \overline{\mathbb{N}^*} \setminus \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{N}^*}} = [0,+\infty[\setminus \phi = \mathbb{R}_+.$$

3) Tous les ouverts de $(\mathbb{R},\tau)$ sont deux à deux concourants. $(\mathbb{R},\tau)$ est de ce fait non séparé. Il en résulte que ce dernier est connexe et non compact.

Par ailleurs, il est aisé de constater que $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$. Donc, $(\mathbb{R},\tau)$ est séparable.

2. 1.i) Soit $(x_1, x_2, ..., x_p)$ un point de $\overline{A}$. Pour tout voisinage V_i de x_i, on a:

$$(V_1 \times ... \times V_p) \cap A = (V_1 \cap A_1) \times ... \times (V_p \cap A_p) \neq \phi.$$

D'où :

$$V_i \cap A_i \neq \phi, \ \forall i = 1, 2, ..., p.$$

Donc, $x_i \in \overline{A_i}$; par suite, $(x_1, x_2, ..., x_p) \in \prod_{i=1}^{p} \overline{A_i}$.

Inversement, si $(x_1, x_2, ..., x_p) \in \prod_{i=1}^{p} \overline{A_i}$, alors pour tout indice $i \in \{1, 2, ... p\}$ on a $x_i \in \overline{A_i}$. Donc :

$$\forall V_i \in \mathscr{W}(x_i) \quad V_i \cap A_i \neq \phi; \quad i = 1, 2, ... p.$$

Par suite :

$$(V_1 \times V_2 \times ... \times V_p) \cap A \neq \phi.$$

D'où $(x_1, x_2, ..., x_p) \in \overline{\prod_{i=1}^{p} A_i}$.

ii) On a par définition:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, ..., x_p) \in \overset{o}{A} &\Leftrightarrow A \in \mathscr{V}((x_1, x_2, ..., x_p))\\ &\Leftrightarrow A_i \in \mathscr{V}((x_i), i = 1, ..., p\\ &\Leftrightarrow x_i \in \overset{o}{A_i}, i = 1, ..., p\\ &\Leftrightarrow (x_1, x_2, ..., x_p) \in \prod_{i=1}^{p} \overset{o}{A}.\end{aligned}$$

D'où l'égalité.

2) En effet, en vertu de la relation (i) ci-dessus on a:

$$\prod_{i=1}^{p} A_i \text{ fermé} \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{p} A_i = \overline{\prod_{i=1}^{p} A_i} \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{p} A_i = \prod_{i=1}^{p} \overline{A_i}$$

$$\Leftrightarrow A_i = \overline{A_i}, \quad \forall i = 1, ..., p \quad \Leftrightarrow \quad A_i \text{ fermé.}$$

3) Supposons que E soit séparé. Si x_{i_0} et y_{i_0} sont deux points distincts de E_{i_0}, alors pour tout point $x' = (x_1, x_2, ..., x_{i_0 - 1}, x_{i_0 + 1}, ..., x_p)$ de $\prod_{i=1, i \neq i_0}^{p} E_i$, il existe un voisinage Ω pour $(x_1, x_2, ..., x_{i_0}, ..., x_p)$ et un autre Ω' pour $(x_1, x_2, ..., y_{i_0}, ..., x_p)$ tels que $\Omega \cap \Omega' = \phi$. Comme Ω et Ω' peuvent être pris de la forme $\Omega = V_1 \times V_2$ et $\Omega' = V_1' \times V_2'$, avec $V_1 \in \mathscr{V}(x_{i_0})$, $V_2 \in \mathscr{V}(x')$, $V_1' \in \mathscr{V}(y_{i_0})$ et $V_2' \in \mathscr{V}(x')$ il vient:

$$\Omega\cap\Omega'=\phi \;\Rightarrow\; (V_1\cap V'_1)\times(V_2\cap V'_2)=\phi \;\Rightarrow\; V_1\cap V'_1=\phi.$$

Donc, E_{i_0} est séparé.

La condition est suffisante.

Si $x=(x_1,x_2,...,x_p)$ et $y=(y_1,y_2,...,y_p)$ sont deux points distincts de E, il existe un indice i_0 de $\{1,2,...,p\}$ tel que $x_{i_0}\neq y_{i_0}$. Comme E_{i_0} est séparé, on peut alors trouver deux voisinages disjoints, V pour x_{i_0} et W pour y_{i_0}. Il en résulte aussitôt que :

$$\Omega_x = E_1\times E_2\times...\times E_{i_0-1}\times V\times E_{i_0+1}\times...\times E_p$$

$$\Omega_y = E_1\times E_2\times...\times E_{i_0-1}\times W\times E_{i_0+1}\times...\times E_p,$$

sont des voisinages disjoints de x et y respectivement. Ainsi, E est séparé.

3. 1) Posons $A=\{a_1,a_2,...,a_p\}$. Pour que A soit fermée il suffit que son complémentaire C_EA soit ouvert. Pour ce faire, E étant séparé, il existe pour tout x de C_EA et tout a_i $(1\leq i\leq p)$ de A deux voisinages ouverts disjoints V_{a_i} de a_i et W_x^i de x. En posant

$V_A=\bigcup_1^p V_{a_i}$ et $W_x=\bigcap_1^p W_x^i$ on constate que :

i) W_x est un voisinage ouvert de ouvert de x,

ii) V_A est un voisinage ouvert de ouvert de A,

iii) $V_A\cap W_x=\phi$.

Il en résulte que C_EA, contenant W_x, est lui-même voisinage de x. D'où la question !

2) Soient a un point d'accumulation de B et V_a un de ses voisinages. On peut sans restriction de généralité prendre V_a ouvert. Si $V_a\cap B$ (au demeurant distinct de $\{a\}$) était fini il serait fermé

du fait que E est séparé. C'est à fortiori le cas de $V_a \cap (B \setminus \{a\})$. Il en résulterait que :

$$V_a \cap C_E\left(V_a \cap (B \setminus \{a\})\right) = V_a \cap C_E(B \setminus \{a\}),$$

est un voisinage ouvert de a ne rencontrant pas $B \setminus \{a\}$. Cela est en contradiction avec la définition de a.

La réciproque est évidente.

3) Il suffit de prouver que $C_E B'$ est voisinage de chacun de ses points. Si x est un point de $C_E B'$ il existe, d'après la deuxième question, un voisinage ouvert V_x de x ne rencontrant A qu'en un nombre fini de points. Il en résulte que tous les points y de V_x ne peuvent pas être des points d'accumulation pour B. Autrement dit, V_x est inclus dans $C_E B'$. Donc, ce dernier est voisinage de x.

L'exercice est achevé !

Sujet 14

1. Soit $f : E \to F$ une fonction d'un espace topologique (E,τ) vers un autre (F,θ).

1) Montrer que :

$$f \text{ est ouverte} \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \subset E \;\; f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\overline{f(A)}}.$$

2) Montrer que :

$$f \text{ fonction est continue et ouverte} \quad \Leftrightarrow \quad \forall B \subset F \;\; f^{-1}(\overset{\circ}{B}) = \overset{\circ}{\overline{f^{-1}(B)}}.$$

3) On suppose à présent que f est surjective, continue et ouverte. Montrer alors que si E est de Baire[6], F l'est de même.

2. On munit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ des trois topologies : l'usuelle $|.|$, la codénombrable σ et la cofinie τ.

1) Caractériser les fermés des espaces $(\mathbb{R},\sigma)$ et $(\mathbb{R},\tau)$.

2) Montrer de deux manières différentes que l'application identité $id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R},|.|) \to (\mathbb{R},\tau)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que l'identité $id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R},\sigma) \to (\mathbb{R},|.|)$ est discontinue sur $\mathbb{R}$.

4) Soit $(u_n)_n$ une suite de $(\mathbb{R},\sigma)$. Pour tout réel a on pose :

$$V_a = \{u_n / u_n \neq a\}.$$

i) Vérifier que $C_{\mathbb{R}}V_a$ est un voisinage ouvert de a dans $(\mathbb{R},\sigma)$.

ii) En déduire que toute suite convergente dans $(\mathbb{R},\sigma)$ est stationnaire.

iii) Montrer que l'identité $id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R},\sigma) \to (\mathbb{R},|.|)$ est séquentiellement continue sur $\mathbb{R}$.

---

6. René Baire (21/1/874-5/7/1932) : Mathématicien français. Il est avec Emile Borel et Henri Lebesgue, un des mathematiciens Français du début du 20ème siècle dont les idées nouvelles ont le plus influencé le development de l'analyse.

iv) Que conclure ?

3. 1) Soient A et B deux sous-ensembles compacts d'un espace séparé (E,τ). Montrer que $A \cap B$ est compact.

2) Soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes d'un espace topologique (E,τ). On suppose qu'il existe un indice i_0 de I tel que:

$$\forall i \in I \;\; K_i \cap K_{i_0} \neq \phi.$$

Montrer de deux manières différentes que la réunion $\bigcup_{i\in I} K_i$ est connexe.

Solution

1. 1) Si f est ouvertealors $f(\overset{\circ}{A})$ est un ouvert de F, inclus dans $f(A)$, quel que soit A dans E. D'où: $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\overline{f(A)}}$.

Inversement, si A est un ouvert de E alors $\overset{\circ}{A} = A$ et donc :

$$f(A) = f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\overline{f(A)}}.$$

Donc, $f(A) = \overset{\circ}{\overline{f(A)}}$. Par suite, $f(A)$ est ouvert.

2) La condition est nécessaire. En effet, on sait que :

(*) $\quad f$ est continue $\Leftrightarrow \forall B \subset F \;\; f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\overline{f^{-1}(B)}}$.

Maintenant, si f ouverte alors $f\left(\overset{\circ}{\overline{f^{-1}(B)}}\right)$ est ouvert dans F. De plus, si elle est continue on écrit:

$$f\left(\overset{\circ}{\overline{f^{-1}(B)}}\right) \subset \overset{\circ}{\overline{f\left(f^{-1}(B)\right)}} \subset \overset{\circ}{B};$$

ce qui donne:

$$\overset{\circ}{\overline{f^{-1}(B)}} \subset f^{-1}(\overset{\circ}{B}).$$

(**)

La conjonction des inclusions (*) et (**) donne l'égalité cherchée.

La condition est suffisante. Elle assure d'abord, comme signalé, la continuité de f. D'autre part, Si B est un ouvert de E alors:

$$f^{-1}\left(\overset{\circ}{\overline{f(B)}}\right)=\overset{\circ}{\overline{f^{-1}(f(B))}}\supset\overset{\circ}{B}=B.$$

Par suite, $f(B)\subset\overset{\circ}{\overline{f(B)}}$. Ainsi, $f(B)$ est ouvert dans F.

3) Rappelons de prime abord qu'un espace est dit de Baire s'il est séparé et si la réunion de toute famille dénombrable de parties d'intérieurs vides est, elle-même, d'intérieur vide.

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieurs vides de F. La continuité de f assure que $G_n=f^{-1}(K_n)$ est fermé dans E, quel que soit l'indice n dans $\mathbb{N}$. De plus, f étant continue et ouverte, on déduit que:

$$\overset{\circ}{G_n}=\overset{\circ}{\overline{f^{-1}(K_n)}}=f^{-1}(\overset{\circ}{K_n})=f^{-1}(\phi)=\phi.$$

Ainsi, on a trouvé dans l'espace de Baire E une suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés d'intérieurs vides. Donc, leur réunion est, elle-aussi, d'intérieur vide. D'où:

$$\phi=f(\phi)=f\left(\overset{\circ}{\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}G_n}}\right)=f\left(\overset{\circ}{\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}f^{-1}(K_n)}}\right)=f\left(\overset{\circ}{\overline{f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n\right)}}\right)$$

Comme f est continue et ouverte, on peut encore écrire:

$$\phi=f\left(\overset{\circ}{\overline{f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n\right)}}\right)=f\left(f^{-1}\left(\overset{\circ}{\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n}}\right)\right).$$

Enfin, f étant surjective, on obtient:

$$\phi=f\left(f^{-1}\left(\overset{\circ}{\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n}}\right)\right)=\overset{\circ}{\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n}}.$$

Donc, F est de Baire.

2. 1) On a succinctement:

F fermé dans $(\mathbb{R},\sigma) \Leftrightarrow C_{\mathbb{R}}F$ ouvert

$\Leftrightarrow C_{\mathbb{R}}(C_{\mathbb{R}}F)=F$ dénombrable.

F fermé dans $(\mathbb{R},\tau) \Leftrightarrow C_{\mathbb{R}}F$ ouvert $\Leftrightarrow C_{\mathbb{R}}(C_{\mathbb{R}}F)=F$ fini.

2) i) L'identité $id_{\mathbb{R}}:(\mathbb{R},|.|)\to(\mathbb{R},\tau)$ est continue car la topologie usuelle $|.|$ est plus fine que la cofinie τ.

ii) L'affirmation est vraie car l'image réciproque de tout fermé de $(\mathbb{R},\tau)$ (donc fini) est finie, donc fermée dans l'espace séparé $(\mathbb{R},|.|)$.

3) L'identité $id_{\mathbb{R}}:(\mathbb{R},\sigma)\to(\mathbb{R},|.|)$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car la topologie codénombrable σ n'est pas plus fine que la topologie usuelle $|.|$. (On peut aussi voir que l'image réciproque de tout intervalle ouvert est de complémentaire non dénombrable, donc non ouverte.)

4) i) $C_{\mathbb{R}}V_a$ étant de complémentaire dénombrable, est ouvert dans $(\mathbb{R},\sigma)$. Comme il contient a celui-ci en jouit d'un voisinage ouvert.

ii) Si une suite (x_n) de $(\mathbb{R},\sigma)$ converge vers un point a alors il existe pour le voisinage $C_{\mathbb{R}}V_a$ (tel que défini ci-dessus) un rang n_0 tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0 \Rightarrow x_n\in C_{\mathbb{R}}V_a.$$

c'est-à-dire :

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0 \Rightarrow x_n=a;$$

ce qui signifie que (x_n) est stationnaire.

iii) Toute suite convergente (x_n) de $(\mathbb{R},\sigma)$ étant stationnaire, son image par l'identité l'est de même dans $(\mathbb{R},|.|)$; donc, elle converge. Ainsi, $id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R},\sigma) \to (\mathbb{R},|.|)$ est séquentiellement continue.

iv) Une fonction peut être séquentiellement continue sans qu'elle ne soit continue !

3. 1) $M \cap N$ est séparé par hérédité. Par ailleurs, si $(F_i)_{i\in I}$ est une de ses familles de fermés d'intersection vide, celle-ci le reste dans chacun des compacts M et N. On peut en vertu de l'axiome de Borel-Lebesgue (sous sa seconde version !) en extraire une sous famille finie d'intersection vide. Donc, $M \cap N$ est compact.

2) Si $f : \bigcup_{i\in I} K_i \to F = \{a,b\}$ est une fonction continue, où F est un espace discret, chacune de ses restrictions f_{K_i} à K_i est, elle aussi, continue. Comme ce dernier est connexe, f_{K_i} est constante. D'autre part, tout K_i rencontrant K_{i_0} on déduit en supposant (par exmeple):

$$f_{K_{i_0}}(x) = a \quad \forall x \in K_{i_0},$$

que :

$$\forall x \in \bigcup_{i\in I} K_i \ \ \forall i \in I \ \ f(x) = f_{K_i}(x) = f_{K_{i_0}}(x) = a.$$

Ainsi, f est constante. On conclut conséquemment que $\bigcup_{i\in I} K_i$ est connexe.

On peut procéder par l'absurde. Supposons que $\bigcup_{i\in I} K_i$ n'est pas connexe. Il existe alors deux ouverts non vides V et W tels que :

$$\begin{cases} \bigcup_{i\in I} K_i \subset V \cup W, & (1) \\ \bigcup_{i\in I} K_i \cap V \cap W = \phi, & (2) \\ \bigcup_{i\in I} K_i \cap V = \bigcup_{i\in I} (K_i \cap V) \neq \phi, & (3) \\ \bigcup_{i\in I} K_i \cap W = \bigcup_{i\in I} (K_i \cap W) \neq \phi. & (4) \end{cases}$$

Il en ressort que chaque K_i vérifie les relations (1) et (2). Comme ilest connexe on déduit qu'il est nécessairement inclus exclusivement dans V ou dans W. C'est le cas en particulier de K_{i_0}, que l'on suppose contenu dans V. D'autre part, on tire de (4) qu'il existe un indice i_1 de I tel que $K_{i_1} \cap W \neq \phi$. On déduit aussitôt que $K_{i_1} \subset W$. Or K_{i_0} et K_{i_1} sont d'intersection non vide, donc, K_{i_0} rencontre à la fois V et W. Cela est en contradiction avec sa connexité !

Sujet 15

1. On considère dans l'espace usuel $(\mathbb{R},|.|)$ les cinq sous-ensembles donnés par :

$$A=[3,7[;\ B=[4,8];\ C=\{1,2,3\}\cup]-5,0[;$$
$$D=\{1,2,3\}\cup[-5,+\infty[;\ E=\{1,2,3\}\cup[-5,0].$$

Lequel d'entre eux est compact et connexe ? Compact et non connexe ? Connexe et non compact ? Non compact et non connexe ? Justifier.

2. Soit $f:(E,\tau)\to(F,\sigma)$. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:

i) f est continue sur E.

ii) $\forall A\subset F$, $\overline{f^{-1}(A)}\subset f^{-1}(\overline{A})$.

3. Soient $E=\{a,b,c,d\}$ et $F=\{1,2,3,4\}$. On les munit respectivementdes topologies :

$\tau=\{\phi,\{c\},\{b,c\},\{a,b,c\},E\}$ et $\theta=\{\phi,\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\},F\}$,

Soient $f:(E,\tau)\to(F,\theta)$ la foncti on définie de (E,τ) vers (F,θ) par :

$$f(a)=f(b)=2;f(c)=3;f(d)=4;$$

et $g:(F,\theta)\to(E,\tau)$ la fonction définie de (F,θ) vers (E,τ) par :

$$g(1)=g(2)=a;g(3)=c;g(4)=d.$$

1) Déterminer les familles de voisinages $\mathscr{V}(a)$ de a, $\mathscr{V}(b)$ de b et $\mathscr{V}(2)$ de 2.

2) Déterminer les systèmes fondamentaux de voisinages $\mathscr{W}(2)$ de 2 et $\mathscr{W}(a)$ de a.

3) Montrer que f est discontinue en b.

4) Montrer que la fonction g est continue en 2.

5) Montrer que la composée $g\circ f:(E,\tau)\to(E,\tau)$ est continue

en b.

6) Que conclure ?

4. Soit (E,τ) un espace topologique. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:

i) E est connexe.

ii) Il n'existe pas de fonction surjective continue de (E,τ) dans un espace discret $F=\{a,b\}$.

Solution

1. On a :

$A=[3,7[$: est connexe car c'est un intervalle et non compact car il n'est pas fermé.

$B=[3,7]$: est connexe car c'est un intervalle et est compact car il est fermé et borné.

$C=\{1,2,3\}\cup]-5,0[$: est non connexe car ce n'est pas un intervalle et est non compact car il n'est pas fermé.

$D=\{1,2,3\}\cup[-5,+\infty[$: est non connexe car ce n'est pas un intervalle et est non compact car il n'est pas borné.

$E=\{1,2,3\}\cup[-5,0]$: est non connexe car ce n'est pas un intervalle mais il est compact car il est fermé et borné.

2. Supposons que f soit continue sur E. Pour tout point a de E, l'image réciproque de tout voisinage de $f(a)$ est voisinage de a. Soit A une partie de F. On distingue deux cas possibles :

- Si $f(E)\cap A=\phi$ alors $f^{-1}(A)=\phi$ et donc l'inclusion posée est triviale $\phi\subset f^{-1}(\overline{A})$.

- Si $A\cap f(E)\neq\phi$ on écrit :

$$\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A}) \Leftrightarrow C_E f^{-1}(\overline{A}) \subset C_E \overline{f^{-1}(A)}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(\overset{\circ}{\overbrace{C_F A}}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(C_F A)}}.$$

Ainsi, il nous suffit de montrer la dernière inclusion. Pour ce faire, on observe que si x est un point de $f^{-1}(\overset{\circ}{\overbrace{C_F A}})$ son image $f(x)$ est alors dans $\overset{\circ}{\overbrace{C_F A}}$. Il en ressort que $C_F A$ est un voisinage de $f(x)$. Or, f est continue en x donc $f^{-1}(C_F A)$ est un voisinage de x. Autrement dit, x est dans $\overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(C_F A)}}$. D'où l'inclusion !

Inversement, supposons réalisée l'inclusion en question.

Soit x_0 un point de E et $V_{f(x_0)}$ un des voisinages ouverts (le prendre ouvert, comme vous le savez, n'entrave en rien la généralité du résultat !!) de son image $f(x_0)$. On a aussitôt :

$$f^{-1}(V_{f(x_0)}) = f^{-1}(\overset{\circ}{\overbrace{V_{f(x_0)}}}) \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(V_{f(x_0)})}}.$$

D'où $f^{-1}(V_{f(x_0)}) = \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(V_{f(x_0)})}}$. Ainsi, $f^{-1}(V_{f(x_0)})$ est un voisinage ouvert de x_0. f est alors continue en x_0.

3. 1) On a sous le contrôle de la définition d'un voisinage:

$$\mathscr{V}(a) = \{\{a,b,c\}, E\},$$

$$\mathscr{V}(b) = \{\{b,c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}, E\},$$

$$\mathscr{V}(2) = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, E\}.$$

2) On a $\mathscr{W}(a) = \{\{a,b,c\}\}$ et $\mathscr{W}(2) = \{\{1,2\}\}$.

3) On a $f(b) = 2$. On remarque que $f^{-1}(\{1,2\}) = \{a,b\}$ n'est pas un voisinagede b. Donc, f n'est pas continue en ce point.

4) De même, on a $g(2) = a$, Comme $g^{-1}(\{a,b,c\}) = \{1,2,3\}$

est un voisinage de 2 on conclut que g est continue en 2.

5) On a $(g\circ f)(b)=a$. Comme $(g\circ f)^{-1}(\{a,b,c\})=\{a,b,c\}$ est un voisinage de b, on affirme que $g\circ f$ est continue en b.

6) Il découle de ce qui précède qu'une composée de fonctions peut être continue sans que l'une de ces fonctions ne le soit.

4. i) $\Rightarrow$ ii)

Supposons E connexe. Si une telle fonction f existait le sous-ensemble $f^{-1}(\{a\})$ (par exemple) serait un ouvert et fermé propre de E. Cela est en contradiction avec la connexité de ce dernier.

ii) $\Rightarrow$ i)

Si E est non connexe il admettrait une partition ouverte (A,B). La fonction $f:E\to\{a,b\}$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases} a \text{ si } x\in A, \\ b \text{ si } x\in B, \end{cases}$$

est alors continue et surjective. Absurde !

Sujet 16

1. Soient A et B deux sous-ensembles d'un espace séparé E.

1) Montrer que si A et B sont compacts alors $A \cup B$ l'est de même.

2) On suppose que A et B sont connexes et A rencontre $\overline{B}$. Montrer alors que $A \cup B$ est connexe.

2. 1) On considère dans l'espace usuel $(\mathbb{R}, |.|)$ les sous-ensembles suivants :

$$A = \mathbb{Q} \cup \left\{\sqrt{2}\right\};\ B = \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, \sqrt{3}\right[;\ C = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}.$$

Lesquels d'entre eux sont compacts ? Relativement compacts ? Connexes ? Complets ? Justifier.

2) Démontrer que toute partie infinie A d'un espace compact (E, τ) admet un point d'accumulation.

3. 1) Etant donné un sous-ensemble non vide A d'un espace topologique (E, τ), montrer que :

i) $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \mathscr{F}_r(A)$;

ii) $\mathscr{F}_r(A) = \mathscr{F}_r(C_E A)$;

iii) $E = \overset{\circ}{A} \cup \mathscr{F}_r(A) \cup \overset{\circ}{\widehat{C_E A}}$.

2) i) Citer le théorème de« passage des douanes (en connexité).

ii) Démontrer-le.

4. Soit $f : (\mathrm{E}, \tau) \to (F, \sigma)$ une fonction d'un espace topologique (E, τ) vers un autre (F, σ). Démontrer l'équivalence des deux assertions suivantes:

i) $\forall A \subset F,\ f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(A)}}$,

ii) $\forall B \subset F,\ \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Solution

1. 1) $A \cup B$ est séparé par hérédité. Par ailleurs, si $(\Omega_i)_{i\in I}$ est un de ses recouvrements ouverts celui-ci recouvre alors A et B. Ceux-ci étant compacts, l'axiome de Borel-Lebesgue permet d'affirmer que :

$$\exists I_0 \subset I \,/\, A \subseteq \bigcup_{i\in I_0} \Omega_i \ ; \quad \exists I_1 \subset I \,/\, B \subseteq \bigcup_{i\in I_1} \Omega_i ;$$

I_0 et I_1 étant deux parties finies de I. Il en ressort que :

$$\exists I_0 \cup I_1 \subset I : A \cup B \subseteq \bigcup_{i\in I_0 \cup I_1} \Omega_i .$$

Comme $I_0 \cup I_1$ est fini l'axiome de Borel-Lebesgue est satisfait et donc, $A \cup B$ est compact.

2) Le sous-ensemble $C = A \cap \overline{B}$ est non vide et vérifie :

$$B \subset B \cup C \subset \overline{B}.$$

On déduit que $B \cup C$ est connexe. Comme il coupe A on conclut aussitôt que $A \cup (B \cup C) = (A \cup C) \cup B = A \cup B$ est connexe.

Remarque

On peut mener une autre preuve par l'absurde en ces termes.

Si $A \cup B$ était non connexe il existerait deux ouverts non vides H et M de E de telle sorte que :

$$\begin{cases} (A \cup B) \subset H \cup M, & (1) \\ (A \cup B) \cap H \cap M = \phi, & (2) \\ (A \cup B) \cap H = (A \cap H) \cup (B \cap H) \neq \phi, & (3) \\ (A \cup B) \cap M = (A \cap M) \cup (B \cap M) \neq \phi. & (4) \end{cases}$$

Il en ressort aussitôt que les deux connexes A et B vérifient les conditions (1) et (2). On conclut alors que chacun d'eux est exclusivement inclus ou dans H ou dans M. Les conditions (3) et (4) excluent l'éventualité qu'ils soient tous deux dans l'un des deux ouverts. Si on opte pour $A \subset H$ et $B \subset M$ on déduit que $B \cap H = \phi$. Ceci ne peut pas avoir lieu puisque l'ouvert H contient des points adhérents à B. C'est la contradiction cherchée !

2. 1) A n'est pasfermé donc il ne peut être ni complet ni compact. Deplus,il n'est pas relativement compact puisque son adhérence $\overline{A}=\mathbb{R}$ n'est pas compacte. Enfin, il n'est pas connexe car ce n'est pas un intervalle.

B n'est ni complet ni compact car il n'est pas fermé. Par contre il est relativement compact car son adhérence $\overline{B}=\left[-\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$ est compacte. Enfin, il n'est pas connexe car ce n'est pas un intervalle.

C est compact car il est fermé et borné. Il en ressort qu'il est relativement compact et complet. Enfin, il n'est pas connexe car ce n'est pas un intervalle.

2) On procède par l'absurde. Supposons que A ne possède aucun point d'accumulation. Autrement dit, pour tout point x de E il existe un voisinage ouvert V_x de x tel que $V_x \cap A$ soit fini. Il en résulte que la famille $(V_x)_{x\in E}$ constitue un recouvrement ouvert de E. Comme celui-ci est compact on peut en extraire un sous-recouvrement fini $(V_{x_i})_{1\leq i\leq p}$. D'où :

$$A = A\cap E = A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{p} V_{x_i}\right)=\bigcup_{i=1}^{p}(A\cap V_{x_i}).$$

On arrive ainsi à une égalité entre A infini et $\bigcup_{i=1}^{p}(A\cap V_{x_i})$ fini en tant que réunion finie de parties finies. Absurde !

3. 1) On a clairement:

i) $\overset{\circ}{A}\cup \mathscr{F}_r(A)=\overset{\circ}{A}\cup(\overline{A}\setminus\overset{\circ}{A})=\overline{A};$

ii) $\mathscr{F}_r(C_E A)=\overline{C_E A}\cap\overline{C_E(C_E A)}=\overline{C_E A}\cap\overline{A}=\mathscr{F}_r(A);$

iii) $\overset{\circ}{A}\cup\mathscr{F}_r(A)\cup\overset{\circ}{\widehat{C_E A}}=\overline{A}\cup C_E\overline{A}=E.$

2) i) Théorème de « passage des douanes » :

Dans un espace topologique (E,τ) si un sous-ensemble connexe B rencontre une partie A et son complémentaire $C_E A$, alors il rencontre nécessairement la frontière $\mathscr{F}_r A$.

ii) Preuve :

On procède par l'absurde. Supposons que $B \cap \mathscr{F}_r A = \phi$. Il en résulte aussitôt que :

$$B = B \cap E = B \cap \left(\overset{\circ}{A} \cup \mathscr{F}_r A \cup \overset{\circ}{\widehat{C_E A}} \right) = \left(B \cap \overset{\circ}{A} \right) \cup \left(B \cap \overset{\circ}{\widehat{C_E A}} \right).$$

Les deux parties $B \cap \overset{\circ}{A}$ et $B \cap \overset{\circ}{\widehat{C_E A}}$ sont ouvertes dans (B, τ_B).

De plus, elles ne sont pas vides car :

$$\phi \neq \overline{A} \cap B = (\overset{\circ}{A} \cup \mathscr{F}_r A) \cap B = (\overset{\circ}{A} \cap B) \cup (B \cap \mathscr{F}_r A) = \overset{\circ}{A} \cap B;$$

$$\phi \neq \overline{C_E A} \cap B = \left(\overset{\circ}{\widehat{C_E A}} \cup \mathscr{F}_r(C_E A) \right) \cap B = \left(\overset{\circ}{\widehat{C_E A}} \cap B \right) \cup (\mathscr{F}_r(A) \cap B)$$

$$= \overset{\circ}{\widehat{C_E A}} \cap B;$$

On déduit que B, partitionné par ces deux ouverts non vides, n'est pas connexe. C'est en contradiction avec les hypothèses.

4. i) $\Rightarrow$ ii)

Pour tout sous-ensemble A de F on a :

$$f^{-1}\left(\overset{\circ}{\widehat{C_F A}} \right) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(C_F A)}} \Leftrightarrow f^{-1}\left(C_F \overline{A} \right) \subset C_E \overline{f^{-1}(A)}$$

$$\Leftrightarrow C_E f^{-1}(\overline{A}) \subset C_E \overline{f^{-1}(A)}$$

$$\Leftrightarrow \overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A}).$$

ii) $\Rightarrow$ i)

On a de même :

$$\overline{f^{-1}(C_F A)} \subset f^{-1}(\overline{C_F A}) \Leftrightarrow \overline{C_E f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(C_F \overset{\circ}{A})$$

$$\Leftrightarrow C_E \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(A)}} \subset C_E f^{-1}(\overset{\circ}{A})$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(A)}}.$$

Remarque : Chacune des deux assertions caractérise la continuité de f sur E.

Sujet 17

1. Citer la définition d'une propriété héréditaire et celle d'un invariant topologique. Exhiber une de chaque.

2. Démontrer qu'un espace topologique (E,τ) est séparé si, et seulement si, la diagonale de $E\times E$ est fermée.

3. Soit (E,τ) un espace topologique. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:

   i) E et ϕ sont les seules parties de E, à la fois fermées et ouvertes.

   ii) Il n'existe pas de fonction surjective continue de (E,τ) dans un espace discret $F=\{a,b\}$.

4. Démontrer que toute suite infinie (x_n) d'un espace topologique compact (E,τ) admet une valeur d'adhérence.

Solution

1. Courez à vos cahiers !

2. Notons $\Delta=\{(x,x)\in E\times E\}$ la diagonale de $E\times E$.

Supposons que E soit séparé et montrons que $C_{E\times E}\Delta$ est ouvert dans $E\times E$. Si (x,y) est un point de $C_{E\times E}\Delta$ alors ses coordonnées x et y sont distinctes dans l'espace séparé E. Il existe donc un voisinage V_x de x et un autre W_y de y tels que $V_x\cap W_y=\phi$. Par suite, $V_x\times W_y\subset C_{E\times E}\Delta$. On en déduit par absorption que $C_{E\times E}\Delta$ est voisinage de (x,y). Il est donc ouvert et Δ fermée.

Réciproquement, supposons Δ fermée et considérons deux éléments distincts x et y de E. Il s'en suit que (x,y) est dans $C_{E\times E}\Delta$. Ce dernier étant ouvert, il est par conséquent voisinage de

(x,y). Il en résulte qu'il contient un voisinage élémentaire $V_x \times W_y$, avec V_x comme voisinage de x et W_y celui de y. D'où $V_x \cap W_y = \phi$. Ainsi, E est séparé.

3. i) $\Rightarrow$ ii)

Si une telle fonction $f: (E,\tau) \to F = \{a,b\}$ existait le sous-ensemble $f^{-1}(\{a\})$ serait ouvert et fermé dans (E,τ) sans pour autant être ni vide ni coïncidant avec E. C'est en contradiction avec les hypothèses.

ii) $\Rightarrow$ i)

Si (E,τ) admettait un sous-ensemble propre ouvert et fermé A la fonction $f: (E,\tau) \to F = \{a,b\}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in A, \\ b & \text{si } x \in C_E A, \end{cases}$$

serait surjective et continue. Absurde !

4. On procède par l'absurde. On sait que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$, où $A_n = \{x_k, k \geq n\}$. Ainsi, si A était vide on aurait :

$$E = C_E\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_E\left(\overline{A_n}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\overset{\circ}{\overline{C_E A_n}}\right).$$

Il en ressort que la famille $(\overset{\circ}{\overline{C_E A_n}})_n$ constitue un recouvrement ouvert de E. Comme ce dernier est compact on peut en extraire un sous-recouvrement fini $(\overset{\circ}{\overline{C_E A_{n_i}}})_{1 \leq i \leq p}$. Par suite, on obtient :

$$E = \bigcup_{i=1}^{p} \overset{\circ}{\overline{C_E A_n}} = \bigcup_{i=1}^{p} C_E \overline{A_n} = C_E \bigcap_{i=1}^{p} \overline{A_n}.$$

D'où :

$$\bigcap_{i=1}^{p} \overline{A_{n_i}} = \overline{A_{\max\limits_{1\le i\le p} n_i}} = \phi.$$

Cela ne peut avoir lieu puisque la famille (A_n) est décroissante et donc:

$$\phi \neq A_{\max\limits_{1\le i\le p} n_i} \subset \overline{A_{\max\limits_{1\le i\le p} n_i}} = \bigcap_{i=1}^{p} \overline{A_{n_i}}.$$

C'est la contradiction recherchée !

Remarque

En s'aidant de la deuxième formulation de l'axiome de Borel-Lebesgue, on peut de la famille de fermés (A_n) d'intersection vide en extraire une sous-famille finie $\left(A_{n_i}\right)_{1\le i\le p}$ dont l'intersection reste vide. On conclut alors comme rapporté ci-dessus.

Sujet 18

1. Enoncer les théorèmes de Tykhonoff[7] en compacité et celui du « passage des douanes » en connexité.

2. Soit $f:(E,\tau)\to(F,\sigma)$ une fonction d'un espace topologique (E,τ) vers un autre (F,σ). Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:

   i) L'image réciproque de tout ouvert de F est ouverte dans E.

   ii) $\forall A\subset F$, $\overline{f^{-1}(A)}\subset f^{-1}(\overline{A})$.

3. Un espace topologique (E,τ) est dit jouissant de la propriété du point fixe si toute fonction continue $f:(E,\tau)\to(E,\tau)$ admet un point fixe. Montrer qu'un tel espace est nécessairement connexe.

4. Soit (E,τ) un espace topologique compact dont toutes les composantes connexes sont ouvertes. Démontrer que le nombre de ces composantes est fini.

Solution

1. Consultez vos notes !

2. i) $\Rightarrow$ ii)

Soit A un sous-ensemble de F. Comme $\overset{\circ}{\widehat{C_F A}}$ on affirme par hypothèse que $f^{-1}(\overset{\circ}{\widehat{C_F A}})$ est un ouvert de E. Il en résulte que :

$$f^{-1}(\overset{\circ}{\widehat{C_F A}})\subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(C_E A)}}.$$

---

7. Andrey Nikolayevich Tykhonoff (30/10/1906-8/11/1993) : Mathématicien russe. Il a des contributions dans la topologie, l'analyse fonctionnelle et la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles et leurs applications à la physique.

Comme :

$$f^{-1}(\overset{\circ}{\overbrace{C_F A}}) = f^{-1}(C_F \overline{A}) = C_E f^{-1}(\overline{A}),$$

$$\overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(C_F A)}} = \overset{\circ}{\overbrace{C_E f^{-1}(A)}} = C_E \overline{f^{-1}(A)},$$

il vient $C_E f^{-1}(\overline{A}) \subset C_E \overline{f^{-1}(A)}$, par suite, $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$.

ii) $\Rightarrow$ i)

Soit Ω un ouvert de F. On a $C_F\Omega = \overline{C_F\Omega}$. Comme :

$$\overline{f^{-1}(C_F\Omega)} \subset f^{-1}(\overline{C_F\Omega}) = f^{-1}(C_F\Omega) = C_E f^{-1}(\Omega);$$

on déduit que :

$$f^{-1}(\Omega) \subset C_E \overline{f^{-1}(C_F\Omega)} = \overset{\circ}{\overbrace{C_E f^{-1}(C_F\Omega)}} = \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(C_F C_F\Omega)}} = \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(\Omega)}}.$$

D'où $f^{-1}(\Omega) = \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(\Omega)}}$. Ainsi, $f^{-1}(\Omega)$ est ouvert.

Remarque :

Ces deux propriétés caractérisent la continuité de f sur E.

3. On procède par l'absurde. Supposons que (E,τ) possède la dite propriété sans pour autant qu'il soit connexe. Il existe alors deux ouverts disjoints V et W tels que $E = V \cup W$. Fixons un point a dans V et un autre b dans W et considérons la fonction $f:(E,\tau) \to (E,\tau)$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} b \text{ si } x \in V, \\ a \text{ si } x \in W. \end{cases}$$

Une telle fonction est continue et sans point fixe. C'est en contradiction avec l'hypothèse.

4. La famille des composantes connexes $(C_x)_{x\in E}$ de E constitue un recouvrement ouvert de celui-ci. Comme ce dernier est compact on peut lui en extraire un sous-recouvrement fini $(C_{x_i})_{1\le i\le p}$. Il en résulte quelenombre de ces composantes connexes ne peut excéder p.

Sujet 19

1. 1) Enoncer les définitions d'une application ouverte, d'une application fermée et d'un homéomorphisme.

2) Une fonction continue est-elle nécessairement ouverte ? fermée ? ouverte et fermée ? Justifier.

3) Une application bijective continue est-elle un homéomorphisme ? Justifier.

2. Soit f une fonction d'un espace topologique (E,τ) vers un autre (F,σ). Montrer que pour que f soit continue sur E il faut et il suffit que l'image réciproque de tout fermé de F soit fermée dans E.

3. On considère dans $(\mathbb{Q},|.|)$ le sous-ensemble :

$$A=\{x\in\mathbb{Q}/2<x^2<3\}.$$

1) Vérifier que A est fermé et borné.
2) Montrer que A n'est pas compact.
3) Montrer que $(\mathbb{Q},|.|)$ n'est ni compact ni localement compact.
4) Que conclure ?

4. Soit (E,τ) un espace topologique. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:

i) E est connexe.

ii) Toute fonction continue de (E,τ) dans l'espace discret $F=\{a,b\}$ est constante.

Solution

1. Revoyez vos cahiers !

2. Supposons f continue. Si A est un fermé de (F,σ) son complémentaire $C_F A$ est ouvert. Il est alors voisinage de chacun de ses points. Trois cas possibles se dégagent :

i) Si $C_F A \cap f(E) = \phi$ alors $f^{-1}(C_F A) = C_E f^{-1}(A) = \phi$ est ouvert dans (E,τ); donc, $f^{-1}(A)$ est fermé.

ii) Si $C_F A \subset f(E)$ alors pour tout point x_0 de $f^{-1}(C_F A)$ $C_F A$ est un voisinage ouvert de $f(x_0)$. Comme f est continue alors $f^{-1}(C_F A)$ est voisinage de x_0. Ainsi, $f^{-1}(C_F A)$ est voisinage de tous ses points. Il est donc ouvert, par suite, $f^{-1}(A)$ est fermé.

iii) Si $C_F A = B \cup C$ avec $B \subset f(E)$ et $C \subset C_F(f(E)$ alors :

$$f^{-1}(C_F A) = f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C) = f^{-1}(B).$$

On conclut avec le cas (i)

Inversement, considérons un point a de E et $V_{f(a)}$ un voisinage ouvert de son image $f(a)$ dans (F,σ). Il s'en suit que $C_F V_{f(a)}$ est fermé ; par conséquent, $f^{-1}\left(C_F V_{f(a)}\right) = C_E f^{-1}\left(V_{f(a)}\right)$ est fermé dans (E,τ). Donc, $f^{-1}\left(V_{f(a)}\right)$ est un ouvert contenant a. Il est alors voisinage de ce dernier. On conclut finalement que f est continue en a.

3. 1) On remarque que $A = \mathbb{Q} \cap \left[-\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$. Donc, A est fermé et borné dans $\mathbb{Q}$.

2) A n'est pas complet. En effet, il ne renferme pas la limite de sa suite (x_n) donnée par $x_n = \dfrac{\left[\sqrt{3}n\right]}{n}$. De ce fait, il ne peut être compact.

3) $(\mathbb{Q},|.|)$ n'est pas compact, il n'est pas complet du fait de sa densité dans $\mathbb{R}$ (se rappeler les suites rationnelles convergeant vers des irrationnels). Bien plus, il n'est pas localement compact. En effet, si un rationnel a jouissaitd'un voisinage compact V_a de $\mathbb{Q}$ celui-ci contiendrait un ensemble du genre $W_a = \mathbb{Q} \cap [a-r, a+r]$,

avec r dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout irrationnel i fixé dans $[a-r,a+r]\setminus\mathbb{Q}$ on considère la famille de fermés non vides de $\mathbb{Q}$ donnés par :

$$A_n = V_a \cap \left[i - \frac{1}{n}, i + \frac{1}{n} \right];\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Il est clair que cette famille est décroissante d'intersection vide:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \subset V_a \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[i - \frac{1}{n}, i + \frac{1}{n} \right] \right) = V_a \cap \{i\} = \phi.$$

Comme V_a est compact on peut affirmer, d'après la propriété de Borel-Lebesgue (soussa deuxième formulation) qu'on peut extraire de (A_n) une sous-famille finie $(A_{n_j})_{1\le j\le p}$ d'intersection vide. Or ceci ne peut avoir lieu puisque :

$$\bigcap_{j=1}^{p} A_{n_j} = V_a \cap \left[i - \frac{1}{\max\limits_{1\le j\le p} n_j}, i + \frac{1}{\max\limits_{1\le j\le p} n_j} \right] = A_{\max\limits_{1\le j\le p} n_j} \neq \phi;$$

c'est là la contradiction recherchée !

4) En rappelant que $(\mathbb{R},|.|)$ est localement compact, on conclut que la compacité locale n'est pas héréditaire.

4. i) $\Rightarrow$ ii)

Supposons E connexe. Si une telle fonction n'était pas constante les deux sous-ensembles $f^{-1}(\{a\})$ et $f^{-1}(\{b\})$ constitueraient une partition ouverte E, cela est en contradiction avec la connexité de ce dernier.

ii) $\Rightarrow$ i)

Si E est non connexe il admettrait une partition ouverte (A,B). La fonction $f : E \to \{a,b\}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} a \text{ si } x \in A, \\ b \text{ si } x \in B, \end{cases}$$

est alors continue et non constante. Absurde !

Sujet 20

1. Indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse :
   1) Toute partie compacte est relativement compacte.
   2) Tout partie relativement compacte est compacte.
   3) Tout espace compact est localement compact.
   4) Tout espace localement compact est compact.
   5) Tout espace connexe est localement connexe.
   6) Tout espace localement connexe est connexe.
   7) Tout espace compact est connexe.
   8) Tout espace connexe est compact.

2. Soit $f:(E,\tau)\rightarrow(F,\sigma)$ une fonction d'un espace topologique (E,τ) vers un autre (F,σ). Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:
   i) L'image réciproque de tout ouvert de F est ouverte dans E.
   ii) $\forall B\subset F$, $f^{-1}(\overset{\circ}{B})\subset \overset{\circ}{\overline{f^{-1}(B)}}$.

3. 1) Soient A et B deux sous-ensembles non vides d'un espace topologique (E,τ). On suppose que $A\subset B$. Montrer que si A est connexe dans le sous-espace (B,τ_B) alors il le reste dans l'espace (E,τ).
   2) En déduire que les seules parties connexes du sous-espace $(\mathbb{Q},|.|_{\mathbb{Q}})$ de l'espace usuel $(\mathbb{R},|.|)$ sont ses singletons.

4. Montrer que le sous-espace $(\mathbb{Q},|.|_{\mathbb{Q}})$ de l'espace usuel $(\mathbb{R},|.|)$ n'est pas connexe par arcs.

Solution

1. Les assertions (1), (3) et (5) sont vraies. Les restantes sont

fausses. Empressez-vous pour les justifier !

2. i) $\Rightarrow$ ii)

Soit B une partie de F. $\overset{\circ}{B}$ étant ouvert, $f^{-1}(\overset{\circ}{B})$ l'est de même par hypothèse. Comme $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset f^{-1}(B)$ donc, $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$.

ii) $\Rightarrow$ i)

Soit Ω un ouvert de F. On a $\Omega = \overset{\circ}{\Omega}$. Donc :

$$f^{-1}(\Omega) = f^{-1}(\overset{\circ}{\Omega}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(\Omega)}}.$$

ce qui signifie que $f^{-1}(\Omega)$ est ouvert dans E.

Remarque

Ces deux propriétés caractérisent la continuité de f sur E.

3. 1) On procède par l'absurde. Supposons que A soit connexe dans (B, τ_B) sans pour autant qu'il le soit dans (E, τ). Il existe alors deux ouverts R et S de τ tels que :

$$\begin{cases} A = R \cup S, \\ A \cap R \cap S = \phi, \\ A \cap R \neq \phi, \\ A \cap S \neq \phi. \end{cases}$$

Comme A est inclus dans B il s'écrit $A = A \cap B$. Ces dernières relations prennent alors la forme :

$$\begin{cases} A = B \cap (R \cup S) = (B \cap R) \cup (B \cap S), \\ A \cap (B \cap R) \cap (B \cap S) = \phi, \\ A \cap (B \cap R) \neq \phi, \\ A \cap (B \cap S) \neq \phi. \end{cases}$$

Or $B \cap R$ et $B \cap S$ sont deux ouverts non vides de (B, τ_B), donc

A ne peut pas être connexe dans (B, τ_B). Cela est en contradiction avec les hypothèses.

2) Si D est une partie connexe de $\left(\mathbb{Q}, |.|_{\mathbb{Q}}\right)$ elle reste d'après la première question, connexe dans $\left(\mathbb{R}, |.|\right)$. Il en résulte que D est un intervalle. Comme les seuls intervalles que contient $\mathbb{Q}$ sont des singletons on conclut que D est un singleton.

4. On raisonne par l'absurde. Si $\mathbb{Q}$ était connexe par arcs il existerait pour tout couple de points (α, β) un chemin $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{Q}$ tel que $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$. Il en résulterait en vertu de la continuité de f que l'image $f([0,1])$ serait connexe dans $\left(\mathbb{Q}, |.|_{\mathbb{Q}}\right)$ et donc serait dégénérée d'après l'exercice précédent. Cela ne peut avoir lieu puisque $f([0,1])$ renferme déjà les nombres α et β. C'est la contardiction cherchée !

Sujet 21

1. Pour tout réel strictement positif r on pose :

$$\Omega_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8 < r^2\right\}.$$

On note τ la famille constituée de ϕ et de toutes les réunions des éléments Ω_r. On admet que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ est un espace topologique.

1) Déterminer dans $(\mathbb{R}^2, \tau)$ toutes les limites de la suite de terme général $u_n = \left(\dfrac{1}{n}, 0\right)$.

2) Citer deux raisons justifiant que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ n'est pas séparé.

3) Vérifier que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ est connexe mais pas compact.

2. On munit l'ensemble $E = \{x, y, z, t\}$ de la topologie :

$$\tau = \left\{\phi, E, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}, \{y,z,t\}\right\}.$$

1) L'espace (E, τ) est-il connexe ? Justifier.

2) Les sous-espaces $A = \{x, y, t\}$, $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$ et $\mathscr{F}_r(A)$ sont-ils connexes ? Justifier.

3. Soient (E, τ) un espace topologique connexe par arcs et $f : (E,\tau) \to (F,\sigma)$ une fonction continue de E dans un espace (F,σ).

1) Montrer que $f(E)$ est connexe par arcs.

2) En déduire que la connexité par arcs est un invariant topologique.

Solution

1. 1) Soit (a,b) un point de $\mathbb{R}^2$. La famille :

$$\mathscr{W}(a,b) = \left\{\Omega_r,\ r > \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2}\right\},$$

est un de ses systèmes fondamentaux de ses voisinages. Ainsi, (a,b) est limite de (u_n) si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}^* : n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad u_n \in \Omega_r ;$$

c'est-à-dire :

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n} + 8 < r^2 .$$

On remarque que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n} + 8 < \frac{5}{n} + 8 < r^2 \;\Rightarrow\; \frac{5}{n} < r^2 - 8 .$$

Il en résulte que si $r \leq \sqrt{8}$ aucun élément de (u_n) n'est dans Ω_r. On conclut alors qu'aucun point (a,b) de $\Omega_{\sqrt{8}}$ n'est limite de (u_n). Par contre, si $r > \sqrt{8}$ alors Ω_r renferme tous les éléments u_n d'indices dépassant le rang $n_0 = \left[\dfrac{5}{r^2 - 8}\right]$. Cela signifie que tout point (a,b) de $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{\sqrt{8}}$ est limite de (u_n).

2) L'une des raisons est le fait que tous les ouverts sont d'intersection non vide (ils renferment tous le point $(-2,2)$).

La seconde est la non unicité de la limite de (u_n).

3) Tous les ouverts de $(\mathbb{R}^2, \tau)$ sont d'intersection non vide. Donc, ce dernier est connexe. Par ailleurs, cet espace n'étant pas séparé, ne peut conséquemment être compact.

2. 1) Non. Il ne l'est pas, car le couple d'ouverts $(\{x\},\{y,z,t\})$ le partitionne.

2) Précisons les sous-ensembles en présence ainsi que leurs topologies induites. On a:

$$\tau_A = \{\phi, A, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}, \{y,t\}\};$$

$$\overset{\circ}{A}=\{x,y\};\ \tau_{\overset{\circ}{A}}=\left\{\phi,\overset{\circ}{A},\{x\},\{y\}\right\};$$

$$\overline{A}=\{x,y,z,t\}=E;\ \tau_{\overline{A}}=\tau.$$

$$\mathscr{F}_r(A)=\overline{A}\setminus\overset{\circ}{A}=\{z,t\};\ \tau_{\mathscr{F}_r(A)}=\{\phi,\mathscr{F}_r(A)\}.$$

Comme E, l'ensemble A n'est pas connexe car le couple d'ouverts $(\{x\},\{y,t\})$ le partitionne. C'est le cas de son intérieur $\overset{\circ}{A}$ admettant la partition ouverte $(\{x\},\{y\})$. De même, $\overline{A}=E$ n'est pas connexe. Enfin, la frontière $\mathscr{F}_r(A)$ est connexe, puisque munie de la topologie grossière.

3. 1) Soient y_0 et y_1 deux points distincts de $f(E)$. Il existe deux points x_0 et x_1 dans E tels que $y_0=f(x_0)$ et $y_1=f(x_1)$. Comme E est connexe par arcs il existe un chemin $g:[0,1]\to E$ d'origine $x_0=g(0)$ et d'extrémité $x_1=g(1)$. Il en ressort que $(f\circ g)(0)=y_0$ et $(f\circ g)(1)=y_1$. La fonction $f\circ g:[0,1]\to f(E)$ est un chemin sur $f(E)$, d'origine y_0 et d'extrémité y_1. Donc, $f(E)$ est connexe par arcs comme annoncé.

2) La connexité par arcs est conservée par continuité. Donc, elle l'est à fortiori par homéomorphisme. On conclut qu'elle est un invariant topologique.

Sujet 22

1. Soit f une fonction d'un espace topologique (E,τ) vers un autre (F,σ). Démontrer que pour que f soit continue sur E il faut, et il suffit que l'image réciproque de tout ouvert de F est ouverte dans E.

2. On munit $\mathbb{Z}$ de la topologie τ constituée de $\mathbb{Z}$ et de tout sous-ensemble Ω ne contenant pas $7,12$ et 1954.

   1) $(\mathbb{Z},\tau)$ est-il compact ? Connexe ? Justifier.

   2) Même question pour les sous-espaces $A=\{2016,2017\}$ et $B=\{7,12,1954\}$.

   3) La compacité et la connexité sont-elles des propriétés héréditaires ? Justifier.

   4) Soit $f:(\mathbb{R},|.|)\to(\mathbb{Z},\tau)$ la fonction « partie entière » définie par $f(x)=[x]$. Etudier sa continuité sur $\mathbb{R}$.

3. 1) Soit A un sous-ensemble connexe non vide d'un espace topologique (E,τ). Montrer que tout sous-ensemble B tel que $A\subset B\subset\overline{A}$, est connexe.

   2) Dire, en justifiant, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

   i) Si $\overset{\circ}{A}$ est connexe A l'est de même.

   ii) Si A est connexe $\overset{\circ}{A}$ l'est de même.

   iii) Si A est connexe $\overline{A}$ l'est de même.

   iv) Si $\overline{A}$ est connexe A l'est de même.

   v) Si A est compact $\overline{A}$ l'est de même.

   vi) Si $\overline{A}$ est compacte A l'est de même.

4. Montrer que toute partie infinie d'un espace compact (E,τ) admet un point d'accumulation.

Solution

1. La condition est nécessaire.

Supposons f continue sur E. L'image réciproque $f^{-1}(V_{f(x_0)})$ de tout voisinage $V_{f(x_0)}$ de l'image $f(x_0)$ d'un point x_0 de E est voisinage de x_0.

Si A est un sous-ensemble ouvert de F il est voisinage de tous ses points. Il s'en suit que $f^{-1}(A)$ est vide ou voisinage de tous ses ponts. C'est donc un ouvert.

La condition est suffisante.

Soient x_0 un point de E et $V_{f(x_0)}$ un voisinage ouvert de son image. L'image réciproque $f^{-1}(V_{f(x_0)})$ est alors ouverte, donc voisinage de tous ses points. Ainsi, f est continue en x_0.

2. 1) $(\mathbb{Z}, \tau)$ n'est pas compact car il n'est pas séparé. En effet, les points 7 et 12 (par exemple) n'ont que $\mathbb{Z}$ comme seul voisinage.

Par contre, $(\mathbb{Z}, \tau)$ est connexe car aucun de ses sous-ensembles propres ne peut être à la fois ouvert et fermé. Il ne peut avoir en commun avec son complémentaire les éléments 7,12 et 1954.

2) $A = \{2016, 2017\}$ est discret et fini. Donc, il est compact mais pas connexe.

$B = \{7, 12, 1954\}$ est grossier. On déduit aussitôt qu'il connexe mais pas compact.

3) Ni l'une ni l'autre n'est héréditaire. En effet, on sait que pour la topologie usuelle, $\mathbb{R}$ est connexe alors que $\mathbb{N}$ (infini discret) ne l'est pas. On sait aussi que pour la même topologie usuelle, $\overline{\mathbb{R}}$ est compact et $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

4) On distingue les trois cas possibles suivants.

i) Si x est dans $\{7, 12, 1954\}$ on a :

$$\mathscr{W}(f(x))=\mathscr{W}([x])=\mathscr{W}(x)=\{\mathbb{Z}\},$$
$$f^{-1}(\{\mathbb{Z}\})=\mathbb{R}\in\mathscr{V}(x).$$

Donc, f est continue sur $\{7,12,1954\}$.

ii) Si x est dans $\mathbb{Z}\setminus\{7,12,1954\}$ on a :

$$\mathscr{W}(f(x))=\{\{[x]\}\}=\{\{x\}\}$$
$$f^{-1}(\{x\})=[x,x+1[\notin\mathscr{V}(x).$$

Donc, f n'est pas continue sur $\mathbb{Z}\setminus\{7,12,1954\}$.

iii) Si x est dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ on a :

$$\mathscr{W}(f(x))=\{\{[x]\}\},$$
$$f^{-1}(\{[x]\})=[[x],[x]+1[\notin\mathscr{V}(x).$$

Donc, f n'est pas continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

3. 1) On procède par l'absurde. Si B n'est pas connexe il existe alors deux ouverts non vides V et W tels que :

$$\begin{cases} B\subset V\cup W & (1)\\ B\cap V\cap W=\phi & (2)\\ B\cap V\neq\phi & (3)\\ B\cap W\neq\phi & (4)\end{cases}$$

Il en ressort aussitôt que A vérifie les deux contraintes (1) et (2). Les deux contraintes (3) et (4), jumelées avec l'hypothèse $A\subset B\subset\overline{A}$, font apparaitre que les deux ouverts V et W contiennent des points adhérents à A. Ils sont alors forcés de le rencontrer. Ainsi, se concrétisent sur A les quatre conditions niant sa connexité. Cela est contraire aux hypothèses.

2) i) Fausse. Dans $(\mathbb{R},|.|)$ le sous-ensemble $A=[-1,1]\cup\{3\}$ n'est pas connexe alors que son intérieur $\overset{\circ}{A}=]-1,1[$ l'est.

ii) Fausse. Dans l'espace $E=\{a,b,c,d\}$ muni de la topologie

$\tau = \{\phi, E, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{b,c,d\}\}$ le sous-ensemble $A = \{a,b,c\}$ est connexe alors que son intérieur $\overset{\circ}{A} = \{b,c\}$ ne l'est pas.

iii) Vraie. Il suffit de prendre $B = \overline{A}$ dans la première question.

iv) Fausse. Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ est connexe alors que $\mathbb{Q}$ ne l'est pas.

v) Vraie. Dans ce cas, $\overline{A} = A$.

vi) Fausse. Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, le sous-ensemble $A =]-1,1[$ n'est pas compact alors que son adhérence $\overline{A} = [-1,1]$ l'est.

4. On raisonne par l'absurde. Si A est un sous-ensemble d'un espace compact E ne jouissant pas de point d'accumulation alors pour tout point x de E il existe un voisinage ouvert V_x dont l'intersection $V_x \cap A$ avec A ne contient qu'un nombre fini au plus de points. Il en résulte que la famille $(V_x)_{x \in E}$ constitue un recouvrement ouvert de E. Celui-ci étant compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $(V_{x_i})_{1 \le i \le r}$. On peut alors avoir :

$$A = A \cap E = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{r} V_{x_i} \right) = \bigcup_{i=1}^{r} \left(A \cap V_{x_i} \right).$$

Ainsi, A est une réunion finie de parties finies. Il est donc fini. C'est en contradiction avec les hypothèses.

Sujet 23

1. 1) Citer la définition d'un chemin et celle d'un espace connexe par arcs.

2) on note τ la topologie cofinie sur $\mathbb{R}$ et on considère la fonction $f:(\mathbb{R},\tau)\to(\mathbb{R},|.|)$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases}-2 & \text{si} \quad x<0,\\ 0 & \text{si} \quad x=0,\\ 3 & \text{si} \quad x>0.\end{cases}$$

Montrer que f est fermée mais elle n'est ni ouverte ni continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que pour qu'un sous-ensemble A d'un espace topologique (E,τ) soit partout dense il faut et il suffit que tout ouvert non vide de E le coupe.

3. Montrer que tout espace connexe par arcs est connexe.

4. Soit $f:(E,\tau)\to(F,\sigma)$ une fonction d'un espace topologique (E,τ) vers un autre (F,σ). Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:

i) $\forall A\subset E \ f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$;

ii) $\forall B\subset F \ \overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$.

Solution

1. 1) A vos cahiers !

2) On remarque que l'image $f(A)$ de toute partie A de $\mathbb{R}$ est finie dans l'espace séparé $(\mathbb{R},|.|)$. Elle est donc fermée. En particulier, l'image par f de tout fermé de $(\mathbb{R},\tau)$ est fermée. Ainsi, f est fermée. Par ailleurs, f n'est pas ouverte car l'image $f(\mathbb{R}^*)=\{-2,3\}$

de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ de $(\mathbb{R},\tau)$ n'est pas ouverte dans $(\mathbb{R},|.|)$. Enfin, f n'est continue en aucun point a de $(\mathbb{R},\tau)$. En effet si:

a est dans $\mathbb{R}_-$ alors pour tout ε pris dans $]0,2]$, on a :

$$f^{-1}(]-2-\varepsilon,-2+\varepsilon[)=\mathbb{R}_=,$$

$a=0$ alors pour tout ε de $]0,2]$, on a $f^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)=\{0\}$;

a est dans $\mathbb{R}_+^*$ alors pour tout ε pris dans $]0,3]$, on a $f^{-1}(]3-\varepsilon,3+\varepsilon[)=\mathbb{R}_+^*$. En remarquant qu'aucune de ces images réciproques n'est voisinage de a, on conclut comme annoncé !

2. Supposons A partout dense. Tout ouvert non vide Ω étant voisinage de chacun deses points, lesquels sont adhérents à A, rencontre nécessairement ce dernier.

Inversement, supposons que tout ouvert non vide Ω de E coupe A. Il en résulte aussitôt que, tout voisinage de tout point de E renfermant un ouvert non vide, rencontre nécessairement A. Ce point est donc adhérent à ce dernier. Ainsi, $\overline{A}=E$.

3. On procède par l'absurde. Supposons que E soit connexe par arcs sans pour autant qu'il soit connexe. Il admettrait alors une partition par deux ouverts non vide Ω et $C_E\Omega$. Comme il est connexe par arcs il existe pour tous points a de Ω et b de $C_E\Omega$ un chemin f tel que $f(1)=a$ et $f(0)=b$. On déduitque $f([0,1])\cap\Omega$ et $f([0,1])\cap C_E\Omega$ sont deux ouverts partitionnant $f([0,1])$. Cela ne peut avoir lieu puisque la continuité de f rend ce dernier connexe. C'est la contradiction recherchée !

4. i) $\Rightarrow$ ii)

Soit B un sous-ensemble de F. En prenant $A=f^{-1}(B)$ dans (i) on écrit :

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))}.$$

Comme $\overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B}$, il vient :

$$f^{-1}\left(f(\overline{f^{-1}(B)})\right) \subset f^{-1}(\overline{B}).$$

De même, sachant que $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left(f(\overline{f^{-1}(B)})\right)$, on obtient enfin:

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}).$$

ii) $\Rightarrow$ i)

Soit A un sous-ensemble de E. En prenant $B = f(A)$ dans (ii) il vient aussitôt:

$$\overline{f^{-1}(f(A))} \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \Leftrightarrow \overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \Leftrightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}).$$

Remarque

Les deux propriétés caractérisent la continuité de f sur E.

Sujet 24

1. Donner la définition d'un recouvrement ouvert d'un espace, celle d'un espace régulier et enfin, celle d'un espace normal.

2. Montrer que pour qu'un espace topologique (E,τ) soit connexe il faut et il suffit que les seuls sous-ensembles à la fois ouverts et fermés soient E et ϕ.

3. 1) Soit A un sous-ensemble non vide d'un espace topologique (E,τ). Montrer que $(A')'\subset A'$.

2) On considère dans l'espace usuel $\left(\mathbb{R},|.|\right)$ le sous-ensemble $A=\mathbb{N}\cup\{-2\}\cup\left[-\sqrt{2},0\right[$. Déterminer alors $\overset{0}{A}$, $\overset{\overset{0}{0}}{A}$, $\overline{A}$, $\overline{\overline{A}}$, A' et $(A')'$.

3) Déterminer les valeurs d'adhérence des deux suites (u_n) et (v_n) données dans $\left(\mathbb{R},|.|\right)$ par $u_n=tg\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $v_n=Arctg\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)$.

4. Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes d'intersection non vide d'un espace topologique (E,τ). Montrer de deux manières différentes que la réunion $\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ est connexe.

Solution

1. Consultez vos notes !

2. Supposons que E soit connexe. S'il existe un sous-ensemble ouvert et fermé B lequel n'est ni vide ni valant E alors le couple $(B,C_E B)$ constituerait une partition ouverte de E. Cela contredirait la connexité de ce dernier. Réciproquement, supposons que E et ϕ sont les seuls ouverts et fermés de (E,τ) sans que celui-ci soit connexe. Il existerait alors deux ouverts G et H tels que :

$$\begin{cases} E = G \cup H, \\ \phi = G \cap H. \end{cases}$$

Il ressortirait que $H = C_E G$ ce qui rendrait G et H ouverts et fermés. Cela est exclu par hypothèse.

3. 1) On a par définition:

$$x \in (A')' \iff \forall V_x \in \mathscr{V}(x) \ V_x \cap \left(A' \setminus \{x\}\right) \neq \phi.$$

Soit x un point de $(A')'$ et V_x un de ses voisinages ouverts (c'est plausible, n'est-ce pas !).On constate que l'intersection non vide $V_x \cap \left(A' \setminus \{x\}\right)$ contient des points d'accumulation de A. Ces points jouissent de V_x comme d'un voisinage. Donc, ce dernier rencontre nécessairement $A \setminus \{x\}$. Ainsi, x est dans A'.

2) On a :

$$\overset{\circ}{A} = \overset{\circ\circ}{A} = \left]-\sqrt{2}, 0\right[\ ; \ \overline{A} = \overline{\overline{A}} = \mathbb{N} \cup \{-2\} \cup \left[-\sqrt{2}, 0\right];$$

$$A' = (A')' = \left[-\sqrt{2}, 0\right].$$

3) Concernant la suite (u_n) on observe qu'elle jouit des trois valeurs d'adhérence 0, 1 et -1. Elles sont les limites de ses sous-suites convergentes (u_{8n}), (u_{8n+1}) et (u_{8n+3}) respectivement. La suite (v_n) étant convergente vers $\dfrac{\pi}{4}$ n'admet quece nombre comme valeur d'adhérence.

4. Soit $f : \bigcup_{i \in I} \Omega_i \to F$ une fonction continue de $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ vers un espace discret F de deux éléments. La connexité de chacune des parties Ω_i rend toutes les restrictions f / Ω_i à Ω_i constantes.

Comme l'intersection $\bigcap_{i\in I}\Omega_i$ renferme par hypothèse au moins un point en lequel toutes les restrictions coïncident. On conclut que f est elle-même constante. Donc, $\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ est connexe.

On peut aussi procéder par l'absurde. Si $\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ n'est pas connexe il existerait deux ouverts S et T de telle sorte que :

$$\begin{cases} (1) & \bigcup_{i\in I}\Omega_i \subset S\cup T, \\ (2) & \bigcup_{i\in I}\Omega_i \cap S\cap T=\phi, \\ (3) & \bigcup_{i\in I}\Omega_i \cap S=\bigcup_{i\in I}(\Omega_i\cap S)\neq\phi, \\ (4) & \bigcup_{i\in I}\Omega_i \cap T=\bigcup_{i\in I}(\Omega_i\cap T)\neq\phi. \end{cases}$$

Il en résulterait que chaque Ω_i vérifie les relations (1) et (2). De sa connexité on déduit ou $\Omega_i\subset S$ ou $\Omega_i\subset T$. D'autre part, on tire de (3) et (4) qu'il existe deux indices i_1 et i_2 de I tels que $\Omega_{i_1}\cap S\neq\phi$ et $\Omega_{i_2}\cap T\neq\phi$. On déduit aussitôt que $\Omega_{i_1}\subset S$ et $\Omega_{i_2}\subset T$. Or Ω_{i_1} et Ω_{i_2} sont d'intersection non vide, donc, ils rencontrent tous deux S et T. Cela est en contradiction avec leur connexité !

Sujet 25

1. Dire si les assertions suivantes sontvraies ou fausses :

1) Tout sous-ensemble compact est ouvert,
2) Tout sous-ensemble compact est fermé,
3) Tout sous-ensemble connexe est ouvert.
4) Tout sous-ensemble connexe est fermé.
5) Tout espace compact est régulier.
6) Tout espace régulier est compact.
7) Tout espace régulier est connexe.
8) Tout espace connexe est régulier.

2. On munit l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ de la topologie τ formée du vide ϕ et de tout sous-ensemble Ω contenant 9.

1) Quelle est la nature topologique des sous-ensembles $\{10,11\}$, $\{9,12\}$ et $\{19,20\}$. Justifier.

2) Comparer les topologies usuelle $|.|_{\mathbb{N}}$ et la présente τ.

3) Montrer que 0 n'est pas une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ donnée par $u_n = n$.

4) Etudier la nature de $(u_n)_n$.

3. Soit $f:(E,\tau)\to(F,\sigma)$ une fonction d'un espace topologique (E,τ) vers un autre (F,σ). Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:

i) $\forall A\subset E,\ f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

ii) L'image réciproque de tout élément d'une base $\mathscr{B}$ de σ est ouverte dans E.

4. Soient B et A deux parties d'un espace topologique (E,τ).

On suppose que B est incluse dans A.

Montrer que B est compacte dans (E,τ) si, et seulement si, elle l'est dans le sous-espace (A,τ_A).

Solution

1. 1) Fausse. Prendre par exempletout sous-ensemble fini dans un espace séparé.

2) Vraie. Consultez vos notes !

3) Fausse. Prendre un intervalle non ouvert dans l'espace usuel $(\mathbb{R},|.|)$.

4) Fausse. Prendre un intervalle non ouvert dans l'espace usuel $(\mathbb{R},|.|)$.

5) Vraie. Consultez vos notes !

6) Fausse. Prendre l'espace usuel $(\mathbb{R},|.|)$.

7) Fausse. Prendre un espace infini discret.

8) Fausse. Prendre un espace grossier.

2. 1) $\{10,11\}$ et $\{19,20\}$ sont fermés car leurs complémentaires contenant 9, sont ouverts.

$\{9,12\}$ est ouvert car il contient 9.

2) La topologie usuelle $|.|_{\mathbb{N}}$ est discrète. Donc, elle est plus fine que τ. Par contre, celle-ci n'est pas plus fine que $|.|_{\mathbb{N}}$ car tout singleton distinct de $\{9\}$ est ouvert par rapport à $|.|_{\mathbb{N}}$ et ne l'est pas par rapport à τ.

3) On remarque que $\{0,9\}$ est un voisinage de 0, ne contenant que deux éléments (0 et 9) de $(u_n)_n$. Donc, ne 0 peut être valeur d'adhérence de celle-ci.

4) On distingue deux cas.

Si ℓ est un entier naturel distinct de 9, il jouit de la famille $\mathscr{W}(\ell)=\{\{\ell,9\}\}$ comme système fondamental de ses voisinages. Or le voisinage $\{\ell,9\}$ ne contient que deux éléments (ℓ et 9) de $(u_n)_n$, donc, celle-ci ne peut converger vers ℓ.

Si $\ell = 9$ on remarque que $\{9\}$ est un de ses voisinages ne contenant que 9 lui-même. Donc, $(u_n)_n$ ne peut pas converger vers 9. Conclusion : $(u_n)_n$ n'admet aucune limite. Elle est divergente.

3. i) $\Rightarrow$ ii)

Soit y un point de $f(\overline{A})$. Il existe un point x dans $\overline{A}$ tel que $y = f(x)$. Si V_y est un voisinage ouvert de y il existe (par définition d'une base) une sous famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ de σ telle que $V_y = \bigcup_{i\in I}\Omega_i$.

Comme on a :

$$f^{-1}(V_y) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}\Omega_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(\Omega_i),$$

et $f^{-1}(\Omega_i)$ est par hypothèses ouvert, on déduit que $f^{-1}(V_y)$ est un ouvert de E. Bien plus, Il est voisinage de x. Donc :

$$f^{-1}(V_y) \cap A \neq \phi.$$

D'où :

$$V_y \cap f(A) \neq \phi.$$

Par suite, y appartient à $\overline{f(A)}$. L'inclusion est achevée.

ii) $\Rightarrow$ i)

Soit O est un ouvert de la base $\mathscr{B}$ de σ. On a par hypothèses :

$$f\left(\overline{f^{-1}(C_F O)}\right) \subset \overline{f(f^{-1}(C_F O))} \subset \overline{C_F O} = C_F O.$$

D'où :

$$\overline{f^{-1}(C_F O)} = \overline{C_E f^{-1}(O)} = C_E \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(O)}} \subset f^{-1}(C_F O) = C_E f^{-1}(O).$$

Par suite :

$$f^{-1}(O) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(O)}};$$

ce qui signifie que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.

4. Supposons que B soit compacte dans E. Si $(\Omega_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de B dans (A, τ_A) on écrit :

$$\forall i \in I \ \exists O_i \in \tau / V_i = O_i \cap A.$$

Il en ressort que $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de B dans E. Comme B est compacte, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $(O_{i_j})_{1<j\leq p}$. Or B est incluse dans A, donc, la famille :

$$(O_{i_j} \cap A)_{1<j\leq p} = (\Omega_{i_j})_{1<j\leq p},$$

constitue un sous-recouvrement fini extrait de $(\Omega_i)_{i\in I}$. Donc, B est compacte dans (A, τ_A).

Inversement, si B est compacte dans (A, τ_A) et $(\Omega_i)_{i\in I}$ est un de ses recouvrements ouverts dans (E, τ) on peut écrire:

$$B \subset A \ \Rightarrow \ B \subset \bigcup_{i\in I} (\Omega_i \cap A).$$

Il en résulte que la famille d'ouverts $(\Omega_i \cap A)_{i\in I}$ dans A recouvre la compacte B. Donc, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $(\Omega_{i_j} \cap A)_{1<j\leq r}$. On déduit que la famille $(\Omega_{i_j})_{1<j\leq r}$ constitue un sous-recouvrement fini extrait de $(\Omega_i)_{i\in I}$. On conclut donc que B est compacte dans E.

Sujet 26

1. On munit l'ensemble $E=\{a,b,c,d,e\}$ de la topologie :

$$\tau=\{\phi, E,\{b\},\{c\},\{b,c\},\{c,d\},\{b,c,d\}\}.$$

1) Montrer que $A=\{b,c,e\}$ est connexe alors que son intérieur $\overset{\circ}{A}$ ne l'est pas.

2) Montrer que $B=\{b,d\}$ n'est pas connexe alors que son intérieur $\overset{\circ}{B}$ l'est.

3) Montrer que $C=\{b,c\}$ n'est pas connexe alors que son adhérence $\overline{C}$ l'est.

2. On note τ la topologie cofinie sur $\mathbb{R}$ et considère la fonction $f:(\mathbb{R},\sigma)\to(\mathbb{R},|.|)$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0, \\ x^2+1 & \text{si } x\geq 0. \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en tout point de $\mathbb{R}$.

3. Montrer que tout espace compact est normal.

4. Montrer que pour qu'un espace topologique (E,τ) soit connexe il faut et il suffit que la frontière de tout sous-ensemble propre de E soit non vide.

Solution

1. 1) On a :

$$\tau_A=\{\phi, A,\{b\},\{c\},\{b,c\}\};\ \overset{\circ}{A}=\{b,c\};$$

$$\tau_{\overset{\circ}{A}}=\{\phi,\overset{\circ}{A},\{b\},\{c\}\}.$$

Il en ressort que τ_A ne renferme aucun couple d'ouverts propres partitionnant A. Donc, celui-ci est connexe. A l'inverse, l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ n'est pas connexe puisque le couple d'ouverts $(\{b\},\{c\})$ la partitionne.

2) De même, on a :

$$\tau_B = \{\phi, B, \{b\}, \{d\}\}; \overset{\circ}{B} = \{b\}.$$

L'intérieur $\overset{\circ}{B}$ étant réduite à un singleton, est connexe. B ne l'est pascar il admet ia partition ouverte $(\{b\},\{d\})$.

3) C coïncide avec l'intérieur non connexe $\overset{\circ}{A}$. Par contre, $\overline{C}$ coïncide avec E lequel, ne supportant aucune partition par deux ouverts non vides, est connexe. (Remarquer qu'aucun ouvert propre ne renferme a par exemple).

2. Soit x_0 un point de $\mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

i) Si x_0 est dans $]-\infty,0[$ alors $f(x_0)=0$. Il s'en suit que pour tout $\varepsilon>0$ on a :

$$f^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[) = \begin{cases}]-\infty,0[& \text{si } \varepsilon \leq 1, \\ ]-\infty,\sqrt{\varepsilon-1}[& \text{si } \varepsilon > 1. \end{cases}$$

ii) si x_0 est dans $[0,+\infty[$ alors $f(x_0)=x_0^2+1$. Pour tout $\varepsilon>0$ on a :

$$f^{-1}(]x_0^2+1-\varepsilon, x_0^2+1+\varepsilon[) = \begin{cases}]-\infty,\sqrt{x_0^2+\varepsilon}[& \text{si } \varepsilon > x_0^2+1. \\ [0,\sqrt{x_0^2+\varepsilon}[& \text{si } \varepsilon \leq x_0^2+1. \end{cases}$$

Les images réciproques $f^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)$ et $f^{-1}(]x_0^2+1-\varepsilon, x_0^2+1+\varepsilon[)$ ne pouvant chacune contenir aucun ouvert non vide de τ, ne sont pas des voisinages de x_0. f est alors non continue en x_0.

3. Un espace topologique E est dit normal s'il est séparé et si Pour tout couple de fermés disjoints il existe deux ouverts disjoints contenant chacun un de ces fermés.

Soit E un espace compact. Il est séparé. D'autre part, soient F_1 et F_2 deux sous-ensembles fermés disjoints de E. Pour tous x de F_1 et y de F_2, il existe deux ouverts disjoints $\Omega_x(y)$ et $G_y(x)$ tels que $x \in \Omega_x(y)$ et $y \in G_y(x)$. (Cette notation signifie que $\Omega_x(y)$ est un voisinage de x dépendant de y et $G_y(x)$ est un voisinage de y dépendant de x). F_2 étant compact (c'est un fermé d'un compact), on peut alors, pour tout x fixé dans F_1, recouvrir F_2 d'un nombre fini d'ouverts $G_{y_1}(x), ..., G_{y_{n(x)}}(x)$. Posons :

$$G(x) = \bigcup_{j=1}^{n(x)} G_{y_j}(x) \ ; \ \Omega_x = \bigcap_{j=1}^{n(x)} \Omega_x(y_j)$$

Il en ressort que $G(x)$ et Ω_x sont deux ouverts disjoints vérifiant :

$$x \in \Omega_x \text{ et } F_2 \subset G(x).$$

De même, la compacité de F_1 entraîne qu'on peut recouvrir celui-ci par un nombre fini d'ouverts $\Omega_{x_1}, \Omega_{x_2}, ... \Omega_{x_k}$. Il s'en suit que les deux ouverts $\bigcup_{j=1}^{k} \Omega_{x_j} = \Omega$ et $\bigcap_{j=1}^{k} G(x_j) = G$ sont disjoints contenant, l'un F_1 l'autre F_2. C'est ce qui clôt la question.

4. Soit (E, τ) un espace connexe. Supposons qu'il admette un sous-ensemble propre A de frontière vide. Il en résulte que celui-ci est à la fois ouvert et fermé. Cela fait de la paire $(A, C_E A)$ une partition ouverte de E. C'est en contradiction avec la connexité de ce dernier.

Inversement, si E n'était pas connexe il jouirait d'une partition ouverte (S, T). Il en résulte que S et son complémentaire $C_E S = T$ sont tous deux ouverts non vides (et donc fermés). Leurs frontières sont alors vides. Absurde !

Sujet 27

1. On note σ la topologie définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par sa base $\mathscr{B}=\{[x,y[\,;\, x,y\in\mathbb{R}, x<y\}$.

1) Montrer que la famille $\mathscr{W}(x_0)=\{[x_0,y[\,;\, y\in\mathbb{R}, x_0<y\}$ constitue un système fondamental de voisinages du point x_0.

2) Montrer que σ est séparée.

3) Etudier la convergence de la suite de terme général $u_n=(-1)^n$.

4) Le point 0 est-il une valeur d'adhérence de (u_n) ? Justifier.

5) i) Etudier la continuité de l'identité $id_{\mathbb{R}}:(\mathbb{R},\sigma)\to(\mathbb{R},|.|)$.

ii) Fairede même pour sa réciproque.

iii) Cette application est-elle un homéomorphisme ?

iv) Comparer les deux topologies σ et $|.|$.

2. Soient f et g deux fonctions continues d'un espace topologique (E,τ) vers un espace topologique séparé (F,θ).

1) Montrer que l'ensemble $A=\{x\in E\,/\,f(x)=g(x)\}$ est fermé dans (E,τ).

2) En déduire que si f et g coïncident sur une partie partout dense B de E elles sont alors identiques.

3. Soit f une fonction d'un espace topologique (E,τ) vers un autre (F,σ). Elle est dite continue sur E si l'image réciproque de tout voisinage de l'image $f(x_0)$ d'un point x_0 de E est voisinage de x_0. Montrer que pour que f soit continue sur E il faut et ilsuffit que l'image réciproque de tout fermé de F soit fermée dans E.

Solution

1\. 1) Soit V_{x_0} un voisinage de x_0. Il existe par définition un ouvert Ω_{x_0} de σ tel que :

$$x_0 \in \Omega_{x_0} \subset V_{x_0}.$$

Comme $\Omega_{x_0} = \bigcup_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{R} \\ \alpha<\beta}} [\alpha,\beta[$ on déduit qu'il existe deux réels α_0 et β_0 tels que $\alpha_0 \leq x_0 < \beta_0$. On conclut que V_{x_0} contient l'élément $[x_0,\beta_0[$ de la famille $\mathscr{W}(x_0)$. Celle-ci est alors un système fondamental de voisinages de x_0.

2) Soient x_0 et y_0 deux réels tels que $x_0 < y_0$. Pour tous réels α et β tels que $x_0 < \alpha \leq y_0 < \beta$ les intervalles $[x_0,\alpha[$ et $[y_0,\beta[$ constituent des voisinages pour x_0 et y_0 respectivement. Comme ils sont disjoints, σ est séparée.

3) Soit ℓ un réel de voisinage $[\ell,r[$. On distingue les deux cas possibles suivants.

i) $\ell < 1$

En prenant $\ell < r \leq 1$ on constate que le voisinage $[\ell,r[$ de ℓ ne contient aucun élément de rang pair. il en résulte que ℓ ne peut pas être limite de (u_n).

ii) $1 \leq \ell$

En prenant $r > 1$ on constate que le voisinage $[\ell,r[$ de ℓ ne contient aucun élément de rang impair. Il en résulte que ℓ ne peut pas être limite de (u_n).

Conclusion : (u_n) est divergente.

4) Non. Le voisinage $[0,1[$ de 0, par exemple, ne contient aucun élément de (u_n).

5) i) Si x_0 est réel donné, alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'image réciproque $id_{\mathbb{R}}^{-1}\left(\left]x_0-\varepsilon, x_0-\varepsilon\right[\right) = \left]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\right[$ contient $\left[x_0, x_0+\varepsilon\right[$. Donc, il est voisinage de x_0. On déduit que $id_{\mathbb{R}}$ est continue en x_0.

ii) La réciproque $id_{\mathbb{R}}^{-1} : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, \sigma)$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car $id_{\mathbb{R}}\left(\left[x_0, x_0+\varepsilon\right[\right) = \left[x_0, x_0+\varepsilon\right[$ n'est pas un voisinage de x_0 dans $(\mathbb{R}, |.|)$.

iii) Non, puisqu'elle n'est pas bicontinue.

iv) σ est plus fine que l'usuelle $|.|$. Par contre cette dernière n'est pas plus fine que la première. Ainsi, elles ne sont pas équivalentes

2. Il suffit qu'on montre que le complémentaire $C_E A$ est fermé.

Pour cela on remarque pour tout x de $C_E A$ on a $f(x) \neq g(x)$. Comme F est séparé les deux points $f(x)$ et $g(x)$ admettent deux voisinages disjoints $V_{f(x)}$ pour $f(x)$ et $W_{g(x)}$ pour $g(x)$. La continuité de f et g permet d'affirme que $f^{-1}(V_{f(x)})$ et $g^{-1}(W_{g(x)})$ sont deux voisinages de x. Il en résulte que $f^{-1}(V_{f(x)}) \cap g^{-1}(W_{g(x)})$ est un voisinage de x ne rencontrant pas A. Il est alors inclus dans $C_E A$. Ce dernier devient lui aussi, par absorption, un voisinage de x. Il est alors ouvert !

3) En prenant dans ce qui précède $B = A$ il vient $E = \overline{B} = A$. Donc, $f \equiv G$.

3. Supposons f continue. Si A est un fermé de (F, σ) son complémentaire $C_F A$ est ouvert. Il est alors voisinage de chacun de ses points. Trois cas possibles se dégagent :

i) Si $C_F A \cap f(E) = \phi$ alors $f^{-1}(C_F A) = C_E f^{-1}(A) = \phi$ est ouvert dans (E, τ); donc, $f^{-1}(A)$ est fermé.

ii) Si $C_F A \subset f(E)$ alors pour tout point x_0 de $f^{-1}(C_F A)$, $C_F A$ est un voisinage ouvert de $f(x_0)$. Comme f est continue alors $f^{-1}(C_F A)$ est voisinage de x_0. Ainsi, $f^{-1}(C_F A)$ est voisinage de tous ses points. Il est donc ouvert; par suite, $f^{-1}(A)$ est fermé.

iii) Si $C_F A = B \cup C$ avec $B \subset f(E)$ et $C \subset C_F(f(E)$ alors :

$$f^{-1}(C_F A) = f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C) = f^{-1}(B).$$

On conclut avec (ii).

Inversement, considérons un point a de E et $V_{f(a)}$ un voisinage ouvert de son image $f(a)$ dans (F, σ). Il s'en suit que $C_F V_{f(a)}$ est fermé dans F. Il en résulte par hypothèses que :

$$f^{-1}\left(C_F V_{f(a)}\right) = C_E f^{-1}(V_{f(a)})$$

est fermé dans E. Donc, $f^{-1}(V_{f(a)})$ est ouvert. Il est donc voisinage de a. Ainsi, f est continue en a.

Sujet 28

1. 1) Etant donné dans l'espace topologique usuel $(\mathbb{R},|.|)$ le sous-Ensemble $A=\{3,6,9\}\cup]10,17]$, déterminer son intérieur $\mathring{A}$, son adhérence $\overline{A}$, son ensemble dérivé A', l'ensemble de ses points isolés M, sa frontière $\mathscr{F}_r(A)$ et son extérieur $Ex(A)$.

2) Quelle est la nature de chacun d'eux ?

3) Lequel d'eux est compact ? connexe ? Justifier.

2. Soit f une fonction continue d'un espace topologique (E,τ) vers un espace topologique séparé (F,θ).

1) Montrer que le graphe de f est fermé.

2) Vérifier que le graphe de la fonction $g:(\mathbb{R},|.|)\to(\mathbb{R},|.|)$ définie par :

$$g(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=0,\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0,\end{cases}$$

est fermé.

3) Que conclure ?

4) Montrer que E et le graphe de f sont homéomorphes.

3. Soit f une fonction d'un espace topologique (E,τ) vers un autre (F,σ). Démontrer que pour que f soit continue sur E il faut et il suffit que :

$$\forall A\subset E,\ f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}.$$

Solution

1. On opte pour ce tableau illustratif jumellant les trois questions:

$\mathring{A}=]10,17[$	ouvert	Connexe, car c'est un intervalle. Non compact car non fermé
$\bar{A}=\{3,6,9\}\cup[10,17]$	fermé	Compact, car il est fermé et borné. Non connexecar ce n'est pas un intervalle.
$A'=[10,17]$	fermé	Connexe, car c'est un intervalle. Compact, car il est fermé et borné.
$M=\{3,6,9\}$	fermé	Compact et non connexe car il est fini.
$\mathcal{F}_r(A)=\{3,6,9,10,17\}$	fermé	Compact et non connexe car il est fini.
$Ex(A)=]-\infty,3[\cup$ $\cup]3,6[\cup]6,9[\cup$ $\cup]9,10[\cup]17,+\infty[$	ouvert	Non connexe car ce n'est pas un intervalle. Non compact car non fermé.

2. 1) Notons $\Gamma_f=\{(x,f(x);\ x\in E\}$ le graphe de f. Pour qu'il soit fermé il suffit que son complémentaire $C_{E\times F}\Gamma_f$ soit ouvert. Soit (u,v) un point donné de ce dernier. On a $f(u)\neq v$. Comme est F séparé, $f(u)$ et v admettent deux voisinages disjoints : $V_{f(u)}$pour $f(u)$ et W_v pour v. La continuité de f assure que $f^{-1}(V_{f(u)})$ est un voisinage de u. Il en résulte que $f^{-1}(V_{f(u)})\times W_v$ est un voisinage de (u,v) ne rencontrant pas Γ_f. Il est donc inclus dans $C_{E\times F}\Gamma_f$. Ce dernier est alors voisinage de (u,v) par absorption. D'où la question.

2) Le graphe Γ_g de g est donné par :

$$\Gamma_g=\{(0,1)\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,xy=1\}.$$

En notant $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction réelle continue donnée sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x,y)=xy$, on constate que Γ_g est la réunion des deux fermés

$\{(0,1)\}$ et $h^{-1}(\{1\})$. Il alors lui-même, fermé.

3) On conclut qu'avoir un graphe fermé n'assure pas, en général, la continuité d'une fonction.

4) Il est aisé de s'assurer que l'application $H : E \to \Gamma_f$ donnée par $H(x) = (x, f(x))$ est bijective. De plus, elle est continue comme fonction vectorielle de composantes l'identité id_E et f continues. Sa réciproque coïncide avec la restriction à Γ_f de la projection π_E sur E. Elle est continue. H est alors un homéomorphisme !

3. La condition est nécessaire.

Supposons f continue sur E. L'image réciproque $f^{-1}(V_{f(x_0)})$ de tout voisinage $V_{f(x_0)}$ de l'image $f(x_0)$ d'un point x_0 de E est voisinage de x_0.

Si A est un sous-ensemble de F et y_0 un point de $f(\overline{A})$ il existe un point x_0 de $\overline{A}$ tel que $y_0 = f(x_0)$. Par hypothèse, pour tout voisinage V_{y_0} de y_0, $f^{-1}(V_{y_0})$ est voisinage de x_0. Il en résulte que $f^{-1}(V_{y_0}) \cap A \neq \phi$. Par suite, $V_{y_0} \cap f(A) \neq \phi$, ce qui assure y_0 dans $\overline{f(A)}$ et achève l'inclusion annoncée.

La condition est suffisante.

Soient x_0 un point de E et $V_{f(x_0)}$ un voisinage ouvert de son image. En prenant $A = f^{-1}(C_F V)$ on peut en vertu de la contrainte imposée, avoir :

$$f\left(\overline{f^{-1}(C_F V_{f(x_0)})}\right) \subset \overline{f\left(f^{-1}(C_F V_{f(x_0)})\right)} \subset \overline{C_F V_{f(x_0)}} = C_F V_{f(x_0)}.$$

D'où $\overline{f^{-1}(C_F V_{f(x_0)})} \subset f^{-1}(C_F V_{f(x_0)})$. On déduit que $f^{-1}(C_F V_{f(x_0)})$ est fermé. Comme on sait que $f^{-1}(C_F V_{f(x_0)}) = C_E f^{-1}(V_{f(x_0)})$ on affirme que $f^{-1}(V_{f(x_0)})$ est ouvert. Comme il contient x_0 il en est voisinage. Par suite, f est continue.

Etal métrique

Sujet 1

1. 1) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ Log(1+x) \leq x.$$

2) Montrer que si d est une distance sur un ensemble E alors $d' = Log(1+d)$ en est une autre.

3) Montrer que d est plus fine que d'.

4) On prend $E = \mathbb{R}^2$ et $d = d_1$. Déterminer la boule unité fermée $B_f(0,1)$ relativement à d' puis représenter-la dans un repère orthonormé.

5) Montrer que si (E, d') est complet alors (E, d) l'est de même.

2. Soit $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ l'application définie par :

$$d(m,n) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = n, \\ 1 + \dfrac{1}{m+n} & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

1) Montrer que $(\mathbb{N}, d)$ est un espace métrique.
2) Montrer que $(\mathbb{N}, d)$ est complet.

3. On considère la suite de fonctions réelles (f_n) définies sur $[0,2]$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} + \frac{n}{x+n} chx; \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Cette suite est-elle :

1) Simplement convergente sur $[0,2]$?
2) Uniformément convergente sur $[0,2]$?
3) Uniformément convergente sur $[2,+\infty[$?

Solution

1. 1) Pour $x=0$ la relation est une égalité triviale. Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ on écrit en vertu du théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in]0,x[\ / \ Log(1+x) = x\frac{1}{1+c}.$$

Comme on a $\frac{1}{1+c} < 1$ le résultat voulu en découle.

2) Les deux conditions d'identitéet de symétrie sont évidentes. Concernant l'inégalité triangulaire, on écrit en s'appuyant sur celle de d et la croissance de la fonction logarithme:

$$\begin{aligned} Log(1+d(x,z)) + Log(1+d(z,y)) &= Log\left((1+d(x,z))(1+d(z,y))\right) \\ &= Log\left((1+d(x,z)+d(z,y)+d(x,z)d(z,y)\right) \\ &\geq Log\left((1+d(x,z)+d(z,y)\right) \geq Log(1+d(x,y)). \end{aligned}$$

La question est achevée.

2) On remarque que :

$$\forall x,y \in E \quad d'(x,y) = Log(1+d(x,y)) \leq d(x,y).$$

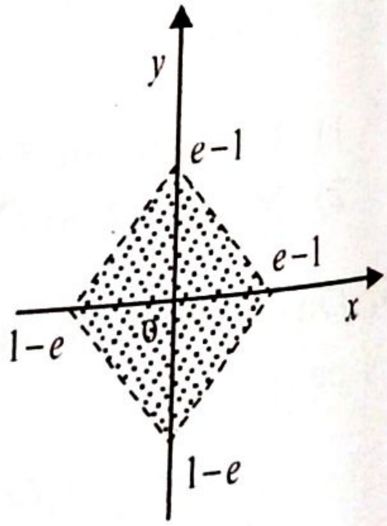
Par suite :

$$\forall a \in E, \forall r > 0 : \ B_d(a,r) \subset B_{d'}(a,r).$$

Donc, d est plus fine que d'.

3) On a :

$$\begin{aligned} B_{d'}(0,1) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ Log(1+d_1(x,y) < 1\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ Log\left(1+|x|+|y|\right) < 1\right\} \\ &= B_{d_1}(0,1). \end{aligned}$$



4) Supposons (E,d') complet et considérons une suite de Cauchy[8] $(x_n)_n$ dans (E,d).

8. Augustin Louis Cauchy (21/8/1789-23/5/1857) : Mathématicien Français. Son œuvre scientifique est colossale sur les sujets mathématiques et physiques les plus variés. Il est à l'origine de l'analyse moderne. On lui doit notamment la théorie des équations différentielles.

Comme d est plus fine que d' la suite $(x_n)_n$ reste de Cauchy dans l'espace complet (E,d'). Elle y est donc convergente vers une limite ℓ. On obtient grâce à la continuité de la fonction logarithme :

$$0=\lim_{n\to\infty} d'(\ell,x_n)=\lim_{n\to\infty} Log(1+d(\ell,x_n))=Log(1+\lim_{n\to\infty} d(\ell,x_n)).$$

D'où $\lim_{n\to\infty} d(\ell,x_n)=0$, ce qui signifie que $(x_n)_n$ converge vers ℓ dans (E,d). Celui-ci est alors complet.

2. 1) Il y a lieu de montrer que d satisfait aux trois conditions (identité, symétrie et inégalité triangulaire) définissant une distance. C'est à votre portée !

2) Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de $(\mathbb{N},d)$. On écrit :

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}/\forall p,q\in\mathbb{N}$:

$$p>q\geq n_0 \;\Rightarrow\; d(x_p,x_q)=\begin{cases}0 & \text{si } x_p=x_q\\ 1+\dfrac{1}{x_p+x_q} & \text{si } x_p\neq x_q\end{cases}<\varepsilon.$$

Il en découle aussitôt que $(x_n)_n$ est nécessairement stationnaire, ce qui assure sa convergence. Ainsi, l'espace $(\mathbb{N},d)$ est complet.

3. 1) Oui, car :

$$\forall x\in[0,2]\ \ \lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{x+n}+\frac{n}{x+n}chx\right)=chx.$$

Sa limite simple f est définie sur $[0,2]$ par $f(x)=chx$.

2) On observe que :

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x<2}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x<2}\left|\left(\frac{x}{x+n}+\left(\frac{n}{x+n}-1\right)chx\right)\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x<2}\left|\left(\frac{x}{x+n}-\frac{xchx}{x+n}\right)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x<2}\frac{x(chx-1)}{x+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(ch2-1)}{2+n}=0.$$

(Observer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x(chx-1)}{x+n}$ est continue croissante sur $[0,2]$). Ainsi, la réponse est oui !

3) La suite (f_n) conserve consrve sa limite simple f sur ce nouvel intervalle $[2,+\infty[$. Sauf qu'ici on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{2\leq x<+\infty} \left|f_n(x)-f(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{2\leq x<+\infty} \frac{x(chx-1)}{x+n} = +\infty,$$

la fonction $x \mapsto \dfrac{x(chx-1)}{x+n}$ étant continue croissante sur $[2,+\infty[$.

Ainsi, on on conclut que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[2,+\infty[$.

Sujet 2

1. 1) L'application $d:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $d(x,y)=|chx-chy|$ définit-elle une distance sur $\mathbb{R}$?

2) Montrer que la famille des boules ouvertes $(B(x,r))_{x\in E,\, r>0}$ d'un espace métrique (E,d) constitue une base de la topologie τ_d associée à d.

2. On munit $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle $d(x,y)=|x-y|$ et on note $E=]0,+\infty[$. Soit $\delta:]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application définie par $\delta(x,y)=|Logx-Logy|$.

1) Vérifier que δ est une distance sur E.

2) i) Montrer que (E,d) et (E,δ) ont les mêmes suites convergentes.

ii) En déduirequel'identité $id_E:(E,d)\to(E,\delta)$ est continue.

iii) En déduire que les distances d et δ sont topologiquement équivalentes.

3) Montrer que l'espace (E,d) n'est pas complet.

4) Montrer qu'une suite (x_n) est de Cauchy dans (E,δ) si et seulement si, la suite $(Log(x_n))$ l'est dans (E,d).

5) Soit (x_n) la suite donnée par $x_n=\dfrac{1}{n}$.

i) Est-elle convergente dans (E,d)? Justifier.

ii) Est-elle de Cauchy dans (E,δ)? Justifier.

6) Montrer que (E,δ) est complet.

3. Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+=[0,+\infty[$ de la suite (f_n) définie par :

$$f_n(x)=\frac{e^x}{n(1+e^{nx})};\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

Solution

1. 1) Non. La fonction ch étant paire, la condition d'identité n'est pas satisfaite.

2) La famille de boules proposées est une base de τ_d si elle génère (par réunion) tout ouvert non vide de (E,d).

Soit Ω un ouvert non vide de (E,d). On écrit par définition :

$$\forall x \in \Omega \; \exists r_x > 0 / x \in B(x,r_x) \subset \Omega.$$

D'où :

$$\Omega \subset \bigcup_{x\in\Omega} B(x,r_x) \subset \Omega;$$

ce qui donne $\Omega = \bigcup_{x\in\Omega} B(x,r_x)$.

2. 1) Evident. Un calcul direct permet d'élucider les trois conditions d'une distance.

2) i) Soit (x_n) une suite convergente vers une limite ℓ dans (E,d). On écrit en vertu de la continuité de la valeur absolue et la fonction logarithme :

$$\lim_{n\to\infty} \delta(x_n,\ell) = \lim_{n\to\infty} |Log x_n - Log \ell| = \left|Log \lim_{n\to\infty} x_n - Log \ell\right|$$
$$= |Log \ell - Log \ell| = 0.$$

Donc, ℓ est la limite de (x_n) dans (E,δ).

Inversement, si (x_n) converge vers ℓ dans (E,δ) on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,\ell) = \lim_{n\to\infty} |x_n - \ell| = \lim_{n\to\infty} \left|e^{Log x_n} - e^{Log \ell}\right|$$
$$= \left|e^{\lim_{n\to\infty} Log x_n} - e^{Log \ell}\right| = \left|e^{Log \ell} - e^{Log \ell}\right| = 0.$$

C'est là la convergence de (x_n) vers ℓ dans (E,d).

ii) Il ressort de ce qui précède que l'application identité $id_E : (E,d) \to (E,\delta)$ est séquentiellement continue, donc elle est continue.

iii) En fait, on déduit de (i) et (ii) que l'identité id_E est bicontinue. Donc, les distances d et δ sont topologiquement équivalentes.

3) L'espace (E,d) n'est pas complet car E n'est pas fermé dans $(\mathbb{R},d)$.

4) Si (x_n) est une suitede Cauchy dans (E,δ), on écrit par définition:

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}/\forall p,q\in\mathbb{N}$:

$p>q\geq n_0 \Rightarrow \delta(x_p,x_q)=\left|Logx_p-Logx_q\right|=d(Logx_p,Logx_q)<\varepsilon.$

Donc, la suite $(Log(x_n))$ est de Cauchy dans (E,d).

La réciproque est évidente. C'est une conséquence directe des définitions de δ et d'une suite de Cauchy :

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}/\forall p,q\in\mathbb{N}$:

$p>q\geq n_0 \Rightarrow d(Logx_p,Logx_q)=\left|Logx_p-Logx_q\right|=\delta(x_p,x_q)<\varepsilon.$

5) i) Non. Son unique limite éventuelle 0 n'est pas dans E.

ii) Non, car si elle l'était, la suite $(Logx_n)=(-Logn)$ le serait dans (E,d) ce qui n'est pas le cas.

6) Si (u_n) une suite de Cauchy de (E,δ), la suite $(Log(u_n))$ l'est dans (E,d) et donc dans $\left([0,+\infty[,|.|\right)$. Comme ce dernier est complet, on conclut qu'elle y converge vers une limite u. Deux cas se présentent.

i) Si u est nulle on écrit :

$$\lim_{n\to\infty}\delta(u_n,1)=\lim_{n\to\infty}\left|Logu_n\right|=0;$$

ce qui signifie que la suite (u_n) converge vers 1 dans (E,δ).

ii) Si u est non nulle on peut, en vertu de la continuité des fonctions logarithmes et valeur absolue, avoir :

$$\lim_{n\to\infty}\delta(u_n,u)=\lim_{n\to\infty}\left|Logu_n-Logu\right|=\left|Log\left(\lim_{n\to\infty}u_n\right)-Logu\right|$$

$$=\left|Logu-Logu\right|=0.$$

Donc, (u_n) converge vers u dans (E,δ). Ce dernier est alors complet.

3. Observons tout d'abord que :

$$\forall x\in \mathbb{R}_+ \ \forall n\in \mathbb{N}^* \ \ 0<\frac{e^x}{n(1+e^{nx})}\leq \frac{1}{ne^{(n-1)x}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}e^{(1-n)x}=0.$$

Il en ressort clairement que (f_n) est à termes positifs et converge simplement sur I vers la fonction identiquement nulle. D'autre part, on cherche à déterminer la borne supérieure sur $\mathbb{R}_+$ de $|f_n(x)-0|=f_n(x)$. Pour ce faire, on a aisément :

$$\begin{aligned}\forall x\in \mathbb{R}_+ \ f_n'(x)&=\frac{ne^x(1+e^{nx})-e^x n^2 e^{nx}}{n^2(1+e^{nx})^2}\\ &=\frac{e^x}{n(1+e^{nx})^2}\left(1-(n-1)e^{nx}\right)\leq 0.\end{aligned}$$

4. On en déduit aussitôt que :

$$\sup_{\mathbb{R}_+} f_n(x)=f_n(0)=\frac{1}{2n}.$$

D'où :

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathbb{R}_+} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0.$$

Ainsi, la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers sa limite nulle.

Sujet 3

1. i) Citer un espace topologique non métrisable.

ii) Dans un espace métrique quelconque :

L'adhérence d'une boule ouverte est-elle la boule fermée du même centre et du même rayon ?

L'intérieur d'une boule fermée est-elle la boule ouverte de même centre et de même rayon?

iii) Donner les définitions d'une isométrie, d'une distance ultra-métrique et d'un espace bien enchaîné.

2. Soient A et B deux parties non vides d'un espace métrique (E,d) dont la distance d est bornée. On pose:

$$\Delta(A,B)=\sup_{x\in A} d(x,B).$$

1) A quelle condition a-t-on $\Delta(A,B)=0$?

2) Montrer que Δ vérifie l'inégalité triangulaire.

3) On pose:

$$\delta(A,B)=\max(\Delta(A,B),\Delta(B,A)).$$

Montrer que δ est une distance sur la famille des parties fermées non vides de E.

3. Soit O l'origine du plan usuel $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique eucli - dienne sur d. On considère l'application δ définie, pour tous X et Y de $\mathbb{R}^2$ par:

$$\delta(X,Y)=\begin{cases} d(X,Y) & \text{si } X, Y \text{ et } O \text{ sont alignés,} \\ d(O,X)+d(O,Y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

2) Soit $B_\delta(A,r)$ une boule ouverte de l'espace $(\mathbb{R}^2,\delta)$. Décrire soigneusement cette boule dans chacun des cas suivants:

i) $A=O$,

ii) $A\neq O$ et $0<r\leq d(A,O)$,

iii) $a \neq O$ et $r > d(A,O)$.

On représentera dans chaque cas la boule ouverte $B_\delta(A,r)$.

3) Pour une partie H de $\mathbb{R}^2$ on note:

$\overset{\circ}{H}_\delta =$ intérieur de H dans $(\mathbb{R}^2,\delta)$,

$\overset{\circ}{H}_d =$ intérieur de H dans $(\mathbb{R}^2,d)$.

Montrer que $\overset{\circ}{H}_d \subseteq \overset{\circ}{H}_\delta$.

4) Comparer les topologies induites par d et δ sur $\mathbb{R}^2$.

5) Montrer que $\overline{H_\delta} \subseteq \overline{H_d}$.

Solution

1. i) Tout espace topologique grossier l'est.

ii) Non. Dans un espace métrique (E,d) muni de la distance discrète, l'adhérence de la boule ouverte $B(a,1)$ est :

$$\overline{B(a,1)} = B(a,1) = \{a\},$$

alors que la boule fermée (du même centreet du même rayon est $B_f(a,1) = E$.

L'intérieur de la boule fermée $B_f(a,1)$ est E tandis que la boule ouverte $B(a,1)$ est $\{a\}$.

iii) Consultez vos notes !

2. 1) On a :

$$\Delta(A,B) = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in A} d(x,B) = 0 \Leftrightarrow d(x,B) = 0,\ \forall x \in A$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{B},\ \forall x \in A \Leftrightarrow A \subset \overline{B}.$$

2) Soient A, B et C trois parties non vides de E. Comme d est une distance, on écrit :

$$\forall x \in A, y \in B, z \in C \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

D'où :
$$\inf_{y\in B} d(x,y) \leq \inf_{z\in C} d(x,z) + \inf_{y\in B} d(z,y).$$

Par suite :
$$\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x,y) \leq \sup_{x\in A}\inf_{z\in C} d(x,z) + \sup_{z\in C}\inf_{y\in B} d(z,y);$$
autrement dit ;
$$\Delta(A,B) \leq \Delta(A,C) + \Delta(C,B).$$

3) On a :
$$\begin{aligned} \delta(A,B)=0 &\Leftrightarrow \max(\Delta(A,B),\Delta(B,A))=0 \\ &\Leftrightarrow \Delta(A,B)=\Delta(B,A)=0 \\ &\Leftrightarrow A\subseteq B \text{ et } B\subseteq A \Leftrightarrow A=B. \end{aligned}$$
D'où la condition d'identité.

La condition de symétrie est évidente.

Enfin, si A, B et C sont trois parties non vides de E on écrit en vertu de l'inégalité triangulaire de Δ :
$$\begin{aligned} \delta(A,B) &= \max(\Delta(A,B),\Delta(B,A)) \\ &\leq \max\big(\Delta(A,C)+\Delta(C,B),\Delta(B,C)+\Delta(C,A)\big) \\ &\leq \max\big(\Delta(A,C),\Delta(C,A)\big)+\max\big(\Delta(C,B),\Delta(B,C)\big) \\ &\leq \delta(A,C)+\delta(C,B). \end{aligned}$$
On conclut donc que δ est une distance comme annoncée.

3. 1) δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$:

a) On a:
$$\delta(X,Y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} d(X,Y)=0 & \text{si } X,Y \text{ et } O \text{ sont alignés,} \\ d(O,X)+d(O,Y)=0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
La deuxième relation :
$$d(O,X)+d(O,Y)=0 \text{ si } X,Y \text{ et } O \text{ ne sont pas alignés,}$$
ne peut pas avoir lieu, sinon elle mènerait à l'absurdité:
$$O=X=Y \text{ et } X,Y \text{ et } O \text{ ne sont pas alignés.}$$
Donc:
$$\delta(X,Y)=0 \Leftrightarrow d(X,Y)=0 \Leftrightarrow X=Y.$$

b) $\delta(X,Y)=\delta(Y,X)$: évident.

c) Soient X, Y et Z trois points quelconques de $\mathbb{R}^2$. Plusieurs cas se présentent:

i) Si les points (X,Y,O), (X,Z,O) et (Z,Y,O) ne sont pas alignés on a:

$$\begin{aligned}\delta(X,Y) &= d(O,X)+d(O,Y)\\ &\leq d(O,X)+d(O,Z)+d(O,Z)+d(O,Y)\\ &\leq \delta(X,Z)+\delta(Z,Y).\end{aligned}$$

ii) Si les points (X,Y,O), (X,Z,O) et (Z,Y,O) sont alignés on a:

$\delta(X,Y)=d(X,Y)$, $\delta(X,Z)=d(X,Z)$ et $\delta(Z,Y)=d(Z,Y)$.

L'inégalité triangulaire de d fournit celle de δ.

iii) Si les points (X,Y,O) ne sont pas alignés et (X,Z,O) sont alignés, alors les points (Z,Y,O) ne sont pas alignés. Donc :

$$\begin{aligned}\delta(X,Y) = d(O,X)+d(O,Y) &\leq d(O,Z)+d(Z,X)++d(O,Y)\\ &\leq \delta(X,Z)+\delta(Z,Y)\end{aligned}$$

iv) Si les points (X,Y,O) sont alignés et (X,Z,O) ne sont pas alignés. Il en résulte que (Z,Y,O) ne sont pas alignés. Donc :

$$\begin{aligned}\delta(X,Y) = d(X,Y) &\leq d(X,Z)+d(Z,Y)\\ &\leq d(X,O)+d(O,Z)+d(Z,O)+d(O,Y)\\ &\leq \delta(X,Z)+\delta(Z,Y).\end{aligned}$$

Ainsi, δ satisfait aux conditions d'identité, de symétrie et d'inégalité triangulaire définissant une distance.

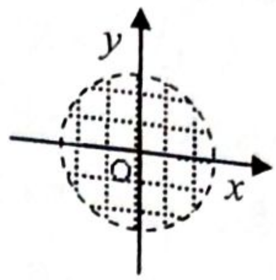
2) Description de la boule ouverte $B_\delta(A,r)$ de $(\mathbb{R}^2,\delta)$.

i) La boule est centrée en $A=O$. On a:

$$\begin{aligned}B_\delta(O,r) &= \left\{X\in\mathbb{R}^2 \,/\, \delta(O,X)<r\right\}\\ &= \left\{X\in\mathbb{R}^2 \,/\, d(O,X)<r\right\} = B_d(O,r).\end{aligned}$$

Les boules ouvertes de centre O et de rayon r de $(\mathbb{R}^2,\delta)$ sont donc les boules ouvertes euclidiennes concentrées en O et de mêmes

rayons.
$B_\delta(O,r) = B_d(O,r) =$ Partie hachurée de lafigure ci-contre.

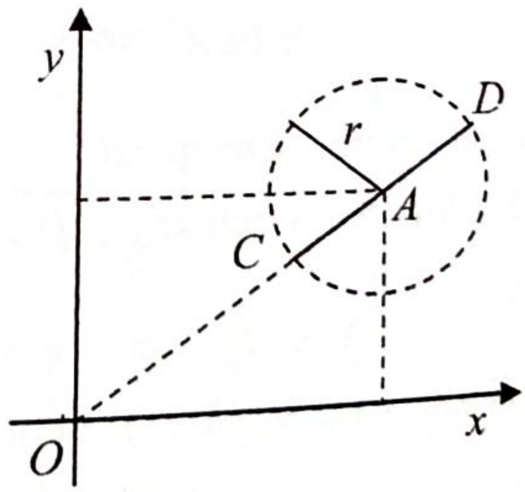


ii) La boule $B_\delta(A,r)$ est centrée en $A \neq O$, avec $0 < r < d(O,A)$.
Dans ces conditions nous avons:

$$B_\delta(A,r) = \left\{X \in \mathbb{R}^2 / \delta(A,X) < r\right\}$$
$$= \left\{X \in \mathbb{R}^2 / O, X, A \text{ alignés et } d(A,X) < r\right\} \cup$$
$$\cup \left\{X \in \mathbb{R}^2 / O, X, A \text{ non alignés et } d(O,A) + d(O,X) < r\right\}$$
$$= \left\{X \in \mathbb{R}^2 / O, X, A \text{ alignés et } d(A,X) < r\right\} \cup$$
$$\cup \left\{X \in \mathbb{R}^2 / O, X, A \text{ non alignés et } d(O,X) < r - d(O,A)\right\}.$$

En remarquant que $r - d(O,A)$ est négatif, il vient:
$$\left\{X \in \mathbb{R}^2 / O, X, A \text{ non alignés et } d(O,X) < r - d(O,A)\right\} = \phi.$$
D'où:
$$B_\delta(A,r) = \left\{X \in \mathbb{R}^2 / O, X, A \text{ alignés et } d(A,X) < r\right\}.$$

La boule $B_\delta(A,r)$ est égale à l'intersection de la boule euclidienne $B_d(A,r)$ avec la droite (OA). $B_\delta(A,r)$ est alors le segment de droite :
$B_\delta(A,r) = CD$

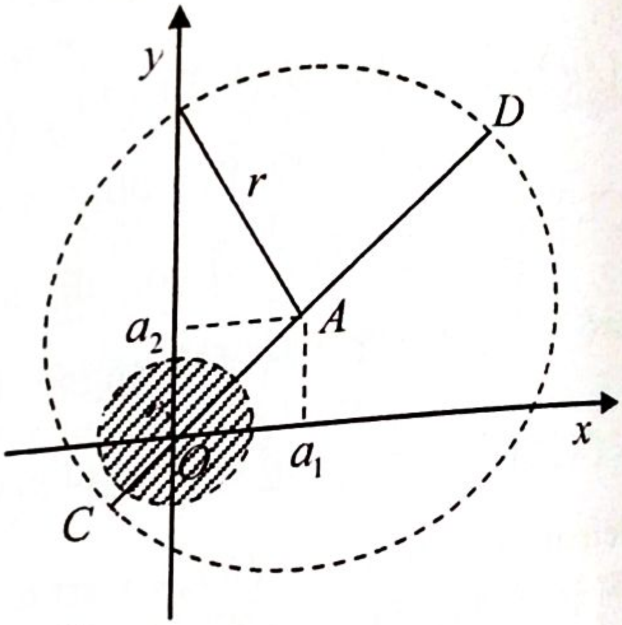


iii) La boule $B_\delta(A,r)$ est centrée en $A \neq O$, avec $r > d(A,O)$.
Dans ces conditions nous avons:

$$B_\delta(A,r)=\{X\in\mathbb{R}^2 / O,X,A \text{ alignés et } d(A,X)<r\}\cup$$
$$\cup\{X\in\mathbb{R}^2 / O,X,A \text{ non alignés et } d(O,X)<r-d(O,A)\}.$$

En posant $r_1=r-d(O,A)$, il vient:

$$B_\delta(A,r)=\{X\in\mathbb{R}^2 / O,X,A \text{ alignés et } d(A,X)<r\}\cup$$
$$\cup\{X\in\mathbb{R}^2 / O,X,A \text{ non alignés et } d(O,X)<r_1\}.$$



On obtient alors:

$B_\delta(A,r)=B_d(O,r_1)\cup CD$,

telle qu'elle est représentée dans la figure ci-contre.

3) On déduit de la question (2) que:

$\forall A\in\mathbb{R}^2,\ \forall r>0$:

$$B_\delta(A,r)\subset B_d(A,r).$$

Comme:

$$X\in \overset{\circ}{H}_d \Leftrightarrow \exists r>0 / B_d(X,r)\subseteq H,$$

Donc, $B_\delta(X,r)\subset H$. Par suite, X est dans $\overset{\circ}{H}_\delta$. Ainsi, $\overset{\circ}{H}_d\subseteq\overset{\circ}{H}_\delta$.

4) D'après la question (3), on a :

$$\forall A\in\mathbb{R}^2,\ \forall r>0,\quad B_\delta(A,r)\subset B_d(A,r).$$

Donc, δ est plus fine que d.

5) Montrons que $\overline{H_\delta}\subseteq\overline{H_d}$. On a:

$$X\in\overline{H_\delta} \Leftrightarrow \forall r>0,\ B_\delta(X,r)\cap H\neq\phi.$$

Or, $B_\delta(X,r)\subset B_d(X,r)$, donc:

$$\forall r>0,\ B_d(X,r)\cap H\neq\phi.$$

Par suite, $X\in\overline{H_d}$ et donc $\overline{H_\delta}\subseteq\overline{H_d}$.

Sujet 4

1. Soient A, B et C des parties non vides d'un espace métrique (E,d). Montrer que :

   (i) $d(\overline{A},\overline{B}) = d(A,B)$;

   (ii) $d(A, B\cup C) = \min\{d(A,B), d(A,C)\}$.

2. 1) Montrer que toute partie fermée A d'un espace métrique complet (E,d) est complète.

   2) Etant donnés deux réels a et b montrer en usant de la définition ($\forall \varepsilon > 0\ \exists ...$) que la fonction $f : (\mathbb{R}^2, d_1) \to (\mathbb{R}, |.|)$ donnée par $f(x,y) = ax + by$, est uniformément continue sur $\mathbb{R}^2$.

   3) En déduire que toute droite D de $(\mathbb{R}^2, d_1)$ est de Fréchet[9].

   4) Montrer que toute boule fermée $B_f(a,r)$ d'un espace métrique (E,d) est une partie fermée.

   5) En déduire que le sous-ensemble :

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 \le 0\right\},$$

de l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_2)$ est complet.

3. 1) Démontrer que le système d'équations :

$$\begin{cases} 10x - x^2 - y^2 + z^2 = 2 \\ 15y + x^3 - y^3 + z^3 = 3 \\ 20z - x^4 + y^4 - z^4 = 4. \end{cases}$$

admet une, et une seule, solution dans $\left([-1,1]^3, d_1\right)$.

---

9. Maurice René Fréchet (2/9/1878-4/6/1973) : Mathématicien Français. C'est dans sa thèse de doctorat, soutenue en 1906 sous Jacques Hadamard, qu'il a introduit pour la première fois la notion d'espace métrique. Il a ainsi posé les premiers jalons autours desquelles est bâtie, grâce aux travaux de Hausdorff et autres,la topologie moderne.

Solution

1. i) On a $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$ donc, $d(\overline{A}, \overline{B}) \leq d(A, B)$.

Inversement, on a :

$$\forall x \in \overline{A} \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x_\varepsilon \in A / d(x, x_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\forall y \in \overline{B} \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists y_\varepsilon \in B / d(y, y_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où :

$$d(A, B) \leq d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq d(x_\varepsilon, x) + d(x, y) + d(y, y_\varepsilon) \leq d(x, y) + \varepsilon.$$

Par suite, $d(A, B) \leq d(\overline{A}, \overline{B})$.

ii) Ona $d(A, B \cup C) \leq d(A, B)$ et $d(A, B \cup C) \leq d(A, C)$. Donc:

$$d(A, B \cup C) \leq \min\{d(A, B), d(A, C)\}.$$

Inversement, on a de même :

$$d(A, B) \leq d(x, A), \forall x \in B,$$
$$d(A, C) \leq d(x, A), \forall x \in C.$$

D'où :

$$\min\{d(A, B), d(A, C)\} \leq d(x, A), \forall x \in B \cup C.$$

Par conséquent :

$$\min\{d(A, B), d(A, C)\} \leq d(A, B \cup C).$$

2. 1) Si (x_n) est une suite de Cauchy de A elle le reste dans (E, d) complet.On déduit qu'elle converge vers une limite appartenant à $\overline{A}$. Comme A est fermée on conclut qu'elle contient cette limite, ce qui la rend complète.

2) f est uniformément continue sur $(\mathbb{R}^2, d_1)$ si elle vérifie :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha(\varepsilon) > 0 / \ \forall (x, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$d_1((x, y), (z, t)) \leq \alpha \ \Rightarrow |f(x, y) - f(z, t)| \leq \varepsilon.$$

Si a et b sont nuls la fonction f est alors identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2$ et donc uniformément continue.

Si le produit ab est non nul on écrit pour tous (x,y) et (z,t) de $(\mathbb{R}^2,d_1)$:

$$|f(x,y)-f(z,t)|=|a(x-z)+b(y-t)|\leq|a||x-z|+|b||y-t|$$
$$\leq \max(|a|,|b|)\,d_1((x,y),(z,t))\leq\varepsilon.$$

Il suffit alors deprendre $\alpha=\dfrac{\varepsilon}{\max(|a|,|b|)}$ pour conclure.

3) On sait que l'équation de toute droite D du plan est de la forme $ax+by=c$; a,b et c étant des réels. Il en résulte aussitôt que

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}/\,f(x,y)=c\}=f^{-1}(\{c\}).$$

Comme $\{c\}$ est fermé dans $(\mathbb{R},|.|)$ la continuité de f permet d'affirmer que D est fermée.

(D,d_1) est alors de Fréchet comme sous espace fermé du complet $(\mathbb{R}^2,d_1)$.

4) $B_f(a,r)$ est fermée si son complémentaire $C_EB_f(a,r)$ est ouvert. Il suffit pour cela qu'il soit voisinage de tous ses points. On a :

$$b\in C_EB_f(a,r)\ \Leftrightarrow\ d(a,b)>r$$

Soit $\rho=d(a,b)-r>0$. Pour tout point c de la boule ouvert $B(b,\rho)$ on a :

$$d(a,b)\leq d(a,c)+d(c,b).$$

D'où :

$$d(a,c)\geq d(a,b)-d(b,c)>d(a,b)-\rho=r.$$

Donc, c est dans $C_EB_f(a,r)$. Ainsi, on a $B(b,\rho)\subset C_EB_f(a,r)$. Cela clôt la question.

5) On remarque que :

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/(x-1)^2+(y-2)^2-1\leq 0\}=B_f((1,2),1).$$

C'est la boule fermée de centre $(1,2)$ et de rayon 1. Comme $(\mathbb{R}^2,d_2)$ est complet on conclut avec la question (1).

3. Notre système peut être reformulé comme suit :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10}x^2 + \dfrac{1}{10}y^2 - \dfrac{1}{10}z^2 \\ y = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{15}x^3 + \dfrac{1}{15}y^3 - \dfrac{1}{15}z^3 \\ z = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{20}x^4 - \dfrac{1}{20}y^4 + \dfrac{1}{20}z^4. \end{cases}$$

Par ailleurs, on a pour tous x, y et z pris dans $[-1,1]$ on a :

$$\left|\frac{1}{5} + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{10}y^2 - \frac{1}{10}z^2\right| \leq \frac{1}{10}\left(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + 2\right) \leq \frac{1}{2} < 1$$

$$\left|\frac{1}{5} - \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{15}y^3 - \frac{1}{15}z^3\right| \leq \frac{1}{15}\left(|x|^3 + |y|^3 + |z|^3 + 3\right) \leq \frac{2}{5} < 1$$

$$\left|\frac{1}{5} + \frac{1}{20}x^4 - \frac{1}{20}y^4 + \frac{1}{20}z^4\right| \leq \frac{1}{20}\left(|x|^4 + |y|^4 + |z|^4 + 4\right) \leq \frac{7}{20} < 1.$$

Il en résulte qu'il suffit de montrer que l'application :

$$f : \left([-1,1]^3, d_1\right) \to \left([-1,1]^3, d_1\right)$$

$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10}x^2 + \dfrac{1}{10}y^2 - \dfrac{1}{10}z^2, \\ \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{15}x^3 + \dfrac{1}{15}y^3 - \dfrac{1}{15}z^3, \\ \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{20}x^4 - \dfrac{1}{20}y^4 + \dfrac{1}{20}z^4 \end{pmatrix}$$

admet un unique point fixe. Pour ce faire, on observe que le fermé $[-1,1]^3$ du complet $(\mathbb{R}^3, d_1)$ est lui-même complet. Pour conclure, il suffit en vertu du théorème du point fixe de Banach[10]-Picard[11], de vérifier que f est contractante. Pour cela, on calcule pour tous (x,y,z) et (t,u,v) de $[-1,1]^3$:

$$|f(x,y,z)-f(t,u,v)|=$$

$$=\left(\begin{array}{l}\left|\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{10}y^2-\frac{1}{10}z^2\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}t^2+\frac{1}{10}u^2-\frac{1}{10}v^2\right)\right|+\\ +\left|\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{15}x^3+\frac{1}{15}y^3-\frac{1}{15}z^3\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{15}t^3+\frac{1}{15}u^3-\frac{1}{15}v^3\right)\right|+\\ +\left|\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{20}x^4-\frac{1}{20}y^4+\frac{1}{20}z^4\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{20}t^4-\frac{1}{20}u^4+\frac{1}{20}zv^4\right)\right|\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{l}\frac{1}{10}\left|\left((x^2-t^2)+(y^2-u^2)+(v^2-z^2)\right)\right|+\\ +\frac{1}{15}\left|\left((t^3-x^3)+(y^3-u^3)-(v^3-z^3)\right)\right|+\\ +\frac{1}{20}\left|\left((x^4-t^4)+(u^4-y^4)+(z^4-v^4)\right|\right.\end{array}\right)$$

Sachant que pour tout entier naturel n et tous a,b de $[-1,1]$ on a:

$$|a^n-b^n|=|a-b|\left|\sum_{i=0}^{n-1}a^{n-1-i}b^i\right|\leq|a-b|\left|\sum_{i=0}^{n-1}|a|^{n-1-i}|b|^i\right|\leq n|a-b|;$$

on obtient aussitôt :

10. Stefan Banach (30/3/1892-31/8/1945) : Mathématicien polonais. Il a publié son premier travail avec Steinhauss en 1918. C'est en 1920 qu'il définit axiomatiquement ce qui est appelé aujourd'hui “espace de Banach”. Ses travaux ont assis les fondements de l'analyse fonctionnelle moderne.

11. Charles Emile Picard (24/7/1856-11/12/1941) :Mathématicien français. Il a plusieurs contributions en analyse mathématique, notamment dans les équations différentielles. Il a laissé son nom à une méthode itérative de résolution des équations intégrales.

$\forall (x,y,z),(t,u,v) \in [-1,1]^3$:

$$|f(x,y,z) - f(t,u,v)| \leq \frac{3}{5}\left(|x-t| + |y-u| + |z-v|\right)$$
$$\leq \frac{3}{5} d_1((x,y,z),(t,u,v)).$$

Ainsi, f est contractante. C'est ce qu'on veut !

Sujet 5

1. 1) Soit $d:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ l'application donnée par :

$$d(x,y)=\frac{Log\left(1+|x-y|\right)}{1+Log\left(1+|x-y|\right)}.$$

i) Montrer que $(\mathbb{R},d)$ est un espace métrique.

ii) Déterminer la boule unité ouverte $B(0,1)$ et la sphère $S(0,1)$.

iii) Montrer que toute suite de Cauchy dans $\left(\mathbb{R},|.|\right)$ l'est dans $(\mathbb{R},d)$.

2) On munit un ensemble non vide E de deux distances d et d'. Pour tout point a de E on note $B_d(a)$ et $B_{d'}(a)$ les deux boules ouvertes centrées en a par rapport à d et d' respectivement.

Montrer que d est plus fine que d' si, et seulement si :

$$B_d(a)\subset B_{d'}(a):$$

2. On munit l'espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de sa distance usuelle d_∞ et on considère le sous-espace G des fonctions f telles que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$. Montrer que G est de Fréchet.

3. 1) Montrer que tout sous-ensemble relativement compact A d'un espace métrique (E,d) est précompact.

2) Montrer que tout espace métrique (E,d) dans lequel toute boule fermée est compacte, est complet et localement compact.

Solution

1. 1.i) On a àmontrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$. Pour cela, les conditions d'identité et de symétrie étant évidentes, seule l'inégalité triangulaire reste à élucider. Pour ce faire, on a pour tous

réels x, y et z :

$$d(x,y)=\frac{Log\left(1+|x-y|\right)}{1+Log\left(1+|x-y|\right)}=1-\frac{1}{1+Log\left(1+|x-y|\right)}$$

$$\leq 1-\frac{1}{1+Log\left(1+|x-z|+|z-y|\right)}=\frac{Log\left(1+|x-z|+|z-y|\right)}{1+Log\left(1+|x-z|+|z-y|\right)}$$

$$\leq\frac{Log\left(\left(1+|x-z|\right)\left(1+|z-y|\right)\right)}{1+Log\left(1+|x-z|+|z-y|\right)}$$

$$\leq\frac{Log\left(1+|x-z|\right)}{1+Log\left(1+|x-z|\right)}+\frac{Log\left(1+|z-y|\right)}{1+Log\left(1+|z-y|\right)}\leq d(x,z)+d(z,y).$$

Remarque

On peut rétrquer en ces termes : Sachant que $|.|$ est une distance sur $\mathbb{R}$ on conclut que $Log\left(1+|.|\right)$ est aussi une distance et donc $\dfrac{Log\left(1+|.|\right)}{1+Log\left(1+|.|\right)}$ l'est de même (composition d'une distance et d'une fonction vérifiant certaines conditions que vous devez recherchées si vous ne les avez pas déjà rencontrées !).

ii) On a clairement :

$$B(0,1)=\left\{x\in\mathbb{R}:d(0,x)<1\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:1-\frac{1}{1+Log\left(1+|x|\right)}<1\right\}=\mathbb{R}.$$

$$S(0,1)=\left\{x\in\mathbb{R}:d(0,x)=1\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:1-\frac{1}{1+Log\left(1+|x|\right)}=1\right\}=\phi.$$

iii) Si (x_n) est une suite de Cauchy de $\left(\mathbb{R},|.|\right)$ on écrit :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}/\forall p,q\in\mathbb{N}:p>q\geq n_0\ \Rightarrow\left|x_p-x_q\right|<\varepsilon.$$

Comme on sait que :

$$d(x_p,x_q)=\frac{Log\left(1+|x_p-x_q|\right)}{1+Log\left(1+|x_p-x_q|\right)}<Log\left(1+|x_p-x_q|\right)<|x_p-x_q|;$$

on déduit immédiatement que (x_n) est de Cauchy dans $(\mathbb{R},d)$.

2) Supposons d plus fine que d'. La boule ouverte $B_{d'}(a)$ étant un ensemble ouvert dans (E,d') reste ouverte dans (E,d). Donc, il existe une boule $B_d(a)$ telle que $B_d(a)\subset B_{d'}(a)$.

Inversement, si $B_d(a)\subset B_{d'}(a)$ et si Ω est un ouvert de (E,d') alors :

$$\forall a\in\Omega\ \exists r_a>0/B_{d'}(a,r_a)\subset\Omega.$$

Comme $B_{d'}(a,r_a)$ contient une boule $B_d(a,\rho_a)$ de (E,d) on conclut que Ω est ouvert dans (E,d). Ainsi, d est plus fine que d'.

2. Si (f_n) est une suite de Cauchy dans $\left(G,d_\infty\right)$ elle le reste dans le complet $\left(\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),d_\infty\right)$. Elle y est donc convergente. Soit f sa limite. On écrit :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}/\forall n\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0\ \Rightarrow\ d_\infty(f,f_n)<\varepsilon.$$

D'autre part, pour tout réel x et tout entier naturel n on a :

$$|f(x)-1|=|f(x)-f_n(x)+f_n(x)-1|\leq|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-1|.$$

Concernant le premier terme de la somme du second membre de cette inégalité on a :

$$\exists n_0\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0\ \Rightarrow\ |f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour le second on a de même :

$$\exists A>0: x\leq -A\ \Rightarrow\ |f_n(x)-1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Il en résulte que :

$$\left(n\geq n_0,\ x\leq -A\right)\ \Rightarrow\ |f(x)-1|<\varepsilon.$$

Autrement dit, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$. Ainsi, f est dans G. Par suite, celui-ci est de Fréchet.

3. 1) Si A est relativement compact, son adhérence $\overline{A}$ est par définition compacte. Elle est à fortiori précompacte. L'inclusion naturelle $A \subseteq \overline{A}$ assure que A est lui aussi précompact.

2) Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de (E,d). Elle est bornée. Bien plus, il existe un entier naturel n_0 et un réel $r > 0$ tels que :

$$(x_n)_n \subset B_f(x_{n_0}, r),$$

$B_f(x_{n_0}, r)$ étant la boule fermée centrée en x_{n_0} et de rayon r. Or celle-ci est supposée compacte, donc la suite de Cauchy $(x_n)_n$ y est convergente. Il en découle que $(x_n)_n$ reste convergente dans E. Aussi, (E,d) est complet.

Par ailleurs, tout point a de (E,d) admet la boule fermée $B_f(a,r)$ comme voisinage compact. Comme (E,d) est en plus séparé, on conclut qu'il est localement compact.

Sujet 6

1. Montrer que toute suite de Cauchy (x_n) d'un espace métrique (E,d) est bornée.

2. Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E,d). On note $\delta(A)$ son diamètre et $\mathscr{F}_r(A)$ sa frontière.

   1) Montrer que $\delta(A)=\delta(\overline{A})$.

   2) En déduire que $\delta(\mathscr{F}_r(A))\leq\delta(A)$.

3. Etant donnée une famille finie d'espaces métriques $((E_i,d_i))_{1\leq i\leq p}$

   En posant $E=\prod_{i=1}^{p}E_i$, on considère les deux applications $D_1,D_\infty:E\times E\to\mathbb{R}_+$ définies par :

$$D_1(X,Y)=D_1((x_1,x_2,\dots,x_p),(y_1,y_2,\dots,y_p))=\sum_{i=1}^{p}d_i(x_i,y_i);$$

$$D_\infty(X,Y)=D_\infty((x_1,x_2,\dots,x_p),(y_1,y_2,\dots,y_p))=\max_{1\leq i\leq p}d_i(x_i,y_i).$$

   1) Montrer que D_1 et D_∞ sont des distances sur E.

   2) Montrer que D_1 et D_∞ sont métriquement équivalentes.

   3) Montrer que (E,D_1) est complet si et seulement si chaque (E_i,d_i) l'est.

4. 1) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz[12]suivante :

12. Hermann Amandus Schwarz (25/1/1843-30/11/1921) : Mathématicien Allemand. Sesétudes favorites furent au départ la chimie, avant que Kummer et Weierstrass ne l'influencent pour celles des mathématiques. Son important travail avait trait à la minimisation des aireset surfaces et contenaitsa célèbre inégalité pour les intégrales.

$$\forall f,g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}) \int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}\sqrt{\int_a^b (g(x))^2 dx}.$$

2) Montrer que l'application $d:\left(\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})\right)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $d(f,g)=\sqrt{\int_a^b (f(x)-g(x))^2 dx}$, est une distance sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.

3) Vérifier que la suite (f_n) donnée dans $\left(\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),d\right)$ par $f_n(x)=\dfrac{x}{n}$ est de Cauchy.

Solution

1. C'est une conséquence immédiate de la définition d'une suite de Cauchy, laquelle répartit les éléments de cette suite en deux sous-ensembles bornés:l'un fini et l'autre inclus dans une boule. Consultez vos notes pour plus de détails!

2. 1) La notion de diamètre conservant l'ordre, de la relation $A \subset \overline{A}$ on tire immédiatement $\delta(A) \leq \delta(\overline{A})$. Inversement, pour tous x et y de $\overline{A}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe deux éléments x' et y' de A tels que:

$$d(x,x') \leq \frac{\varepsilon}{2};\ d(y,y') \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où:

$$d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \delta(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \delta(\overline{A}) \leq \delta(A) + \varepsilon.$$

Par suite $\delta(\overline{A}) \leq \delta(A)$. L'égalité posée est achevée.

2) C'est une conséquence immédiate de l'inclusion $\mathscr{F}_r(A) \subset \overline{A}$

et de (1).

3. 1) On se les partage. Nous traitons D_1 et vous laissons D_∞.
Chaque d_i étant une distance on a immédiatement:

$$D_1(X,Y)=\sum_{i=1}^{p} d_i(x_i,y_i)=0 \Leftrightarrow d_i(x_i,y_i)=0,\ \forall i\in\{1,2,\dots,p\}$$

$$\Leftrightarrow x_i=y_i,\ \forall i\in\{1,2,\dots,p\} \Leftrightarrow X=Y;$$

d'où la condition d'identité.

De même, on a :

$$\forall X,Y\in E\ D_1(X,Y)=\sum_{i=1}^{p} d_i(x_i,y_i)=\sum_{i=1}^{p} d_i(y_i,x_i)=D_1(Y,X);$$

d'où la condition de symétrie.

Enfin, on a :

$$\forall X,Y,Z\in E\ D_1(X,Y)=\sum_{i=1}^{p} d_i(x_i,y_i)\le\sum_{i=1}^{p}\left(d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)\right)$$

$$\le\sum_{i=1}^{p} d_i(x_i,z_i)+\sum_{i=1}^{p} d_i(z_i,y_i)$$

$$\le D_1(X,Z)+D_1(Z,Y);$$

d'où la condition d'inégalité triangulaire.

2) On a clairement:

$$\max_{1\le i\le p} d_i(x_i,y_i)\le\sum_{i=1}^{p} d_i(x_i,y_i)\le p\ \max_{1\le i\le p} d_i(x_i,y_i);$$

autrement dit :

$$D_\infty(X,Y)\le D_1(X,Y)\le p\,D_\infty(X,Y).$$

Donc, D_1 et D_∞ sont métriquement équivalentes.

3) La condition est nécessaire. Supposons que (E,D_1) est complet. Si (x_n^i) est une suite de Cauchy de (E_i,d_i) on écrit :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0^i(\varepsilon)\in\mathbb{N}/\ \forall r,s\in\mathbb{N}: r>s\ge n_0^i\ \Rightarrow\ d_i(x_r^i,x_s^i)\le\frac{\varepsilon}{p}.$$

En prenant $m_0 = \max\limits_{1\le i\le p} n_0^i(\varepsilon)$ et $(x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^i, \dots, x_n^p) = (X_n)$ il vient :

$$r > s \geq m_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} d_i(x_r^i, x_s^i) = D_1(X_r, X_s) \leq \varepsilon,$$

ce qui signifie que la suite (X_n) est de Cauchy dans l'espace complet (E, D_1). On conclut qu'elle y est convergente vers une limite $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$. Comme :

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} d_i(x_n^i, \ell_i) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p} d_i(x_n^i, \ell_i) = \lim_{n\to\infty} D_1(X_n, \ell) = 0;$$

on en déduit que (x_n^i) converge dans (E_i, d_i) vers ℓ_i. Ainsi, (E_i, d_i) est complet.

Inversement, si chaque espace (E_i, d_i) est complet et si $(x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^i, \dots, x_n^p) = (X_n)$ est une suite de Cauchy de (E, D_1) on écrit par définition :

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} /\ \forall r, s \in \mathbb{N}$:

$$r > s \geq n_0 \Rightarrow D_1(X_r, X_s) = \sum_{i=1}^{p} d_i(x_r^i, x_s^i) \leq \varepsilon.$$

D'où :

$$r > s \geq n_0 \Rightarrow d_i(x_r^i, x_s^i) \leq \varepsilon,\ \forall i = 1, 2, \dots, p.$$

On voit ainsi que chaque suite (x_n^i) est de Cauchy dans l'espace complet (E_i, d_i). Elle y est donc convergente vers une limite ℓ_i. En posant $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$ on écrit enfin :

$$\lim_{n\to\infty} D_1(X_n, \ell) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p} d_i(x_n^i, \ell_i) = \sum_{i=1}^{p} \lim_{n\to\infty} d_i(x_n^i, \ell_i) = 0.$$

On conclut ainsi que la suite (X_n) converge dans (E, D_1) vers ℓ. (E, D_1) est alors complet.

4. 1) Pour tout réel λ on pose :

$$P(\lambda)=\int_a^b \left(|f(x)|+\lambda|g(x)|\right)^2 dx$$

$$=\int_a^b |f(x)|^2\,dx+2\lambda\int_a^b |f(x)||g(x)|dx+\lambda^2\int_a^b |g(x)|^2 dx.$$

Ce trinôme en λ est de signe constant sur $\mathbb{R}$. On déduit que son discriminant Δ est négatif ou nul. On écrit donc :

$$\Delta=\left(\int_a^b |f(x)||g(x)|dx\right)^2-\int_a^b |f(x)|^2\,dx\int_a^b |g(x)|^2 dx\leq 0.$$

D'où :

$$\left(\int_a^b |f(x)||g(x)|dx\right)^2\leq\int_a^b |f(x)|^2\,dx\int_a^b |g(x)|^2 dx.$$

La prise de la racine carrée des deux membres achève la question.

2) Les conditions d'identité et de symétrie sont évidentes.

Concernant l'inégalité triangulaire, pour tous f,g et h de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ on a à montrer :

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)-g(x))^2\,dx}\leq\sqrt{\int_a^b (f(x)-h(x))^2\,dx}+\sqrt{\int_a^b (h(x)-g(x))^2\,dx};$$

ce qui donne en posant $a(x)=f(x)-h(x)$ et $b(x)=h(x)-g(x)$:

$$\sqrt{\int_a^b (a(x)+b(x))^2\,dx}\leq\sqrt{\int_a^b (a(x))^2\,dx}+\sqrt{\int_a^b (a(x))^2\,dx}.$$

En élevant aux carrés on arrive après développement et simplification, à :

$$\int_a^b a(x)b(x)dx\leq\sqrt{\int_a^b (a(x))^2\,dx}\sqrt{\int_a^b (a(x))^2\,dx}.$$

C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz traitée ci-dessus !

3) Une suite $(f_n)_n$ de $\left(\mathscr{C}\left([a,b],\mathbb{R}\right),d\right)$ est de Cauchy si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall p,q \in \mathbb{N} : p > q \geq n_0 \Rightarrow d(f_p, f_q) \leq \varepsilon.$$

Pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tous entiers naturels non nuls p et q tels que $p > q$ on écrit :

$$d(f_p, f_q) = \sqrt{\int_a^b (f_p(x) - f_q(x))^2 dx} = \sqrt{\int_a^b \left(\frac{x}{p} - \frac{x}{q}\right)^2 dx}$$

$$= \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\sqrt{\int_a^b x^2 dx} = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\sqrt{\frac{b^3 - a^3}{3}} \leq \frac{\sqrt{b^3 - a^3}}{q} \leq \varepsilon.$$

Ainsi, il suffit de prendre $n_0 = \left[\dfrac{\sqrt{b^3 - a^3}}{\varepsilon}\right] + 1$ pour conclure.

Sujet 7

1. Soit (E,d) un espace métrique.

1) Montrer que (E,d) est séparé.

2) Montrer que $D=\dfrac{d}{3+2d}$ est une autre distance sur E.

3) Déterminer la boule ouverte $B_D(a,1)$.

4) Montrer que $B_d(a,r)\subset B_D(a,r)$.

5) En déduire que d est plus fine que D.

6) Montrer que siune suite (x_n) est de Cauchy dans (E,d) elle le reste dans (E,D).

7) Donner deux justificatifs distincts du fait que le sous-espace $(\mathbb{N},|.|)$ de $(\mathbb{R},|.|)$ est complet.

2. 1) Etant donné un sous-ensemble non vide A d'un espace métrique (E,d) montrer que :

$$\overline{A}=\{x\in E\,/\,d(x,A)=0\}.$$

2) On munit l'ensemble des entiers naturels non nuls $\mathbb{N}^*$ de la distance usuelle et on pose pour tous x et y de $\mathbb{N}^*$:

$$d'(x,y)=\frac{|x-y|}{xy}.$$

i) Montrer que $(\mathbb{N}^*,d')$ est un espace métrique.

ii) Montrer que l'application identité $id_E:(\mathbb{N}^*,d')\to(\mathbb{N}^*,d)$ est uniformément continue.

iii) Montrer que la suite $u_n=n$ est de Cauchy dans $(\mathbb{N}^*,d')$.

iv) L'espace $(\mathbb{N}^*,d')$ est-il complet ?

3. On munit $\mathbb{R}$ de la distance δ définie par :

$$\delta(x,y)=|shx-shy|.$$

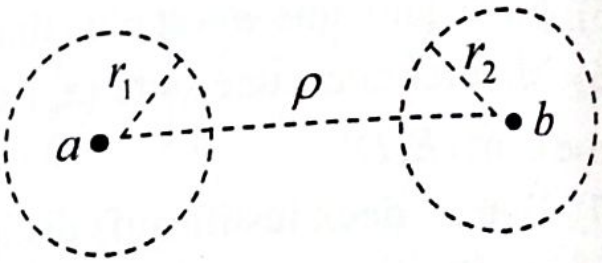
1) Montrer que :

$$\forall u, v \in \mathbb{R} \quad |u-v| \leq |shu - shv|.$$

2) Montrer que l'espace métrique $(\mathbb{R}, \delta)$ est complet.

Solution

1. 1) Soient a et b deux points distincts de (E,d). On pose $\rho = d(a,b) > 0$. Si l'on prend (par exemple) $r_1 = \frac{\rho}{3} = r_2$, on assure que:



$B(a,r_1) \cap B(b,r_2) = \phi.$

$B(a,r_1)$ et $B(b,r_2)$ étant des voisinages ouverts disjoints de a et b respectivement, la question est close.

2) A l'instar de d, D vérifie clairement les deux conditions d'identitéet de symétrie. Concernant l'inégalité triangulaire, on remarque que pour tous x et y de E on a :

$$D(x,y) = \frac{d(x,y)}{3+2d(x,y)} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{3}{2}}{3+2d(x,y)}.$$

Maintenant, si z est un autre point de E, l'inégalité triangulaire satisfaitepar d permet d'avoir :

$$\frac{d(x,y)}{3+2d(x,y)} \leq \frac{1}{2} - \frac{\frac{3}{2}}{3+2d(x,z)+2d(z,y)},$$

D'où en réduisant au même dénominateur:

$$\frac{d(x,y)}{3+2d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{3+2d(x,z)+2d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{3+2d(x,z)+2d(z,y)}.$$

Cela donne l'inégalité escomptée :

$$\frac{d(x,y)}{3+2d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{3+2d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{3+2d(z,y)}.$$

3) On a par définition:

$$B_D(a,1) = \{x \in E \,/\, D(a,x) < 1\} = \left\{x \in E \,/\, \frac{d(a,x)}{3+2d(a,x)} < 1\right\}$$
$$= \{x \in E \,/\, 3 + d(a,x) > 0\} = E.$$

4) On a clairement:

$$x \in B_d(a,r) \Rightarrow d(a,x) < r \Rightarrow D(a,x) = \frac{d(a,x)}{3+2d(a,x)} \leq d(a,x) < r$$
$$\Rightarrow x \in B_D(a,r).$$

D'où l'inclusion !

5) C'est une conséquence directe de (4). En effet, si Ω est un ouvert non vide de (E,D) il vérifie par définition :

$$\forall x \in \Omega \; \exists \rho_x > 0 \,/\, x \in B_D(x,\rho_x) \subset \Omega.$$

Comme $B_d(x,\rho_x) \subset B_D(x,\rho_x)$, on conclut qu'il est ouvert dans (E,d).

6) On a :

$$(x_n) \text{ est de Cauchy dans } (E,d)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall p,q \in \mathbb{N} : \; p > q \geq n_0 \;\Rightarrow\; d(x_p,x_q) \leq \varepsilon.$$

En s'appuyant sur la question (2) on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall p,q \in \mathbb{N} : \; p > q \geq n_0 \;\Rightarrow\; D(x_p,x_q) \leq d(x_p,x_q) \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, (x_n) est de Cauchy dans (E,D).

7) Un espace complet est un espace métrique où toute suite de Cauchy y converge. $(\mathbb{N},|.|)$ l'est car :

i) il est discret ;

ii) il est fermé dans $(\mathbb{R},|.|)$ complet.

2. 1) On a :

$$a \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ B(a,\varepsilon) \cap A \neq \phi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in A\ d(a,x_\varepsilon) < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ d(a,A) < \varepsilon \Leftrightarrow d(a,A) = 0.$$

2. i) En écrivant :

$$d'(x,y) = \frac{|x-y|}{xy} = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|,$$

on constate sans peine que d' vérifie les trois conditions d'une distance. Donc, $(\mathbb{N}^*, d')$ est un espace métrique.

ii) Soient x et y deux entiers naturels non nuls. Comme $xy \geq 1$ il vient :

$$d'(x,y) = \frac{|x-y|}{xy} \leq |x-y|.$$

Il en résulte que l'application $id_E : (\mathbb{N}^*, d') \to (\mathbb{N}^*, d)$ est 1-lipschitsienne[13]. Donc, elle est uniformément continue.

iii) Soient $\varepsilon > 0$ et p et q deux entiers naturels non nuls tels que $p > q$. On a :

$$d'(u_p - u_q), y) = \frac{|p-q|}{pq} = \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} < \frac{1}{q}.$$

Comme $\lim\limits_{q \to +\infty} \frac{1}{q} = 0$ on conclut que la suite (u_n) est de Cauchy.

iv) L'espace $(\mathbb{N}^*, d')$ n'est pas complet. La suite de Cauchy (u_n) considérée n'y converge pas puisque :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*\ \lim_{n \to \infty} d'(x_n, \ell) = \lim_{n \to \infty} \frac{|n-\ell|}{n\ell} = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{1}{\ell} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{\ell} \neq 0.$$

13. Rudolf Otto Sigismund, Lipschitz (14/6/1832-7/10/1903) : Mathématicien Allemand. Son champ d'intérêts est très vaste. Il s'étend de la théorie des nombres les fonctions de Bessel, les séries de Fourier, les équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles à la mécanique analytique et la théorie du potentiel.

3. 1) Si $u=v$ la relation proposée prend la forme d'une égalité triviale. Sinon, le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction sh dans l'intervalle (u,v) permet d'affirmer que :

$$\exists c_{(u,v)} \in (u,v): \ |shv - shu| = chC\,|v-u| > |v-u|.$$

2) Soit (x_n) une suite de Cauchy de $(\mathbb{R},\delta)$. On écrit :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) / \ \forall p,q \in \mathbb{N}$:

$$p > q \geq n_0 \ \Rightarrow \ \delta(x_p, y_q) = |shx_p - shy_q| < \varepsilon.$$

On en déduit grâce à la première question que :

$$p > q \geq n_0 \ \Rightarrow \ |x_p - y_q| < \varepsilon.$$

Ainsi, (x_n) reste de Cauchy dans l'espace usuel $(\mathbb{R},|.|)$, lequel est complet. Il en résulte que cette suite y converge vers une limite ℓ. Comme la fonction sh est continue sur $\mathbb{R}$ la suite image (shx_n) converge dans $(\mathbb{R},|.|)$ vers $(sh\ell)$. Autrement dit, la suite (x_n) converge vers ℓ relativement à la distance δ. On conclut donc que $(\mathbb{R},\delta)$ est complet.

Sujet 8

1. Soit Ω un ouvert non vide d'un espace métrique complet (E,d). Pour tous x et y de Ω on pose :

$$f(x,y)=\left|\frac{1}{d(x,C_E\Omega)}-\frac{1}{d(y,C_E\Omega)}\right|.$$

1) Vérifierque f est bien définie sur $\Omega\times\Omega$.

2) Montrerque l'application :

$$\delta:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto\delta(x,y)=\max(d(x,y),f(x,y)),$$

Définit une distance sur Ω.

3) Montrer que d et δ sont topologiquement équivalentes sur Ω.

4) Montrer que (Ω,δ) est complet.

2. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance euclidienne d_2 et on pose, pour tous réels x et y :

$$d(x,y)=d_2(f(x),f(y)),$$

où $f:(\mathbb{R},|.|)\to(\mathbb{R}^2,d_2)$ est une fonction injective continue.

1) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour que $(\mathbb{R},d)$ soit complet il faut et il suffit que $f(\mathbb{R})$ soit fermé dans $(\mathbb{R}^2,d_2)$.

3. Soit (f_n) la suite de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x)=\frac{nx^3}{1+n^2x^4}.$$

Etudier sa convergence simple et sa convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Solution

1. 1) $C_E\Omega$ étant fermé on a aussitôt :

$$d(x, C_E\Omega) = 0 \iff x \in C_E\Omega.$$

Donc, $d(x, C_E\Omega)$ et $d(y, C_E\Omega)$ ne s'annulent pas sur Ω. Ainsi, f est bien définie sur $\Omega \times \Omega$.

2) Les conditions d'identité et de symétrie s'obtiennent trivialement de celles de d :

$$\delta(x, y) = 0 \iff d(x, y) = 0 = f(x, y) \iff x = y;$$

$$\forall x, y \in \Omega \quad \delta(x, y) = \delta(y, x).$$

Examinons enfin l'inégalité triangulaire. Si x, y et z sont trois points de Ω on écrit clairement:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$$

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| = \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(z)} + \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(y)}\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(z)}\right| + \left|\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(y)}\right|.$$

D'où:

$$\max\left(d(x, y), \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right|\right) \leq$$

$$\leq \max\left(d(x, z) + d(z, y), \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(z)} + \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(y)}\right|\right)$$

$$\leq \max\left(d(x, z)+, \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(z)}\right|\right) + \max\left(d(z, y), \left|\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(y)}\right|\right)$$

Autrement dit:

$$\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y).$$

Cette inégalité triangulaire achève que δ est une distance sur Ω.

3) On a par construction :

$$\forall x, y \in \Omega \quad d(x, y) \leq \delta(x, y).$$

Donc, δ est plus fine que d (ou que l'application identité $id_\Omega : (\Omega, \delta) \to (\Omega, d)$ est continue).

Inversement, prouvons la continuité de l'application inverse

$id_\Omega : (\Omega, d) \to (\Omega, \delta)$. Pour ce faire, on montre que :

$\forall x \in \Omega \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha(\varepsilon, x) > 0 / \forall y \in \Omega \ d(x,y) \le \alpha \Rightarrow \delta(x,y) \le \varepsilon.$

Posons $d\left(x, C_E(\Omega)\right) = \beta > 0$ et supposons que $d(x,y) \le \frac{\beta}{2}$. De la relation:

$$\left| d\left(x, C_E\Omega\right) - d\left(y, C_E\Omega\right) \right| \le d(x,y),$$

on tire:

$$d\left(y, C_E\Omega\right) > d\left(x, C_E\Omega\right) - d(x,y).$$

Par suite:

$$d\left(y, C_E\Omega\right) > \beta - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Donc:

$$\left| \frac{1}{d\left(x, C_E\Omega\right)} - \frac{1}{d\left(y, C_E\Omega\right)} \right| = \frac{\left| d\left(y, C_E\Omega\right) - d\left(x, C_E\Omega\right) \right|}{d\left(x, C_E\Omega\right) d\left(y, C_E\Omega\right)}$$
$$\le \frac{d(x,y)}{d\left(x, C_E\Omega\right) d\left(y, C_E\Omega\right)} \le \frac{2}{\beta^2} d(x,y).$$

Ainsi, en prenant $\alpha = \inf\left(\frac{\beta}{2}, \ \varepsilon, \ \frac{\beta^2}{2}\varepsilon\right)$, on affirme que:

$$\forall x \in \Omega \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \alpha(\varepsilon, x) = \inf\left(\frac{\beta}{2}, \varepsilon, \frac{\beta^2}{2}\varepsilon\right) > 0 /$$
$$\forall y \in \Omega \ d(x,y) \le \alpha \ \Rightarrow \ \delta(x,y) \le \varepsilon.$$

C'est là la continuité achevant la question.

4) Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de (Ω, δ). Elle est évidemment de Cauchy dans (Ω, d). Bien plus, elle est aussi de Cauchy dans (E, d). Comme celui-ci est complet, la suite $(x_n)_n$ est alors convergente vers un point ℓ de $\overline{\Omega}$. Montrons que ℓ appartient à Ω. On procède par l'absurde.

Si ℓ est dans $C_E\Omega$, la suite $(x_n)_n$ étant de Cauchy dans (Ω,δ), on écrit:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}/\forall p,q\in\mathbb{N}:\ p>q\geq n_0\ \Rightarrow\ \delta(x_p,x_q)\leq\varepsilon.$$

D'où:

$$(*)\quad p>q\geq n_0\ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{d\left(x_p,C_E\Omega\right)}-\frac{1}{d\left(x_q,C_E\Omega\right)}\right|\leq\delta(x_p,x_q)\leq\varepsilon.$$

Fixons à présent $q=n_0$ et faisons tendre p vers l'infini. On obtient:

$$\lim_{p\to\infty} d\left(x_p,C_E\Omega\right)=d\left(\ell,C_E\Omega\right)=0.$$

Cela donne $\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{1}{d\left(x_p,C_E\Omega\right)}=+\infty$; et donc:

$$\lim_{\substack{p\to+\infty\\ q=n_0}}\left|\frac{1}{d\left(x_p,C_E\Omega\right)}-\frac{1}{d\left(x_q,C_E\Omega\right)}\right|=+\infty,$$

ce qui est exclupar la relation (*). Ainsi, on conclut que ℓ est un point de (Ω,d). En vertu de l'équivalence des distances d et δ on déduit que la suite $(x_n)_n$ converge vers ℓ dans (Ω,δ). Ce dernier est alors complet.

2. 1) On a succinctement :

i) Si $x=y$ on a immédiatement :

$$d(x,x)=d_2(f(x),f(x))=0.$$

Si $d(x,y)=d_2(f(x),f(y))=0$ la propriété d'identité de d_2 donne $f(x)=f(y)$. Comme f est injective il vient $x=y$.

ii) La symétrie et l'inégalité triangulaire de d découlent de celles de d_2. Donc, d est une distance sur $\mathbb{R}$.

2) Supposons $(\mathbb{R},d)$ complet et considérons une suite convergente (y_n) de $f(\mathbb{R})$. Montrons que sa limite, notée z, est dans $f(\mathbb{R})$. Pour tout indice n il existe un réel x_n tel que $y_n=f(x_n)$.

En remarquant que :

$$\lim_{p,q\to\infty} d(x_p, x_q) = \lim_{p,q\to\infty} d_2(f(x_p), f(x_q)) = \lim_{p,q\to\infty} d_2(y_p, y_q) = 0,$$

on voit que la suite (x_n) ainsi obtenue est de Cauchy dans l'espace complet $(\mathbb{R}, d)$. Elle y converge vers une limite ℓ. La continuité de f permet de réaliser :

$$z = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(\ell).$$

Cela confirme bien que z est dans $f(\mathbb{R})$. Celui-ci est donc fermé.

Inversement, supposons $f(\mathbb{R})$ fermé. Si (x_n) est une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}, d)$ on écrit par définition :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall p, q \in \mathbb{N} : p > q \geq n_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

Il en résulte que :

$$p > q \geq n_0 \Rightarrow d_2(f(x_p), f(x_q)) \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy dans $f(\mathbb{R})$. Comme ce dernier est fermé dans l'espace complet $(\mathbb{R}^2, d_2)$ il est lui-même complet. Donc, $(f(x_n))$ est convergente vers une limite $u = f(z_0)$ de $f(\mathbb{R})$. Ainsi, on a obtenu :

$$\lim_{m\to\infty} d(x_n, z_0) = \lim_{m\to\infty} d_2(f(x_n), f(z_0)) = 0.$$

Il en ressort que la suite (x_n) converge vers z_0 dans $(\mathbb{R}, d)$. Ce dernier est alors complet.

3. On remarque que pour $x = 0$ on a aussitôt $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ et pour tout x non nul on relève que :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^3}{1 + n^2 x^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0.$$

Donc, la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction identiquement nulle $f \equiv 0$.

Examinons son éventuelle convergence uniforme. Pour cela, on observe que :

$$\sup_{\mathbb{R}}|f_n(x)-0| = \sup_{\mathbb{R}} \frac{n|x|^3}{1+n^2x^4} = \sup_{\mathbb{R}_+} \frac{nx^3}{1+n^2x^4}.$$

En posant $g_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+n^2x^4}$ il vient $g_n{}'(x) = nx^2 \dfrac{3-n^2x^4}{(1+n^2x^4)^2}$.

Le tableau ci-après aide à affirmer que :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}_+} \frac{nx^3}{1+n^2x^4} = \lim_{n\to\infty} g_n\left(\left(\frac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{27}}{4\sqrt{n}} = 0.$$

x	0		$\left(\frac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{4}}$		$+\infty$
$g_n{}'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt[4]{27}}{4}\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\searrow$	0

On conclut ainsi que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Sujet 9

1. Montrer que la famille des parties complètes d'un espace métrique complet est stable par intersection et réunion finie.

2. 1) Citer le théorème du point fixe de Banach-Picard.
2) Démontrer-le.
3) Montrer que le système algébrique :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{5}(2\sin x + \cos y) \\ y = \dfrac{1}{5}(\cos x + 3\sin y) \end{cases}$$

admet une et une seule solution dans l'espace de Fréchet $(\mathbb{R}^2, d_1)$.

3. Soit f une fonction d'un espace métrique compact (E,d) vers lui-même. On suppose qu'il existe dans E un point x_0 tel que:

$$\forall x \in E \;\; d(x_0, x) = d(x_0, f(x)).$$

On note A l'ensemble de tels points.

1) Pour tout x de E, on définit l'application g_x laquelle, à un point y de E, associe $g_x(y) = d(y,x) - d(y, f(x))$.

Montrer que g_x est uniformément continue sur E.

2) Montrer que $A = \bigcap_{x \in E} g_x^{-1}(\{0\})$.

3) En déduire que A est compact.

Solution

1. La famille des parties complètes d'un espace métrique complet est la famille de ses parties fermées, laquelle est stable par intersection et réunion finie.

2. 1) Théorème du point fixe de Picard-Banach:

Toute application k-contractante f, définie d'un espace métrique complet (E,d) dans lui-même, admet un point fixe unique.

2) Preuve

Observons de prime abord que si f admettait deux points fixes distincts a et b on serait face à l'absurdité :

$$0 < d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a,b),$$

autrement dit $k \geq 1$.

L'existence du point fixe peut-être élucidée comme suit.

Etant donné un point x_0 de E on définit une suite récurrente (x_n) en posant :

$$x_{n+1} = f(x_n);\ n \in \mathbb{N}.$$

Il est clair que la convergence de cette suite procure le point fixe de f recherché. L'espace (E,d) étant complet, il nous suffit de montrer que (x_n) est de Cauchy. Pour ce faire, remarquons d'abord que:

$$\forall x_1, x_2 \in E\ d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq k\, d(x_1, x_0)$$

D'où :

$$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \leq k\, d(x_2, x_1) \leq k^2\, d(x_1, x_0).$$

Supposons que c'est le cas pour un rang quelconque p :

$$d(x_p, x_{p-1}) \leq k^{p-1} d(x_1, x_0),$$

on obtient pour le rang suivant :

$$d(x_{p+1}, x_p) = d(f(x_p), f(x_{p-1})) \leq kd(x_p, x_{p-1}) \leq k^p\, d(x_1, x_0).$$

Ainsi, pour tout entier naturel n on a :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n\, d(x_0, x_1).$$

A présent, pour tous entiers naturels p et q tels que $p > q$ on a :

$$\begin{aligned}
d(x_p, x_q) &\leq d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + \ldots + d(x_{q+1}, x_q) \\
&\leq (k^{p-1} + k^{p-2} + \ldots + k^q)\, d(x_0, x_1) \leq k^q (1 + k + \ldots + k^{p-q-1})\, d(x_0, x_1) \\
&\leq k^q \frac{1 - k^{p-q}}{1-k} d(x_0, x_1) < \frac{k^q}{1-k} d(x_0, x_1).
\end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 quand q tend vers $+\infty$, ce qui confirme que $(x_n)_n$ est de Cauchy et clôt la question.

4) Toute solution du système proposé est un point fixe de l'application $\varphi:(\mathbb{R}^2,d_1)\to(\mathbb{R}^2,d_1)$ définie par :

$$\varphi(x,y)=\left(\frac{1}{5}(2\sin x+\cos y),\frac{1}{5}(\cos x+3\sin y)\right).$$

En vertu du théorème précédent, la contraction de cette application résout la question. Pour cela, on calcule :

$$d_1(\varphi(x,y),\varphi(x',y'))=\left(\frac{1}{5}(2\sin x+\cos y),\frac{1}{5}(\cos x+3\sin y)\right)$$

$$=\left|\frac{1}{5}(2\sin x+\cos y)-\frac{1}{5}(2\sin x'+\cos y')\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{5}(\cos x+3\sin y)-\frac{1}{5}(\cos x'+3\sin y')\right|$$

$$\leq\frac{2}{5}|(\sin x-\sin x')|+\frac{1}{5}|(\cos y-\cos y')|$$

$$+\frac{1}{5}|(\cos x-\cos x')|+\frac{3}{5}|(\sin y-\sin y')|.$$

Sachant que :

$$\forall u,v\in\mathbb{R}\quad \max\left(|(\cos u-\cos v)|,|(\sin u-\sin v)|\right)\leq|u-v|,$$

on obtient aussitôt :

$$d_1(\varphi(x,y),\varphi(x',y'))\leq\frac{3}{5}|x-x')|+\frac{4}{5}|y-y'|\leq\frac{4}{5}d_1((x,y),(x',y').$$

L'exercice est achevé.

3. 1) Pour tous y et y' de E, on écrit grâce à l'inégalité triangulaire:

$$d(y,x)\leq y,y')+d(y',x),$$
$$d(y',f(x))\leq d(y',y)+d(y,f(x)).$$

D'où :

$$|g_x(y)-g_x(y')|\leq 2d(y,y').$$

Il en ressort que g_x est 2-lipchitzienne. Elle est alors uniformément continue.

2) On a :

$$\begin{aligned}
x_0\in A &\Leftrightarrow \forall x\in E,\ d(x_0,x)=d(x_0,f(x))\\
&\Leftrightarrow \forall x\in E,\ d(x_0,x)-d(x_0,f(x))=0\\
&\Leftrightarrow \forall x\in E,\ g_x(x_0)=0 \quad\Leftrightarrow \forall x\in E,\ x_0\in g_x^{-1}(\{0\})\\
&\Leftrightarrow x_0\in\bigcap_{x\in E} g_x^{-1}(\{0\}).
\end{aligned}$$

D'où l'égalité.

3) On déduit de ce qui précède que A est fermé dans le compact E. Il est par conséquent lui aussi compact.

Sujet 10

1. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1) Toute partie complète d'un espace métrique est fermée.
2) Toute partie fermée d'un espace métrique est complète.
3) Toute partie précompacte d'un espace métrique est complète.
4) Toute partie précompacte d'un espace métrique est bornée.
5) Toute partie bornée d'un espace métrique est précompacte.
6) l'image par une application continue d'une suite de Cauchy est de Cauchy.
7) Si deux espaces métriques sont homéomorphes et si l'un est complet alors l'autre l'est de même.

2. 1) Montrer que toute distance d sur un ensemble E est une application continue sur E^2.

2) On note $\delta(A)$ le diamètre d'une partie compacte A d'un espace métrique (E,d). Montrer qu'il existe deux points a et b dans A tels que $\delta(A)=d(a,b)$.

3. Montrer que toute suite de Cauchy (u_n) d'un espace métrique (E,d) admettant une valeur d'adhérence, est nécessairement convergente.

4. Etant donné un réel non nul a, on considère dans l'espace métrique $\left(\mathscr{C}([-a,a],\mathbb{R}),d_\infty\right)$ le sous-espace H des fonctions paires. Montrer que H est de Fréchet.

Solution

1. Consultez vos cahiers.

2. 1) Soit (x_0,y_0) un point de E^2. On écrit :

$$\forall (x,y)\in E^2 \quad d(x,y)\le d(x,x_0)+d(x_0,y_0)+d(y_0,y)$$

D'où :

$$|d(x,y)-d(x_0,y_0)| \le d(x,x_0)+d(y,y_0)$$

En munissant E^2 de la distance « produit » :

$$D\big((x,y),(x_0,y_0)\big)=d((x,x_0)+d(y,y_0),$$

on observe aussitôt que :

$$|d(x,y)-d(x_0,y_0)| \le D\big((x,y),(x_0,y_0)\big).$$

ce qui signifie que d est continue en (x_0,y_0).

3) On sait que si A est compact A^2 l'est de même. La restriction de d sur A^2 étant continue, on affirme d'après le théorème de Weierstrass[14] qu'elle y est bornée et atteint sa borne supérieure. Autrement dit, il existe deux points a et b dans A tels que $\delta(A)=d(a,b)$.

3. Soit (u_n) une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence dans un espace métrique (E,d). Il existe unesous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) convergeant vers ℓ. Pour tout entier naturel n on écrit :

$$d(u_n,\ell) \le d(u_n,u_{\varphi(n)})+d(u_{\varphi(n)},\ell).$$

Estimons les deux termes du second membre de cette inégalité. Concernant le premier, la suite étant de Cauchy on affirme que :

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : n \ge n_0 \Rightarrow d(u_n,u_{\varphi(n)}) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Au sujet du second, la convergence de $(u_{\varphi(n)})$ vers ℓ se traduit par :

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : n \ge n_1 \Rightarrow d(u_{\varphi(n)},\ell) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il en résulte en prenant $n_2=\max(n_0,n_1)$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \ge n_2 \Rightarrow d(u_n,\ell) \le \varepsilon.$$

14. Karl Théodore Weierstrass (31/10/1815-19/2/1897) : Mathématicien Allemand. Son œuvre renferme les théories des fonctions abéliennes, elliptiques et analytiques.

Ainsi, la suite (u_n) converge vers ℓ.

4. Si (f_n) est une suite de Cauchy de H elle le reste dans le Fréchet $\left(\mathscr{C}([-a,a],\mathbb{R}),d_\infty\right)$. Elle y est alors convergente. Sa limite f vérifie :

(*) $$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow d_\infty(f_n, f) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, pour tout entier naturel n et tout x de $[-a,a]$ on écrit :

$$|f(x)-f(-x)|=|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(-x)|+|f_n(-x)-f(-x)|$$

Comme f_n est paire, on obtient :

$$|f(x)-f(-x)|=|f(x)-f_n(x)|+|f_n(-x)-f(-x)|.$$

On déduit d'après (*) que :

$$\forall x \in [-a,a]\ \forall n \in \mathbb{N} :\ n \geq n_0 \Rightarrow |f(x)-f(-x)| \leq \varepsilon.$$

D'où :
$$\forall x \in [-a,a]\ |f(x)-f(-x)| = 0;$$

Par suite :
$$\forall x \in [-a,a]\quad f(-x) = f(x).$$

Ainsi, f est paire et donc H est de Fréchet.

Sujet 11

1. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une distance d et on y considère une partie A admettant un seul point d'accumulation a.
   1) Montrer que A est nécessairement infinie.
   2) Etant donné un entier naturel non nul k montrer que l'ensemble $F_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \frac{1}{k} \leq d(x,a) \leq k \right\}$ est compact.
   3) En déduire que $A \cap F_k$ est fini.
   4) Montrer que $A \setminus \{a\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A \cap F_k$.
   5) En déduire que A est dénombrable.

2. Soit α un paramètre réel. Pour tout entier naturel n et tout x de $[0,1]$ on pose $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$.
   1) Trouver la limite simple de la suite $(f_n)_n$.
   2) Y'a-t-il convergence uniforme?

3. Soit la suite $(f_n)_n$ donnée sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f_n(x) = n\cos^n x \sin x$.
   1) Chercher la limite simple f de $(f_n)_n$.
   2) Vérifier que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \neq \lim_{n \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$.

Solution

1. 1) On procède par l'absurde. Si A était finie on aurait pour $r = \min_{x \in A} d(x,a) > 0$:

$$B\left(a, \frac{r}{2}\right) \cap \left(A \setminus \{a\}\right) = \phi.$$

Cela est en contradiction avec la définition de a.

Remarque : Cela est attendu, puisqu'on sait plus généralement, que dans un espace séparé, les parties finies n'ont pas de point d'accumulation !.

2) On remarque que F_k est inclus dans la boule fermée $B_f(a,k)$. Il en découle que F_k est borné. Comme l'application $\varphi:\mathbb{R}^n \to (\mathbb{R},|.|)$ donnée par $\varphi(x)=d(x,a)$ est continue et $F_k=\varphi^{-1}\left(\left[\frac{1}{k},k\right]\right)$ on déduit que F_k estaussi fermé. Il est donc fermé borné dans $\mathbb{R}^n$. Aussi, il est alors compact.

3) On procède par l'absurde. Si $A\cap F_k$ est infini il admettrait en vertu du théorème de Weierstrass un point d'accumulation que l'on note b. Commece point appartient à A on déduit qu'il est distinct de a. Ainsi, A se retrouve avec deux points d'accumulation C'est en contradiction avec les hypothèses.

4) Il est clair que :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A\cap F_k \subseteq A\setminus\{a\}.$$

D'autre part, on remarqueque si x est un point de $A\setminus\{a\}$ il existe pour $d(x,a)=r>0$, un entier naturel k tel que $\frac{1}{k}\leq r\leq k$. Il en résulte que x appartient à F_k. Par suite :

$$A\setminus\{a\}\subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A\cap F_k.$$

D'où:

$$A\setminus\{a\}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A\cap F_k.$$

5) $A\setminus\{a\}$ est réunion dénombrable de parties finies. Il est par conséquent lui-même dénombrable. A ne peut que l'être de même.

2. 1) Si $x=0$ ou $x=1$ on a immédiatement $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$.

Si x est dans $]0,1[$ on remarque que :

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n = n^\alpha x e^{nLog(1-x)} = \frac{n^\alpha x}{e^{n(x+o(x))}};$$

et donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. On conclut que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle quel que soit le paramètre α.

2) Une simple étude des variations de la fonction $|f_n(x)|$ sur $[0,1]$ donne :

$$\sup_{0\le x\le 1} |f_n(x)| = \frac{n^{n+\alpha}}{(1+n)^{n+1}} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

En se rappelant que $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{e}$, il vient aussitôt :

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le 1}|f_n(x)| = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha>1, \\ e^{-1} & \text{si } \alpha=1, \\ 0 & \text{si } \alpha<1. \end{cases}$$

Il en résulte que la convergence n'est uniforme sur $[0,1]$ que pour les valeurs strictement inférieures à 1 du paramètre α.

3. 1) Si $x=0$ ou $x=\frac{\pi}{2}$ on a clairement $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$. Sinon, sachant que $0<\cos x = a < 1$ il vient :

$$0 \le \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n\cos^n x \sin x \le \lim_{n\to\infty} na^n = 0.$$

Ainsi, la limite f est la fonction nulle.

3) On a :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^n \sin x dx = \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 u^n du$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \ne 0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx.$$

Sujet 12

1. Montrer que si un sous-ensemble A d'un espace métrique (E,d) est précompact et connexe il en est de même de son adhérence $\overline{A}$.

2. On considère dans l'espace métrique usuel $(\mathbb{R},|.|)$ les deux assertions suivantes :

i) $\forall \underset{a<b}{a,b \in \mathbb{R}} \quad]a,b[\cap \mathbb{Q} \neq \phi.$

ii) Tout nombre réel est limite d'une suite rationnelle.

Montrer qu'elles sont équivalentes.

3. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des deux suites de fonctions réelles suivantes:

$$f_n(x)=\begin{cases}(n+2)x & \text{si} \quad x\in\left[0,\dfrac{1}{2+n}\right],\\[2mm] 2-(n+2)x & \text{si} \quad x\in\left[\dfrac{1}{2+n},\dfrac{2}{2+n}\right],\\[2mm] 0 & \text{si} \quad x\in\left[\dfrac{2}{2+n},1\right].\end{cases}$$

$$g_n(x)=\begin{cases}2-\dfrac{x}{n} & \text{si} \quad x\in[-2,0],\\[2mm] 2+\dfrac{x}{n^2} & \text{si} \quad x\in[0,3].\end{cases}$$

Solution

1. A étant précompact il existe pour tout $\varepsilon>0$ un recouvrement fini $(S_i)_{1\le i\le p}$ formé de parties S_i de diamètres ne dépassant pas ε. Comme $A\subset\overline{A}$ on peut écrire :

$$\overline{A} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{p} S_i} \subset \bigcup_{i=1}^{p} \overline{S_i}.$$

Or S_i et $\overline{S_i}$ sont de diamètres égaux, donc la famille finie $\left(\overline{S_i}\right)_{1\leq i\leq p}$ constitue un recouvrement fini de $\overline{A}$, le diamètre de chacun de ses éléments ne dépassant pas ε. Ainsi, $\overline{A}$ est précompacte.

Traitons la connexité de $\overline{A}$. On procède par l'absurde. Supposons que A soit connexe et que $\overline{A}$ ne l'est pas. Il existe par définition deux ouverts C et D de E tels que :

$$\begin{cases} \overline{A} \subset C \cup D, & (1) \\ \overline{A} \cap C \cap D, & (2) \\ \overline{A} \cap C \neq \phi, & (3) \\ \overline{A} \cap D \neq \phi. & (4) \end{cases}$$

Il en ressort que A vérifie les contraintes (1) et (2). De plus, les contraintes (3) et (4) montrent respectivement que les ouverts C et D contiennent des points adhérents à A. Donc, ils coupent ce dernier. Il en découle que A n'est pas connexe. Absurde !

2. (i) $\Rightarrow$ (ii)

Soit d un réel quelconque. On écrit par hypothèse :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left]d - \frac{1}{n}, d + \frac{1}{n}\right[\cap \mathbb{Q} \neq \phi.$$

Pour tout entier naturel non nul n on prend un élément x_n de $\left]d - \frac{1}{n}, d + \frac{1}{n}\right[\cap \mathbb{Q}$. On construit ainsi une suite rationnelle (x_n) satisfaisant à :

$$0 < |d - x_n| < \frac{1}{n}.$$

Le théorème des gendarmes permet de déduire que (x_n) converge vers d.

Remarque :

On peut explicitement exhiber une suite (x_n) (il y en a en fait une infinité). En effet, si d est rationnel, toute suite (x_n) de la forme $x_n = d + y_n$ avec (y_n) rationnelle convergeant vers 0 convient (prendre par exemple $x_n = d + \frac{1}{n}$; $x_n = d + \frac{n}{n^2+1}$ … etc.)

Si d est irrationnel toute suite (x_n) de la forme $x_n = \frac{[nd]}{n} + y_n$ avec (y_n) rationnelle convergeant vers 0 convient (prendre par exemple $x_n = \frac{[nd]}{n}$, $x_n = \frac{[nd]}{n} + \frac{1}{n^2}$, …etc.)

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et c un réel de $]a,b[$. Il existe par hypothèse une suite rationnelle (x_n) convergeant vers c.

On écrit donc :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}:\ n \geq n_0\ \Rightarrow\ |x_n - c| \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour $\varepsilon_0 = \min(c-a, b-c)$ on a :

$$\exists n_0(\varepsilon_0) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}:\ n \geq n_0\ \Rightarrow\ |x_n - c| < \min(c-a, b-c).$$

Plus précisément :

$$n \geq n_0\ \Rightarrow\ c - \min(c-a, b-c) < x_n < c + \min(c-a, b-c).$$

D'où :

$$\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0\ \Rightarrow\ a < x_n < b.$$

Ainsi, $]a,b[$ coupe $\mathbb{Q}$.

Remarque : Vous pouvez vous suffire de $c = \frac{a+b}{2}$ et $\varepsilon_0 = \frac{b-a}{2}$.

3. On remarque que pour tout x de $[0,1]$ on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Donc, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

D'autre part, on remarque que :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le x\le 1} |f_n(x)-0| = \lim_{n\to\infty} \sup_{0\le x\le 1} |f_n(x)| = 1.$$

Donc, cette suite ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

De même, on a :

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{x}{n}\right) = 2 & si \quad x\in[-2,0], \\ \lim_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{x}{n^2}\right) = 2 & si \quad x\in[0,3]. \end{cases}$$

Ainsi, (g_n) converge simplement sur $[-2,3]$ vers la fonction constante 2. Par ailleurs, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{-2\le x\le 3} |g_n(x)-2| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Donc, (g_n) converge uniformément sur $[-2,3]$ vers sa limite 2.

Sujet 13

1. 1) Montrer que si d est une distance sur un ensemble E alors l'application $d' = Log\left(\dfrac{1+2d}{1+d}\right)$ en est une autre.

1) Montrer que d est plus fine que d'.

2) En prenant $E = \mathbb{R}^2$ et $d = d_\infty$ représenter dans un repère orthonormé la boule unité fermée $B_{f'}(0,1)$ dans l'espace $(\mathbb{R}^2, d')$.

2. Etant donné un sous-ensemble non vide A d'un espace métrique (E,d) on pose pour tout x de E : $d(x,A) = \inf\limits_{a \in A} d(x,a)$.

1) Montrer que $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.

2) En déduire que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est uniformément continue sur E.

3. Soit A un sous-ensemble non vide d'un espace métrique (E,d). Montrer qu'un point a de E est adhérent à A si, et seulement s'il existe dans A une suite $(x_n)_n$ convergeant vers a.

4. Utiliser la suite (f_n) donnée par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}, \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

pour montrer que l'espace $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la distance d_1 n'est pas de Fréchet.

Solution

1. 1) Les deux conditions d'identité et de symétrie sont évidentes.

Concernant l'inégalité du triangle on écrit :

$$\frac{1+2d(x,y)}{1+d(x,y)}=2-\frac{1}{1+d(x,y)}\leq 2-\frac{1}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$\leq 2-\frac{1}{1+d(x,z)+d(z,y)+d(x,z)d(z,y)}$$

$$\leq \frac{1+2d(x,z)+2d(z,y)+2d(x,z)d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)+d(x,z)d(z,y)}$$

$$\leq \left(\frac{1+2d(x,z)}{1+d(x,z)}\right)\left(\frac{1+2d(z,y)}{1+d(z,y)}\right).$$

La fonction logarithme étant croissante, l'inégalité est achevée.

2) On a :

$$d'(x,y)=Log\left(\frac{1+2d(x,y)}{1+d(x,y)}\right)$$

$$=Log\left(1+\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\right)\leq\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leq d(x,y).$$

Donc, d est plus fine que d'.

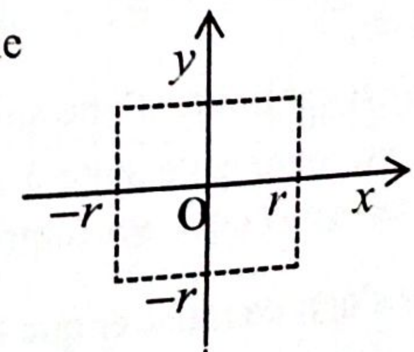
3) On a par définition :

$$B_f^{d'}(0,1)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, Log\left(\frac{1+2d(x,y)}{1+d(x,y)}\leq 1\right)\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \frac{1+2d(x,y)}{1+d(x,y)}\leq e\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, d(x,y)\leq 1+\frac{1}{e-2}\right\}=B_f^{d_\infty}\left(0,1+\frac{1}{e-2}\right).$$

En posant $r=1+\frac{1}{e-2}$ on tient notre boule comme ci contre :



2. 1) Pour tous x,y de E et a de A on a :

$$d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a);$$
$$d(y,a) \leq d(x,y) + d(x,a).$$

D'où :
$$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A),$$
$$d(y,A) \leq d(x,y) + d(x,A).$$

Par suite :
$$\max\left\{d(x,A) - d(y,A), -\left(d(x,A) - d(y,A)\right)\right\} \leq d(x,y),$$

autrement dit :
$$\left|d(x,A) - d(y,A)\right| \leq d(x,y).$$

2) On déduit de ce qui précède que l'application en question est 1-lipschitzienne sur E. Elle y est donc uniformément continue.

3. 1) On a à montrer que:
$$(a \in \overline{A}) \iff \left(\exists (x_n) \subset A \,/\, a = \lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

$\Rightarrow$)

Si a est adhérent à A on écrit par définition :
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; B(a,\varepsilon) \cap A \neq \phi.$$

D'où :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; B\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \phi.$$

On déduit qu'il existe une suite (x_n) dans A telle que $d(a,x_n) \leq \frac{1}{n}$.

Le théorème des gendarmes permet de conclure que la suite (x_n) de A converge vers a.

($\Leftarrow$

Si a est limite d'une suite (x_n) de A chacun de ses voisinages contient toute cette suite à partir d'un certain rang. Autrement dit, tous ces voisinages rencontrent A. C'est dire que a est adhérent A.

4. Il s'agit de montrer que la suite suggérée est de Cauchy non convergente dans $\left(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),d_1\right)$. Etant donnés deux entiers naturels p et q tels que $p>q>0$ on calcule alors :

$$\lim_{p,q\to\infty} d_1(f_p,f_q)=\lim_{p,q\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right|dx$$

$$=\lim_{p,q\to\infty}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to\infty}\frac{p}{p+1}\frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}-\lim_{q\to\infty}\frac{1}{2}\frac{q}{q+1}\frac{1}{2^{\frac{1}{q}}}=0.$$

Ainsi, (f_n) est de Cauchy. Par ailleurs, cette suite converge vers la fonction f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ si } 0\le x\le\frac{1}{2},\\ 1 \text{ si } \frac{1}{2}<x\le 1.\end{cases}$$

En effet, on a:

$$\lim_{n\to\infty}d_1(f_n,f)=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right|dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1-\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}dx\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}=0.$$

La limite étant unique et f n'étant pas continue en $\frac{1}{2}$ on conclut que (f_n) ne converge pas dans $\left(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),d_1\right)$. Donc, celui-ci n'est pas de Fréchet.

Sujet 14

1. 1) Montrer qu'une suite d'un espace muni d'une distance discrète est de Cauchy si, et seulement si, elle est stationnaire.

2) Etant donnée une partie non vide A d'un un espace métrique (E,d), on note $B=\{x\in E / d(x,A)=0\}$. Montrer que $B=\overline{A}$.

2. 1) Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(*) Pour tout $\varepsilon>0$ l'espace (E,d) admet un recouvrement par une famille finie de parties $(A_i)_{1\leq i\leq p}$ de E dont les diamètres ne dépassent pas ε.

(**) Pour tout $\varepsilon>0$ il existe une partie finie F_ε de E telle que :

$$\forall x\in E\ d(x,F_\varepsilon)<\varepsilon.$$

2) Montrer que dans l'espace usuel $(\mathbb{R},|.|)$ tout inervalle $[a,b]$ est précompact.

3. 1) Soient A et B deux sous-ensembles compacts disjoints d'un espace métrique (E,d). Montrer que $d(A,B)>0$.

2) Démontrer que tout espace métrique compact et bien enchainé (E,d) est connexe.

4. On munit l'espace $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la distance de la convergence uniforme d_∞ et on y considère les deux sous-ensembles :

M_k des fonctions $k-$lipschitzienne,

D_k des fonctions dérivables f astreintes à la condition :

$$|f'(x)|\leq k,\ \forall x\in[a,b].$$

1) Montrer que M_k est fermé dans (E,d_∞).

2) En déduire que (M_k,d_∞) est complet.

3) Vérifier que D_k est inclus dans M_k.

4) Soit f une fonction de M_k. Pour tout entier naturel non nul n et tout x de $[a,b]$ on pose $f_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt$.

i) Montrer que f_n est dérivable sur $[a,b]$ puis en déduire sa dérivée.

ii) Montrer que f_n est dans D_k.

5) Montrer que D_k est dense dans M_k.

Solution

1. 1) La condition est nécessaire. En effet, si (x_n) est une suite de Cauchy d'un espace métrique (E,d) dont la dsitance est discrète, on écrit par définition :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall p,q \in \mathbb{N} :$$

$$p > q \geq n_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

En particulier, ilexiste pour tout ε pris dans $]0,1]$ un rang m_0 de telle sorte que:

$$\forall p,q \in \mathbb{N} : \ p > q \geq m_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) = 0;$$

c'est-à-dire:

$$p > q \geq m_0 \Rightarrow x_p = x_q = 0.$$

Ainsi, (x_n) est stationnaire.

La condition suffisante est évidente, puisque vraie dans tout espace métrique.

2) Soit x_0 un point de B. On a :

$$d(x_0, A) = \inf_{y \in A} d(x_0, y) = 0.$$

D'après la propriété caractéristique de la borne inférieure, on affirme que :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists y_\varepsilon \in A \, / \; d(x_0, y_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Il en résulte aussitôt que :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; B(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \phi,$$

ce qui signifie que x_0 est dans $\overline{A}$. Ainsi, $B \subset \overline{A}$.

Inversement, si x_0 est dans $\overline{A}$ on écrit par définition :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; B(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \phi,$$

autremet dit :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists y_\varepsilon \in A \, / \; 0 \le d(x_0, y_\varepsilon) < \varepsilon.$$

D'où , $\inf\limits_{y \in A} d(x_0, y) = 0$. Par suite, x_0 est dans B. Ainsi, $\overline{A} \subset B$.

2. 1) Supposons (*) réalisée. Soit, pour tout $\varepsilon > 0$, un recouvrement fini $(A_i)_{1 \le i \le p}$ de E par des parties dont les diamètres $\delta(A_i)$ ne dépassent pas ε. L'ensemble $F_\varepsilon = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ où a_i est pris dans A_i, réalise (**). En effet, tout point x de E étant dans un certain A_{i_0}, on obtient aussitôt :

$$d(x, F_\varepsilon) = \inf_{y \in F_\varepsilon} d(x, y) \le \inf_{y \in A_{i_0}} d(x, y) \le \delta(A_{i_0}) \le \varepsilon.$$

Supposons (**) réalisée pour $\frac{\varepsilon}{2}$. En Conservant la notation $F_{\frac{\varepsilon}{2}} = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ on tire aussitôt que $E = F_{\frac{\varepsilon}{2}} \cup (E \setminus F_{\frac{\varepsilon}{2}})$. De plus, on a :

$$\forall x, y \in E \setminus F_{\frac{\varepsilon}{2}} \;\; \forall z \in F_{\frac{\varepsilon}{2}} \;\;\; d(x, y) \le d(x, z) + d(x, z).$$

D'où :

$$\forall x, y \in E \setminus F_{\frac{\varepsilon}{2}} \;\; d(x, y) \le d(x, F) + d(x, F) \le \varepsilon.$$

Par suite :

$$\max_{x, y \in E \setminus F} d(x, y) = \delta\left(E \setminus F_{\frac{\varepsilon}{2}} \right) \le \varepsilon.$$

Ainsi, si a_{p+1} est un point de $E \setminus F_{\frac{\varepsilon}{2}}$ on affirme que $E = \bigcup_{i=1}^{p+1} B(a_i, \varepsilon)$.

2) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe, d'après le lemme d'Archimède, un entier naturel non nul n_ε tel que $n_\varepsilon > 2\dfrac{b-a}{\varepsilon}$. En posant :

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n_\varepsilon};\ k = 0,1,\ldots,n_\varepsilon,$$

la famille $\left(\left[x_k - \dfrac{b-a}{n_\varepsilon}, x_k + \dfrac{b-a}{n_\varepsilon}\right]\right)_{0 \le k \le n_\varepsilon}$ constitue un recouvrement fini de $[a,b]$ par des parties dont le diamètre ne dépasse pas ε. Ainsi, $[a,b]$ est précompact.

3. 1) La fonction $f : A \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = d(x,B)$ est continue et bornée. De plus, elle atteint sa borne inférieure en un point x_0 de A. Il vient:

$$f(x_0) = d(x_0, B) = \inf_{x \in A} d(x,B) = d(A,B).$$

Comme x_0 n'appartient pas àl'ensemble fermé B on déduit que:

$$d(A,B) = d(x_0,B) > 0.$$

2) On procède par l'absurde.

Supposons que l'espace métrique compact et bien enchaîné (E,d) ne soit pas connexe. Il admet alors une partition constituée de deux fermés non vides R et S. Ces deux fermés sont en fait compacts disjoints. Il en résulte, à la lumière de la première question qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ pour lequel on a:

$$d(a,b) \ge d(R,S) > 0,\quad \forall a \in R, \forall b \in S.$$

On conclut qu'il n'existe pas de chaîne finie de pas strictement inférieur à $d(R,S)$ reliant un point a de R à un point b de S. Cela traduit que E n'est pas bien enchaîné. Absurde!

4. 1) Il suffit de montrer que $\overline{M_k} \subseteq M_k$. Soit f un élément de $\overline{M_k}$.

Il existe une suite $(f_n)_n$ dans M_k convergeant vers f. On écrit alors:

$$\varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : \ n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

D'autre part, pour tous x et y de $[a,b]$ on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

Il en résulte que :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |f(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall x, y \in [a,b], \forall n \geq n_0;$$

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x - y|, \ \forall x, y \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par suite :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| + \varepsilon, \ \forall x; y \in [a,b], \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq n_0.$$

Autrement dit :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \ \forall x, y \in [a,b].$$

Ainsi, f est $k-$lipschitzienne sur $[a,b]$. Elle appartient donc à M_k. C'est ce qu'on veut !

2) Il l'est comme unfermé de l'espace complet (E, d_∞).

3) C'est une conséquence immédiate du théorème des accroissements finis. En effet, si f est un élément de D_k et x, y deux points de $[a,b]$ alors :

$$\exists c_{xy} \in]x, y[\, / \, f(y) - f(x) = (y - x) f'(c_{xy}).$$

D'où

$$|f(y) - f(x)| = |y - x||f'(c_{xy})| \leq k|y - x|;$$

ce qui assure l'inclu sion indiquée.

4) i) Soit x_0 un point de $[a,b]$. On écrit :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)}{h} = n \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_{x_0+h}^{x_0+h+\frac{1}{n}} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}} f(t)dt}{h}.$$

Un recours à la formule de Chasles[15] permet d'avoir :

$$\int_{x_0+h}^{x_0+h+\frac{1}{n}} f(t)dt = \int_{x_0+h}^{x_0+\frac{1}{n}} f(t)dt + \int_{x_0+\frac{1}{n}}^{x_0+h+\frac{1}{n}} f(t)dt$$

$$\int_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt + \int_{x_0+h}^{x_0+\frac{1}{n}} f(t)dt$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h} = n\lim_{h\to 0}\frac{\int_{x_0+\frac{1}{n}}^{x_0+h+\frac{1}{n}} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h}.$$

Une double utilisation de la deuxième formule de la moyenne permet d'affirmerque :

$$\exists c_{(h,n)} \in \left]x_0+\frac{1}{n}, x_0+h+\frac{1}{n}\right[/ \int_{x_0+\frac{1}{n}}^{x_0+h+\frac{1}{n}} f(t)dt = h\,f(c_{(h,n)});$$

$$\exists d_h \in \left]x_0, x_0+h\right[/ \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = h\,f(d_{(h)}).$$

Il en résulte que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h} = n\lim_{h\to 0}(f(c_{(h,n)})-f(d_{(h)}))$$

$$= n\left(f(\lim_{h\to 0} c_{(h,n)}) - f(\lim_{h\to 0} d_{(h)})\right) = n\left(f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right).$$

Ainsi, f_n est dérivable de dérivée :

14. Michel Chasles (15/11/1793-18/12/1880) : Mathématicien Français. Il est reconnu pour ses travaux en géométrie.

$$f_n'(x_0) = n\left(f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0)\right).$$

ii) C'est bien la cas, car pour tout x de $[a,b]$ on a :

$$|f_n'(x)| = n\left|\left(f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0)\right)\right| \le nk\left|\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - x_0\right| \le k.$$

5) D_k est dense dans M_k si toute fonction de ce dernier est limite d'une suite de D_k. Soit f une fonction donnée de M_k. La suite $(f_n)_n$ définie ci-dessus convient. En effet, on a:

$$d_\infty(f_n, f) = \sup_{x\in[a,b]}\left| n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt - f(x)\right| = n\sup_{x\in[a,b]}\left|\left(\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t) - f(x)\right)dt\right|$$

$$\le n\sup_{x\in[a,b]}\int_x^{x+\frac{1}{n}} |f(t) - f(x)|dt \le nk\sup_{x\in[a,b]}\int_x^{x+\frac{1}{n}} (t-x)dt \le k\frac{1}{2n}.$$

D'où :

$$\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0.$$

Etal Normé

Sujet 1

1. 1) Tout espace métrique est-il un espace normé ? Justifier.
   2) Tout espace normé est-il un espace métrique ? Justifier.
   3) L'espace normé usuel $(\mathbb{R},|.|)$ est-il de Banach ? compact ? localement compact ? connexe ? Connexe par arcs ? Justifier.

2. 1) Soit $E=\left\{f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) / f(0)=0\right\}$. Pour tout f de E on pose :

$$N_1(f)=\sup_{0\leq x\leq 1}|f(x)+f'(x)|;\quad N_2(f)=\sup_{0\leq x\leq 1}|f(x)|+\sup_{0\leq x\leq 1}|f'(x)|.$$

Montrer que N_1 et N_2 sont des normes.

2) On munit l'espace vectoriel $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})=E$ des deux normes :

$$M(f)=\sqrt{\int_a^b (f(x))^2\,dx};\quad N(f)=\sqrt{\int_a^b (f(x))^2\,dx}+\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

i) Montrer que M et N sont équivalentes.
ii) En déduire que (E,N) n'est pas de Banach.

3. On considère dans l'espace normé $E=\left(\mathscr{C}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right],\mathbb{R}\right),\|\cdot\|_1\right)$ la suite (f_n) définie par :

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ 0\leq x\leq \frac{1}{2}.$$

1) Montrer que $(f_n)_n$ est de Cauchy.
2) Montrer que $(f_n)_n$ est convergente vers une limite à déterminer.
3) Peut-on conclure que E est de Banach ?
4) En déduire que E n'est pas de dimension finie.

4. On munit l'espace $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$ de sa norme fondamentale $\|\cdot\|_\infty$ et on considère le sous-espace Z des fonctions nulles en zéro.

1) Montrer que Z est de Banach.
2) Z est-il connexe par arcs ? connexe ? Justifier.
3) Z est-il connexe ? Justifier

Solution

1. 1) Oui. A toute norme $\|\cdot\|$ correspond une distance d définie par

$$d(x,y)=\|x-y\|.$$

2) Non. La distance discrète ne correspond à aucune norme, faute notamment de l'absence de la propriété d'homothétie.

3) $(\mathbb{R},|\cdot|)$ est, en tant qu'espace métrique complet, localement compact, connexe et connexe par arcs, mais pas compact. Il garde ses propriétés en tant qu'espace normé. (Revisitez les détails.)

2. 1) Les trois conditions d'une norme sont dans leur ensemble immédiates. Seule, peut-être, la condition d'identité pour N_1 mérite qu'on s'y arrête. Ainsi, on a :

$$\begin{cases} N_1(f)=0 \\ f(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sup\limits_{0\le x\le 1}|f'(x)+f(x)|=0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)+f(x)=0;\ \forall x\in[0,1] \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f\equiv 0 \ \text{ ou } \ f(x)=Ke^{-x};\ K\in\mathbb{R}_+^* \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ f\equiv 0.$$

2) i) Pour tout f de E on a clairement $M(f)\le N(f)$. D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'avoir :

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \le \sqrt{\int_a^b dx}\ \sqrt{\int_a^b (f(x))^2\,dx} \le \sqrt{b-a}\ M(f).$$

D'où :

$$M(f) \le N(f) \le \left(1+\sqrt{b-a}\right)M(f);$$

ce qui signifie que M et N sont équivalentes.

ii) (E,M) n'étant pas de Banach, (E,N) ne peut pas l'être à son tour par effet de l'équivalence des normes en présence.

3. 1) Pour tous p et q de $\mathbb{N}^*$ tels que $p>q$ on a :

$$\|f_p - f_q\|_1 = \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right) Arc\sin x \Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\frac{\pi}{6} < \frac{1}{q} < \varepsilon.$$

Ainsi, il suffit de prendre le rang $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ dans la définition (que vous êtes sensés connaître !)

2) On a :

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - 0\|_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{6}\frac{1}{n} = 0.$$

Donc, $\lim_{n\to\infty} f_n = 0.$

3) Non, cela nécessite l'examen de toutes les suites de Cauchy de E.

4) On sait que $\left(E,\|\cdot\|_1\right)$ n'est pas complet. Cela suffit pour décréter que sa dimension est infinie.

4. 1) Si (f_n) est une suite de Cauchy de Z elle le reste dans le Banach $\left(\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty\right)$. On déduit qu'elle y converge vers une limite f. On écrit par définition :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \ \Rightarrow \ \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

D'où :

$$n \geq n_0 \ \Rightarrow |f(0)| = |f(0) - f_n(0)| \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Il en résulte que $f(0) = 0$, ce qui assure f est dans Z et donc celui-ci est de Banach.

2) Oui, car c'est le cas de tout sous-espace vectoriel (donc convexe).

3) Oui, car tout ensemble connexe par arcs est connexe.

Sujet 2

1. Soient l'espace $E=\left\{f\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})\,/\,f(0)=0\right\}$ et N l'application définie sur E par $N(f)=\|5f'+4f\|_\infty$.

1) Montrer que (E,N) est un espace normé.

2) Pour tout entier naturel n et tout x de $[0,1]$ on pose $f_n(x)=x^n$. Calculer $N(f_n)$.

3) Montrer qu'il existe un réel $\alpha>0$ tel que $N(f)\le\alpha\|f\|_\infty$.

4) Les normes $\|.\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

2. Soit (f_n) la suite donnée dans l'espace $E=\left(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R});\|.\|_\infty\right)$ par $f_n(t)=\min\left(n,\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

1) Montrer que (f_n) n'est pas de Cauchy.

2) Montrer que E est de Banach.

3. Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Montrer que l'injection canoni que $i:L^2([a,b])\to L^1([a,b])$ donnée par $i(f)=f$ est linéaire continue, puis calculer sa norme.

4. 1) Démontrer que s'il existe dans un espace normé $(E,\|.\|)$ un sous-ensemble compact K dont l'intérieur $\overset{\circ}{K}$ est non vide alors cet espace est nécessairement de dimension finie.

Solution

1. 1) On a à montrer que N est une norme sur E. Pour s'en acquitter, on remarque que les conditions d'homogénéité positive et d'inégalité triangulaire sont évidentes (découlant immédiatement de celles de la norme $\|\cdot\|_\infty$.) La condition d'identité résulte de la résolution du problème différentiel :

$$\begin{cases} 5f'+4f=0, \\ f(0)=0. \end{cases}$$

Celui-ci admet trivialemnt la solution identiquement nulle . Elle est unique, car les autres solutions de l'équation $5f'+4f=0$ sont de la forme $f(x)=Ke^{-\frac{4}{5}}$ (avec K dans $\mathbb{R}_+^*$) et donc ne s'annulant pas. Ainsi, N est une norme sur E.

2) On a aisément :

$$N(f_n)=\sup_{0\le x\le 1}\left|n5x^{n-1}+4x^n\right|=5n+4.$$

3) On remarque que :

$$f(x)=e^{-\frac{4}{5}x}\left(\int_0^x\left(f(t)e^{\frac{4}{5}t}\right)'dt\right)=\frac{1}{5}e^{-\frac{4}{5}x}\int_0^x\left(5f'(t)+4f(t)\right)e^{\frac{4}{5}t}dt.$$

D'où :

$$\begin{aligned}|f(x)|&=\left|\frac{1}{5}e^{-\frac{4}{5}x}\int_0^x\left(5f'(t)+4f(t)\right)e^{\frac{4}{5}t}dt\right|\\ &\le\frac{1}{5}\left|e^{-\frac{4}{5}x}\right|\left|\int_0^x\right|\left(5f'(t)+4f(t)\right)e^{\frac{4}{5}t}\left|dt\right|\le\frac{1}{5}e^{\frac{4}{5}}N(f).\end{aligned}$$

Par suite, $\|f\|_\infty\le\frac{1}{5}e^{\frac{4}{5}}N(f)$. Il suffit de prendre $\alpha=\frac{1}{5}e^{\frac{4}{5}}$.

4) En considérant la suite (f_n) ci-dessus on constate immédiatement que :

$$\frac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty}=\frac{5n+4}{\sup\limits_{0\le x\le 1}|x_n|}=\frac{5n+4}{1}=5n+4.$$

Ce rapport tendant vers ∞ avec n, on conclut que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes.

2. 1) f_n peut être réécrite sous la forme plus explicite :

$$f_n(t) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \begin{cases} n & ; \ 0 \le t \le \frac{1}{n^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{t}} & ; \ \frac{1}{n^2} \le t \le 1. \end{cases}$$

$(f_n)_n$ n'est pas de Cauchy dans E si elle vérifie :

$\exists \varepsilon_0 > 0 / \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \ \exists p_{n_0}, q_{n_0} \in \mathbb{N} : \ p_{n_0} > q_{n_0} \ge n_0$ et $\left\| f_{p_{n_0}} - f_{q_{n_0}} \right\| > \varepsilon_0$.

Étant donnés deux indices p et q tels que $q < p$ on a :

$$\left| f_p(t) - f_q(t) \right| = \begin{cases} p - q & \text{si } t \le \frac{1}{p^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{t}} - q & \text{si } \frac{1}{p^2} \le t \le \frac{1}{q^2}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{q^2} \le t \le 1. \end{cases}$$

D'où :

$$\left\| f_p - f_q \right\|_\infty = \sup_{0 \le t \le 1} \left| f_p(t) - f_q(t) \right| = p - q.$$

Si l'on prend pour tout rang non nul n_0 les indices $p_{n_0} = \alpha n_0$ et $q_{n_0} = \beta n_0$ où α et β sont deux entiers naturels tels que $\alpha > \beta$, on obtient :

$$\left\| f_{p_{n_0}} - f_{q_{n_0}} \right\|_\infty = (\alpha - \beta) n_0 \ge \alpha - \beta.$$

Il suffit de prendre ε_0 de l'intervalle $]0, \alpha - \beta[$.

2) Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de E. On écrit par définition:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall p, q \in \mathbb{N} :$

$$p > q \ge n_0 \Rightarrow \left\| f_p - f_q \right\|_\infty = \sup_{0 \le x \le 1} \left| f_p(x) - f_q(x) \right| \le \varepsilon,$$

Autrement dit :

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall p, q \in \mathbb{N}:$$
$$p > q \geq n_0 \Rightarrow \left|f_p(x) - f_q(x)\right| \leq \varepsilon,\; \forall x \in [0,1].$$

Il en résulte que pour tout x de $[0,1]$, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans l'espace complet $(\mathbb{R}, |.|)$. Elle y est donc convergente. Soit $f(x)$ sa limite. Il nous suffit pour conclure de s'assurer que:

i) f est un élément de E,

ii) $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ (relativement à $\|.\|_\infty$).

Pour le premier point, on a à montrer que f est continue sur $[0,1]$. Pour ce faire,on écrit pour tout point x_0 de $[0,1]$:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(I)} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{(II)} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{(III)}\end{aligned}$$

Estimons les quantités (I), (II) et (III). Soit $\varepsilon > 0$. Pour (I) et (III) on déduit de (*) que:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \;\forall n \in \mathbb{N}:\; n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \max((I),(III)) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, f_n étant continue en x_0 on affirme que :

$$\exists \rho_n > 0 \;|x - x_0| \leq \rho_n \;\Rightarrow\; (II) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

En particulier, pour le rang n_0 on obtient:

$$|x - x_0| \leq \rho_{n_0} \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Donc, f est continue en x_0; par suite, sur $[0,1]$.

Concernant la seconde condition on remarque que pour $q \geq n_0$ fixé quelconque dans (*), on obtient:

$$\forall\; p \geq n_0,\; \forall\; x \in [0,1]:\; |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

C'est-à-dire:

$$p \geq n_0 \;\Rightarrow\; \sup_{a \leq x \leq b} |f_p(x) - f(x)| = \|f_p - f\|_\infty \leq \varepsilon;$$

Ainsi, $(f_n)_n$ congerge vers f relativement à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

3. i est bien entendu linéaire :

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \forall f,g\in L^2([a,b]) : i(\alpha f+\beta g)=\alpha f+\beta g=\alpha i(f)+\beta i(g).$

i est continue :

$\forall f\in L^2([a,b])$:

$$\|i(f)\|_{L^1([a,b])}=\|f\|_{L^1([a,b])}=\int_a^b|f(x)|dx\le\sqrt{\int_a^b dx}\ \sqrt{\int_a^b (f(x))^2\,dx}$$

$$\le\sqrt{b-a}\,\|f\|_{L^2([a,b])}.$$

Enfin, de cette continuité on déduit aussitôt que:

(*) $$\|i\|\le\sqrt{b-a}.$$

Pour obtenir l'inégalité inverse il suffit d'exhiber un élément f_0 de la boule unité de $L^2([a,b])$ telle que :

$$\|i(f)\|_{L^1([a,b])}=\sqrt{b-a}.$$

La fonction constante f_0 définie sur $[0,1]$ par $f_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{b-a}}$ convient. En effet, on a :

$$\|f_0\|_{L^2([a,b])}=\sqrt{\int_a^b\frac{1}{b-a}dx}=1,$$

(**)
$$\|i(f_0)\|_{L^1[a,b]}=\|f_0\|_{L^1[a,b]}=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{b-a}}dx=\sqrt{b-a}\le\|i\|.$$

Ainsi, la conjonction de (*) et (**) donne $\|i\|=\sqrt{b-a}$.

4. Supposons que E admet un sous-ensemble compact K dont l'intérieur $\overset{\circ}{K}$ est non vide. Ce dernier renferme alors au moins un point a. Il en ressort que K est voisinage de a. on affirme par définition que :

$$\exists r > 0 / B(a,r) \subset K.$$

Comme on sait que $\overline{B(a,r)} = B_f(a,r)$ et $\overline{K} = K$ il vient encore $B_f(a,r) \subset K$. Ainsi, la compacité de K assure celle de la boule fermée $B_f(a,r)$. De même, la continuité de la translation :

$$T : B_f(a,r) \to B_f(0,r)$$
$$x \mapsto T(x) = x - a,$$

et de l'homothétie :

$$H : B_f(0,r) \to B_f(0,1)$$
$$x \mapsto H(x) = \frac{1}{r}x,$$

assure la continuité de la composée $H \circ T : B_f(a,r) \to B_f(0,1)$, de laquelle résulte la compacité de la boule unité fermée $B_f(0,1)$. Le théorème de F. Riesz[16] confirme que la dimension de E est nécessairement finie.

16. Frédéric Riesz (22/1/1880-28/2/1956) : Mathématicien Hongrois. Il est l'un des fondateurs principaux de l'analyse fonctionnelle. Ses travaux ont d'importantes applications en physique. C'est à travers l'un de ses travaux (1910) que la théorie des opérateurs a pris naissance. En 1918, il a clos l'assise axiomatique de la théorie des espaces de Banach que ce dernier a entamée deux années plutôt.

Sujet 3

1. On munit l'espace vectoriel $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de sa norme fondamentale $\|\cdot\|_\infty$ et on définit l'application $\varphi : E \to E$ par :

$$\varphi(f)(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{4+t^2}\,dt.$$

1) Montrer que :

$$\forall x\in[0,1] \quad Arctgx \leq x.$$

2) Montrer que l'équation $\varphi(f)-f=0$ admet une solution unique dans E.

2. On munit l'espace $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$ de sa normede la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ et on considère l'application $u:\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ définie par :

$$u(f)=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+x^2}f(x)dx.$$

1) Vérifier que est une forme linéaire sur E.
2) Montrer que est uniformément continue sur E.
3) En déduire que le sous-espace $F=\{f\in E / u(f)=0\}$ est fermé.
4) Calculer la norme $\|u\|$.
5) Montrer quele sous-espace H des fonctions impaires est de Banach.

3. On définit sur l'espace $E=L^4([0,1])$ l'application réelle ψ par

$$\psi(f)=\int_0^1 f(x)dx.$$

1) Calculer sa norme.
2) Montrer que E n'est pas préhilbertien.

Solution

1. 1) Conséquence directe du théorème des accroissements finis.

2) En reformulant l'équation posée sous la forme $\varphi(f)=f$ on constante que le problème consiste à prouver que φ admet un fixe unique. Pour voir que c'est bien le cas on s'appuie sur le théorème du point fixe de Banach-Picard. Pour être dans son cadre, et sachant que $\left(E,\|\cdot\|_{\infty}\right)$ est de Banach, il nous suffit de montrer que φ est contractante. Pour cela, on calcule :

$$\begin{aligned}\|\varphi(f)-\varphi(g)\| &= \sup_{0\le x\le 1}\|\varphi(f)(x)-\varphi(g)(x)\| = \sup_{0\le x\le 1}\left|\int_0^x \frac{f(t)-g(t)}{4+t^2}dt\right| \\ &\le \sup_{0\le x\le 1}\int_0^x \frac{|f(t)-g(t)|}{4+t^2}dt \le \|f-g\|\int_0^1 \frac{dt}{4+t^2} \\ &\le \frac{1}{4}\|f-g\|\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} \le \frac{1}{4}\|f-g\|\, Arctg\left(\frac{t}{2}\right)\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}\|f-g\|\, Arctg\frac{1}{2} \le \frac{1}{8}\|f-g\|.\end{aligned}$$

C'est ce qu'on veut.

2. 1) u est une forme linéaire sur $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$ car elle arrive dans $\mathbb{R}$ et puise sa linéairité de celle de l'intégrale de Riemann[17].

2) On a :

17. Bernhard Riemann (17/09/1826-20/07/1866) : Mathématicien Allemand. Source intarissable sur le plan théorique, il a, entre autres, marqué de son empreinte l'analyse et la géométrie différentielles. Son nom est attaché à plusieurs concepts importants :l'intégrale de Riemann, les conditions de Cauchy-Riemann, les surfaces de Riemann, ... etc.

$$\forall f \in \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R}) \quad |u(f)| = \left| \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} f(x)dx \right| \leq \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} |f(x)| dx$$

$$\leq \|f\|_\infty \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \|f\|_\infty$$

Donc, u est $\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$- lipschitzienne. On conclut conséquemment qu'elle est uniformément continue sur $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$.

3) On a :

$$F = \{f \in E / u(f) = 0\} = Keru = u^{-1}(\{0\}).$$

Il est fermé en tant que noyau d'une forme linéaire continue.

4) De la question (2) on tire aussitôt que $\|u\| \leq 2 - \frac{\pi}{2}$. D'autre part, on remarqu que pour $f_0 \equiv 1$ on a :

$$|u(f_0)| = \left| \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} dx \right| = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = 2 - \frac{\pi}{2} \leq \|u\|.$$

La conjonction des deux inégalités assure le résultat escompté :

$$\|u\| = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

5) L'espace $\left(\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ étant de Banach, il nous suffit de prouver que H est fermé. Autrement dit, on montre que $\overline{H} \subseteq H$. Si f est un élément de $\overline{H}$ on sait qu'il existe une suite (f_n) dans H convergenat vers f. Ce qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon;$$

ou encore :

(*)

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \ \forall x \in [-1,1].$$

D'autre part, pour tout indice naturel $n \geq n_0$ et tout x de $[-1,1]$ on a :

$$\begin{aligned}|f(x)+f(-x)| &= |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(-x)+f_n(-x)+f(-x)| \\ &\leq \underbrace{|f_n(x)-f(x)|}_{(I)}+\underbrace{|f_n(x)+f_n(-x)|}_{(II)}+\underbrace{|f_n(-x)-f(-x)|}_{(III)}.\end{aligned}$$

En prenant (*) en compte et en remarquant que f_n est impaire il vient immédiatement :

$$(I)\leq\frac{\varepsilon}{2};\quad (III)\leq\frac{\varepsilon}{2};\quad (II)=0.$$

D'où :

$$\forall\varepsilon>0\ |f(x)+f(-x)|\leq\varepsilon,$$

ce qui signifie que $f(x)=-f(-x)$. Ainsi, f est impaire. Elle est donc dans H. Cela achève l'inclusion voulue et consolide l'affirmation que $\left(H,\|\cdot\|_\infty\right)$ est de Banach.

3. 1) On écrit en s'adossant à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\psi(f)|=\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\leq\int_0^1|f(x)|dx\leq\sqrt{\int_0^1(f(x))^2dx}$$

$$\leq\sqrt{\sqrt{\int_0^1(f(x))^4dx}}=\sqrt[4]{\int_0^1(f(x))^4dx}=\|f\|_4$$

D'où $\|\psi\|\leq 1$. Par ailleurs, on remarque que l'élément $f_0\equiv 1$ est dans la boule unité fermée de E et vérifie $|\psi(f_0)|=\left|\int_0^1 dx\right|=1\leq\|\psi\|$.

Ainsi, on conclut que $\|\psi\|=1$.

2) Il suffit de vérifier que sa normé ne satisfait pas à l'identité du parallélogramme :

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right).$$

Pour s'en convaincre que c'est bien le cas, on procède en prenant $f(x)=1$ et $g(x)=x$ au calcul suivant :

$$\|f\|_4 = \sqrt[4]{\int_0^1 dx} = 1;$$

$$\|g\|_4 = \sqrt[4]{\int_0^1 x^4 dx} = \sqrt[4]{\frac{1}{5}};$$

$$\|f+g\|_4 = \sqrt[4]{\int_0^1 (1+x)^4 dx} = \sqrt[4]{\frac{31}{5}};$$

$$\|f-g\|_4 = \sqrt[4]{\int_0^1 (1-x)^4 dx} = \sqrt[4]{\frac{1}{5}};$$

$$\|f+g\|_4^2 + \|f-g\|_4^2 = \frac{\sqrt{31}+1}{\sqrt{5}} \neq 2\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2\left(\|f\|_4^2 + \|g\|_4^2\right).$$

Cela clôt la question.

Sujet 4

1. 1) Citer le théorème du graphe fermé.

2) Démontrer-le.

2. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\| = 7|x| + 11|y|$.

1) Montrer que $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$ est de Banach.

2) Montrer que le système algébrique :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{13}\cos x - \dfrac{1}{15}\sin y \\ y = \dfrac{1}{15}\cos x + \dfrac{1}{13}\sin y \end{cases}$$

admet une seule solution dans $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$.

3) Montrer que $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$ n'est pas préhilbertien.

4) Soit $u : (\mathbb{R}^2, \|.\|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ l'application définie par :

$$u(x,y) = 3x + 5y.$$

i) Montrer que u appartient au dual E'.

ii) E' est-il de Banach ?

iii) Calculer la norme $\|u\|$.

3. Soient f et g les deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$. On note $F = [f, g]$ le sous-espace engendré par f et g dans l'espace de Hilbert[18] $E = L^2([0,1])$.

1) Montrer que F est de Hilbert.

---

18. David Hilbert (23/1/1862-14/2/1943) : Mathématicien Allemand. Il est l'un des plus grands mathématiciens du 20èmesiècle. Son œuvre est immense. Ausecond congré international des mathématiques de Paris, le 8 août 1900, il a posé 23 Problèmes qui ont été le moteur de plusieurs recherches tout au long du siècle dernier.

2) Montrer que :

$$\forall A, B \subset E \quad A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}.$$

3) Vérifier que les éléments f et g ne sont pas orthogonaux.

4) Déterminer un système orthonormé (h,k) engendrant le même sous-espace que le système (f,g).

5) Tout élément de E admet-il une projection orthogonale unique sur F ? Justifier.

6) Calculer $I = \int_0^1 e^x thx\, dx$ et $J = \int_0^1 e^{-x} thx\, dx$.

7) Déterminer en fonction de I et J les projections orthogonales sur F des fonctions $u(x) = chx$ et $v(x) = thx$.

Solution

1. 1) Enoncé :

Pour qu'une application u d'un Banach E vers un Banach F soit continue il faut et il suffit que son graphe Γ_u soit fermé.

2) **Preuve**

La condition est évidemment nécessaire, puisque u est continue et F séparé. (C'est une propriété que possède toute fonction continue dont l'espace d'arrivée est séparé).

Montrons que la condition est suffisante. Nous procédons ainsi.

Munissons $E \times F$ de l'une des normes fondamentales définies sur un espace produit. $E \times F$ est alors de Banach pour cette norme (E et F le sont). Comme le graphe:

$$\Gamma_u = \{(x,y) \in E \times F \,/\, y = u(x)\},$$

est fermé dans $E \times F$, il est alors de Banach. D'autre part, nous remarquons que la projection : $\pi_E : (x,y) \mapsto \pi_E(x,y) = x$ est linéaire continue et surjective de $E \times F$ dans E; sa restriction π_{E/Γ_u} à Γ_u est en plus injective. Ainsi, π_{E/Γ_u} est linéaire bijective continue du

Banach Γ_u dans le Banach E. En vertu du théorème de l'application ouverte, l'application inverse $\left(\pi_{E/\Gamma_u}\right)^{-1}$ estcontinue de E dans Γ_u. Or, cette application n'est autre que l'application vectorielle :

$$\left(\pi_{E/\Gamma_u}\right)^{-1} : E \to \Gamma_u$$

$$x \mapsto \left(x, u(x)\right),$$

donc, sa continuité entraîne celle de ses composantes, dont u.

2. 1) C'est bien le cas, $\mathbb{R}^2$ étant de dimension finie.

2) Les solutions du système proposé sont les points fixes de l'application $\varphi : \left(\mathbb{R}^2, \|.\|\right) \to \left(\mathbb{R}^2, \|.\|\right)$ définie par :

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{1}{13}\cos x - \frac{1}{15}\sin y, \frac{1}{15}\cos x + \frac{1}{13}\sin y\right).$$

Comme $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|\right)$ est de Banach, il suffit en vertu du théorème du point fixe, que φ soit contractante pour clore la question. Acquittons-nous de ce calcul. Pour tous (x,y) et (x',y') de $\mathbb{R}^2$ on a:

$$\|\varphi(x,y) - \varphi(x',y')\| =$$

$$= 7\left|\left(\frac{1}{13}\cos x - \frac{1}{15}\sin y\right) - \left(\frac{1}{13}\cos x' - \frac{1}{15}\sin y'\right)\right| +$$

$$+11\left(\frac{1}{15}\cos x + \frac{1}{13}\sin y\right) - \left(\frac{1}{15}\cos x' + \frac{1}{13}\sin y'\right)$$

$$\leq \frac{7}{13}|\cos x - \cos x'| + \frac{7}{15}|\sin y - \sin y'| +$$

$$+\frac{11}{15}|\cos x - \cos x'| + \frac{11}{13}|\sin y - \sin y'|$$

Comme on sait que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \max\left(\left|\cos x - \cos x'\right|, \left|\sin y - \sin y'\right|\right) \leq \left|x - x'\right|;$$

il vient :

$$\left\|\varphi(x,y) - \varphi(x',y')\right\| \leq 7\left(\frac{1}{13} + \frac{11}{105}\right)\left|x - x'\right| + 11\left(\frac{7}{165} + \frac{1}{13}\right)\left|y - y'\right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{13} + \frac{11}{105}\right)\left\|(x,y) - (x',y')\right\| \leq \frac{22}{105}\left\|(x,y) - (x',y')\right\|.$$

La question est achevée.

3) Il suffit que la norme en présence ne satisfait pas l'identité du parallélogramme. Le cas des vecteurs $v = (1,0)$ et $w = (0,1)$ le montre bien :

$$2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right) = 340 \neq \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 648.$$

4) i) u est linéaire :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$u\left(\alpha(x,y) + \beta(x',y')\right) = u\left(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y'\right)$$

$$= 3(\alpha x + \beta x') + 5(\alpha y + \beta y') = \alpha(3x + 5y) + \beta(3x' + 5y')$$

$$= \alpha u(x,y) + \beta u(x',y').$$

u est continue :

$$\left|u(x,y)\right| = \left|3x + 5y\right| \leq 3|x| + 5|y| = 7\frac{3}{7}|x| + 11\frac{5}{11}|y|$$

$$\leq \frac{5}{11}\left(7|x| + 11|y|\right) = \frac{5}{11}\left\|(x,y)\right\|.$$

ii) $E' = \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est de Banach car $\left(\mathbb{R}, |.|\right)$ l'est.

iii) La norme $\|u\|$ étant la borne inférieure des constantes de Lipschitz rendant u continue on affirme aussitôt que :

(*)
$$\|u\| \leq \frac{5}{11}.$$

Par ailleurs, le vecteur $\left(0, \frac{1}{11}\right)$ est de norme $\left\|\left(0, \frac{1}{11}\right)\right\| = 1$. Il est dans la boule unité de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ et vérifie :

(**) $$\left|u\left(0,\frac{1}{11}\right)\right| = \frac{5}{11} \leq \|u\|.$$

La conjonction de (*) et (**) donne $\|u\| = \dfrac{5}{11}$.

3. 1) Il l'est car sa dimension est finie.

2) Soit x un point de l'orthogonal $B^{\perp}$. On écrit par définition :

$$\forall y \in B \ \langle x, y\rangle = 0.$$

Comme $A \subset B$ il vient :

$$\forall y \in A \ \langle x, y\rangle = 0.$$

Donc, x est dans l'orthogonal $A^{\perp}$. D'où l'inclusion.

3) f et g ne sont pas orthogonaux car :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 e^x e^{-x}dx = \int_0^1 dx = 1 \neq 0.$$

4) f et g sont linéairement indépendants. Le procédé d'orthogonalisation de Gram[19]-Schmidt[20] permet d'obtenir un système orthogonal (u, v) engendrant le même sous-espace que (f, g). Il suffira alors deprendre $(h,k) = \left(\dfrac{1}{\|u\|}u, \dfrac{1}{\|v\|}v\right)$. En vertu du dit procédé il suffit de prendre $u = f$ et $v = g - P_{[f]}(g)$; $P_{[f]}$ désignant la

---

19. Jorgen Pedersen Gram (27/6/1850-29/4/1916) : Mathématicien Danois. Il a travaillé sur la théorie des probabilités, l'analyse numérique et la théorie des nombres. Il a beaucoup marqué la théorie des équations intégrales.

20. Erhard Schmidt (13/1/1876-6/12/1959) : Mathématicien Allemand. En 1905 il soutient son Doctorat sous la direction de Hilbert. Son sujet portait sur les équations intégrales. Ce sera son domaine de prédilection. Il fut derrière la création de l'institut des mathématiques appliquées à Berlin.

projection orthogonale sur le sous-espace $[f]$ engendré par f.
Déterminons v. On a:

$$v = g - P_{[f]}(g);$$

$$\langle v, f\rangle = \langle g - P_{[f]}(g), f\rangle = \langle g - \lambda f, f\rangle = 0,$$

$$g - \lambda f, f\rangle = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_0^1 (e^{-x} - \lambda e^x)e^x dx = \int_0^1 (1 - \lambda e^{2x})dx = 1 - \frac{\lambda}{2}(e^2 - 1) = 0$$

D'où $\lambda = \dfrac{2}{e^2-1}$; par suite $v(x) = e^{-x} - \dfrac{2}{e^2-1}e^x$. On trouve enfin :

$$h(x) = \frac{1}{\|f\|}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 e^{2x}dx}}e^x = \frac{1}{\sqrt{\frac{e^2-1}{2}}}e^x;$$

$$k(x) = \frac{1}{\|v\|}v(x) = \frac{e^{-x} - \frac{2}{e^2-1}e^x}{\sqrt{\int_0^1 \left(e^{-x} - \frac{2}{e^2-1}e^x\right)^2 dx}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{e^2-1}{2e^2} - \frac{2}{e^2-1}}}e^{-x} - \frac{2}{(e^2-1)\sqrt{\frac{e^2-1}{2e^2} - \frac{2}{e^2-1}}}e^x.$$

5) Oui. C'est une conséquence immédiate du théorème de projection orthogonale.

6) On a :

$$I = \int_0^1 e^x thx\, dx = \int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}e^x dx = \int_1^e \frac{u^2-1}{u^2+1}du = \int_1^e \left(1 - \frac{2}{u^2+1}\right)du$$

$$= \frac{\pi}{2} + e - 1 - 2Arctge;$$

$$J=\int_0^1 e^{-x}thx\,dx=\int_0^1 \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}e^{-x}dx=\int_1^{\frac{1}{e}}\frac{u^2-1}{1+u^2}du=\int_1^{\frac{1}{e}}\left(1-\frac{2}{1+u^2}\right)du$$
$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{e}-1-2Arctg\frac{1}{e}.$$

7) La fonction u est engendrée par f et g. Elle est donc dans F. Par conséquent, elle est sa propre projection sur F.

Soit φ la projection de v sur F. Elle est définie et déterminée par :

(*) $\quad \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}:\ \varphi=\lambda f+\mu g,$

(**) $\quad \langle v-\varphi,f\rangle=\langle v-\varphi,g\rangle=0.$

Pour déterminer les scalaires λ et μ on calcule :

$$\begin{cases}\langle v-\varphi,f\rangle=0\\ \langle v-\varphi,g\rangle=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int_0^1 (thx-\lambda e^x-\mu e^{-x})e^x dx=0\\ \int_0^1 (thx-\lambda e^x-\mu e^{-x})e^{-x} dx=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}I-\lambda\left(\dfrac{e^2-1}{2}\right)-\mu=0\\ J-\lambda-\mu\left(\dfrac{1-e^{-2}}{2}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2I-\lambda(e^2-1)-2\mu=0\\ 2J-2\lambda-\mu(1-e^{-2})=0\end{cases}$$

De la premièreéquation on tire $\lambda=\dfrac{2I-2\mu}{e^2-1}$. En remplaçant dans la seconde il vient :

$$\mu=\frac{2Je^2-2J-4I}{e^2-6+e^{-2}}$$

D'où $\lambda=\dfrac{2I-4J-2Ie^{-2}}{e^2-6+e^{-2}}$. Ainsi, la projection voulue est :

$$\varphi(x)=\frac{I-2J-Ie^{-2}}{ch2-3}e^x+\frac{Je^2-J-2I}{ch2-3}e^{-x}$$

Sujet 5

1\. 1) Définir une semi-norme et un produit scalaire sur un espace vectoriel E, ainsi qu'un espace préhilbertien.

2) Enoncer l'identité du parallélogramme et l'inégalité de Minkowski[21] dans un espace préhilbertien.

2\. On munit l'espace $\mathbb{R}^2$ de ses deux normes fondamentales $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ puis on pose pour tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$:

$$N_1(x,y) = Max\left(\|(x,y)\|_2, |x-y|\right),$$

$$N_2(x,y) = \sqrt{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}}.$$

1) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$.

2) Représenter graphiquement sur un repère orthonormé la boule unité fermée $B_f(0,1)$ relative à N_1.

3) Montrer que $B_f(0,1)$ est compacte et connexe.

4) Montrer que

(*) $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{1}{4}\|(x,y)\|_2 \leq N_2(x,y) \leq \frac{1}{3}\|(x,y)\|_2 ;$$

(**) $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{1}{2}\|(x,y)\|_1 \leq N_1(x,y) \leq \|(x,y)\|_1 .$$

5) Montrer que $\frac{1}{3}$ est le plus petit réel satisfaisant l'inégalité droite de (*) alors que $\frac{1}{4}$ en est le plus grand satisfaisant l'inégalité gauche.

21\. Hermann Minkowski (22/6/1864-12/1/1909) : Mathématicien allemand. Ses travaux tournent autour des espaces normés réels ainsi que les formes quadratiques. Il fut l'un des professeurs du fameux Albert Einstein à Zurich.

3. Etant donné un point a d'un $\mathbb{K}$–espace préhilbertien E on considère l'application $\varphi_a : E \to \mathbb{K}$ donnée par $\varphi_a(x) = \langle x, a \rangle$.

1) Montrer que φ_a appartient au dual topologique E'.

2) Calculer la norme $\|\varphi_a\|$.

3) Montrer que le noyau $Ker\varphi_a$ est fermé.

4) Montrer que $Ker\varphi_a = \{a\}^{\perp}$.

5) Endéduire que l'orthogonal $\{a\}^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé.

6) Montrer que :

$$\forall \underset{F \neq \phi}{F \subset E} \quad F^{\perp} = \bigcap_{a \in F} \{a\}^{\perp}.$$

7) En déduire que l'orthogonal $F^{\perp}$ est fermé.

Solution

1. A vos notes !

2. 1) les conditions d'identité et de symétrie sont évidentes pour N_1 et N_2. Arrêtons-nous sur l'inégalité triangulaire. Pour tous (x, y) et (z, t) de $\mathbb{R}^2$ on a:

$$\begin{aligned} N_1\big((x,y)+(z,t)\big) &= Max\Big(\big\|((x,y)+(z,t))\big\|_2, \big|(x+z)-(y+t)\big|\Big) \\ &\leq Max\Big(\|(x,y)\|_2 + \|(z,t)\|_2, |x-y|+|z-t|\Big) \\ &\leq Max\Big(\|(x,y)\|_2, |x-y|\Big) + Max\Big(\|(z,t)\|_2, |z-t|\Big) \\ &\leq N_1(x,y) + N_1(z,t). \end{aligned}$$

De même, on a :

$$2\frac{xz}{16}\frac{yt}{9} \leq \frac{x^2}{16}\frac{t^2}{9} + \frac{y^2}{9}\frac{z^2}{16}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^2}{16}\frac{z^2}{16} + 2\frac{xz}{16}\frac{yt}{9} + \frac{y^2}{9}\frac{t^2}{9} \leq \frac{x^2}{16}\frac{z^2}{16} + \frac{x^2}{16}\frac{t^2}{9} + \frac{y^2}{9}\frac{z^2}{16} + \frac{y^2}{9}\frac{t^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{xz}{16} + \frac{yt}{9}\right)^2 \leq \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}\right)\left(\frac{z^2}{16} + \frac{t^2}{9}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{xz}{16} + \frac{yt}{9} \leq \sqrt{\left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}\right)\left(\frac{z^2}{16} + \frac{t^2}{9}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2xz}{16} + \frac{2yt}{9} \leq 2\sqrt{\left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}\right)}\sqrt{\frac{z^2}{16} + \frac{t^2}{9}}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+z)^2}{16} + \frac{(y+t)^2}{9} \leq \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} + \frac{t^2}{9} + 2\sqrt{\left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}\right)}\sqrt{\frac{z^2}{16} + \frac{t^2}{9}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(x+z)^2}{16} + \frac{(y+t)^2}{9}} \leq \sqrt{\left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}\right)} + \sqrt{\frac{z^2}{16} + \frac{t^2}{9}}$$

$$\Leftrightarrow N_2\big((x,y)+(z,t)\big) \leq N_2(x,y) + N_2(z,t).$$

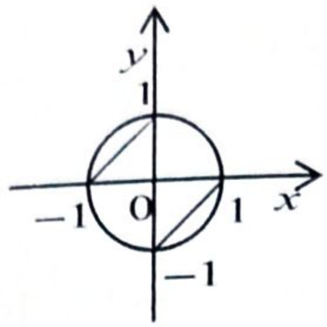
2) On remarque que :

$$Max\left(\|(x,y)\|_2, |x-y|\right) = \begin{cases} \|(x,y)\|_2 & \text{si } xy \geq 0, \\ |x-y| & \text{si } xy \leq 0. \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} B_f(0,1) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, Max\left(\|(x,y)\|_2, |x-y|\right) \leq 1\right\} \\ &= \left(\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|(x,y)\|_2 \leq 1\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy \geq 0\right\}\right) \\ &\qquad \cup \left(\left\{|x-y| \leq 1 \text{ si } xy \geq 0\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy \leq 0\right\}\right). \end{aligned}$$

Voici sa représentation graphique :



3) L'espace $\mathbb{R}^2$ étant de dimension finie, la boule fermée $B_f(0,1)$ est, en vertu du théorème de F. Riesz, compacte. D'autre part, $B_f(0,1)$ est convexe puisque :

$\forall t \in [0,1]\ \forall x, y \in B_f(0,1)$:

$$N_1(tx+(1-t)y) \leq N_1(tx)+N_1((1-t)y)$$
$$\leq tN_1(x)+(1-t)N_1(y) \leq t+(1-t)=1.$$

Donc, elle est connexe par arcs et, à fortiori, connexe.

4) On a clairement :

$$\frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}} \leq \frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}.$$

D'où (*). D'autre part, on sait que quel que soit (x, y) pris dans $\mathbb{R}^2$ on a:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|) \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y|;\quad |x-y| \leq |x|+|y|.$$

D'où (**).

5) S'il existait deux réels α dans $\left]0,\frac{1}{3}\right[$ et β dans $\left]\frac{1}{4},+\infty\right[$ tels que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\quad \beta\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}} \leq \alpha\sqrt{x^2+y^2};$$

on obtiendrait pour $(x, y)=(1,0)$ et $(x, y)=(0,1)$ respectivement $\beta \leq \frac{1}{4}$ et $\alpha \geq \frac{1}{3}$. Absurde !

3. 1) φ_a hérite sa linéarité de celle du produit scalaire. De plus, elle est continue car :

$$|\varphi_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|a\|\|x\|.$$

Ainsi, φ_a est dans E'.

2) De ce qui précède on tire immédiatement :

$$\|\varphi_a\| \leq \|a\|. \quad (*)$$

D'autre part, on remarque que $x_0 = \dfrac{1}{\|a\|}a$ est un point de la boule unité de E et vérifie :

$$|\varphi_a(x_0)| = \left|\langle \frac{1}{\|a\|}a, a\rangle\right| = \|a\| \leq \|\varphi_a\|. \quad (**)$$

De (*) et (**) sort la norme voulue : $\|\varphi_a\| = \|a\|$.

3) Le noyau $Ker\varphi_a = \varphi_a^{-1}\left(\{0\}\right)$ est fermé car $\{0\}$ est fermé et φ_a est continue.

4) On a :

$$Ker\varphi_a = \{x \in E / \varphi_a(x) = \langle x, a\rangle = 0\} = \{a\}^{\perp}.$$

5) C'est une conséquence directe de (3) et (4).

6) Etant donné un sous-ensemble non vide F de E, on écrit :

$$x \in F^{\perp} \Leftrightarrow \langle x, a\rangle = 0,\ \forall a \in F \Leftrightarrow x \in \{a\}^{\perp},\ \forall a \in F \Leftrightarrow x \in \bigcap_{a \in F}\{a\}^{\perp}.$$

D'où l'égalité.

7) L'orthogonal $F^{\perp}$ est fermé comme intersection de fermés !.

Sujet 6

1. Dire pourquoi la frontière de tout sous-ensemble propre d'un espace normé est non vide.

2. Montrer que toute suite bornée (u_n) d'un espace normé de dimension finie $\left(E, \|\cdot\|\right)$ ayant une unique valeur d'adhérence, est nécessairement convergente vers cette valeur d'adhérence.

3. 1) Montrer que :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R} \quad |thx - thx'| \leq |x - x'|;$$

$$\forall x, x' \in \mathbb{R} \quad |Argshx - Argshx'| \leq |x - x'|.$$

2) i) Montrer que le système d'équations :

$$\begin{cases} x - \frac{1}{3} thx + \frac{1}{4} Argshy = 0, \\ 4y - thy + \frac{4}{3} Argshx = 0, \end{cases}$$

admet une unique solution dans $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1\right)$.

ii) Déterminer-la.

4. Soit $u : E = L^1\left([-1,1]\right) \to \mathbb{R}$ l'application donnée par :

$$u(f) = \int_{-1}^{1} Arc\sin x . f(x) dx.$$

1) Montrer que u appartient au dual topologique E'.

2) Montrer que la fonction constante $f_0 \equiv 1$ est dans le noyau $Keru$.

3) On remplace dans ce qui suit E par $H = L^2\left([-1,1]\right)$.

i) Que peut-on dire des fonctions f_0 et $g(x) = Arc\sin x$?

ii) Montrer que $Keru = \{g\}^{\perp}$.

iii) On note P le sous-ensemble des fonctions paires de H. Montrer que $P \subset \{g\}^{\perp}$.

iv) Calculer $A = \sqrt{\int_{-1}^{1} (Arc\sin x)^2\, dx}$.

v) Montrer que chacune des deux fonctions $f_0 \equiv 1$ et :

$$x \mapsto f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{Arc\sin x} & \text{si} \quad x \in [-1,0[\cup]0,1], \\ 1 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

admet une et une seule projection orthogonale sur $Keru$.

vi) Déterminer ces deux projections.

Solution

1. C'est une conséquence de la connexité de cet espace.

2. On procède par l'absurde. Notons a la dite valeur d'adhérence et supposons que (u_n) ne converge pas vers elle. On écrit alors :

$$\exists \varepsilon_0 > 0 / \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists p_{n_0} \in \mathbb{N} : p_{n_0} \geq n_0 \text{ et } \left\| u_{p_{n_0}} - a \right\| > \varepsilon_0.$$

Cette relation écrite pour $n_0 = 0$ assure l'existence d'un rang $\varphi(0) \geq 0$ de telle sorte que $\left\| u_{\varphi(0)} - a \right\| > \varepsilon_0$. En récidivant avec $n_0 = \varphi(0)$ il existe un indice $\varphi(1) = \varphi(0) + 1$ tel que $\varphi(1) \geq \varphi(0)$ et $\left\| u_{\varphi(1)} - a \right\| > \varepsilon_0$. Ce procédé itéré, on construit par récurrence une sous-suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ satisfaisant à :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\| u_{\varphi(n)} - a \right\| > \varepsilon_0.$$

Par ailleurs, on remarque que cette sous-suite est, comme la suite mère (u_n), bornée. Comme E est de dimension finie, on peut

Grace au théorème de Bolzano[22]-Weierstrass, extraire une sous-suite $(u_{(\psi\circ\varphi)(n)})$ laquelle converge vers une limite b. La continuité de la norme permetd'avoir :

$$\varepsilon_0 < \lim_{n\to\infty}\left\|u_{\psi(\varphi(n))} - a\right\| = \left\|\lim_{n\to\infty} u_{\psi(\varphi(n))} - a\right\| = \|b-a\|.$$

Par suite, $b \neq a$. Ainsi, la suite (u_n) se retrouve avec deux valeurs d'adhérence distinctes. C'est en contradiction avec les hypothèses !

3. 1) En vertu du théorème des accroissements finis, on écrit :

$$\underset{x'<x}{\forall x, x' \in \mathbb{R}} \quad \exists c_{xx'} > 0 \,/\, thx - thx' = (x-x')\frac{1}{ch^2 c_{xx'}};$$

$$\underset{x'<x}{\forall x, x' \in \mathbb{R}} \quad \exists d_{xx'} > 0 \,/\, Argshx - Argshx' = (x-x')\frac{1}{\sqrt{1+(d_{xx'})^2}}.$$

Comme $\dfrac{1}{ch^2 c_{xx'}} \leq 1$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+(d_{xx'})^2}} \leq 1$, les deux inégalités en découlent.

2) i) Reformulons le présent système de la sorte :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}thx - \dfrac{1}{4}Argshy, \\[2mm] y = \dfrac{1}{4}thy - \dfrac{1}{3}Argshx, \end{cases}$$

puis considérons l'application $\varphi : \left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1\right) \to \left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1\right)$ donnée par :

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{1}{3}thx - \frac{1}{4}Argshy, \frac{1}{4}thy - \frac{1}{3}Argshx\right).$$

On remarque que toute solution du système proposé est un point fixe de φ. Comme $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1\right)$ est de Banach, la contraction de φ suffit d'après le théorème du point fixe, pour clore la question. Pour s'en acquitter, on mène ce calcul.

22. Bernhard Bolzano (5/10/1781 - 18/12/1848) : Mathématicien Tchèque. Ses travaux portaient essentiellement sur les fonctions et la théorie des nombres.

Pour tous (x,y) et (x',y') de $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1\right)$ on a :

$$\|\varphi(x,y)-\varphi(x',y')\|_1 = \left\| \left(\frac{1}{3}thx - \frac{1}{4}Argshy, \frac{1}{4}thy - \frac{1}{3}Argshx\right) - \left(\frac{1}{3}thx' - \frac{1}{4}Argshy', \frac{1}{4}thy' - \frac{1}{3}Argshx'\right)\right\|_1$$

$$= \left|\frac{1}{3}(thx - thx') - \frac{1}{4}(Argshy - Argshy')\right| + \left|\frac{1}{4}(thy - thy') - \frac{1}{3}(Argshx - Argshx')\right|$$

$$\leq \frac{1}{3}|thx - thx| + \frac{1}{4}|Argshy - Argshy'| + \frac{1}{4}|thy - thy'| + \frac{1}{3}|Argshx - Argshx'|$$

$$\leq \frac{2}{3}|x-x| + \frac{1}{2}|y-y'| \leq \frac{2}{3}\left(|x-x| + |y-y'|\right) \leq \frac{2}{3}\|(x,y)-(x',y')\|_1 .$$

D'où le résultat !

ii) C'est $(0,0)$.

4. 1) Il s'agit de montrer que u est linéaire continue. La linéarité découle de celle de l'intégrale de Riemann. Quant à la continuité elle est assurée par ce calcul :

$$|u(f)| = \left|\int_{-1}^{1} Arc\sin x . f(x)dx\right| \leq \int_{-1}^{1} |Arc\sin x|.|f(x)|dx \leq \frac{\pi}{2}\|f\|_1 .$$

2) On doit avoir $u(f_0) = 0$. Une intégration par parties le donne immédiatement :

$$u(f_0) = \int_{-1}^{1} Arc\sin x dx = xArc\sin x + \sqrt{1-x^2}\,\Big]_{1-}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Remarque

Ce calcul peut être évité au bénéfice de la propriété de l'intégrale des fonctions impaires : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

3) i) Elles sont orthogonales.

ii) On a :

$$f \in Keru \Leftrightarrow \langle f, g\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} Arc\sin x . f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f \in \{g\}^{\perp}.$$

D'où l'égalité.

iii) Le produit de g avec toute fonction f de P donne une fonction impaire. Il en ressort aussitôt que :

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)dx = 0, \ \forall f \in P.$$

D'où l'inclusion annoncée.

iv) On a :

$$\int (Arc\sin x)^2 dx = x(Arc\sin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\, Arc\sin x - 2x + C; \ \ C \in \mathbb{R}$$

D'où :

$$\int (Arc\sin x)^2 dx = x(Arc\sin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\, Arc\sin x - 2x + C; \ C \in \mathbb{R}$$

Par suite :

$$A = \sqrt{\left[x(Arc\sin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\, Arc\sin x - 2x\right]_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 4}.$$

v) Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$|u(f)| = \left|\int_{-1}^{1} Arc\sin x . f(x)dx\right| \le \int_{-1}^{1} |Arc\sin x||f(x)|dx$$

$$\le \sqrt{\int_{-1}^{1} (Arc\sin x)^2 dx}\sqrt{\int_{-1}^{1} (f(x))^2 dx} \le A\|f\|_2 .$$

Il en résulte que u est une forme linéaire continue sur H. Par conséquent, le noyau $Keru$ est un sous-espace fermé de H. Le théorème de projection permet de conclure.

vi) f_0 appartient à $Keru$. Donc, elle s'admet comme projection sur $Keru$.

Notons h la projection de f_1. D'après le théorème de projection, $f_1 - h$ est dans l'orthogonal $(Keru)^{\perp}$. Comme :

$$(Keru)^{\perp} = \{g\}^{\perp\perp} = [\{g\}];$$

($[\{g\}]$ étant le sous-espace engendré par $\{g\}$) il vient :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \ f_1 - h = \lambda g.$$

Autrement dit, $h = f_1 - \lambda g$. Or, g et h sont orthogonales, donc :

$$\langle h, g \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{Arc\sin x} - \lambda Arc\sin x \right) Arc\sin x dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \int_{-1}^{1} dx - \lambda \int_{-1}^{1} (Arc\sin x)^2 dx = 0 \ \Leftrightarrow \ 2 - \lambda A^2 = 0 .$$

D'où $\lambda = \dfrac{2}{A^2} = \dfrac{4}{\pi^2 - 8}$. Ainsi, on trouve enfin :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{Arc\sin x} - \dfrac{4}{\pi^2 - 8} Arc\sin x & \text{si } \ x \in [-1, 0[\cup]0, 1] \\ 1 & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$

Sujet 7

1. Etant donné un réel λ on pose pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$N_\lambda(x, y) = \sqrt{x^2 + 2\lambda xy + y^2}\ .$$

1) Pour quelles valeurs du paramètre λ l'expression N_λ est-elle définie sur $\mathbb{R}^2$?

2) Pour quelles valeurs du paramètre λ l'expression N_λ satisfait-elle la condition d'identité d'une norme ?

3) En admettant que sous cette condition les deux autres conditions de symétrie et d'inégalité triangulaire sont satisfaites, montrer que $(\mathbb{R}^2, N_\lambda)$ est de Banach.

2. Démontrer qu'une partie A d'un espace normé de dimension finie E est compacte si, et seulement si, elle est fermée et bornée.

3. 1) On munit l'espace $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ des deux normes :

$$\|f\|_1 = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| + |f(0)|\ ;$$

$$\|f\|_2 = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|.$$

Montrer que les deux normes sont équivalentes.

2) Soit $u : (E, \|\cdot\|_2) \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $u(f) = f(0)$. Montrer qu'elle est linéaire continue puis calculer sa norme.

4. On conserve $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ ci-dessus et définit sur $E \times E$ l'application réelle v par :

$$v(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)dx.$$

1) Montrer que (E, v) est préhilbertien.

2) Déterminer l'orthogonal $\{1\}^\perp$.

3) Déterminer la projection $P_{\{1\}^{\perp}}(f)$ sur $\{1\}^{\perp}$ de tout élément f de E.

4) Citer le théorème d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

5) Prouver-le.

6) La famille $(1, e^x)$ est-elle orthogonale ?

7) Déterminer la famille orthonormale (b_1, b_2) engendrant le même sous-espace que $(1, e^x)$.

Solution

1. 1) En écrivant :

$$N_\lambda(x,y) = \sqrt{x^2 + 2\lambda xy + y^2} = \sqrt{(x+\lambda y)^2 + y^2(1-\lambda^2)},$$

on voit que les valeurs du paramètre λ pour lesquelles cette expression a un sens sur $\mathbb{R}^2$ sont celles assurant l'inégalité:

$$(x+\lambda y)^2 + y^2(1-\lambda^2) \geq 0, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Autrement dit, λ doit être pris dans l'intervalle $[-1,1]$.

2) Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned} N_\lambda(x,y) = 0 \ &\Leftrightarrow \ \sqrt{x^2 + 2\lambda xy + y^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ \sqrt{(x+\lambda y)^2 + (1-\lambda^2)y^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ \begin{cases} x + \lambda y = 0 \\ (1-\lambda^2)y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ \begin{cases} x = -\lambda y \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\lambda y \\ \lambda^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :

$$N_\lambda(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \lambda \neq \pm 1$$

Conclusion : L'ensemble des valeurs visées est $]-1,1[$.

3) $(\mathbb{R}^2, N_\lambda)$ est de dimension finie ; donc, il est de Banach.

2. Si A est compacte, elle est complète et précompacte. Elle est

conséquemment fermée et bornée. Inversement, si A est bornée elle est incluse dans une boule fermée de E. Comme celle-ci est compacte et A est en plus fermée, on déduit que A est compacte.

3. 1) On a clairement $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$. D'autre part, on écrit en vertu du théorème des accroissements finis :

$$\exists c_x \in]0,x[\subset [0,1] : f(x) = f(0) + xf'(c_x).$$

D'où :

$$\sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)| \leq |f(0)| + \sup_{0\leq x\leq 1} |x| \sup_{0\leq x\leq 1} |f'(c_x)| \leq \|f\|_1.$$

Par suite $\|f\|_2 \leq 2\|f\|_1$. Ainsi, les deux normes sont équivalentes.

2) u est linéaire continue de toute évidence. Pour calculer sa norme on remarque que :

$$|u(f)| = |f(0)| \leq \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)| + \sup_{0\leq x\leq 1} |f'(x)| = \|f\|_2.$$

D'où $\|u\| \leq 1$.

Par ailleurs, la fonction constante $f_0 \equiv 1$ est dans la boule unité fermée de $\left(E, \|\cdot\|_2\right)$ et vérifie $|u(f_0)| = 1 \leq \|u\|$. Il en ressort aussitôt que $\|u\| = 1$.

4. 1) Il est aisé de vérifier que v est une forme bilinéaire symétrique, définie positive. Autrement dit, v est un produit scalaire sur E. Donc, (E, v) est un espace préhilbertien.

2) On a :

$$f \in \{1\}^\perp \Leftrightarrow v(f,1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

D'où :

$$\{1\}^\perp = \{f \in E \,/\, f(0) = 0\}.$$

3) Etant donné un élément f de E on écrit :

$$P_{\{1\}^\perp}(f)(0) = 0;\ f - P_{\{1\}^\perp}(f) \in [\{1\}]$$

Il s'en suit que $f - P_{\{1\}^\perp}(f) = \lambda$. Donc $f(0) = \lambda$. Par suite :

$$P_{\{1\}^{\perp}}(f)(x)=f(x)-f(0).$$

4) Enoncé du théorème :

Etant donnée une famille de vecteurs linéairementindépendants $(a_n)_n$ d'un espace préhilbertien H, il existe alors une famille orthonormale $(b_n)_n$ de H, engendrant le même sous-espace que $(a_n)_n$.

5) Preuve

Signalons tout d'abord qu'il s'agit d'exhiber une famille orthogonale $(b_n)_n$. Si cette dernière n'est pas orthonormale, onprend à sa place la famille $\left(\frac{1}{\|b_n\|}b_n\right)_n$, laquelleest orthonormale et engendre naturellement le même sous-espace que $(b_n)_n$.

On définit la famille $(b_n)_n$ par cette relation de récurrence:

$$\begin{cases} b_0=a_0\neq 0 \\ b_n=a_n-P_{F_{n-1}}(a_n), \end{cases}$$

F_{n-1} désignant le sous-espace engendré par $(a_i)_{1\leq i\leq n-1}$ et $P_{F_{n-1}}$ l'application projection sur F_{n-1}.

$(b_n)_n$ est orthogonale. En effet, pour tout couple d'indices, (m,n) tels que $n>m$ on a:

$$\begin{aligned}\langle b_n,b_m\rangle &=\langle a_n-P_{F_{n-1}}(a_n),a_m-P_{F_{m-1}}(a_m)\rangle \\ &=\langle a_n-P_{F_{n-1}}(a_n),a_m\rangle-\langle a_n-P_{F_{n-1}}(a_n),P_{F_{m-1}}(a_m)\rangle.\end{aligned}$$

Les deux termes du membre droit de cette égalité sont nuls grâce au théorème de projection. (Observons que F_{n-1} est de dimension finie, contenant a_m et $P_{F_{m-1}}(a_m)$). Ainsi:

$$\forall \underset{n\neq m}{n,m}\in\mathbb{N}\quad \langle b_n,b_m\rangle=0.$$

Remarquons enfin que $(b_n)_n$ engendre le même sous-espace que $(a_n)_n$ puisque chaque b_n est, par construction, une combinaison linéaire d'éléments de $(a_n)_n$.

6) Non, car $v(1,e^x)=1\neq 0$.

7) En vertu du procédé de Gram-Schmidt on prend $b_1=1$ lequel est de norme $\|b_1\|=\sqrt{v(1,1)}=1$. De même, on prend :

$$b_2=e^x-P_{[\{1\}]}=e^x-\lambda$$

Comme b_2 est dans $\left[\{1\}\right]^{\perp}$ il vient :

$$v(b_2,1)=0 \iff 1-\lambda=0$$

Par suite $b_2=e^x-1$. Or $\|b_2\|=\sqrt{\int_0^1 e^{2x}dx}=\sqrt{\frac{1}{2}(e^2-1)}$, donc, on doit opter pour :

$$b_2'=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(e^2-1)}}(e^x-1).$$

Sujet 8

1. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace normé. Montrer que:

1) $\forall a,b \in E\setminus\{0\}$ $\quad \left\|\frac{a}{\|a\|}-\frac{b}{\|b\|}\right\| \leq 2\frac{\|a-b\|}{\|a\|}$;

2) $\forall a \in E \ \forall r \in \mathbb{R}_+^*$ $\ B(a,r)=\{a\}+B(0,r)$;

3) $\forall a,b \in E \ \forall r,\rho \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad B(a+b,r+\rho)=B(a,r)+B(b,\rho)$.

2. On définit sur l'espace vectoriel $E=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ les deux normes suivantes:

$$\|f\|_u = \sup_{0\leq x\leq 1}|f(x)|+\sup_{0\leq x\leq 1}|f'(x)|,$$

$$\|f\|_v = \sup_{0\leq x\leq 1}|f(x)|+\int_0^1|f'(x)|\,dx.$$

1) i) Vérifier que $\|\cdot\|_u$ est plus fine que $\|\cdot\|_v$.

ii) Montrerque ces deux normes ne sont pas équivalentes.

(On pourrait s'aider de la suite s'aidant de la suite $f_n(x)=\frac{x^n}{n}$.)

2) On munit l'espace $H=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de sa norme fondamentale $\|\cdot\|_\infty$ et on considère l'application $u:H\to H$ définie par :

$$u(f)(x)=\frac{x^2}{1+x^2}f(x).$$

i) Calculer la norme $\|u(g)\|_\infty$, g étant la fonction donnée sur $[0,1]$ par $g(x)=x^4+2x^2+1$.

ii) Montrer que u est dans le dual H' puis calculer sa norme.

iii) En déduire que l'équation $u(f)-f=0$ admet une unique solution dans H.

iv) Détreminer-la.

3. Soit E un espace vectoriel norméet F un de ses sous-espaces.

1) Montrer que si $\overset{\circ}{F} \neq \phi$ alors $F = E$.

2) On munit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de sa norme usuelle $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que les fonctions de classes $\mathscr{C}^1$ et les fonctions polynomiales forment deux sous-espaces de E d'intérieurs vides.

3) On remplacela norme $\|\cdot\|_\infty$ par $\|\cdot\|_1$ puis on considère l'application réelle $\|\cdot\|_9$ donnée sur E par $\|f\|_9 = \int_0^1 9^x |f(x)|dx.$

i) Montrer que $\|\cdot\|_9$ est une norme sur E.

ii) Montrer que les normes $\|\cdot\|_9$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes.

iii) $(E, \|\cdot\|_9)$ est-il complet ? compact ? localement compact ?

Solution

1. 1) En s'appuyant sur les deux inégalités fondamentales :

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\|;\ \big|\|u\| - \|v\|\big| \leq \|u-v\|,$$

on obtient pour tous vecteursnon nuls a et b de E :

$$\left\|\frac{1}{\|a\|}a - \frac{1}{\|b\|}b\right\| = \frac{1}{\|a\|}\left\|a-b+b-\frac{\|a\|}{\|b\|}b\right\| \leq \frac{\|a-b\|}{\|a\|} + \frac{1}{\|a\|}\left\|b-\frac{\|a\|}{\|b\|}b\right\|$$

$$\leq \frac{\|a-b\|}{\|a\|} + \frac{\|b\|}{\|a\|}\left|1-\frac{\|a\|}{\|b\|}\right| \leq \frac{\|a-b\|}{\|a\|} + \frac{\big|\|b\|-\|a\|\big|}{\|a\|} \leq 2\frac{\|a-b\|}{\|a\|}.$$

2) Tout point x de la boule ouverte $B(a,r)$ peut s'écrire $x = a + (x-a)$ avec :

$$\|x-a\| = \|(x-a)-0\| < r,$$

ce qui assure l'appartenance de $x-a$ à la boule $B(0,r)$. Ainsi, on a:

$$B(a,r) \subset \{a\} + B(0,r).$$

Inversement, si x est un point de $\{a\}+B(0,r)$ il existe par définition un point y dans $B(0,r)$ de telle sorte que $x=a+y$. Il en ressort que :

$$\|x-a\|=\|y\|<r,$$

ce qui signifie que x est dans la boule $B(a,r)$. D'où :

$$\{a\}+B(0,r)\subset B(a,r).$$

La conjonction des deux inclusions donnent notre égalité.

3) Quel que soit le point z de $B(a,r)+B(b,\rho)$ il existe u dans $B(a,r)$ et v dans $B(b,\rho)$ tels que $z=u+v$. D'où :

$$\|z-a-b\|=\|u-a+v-b\|\leq\|u-a\|+\|v-b\|<r+\rho.$$

Donc, z appartient à $B(a+b,r+\rho)$. Ainsi, on a :

$$B(a,r)+B(b,\rho)\subset B(a+b,r+\rho).$$

Inversement, on remarque d'abord qu'en vertu de la question (2) on a:

$$B(a+b,r+\rho)=\{a+b\}+B(0,r+\rho).$$

A présent, si z est un élément quelconque de $B(a+b,r+\rho)$ il existe un point s dans $B(0,r+\rho)$ tel que $z=a+b+s$. En écrivant :

$$s=\frac{r}{r+\rho}s+\frac{\rho}{r+\rho}s$$

on constate que :

$$\left\|\frac{r}{r+\rho}s\right\|=\frac{r}{r+\rho}\|s\|<r;$$

$$\left\|\frac{\rho}{r+\rho}s\right\|=\frac{\rho}{r+\rho}\|s\|<\rho.$$

Autrement dit, $\frac{r}{r+\rho}s$ est dans $B(a,r)$ et $\frac{\rho}{r+\rho}s$ est dans $B(a,\rho)$.

On a ainsi montré que :

$$B(a+b,r+\rho)\subset\{a\}+\{b\}+B(0,r)+B(0,\rho).$$

Comme on sait que :

$$\{a\}+\{b\}+B(0,r)+B(0,\rho)=B(a,r)+B(b,\rho),$$

il vient enfin :
$$B(a+b,r+\rho)\subset B(a,r)+B(b,\rho).$$

C'est l'inclusion qui clôt la question.

2. 1. i) En remarquant que :
$$\int_0^1 |f'(x)|\,dx \le \int_0^1 \sup_{0\le x\le 1}|f'(x)|\,dx \le \sup_{0\le x\le 1}|f'(x)|\int_0^1 dx \le \sup_{0\le x\le 1}|f'(x)|;$$

on affirme que $\|f\|_v \le \|f\|_u$. Donc, $\|\cdot\|_u$ est plus fine que $\|\cdot\|_v$.

ii) Pour $f(x)=\dfrac{x^n}{n}$ sur $[0,1]$ on obtient :
$$\frac{\|f\|_u}{\|f\|_v}=\frac{\sup\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|+\sup\limits_{0\le x\le 1}|f'(x)|}{\sup\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|+\int_0^1|f'(x)|\,dx}=\frac{\frac{1}{n}+1}{\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}(1+n).$$

Ce rapport tendant vers ∞ avec n, les deux normes ne peuvent être équivalentes.

2) i) On a :
$$\|u(g)\|_\infty=\sup_{0\le x\le 1}\left|\frac{x^2}{1+x^2}(x^4+2x^2+1)\right|=\sup_{0\le x\le 1}\left|x^2(1+x^2)\right|=2.$$

ii) u est évidemment linéaire. Elle est aussi continue, car :
$$\forall f\in H\ \ \|u(g)\|_\infty=\sup_{0\le x\le 1}\left|\frac{x^2}{1+x^2}f(x)\right|\le\|f\|_\infty\sup_{0\le x\le 1}\left|\frac{x^2}{1+x^2}\right|=\frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$

D'autre part, de ce calcule on tire $\|u\|\le\dfrac{1}{2}$. Bien plus, on remarque qu'en prenant la fonction $f_0\equiv 1$ il vient :
$$\|u(f_0)\|_\infty=\sup_{0\le x\le 1}\left|\frac{x^2}{1+x^2}\right|=\frac{1}{2}\le\|u\|_\infty.$$

Il en résulte finalement que $\|u\|=\dfrac{1}{2}$.

iii) Les solutions de l'équation $u(f)=f$ sont les points fixes de l'application u. Comme E est de Banach et contractante on assure grâce au théorème du point fixe, que notre équation admet une et une seule solution dans E.

iv) On a trivialement:

$$u(f)=f \Leftrightarrow \frac{x^2}{1+x^2}f(x)=f(x),\ \forall x\in[0,1]$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2}\right)f(x)=0,\ \forall x\in[0,1]$$
$$\Leftrightarrow f(x)=0,\ \forall x\in[0,1] \Leftrightarrow f\equiv 0.$$

3. 1) Si l'intérieur $\overset{\circ}{F}$ contient un point a le sous-espace F renferme une boule ouverte $B(a,r)$. Donc :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\ \forall u\in B(a,r)\quad \lambda u\in F.$$

Soit x un point non nul de E. Pour tout réel α tel que $0<\alpha<r$ le point $u=a+\frac{\alpha}{\|x\|}x$ est dans $B(a,r)$ et donc dans F. Il en résulte immédiatement que $x=\frac{\|x\|}{\alpha}(u-a)$ appartient à F. D'où $F=E$.

2) C'est une conséquence immédiate de la première question.

3) i) Les trois conditions d'une norme sont facilement vérifiables:

$$\|f\|_9=0\Leftrightarrow\int_0^1 9^x|f(x)|dx=0\Leftrightarrow 9^x|f(x)|=0,\ \forall x\in[0,1]\Leftrightarrow f=0.$$

$$\|\lambda f\|_9=\int_0^1 9^x|\lambda f(x)|dx=|\lambda|\int_0^1 9^x|f(x)|dx=|\lambda|\|f\|_9.$$

$$\|f+g\|_9=\int_0^1 9^x|f(x)+g(x)|dx\le\int_0^1 9^x|f(x)|dx+\int_0^1 9^x|g(x)|dx$$
$$\le\|f\|_9+\|g\|_9.$$

ii) En remarquant que :

$$\forall x \in [0,1] \quad |f(x)| \leq 9^x |f(x)|,$$

il vient :

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 9^x |f(x)| dx,$$

d'où $\|f\|_1 \leq \|f\|_9$. D'autre part, on a :

$$\forall x \in [0,1] \quad 9^x \leq 9,$$

par suite :

$$\int_0^1 9^x |f(x)| dx \leq 9 \int_0^1 |f(x)| dx,$$

autrement dit :

$$\|f\|_9 \leq 9 \|f\|_1.$$

Ainsi,

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_9 \leq 9 \|f\|_1.$$

Donc, ces deux normes sont équivalentes.

iii) Les normes $\|.\|_9$ et $\|.\|_1$ étant équivalents et $(E, \|.\|_1)$ n'ayant aucune de ces propriétés, l'espace $(E, \|.\|_9)$ ne peut prétendre à aucune d'elles non plus.

Sujet 9

1. Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable sur $[0,1]$, s'annulant en 0 et en 1. On pose :

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)| \text{ et } N(f)=|f'(0)|+\|f''\|_\infty .$$

1) Montrer que N est une norme sur E.

2) Donner un exemple d'une suite de fonctions qui tend vers 0 pour $\|.\|_\infty$ mais pas pour N.

3) Comparer les normes $\|.\|_\infty$ et N.

2. Soit $E=\left\{f\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})\,/\,f(0)=0\right\}$. On le munit de la norme $\|f\|=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)+f'(x)|$.

1) Cette norme est-elle équivalente à la restriction à E de $\|.\|_\infty$? (Onpourra considérer $f_n:x\mapsto f_n(x)=x^n$, pour $n\in\mathbb{N}$.)

2) Etant donnée une fonction g de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, résoudre sur $[0,1]$, par la méthode de variation de la constante, l'équation différentielle $y'+y=g(x)$.

3) Montrer qu'il existe une constante $k>0$ telle que :

$$\forall f\in E \quad \|f\|_\infty\le k\|f\|.$$

3. Etant donnés deux sous-ensembles non vides A et B d'un espace normé $(E,\|.\|)$ on pose :

$$A+B=\{z\in E\,/\,\exists(x,y)\in A\times B: z=x+y\}.$$

1) Montrer que si A et B sont compacts alors $A+B$ l'est de même.

2) Montrer que si A est compact et B fermé alors $A+B$ est fermé.

3) On considère dans l'espace produit usuel $\mathbb{R}^2$ les sous-ensembles $A=\{(x,0),\ x\in\mathbb{R}\}$ et $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / xy=1\}$.

i) Montrer que A et B sont fermés.

ii) Montrer que $A+B=C_{\mathbb{R}^2}A$.

iii) Montrer que $A+B$ n'est pas fermé.

iv) Que conclure ?

Solution

1. 1) Encore ici, on se contente d'élucider la première condition, les deux autres étant évidentes. On a :

$$\begin{cases} N(f)=0 \\ f(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |f'(0)|=\|f''\|_\infty=0 \\ f(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(0)=0=f(0) \\ f' \text{ constante} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'\equiv 0 \\ f(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow f\equiv 0.$$

2) En prenant $x_n=\frac{1}{n}x^n$, on obtient immédiatement $\|x_n\|_\infty=\frac{1}{n}$ et $N(x_n)=n-1$. La requête est satisfaite.

3) En conservant cette suite on constate que $\frac{\|N(x_n)\|}{\|x_n\|_\infty}=n(n-1)$.

Cela suffit pour conclure que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

2. 1) La suite suggérée permet d'avoir :

$$\frac{\|f_n\|}{\|f_n\|_\infty}=\frac{\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|x^n+nx^{n-1}\right|}{\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|x^n\right|}=\frac{\sup\limits_{x\in[0,1]} x^{n-1}(x+n)}{\sup\limits_{x\in[0,1]} x^n}=1+n.$$

Ce rapport n'étant pas majoré pour n grand, on conclut comme précedemment.

2) Nous sommes en présence d'une équation différentielle du

premier ordre linéaire. On la résout en deux étapes.

i) Résolution de l'équation homogène $y'+y=0$.

On a aussitôt (comme vous le savez) $y=Ke^{-x}$, $K\in\mathbb{R}^*_+$.

ii) Résolution de l'équation avec second membre $y'+y=g(x)$. On recherche une solution particulière. Pour cela, comme indiqué à la méthode de variation de la constante. On a recourt $y=K(x)e^{-x}$. D'où $y'=K'(x)e^{-x}-K(x)e^{-x}$. En remplaçant dans l'équation initiale on obtient $K'(x)e^{-x}=g(x)$. Par suite, $K'(x)=g(x)e^{x}$. Donc, $K(x)=\int g(x)e^{x}dx$. La solution particulière recherchée est $y_p=e^{-x}\int g(x)e^{x}dx$. La solution générale est alors :

$$y=Ke^{-x}+e^{-x}\int g(x)e^{x}dx.$$

3) D'après le calcul qu'on vient d'étaleron déduit que si f est une fonction de E on aura:

$$\|f\|=\sup_{0\le x\le 1}|f(x)+f'(x)|=\|g\|_\infty;$$

$$\|f\|_\infty=\|y_p\|_\infty=\sup_{0\le x\le 1}\left\|e^{-x}\int g(x)e^{x}dx\right\|_\infty\le\|g\|_\infty\sup_{0\le x\le 1}e^{-x}\int e^{x}dx$$

$$\le\|g\|_\infty\sup_{0\le x\le 1}e^{-x}\int_0^1 e^{x}dx\le(e-1)\|g\|_\infty$$

D'où :

$$\forall f\in E\quad \|f\|_\infty\le(e-1)\|f\|.$$

3. 1) On observe que l'application $s:E\times E\to E$ définie par $s(x,y)=x+y$ est continue. Sa restriction à $A\times B$ l'est de même. Comme A et B sont compacts $A\times B$ l'est aussi. On en déduit que $A+B=s(A\times B)$ est compact.

2) Supposons A compact et B fermé. $A+B$ sera fermé s'il renferme toutes les limites de ses suites convergentes. Soit (z_n) une de ses suites convergeant vers une limite z. Pour tout indice naturel n il existe par définition deux éléments x_n dans A et y_n dans B

tels que $z_n = x_n + y_n$. Comme A est compact, la suite (x_n) admet une valeur d'adhérence a. Autrement dit, (x_n) admet une sous-suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers a. La sous-suite $(z_{\varphi(n)})$ extraite de la suite convergente (z_n) converge, elle aussi, vers z. Il en ressort que la sous-suite $(y_{\varphi(n)}) = (z_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)})$ extraite de (y_n) converge vers $b = z - a$. Or B est fermé donc, il contient cette limite $b = z - a$. Ainsi, $z = a + b$, ce qui confirme que z est dans $A + B$. Celui-ci est alors fermé.

3) i) La projection $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $\pi(x, y) = y$ étant continue, on déduit aussitôt que $\pi^{-1}(\{0\}) = A$ est fermé. De même, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = xy$ étant continue, on affirme que $f^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\} = B$ est fermé.

ii) Si $(a, 0)$ et (b, b') sont deux éléments de A et B respectivement on a :

$$(a, 0) + (b, b') = (a + b, b') \notin A.$$

D'où :

(*) $$A + B \subseteq C_{\mathbb{R}^2} A.$$

Inversement, pour tout (x, y) de $C_{\mathbb{R}^2} A$ l'ordonnée y est non nulle, ce qui permet d'avoir :

$$(x, y) = \left(x - \frac{1}{y}, 0\right) + \left(\frac{1}{y}, y\right) \in A + B.$$

D'où :

(**) $$C_{\mathbb{R}^2} A \subseteq A + B.$$

La conjonction des inclusions (*) et (**) donne l'égalité visée.

iii) On voit sans peine que $A + B$ ne contient pas la limite $(0, 0)$ de sa suite $\left(0, \frac{1}{n}\right)$. Donc, il n'est pas fermé.

iv) Conclusion : Si A et B sont fermés, $A + B$ ne l'est pas nécessairement.

Sujet 10

1. On considère dans l'espace $E=\mathscr{C}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right],\mathbb{R}\right)$ muni de sa norme fondamentale $\|.\|_2$, la suite (f_n) définie par :

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ 0\leq x\leq\frac{1}{2}.$$

1) Vérifier que f_n est uniformément continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

2) Montrer que $f_n\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$ est compact et connexe par arcs.

3) En déduire que $f_n\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$ est de Banach.

4) Montrer que $(f_n)_n$ est de Cauchy.

5) Montrer que 0 est une valeur d'adhérence de $(f_n)_n$.

2. Soient E, F deux espaces normés et u un élément surjectif de de l'espace $L(E,F)$ des applications linéaires de E vers F. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes:

i) u est un homéomorphisme.

ii) $\exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^*\,/\,\alpha\|x\|_E\leq\|u(x)\|_F\leq\beta\|x\|_E,\quad\forall x\in E.$

iii) $\exists\,\lambda\in\mathbb{R}_+,\mu\in\mathbb{R}_+^*\,/\,\lambda\leq\|u(x)\|_F\leq\mu,\quad\forall x\in B_f(0,1).$

3. Pour tout f de $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et tout a de $[0,1]$, on pose:

$$\|f\|_a=\int_0^1|f(x)|dx+(1-a)\sup_{a\leq x\leq 1}|f(x)|.$$

1) Montrer que pour tout a de $[0,1]$, $\|.\|_a$ est une norme sur E.

2) Montrer que si $b\leq a$ alors:

$$\forall f\in E\ \|f\|_a\leq\|f\|_b.$$

3) En déduire que toute suite convergente par rapport à $\|\cdot\|_b$ l'est aussi par rapport à $\|\cdot\|_a$.

4) Pour tout x de $[0,1]$, on pose $F_x = \{f \in E \,/\, f(x) = 0\}$.

F_x est-il ouvert dans $(E, \|\cdot\|_a)$?

Solution

1. 1) f_n est continue sur le compact $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Elle y est donc uniformément continue conformément au théorème de Weierstrass.

2) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est compact comme intervalle fermé et borné et il est connexe comme intervalle. On en déduit que $f_n\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ est compact et connexe comme image d'un compact et connexe par une fonction continue.

3) $\left(f_n\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right), |\cdot|\right)$ est de Banach car il est compact.

4) On a :

$$\lim_{p,q\to\infty} \|f_p - f_q\| = \lim_{p,q\to\infty} \sqrt{\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{q}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 dx}$$

$$= \lim_{p,q\to\infty} \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| \sqrt{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}} = \lim_{p,q\to\infty} \frac{1}{2}\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| \sqrt{\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)}$$

$$= \lim_{p,q\to\infty} \frac{1}{2}\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| \left(\sqrt{\left[Log\frac{1+x}{1-x}\right]_0^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{\sqrt{Log 3}}{2} \lim_{p,q\to\infty}\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| = 0;$$

donc, $(f_n)_n$ est de Cauchy.

5) Il suffit que 0 soit sa limite et c'est bien le cas car on a :

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-0\| = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 dx} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{Log3}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

2. i) $\Rightarrow$ ii)

u étant un homéomorphisme, il est continu ainsi que son inverse u^{-1}. Cela se traduit par :

$$\exists\, r\in\mathbb{R}_+^* \,/\, \|u(x)\|_F \le r\|x\|_E,\quad \forall\, x\in E;$$

$$\exists\, s\in\mathbb{R}_+^* \,/\, \|u^{-1}(y)\|_E \le s\|y\|_F,\quad \forall\, y\in F.$$

Cette dernière relation peut, en posant $u^{-1}(y)=z$, prendre la forme équivalente :

$$\exists\, s\in\mathbb{R}_+^* \,/\, \frac{1}{s}\|z\|_E \le \|u(z)\|_F,\quad \forall\, z\in E.$$

Cela donne en condensé :

$$\frac{1}{s}\|x\|_E \le \|u(x)\|_F \le r\|x\|_E,\quad \forall\, x\in E.$$

Il suffit de prendre $\alpha = \frac{1}{s}$ et $\beta = r$ pour être conforme à (ii).

ii) $\Rightarrow$ iii)

Si $x=0$ la relation est trivialement satisfaite avec $\lambda=0$ et $\mu=\beta$. Sinon, on procède à la multiplication des trois membres de (ii) par $\frac{1}{\|x\|}$ pour avoir :

$$\exists\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^* \,/\, \alpha \le \left\|u\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\|_F \le \beta,\quad \forall\, x\in E.$$

Comme 0 et $\frac{1}{\|x\|}x$ sont dans la boule unité fermée $B_f(0,1)$ de E

(iii) est réalisée en prenant $\lambda = \alpha$ et $\mu = \beta$.

iii) $\Rightarrow$ i)

Remarquons de prime abord que :

$$u(x) = 0 \Rightarrow \|u(x)\|_F = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Donc, u est injectif. Comme il est supposé surjectif il devient bijectif. Par ailleurs, u étant borné sur la boule fermée unité est continue. Enfin, si z est un élément quelconque de F il existe un élément unique x dans E tel que $x = u^{-1}(z)$. On peut alors avoir :

$$\left\| u\left(\frac{1}{\|u^{-1}(z)\|} u^{-1}(z) \right) \right\| = \frac{1}{\|u^{-1}(z)\|} \|z\| \geq \lambda.$$

Autrement dit :

$$\|u^{-1}(z)\| \leq \frac{1}{\lambda} \|z\|.$$

Cela assure la continuité de u^{-1} et achève l'exercice.

3. 1) Evident !

2) Soit f un élément de E. Si $b \leq a$ alors $1-a \leq 1-b$ et $\sup_{a \leq x \leq 1} |f(x)| \leq \sup_{b \leq x \leq 1} |f(x)|$. D'où :

$$(1-a) \sup_{a \leq x \leq 1} |f(x)| \leq (1-b) \sup_{b \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

Par suite :

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx + (1-a) \sup_{a \leq x \leq 1} |f(x)| \leq \int_0^1 |f(x)|\, dx + (1-b) \sup_{b \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

3) C'est une conséquence immédiate de cette dernière question:

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_b = 0 \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_a \leq \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_b = 0.$$

4) Notons d'abord que F_x est un sous-espace vectoriel de E. Il ne peut pas être ouvert ; car s'il l'était, il serait d'intérieur non vide et coïnciderait donc avec E, ce qui n'est pas le cas.

Sujet 11

1. Enoncer le théorème deBanach-Steinhauss[23] puis démontrer-le.

2. Soient $E=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $(u_n)_n$ unesuite de fonctions réelles définies sur E par:

$$u_n(f)=n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right),\ n\in\mathbb{N}^*.$$

1) Montrer que pour tout indice non nul n, u_n est une forme linéaire continue sur E.

2) Montrer que:

$$\forall f\in E\ \lim_{n\to\infty}u_n(f)=f'(0).$$

3) Pour tout f de E on pose $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(f)=u(f)$. Montrer que u n'est pas continue. (On peut recourir à la suite (g_n) donnée par $g_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$.)

3. Soit E l'espace des fonctions réelles continues bornées sur $[0,+\infty[$ et admettant une limite à l'infini. On munit E de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ et on y définit deux applications u et v comme ceci:

$$u(f)/u(f)(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(y)dy & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0;\end{cases}$$

$$v(f)/v(f)(x)=\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-(xy)^2}f(y)dy.$$

23. Hugo Dyonizy Steinhauss (14/1/1887-25/2/1972) : Mathématicien polonais. Ses recherches s'axèrent sur l'analyse fonctionnelle et ses diverses applications et la théorie des probabilités.

1) Etudier la continuité de u et v. (Rappel : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

2) Montrer que l'application ω définie sur E par :

$$\omega(f) = \lim_{x \to +\infty} f(x),$$

est une forme linéaire continue sur E.

3) Montrer que $\omega \circ u = \omega = \omega \circ v$.

Solution

1. 1) Enoncé du théorème:

Soit E et F deux espaces de Banach, $(u_n)_n$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F. Si $\left((u_n(x))\right)_n$ (x de E) est une suite bornée, la suite $\left(\|u_n\|\right)_n$ est majorée par une même constante.

2) Preuve :

Soit la suite de fonctions (φ_n) donnée par $\varphi_n(x) = \|u_n(x)\|$. Il existe un ouvert Ω de E et un réel $\delta > 0$ de sorte que $\sup_{x\in\Omega,\, n\in\mathbb{N}} \|u_n(x)\| < \delta$. Puisque Ω est ouvert, il contient alors au moins une boule ouverte $B(a,r)$. En remarquant que pour tout point x de $B(0,r)$, l'élément $x+a$ appartient à $B(a,r)$, on établit que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n(x)\| = \|u_n(x+a-a)\| = \|u_n(x+a) - u_n(a)\|$$
$$\leq \|u_n(x+a)\| + \|u_n(a)\| \leq 2\delta.$$

Le point $x' = \frac{1}{r}x$ appartient à la boule unité fermée $B_f(0,1)$ et vérifie:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n(x)\| = \|u_n(r\,x')\| = r\|u_n(x')\| \leq 2\delta.$$

On en déduit que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n\| \leq \frac{2\delta}{r}.$$

Le théorème est achevé.

2\. 1) Pour tous réels λ et μ et tous f et g de E on a :

$$u_n(\lambda f+\mu g)=n\left((\lambda f+\mu g)\left(\frac{1}{n}\right)-(\lambda f+\mu g)(0)\right)$$
$$=\lambda n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right)+\mu n\left(g\left(\frac{1}{n}\right)-g(0)\right)$$
$$=\lambda u_n(f)+\mu u_n(g).$$

Donc, u_n est linéaire. Par ailleurs, pour tout f de E on a :

$$|u_n(f)|=\left|n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right)\right|\leq n\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|+|f(0)|\leq(n+1)\|f\|_\infty .$$

Donc, u_n est continue.

2) Soit f une fonction de E. On a clairement:

$$\lim_{n\to\infty}u_n(f)=\lim_{n\to\infty}n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right)=\lim_{m\to 0}\frac{f(m)-f(0)}{m}=f'(0).$$

3) On remarque que :

$$\lim_{n\to\infty}\|g_n-0\|_\infty=\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq 1}|g_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq 1}\frac{\sin nx}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}|u(g_n)|=\lim_{n\to\infty}|g_n'(0)|=1\neq 0.$$

Ainsi, u n'est pas séquentiellement continue. Donc, elle ne peut être continue.

3\. 1) Remarquons tout d'abord que u et v sont des applications linéaires. Concernant u on a pour tout f de E :

$$\|u(f)\|=\sup_{0\leq x<+\infty}|u(f)(x)|=\sup_{0<x<+\infty}\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy\right|$$
$$\leq\sup_{0<x<+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|f(y)|dy\leq\|f\|\sup_{0\leq x<+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x dy\leq\|f\|.$$

Donc, elle est continue.

De même, on a pour v :

$$\|v(f)\| = \sup_{0\le x<+\infty} |v(f)(x)| = \sup_{0\le x<+\infty} \left| \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2} f(y)dy \right|$$

$$\le \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sup_{0<x<+\infty} \left(x \int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2} |f(y)| dy \right) \le \frac{2}{\sqrt{\pi}} \|f\| \sup_{0\le x<+\infty} x \int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2} dy$$

$$\le \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \le \|f\|.$$

Donc, elle est continue.

2) ω est linéaire en vertu des propriétés d'addition et de multiplication par un scalaire sur les limites. De plus, elle est continue car :

$$\exists f \in E \quad |\omega(f)| = \left| \lim_{x\to+\infty} f(x) \right| \le \lim_{x\to+\infty} |f(x)| \le \|f\|.$$

3) En vertu de la deuxième formule de la moyenne, il existe pour tout x de $[0,+\infty[$ un réel c_x dans $[0,+\infty[$ tel que :

$$\int_0^x f(y)dy = xf(c_x).$$

Il en découle que pour tout f de E on a :

$$(\omega \circ u)(f) = \omega(u(f)) = \lim_{x\to+\infty} u(f)(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(y)dy,$$

$$= \lim_{x\to+\infty} f(c_x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \omega(f).$$

De même, la première formule de la moyenne permet de voir que :

$$\forall t \in [0,+\infty[\ \exists d_t \in [0,t] / \int_0^t e^{-(xy)^2} f(y)dy = f(d_t) \int_0^t e^{-(xy)^2} dy$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2} f(y)dy = \lim_{t\to\infty} f(d_t) \int_0^t e^{-(xy)^2} dy = \lim_{t\to\infty} f(d_t) \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-(xy)^2} dy$$

$$= \lim_{t\to\infty} f(d_t) \int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2x} \lim_{t\to\infty} f(d_t).$$

Ainsi, pour tout f de E on a immédiatement:

$$(\omega \circ v)(f) = \lim_{x \to +\infty} v(f)(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2} f(y)dy$$
$$= \lim_{t \to \infty} f(d_t) = \lim_{t \to +\infty} f(t) = \omega(f).$$

Sujet 12

1. Soient $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme et P_n l'application définie sur E par:

$$P_n(f)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right),\ n=1,2,...$$

1) Montrer que P_n est linéaire continue de norme 1.

2) On définit une autre application u de E dans E par:

$$f \mapsto u(f)/u(f)(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt.$$

Montrer que u est linéaire continue et calculer sa norme.

2. Soit $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme fondamentale $\|.\|_\infty$. On y définit une application réelle u par :

$$u(f)=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt-\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,dt.$$

1) Montrer que u appartient au dual E'.
2) Calculer sa norme.

Indication : On peut introduire la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ donnée par:

$$f_n(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in\left[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right] \\ -nx+\frac{n}{2} & \text{si } x\in\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right] \\ -1 & \text{si } x\in\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1\right] \end{cases}$$

3. Soit $(x_n)_n$ une suite d'un espace hilbertien H. Montrer que si les suites $(\|x_n\|)_n$ et $(\langle x_n,x\rangle)_n$ convergent vers $\|x\|$ et $\langle x,x\rangle$ respecvement, alors la suite $(x_n)_n$ converge vers x dans H.

Solution

1. 1) P_n est linéaire :

$$P_n(\alpha f+\beta g)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} (\alpha f+\beta g)\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\alpha\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)+\beta\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right)$$

P_n est continue :

Soit f une fonction de E. En remarquant que :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = ((1-x)+x)^n = 1,$$

on obtient aisément :

$$|P_n(f)|=\left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$\leq\|f\|\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \|f\|.$$

P_n est de norme 1 :

D'après le calcul précédent on a $\|P_n\|\leq 1$. D'autre part, pour $f_0\equiv 1$ on a :

$$|P_n(f_0)|=\left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right|=1\leq\|P_n\|.$$

Donc, $\|P_n\|=1$.

2) La linéarité de u est de celle de l'intégrale de Riemann. Elle est aussi continue car pour tout f de E on a :

$$\|u(f)\| = \sup_{0\le x\le 1}|u(f)(x)| = \sup_{0\le x\le 1}\left|\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt\right| \le \sup_{0\le x\le 1}\int_0^x \left|\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt\right|$$

$$\le \|f\| \sup_{0\le x\le 1}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{x-t}}dt \le 2\|f\| \sup_{0\le x\le 1}\sqrt{x} = 2\|f\|.$$

A la lumière de ce calcul, sa norme vérifie $\|u\| \le 2$. De plus, en choisissant dans la boule unité fermée de E la fonction $f_0 \equiv 1$ on obtient :

$$\|u(f_0)\| = \sup_{0\le x\le 1}|u(f_0)(x)| = \sup_{0\le x\le 1}\left|\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}dt\right| = \sup_{0\le x\le 1} 2\sqrt{x} = 2 \le \|u\|.$$

D'où $\|u\| = 2$.

2. 1) u hérite sa linéarité de celle de l'intégrale de Riemann. Elle est aussi continue car elle vérifie :

$$|u(f)| = \left|\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt\right| \le \int_0^{\frac{1}{2}}|f(t)|\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(t)|dt \le \int_0^1 |f(t)|\,dt \le \|f\|_\infty$$

2) De ce qui précède on déduit aussitôt $\|u\| \le 1$. Par ailleurs, en recourant à la suite suggérée, on la trouve dans la boule unité fermée de E et satisfait à :

$$|u(f_n)| = \left|\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} dt + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}}\left(-nx+\frac{n}{2}\right)dt - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\left(-nx+\frac{n}{2}\right)dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 dt\right|$$

$$= \left|1-\frac{1}{n}\right| = 1-\frac{1}{n} \le \|u\| \le 1.$$

D'où :

$$1 = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) \le \|u\| \le 1.$$

Par suite, $\|u\| = 1$.

3. On a :

$$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle = \langle x_n, x_n\rangle - 2\langle x_n, x\rangle + \langle x, x\rangle.$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\langle x_n, x\rangle\right) = \langle x, x\rangle = \|x\|^2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\langle x_n, x_n\rangle\right) = \langle x, x\rangle = \|x\|^2,$$

il vient $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|^2 = 0$ et donc $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$. D'où la question.

Sujet 13

1. Soient $H=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $u: H\times H \to \mathbb{R}$ l'application définie par:

$$u(f,g)=\int_0^1 (f(x)g(x)+f'(x)g'(x))dx.$$

1) Montrer que u est un produit scalaire sur H.

2) Etant donnée la suite $(f_n)_n$ définie par:

$$f_n(x)=\begin{cases} nx & \text{si } 0\leq x\leq \dfrac{1}{n^4},\\ \dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}-\dfrac{1}{3n^3} & \text{si } \dfrac{1}{n^4}\leq x\leq 1; \end{cases}$$

montrer que :

i) f_n appartient à H quel que soit n dans $\mathbb{N}^*$.

ii) $(f_n)_n$ est de Cauchy.

iii) H n'est pas de Hilbert.

2. Soit E un espace préhilbertien réel.

1) Montrer que:

$$\forall\ (x,y)\in E^2\ \ 1+\|x+y\|^2\leq 2\left(1+\|x\|^2\right)\left(1+\|y\|^2\right).$$

2) Etant donnés deux réels $d>\delta>0$, on note $B_f(0,d)$ et $B_f(0,d+\delta)$ les boules fermées de centres 0 et de rayon d et $d+\delta$ respectivement. Soit A une partie convexe de E telle que :

$$A\subset B_f(0,d+\delta)\setminus B_f(0,d).$$

3) Montrer que:

$$\forall\ (x,y)\in A^2\ \ \|x-y\|<2\sqrt{3d\delta}.$$

3. Calculer :

$$J=\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x-ax-b)^2dx.$$

Solution

1. 1) En vertu de la linéarité et de la symétrie de l'intégrale de Riemann et de l'opération de dérivation, u est une forme bilinéaire symétrique. Elle est aussi clairement définie positive :

$$\forall f \in E\setminus\{0\} \quad u(f,f)=\int_0^1 \left((f(x))^2+(f'(x))^2\right)dx>0.$$

Donc, u est un produit scalaire.

2) i) Sur $\left[0,\frac{1}{n^4}\right[$ et $\left]\frac{1}{n^4},1\right]$, f_n est continument dérivable comme fonction élémentaire. En $\frac{1}{n^4}$ on a :

$$\lim_{x\to\frac{1}{n^4}^+}\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}-\frac{1}{3n^3}\right)=\frac{4}{3}\frac{1}{n^3}-\frac{1}{3n^3}=\frac{1}{n^3}=\lim_{x\to\frac{1}{n^4}^-} nx=f\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Donc, f_n y est continue. De plus, on a :

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f_n\left(\frac{1}{n^4}+h\right)-f_n\left(\frac{1}{n^4}\right)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{n\left(\frac{1}{n^4}+h\right)-\frac{1}{n^3}}{h}=n;$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f_n\left(\frac{1}{n^4}+h\right)-f_n\left(\frac{1}{n^4}\right)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\left(\frac{4}{3}\left(\frac{1}{n^4}+h\right)^{\frac{3}{4}}-\frac{1}{3n^3}\right)-\frac{1}{n^3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\left(\frac{1}{n^4}+h\right)^{\frac{1}{4}}}=n.$$

Donc, f_n est dérivable en $\frac{1}{n^4}$. Bien plus, on a $f_n'\left(\frac{1}{n^4}\right)=n$. On peut à présent affirmer que:

$$f_n'(x)=\begin{cases} n & \text{si } 0\le x\le \dfrac{1}{n^4}, \\ x^{-\frac{1}{4}} & \text{si } \dfrac{1}{n^4}\le x\le 1. \end{cases}$$

Enfin, cette dérivée étant continue sur $[0,1]$ on conclut que f_n y est de classe $\mathscr{C}^1$. Autrement dit, f_n appartientà H.

ii) Etant donnés deux entiers naturels p et q tels que $p>q>0$ on a :

$$\|f_p-f_q\|^2=\int_0^{\frac{1}{p^4}}\left((p-q)^2x^2+(p-q)^2\right)dx+$$

$$+\int_{\frac{1}{p^4}}^{\frac{1}{q^4}}\left(\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}-\frac{1}{3p^3}-qx\right)^2+\left(x^{-\frac{1}{4}}-q\right)^2\right)dx+$$

$$+\int_{\frac{1}{q^4}}^{1}\left(\left(-\frac{1}{3p^3}+\frac{1}{3q^3}\right)^2\right)dx<\frac{1}{q^2}.$$

(Détaillez les calculs !). D'où :

$$\lim_{p,q\to\infty}\|f_p-f_q\|=\lim_{p,q\to\infty}\frac{1}{q}=0.$$

Ainsi, (f_n) est de Cauchy.

iii) Considérons la fonction réelle f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}$. Elle n'est pas dans H, car quoiqu'elle est continue sur $[0,1]$ elle n'est pas dérivable à droite de 0, puisque :

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{4}{3}h^{\frac{3}{4}}}{h}=\frac{4}{3}\lim_{h\to 0^+}h^{-\frac{1}{4}}=+\infty.$$

Ceci étant, calculons $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|$. On a :

$$\|f_n - f\|^2 = \int_0^{\frac{1}{n^4}} \left(f_n(x) - f(x)\right)^2 + \left(f_n'(x) - f(x)'\right)^2 dx +$$

$$+ \int_{\frac{1}{n^4}}^{1} \left(f_n(x) - f(x)\right)^2 + \left(f_n'(x) - f(x)'\right)^2 dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n^4}} \left(nx - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}\right)^2 + \left(n - x^{-\frac{1}{4}}\right)^2 dx + \int_{\frac{1}{n^4}}^{1} \left(-\frac{1}{3n^3}\right)^2 dx$$

$$= \frac{7}{3}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{9n^6} - \frac{183}{495}\frac{1}{n^{10}} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^{14}}.$$

D'où :

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{7}{3} + \frac{1}{9n^4} - \frac{183}{495}\frac{1}{n^8} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^{12}}} = 0.$$

Ainsi, la suite (f_n) converge vers f. Comme celle-ci n'est pas dans H, ce dernier ne peut être de Hilbert.

2. 1) En s'appuyant sur les deux inégalités fondamentales :

$$\forall x, y \in E \quad 2\|x\|^2\|y\|^2 \le \|x\|^2 + \|y\|^2; \quad |\langle x, y\rangle| \le \|x\|^2\|y\|^2,$$

on obtient sans peine:

$$1 + \|x + y\|^2 = 1 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \le 1 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|^2\|y\|^2$$

$$\le 1 + 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \le 2\left(1 + \|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

$$\le 2\left(1 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2\|y\|^2\right) = 2\left(1 + \|x\|^2\right)\left(1 + \|y\|^2\right).$$

2) On a par hypothèse:

$$\forall\, x \in A \quad d < \|x\| \le d + \delta.$$

En vertu de l'identité du parallélogramme on écrit :

$$\forall\, (x, y) \in A^2 \quad \|x - y\|^2 - \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

D'où :

$$\frac{1}{4}\|x-y\|^2=\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{1}{2}\|y\|^2-\left\|\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right\|^2.$$

Comme A est convexe il contient le point $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$, lequel vérifie :

$$-\left\|\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right\|^2<-d^2.$$

Il en résulte que :

$$\frac{1}{4}\|x-y\|^2<(d+\delta)^2-d^2=\delta^2+2d\delta<3d\delta.$$

Par suite :

$$\|x-y\|<2\sqrt{3d\delta}.$$

3. On considère l'espace de Hilbert $H=L^2([-\pi,\pi])$ muni de son produit scalaire usuel $\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$ et on note $\mathbb{R}_1[x]$ le sous-espace des polynômes réels du premier degré. On remarque que la distance de $x\mapsto f(x)=\sin x$ à $\mathbb{R}_1[x]$ est :

$$\inf\{\|f-P\|,P\in\mathbb{R}_1[x]\}=\inf\left\{\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x-P(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},P\in\mathbb{R}_1[x]\right\}$$

$$=\left(\inf\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x-P(x)|^2\,dx,P\in\mathbb{R}_1[x]\right\}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\mathbb{R}_1[x]=\{ax+b;\ a,b\in\mathbb{R}\}$, on affine encore :

$$\inf\{\|f-P\|,P\in\mathbb{R}_1[x]\}=\left(\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\left\{\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x-ax-b|^2\,dx\right)\right\}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{J}.$$

Ainsi, déterminer J revient à trouver la distance de f à $\mathbb{R}_1[x]$.

Cette distance est donnée par $\|f-P\|$, où P est le projeté orthogonal de f sur $\mathbb{R}_1[x]$. Pour déterminer P on observe que $f-P$ est orthogonal à $\mathbb{R}_1[x]$. En particulier, il est orthogonal à la base canonique $\{1,x\}$ de ce dernier. Cela donne le système :

$$\begin{cases} \pi b = 0, \\ 3 - \pi^2 a = 0; \end{cases}$$

lequel donne aussitôt $a = \dfrac{3}{\pi^2}$ et $b = 0$. Ainsi, le projeté en question est $P(x) = \dfrac{3}{\pi^2}x$. La distance de $\sin x$ à $\mathbb{R}_1[x]$ est alors:

$$\|\sin x - P(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin x - \frac{3}{\pi^2}x\right)^2 dx} = \sqrt{\pi + \frac{6}{\pi}} = \sqrt{J}.$$

D'où :

$$J = \pi + \frac{6}{\pi}.$$

Sujet 14

1. Calculer les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}$ dela fonction réelle f donnée sur son ensemble de définition par $f(x)=\dfrac{1}{chx}$.

2. Soient E un espace préhilbertien réel et $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ une famille de vecteurs unitaires de E. On suppose que:

$$\forall x\in E \ \sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle^2=\|x\|^2.$$

1) Montrer que B est orthonormale.
2) En déduire que B est une basehilbertienne de E.

3. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ munide sa base canonique B et on pose :

$$F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, x+y+z+t=0 \text{ et } x-y+z-t=0\}.$$

Quelle est la matrice relativement à B, de la projection orthogonale P_F sur F ?

Solution

1. La fonction f est définie, paire, continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. On a donc :

$$\|f\|_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{chx}=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{chx}=4\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=4\int_0^{+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$$

$$=4\int_1^{+\infty}\frac{du}{u^2+1}=4\,Arctgu\big]_1^{+\infty}=4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\pi.$$

$$\|f\|_2=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{ch^2x}}=\sqrt{2}\sqrt{\int_0^{+\infty}\frac{dx}{ch^2x}}=\sqrt{2}\sqrt{thx\big]_0^{+\infty}}=\sqrt{2}(1-0)=\sqrt{2}.$$

Enfin, le tableau de variations ci après:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{-shx}{ch^2x}$		$+$	$\vdots$	$-$	
$\dfrac{1}{chx}$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

ermet d'avoir immédiatement :

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} \frac{1}{chx} = \sup_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{chx} = 1.$$

2. 1) Il suffit de vérifier que B est orthogonale. Pour cela, on voit que pour tout indice i de $\{1,2,...,n\}$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \langle e_i, e_k \rangle^2 = \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \langle e_i, e_k \rangle^2 = \|e_i\|^2.$$

D'où :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \langle e_i, e_k \rangle^2 = 0 \iff \langle e_i, e_k \rangle = 0 \iff e_i \perp e_k.$$

C'est ce qu'on veut.

2) B est une base de E comme conséquence directe de l'égalité de Parseval[24].

3. Notons de prime abord que F est le sous-espace engendré par les vecteurs $T=(1,0,-1,0)$ et $U=(0,1,0,-1)$. Maintenant, si e_1, e_2, e_3 et e_4 sont les vecteurs de la base B, la matrice M requise de laprojection orthogonale P_F est de la forme :

24. Marc Antoine Des Chênes Parseval (27/4/1755 - 16/8/1836): Mathématicien Français. Il est célèbre pour cette égalité, qui est une formule fondamentale de la théorie des séries de Fourier.

$$M=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

où $(a_i)_{1\le i\le 4}$, $(b_i)_{1\le i\le 4}$, $(c_i)_{1\le i\le 4}$ et $(d_i)_{1\le i\le 4}$ sont les composantes des vecteurs $P_F(e_i)$ suivant la base B. Comme $P_F(e_i)$ appartient à F il s'écrit :

$$P_F(e_i)=\lambda_i T+\mu_i U=\lambda_i(e_1-e_3)+\mu_i(e_2-e_4)=\lambda_i e_1+\mu_i e_2-\lambda_i e_3-\mu_i e_4$$

Cela donne :

$$\lambda_1=a_1=-a_3, \mu_1=a_2=-a_4, \lambda_2=b_1=-b_3,\ \mu_2=b_2=-b_4, \lambda_3=c_1=-c_3$$
$$\mu_3=c_2=-c_4,\ \lambda_4=d_1=-d_3 \text{ et } \mu_4=d_2=-d_4.$$

Par ailleurs, T et U étant orthogonaux à chaque $P_F(e_i)$, ces compo-santes sont solutions des systèmes :

$$\begin{cases} P_F(e_i)=\lambda_i T+\mu_i U, \\ \langle e_i-P_F(e_i),T\rangle=0, \\ \langle e_i-P_F(e_i),U\rangle=0; \end{cases}$$

pour $i=1,2,3,4$. Effectuons les calculs. On a concernant (λ_1,μ_1):

$$\begin{cases} \langle e_1-\lambda_1 T-\mu_1 U,T\rangle=0 \\ \langle e_1-\lambda_1 T-\mu_1 U,U\rangle=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle(1-\lambda_1,-\mu_1,\lambda_1,\mu_1),(1,0,-1,0)\rangle=0 \\ \langle(1-a_1,-\mu_1,a_1,\mu_1),(0,1,0,-1)\rangle=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2\lambda_1=0 \\ -2\mu_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=\dfrac{1}{2}=a_1=-a_3 \\ \mu_1=0=a_2=-a_4 \end{cases}$$

De même, pour le reste on a successivement:

$$\begin{cases}\langle e_2-\lambda_2T-\mu_2U,T\rangle=0\\ \langle e_1-\lambda_2T-\mu_2U,U\rangle=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\langle(-\lambda_2,1-\mu_2,\lambda_2,\mu_2),(1,0,-1,0)\rangle=0\\ \langle(-\lambda_2,1-\mu_2,\lambda_2,\mu_2),(0,1,0,-1)\rangle=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2\lambda_2=0\\ 1-2\mu_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_2=0=b_1=-b_3,\\ \mu_2=\dfrac{1}{2}=b_2=-b_4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\langle e_3-\lambda_3T-\mu_3U,T\rangle=0\\ \langle e_3-\lambda_3T-\mu_3U,U\rangle=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\langle(-\lambda_3,-\mu_3,1+\lambda_3,\mu_3),(1,0,-1,0)\rangle=0\\ \langle(-\lambda_3,-\mu_3,1+\lambda_3,\mu_3),(0,1,0,-1)\rangle=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1-2\lambda_3=0\\ -2\mu_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_3=-\dfrac{1}{2}=c_1=-c_3\\ \mu_3=0=c_2=-c_4\end{cases}$$

$$\begin{cases}\langle e_4-\lambda_4T-\mu_4U,T\rangle=0\\ \langle e_4-\lambda_4T-\mu_4U,U\rangle=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\langle(-\lambda_4,-\mu_4,\lambda_4,1+\mu_4),(1,0,-1,0)\rangle=0\\ \langle(-\lambda_4,-\mu_4,\lambda_4,1+\mu_4),(0,1,0,-1)\rangle=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2\lambda_4=0\\ -1-2\mu_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_4=0=d_1=-d_3\\ \mu_4=-\dfrac{1}{2}=d_2=-d_4.\end{cases}$$

D'où :

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Sujet 15

1. 1) Montrer que la boule unité de tout espace normé est convexe.
2) En déduire qu'elle est connexe.

2. On munit l'espace vectoriel $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions réelles continue sur $[0,1]$ de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$ et on considère pour tout réel strictement positif h l'application réelle u_h définie sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ par :

$$u_h(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\,dx.$$

Démontrer que u_h est linéaire continue puis calculer sa norme.

3. On considère la fonction:

$$f(x)=(\pi^2-x^2)^2,\ x\in(-\pi,\pi).$$

1) Vérifier que:
$f(-\pi)=f(\pi)$, $f'(-\pi)=f'(\pi)$ et $f''(-\pi)=f''(\pi)$.
2) Donner la série de Fourier[25] de f sur $(-\pi,\pi)$.
3) Calculer la somme:

$$S=1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(n+1)^4}+\ldots$$

Solution

1. 1) Soit $B(0,1)$ la boule unité ouverte d'un espace normé $(E,\|.\|)$.

25. Joseph Fourier (21/3/1768-16/5/1830) : Mathématicien Français. Il étudia à l'Ecole Normale de Paris sous Lagrange et Laplace, entre autres. Il commença à enseigner à l'Ecole Polytechnique, puis fut appelé à participer à l'expédition de Napoléon en Egypte. Il a publié un nombre important de travaux en mathématiques pures et appliquées.

Pour tout réel λ de $[0,1]$ et tous x et y de $B(0,1)$ on a:

$$\|\lambda x-(1-\lambda)y\| \leq \lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\| < \lambda+(1-\lambda)=1.$$

Il en résulte que $\lambda x-(1-\lambda)y$ appartient à $B(0,1)$. Celle-ci est alors convexe.

Le cas la boule unité fermée est analogue.

2) C'est une conséquence immédiate de la première question : Tout convexe est connexe par arcs, et donc connexe.

2. u_h hérite sa linéarité de celle de l'intégrale de Riemann. De plus, elle vérifie :

$$|u_h(f)| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}|f(x)|\,dx \leq \frac{2}{\pi}\|f\|_\infty \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}dx$$

$$\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{h}\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{h}\right)^2} = \frac{2\|f\|_\infty}{\pi}\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{4}\|f\|_\infty = \frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$

Donc, elle est continue. Enfin, ce calcul permet d'affirmer que :

$$\|u\| \leq \frac{1}{2}.$$

D'autre part, en considérant la fonction constante $f_0 \equiv 1$ on obtient:

$$|u_h(f_0)| = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{x}{h}\right)^2}\left(\frac{dx}{h}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \leq \|u\|.$$

La conjonction des deux inégalités donne la norme escomptée $\|u\| = \frac{1}{2}$.

3. 1) On a aisément:

$$f'(x) = -4x(\pi^2-x^2) \text{ et } f''(x) = -4x^2-4\pi^2.$$

D'où :

$$f(-\pi) = f(\pi) = 0 = f'(-\pi) = f'(\pi);$$

$$f''(-\pi) = f''(\pi) = -8\pi^2.$$

2) De façon générale, la série de f est de la forme :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx,$$

où :

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n\in\mathbb{N}^*,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n\in\mathbb{N}^*.$$

Dans le cas présent, f étant paire on déduit aussitôt que :

$$b_n = 0, \ \forall n\in\mathbb{N}^*;$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^4 - 2\pi^2x^2 + x^4)dx = \frac{16}{15}\pi^4;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)^2\cos nxdx = \frac{48}{n^4}(-1)^{n+1}.$$

La série voulue est donc :

$$\frac{16}{15}\pi^4 + 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n+1}}{n^4}\cos nx.$$

3) La fonction f est continue sur $]-\pi,\pi[$. Donc, la règle de Dirichlet s'applique et donne pour $x = 0$:

$$f(0) = \pi^4 = \frac{16}{15}\pi^4 + 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{16}{15}\pi^4 - 48S.$$

D'où :

$$S = \frac{\pi^4}{720}.$$

Sujet 16

1. Soient l'espace $E=\{f\in\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})\,/\,f(0)=f'(0)=0\}$ et N l'application définie sur E par $N(f)=\|25f+10f'+f''\|_\infty$.

1) Montrer que N est une norme sur E.

2) Pour tout entier naturel n et tout x de $[0,1]$ on pose $f_n(x)=x^n$. Calculer $N(f_n)$.

3) Les normes $\|.\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

2. Etant donné un entier naturel non nul p, on munit $\mathbb{R}^n$ de ses normes holderienne[26] $\|.\|_p$ et de la borne supérieure $\|.\|_\infty$.

1) Montrer que ces deux normes sont équivalentes.

2) Est-ce attendu ?

3) En déduire pour tout x de $\mathbb{R}^n$ la limite $\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p$.

3. 1) Les sous-espaces $(\mathbb{N},|.|)$ et $(\mathbb{Z},|.|)$ de l'espace usuel $(\mathbb{R},|.|)$ sont-ils compacts ? Localement compacts ? Connexes ? Justifier.

2) On considère dans l'espace $(\mathbb{R}^2,\|.\|_\infty)$ les sous-ensembles :

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^4=1\};$$

$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^3=4\}.$$

Montrer que A est compact alors que B ne l'est pas.

4. Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $[0,2\pi]$ par :

$$f(x)=\frac{(\pi-x)^2}{4}.$$

1) Tracer son graphe.

26. Lodwig-Otto Hölder (22/12/1859 – 29/8/1937) : Mathématicien Allemand. Ses domaines de prédilection sont l'analyse fonctionnelle et la théorie des nombres.

2) Déterminer sa série de Fourier.

3) Calculer les sommes des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^4}$.

Solution

1. 1) les conditions d'homogénéité et d'inégalité triangulaire sont évidentes. Examinons celle d'identité. Pour ce faire on résout le problème aux limites :

$$(*)\qquad \begin{cases} 25f+10f'+f''=0, \\ f(0)=f'(0)=0. \end{cases}$$

l'équation caractéristique $r^2+10r+25=(r+5)^2=0$, associée à la présente équation différentielles, admet la racine double $r=-5$. Il en résulte que la solution de (*) est :

$$\begin{cases} f(x)=(Cx+D)e^{-5x}, \\ f(0)=f'(0)=0; \end{cases}$$

ce qui donne $C=0$ et $D=0$. Par suite, $f\equiv 0$. Ainsi, N est une norme sur E.

2) On a :

$$N(f_n)=\sup_{0\le x\le 1}\left|25x^n+10nx^{n-1}+n^2x^{n-2}\right|=25+10n+n^2.$$

3) En gardant cette suite (f_n) on observe que le rapport:

$$\frac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty}=\frac{25+10n+n^2}{1}=25+10n+n^2,$$

tend vers l'infini ; c'est suffisant pour conclure que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes.

2. 1) Pour tout $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ on a immédiatement:

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|\le\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|x\|_p\le\left(n\left(\max_{1\le i\le n}|x_i|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}=n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty.$$

D'où l'équivalence annoncée.

2) Oui, car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie.

3) De ce qui précède on tire :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n}\,\|x\|_\infty .$$

Comme $\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{n}\,\|x\|_\infty = \|x\|_\infty$, le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

3. 1) Les deux espaces étant infinis discrets, sont localement compacts mais pas compacts ni connexes.

2) Signalons de prime abord que les sous-ensembles compacts de $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty\right)$ sont ceux qui sont fermés et bornés.

A présent, en remarquant que les fonctions :

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + y^4;$$
$$(x, y) \mapsto g(x, y) = x^2 + y^3,$$

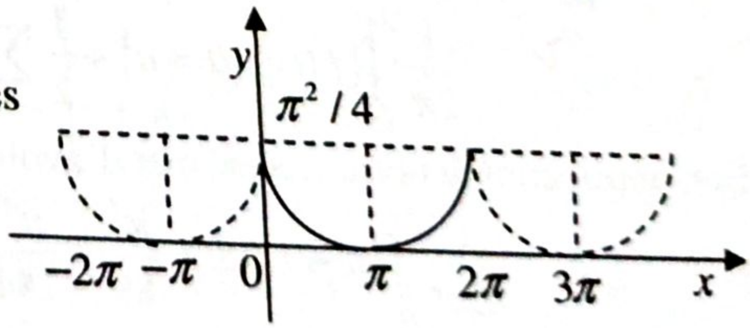
sont continues sur $\mathbb{R}^2$ on affirme que $A = f^{-1}(\{1\})$ et $B = g^{-1}(\{4\})$ sont fermés. Par ailleurs, concernant A on a par hypothèse :

$$x^2 + y^4 = 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq \max(x^2, y^4) \leq 1 \;\Rightarrow\; \max(|x|, |y|) \leq 1.$$

Donc, A est borné. Par suite, il est compact.

Maintenant, pour tout réel x le point $\left(x, \sqrt[3]{4 - x^3}\right)$ est dans B. Comme $\left\|\left(x, \sqrt[3]{4 - x^3}\right)\right\|_\infty \geq |x|$, on affirme que B est non borné, et donc non compact.

4. 1) Une petite étude des variations de f permet de voir queson graphe l'allure ci-contre.



2) Les coefficients de Fourier de la série de f sont :

$$b_0(f) = 0;$$

$$a_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)^2\,dx=\frac{1}{12}\pi^2;$$

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)^2\cos nx\,dx=\frac{1}{n^2},n\in\mathbb{N}^*;$$

$$b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)^2\sin nx\,dx=0;\ n\in\mathbb{N}^*.$$

La série de Fourier demandée est donc de la forme $\frac{\pi}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

3) Posons $S=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ et $T=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^2}$. La fonction f étant continue sur $]0,2\pi[$, la règle de Dirichlet permet d'avoir :

$$f(\pi)=0=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}+T.$$

Par suite, $T=-\frac{\pi^2}{12}$.

Aux extrémités 0 et 2π on a d'après la même règle précitée:

$$\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}+S=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)+\lim\limits_{x\to(2\pi)^-} f(x)}{2}=\frac{\pi^2}{4};$$

ce qui donne aussitôt $S=\frac{\pi^2}{6}$. Enfin, concernant la dernière somme on fait appel à l'égalité de Parseval, laquelle stipule que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(a_n^2+b_n^2).$$

Son application à notre cas permet d'avoir :

$$\frac{1}{32\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)^4\,dt=\frac{\pi^4}{80}=\frac{\pi^4}{144}+\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^4}.$$

D'où $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

Sujet 17

1. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées de n lignes et n colonnes.

   1) Montrerquel'application $N:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ donnée par :

$$N(A)=N((a_{ij}))=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|,$$

définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   2) Montrer que :

$$\forall A(a_{ij}),B(b_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\quad N(AB)\leq N(A)N(B).$$

2. On munit l'espace $E=\mathcal{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ de la norme uniforme et on considère l'application $u:E\to E$ définie pour tout f de E par:

$$u(f)(x)=\int_0^x tf(t)dt+x\int_x^1 f(t)dt.$$

   1) Vérifier que u est linéaire continue.
   2) Calculer la norme de u.
   3) L'équation $u(f)=f$ admet-t-elle dans E des solutions non nulles ?

3. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et paire donnée par:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\leq x<\dfrac{\pi}{2},\\[2mm] 0 & \text{si } x=\dfrac{\pi}{2},\\[2mm] -1 & \text{si } \dfrac{\pi}{2}<x\leq\pi.\end{cases}$$

   1) Calculer les coefficients de Fourier de f.
   2) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
   3) En déduire la somme des séries $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^p}{2p+1}$ et $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2p+1)^2}$.

Solution

1. 1) On a succinctement :

Condition d'identité:

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$N(A)=0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|=0 \Leftrightarrow \left|a_{ij}\right|=0,\ \forall(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$$

$$\Leftrightarrow a_{ij}=0,\ \forall(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2 \Leftrightarrow A=0.$$

Condition d'homothétie :

Soient λ un scalaire réel et A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$N(\lambda A)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda a_{ij}\right|=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|\lambda|\left|a_{ij}\right|=|\lambda|\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|=|\lambda|N(A).$$

Condition d'inégalité du triangle :

Soient $A(a_{ij})$ et $B(b_{ij})$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$N(A+B)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}+b_{ij}\right|\leq\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|a_{ij}\right|+\left|b_{ij}\right|\right)$$

$$\leq\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\right)+\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|b_{ij}\right|\right)\leq N(A)+N(B).$$

2) Rappelons que dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le produit d'une matrice $A(a_{ij})$ par une autre $B(b_{ij})$ est la matrice $C(c_{ij})$ dont chaque élément c_{ij} est donné par $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$. D'où :

$$N(AB)=N(C)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|c_{ij}\right|=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|$$

$$\leq\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}b_{kj}\right|=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|\left|b_{kj}\right|$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ik}\right|\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|b_{kj}\right|\right)=N(A)N(B).$$

1) u est linéaire car pour tous réels α et β et tous f et g de E on a:

$$u(\alpha f+\beta g)(x)=\int_0^x t\big(\alpha f(t)+\beta g(t)\big)\,dt+x\int_x^1\big(\alpha f(t)+\beta g(t)\big)\,dt$$

$$=\int_0^x t\alpha f(t)dt+x\int_x^1 \alpha f(t)dt+\int_0^x t\beta g(t)dt+x\int_x^1 \beta g(t)dt$$

$$=\alpha\left(\int_0^x tf(t)dt+x\int_x^1 f(t)dt\right)+\beta\left(\int_0^x tg(t)dt+x\int_x^1 g(t)dt\right)$$

$$=\alpha u(f(x))+\beta u(g(x))=\big(\alpha u(f)+\beta u(g)\big)(x).$$

Elle est aussi est continue, car pour tout f de E on a:

$$\|u(f)\|=\sup_{0\le x\le 1}|u(f)(x)|=\sup_{0\le x\le 1}\left|\int_0^x tf(t)dt+x\int_x^1 f(t)dt\right|$$

$$\le\|f\|\sup_{0\le x\le 1}\left(\int_0^x tdt+x\int_x^1 dt\right)\le\|f\|\sup_{0\le x\le 1}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\|f\|.$$

2) Du calcul précèdent on déduit aussitôt que :

$$\|u\|=\sup_{\|f\|_\infty\le 1}\|u(f)\|\le\frac{1}{2}.$$

Par ailleurs, en considérant la fonction constante $f_0\equiv 1$ sur $[0,1]$ on la trouve dans la boule unité fermée $B_f(0,1)$ de E. De plus, elle vérifie :

$$\|u(f_0)\|=\sup_{0\le x\le 1}|u(f_0)(x)|=\sup_{0\le x\le 1}\left|\int_0^x tdt+x\int_x^1 dt\right|=\sup_{0\le x\le 1}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\le\|u\|.$$

On en déduit finalement que $\|u\|=\frac{1}{2}$.

3) Non. En effet, u étant contractante de rapport $\frac{1}{2}$ et $\left(E,\|\cdot\|_\infty\right)$ de Banach, on affirme, d'après le théorème du point fixe, que l'équation en question admet une unique solution dans E. Comme 0 en est trivialement une, on déduit qu'aucun autre élément de E ne peut être solution.

3. 1) f étant paire, on a conformément aux formules consacrées :

$$b_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*;$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx\right) = 0;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx dx\right) = \frac{4}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ \dfrac{4}{(2p+1)\pi}(-1)^p & \text{si } n = 2p+1. \end{cases}$$

La série de Fourier de f est alors de la forme :

$$\frac{4}{\pi}\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^p}{2p+1}\cos(2p+1)x.$$

2) La fonction f est continue sur $\left]-\pi,\pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\}$. Donc, elle est, en vertu de la règle de Dirichlet, la limite simple de sa série de Fourier en tout point de ce domaine :

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^p}{2p+1}\cos(2p+1)x.$$

Aux points $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ cette série converge vers :

$$\frac{\lim\limits_{x\to\pm\frac{\pi}{2}^-} f(x)+\lim\limits_{x\to\pm\frac{\pi}{2}^+} f(x)}{2}=0.$$

3) En $x=0$ on obtient :

$$f(0)=1=\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

Donc, $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}=\frac{\pi}{4}$. De même, En utilisant l'égalité de Parseval,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{N}^*}(a_p^2+b_p^2),$$

il vient :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dt=1=\frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{N}^*}a_p^2=\frac{8}{\pi^2}\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2p+1)^2}.$$

D'où :

$$\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Sujet 18

1. On munit l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions réelles continument dérivables sur $[0,1]$ de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$ et on y considère la suite $(f_n)_n$ donnée sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n}}$.

1) Montrer que $(f_n)_n$ est de Cauchy.

2) Vérifier que la fonction réelle g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ n'est pas dans E.

3) Montrer que $(E, \|.\|_\infty)$ n'est pas de Banach.

2. Soit $E = \mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni de la norme fondamentale $\|.\|_2$. Pour tout entier naturel n on pose $f_n(x) = \cos nx$.

1) Calculer $\|f_p - f_q\|_2$ pour tous indices naturels distincts p et q.

2) Démontrer que E est de dimension infinie.

3. Soient a un réel strictement positif et f une fonction réelle 2π-périodique telle que:

$$f(x) = \begin{cases} sh ax & \text{si } -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{si } x = \pi. \end{cases}$$

1) Déterminer la série de Fourier de f.

2) En déduire que :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)}{(2p+1)^2 + a^2} = \frac{\pi}{4ch\frac{\pi a}{2}}.$$

Solution

1. 1) Soient p et q deux entiers naturels non nuls tels que $p > q$.

On a :

$$\|f_p - f_q\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1}\left|\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{p}}-\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{q}}\right|$$

$$= \sup_{0\le x\le 1}\frac{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}{\left|\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{p}}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{q}}\right|}\le\frac{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}{\sqrt{\frac{1}{p}}+\sqrt{\frac{1}{q}}}\le\sqrt{\frac{1}{q}}.$$

D'où $\lim\limits_{p,q\to\infty}\|f_p - f_q\|_\infty = \lim\limits_{q\to\infty}\sqrt{\frac{1}{q}} = 0$. Ainsi, (f_n) est de Cauchy.

2) Il est aisé de vérifier que g n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$. Elle ne peut conséquemment appartenir à E.

3) On remarque que :

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - g\|_\infty = \lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le 1}\left|\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{n}}-\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le 1}\frac{\frac{1}{n}}{\left|\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Ainsi, $(f_n)_n$ converge vers g. Comme cette dernière n'appartient pas à E on conclut que celui-ci n'est pas complet ; autrement dit, il n'est pas de Banach.

2. 1) En remarquant que :

$$(\cos px - \cos qx)^2 = (\cos px)^2 + (\cos qx)^2 - 2\cos px \cos qx$$
$$= \frac{1}{2}(2 + \cos 2px + \cos 2qx) - \cos(p+q)x - \cos(p-q)x,$$
il vient aussitôt :
$$\left\| f_p(x) - f_q(x) \right\|_2 = \sqrt{\int_0^\pi (\cos px - \cos qx)^2\, dx} = \sqrt{\pi}.$$

2) On déduit de ce calcul que ni la suite (f_n) ni aucune de ses sous-suites extraites ne peut être de Cauchy. Donc, aucune d'elles ne peut converger. Il en résulte que (f_n) n'admet pas de valeur d'adhérence. Par conséquent, la boule fermée $B_f\left(0, \sqrt{\pi}\right)$ la contenant est non compacte. L'homothétie $h : B_f(0, \sqrt{\pi}) \to B_f(0,1)$ donnée par $h(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x$, étant un homéomorphisme, on affirme que la boule unité fermée est, elle aussi, non compacte. Le théorème de F. Riesz permet de conclure que la dimension de E est infinie.

3. 1) f étant impaire, ses coefficients de Fourier sont :
$$b_0 = a_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N};$$
et pour tout entier naturel non nul n :
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi shax \sin nx dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{chax}{a}\sin nx - \int_0^\pi n\frac{chax}{a}\cos nx dx\right]\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{chax}{a}\sin nx - \frac{nshax}{a^2}\cos nx\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\frac{n^2}{a^2}\int_0^\pi shax \sin nx dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\frac{nsha\pi}{a^2}(-1)^n - \frac{n^2}{a^2}b_n.$$

D'où $b_n = \frac{2}{\pi}\frac{n\,sha\pi}{a^2+n^2}(-1)^n$. Ainsi, la série de Fourier de f est de la forme :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n \frac{2}{\pi}\frac{n}{a^2+n^2}sha\pi \sin nx.$$

2) La fonction f est continue sur $]-\pi,\pi[$, donc :

$$\forall x\in\,]-\pi,\pi[\quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n \frac{2}{\pi}\frac{n}{a^2+n^2}sha\pi \sin nx = shax.$$

En particulier, pour $x=\frac{\pi}{2}$ on obtient :

$$\sum_{p\in\mathbb{N}}(-1)^p \frac{2}{\pi}\frac{2p+1}{a^2+(2p+1)^2}sha\pi = sh\frac{a\pi}{2}.$$

Par suite :

$$\sum_{p\in\mathbb{N}}(-1)^p \frac{(2p+1)}{a^2+(2p+1)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{sh\frac{a\pi}{2}}{sha\pi} = \frac{\pi}{4ch\frac{a\pi}{2}}.$$

Sujet 19

1. On munit l'espace vectoriel $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ et on considère les deux applications réelles N et u définies respectivement sur les espaces $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})\times\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ par :

$$N(f)=\sqrt{f(0)^2+\int_0^1 f'^2(x)dx};$$

$$u(f,g)=f(0)g(0)+\int_0^1 f'(x)g'(x)dx.$$

1) Montrer que $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),u)$ est un espace préhilbertien.

2) En déduire que N est une norme sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

3) Montrer qu'il existe un réel $\alpha>0$ tel que $\|\cdot\|_\infty\leq\alpha N$.

4) Pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1]$ on pose $f_n(x)=\sin n\pi x$. Calculer $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n\|_u$.

5) En déduire que $\|\cdot\|_u$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

2. Montrer que tout sous-espace vectoriel propre F d'un espace vectoriel normé quelconque $(E,\|\cdot\|)$ est d'intérieur vide.

3. On munit l'espace $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de sa norme $\|\cdot\|_\infty$ et on considère le sous-espace :

$$F=\{f\in E\,/\,f(0)=f(1)\}.$$

1) Montrer que F est de Banach.

2) Déterminer son adhérence $\overline{F}$ et son intérieur de $\mathring{F}$.

Solution

1. 1) On a à montrer que u est un produit scalaire. Il est clair que u est une forme bilinéaire symétrique positive. Bien plus, elle est définie positive :

$$u(f,f) = (f(0))^2 + \int_0^1 (f'(x))^2 dx = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f' \equiv 0. \end{cases} \Rightarrow f \equiv 0.$$

Ainsi, u définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

2) N est tout simplement la norme $\sqrt{u(.,.)}$ associée à u.

3) Pour tout f de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et tout x de $[0,1]$ on a :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)dx.$$

En s'appuyant sur l'inégalité triangulaire de la valeur absolue et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ on obtient :

$$|f(x)| = \left| f(0) + \int_0^x f'(t)dt \right| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|dt$$

$$\leq |f(0)| + \sqrt{\int_0^x dt}\sqrt{\int_0^x ((f'(t))^2 dt} = |f(0)| + \sqrt{x}\sqrt{\int_0^x ((f'(t))^2 dt}.$$

D'où :

$$|f(x)|^2 \leq 2\left(|f(0)|^2 + x\int_0^x ((f'(t))^2 dt \right).$$

Par suite :

$$|f(x)| \leq \sqrt{2}\sqrt{|f(0)|^2 + x\int_0^x ((f'(t))^2 dt}.$$

Donc :

$$\|f\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1}|f(x)| \le \sqrt{2}\sqrt{(f(0)))^2 + \sup_{0\le x\le 1} x\int_0^x((f'(t))^2 dt} \le \sqrt{2}N(f).$$

Ainsi, il suffit de prendre $\alpha = \sqrt{2}$.

4) On a clairement :

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1}|\sin n\pi x| = \sin n\pi\left(\frac{1}{2n}\right) = 1;$$

$$N(f_n) = \sqrt{\int_0^1 (n\pi\cos n\pi x)^2 dx} = n\pi\sqrt{\int_0^1 \frac{1+\cos n\pi x}{2}dx} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}n.$$

5) Il ressort de ce calcul que le rapport $\dfrac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}n$ tend vers l'infini avec n. C'est suffisant pour affirmer que les deux normes en présence ne sont pas équivalentes.

2. F étant propre, son complémentaire $C_E F$ est non vide. Soit a un des points de ce dernier. Pour tout x de F et tout $\varepsilon > 0$ le point $x + \dfrac{\varepsilon}{2\|a\|}a$ est dans $C_E F$. Plus précisément, on a :

$$\left\|\left(x + \frac{\varepsilon}{2\|a\|}a\right) - x\right\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Donc, $x + \dfrac{\varepsilon}{2\|a\|}a$ est dans $B(x,\varepsilon)\setminus F$, où $B(x,\varepsilon)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon ε. Il en résulte que F ne peut contenir aucune boule ouverte centrée en x. Autrement dit, il ne peut être voisinage de x. Ainsi, son intérieur est vide.

3. 1) Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de F. Elle reste de Cauchy dans $(E, \|.\|_\infty)$, lequel est de Banach. Donc, elle y converge vers une fonction f. On écrit alors :

(*) $$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par ailleurs, on remarque que :

$$\begin{aligned}
|f(1) - f(0)| &= |f(1) - f_n(1) + f_n(1) - f_n(0) + f_n(0) - f(0)| \\
&= |f(1) - f_n(1) + f_n(0) - f(0)| \\
&\leq \underbrace{|f(1) - f_n(1)|}_{(I)} + \underbrace{|f_n(0) - f(0)|}_{(II)}.
\end{aligned}$$

L'estimation de ces deux termes (I), (II) donne d'après (*) :

$$n \geq n_0 \Rightarrow \max((I),(II)) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite :

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(1) - f(0)| \leq \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0.$$

Autrement dit :

$$|f(1) - f(0)| = 0.$$

D'où :

$$f(0) = f(1).$$

Ainsi, F contient la limite f. Il est alors de Banach.

2) F étant fermé, il coincide avec sa fermeture ; et comme c'est un sous-espace vectoriel propre de E, son intérieur est vide.

Conclusion : $\overline{F} = F$ et $\overset{\circ}{F} = \phi$.

Sujet 20

1. 1) Citer l'identité de la médiane dans un espace préhilbertien.

2) La démontrer.

2. On munit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ (le $\mathbb{R}$−espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$) de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ et on note D et P les parties de E constituées des fonctions dérivables et des fonctions polynomiales respectivement.

1) Etant donnée une fonction h de E on considère la suite (f_n) définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = h(x) + \frac{1}{n}\left|x - \frac{1}{2}\right|$.

i) Vérifier que f_n n'appartient pas à D.

ii) Montrer que (f_n) converge vers h.

2) i) Déterminer l'intérieur de D.

ii) En déduire l'intérieur de P.

iii) Obtenir ces intérieurs autrement.

3. Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 \left|e^x - ax - b\right|^2 dx$.

Solution

1. 1) Théorème de « l'identité de la médiane » :

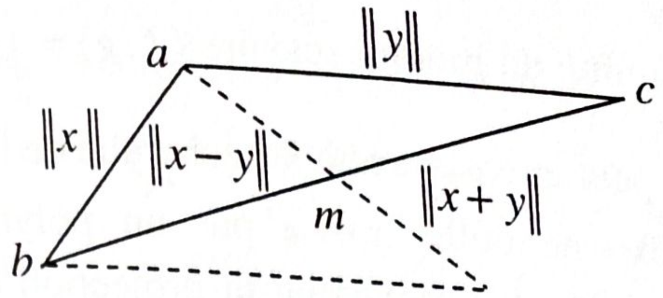
Etant donnés trois points$a$, b et c d'un espace préhilbertien H et m le milieu du segment $[bc]$.on a:

$$\|a-b\|^2 + \|a-c\|^2 = 2\|a-m\|^2 + \frac{1}{2}\|b-c\|^2.$$

2) Preuve :

Posons:

$\|a-b\| = \|x\|$, $\|a-c\| = \|y\|$, $\|b-c\| = \|x-y\|$, $2\|a-m\| = \|x+y\|$.



On sait que:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).$$

Par substitution on obtient:

$$4\|a-m\|^2+\|b-c\|^2=2\left(\|a-b\|^2+\|a-c\|^2\right).$$

En divisant par 2 les deux membres de cette égalité, on aboutit au résultat voulu.

2. 1. i) C'est bien le cas car elle n'est, pour le moins, pas dérivable en $\frac{1}{2}$.

ii) On a clairement:

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-h\|_\infty=\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le 1}|f_n(x)-h(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sup_{0\le x\le 1}\left|x-\frac{1}{2}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0.$$

Donc, $\lim_{n\to\infty}f_n=h$.

2) i) Il découle de (1) que tout élément h de E est limite d'une suite (f_n) du complémentaire $C_E D$ de D. Donc, $C_E D$ est partout dense dans E. Comme $\overline{C_E D}=C_E \overset{\circ}{D}$, on déduit aussitôt que $\overset{\circ}{D}$ est vide.

ii) On remarque que $P\subset D$, donc $\overset{\circ}{P}=\phi$.

iii) D et P jouissent tous deux de la structure de sous-espace vectoriel de E. Comme ils sont distincts de ce dernier leurs intérieures sont nécessairement vides.

3. Si l'on munit E du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 x^2 f(x)g(x)dx$, le problème peut être ramené à la recherche de l'approximation de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ par un polynôme du premier degré. Autre-ment dit, on cherche la projection orthogonale de la dite fonction dans le sous-espace des polynômes du premier degré. Notons $P(x) = rx + t$ cette projection. Elle vérifie ce système:

$$\begin{cases} \langle e^x - rx - t, 1\rangle = \int_0^1 x^2(e^x - rx - t)dx = 0, \\ \langle e^x - rx - t, x\rangle = \int_0^1 x^3(e^x - rx - t)dx = 0; \end{cases}$$

lequel est équivalent à :

$$\begin{cases} e - 2 - \frac{r}{4} - \frac{t}{3} = 0, \\ -2e + 6 - \frac{r}{5} - \frac{t}{4} = 0. \end{cases}$$

Ce dernier a pour solution $r = -220e + 600$ et $t = 168e - 456$. Ainsi, la valeur cherchée est donnée par cette intégrale :

$$\int_0^1 x^2(e^x - (-220e + 600)x - 168e + 456)^2 dx.$$

Attaquez-la !!!

Sujet 21

1. On munit l'espace vectoriel $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions réelles continument dérivable sur $[0,1]$ du produit scalaire v donné par:

$$v(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)dx.$$

1) Déterminer l'orthogonal $\{f\}^\perp$ où f est la fonction définie par $f(x) = x^2$.

2) La famille (chx, shx) est-elle orthogonale ?

3) Déterminer la famille orthonormale (b_1, b_2) engendrant le même sous-espace que (x, e^x).

2. On note $\mathbb{R}_3[x]$ l'ensemble des polynômes réels de degré 3.

1) Montrer que l'application $v : \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ définie par $v(P,Q) = \int_0^{=\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[x]$.

2) Calculer $I = \inf\limits_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \left|x^3 + ax^2 + bx + c\right|^2 e^{-x}dx.$

3. Soit a un réel strictement positif

1) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $2\pi-$ périodique f définie sur $]-\pi,\pi]$ par $f(x) = e^{ax}$.

2) En déduire que :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{a}\coth a\pi - \frac{1}{a^2}.$$

Solution

1. 1) On a :

$$\{f\}^{\perp}=\left\{g\in /\, v(f,g)=f(0)g(0)+\int_0^1 f'(x)g'(x)dx=0\right\}$$

$$=\left\{g\in /\int_0^1 xg'(x)dx=0\right\}=\left\{g\in /\left(\left[xg(x)\right]_0^1-\int_0^1 g(x)dx\right)=0\right\}$$

$$=\left\{g\in /\int_0^1 g(x)dx=g(1)\right\}.$$

2) Non, car :

$$v(chx,shx)=ch0sh0+\int_0^1 shxchxdx=\int_0^1 sh2xdx$$

$$=\frac{1}{2}ch2x\Big]_0^1=\frac{1}{2}(ch2-1)\neq 0.$$

3) On a :

$$v(x,e^x)=\int_0^1 xe^x dx=xe^x-e^x\Big]_0^1=1\neq 0.$$

Donc, cette famille n'est pas orthogonale. Pour obtenir la famille (b_1,b_2) décrite, on fait appel au procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

En remarquant que $\sqrt{v(x,x)}=\sqrt{\int_0^1 dx}=1$ il est plausible de prendre $b_1(x)=x.$ De même, on prend $b_2=e^x-P_{[\{x\}]}=e^x-\lambda x.$

Comme b_2 est dans $\left[\{x\}\right]^{\perp}$ il vient :

$$v(b_2,x)=0 \;\Leftrightarrow\; \int_0^1 (e^x-\lambda)dx \;\Leftrightarrow\; 1-\lambda=0.$$

Par suite, $b_2=e^x-x.$ Or :

$$\|b_2\|=\sqrt{1+\int_0^1 (e^x-1)^2dx}=\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{e^2}{2}-2e},$$

donc, on doit en fin de compte prendre $b_2' = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{7}{2}+\dfrac{e^2}{2}-2e,}}(e^x - x).$

2. 1) L'application v est bien définie car l'intégrale qui la définit est convergente au voisinage de $+\infty$ grâce à la domination de e^{-x} sur les polynômes. Par ailleurs, la bilinéarité de v est évidente. De plus, elle est aussi symétrique. Enfin, elle est définie positive car si on a $v(P,P) = \int_0^{=\infty} (P(x))^2 e^{-x} dx = 0$, la continuité de la fonction $P \mapsto (P(x))^2 e^{-x}$ permet de déduire que celle-ci est nulle sur $\mathbb{R}_+$. Comme $e^{-x} > 0$ on conclut que P est nul sur $\mathbb{R}_+$ et donc $P \equiv 0$.

2) Déterminer la distance de $P(x) = x^2$ à l'espace des polynômes du premier degré $\mathbb{R}_1[x] = \{ax+b;\ a,b \in \mathbb{R}\}$ (relativement à la norme introduite revient à calculer :

$$\inf\{\|P-Q\|; Q \in \mathbb{R}_1[x]\} = \inf\left\{\left(\int_0^{+\infty} |x^2 - Q(x)|^2 e^{-x} dx\right)^{\frac{1}{2}}; Q \in \mathbb{R}_1[x]\right\}$$

$$= \left(\inf\left\{\left(\int_0^{+\infty} |x^2 - Q(x)|^2 e^{-x} dx\right); Q \in \mathbb{R}_1[x]\right\}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\left(\int_0^{+\infty} |x^2 + ax + b|^2 e^{-x} dx\right)\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{I}.$$

Ainsi, déterminer I revient à trouver la distance de x^2 à $\mathbb{R}_1[x]$.

$\mathbb{R}_1[x]$ est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $\mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire v. La distance d'un élément P de $\mathbb{R}_2[x]$ à $\mathbb{R}_1[x]$ est $\|P-Q\|$ où Q représente le projeté orthogonal de P sur

$\mathbb{R}_1[x]$. Pour déterminer ce dernier on observe que $P-Q$ est orthogonal à $\mathbb{R}_1[x]$. En particulier, il est orthogonal à la base canonique $\{1,x\}$ de ce dernier. Cela se traduit dans le cas présent par le système ci-après:

$$\begin{cases} v(x^2-ax-b,1)=0, \\ v(x^2-ax-b,x)=0; \end{cases}$$

lequel est équivalent à :

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty}(x^2-ax-b)e^{-x}dx=0, \\ \int_0^{+\infty}(x^2-ax-b)xe^{-x}dx=0; \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} 2-a-b=0, \\ 6-2a-b=0. \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(4,-2)$. Il en ressort ainsi que le projeté recherché est $Q(x)=4x-2$ et la distance de x^2 à $\mathbb{R}_1[x]$ est:

$$\|x^2-Q(x)\|=\sqrt{\int_0^{+\infty}(x^2-4x+2)^2e^{-x}dx}=\sqrt{28}=\sqrt{I}.$$

D'où $I=28$.

3. 1) En appliquant les formules requises donnant ces coefficients on obtient (après calculs à ré-entreprendre !) :

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}dx=\frac{1}{2a\pi}(e^{a\pi}-e^{-a\pi})=\frac{1}{a\pi}sha\pi.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\cos nxdx=\frac{2a}{a^2+n^2}\frac{(-1)^n}{\pi}sha\pi;\ n\in\mathbb{N}^*.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nx dx = -\frac{2n}{\pi}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2} sha\pi;\ n\in\mathbb{N}^*.$$

La série de Fourier de f est alors:

$$a_0 + \sum_1^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx =$$

$$= \frac{sha\pi}{a\pi} + sha\pi\left(\sum_1^{+\infty}\frac{2a}{a^2+n^2}\frac{(-1)^n}{\pi}\cos nx - \frac{2n}{\pi}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\sin nx\right).$$

Par ailleurs, la règle de Dirichlet permet d'obtenir pour $x=\pi$:

$$\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2} = \frac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{2} = cha\pi = \frac{sha\pi}{a\pi} + \frac{1}{\pi} sha\pi \sum_1^{+\infty}\frac{2a}{a^2+n^2}$$

$$= cha\pi = \frac{sha\pi}{a\pi} + \frac{1}{\pi} sha\pi \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2}.$$

D'où :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{a}\coth a\pi - \frac{1}{a^2}.$$

Remis à l'OPU, aujourd'hui Lundi 6 Mars 2017.

Sommaire

Il nous est apparu plus judicieux d'indiquer sommairement les notions autour desquelles est construit chaque sujet.

Etal topologique

Etal métrique

Etal normé

Achevé d'imprimer sur les presses de

L'OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

1, Place central - Ben Aknoun - ALGER