

Enseignement des Mathématiques

Dr. Yamina MILOUDI

**Cours
Détailés
&
Éxercices
Corrigés**

ANALYSE 3

L

M

D

Licence de Mathématiques, L2



Chapitre 1

Séries numériques

L'objet de l'étude des séries numériques est de donner un sens à des sommes infinies de nombres réels ou complexes et, éventuellement, de les calculer. Plus précisément, on s'intéresse au comportement de la suite des sommes partielles de la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : u_0, u_0 + u_1, u_0 + u_1 + u_2, \dots$. C'est ce qu'on appelle l'étude de la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$.

A de rares exceptions près, on ne saura pas calculer la limite éventuelle, appelée somme de la série. On tentera cependant de préciser sa nature (convergente ou divergente) ainsi que des équivalents asymptotiques.

1.1 Définitions et théorèmes généraux

1.1.1 Notion de séries

On supposera que le lecteur a déjà rencontré la notion des suites numériques et on introduit maintenant la notion des séries numériques.

Cependant, on a :

Définition 1.1.1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique (i.e., $u_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$). On associe, à cette suite, la suite

$$(S_n)_{n \in \mathbb{N}} = (S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots)$$

où $S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2, \dots$

$$\text{et } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

S_n est la somme des n premiers termes de la suite $(u_n)_n$, appelée la somme partielle d'ordre n et $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles.

L'expression suivante

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum u_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n \geq 0} u_n,$$

est appelée série numérique et u_n le $n^{\text{ième}}$ terme (ou terme général) de la série.

Remarque 1.1.1 Les suites considérées peuvent être définies dès $n = 0$, ou bien $n = 1$, ou bien à partir d'un certain entier n_0 plus grand. Cela n'a pas d'importance. On les supposera a priori définies à partir de $n = 0$, pour simplifier les notations.

Exemple 1.1.1 On considère la série définie par

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \dots \quad (1.1)$$

La série (1.1) est une série numérique de terme général $\frac{1}{n+1}$ et sa somme partielle d'ordre n est donnée par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}.$$

1.1.2 Nature d'une série numérique

Définition 1.1.2 On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est convergente. Autrement dit,

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente} \iff \exists S \in \mathbb{R} / \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S.$$

On dit que S est la somme de la série et on écrit :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

1.1. Définitions et théorèmes généraux

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ n'existe pas ou elle est infinie, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente.

Exemple 1.1.2 On étudie la nature des séries suivantes :

1. Soit la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$. Alors, la suite des sommes partielles de cette série est donnée par

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 = S.$$

Donc la série est convergente et sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

2. Soit maintenant la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$. Cette série est dite série géométrique de premier terme 1 et de raison $q = \frac{1}{2}$. Sa suite des sommes partielles est :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}, \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2.$$

Par conséquent la série est convergente et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

3. On considère la série

$$\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \dots$$

La suite des sommes partielles est

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right), \\
 &= \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{1+k}{k} \right), \\
 &= \sum_{k=1}^n [\ln(1+k) - \ln(k)], \\
 &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \dots + (\ln(n+1) - \ln(n)), \\
 &= \ln(1+n).
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(1+n)) = +\infty.$$

Ce qui prouve que la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ est divergente.

4. Soit la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$. On veut calculer la suite des sommes partielles de cette série i.e.

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = ?$$

On a $S_0 = 1$, $S_1 = 1 + (-1) = 0$, $S_2 = \sum_{k=0}^2 (-1)^k = 1$. Alors,

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ n'existe pas, et par conséquent $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ est divergente.

5. Soit $\sum_{n \geq 0} aq^n$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}$. Cette série est dite série géométrique de premier terme a et de raison q . On considère la suite des sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=0}^n aq^k = \begin{cases} a \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) & \text{si } q \neq 1 \\ (1+n)a & \text{si } q = 1 \end{cases}.$$

1.1. Définitions et théorèmes généraux

Comme,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } |q| < 1, \\ \infty & \text{si } q > 1, \\ \nexists & \text{si } q \leq -1. \end{cases}$$

On distingue les deux cas suivant :

1^{er} Cas : si $q = 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + n)a = \infty,$$

et la série est divergente.

2^{ème} Cas : si $q \neq 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & \text{si } |q| < 1, \\ \infty & \text{si } q > 1, \\ \nexists & \text{si } q \leq -1. \end{cases}$$

Ainsi la série

$$\sum_{n \geq 0} aq^n = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } |q| < 1, \\ \text{diverge} & \text{si } |q| \geq 1. \end{cases}$$

1.1.3 Condition nécessaire de convergence

Une condition nécessaire de convergence, élémentaire mais souvent utile pour justifier la divergence d'une série, est donnée par le résultat suivant :

Théorème 1.1.1 Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors son terme général u_n tend vers zéro. Autrement dit,

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Preuve Soit $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} u_n$. Comme

$\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S \text{ avec } S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

1.1. Définitions et théorèmes généraux

Sachant que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S \text{ et } (S_n - S_{n-1}) = u_n,$$

on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

■

Remarque 1.1.2 L'inverse n'est pas nécessairement vrai i.e., si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ peut être aussi bien convergente que divergente, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.1.3 La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ est convergente (voir exemple 1.1.2), alors que

$$u_n = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Et la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ est divergente (voir exemple 1.1.2), bien que

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En conséquence de ce qui précède, on a

Corollaire 1.1.1 Si le terme général u_n d'une série ne tend pas vers zéro, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente. Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0 \implies \sum_{n \geq 0} u_n \text{ diverge.}$$

Exemple 1.1.4 On considère la série de terme général u_n défini par :

$$u_n = \left(1 - \frac{\alpha}{n} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

On sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{n} \right)^n = e^{-\alpha} \neq 0.$$

Alors $\sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{\alpha}{n} \right)^n$ est divergente.

1.1. Définitions et théorèmes généraux

Proposition 1.1.1 *La suppression (ou l'addition) d'un nombre fini de termes dans une série n'affecte ni la convergence, ni la divergence de cette série. Ce qui est encore équivalent à*

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \iff \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n \text{ converge} \quad \forall p \geq 1.$$

Preuve On considère les deux séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1.2)$$

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n = u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \dots + u_{p+n} + \dots, \quad p \geq 1 \quad (1.3)$$

Soient $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la somme partielle de (1.2) et $\sigma_n = \sum_{k=1}^n u_{p+k}$ la somme partielle de (1.3). Alors, on a

$$S_{n+p} = \sum_{k=0}^{n+p} u_k = \sum_{k=0}^p u_k + \sum_{k=p+1}^{n+p} u_k = S_p + \sigma_n.$$

D'où,

$$\sigma_n = S_{n+p} - S_p \quad \forall p \text{ fixé.} \quad (1.4)$$

Par suite, si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$, et ce qui entraîne aussi que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n+p} = S. \quad (1.5)$$

De (1.4) et (1.5), il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = S - S_p.$$

D'où $\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ est convergente.

Inversement, si la série $\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ converge alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \sigma. \quad (1.6)$$

1.1. Définitions et théorèmes généraux

Chapitre 1. Séries numériques

Appliquant (1.6) dans (1.4), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n+p} = \sigma + S_p.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sigma + S_p.$$

D'où $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente. ■

Définition 1.1.3 On dit que les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

Remarque 1.1.3 Les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ définies dans la proposition 1.1.1 sont de même nature.

1.1.4 Propriété des séries numériques

Proposition 1.1.2 Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont convergentes et ont pour somme respectives S et T , alors la série $\sum_{n \geq 0} (\alpha u_n + \beta v_n)$ est convergente et a pour somme $\alpha S + \beta T$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i.e.,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} v_n. \quad (1.7)$$

Preuve On note S_n et T_n les sommes partielles des séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ respectivement i.e.,

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n v_k.$$

1.1. Définitions et théorèmes généraux

Soit M_n la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 0} (\alpha u_n + \beta v_n)$. Alors,

$$\begin{aligned} M_n &= \sum_{k=0}^n (\alpha u_k + \beta v_k) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^n u_k + \beta \sum_{k=0}^n v_k \\ &= \alpha S_n + \beta T_n. \end{aligned}$$

Et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = T$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \alpha S + \beta T$.
Ce qui signifie que $\sum_{n \geq 0} (\alpha u_n + \beta v_n)$ est convergente et (1.7) est satisfaite.

■

Exemple 1.1.5 Soit la série $\sum_{n \geq 2} w_n$ de terme général w_n défini par :

$$w_n = \frac{8n}{(n^2 - 1)^2} - 4 \cdot 5^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

On pose,

$$u_n = \frac{n}{(n^2 - 1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = 5^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Pour étudier la série $\sum_{n \geq 2} w_n$, il suffit d'étudier séparément les séries

$\sum_{n \geq 2} u_n$ et $\sum_{n \geq 2} v_n$. Puisque,

$$u_n = \frac{1}{4(n-1)^2} - \frac{1}{4(n+1)^2},$$

la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{4} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{(n+1)^2} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{5}{16}.$$

1.1. Définitions et théorèmes généraux

Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ a pour somme $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \frac{5}{16}$.

On étudie maintenant la série $\sum_{n \geq 2} v_n = \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{5}\right)^n$. Cette série est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{5} < 1$, donc convergente (voir exemple 1.1.2) et a pour somme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = T = \sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n} - \left(1 + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} - \frac{6}{5} = \frac{1}{20}.$$

Ainsi la série $\sum_{n \geq 0} \alpha u_n + \beta v_n = \sum_{n \geq 0} (8u_n - 4v_n)$ est convergente, comme combinaison linéaire de séries convergentes, et on a

$$\sum_{n=2}^{\infty} w_n = 8 \frac{5}{16} - 4 \frac{1}{20} = \frac{23}{10}.$$

Lemme 1.1.1 Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente et $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente alors $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ est divergente.

Preuve on raisonne par l'absurde. On suppose que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente et $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ est convergente. Comme

$$v_n = (u_n + v_n) - u_n,$$

Il résulte que $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente d'après la proposition précédente.

Ce qui contredit l'hypothèse de divergence de la série $\sum_{n \geq 0} v_n$. Par conséquent, $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ est divergente. ■

Remarque 1.1.4 Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont divergentes, on ne peut pas déduire la nature de $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$. C'est à dire la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ peut être convergente ou divergente suivant les cas.

L'exemple suivant illustre cette situation.

1.1. Définitions et théorèmes généraux

Exemple 1.1.6 1. On considère les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ avec $u_n = 1$

$$\text{et } v_n = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Ces deux séries sont divergentes puisque leur terme général ne tend pas vers 0. Mais,

$$\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n) = \sum_{n \geq 0} \left(2 + \frac{1}{n+1} \right)$$

est divergente.

2. Soient maintenant $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ avec $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n+1}$. Ces deux séries sont appelées séries harmoniques et elles sont divergentes (on montrera plus loin la divergence de la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$). Par contre la série

$$\sum_{n \geq 1} (u_n + v_n) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

est convergente (cf. l'exemple 1.1.2).

1.1.5 Reste d'une série convergente

Définition 1.1.4 On appelle reste d'ordre n de la série convergente $\sum_{n \geq 0} u_n$, la série notée $\mathcal{R}_n$ telle que

$$\mathcal{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

On a alors,

Proposition 1.1.3 Si la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente alors son reste tend vers zéro. Autrement dit,

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \implies \mathcal{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

1.1. Définitions et théorèmes généraux

Preuve En effet, soit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, où

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Or,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S_n + \mathcal{R}_n.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{R}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S - S_n) = S - S = 0.$$

■

Remarque 1.1.5 On fait remarquer les points suivants :

- On ne peut parler du reste d'ordre n d'une série que si cette série est convergente. En effet, $\mathcal{R}_n$ est la somme des termes d'une série.
- Le reste $\mathcal{R}_n = S - S_n$ est l'erreur commise en approchant la somme S par la somme partielle d'ordre n de la série.

1.1.6 Critère de Cauchy pour les séries numériques

La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante de la convergence d'une série.

Proposition 1.1.4 Pour que la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ soit convergente il faut et il suffit qu'elle vérifie le critère de Cauchy suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, \left(n, m \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| < \varepsilon \right).$$

Preuve On a $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente $\iff (S_n)$ est convergente $\iff (S_n)$ est de Cauchy puisque $S_n \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui est complet. Par conséquent,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} : (n, m > N \Rightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon),$$

1.1. Définitions et théorèmes généraux

où $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Et comme

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^m u_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right|.$$

Donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} : \left(n, m > N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| < \varepsilon \right).$$

D'où le résultat. ■

Exemple 1.1.7 En utilisant le critère de Cauchy¹, on montre la nature des séries suivantes :

1. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente. En effet, on va montrer la propriété de Cauchy suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} : \left(\forall n, m > N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^m \frac{\sin k}{2^k} \right| < \varepsilon \right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on a,

$$\left| \sum_{k=n+1}^m \frac{\sin k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \left| \frac{\sin k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2^k}. \quad (1.8)$$

Or,

$$\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n} \right). \quad (1.9)$$

De plus, si $m > n$

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n} < 1.$$

Et par conséquent,

$$\frac{1}{2^n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n} \right) < \frac{1}{2^n}. \quad (1.10)$$

¹ Augustin Louis, baron Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique.

De (1.8) – (1.10), il vient

$$\left| \sum_{k=n+1}^m \frac{\sin k}{2^k} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi pour que $\left| \sum_{k=n+1}^m \frac{\sin k}{2^k} \right|$ soit plus petit que ε , il suffit que

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$n > \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln 2}.$$

Ainsi, il suffit de prendre $N = \left\lceil \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln 2} \right\rceil + 1$.

2. La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente. En effet, on montre que la propriété de Cauchy n'a pas lieu i.e.,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq N \text{ et } \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| \geq \varepsilon.$$

On prend $n = N$ et $m = 2N$, on aura

$$\left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| = \left| \sum_{k=N+1}^{2N} u_k \right| = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N}. \quad (1.11)$$

Or,

$$\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} \geq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \dots + \frac{1}{2N} = N \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}. \quad (1.12)$$

De (1.11) et (1.12), on déduit que

$$\left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| \geq \frac{1}{2}.$$

Il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

1.1. Définitions et théorèmes généraux

1.2 Séries numériques à termes positifs

Définition 1.2.1 On dira que la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ est à termes positifs si $u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

La proposition suivante donne une caractérisation de la convergence des séries à termes positifs.

Proposition 1.2.1 Une série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge ssi la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles est majorée i.e.,

$$\left(\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \right) \Leftrightarrow (\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq M),$$

où $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Preuve On montre l'implication $(\Leftarrow)$. On suppose que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ de $\sum_{n \geq 0} u_n$ est majorée, et on montre que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente. On a

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = S_{n-1} + u_n.$$

Donc,

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Ainsi,

$$S_n \geq S_{n-1} \quad \forall n$$

puisque $u_n \geq 0$. D'où, $(S_n)_n$ est croissante.

Ainsi $(S_n)_n$ est croissante et est majorée, donc elle est convergente. Ce qui montre que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

Inversement, on a par hypothèse $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente donc la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est convergente. Par conséquent $(S_n)_n$ est bornée, d'où majorée. ■

1.2. Séries numériques à termes positifs

Chapitre 1. Séries numériques

Exemple 1.2.1 On considère la série à termes positifs suivante :

$$\sum_{n \geq 1} u_n, \quad \text{où } u_n = \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On sait que

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall n > 1.$$

D'où,

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}, \\ &\leq 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right), \\ &\leq 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

Ainsi $(S_n)_n$ est majorée par 2. Par conséquent $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

On a alors le corollaire.

Corollaire 1.2.1 la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, avec $u_n \geq 0$ diverge si et seulement

si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Preuve La preuve découle du fait que $(S_n)_n$ est croissante mais non majorée. ■

1.2.1 Théorèmes de comparaison

En général, on ne sait pas calculer la somme d'une série. Par contre, grâce aux théorèmes de comparaison ci-dessous, on peut préciser sa nature en se ramenant à des séries plus simples. On donne le premier théorème de comparaison.

Théorème 1.2.1 Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs. Alors on a les implications suivantes :

1.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq u_n \leq v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{et} \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge.}$$

1.2. Séries numériques à termes positifs

2.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq u_n \leq v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{et} \\ \sum_{n \geq 0} u_n \text{ diverge} \end{array} \right. \implies \sum_{n \geq 0} v_n \text{ diverge.}$$

Preuve 1. Soient $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ les suites des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ respectivement. Alors, on a

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n.$$

Or

$$u_n \leq v_n, \quad \forall n.$$

Donc,

$$S_n \leq T_n \quad \forall n. \quad (1.13)$$

Alors, si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, on a d'après la proposition 1.2.1, $(T_n)_n$ est majorée. Et du fait qu'on a (1.13), on déduit que $(S_n)_n$ est aussi majorée. D'où $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

2. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge alors d'après le corollaire 1.2.1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

Et par (1.13), il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty.$$

Ce qui montre que $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge. ■

Remarque 1.2.1 On remarque ce qui suit :

1. On peut, dans le théorème 1.2.1, remplacer l'hypothèse $0 \leq u_n \leq v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ par l'hypothèse plus faible suivante :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq v_n.$$

1.2. Séries numériques à termes positifs

2. On peut adapter la théorème 1.2.1 au cas des séries à termes négatifs. Le plus commode, cependant, lorsque $u_n \leq 0, v_n \leq 0 \quad \forall n$, d'étudier les séries des opposées : $\sum_{n \geq 0} -u_n, \sum_{n \geq 0} -v_n$.

Exemple 1.2.2 En utilisant le théorème 1.2.1, cherchons la nature des séries suivantes :

1. Soit la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, où $u_n = \sin \frac{\pi}{2^n}$. On a alors l'inégalité :

$$0 \leq u_n = \sin \frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{2^n} = v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Or, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{\pi}{2^n} = \sum_{n \geq 0} aq^n$, avec $q = \frac{1}{2} < 1$ et $a = \pi$ est une série convergente. D'après le théorème 1.2.1 de comparaison, la série $\sum_{n \geq 0} \sin \frac{\pi}{2^n}$ est convergente.

2. On considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$, où $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Le terme général de cette suite vérifie :

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n \geq 1.$$

Et comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est une série harmonique divergente, alors $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est aussi divergente.

On présente maintenant le deuxième théorème de comparaison.

Théorème 1.2.2 Soient $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs. S'il existe $a > 0, b > 0$ et un entier naturel N tels que

$$\forall n \geq N, \quad a \leq \frac{u_n}{v_n} \leq b,$$

avec $v_n > 0$. Alors les deux séries sont de même nature.

Preuve la preuve découle du fait qu'on a

$$av_n \leq u_n \leq bv_n \quad \forall n \geq N.$$

1.2. Séries numériques à termes positifs

En effet, si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors d'après le théorème 1.2.1 de comparaison,

$\sum_{n \geq 0} av_n$ converge. Par conséquent $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge.

Et si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} bv_n$ converge. En utilisant le théorème

1.2.1, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. Ainsi,

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \iff \sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge.}$$

D'où les deux séries sont de même nature. ■

On a alors le troisième théorème de comparaison.

Théorème 1.2.3 Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs

telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$.

1. Si $0 < l < +\infty$ alors les deux séries sont de même nature, et dans ce cas les séries sont dites *l-équivalente*.

2. Si $l = 0$ et si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

3. Si $l = +\infty$ et si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge.

Preuve 1. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ alors par définition de la limite, il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : \left(n \geq N \implies \left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon \right). \quad (1.14)$$

C'est à dire que pour tout $n \geq N$, on a

$$l - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < l + \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$a \leq \frac{u_n}{v_n} \leq b,$$

où $a = l - \varepsilon$ et $b = l + \varepsilon$. En choisissant $0 < \varepsilon < l$, on obtient $a > 0$ et $b > 0$. Ainsi par application du deuxième théorème de comparaison, on déduit que les deux séries sont de même nature.

1.2. Séries numériques à termes positifs

2. Un raisonnement analogue à celui qui précède donne le résultat.
3. Découle de la définition de la limite dans le cas où $l = +\infty$ et de l'application du premier théorème de comparaison. ■

Exemple 1.2.3 Soient les séries numériques à termes positifs suivantes :
 $\sum_{n \geq 1} u_n$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$, $v_n = \frac{1}{n}$. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{(n+1)}} = 1.$$

Ainsi $l = 1$, d'où d'après le théorème précédent, les deux séries sont de même nature. Et comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente alors $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ l'est aussi.

Remarque 1.2.2 Si, en particulier, u_n est équivalente à v_n au voisinage de $+\infty$ (i.e., $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$), les deux séries à termes positifs $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature. Ce résultat est très utile en pratique.

Exemple 1.2.4 1. La série numérique de terme général $u_n = \frac{1}{n^2 + n + 1}$ est convergente puisque $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

2. La série numérique de terme général $u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ diverge car $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Enfin, on énonce le quatrième théorème de comparaison.

Théorème 1.2.4 Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries telles que $u_n > 0$, $v_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}. \quad (1.15)$$

Alors, on a les implications suivantes :

1. $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge $\implies \sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

1.2. Séries numériques à termes positifs

$$2. \sum_{n \geq 0} u_n \text{ diverge} \implies \sum_{n \geq 0} v_n \text{ diverge.}$$

Preuve En effet, de l'hypothèse (1.15) il vient

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \leq \dots \leq \frac{u_0}{v_0} = \lambda,$$

avec λ une constante strictement positive. Ainsi

$$u_n \leq \lambda v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par application du premier théorème de comparaison, on en déduit le théorème. ■

1.2.2 Règle de Cauchy

La règle de Cauchy est la comparaison d'une série à termes positifs avec une série géométrique. Le théorème suivant est appelé règle de Cauchy.

Théorème 1.2.5 Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs. On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

existe. Alors,

1. si $l < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
2. si $l > 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.
3. si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Preuve On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \in \mathbb{R}$. Donc, par définition de la limite, il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \implies |\sqrt[n]{u_n} - l| \leq \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\forall n \geq N, \quad l - \varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq l + \varepsilon. \quad (1.16)$$

1.2. Séries numériques à termes positifs

1. Si $l < 1$, on choisit $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$ pour que $q := l + \varepsilon < 1$. Ainsi, (1.16) devient

$$\sqrt[n]{u_n} < q \quad \forall n \geq N.$$

Ce qui implique que

$$u_n \leq q^n \quad \forall n \geq N.$$

Comme $\sum_{n \geq 0} q^n$ est une série géométrique convergente (car $0 < q < 1$), alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ est aussi convergente.

2. Si $l > 1$, on choisit $\varepsilon = \frac{l-1}{2}$ pour que $q := l - \varepsilon > 1$. En utilisant (1.16) vient

$$\sqrt[n]{u_n} \geq q \quad \forall n \geq N.$$

Ainsi,

$$u_n \geq q^n \quad \forall n \geq N.$$

Comme $\sum_{n \geq 0} q^n$ diverge (car $q > 1$), d'où par le premier théorème de comparaison $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

3. Si $l = 1$ on a par exemple :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2} \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Et,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n} \text{ diverge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

D'où, dans ce cas, on ne peut rien conclure en ce qui concerne la nature de la série. ■

Exemple 1.2.5 On considère la série de terme général u_n défini par : $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1} < 1 \quad (e = 2,7182).$$

D'où $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

1.2. Séries numériques à termes positifs

1.2.3 Règle de d'Alembert

La règle de d'Alembert² interviendra surtout lors de l'étude des séries entières (cf. chapitre 3). Le théorème suivant est appelé règle de d'Alembert.

Théorème 1.2.6 Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs. On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

existe. Alors,

1. si $l < 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
2. si $l > 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.
3. si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Preuve On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \mathbb{R}$ ce qui signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| \leq \varepsilon.$$

Alors,

$$\forall n \geq N, \quad l - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon. \quad (1.17)$$

1. Si $l < 1$, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $q := l + \varepsilon < 1$ (par exemple $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$) alors,

$$u_{n+1} \leq q u_n \quad \forall n \geq N.$$

Ainsi par induction, pour tout $n \geq N$

$$u_n \leq q^{n-N} u_N.$$

²Jean le Rond D'Alembert ou Jean Le Rond d'Alembert, né le 16 novembre 1717 à Paris où il est mort le 29 octobre 1783, est un mathématicien, philosophe et encyclopédiste français.

Il est célèbre pour avoir dirigé l'Encyclopédie avec Denis Diderot jusqu'en 1757 et pour ses recherches en mathématiques sur les équations différentielles et les dérivées partielles.

Par conséquent, pour tout $n \geq N$

$$u_n \leq q^n q^{-N} u_N = q^n c,$$

où c est une constante strictement positive. Comme $0 < q < 1$ alors $\sum_{n \geq 0} q^n$ est convergente et par le premier théorème de comparaison $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge aussi.

2. Si $l > 1$, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $q = l - \varepsilon > 1$ (par exemple $\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0$). Alors, de (1.17), on déduit que

$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q.$$

D'où,

$$u_{n+1} \geq q u_n \quad \forall n \geq N.$$

Or $q > 1$, donc,

$$u_{n+1} \geq u_n, \quad \forall n \geq N.$$

Ce qui veut dire que $(u_n)_n$ est croissante pour $n \geq N$. Par conséquent,

$$u_n \geq u_N, \quad \text{avec } u_N > 0.$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ d'où $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente.

3. Si $l = 1$, on distingue deux cas. Par exemple : la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2}$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 1.$$

Par contre la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n}$ diverge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} = 1.$$

■

Exemple 1.2.6 Par la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ où $u_n = \frac{2^n}{n!}$ est convergente. En effet,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

Et donc la série converge.

1.2. Séries numériques à termes positifs

Remarque 1.2.3 Si la limite de la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ n'existe pas, il se peut que la série $\sum u_n$ converge ou diverge. En effet, on considère les suites suivantes :

1. $u_n = (2 + (-1)^n) 2^{-n}$, ici, la limite de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ n'existe pas et $\sum u_n$ converge puisque c'est la somme de deux séries géométriques convergentes.
2. $u_n = (2 + (-1)^n)$, dans ce cas la limite de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ n'existe pas et $\sum u_n$ diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Remarque 1.2.4 Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Il est donc inutile d'essayer la règle de Cauchy si la règle de d'Alembert a conduit à une limite $l = 1$.

1.2.4 Règle de Duhamel

La règle de d'Alembert ne permet pas de décider de la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ lorsque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

C'est l'occasion d'utiliser une autre technique permettant d'établir la nature d'une série à termes strictement positifs. Cette technique est appelée règle de Duhamel³ et est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.2.7 Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs ($u_n > 0$). On suppose que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

³Jean-Marie Constant Duhamel, né à Saint-Malo le 5 février 1797 et mort à Paris le 29 avril 1872, est un mathématicien et physicien français. Professeur à l'École polytechnique et à la Faculté des sciences de Paris, membre de l'Académie des sciences, il est l'auteur de travaux sur les équations aux dérivées partielles, sur l'acoustique et la propagation de la chaleur.

1.2. Séries numériques à termes positifs

1. Si $\lambda > 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
2. Si $\lambda < 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Preuve 1. Si $\lambda > 1$, il existe α tel que $\lambda > \alpha > 1$. On pose

$$v_n = \frac{1}{n^\alpha}.$$

Alors,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha}.$$

Un développement limité au voisinage de l'infini à l'ordre 1 donne

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or $\lambda > \alpha$ donc $-\frac{\lambda}{n} < -\frac{\alpha}{n}$. Par conséquent,

$$1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) < 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

C'est à dire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

D'où par application du quatrième théorème de comparaison, on en déduit que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge puisque la série $\sum_{n \geq 1} v_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann⁴ convergente pour $\alpha > 1$. (on étudiera la nature de cette série plus loin, voir l'exemple 1.2.9)

2) Si $\lambda < 1$, on pose $v_n = \frac{1}{n}$. Alors,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

⁴Georg Friedrich Bernhard Riemann, né le 17 septembre 1826 à Breselenz, État de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania-Italia, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté de nombreuses contributions importantes à l'analyse et à la géométrie différentielle, certaines d'entre elles ayant permis par la suite le développement de la relativité générale.

1.2. Séries numériques à termes positifs

D'autre part, puisque $\lambda < 1$ alors

$$1 + \frac{-\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) > -\frac{1}{n} + 1 + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ce qui est équivalent à

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Et d'après le quatrième théorème de comparaison $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge puisque $\sum_{n \geq 1} v_n$ est une série harmonique divergente. ■

Exemple 1.2.7 On considère la série de terme général u_n défini par :

$$u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Alors,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right). \quad (1.18)$$

De plus, un développement limité au voisinage de l'infini de $\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}$ à l'ordre 1 donne

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (1.19)$$

En appliquant (1.19) dans (1.18), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 - \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right), \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Duhamel, on conclut que $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge puisque $\lambda = \frac{1}{2} < 1$.

1.2.5 Règle de Riemann ou " $n^\alpha u_n$ "

Cette règle est d'une utilisation très commode dans les exercices.

Proposition 1.2.2 Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs et α un nombre réel.

1. Si $\alpha > 1$ et si la suite $(n^\alpha u_n)_n$ tend vers 0, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
2. Si $\alpha \leq 1$ et si la suite $(n^\alpha u_n)_n$ tend vers $+\infty$, alors la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

Preuve La preuve est immédiate, elle découle en comparant la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ avec la série de Riemann $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$. ■

Exemple 1.2.8 La série numérique $\sum_{n \geq 0} e^{-2\sqrt{n}}$ converge puisqu'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-2\sqrt{n}} = 0$.

1.2.6 Comparaison d'une série à une intégrale.

Lorsque le terme général d'une série numérique correspond à une fonction facilement intégrable, l'étude de la série en découle très simplement.

Théorème 1.2.8 Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue positive et décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On pose :

$$u_n = f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ et l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ sont de même nature i.e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge} \iff \int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

Section 1.2. Séries numériques à termes positifs

Preuve Si $n \leq x \leq n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n), \quad (1.20)$$

puisque f est décroissante sur $[0, +\infty[$. On intègre l'inégalité (1.20) par rapport à $x \in [n, n+1]$, on obtient

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ce qui est encore équivalent à

$$u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.21)$$

Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } n=0, \text{ on a } u_1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq u_0, \\ \text{pour } n=1, \text{ on a } u_2 \leq \int_1^2 f(x) dx \leq u_1, \\ \cdot \qquad \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \cdot \\ \text{pour } n+1, \text{ on a } u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq u_n. \end{array} \right.$$

En sommant membre à membre, on aboutit à

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k \leq \int_0^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=0}^n u_k. \quad (1.22)$$

Section 1.2. Séries numériques à termes positifs

Si $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge alors, il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n+1} f(x) dx = l.$$

Donc,

$$\int_0^{n+1} f(x) dx \leq l \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.23)$$

De (1.22) et (1.23), on déduit que

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k \leq l.$$

La suite $\left(\sum_{k=1}^n u_k \right)_n$ étant croissante et est majorée par l , donc elle

converge. Par conséquent, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge et donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Inversement, si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = S.$$

Donc,

$$\sum_{k=0}^n u_k \leq S \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.24)$$

De (1.22) et (1.24), on conclut que

$$\int_0^{n+1} f(x) dx \leq S.$$

Donc $\left(\int_1^{n+1} f(x) dx \right)_n$ est majorée. De plus, cette suite d'intégrale est

croissante car f est positive donc convergente i.e., $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est conver-

Section 1.2. Séries numériques à termes positifs

gente. Ainsi on a le résultat

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \iff \int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

■

Remarque 1.2.5 De la preuve du théorème précédent, on remarque que rien n'est changé si au lieu de supposer f définie sur $[0, +\infty[$, on considère f définie sur $[N, +\infty[$, $N \in \mathbb{N}$. Plus précisément, si f est une fonction continue positive et décroissante sur l'intervalle $[N, +\infty[$ ($N \in \mathbb{N}$) avec $u_n = f(n)$. Alors, la série $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n$ et l'intégrale impropre $\int_N^{+\infty} f(x) dx$ sont de même nature.

Exemple 1.2.9 On considère la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ ($\alpha > 0$) et soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

Il est clair que f est continue et positive. De plus, elle est décroissante puisque

$$f'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1} < 0 \quad (\alpha > 0).$$

Par application du théorème précédent, $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ sont de même nature. Or,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1}, & \text{si } \alpha > 1, \\ \infty, & 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

C'est à dire que

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Section 1.2. Séries numériques à termes positifs

D'où,

$$\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Si de plus, $\alpha \leq 0$ alors $\frac{1}{n^\alpha} \geq 1$. Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0. En conclusion, on a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha > 1, \\ \text{diverge} & \text{si } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Exemple 1.2.10 La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ est de même nature que $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$.

Et comme,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \ln(\ln x) \Big|_2^a = +\infty.$$

Alors l'intégrale diverge, et par conséquent $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge aussi.

1.2.7 Encadrement du reste d'une série

Le résultat suivant donne un encadrement très simple du reste de la série dont le terme général est de la forme $u_n = f(n)$.

Proposition 1.2.3 Le reste $\mathcal{R}_n$ d'une série convergente de terme général $u_n = f(n)$ où f positive, continue et décroissante, vérifie l'encadrement suivant :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq \mathcal{R}_n \leq \int_n^{+\infty} f(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\text{où } \mathcal{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Section 1.2. Séries numériques à termes positifs

Preuve Il suffit d'utiliser les encadrements qui découlent de la preuve du théorème 1.2.8 (voir l'inégalité 1.21) suivants :

$$\int_k^{k+1} f(x) dx \leq u_k \leq \int_{k-1}^k f(x) dx,$$

et d'en faire la somme pour k de $n+1$ à l'infini. ■

1.3 Séries alternées

Parmi les séries qui ne sont pas de signe constant, il existe une classe intéressante, celle des séries dont le terme général est alternativement positif ou négatif.

Définition 1.3.1 On appelle série alternée toute série de la forme

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n \quad / \quad u_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 1.3.1 La série de terme général $u_n = (-1)^n \cdot e^{-n \cos n\pi}$ est une série alternée car

$$u_{2p} = e^{-2p} > 0 \quad \text{et} \quad u_{2p+1} = -e^{2p+1} < 0.$$

1.3.1 Théorème de Leibniz

On donne maintenant un critère de convergence spécifique aux séries alternées. Ce critère porte le nom du théorème de Leibniz⁵.

Théorème 1.3.1 Si une suite positive $(u_n)_n$ est décroissante et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Alors la série alternée $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ est convergente.

⁵Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzig, 1er juillet 1646 - Hanovre, 14 novembre 1716) est un philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand qui a écrit en latin, allemand et français.

Chapitre 1. Séries numériques

Preuve Soit $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ i.e.,

$$S_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots + (-1)^n u_n.$$

Afin de montrer que $(S_n)_n$ est convergente, il suffit de montrer que les sous-suites $(S_{2n})_n$, (S_{2n+1}) sont convergentes vers la même limite. On a alors,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \dots + (-1)^{2n-1} u_{2n-1} + (-1)^{2n} u_{2n} \\ &= (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \dots + (u_{2n-2} - u_{2n-1}) + u_{2n}. \end{aligned}$$

Or $(u_n)_n$ est décroissante i.e.,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n.$$

Donc $u_0 - u_1 \geq 0$, $(u_2 - u_3) \geq 0$, ..., $(u_{2n-2} - u_{2n-1}) \geq 0$. Et par conséquent,

$$S_{2n} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \dots + (u_{2n-2} - u_{2n-1}) + u_{2n} \geq 0, \quad \forall n$$

D'où $(S_{2n})_n$ est minorée par 0. Pour montrer qu'elle est convergente, il suffit de montrer qu'elle est décroissante. Alors, on a

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0,$$

puisque $(u_n)_n$ est décroissante. Par suite, $(S_{2n})_n$ est convergente. Soit $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = l.$$

D'autre part,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1},$$

alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - u_{2n+1}) = l,$$

car $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, $(S_n)_n$ est convergente. Ce qui montre que $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ est convergente. ■

Section 1.3. Séries alternées

Exemple 1.3.2 La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente car $u_n = \frac{1}{n} > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(u_n)_n$ est décroissante tendant vers 0.

Définition 1.3.2 Toute série alternée vérifiant les conditions du théorème de Leibniz (i.e. $u_n \geq 0$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $(u_n)_n$ décroissante) est appelée série de Leibniz.

1.3.2 Encadrement du reste d'une série alternée

Proposition 1.3.1 Le reste $\mathcal{R}_n$ de la série de Leibniz est en valeur absolue inférieure au premier terme négligé et a le signe de ce terme i.e.,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\mathcal{R}_n| \leq u_{n+1} \quad \text{et} \quad \text{sgn}(\mathcal{R}_n) = \text{sgn}(u_{n+1}).$$

Preuve On considère le reste $\mathcal{R}_{2m}$ défini par

$$\mathcal{R}_{2m} = -u_{2m+1} + (u_{2m+2} - u_{2m+3}) + (u_{2m+4} - u_{2m+5}) + \dots$$

D'où,

$$\mathcal{R}_{2m} = -(u_{2m+1} - u_{2m+2}) - (u_{2m+3} - u_{2m+4}) - \dots$$

D'ici et du fait que $(u_n)_n$ est décroissante, on déduit que

$$\mathcal{R}_{2m} \leq 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Ainsi,

$$|\mathcal{R}_{2m}| = -\mathcal{R}_{2m} = u_{2m+1} - u_{2m+2} + u_{2m+4} - \dots \leq u_{2m+1},$$

puisque $(u_n)_n$ est décroissante. Par conséquent, on a

$$\mathcal{R}_{2m} \leq 0 \quad \text{et} \quad |\mathcal{R}_{2m}| \leq u_{2m+1}. \quad (1.25)$$

D'autre part,

$$\mathcal{R}_{2m-1} = (u_{2m} - u_{2m+1}) + (u_{2m+2} - u_{2m+3}) + \dots$$

Section 1.3. Séries alternées

Et comme $(u_n)_n$ est décroissante, alors

$$\mathcal{R}_{2m-1} \geq 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

D'où,

$$|\mathcal{R}_{2m-1}| = \mathcal{R}_{2m-1} = u_{2m} - (u_{2m+1} - u_{2m+2}) - (u_{2m+3} - u_{2m+4}) \dots$$

En appliquant la décroissance de $(u_n)_n$, on trouve

$$|\mathcal{R}_{2m-1}| \leq u_{2m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

On a démontré ainsi que

$$\mathcal{R}_{2m-1} \geq 0 \quad \text{et} \quad |\mathcal{R}_{2m-1}| \leq u_{2m}. \quad (1.26)$$

De (1.25) et (1.26), on déduit que pour tout n ,

$$|\mathcal{R}_n| \leq u_{n+1} \quad \text{et} \quad \text{sgn}(\mathcal{R}_n) = \text{sgn}(u_{n+1}).$$

■

Remarque 1.3.1 La somme S d'une série de Leibniz est toujours comprise entre les sommes partielles S_n et S_{n+1} ceci découle du fait que les deux sous-suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont deux suites adjacentes. De plus, cette somme est du signe du premier terme u_{n_0} . En effet, on a

$$S = u_{n_0} + \mathcal{R}_{n_0} \quad \text{avec} \quad |\mathcal{R}_{n_0}| \leq u_{n_0+1} \leq u_{n_0}.$$

Plus généralement, chaque somme partielle S_n est du même signe que la somme S de la série.

Remarque 1.3.2 La proposition 1.3.1 est un résultat très pratique et permet d'obtenir une majoration du reste d'une série alternée. Voici un exemple illustratif :

Exemple 1.3.3 On veut déterminer l'entier n tel que la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$ approche la somme de la série à

Section 1.3. Séries alternées

moins de 10^{-6} près. Cette série étant une série de Leibniz, donc convergente. On a de la proposition 1.3.1,

$$|\mathcal{R}_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^3}.$$

Afin d'approcher la somme partielle d'ordre n de la série par la somme de la série à moins de 10^{-6} , il suffit de réaliser

$$\frac{1}{(n+1)^3} \leq 10^{-6}.$$

D'où, on prend $n = 100$.

1.4 Séries à termes de signes quelconques

La majorité des séries qu'on va étudier ne sont pas à termes positifs (ou négatifs, ce qui revient au même à un changement de signe près). Pour étudier une série de signe quelconque i.e., $\sum_{n \geq 0} u_n$ où $u_n \in \mathbb{R}$, on va appliquer les critères de convergence des séries à termes positifs à la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$. On introduit alors une nouvelle notion de convergence appelée convergence absolue.

1.4.1 Convergence absolue

On considère la série à termes de signe quelconque i.e., $\sum_{n \geq 0} u_n$ où $u_n \in \mathbb{R}$.

Définition 1.4.1 La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.

Exemple 1.4.1 On va étudier la convergence absolue des séries suivantes :

1. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n^2}$ est absolument convergente. En effet, on a

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Section 1.4. Séries à termes de signes quelconques

Et comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, alors $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right|$ converge aussi.

2. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ ne converge pas absolument car $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Théorème 1.4.1 Toute série absolument convergente est convergente i.e.,

$$\sum_{n \geq 0} |u_n| \text{ converge} \implies \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge.}$$

De plus, on a

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|. \quad (1.27)$$

Preuve La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ étant absolument convergente i.e., $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente. Alors, par application du critère de Cauchy, il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \left(\forall n, m \geq N \implies \left| \sum_{k=n+1}^m |u_k| \right| < \varepsilon \right).$$

Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \left(\forall n, m \geq N \implies \sum_{k=n+1}^m |u_k| < \varepsilon \right).$$

Or pour tout n, m ,

$$\left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |u_k|. \quad (1.28)$$

D'où,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \left(\forall n, m \geq N \implies \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| \leq \varepsilon \right).$$

D'après le critère de Cauchy, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Pour obtenir l'inégalité (1.27), il suffit de faire tendre m vers l'infini dans l'inégalité (1.28). ■

Section 1.4. Séries à termes de signes quelconques

Remarque 1.4.1 *La réciproque est fausse i.e.,*

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \not\Rightarrow \sum_{n \geq 0} |u_n| \text{ converge.}$$

En effet, La série de Leibniz $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge sans être absolument convergente (cf. exemple 1.4.1).

1.4.2 Semi-convergence

Définition 1.4.2 *On appelle série semi-convergente toute série convergente qui ne converge pas absolument.*

Exemple 1.4.2 *On considère la série de Riemann alternée*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \quad \text{où } \alpha > 0.$$

Cette série est convergente par application du théorème de Leibniz. Donc, elle est semi-convergente si $0 < \alpha \leq 1$.

Remarque 1.4.2 *Le théorème précédent permet de ramener l'étude d'une série à termes de signe quelconque en l'étude d'une série à termes positifs; cela permet d'utiliser tous les critères de convergence pour les séries à termes positifs, pour l'étude des séries à termes de signe quelconque. Mais, il faut être prudent pendant l'étude de la divergence car $\sum |u_n|$ diverge $\not\Rightarrow \sum u_n$ diverge. Par contre les règles de Cauchy et de d'Alembert font l'exception.*

1.4.3 Règle de Cauchy et de d'Alembert pour les séries à termes de signe quelconque

Ces deux règles s'appliquent à priori à des séries à termes positifs. Si l'on a une série $\sum u_n$ à termes de signe quelconque, on peut regarder la convergence absolue de la série en utilisant l'une ou l'autre de ces deux règles. Plus précisément, on applique ces deux règles à la série $\sum |u_n|$.

Section 1.4. Séries à termes de signes quelconques

On suppose que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l \text{ existe.}$$

Alors, on a

1. Si $l < 1$, la règle d'Alembert affirme que $\sum |u_n|$ est convergente. Par conséquent $\sum u_n$ converge.
2. Si $l > 1$, la règle d'Alembert affirme que le terme général $|u_n|$ tend vers $+\infty$. Par conséquent $\sum u_n$ est divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
3. Si $l = 1$, on ne peut pas conclure sur la nature de $\sum |u_n|$, et de même sur la série $\sum u_n$.

On a exactement les mêmes conclusions en appliquant la règle de Cauchy ($\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$).

Exemple 1.4.3 Pour étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$

où $u_n = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, on va considérer la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} |u_n| = \sum_{n \geq 1} n|x|^{n-1}$. L'idée est d'utiliser la règle de d'Alembert. Pour cela, on a pour $x \neq 0$ (le cas $x = 0$ est trivial),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)|x|^n}{n|x|^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} |x| = |x|.$$

Ainsi, on conclut par la règle de d'Alembert que

1. si $|x| < 1$ alors la série $\sum_{n \geq 1} n|x|^{n-1}$ converge, et par suite $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ converge aussi.
2. si $|x| > 1$ alors $|u_n| = n|x|^{n-1} \rightarrow +\infty$, et par conséquent $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ diverge.
3. si $|x| = 1$ alors $x = \pm 1$.

Si $x = 1$, on a $\sum_{n \geq 1} n$ diverge car $u_n = n \not\rightarrow 0$. Et si $x = -1$, on a $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n$ diverge puisque $u_n = (-1)^n n \not\rightarrow 0$.

Section 1.4. Séries à termes de signes quelconques

En conclusion, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } |x| < 1, \\ \text{diverge} & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

1.4.4 Critère de convergence d'Abel

Théoriquement un peu plus général que le théorème de Leibniz des séries alternées, le théorème d'Abel est utilisé surtout pour des séries dont le terme général est de la forme produit de deux suites numériques.

On considère la série $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ où $u_n, v_n \in \mathbb{R}$. Le théorème suivant est appelée le théorème de convergence d'Abel⁶.

Théorème 1.4.2 *On suppose que*

1. $(u_n)_n$ est décroissante, positive et tend vers zéro.
2. La suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est bornée i.e.,

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |S_n| \leq M, \quad (1.29)$$

$$\text{où } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \sum_{k=0}^n v_k.$$

Alors, $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ est convergente.

Preuve Pour montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ est convergente, il suffit de montrer qu'elle vérifie le critère de Cauchy i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}: \left(m, n \geq n_0 \implies \left| \sum_{k=n+1}^m u_k v_k \right| \leq \varepsilon \right).$$

⁶Niels Henrik Abel, né le 5 août 1802 à Frindø près de Stavanger et mort le 6 avril 1829 à Froland près d'Arendal, est un mathématicien norvégien. Il est connu pour ses travaux en analyse mathématique sur la semi-convergence des séries numériques, des suites et séries de fonctions, les critères de convergence d'intégrale généralisée, sur la notion d'intégrale elliptique ; et en algèbre, sur la résolution des équations.

Soit $\varepsilon > 0$, comme $u_n \geq 0$ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |u_n| = u_n \leq \varepsilon. \quad (1.30)$$

On a,

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} v_k = S_n + v_{n+1}.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} = S_{n+1} - S_n.$$

D'où,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n+1}^m u_k v_k \\ &= u_{n+1} v_{n+1} + u_{n+2} v_{n+2} + u_{n+3} v_{n+3} + \dots + u_m v_m, \\ &= u_{n+1} (S_{n+1} - S_n) + u_{n+2} (S_{n+2} - S_{n+1}) + \dots + u_m (S_m - S_{m-1}), \\ &= -u_{n+1} S_n + S_{n+1} (u_{n+1} - u_{n+2}) + \dots + S_{m-1} (u_{m-1} - u_m) + u_m S_m. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=n+1}^m u_k v_k \right| \\ & \leq |u_{n+1}| |S_n| + |S_{n+1}| |u_{n+1} - u_{n+2}| + \dots + |S_{m-1}| |u_{m-1} - u_m| \\ & \quad + |u_m| |S_m|. \end{aligned}$$

Or $(u_n)_n$ est décroissante i.e.,

$$u_n - u_{n+1} \geq 0 \quad \forall n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=n+1}^m u_k v_k \right| \\ & \leq |S_n| u_{n+1} + |S_{n+1}| (u_{n+1} - u_{n+2}) + \dots + |S_{m-1}| (u_{m-1} - u_m) \\ & \quad + u_m |S_m|. \end{aligned}$$

Et comme $(S_n)_n$ est bornée i.e.,

$$\exists M > 0 \quad / \quad \forall n \in \mathbb{N}, |S_n| \leq M.$$

Section 1.4. Séries à termes de signes quelconques

D'où,

$$\left| \sum_{k=n+1}^m u_k v_k \right| \leq M (u_{n+1} + (u_{n+1} - u_{n+2}) + \dots + (u_{m-1} - u_m) + u_m) = 2Mu_{n+1}. \quad (1.31)$$

De (1.30) et (1.31), on déduit que

$$\left| \sum_{k=n+1}^m u_k v_k \right| \leq 2M\varepsilon = \varepsilon', \quad \forall n \geq N.$$

Il suffit de prendre $n_0 = N$, et par conséquent $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ est convergente.

■

Le corollaire suivant est alors immédiat.

Corollaire 1.4.1 *Sous les mêmes hypothèses du théorème 1.4.2, le reste $\mathcal{R}_n$ d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ vérifie :*

$$\mathcal{R}_n = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k v_k \right| \leq 2Mu_{n+1},$$

où M est la constante vérifiant (1.29).

Preuve Ceci découle de la preuve du théorème d'Abel (cf. théorème 1.4.2) en faisant tendre m vers $+\infty$ dans l'inégalité (1.31). ■

Exemple 1.4.4 *On se propose d'étudier la nature de la série*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alors, on peut écrire cette série sous la forme :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n \geq 1} v_n u_n,$$

où $v_n = \sin nx$ et $u_n = \frac{1}{n}$. La suite $(u_n)_n$ est décroissante, positive et tendant vers 0. Vérifions maintenant la deuxième condition du théorème d'Abel i.e.,

$$|S_n| = \left| \sum_{k=1}^n v_k \right| \leq M \quad / \quad M > 0.$$

Section 1.4. Séries à termes de signes quelconques

On a,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sin kx = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx.$$

Et on sait que

$$\sum_{k=0}^n e^{ikx} = \sum_{k=0}^n \cos kx + i \sum_{k=0}^n \sin kx.$$

D'où,

$$\sum_{k=0}^n \sin kx = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right). \quad (1.32)$$

Or $\sum_{k=0}^n e^{ikx}$ est une somme d'une suite géométrique de raison e^{ix} , donc

$$\sum_{k=0}^n e^{ikx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \quad \text{si } x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Après calcul, on trouve

$$\operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \quad (1.33)$$

De (1.32) et (1.33), il vient

$$\sum_{k=0}^n \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Ainsi pour tout x fixé, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$|S_n| = \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right|.$$

Par conséquent,

$$|S_n| \leq \frac{|\cos \frac{x}{2}| + |\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x|}{2 |\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \quad \forall x \text{ fixé } x \neq 2k\pi.$$

D'où pour tout x fixé, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$|S_n| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} = M.$$

Section 1.4. Séries à termes de signes quelconques

Par application du théorème d'Abel, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}$ est convergente si $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 2k\pi$.

Maintenant, si $x = 2k\pi$ on obtient $\sin nx = 0$. Par suite, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}$ est convergente car c'est une série identiquement nulle. En conclusion la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.4.5 Groupement des termes

En général, la série obtenue en groupant des termes d'une série donnée peut converger sans que ce soit le cas de la série initiale : les sommes partielles de la série obtenue après groupement ne forment qu'une suite extraite de la suite des sommes partielles de départ.

On considère la série

$$\sum_{n \geq 0} u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \dots / u_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}.$$

On groupe les termes de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ avec la conservation de l'ordre.

On a alors,

$$\underbrace{(u_0 + u_1 + \dots + u_{n_1})}_{v_0} + \underbrace{(u_{n_1+1} + u_{n_1+2} + \dots + u_{n_2})}_{v_1} + \dots \\ + \underbrace{(u_{n_k+1} + \dots + u_{n_{k+1}})}_{v_k} + \dots$$

C'est à dire, on a obtenue la série :

$$\sum_{n \geq 0} v_n \text{ où } v_n = \sum_{p=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_p, \text{ et } \varphi(0) = 0, \varphi(k) = n_k + 1, \forall k \geq 1.$$

Définition 1.4.3 On dit que la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est déduite de la série

$\sum_{n \geq 0} u_n$ par le groupement des termes.

Section 1.4. Séries à termes de signes quelconques

On s'intéresse ici aux liens éventuels entre les natures de $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ et, dans le cas de convergence, aux liens de leurs sommes. On a alors

Proposition 1.4.1 *Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, et on a de plus,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Preuve Soit $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ les suites des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ respectivement i.e.,

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n,$$

et

$$T_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n.$$

On a donc,

$$T_0 = v_0 = u_0 + u_2 + \dots + u_{n_1} = S_{n_1},$$

$$T_1 = v_0 + v_1 = u_0 + \dots + u_{n_1} + u_{n_1+1} + \dots + u_{n_2} = S_{n_2},$$

.

.

.

$$T_k = v_0 + v_1 + \dots + v_k = u_0 + \dots + u_{n_{k+1}} = S_{n_{k+1}}.$$

D'où la suite $(T_n)_n$ est une sous-suite de $(S_n)_n$.

Puisque la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge i.e.,

$$\exists S \in \mathbb{R} \quad / \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S.$$

Alors la sous-suite $(T_n)_n$ de $(S_n)_n$ converge aussi, et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = S.$$

Section 1.4. Séries à termes de signes quelconques

D'où,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

■

Remarque 1.4.3 La réciproque de la proposition précédente est fausse,

i.e.,

$$\sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \not\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge},$$

comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.4.5 La série $\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n$ est divergente car sa suite des sommes partielles $(S_n)_n$ défini par

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases},$$

n'admet pas de limite. Mais, la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ obtenue par groupement de termes définie par

$$\sum_{n \geq 0} v_n = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) + \dots$$

converge puisque c'est la série nulle.

Remarque 1.4.4 La proposition précédente n'est guère intéressante, car elle suppose la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

On a ainsi le théorème de groupement de termes.

Théorème 1.4.3 Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série numérique et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante ; on note pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \sum_{p=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_p.$$

Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $(\varphi(n+1) - \varphi(n))_n$ est bornée alors les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature, et dans le cas de convergence, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{p=\varphi(0)}^{+\infty} u_p.$$

Preuve On suppose que $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq \varphi(0)$. Puisque $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, il existe un unique $n_N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\varphi(n_N) \leq N < \varphi(n_N + 1).$$

Alors,

$$\sum_{p=\varphi(0)}^N u_p = \sum_{p=\varphi(0)}^{\varphi(n_N)-1} u_p + \sum_{p=\varphi(n_N)}^N u_p. \quad (1.34)$$

Or pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^N v_n = \sum_{n=0}^N \left(\sum_{p=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_p \right) = \sum_{p=\varphi(0)}^{\varphi(N+1)-1} u_p. \quad (1.35)$$

De (1.34) dans (1.35), on déduit que

$$\sum_{p=\varphi(0)}^N u_p = \sum_{n=0}^{n_N-1} v_n + \sum_{p=\varphi(n_N)}^N u_p.$$

Il est clair que

$$\sum_{n=0}^{n_N-1} v_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n,$$

puisque $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge.

Pour conclure, il nous suffirait maintenant de savoir que

$$\sum_{p=\varphi(n_N)}^N u_p \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \quad (1.36)$$

Section 1.4. Séries à termes de signes quelconques

Pour cela, on a

$$\left| \sum_{p=\varphi(n_N)}^N u_p \right| \leq \sum_{p=\varphi(n_N)}^N |u_p| \leq \sum_{p=\varphi(n_N)}^{\varphi(n_{N+1})-1} |u_p|. \quad (1.37)$$

Ainsi, par passage à la limite dans (1.37) quand $N \rightarrow +\infty$, on conclut (1.36) car $u_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ et $(\varphi(n+1) - \varphi(n))_n$ est bornée. ■

1.4.6 Changement de l'ordre des termes

On s'intéresse à présent à la question suivante : est-il possible, sans changer la nature ni la somme d'une série, de permuter l'ordre des termes de la série ? On peut se convaincre sur des exemples que ces manipulations sur les termes d'une série peuvent modifier la nature de la série et que des hypothèses sur la série sont nécessaires pour que la nature et la somme de la série restent inchangées.

On considère la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, avec $u_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En permutant les termes (sans répétitions), on obtient la série de la forme :

$$\sum_{n \geq 0} v_n \quad \text{où} \quad v_n = u_{\varphi(n)},$$

et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection (dite aussi une permutation de $\mathbb{N}$).

La série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est déduite de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ par changement de l'ordre des termes.

Théorème 1.4.4 *Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente il en va*

de même pour la série $\sum_{n \geq 0} v_n$, et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Remarque 1.4.5 *Le théorème 1.4.4 signifie que la somme d'une série absolument convergente est indépendante de l'ordre des termes. Cette propriété n'est pas conservée pour les séries semi-convergente, comme le montre l'exemple suivant :*

Section 1.4. Séries à termes de signes quelconques

Exemple 1.4.6 On considère la somme de la série convergente de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ suivante :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

Permutons les termes de la manière suivante :

$$\sum_{n \geq 1} v_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \dots$$

C'est à dire un terme positif suivi de deux termes négatifs du type $\frac{1}{4n-2}$ et $\frac{1}{4n}$. Soient $(\sigma_n)_n$ et $(S_n)_n$ les suites des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} v_n$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ respectives. Alors,

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right), \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k} \right), \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2n}. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S = \ln 2.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} S_{2n} = \frac{\ln 2}{2}.$$

1.4.7 Produit de Cauchy de deux séries

Dans cette partie, on veut donner un sens "raisonnable" au produit de deux séries. Ce produit introduit une nouvelle série dont on veut savoir si elle converge et si sa somme est égale au produit des deux sommes des deux séries.

On considère deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$ où $u_n, v_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Section 1.4. Séries à termes de signes quelconques

Définition 1.4.4 On appelle produit de Cauchy des séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et

$\sum_{n \geq 0} v_n$, la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ de terme général :

$$w_n = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p}. \quad (1.38)$$

On peut représenter le terme w_n de la façon suivante :

	u_0	u_1	u_2	$\dots$	u_n
v_0	$u_0 v_0$	$u_1 v_0$	$u_2 v_0$	$\dots$	$u_n v_0$
v_1	$u_0 v_1$	$u_1 v_1$	$u_2 v_1$	$\dots$	$u_n v_1$
v_2	$u_0 v_2$	$u_1 v_2$	$u_2 v_2$	$\dots$	$u_n v_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
v_n	$u_0 v_n$	$u_1 v_n$	$u_2 v_n$	$\dots$	$u_n v_n$

De la formule 1.38, on a

$$w_0 = u_0 v_0, \quad w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0 \quad \text{et} \quad w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0.$$

Ainsi w_n est obtenu en faisant la somme des termes sur les diagonales ascendantes du tableau représenté ci-dessus.

Le théorème suivant appelé théorème de Cauchy donne une condition nécessaire sur la convergence de la série produit de Cauchy.

Théorème 1.4.5 Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont absolument convergentes alors $\sum_{n \geq 0} w_n$ est absolument convergente, et on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

Preuve On pose

$$A = \sum_{n \geq 0} u_n, \quad B = \sum_{n \geq 0} v_n, \quad A^* = \sum_{n \geq 0} |u_n| \quad \text{et} \quad B^* = \sum_{n \geq 0} |v_n|.$$

Alors les sommes partielles respectives de A , B , A^* , B^* sont :

$$A_n = \sum_{p=0}^n u_p, \quad B_n = \sum_{p=0}^n v_p, \quad A_n^* = \sum_{p=0}^n |u_p|, \quad \text{et} \quad B_n^* = \sum_{p=0}^n |v_p|.$$

Et les sommes partielles respectives des séries produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$

et $\sum_{n \geq 0} |w_n|$ sont notées par

$$W_n = \sum_{p=0}^n w_p \quad \text{et} \quad W_n^* = \sum_{p=0}^n |w_p|.$$

Il faut donc montrer que :

1. la suite $(W_n^*)_n$ est convergente.
2. $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n\right).$

La suite $(W_n^*)_n$ est telle que

$$\begin{aligned} W_n^* &= |w_0| + |w_1| + |w_2| + \dots + |w_n|, \\ &= |u_0 v_0| + |u_0 v_1 + v_0 u_1| + |u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0| + \dots \\ &\quad + |u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0|, \\ &\leq |u_0 v_0| + |u_0 v_1| + |v_0 u_1| + |u_0 v_2| + |u_1 v_1| + |u_2 v_0| + \dots \\ &\quad + |u_1 v_{n-1}| + \dots + |u_n v_0|, \\ &\leq (|u_0| + |u_1| + \dots + |u_n|) (|v_0| + |v_1| + \dots + |v_n|), \\ &\leq A_n^* B_n^* \leq A^* B^*. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite croissante $(W_n^*)_n$ est majorée par $A^* B^*$, et donc elle converge. Par conséquent $\sum_{n \geq 0} w_n$ est absolument convergente.

Pour montrer 2., on remarque qu'on peut changer et grouper les termes de la série $\sum_{n \geq 0} w_n$. On note

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + v_0 u_1) + (u_1 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_1) + \dots$$

Soit $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de S i.e.,

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 v_0 + (u_0 v_1 + v_0 u_1) + (u_1 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_1) + \dots \\ &= A_n B_n. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Section 1.4. Séries à termes de signes quelconques

En effet, on a

$$S_0 = u_0 v_0 = A_0 B_0, \quad S_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0 = (u_0 + u_1)(v_0 + v_1) = A_1 B_1 \text{ ect.}$$

Par passage à la limite dans (1.39), on obtient $S = A.B$. D'où le résultat.

■

Exemple 1.4.7 On cherche à calculer le produit suivant :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right),$$

où $|x| < 1$. Par la règle de d'Alembert $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x| < 1 \right)$, la série

$\sum_{n \geq 0} x^n$ est absolument convergente et sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi la produit de Cauchy de cette série par elle même est

	1	x	x^2	$\dots$	x^n
1	1	x	x^2	$\dots$	x^n
x	x	x^2	x^3	$\dots$	x^{n+1}
x^2	x^2	x^3	x^4	$\dots$	x^{n+2}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x^n	x^n	x^{n+1}	x^{n+2}	$\dots$	x^{2n}

Ainsi, on a

$$w_0 = 1, \quad w_1 = 2x, \quad w_2 = 3x^2, \dots, \quad w_n = (n+1)x^n.$$

Par application du théorème précédent, il vient pour $|x| < 1$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \right) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Section 1.4. Séries à termes de signes quelconques

1.5 Exercices avec solutions

Exercice 1.5.1 Calculer la somme de la série $\sum u_n$ dont le terme général est donné par :

- 1) $u_n = \frac{1}{n(n+2)}$, $n \geq 1$; 2) $u_n = \frac{(n+3)}{(n-1)n(n+1)}$, $n \geq 2$;
 3) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, $n \geq 1$; 4) $u_n = \arctan \frac{1}{n^2 + 3n + 3}$, $n \geq 0$;
 5) $u_n = nx^{n-1}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Solution 1.5.1 Calculons la somme de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

- 1) Soit $u_n = \frac{1}{n(n+2)}$, $n \geq 1$. On peut écrire u_n sous la forme

$$u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right).$$

Alors, la suite des sommes partielles d'ordre n de cette série est donnée par :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right), \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right], \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4}.$$

Donc la série est convergente et sa somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}.$$

- 2) Soit $u_n = \frac{(n+3)}{(n-1)n(n+1)}$, $n \geq 2$. En décomposant la fraction rationnelle en éléments simples, on peut écrire

$$u_n = -\frac{3}{n} + \frac{2}{(n-1)} + \frac{1}{(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Section 1.5. Exercices avec solutions

Par conséquent, la suite des somme partielles d'ordre n est

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) - \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right), \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right). \end{aligned}$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{2}.$$

Ainsi la série est convergente et sa somme :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n+3)}{(n-1)n(n+1)} = \frac{3}{2}.$$

- 3) Soit maintenant $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, $n \geq 1$. La suite des sommes partielles de $\sum u_n$ est

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}), \\ &= [(\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})], \\ &= \sqrt{n}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

Ce qui montre que la série est divergente.

- 4) Soit $u_n = \arctan \frac{1}{n^2 + 3n + 3}$, $n \geq 0$. En utilisant la formule suivante :

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \left(\frac{x-y}{1+xy} \right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : xy > -1.$$

le terme général de la suite $(u_n)_n$ peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \arctan \frac{1}{n^2 + 3n + 3} &= \arctan \frac{(n+2) - (n+1)}{1 + (n+2)(n+1)} \\ &= \arctan(n+2) - \arctan(n+1). \end{aligned}$$

Alors, la suite des sommes partielles de cette série est

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (\arctan(k+2) - \arctan(k+1)), \\ &= (\arctan 2 - \arctan 1) + (\arctan 3 - \arctan 2) + \dots \\ &\quad + (\arctan(n+2) - \arctan(n+1)), \\ &= \arctan(n+2) - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi la série est convergente et sa somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan \frac{1}{n^2 + 3n + 3} = \frac{\pi}{4}.$$

5) Soit $u_n = nx^{n-1}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Alors, la suite des sommes partielles d'ordre n de $\sum u_n$ est

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n kx^{k-1}, \\ &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^{n-1}. \end{aligned}$$

On remarque que

$$S_n = [\sigma_n(x)]',$$

où,

$$\sigma_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n.$$

Or σ_n est une somme d'une suite géométrique de raison x et de premier terme 1, d'où

$$\sigma_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{pour } x \neq 1.$$

Par conséquent, pour tout $x \neq 1$,

$$S_n = \left[\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right]' = \frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2}.$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } |x| < 1 \\ \infty \text{ ou } n' \text{ existe pas} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Si $x = 1$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} n$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0 (ici, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \neq 0$).

On conclut que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si $|x| < 1$, et sa somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Exercice 1.5.2 Etudier la nature des séries dont le terme général est donné ci-dessous :

1) $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n, \quad n \geq 1; \quad 2) u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad n \geq 1;$

3) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n\sqrt{n}}, \quad n \geq 1.$

Solution 1.5.2 On étudie la nature des séries suivantes :

1) La série $\sum u_n$ où $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$ est divergente car son terme général ne tend pas vers 0. En effet, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{2}.$$

2) La série $\sum u_n$ où $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ est divergente car son terme général ne tend pas vers 0. En effet, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left[n \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left[- \frac{\ln \left(\frac{1}{1+1/n} \right)}{1/n} \right] = e^{-1} \end{aligned}$$

puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{1}{1+1/n} \right)}{1/n} = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-1}.$$

3) La série $\sum u_n$ où $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n\sqrt{n}}$ est divergente car son terme général ne tend pas vers 0. En effet, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n\sqrt{n}}, \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left[-n\sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \right], \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left[- \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\ln \left(1 + 1/n^2 \right)}{1/n^2} \right] = 1, \end{aligned}$$

puisque,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 1/n^2)}{1/n^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Exercice 1.5.3 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_*^+$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2}.$$

- 1) Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
- 2) Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum w_n$ converge.
- 3) Montrer que si $\sum u_n$ diverge et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, alors $\sum w_n$ diverge.
- 4) Donner un exemple où $\sum u_n$ diverge et $\sum w_n$ converge.

Solution 1.5.3 Soient $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$ et $w_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$ où $u_n > 0$.

- 1) On montre que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Pour cela, on va utiliser le critère de comparaison car les séries sont supposées à termes positifs. On va calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\frac{u_n}{1 + u_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + u_n).$$

Si $\sum u_n$ converge alors son terme général u_n tend vers 0, et par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \neq 0.$$

Par application du troisième théorème de comparaison (cf. théorème 1.2.3), les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Et comme on a supposé que $\sum u_n$ converge, donc $\sum v_n$ converge aussi.

Inversement, on a par définition

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

Après calcul, on trouve

$$u_n = \frac{v_n}{1 - v_n}.$$

Si $\sum v_n$ converge alors son terme général v_n tend vers 0, et par suite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - v_n} = 1 \neq 0.$$

Par application du troisième théorème de comparaison (cf. théorème 1.2.3), les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Et comme $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi. Ainsi on a montré que

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge}.$$

C'est à dire que les deux séries sont de même nature.

- 2) On suppose que $\sum u_n$ converge et on montre que la série $\sum w_n$ l'est aussi. On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq w_n \leq u_n.$$

Donc si $\sum u_n$ converge, il en est de même pour la série $\sum w_n$ par le critère de comparaison des séries à termes positifs.

- 3) Si maintenant la série $\sum u_n$ diverge et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, alors

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n}{1 + u_n^2} \geq \frac{u_n}{1 + M^2}.$$

Or $\sum u_n$ diverge, donc $\sum \frac{u_n}{1 + M^2}$ diverge aussi. Et par conséquent la série $\sum w_n$ est divergente par application du critère de comparaison des séries à termes positifs.

Section 1.5. Exercices avec solutions

- 4) Il suffit de prendre $u_n = n^2$ pour avoir la convergence de $\sum w_n$ et la divergence de $\sum u_n$.

Exercice 1.5.4 Etudier la nature des séries suivantes :

- 1) $\sum_{n \geq 3} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$; 2) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \cos^2 n}$; 3) $\sum_{n \geq 1} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x} dx$;
 4) $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$; 5) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$; 6) $\sum_{n \geq 0} e^{-\sqrt{1+n}}$;
 7) $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n n!}{n^n}$, $a > 0$.

Solution 1.5.4 On étudie la nature des séries suivantes :

- 1) On fait remarquer que la série $\sum_{n \geq 3} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$ est à termes positifs
 $\left(\frac{4n-3}{n(n^2-4)} > 0\right)$. On vérifie qu'au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{4n-3}{n(n^2-4)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4n}{n^3} = \frac{4}{n^2}.$$

Alors par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, les deux séries $\sum_{n \geq 3} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$ et $\sum_{n \geq 3} \frac{4}{n^2}$ sont de même nature. Et

comme $\sum_{n \geq 3} \frac{4}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$),

alors la série $\sum_{n \geq 3} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$ l'est aussi.

- 2) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \cos^2 n}$ diverge. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \cos^2 n \leq 1.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n \cos^2 n} \geq \frac{1}{n}.$$

Par comparaison, la série $\sum \frac{1}{n \cos^2 n}$ diverge puisque la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

3) La série $\sum_{n \geq 1} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x} dx$ est convergente. En effet, on sait que

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right], \quad \sin x \leq x.$$

Par suite,

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{\pi}{n}} = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Or la série $\sum_{n \geq 2} \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{\frac{3}{2}}$ est une série de Riemann convergente avec

$$\alpha = \frac{3}{2} > 1. \text{ Il en résulte que } \sum_{n \geq 1} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x} dx \text{ converge.}$$

4) On obtient facilement un équivalent au voisinage de $+\infty$,

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}.$$

D'abord, on remarque que les séries $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n \geq 2} -\frac{1}{n^2}$ sont de signe constant. En effet, pour tout $n \geq 2$,

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \leq 0 \quad \text{car} \quad 0 < 1 - \frac{1}{n^2} \leq 1.$$

Donc, le critère de comparaison s'applique. Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge puisque la série de Riemann $\sum_{n \geq 2} -\frac{1}{n^2}$ est convergente.

5) $\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$ est une série à termes positifs. On considère la série harmonique

$$\sum_{n \geq 1} v_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n},$$

et on calcule la limite du rapport

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt{n}} \ln n}} = 1 \neq 0.$$

Section 1.5. Exercices avec solutions

Par application du troisième théorème de comparaison (cf. théorème 1.2.3), les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Et comme $\sum v_n$ diverge, il en est de même pour la série $\sum u_n$.

- 6) Pour étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} e^{-\sqrt{1+n}}$, on va appliquer la règle de Riemann ou " $n^\alpha u_n$ ". On a alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-\sqrt{1+n}} = 0,$$

puisque l'exponentielle l'emporte sur la fonction puissance. Il résulte de la règle de Riemann ou " $n^\alpha u_n$ " (cf. proposition 1.2.2) que la série $\sum_{n \geq 0} e^{-\sqrt{1+n}}$ est convergente.

- 7) $\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} \frac{a^n n!}{n^n}$, $a > 0$, est une série à termes positifs. On applique la règle de d'Alembert parce que le terme général de cette série contient des puissances $n^{\text{èmes}}$. Alors, on calcule le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{a^n n!} = a \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{a}{e}.$$

Il résulte de l'application du théorème de d'Alembert (cf. théorème 1.2.6) que si $\frac{a}{e} < 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et elle diverge si

$\frac{a}{e} > 1$. Il reste alors le cas douteux c'est à dire $a = e$. Dans ce cas, on utilise la règle de Duhamel,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = e \cdot e^{-n \ln(1+\frac{1}{n})}$$

En utilisant un développement limité, on obtient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e \cdot e^{-n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)} = e^{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'après la règle de Duhamel (cf. théorème 1.2.7), la série $\sum_{n \geq 1} u_n$

diverge puisque $\lambda = -\frac{1}{2} < 1$.

Section 1.5. Exercices avec solutions

Exercice 1.5.5 Etudier la nature de la série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} u_n$ où

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Solution 1.5.5 Pour l'étude de la nature de la série de Bertrand, on distingue trois cas :

i) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 1$. Dans ce cas, on va utiliser la règle de Riemann. Pour cela, on note

$$\gamma = \frac{1 + \alpha}{2}.$$

Alors $\gamma > 1$ de plus, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\gamma u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln n)^{-\beta} = 0.$$

En effet, en posant

$$v_n = \ln \left[n^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln n)^{-\beta} \right],$$

et par les propriétés du logarithme, il vient pour tout $n \geq 2$

$$v_n = \frac{1-\alpha}{2} \ln n - \beta \ln (\ln n) = \ln n \left(\frac{1-\alpha}{2} - \beta \frac{\ln (\ln n)}{\ln n} \right).$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty,$$

puisque $\frac{1-\alpha}{2} < 0$. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\gamma u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{v_n} = 0.$$

Il résulte de la règle de Riemann ou " $n^\alpha u_n$ " (cf. proposition 1.2.2) que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est convergente.

2i) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < 1$. On calcule la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\alpha} (\ln n)^{-\beta}.$$

Section 1.5. Exercices avec solutions

Un raisonnement analogue à ce qui précède, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = +\infty.$$

Ainsi la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge par la règle de Riemann ou " $n^\alpha u_n$ " (cf. proposition 1.2.2).

3i) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha = 1$. Ici, on va utiliser le critère de comparaison d'une série à une intégrale. Soit alors $f : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x (\ln x)^\beta}.$$

Il est clair que

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [2, +\infty[,$$

et f est continue sur $[2, +\infty[$. De plus, f est décroissante, en effet pour tout $x \in [2, +\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{-[(\ln x)^\beta + \beta (\ln x)^{\beta-1}]}{x^2 (\ln x)^{2\beta}} < 0.$$

D'après le critère de comparaison d'une série à une intégrale (cf. théorème 1.2.8), la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^\beta}$ et l'intégrale généralisée

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^\beta} dx$ sont de même nature. Or,

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^\beta} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^\beta} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{(\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1} \Big|_2^A, & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln(\ln x) \Big|_2^A, & \text{si } \beta = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^\beta} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{(\ln A)^{-\beta+1}}{-\beta+1} - \frac{(\ln 2)^{-\beta+1}}{-\beta+1} & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln(\ln A) - \ln(\ln 2) & \text{si } \beta = 1 \end{cases}.$$

Par conséquent,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^\beta} dx = \begin{cases} -\frac{(\ln 2)^{-\beta+1}}{-\beta+1} & \text{si } \beta > 1 \\ +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ +\infty & \text{si } \beta = 1 \end{cases}.$$

Ce qui signifie que

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^\beta} dx = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \beta > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \beta \leq 1 \end{cases}.$$

Enfin, on conclut que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n (\ln n)^\beta} = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \beta > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \beta \leq 1 \end{cases}.$$

Ainsi l'étude de la nature de la série de Bertrand mène à :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha > 1, \beta \in \mathbb{R} \text{ ou } \alpha = 1, \beta > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \alpha < 1, \beta \in \mathbb{R} \text{ ou } \alpha = 1, \beta \leq 1 \end{cases}.$$

Exercice 1.5.6 Soit $(u_n)_n$ une suite à termes positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (1.40)$$

- 1) Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $u_n \underset{+\infty}{\sim} An^{-\alpha}$.
- 2) En déduire la nature de $\sum u_n$.

Solution 1.5.6 1) On montre qu'il existe $A > 0$ telle que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} An^{-\alpha}.$$

Pour cela, on pose

$$v_n = \ln(n^\alpha u_n), \quad n \geq 1$$

et on montre d'abord que $\sum v_n$ est convergente. On a alors,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln(n+1)^\alpha u_{n+1} - \ln(n^\alpha u_n), \\ &= \ln \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} + \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Section 1.5. Exercices avec solutions

Or $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vérifie (1.40), d'où (1.41) devient

$$v_{n+1} - v_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha + \ln \left(1 - \frac{\alpha}{n} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right).$$

En effectuant un développement limité de $(1+u)^\alpha$ puis de $\ln(1+w)$ au voisinage de 0, on trouve

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) + \ln \left(1 - \frac{\alpha}{n} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right), \\ &= \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n} + o \left(\frac{1}{n^2} \right), \\ &= o \left(\frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$v_{n+1} - v_n = o \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Or par définition,

$$o \left(\frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{n^2} o(1) \quad \text{où } o(1) \text{ une fonction bornée.}$$

D'où,

$$v_{n+1} - v_n \leq \frac{c}{n^2} \quad \text{avec } c > 0.$$

On déduit par le théorème de comparaison que $\sum (v_{n+1} - v_n)$ est convergente. Soit l sa limite, ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k) = l.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_1.$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_1) = l.$$

Par suite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l + v_1.$$

Section 1.5. Exercices avec solutions

En revenant à la définition de la suite $(v_n)_n$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = e^{l+v_1}.$$

Soit encore,

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} A n^{-\alpha}, \text{ avec } A = e^{l+v_1}. \quad (1.42)$$

2) Il vient de (1.42) et du théorème de comparaison que les séries $\sum u_n$ et $\sum A n^{-\alpha}$ sont de même nature. Et comme la série de Riemann $\sum n^{-\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 1$, alors il en est de même pour la série $\sum u_n$.

Exercice 1.5.7 Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent.

- 1) Montrer que $\sum u_n v_n$ converge aussi.
- 2) En déduire que si la suite $(u_n)_n$ est une suite positive telle que la série $\sum \frac{1}{1+n^2 u_n}$ converge alors la série $\sum u_n$ diverge.

Solution 1.5.7 On suppose que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent.

- 1) On sait que

$$|u_n v_n| \leq \frac{1}{2} (u_n^2 + v_n^2) \quad \forall n$$

Puisque $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent, alors $\sum \frac{1}{2} (u_n^2 + v_n^2)$ converge aussi. Et par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |u_n v_n|$ est convergente. Ce qui signifie que $\sum u_n v_n$ converge absolument, et ce qui implique que $\sum u_n v_n$ converge.

- 2) On démontre par l'absurde. On suppose que $\sum \frac{1}{1+n^2 u_n}$ converge et $\sum u_n$ converge. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{1+n^2 u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 u_n} := v_n.$$

Il en résulte alors que $\sum v_n$ est convergente par le critère de comparaison. D'autre part, on a toujours (car $u_n, v_n \geq 0$)

$$2\sqrt{u_n v_n} \leq u_n + v_n, \quad \forall n$$

Section 1.5. Exercices avec solutions

Ce qui implique que

$$\frac{1}{n} \leq \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Comme $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors il en est de même pour la série $\sum \frac{u_n + v_n}{2}$. Par conséquent, $\sum \frac{1}{n}$ converge par comparaison. Ce qui est absurde car la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. En conclusion la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 1.5.8 Soit $\sum u_n$ une série convergente.

- 1) Montrer à l'aide du critère d'Abel que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.
- 2) Que peut-on dire de la série $\sum n \cdot u_n$ si $\sum u_n$ diverge ?

Solution 1.5.8 1) On suppose que $\sum u_n$ est convergente et on montre la convergence de $\sum \frac{u_n}{n}$. Alors, on peut écrire cette série sous la forme :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n} = \sum_{n \geq 1} v_n u_n,$$

où $v_n = \frac{1}{n}$. La suite $(v_n)_n$ est décroissante, positif et tendant vers 0. Vérifions maintenant la deuxième condition du théorème d'Abel (cf. théorème 1.4.2) i.e.,

$$|S_n| = \left| \sum_{k=1}^n u_k \right| \leq M \quad / \quad M > 0.$$

Comme la série $\sum u_n$ est convergente, sa suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge. Par conséquent $(S_n)_n$ est bornée, et la deuxième condition du théorème d'Abel est satisfaite. Par application du théorème d'Abel, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$ est convergente.

2) On pose

$$v_n = n u_n.$$

Section 1.5. Exercices avec solutions

Chapitre 1. Séries numériques

En utilisant la contraposée de 1), on obtient si $\sum_{n \geq 1} \frac{v_n}{n}$ diverge, alors $\sum_{n \geq 1} v_n$ diverge. Or par hypothèse $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge i.e., la série $\sum_{n \geq 1} \frac{v_n}{n}$ diverge, donc il en est de même pour la série $\sum_{n \geq 1} nu_n$.

Exercice 1.5.9 Déterminer la nature des séries de terme général u_n

où :
1) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$; 2) $u_n = \sin\left(\frac{n^2 + n + 1}{n + 1}\right)\pi$, $n \in \mathbb{N}$;
3) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^a}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \neq \frac{1}{2}$.

Solution 1.5.9 Etudions la nature des séries suivante :

- 1) On remarque que $\sum_{n \geq 1} u_n$ est une série alternée. Pour l'étude de la nature de cette série, on distingue deux cas : Si $a \leq 0$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} (-1)^n n^{-a}$ est divergente car son terme général ne tend pas vers 0. Si maintenant $a > 0$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$ est une série de Leibniz donc convergente puisque $v_n = \frac{1}{n^a} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. $(v_n)_n$ est décroissante et tend vers 0.
- 2) On peut écrire le terme général $u_n = \sin\left(\frac{n^2 + n + 1}{n + 1}\right)\pi$ sous la forme :

$$u_n = \sin\left(\frac{n^2 + n + 1}{n + 1}\right)\pi = \sin\left(n + 1 - \frac{n}{n + 1}\right)\pi.$$

Par la formule trigonométrique, on trouve

$$u_n = \sin\left(n + 1 - \frac{n}{n + 1}\right)\pi = (-1)^n \sin\left(\frac{n}{n + 1}\right)\pi.$$

Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est une série alternée. On montre que cette série est une série de Leibniz. Pour cela, on pose :

$$v_n = \sin\left(\frac{n}{n + 1}\right)\pi.$$

Il est clair que $v_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sin \pi = 0.$$

Il reste à montrer que $(v_n)_n$ est décroissante. La suite $\left(\frac{n}{n+1}\pi\right)_n$ est croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{n}{n+1}\pi = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\pi \leq \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)\pi = \frac{n+1}{n+2}\pi.$$

Comme la fonction $\sin$ est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, la suite $(v_n)_n$ est alors décroissante. On conclut que $\sum_{n \geq 1} u_n$ est une série de Leibniz donc convergente. Par conséquent la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge aussi.

3) On fait remarquer que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^a}$ n'est pas une série alternée. Mais, il faut regarder ce qui se passe au dénominateur. Pour $a < 1/2$, on peut écrire

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^a} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{1/2-a}}\right)^{-1}.$$

Puisque $1/2 - a > 0$, on peut effectuer un développement limité et on obtient

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^a} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^{1/2-a}} + o\left(\frac{1}{n^{1-2a}}\right)\right).$$

Ainsi,

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^a} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^{1-a}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2-2a}}\right).$$

Or,

$$-\frac{1}{n^{1-a}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2-2a}}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^{1-a}}.$$

Donc les deux séries sont de même nature. Et comme la série la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} -\frac{1}{n^{1-a}}$ converge pour $1-a > 1$ (i.e. $a < 0$)

et diverge pour $1 - a \leq 1$ (i.e. $a \geq 0$), il en est de même pour la série $\sum_{n \geq 1} -\frac{1}{n^{1-a}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2-2a}}\right)$. De plus, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série de Leibniz donc convergente. On conclut que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^a}$ converge si $a < 0$ (comme somme de deux séries convergentes) et diverge si $0 \leq a < 1/2$ (comme somme de deux séries une convergente et l'autre divergente).

Pour $a > 1/2$, on peut écrire

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^a} = \frac{1}{n^a} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{a-1/2}}\right)^{-1}.$$

Il s'agit donc d'un terme général positif puisque l'on a pour n assez grand

$$\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{a-1/2}}\right)^{-1} > 0.$$

De plus,

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^a} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^a}.$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$ converge si $a > 1$ et diverge si $a \leq 1$, il en est de même pour la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^a}$. Et comme $a > 1/2$, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^a}$ converge si $a > 1$ et diverge si $1/2 < a \leq 1$.

En conclusion, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^a}$ converge lorsque $a < 0$ ou $a > 1$, sinon elle diverge.

Exercice 1.5.10 Montrer que les séries de termes généraux :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

ne sont pas de même nature pourtant u_n est équivalente à v_n au voisinage de $+\infty$.

Solution 1.5.10 Les deux séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ ne sont pas de même nature. En effet, La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est une série de Leibniz donc convergente et on a

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

On fait remarquer que le série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est la somme d'une série convergente et de la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ qui est divergente. Il en résulte que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est divergente. D'où les deux séries ne sont pas de même nature et pourtant on a toujours

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

Ceci montre que le théorème de comparaison pour les séries à termes de signe constant n'est pas applicable aux séries de signe variable.

Exercice 1.5.11 Trouver une valeur approchée de la somme S de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^4}$ avec une erreur ne dépassant pas 10^{-2} .

Solution 1.5.11 $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^4}$ est une série de Leibniz donc convergente.

Et d'après l'encadrement du reste d'une série alternée (cf. Proposition 1.3.1), il vient

$$|S - S_n| = |\mathcal{R}_n| \leq |u_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^4}, \quad \forall n \geq 1.$$

Donc, il suffit de trouver $n \geq 1$ tel que

$$\frac{1}{(n+1)^4} \leq 10^{-2}.$$

On cherche alors $n \geq 1$ tel que

$$(n+1)^4 \geq 100.$$

On remarque que $n = 1$ et $n = 2$ ne réalisent pas l'inéquation par contre $n = 3$ la vérifie. Il suffit donc de considérer la suite somme partielle S_3 telle que

$$S_3 = -1 + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4},$$

pour avoir une valeur approchée de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^4}$ avec une erreur inférieur ou égale à 10^{-2} .

Exercice 1.5.12 Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $n \geq 0$.

- 1) Vérifier que $\sum u_n$ est semi-convergente.
- 2) Montrer que le produit de Cauchy de $\sum u_n$ par $\sum u_n$ ne converge pas.
- 3) Soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$\sigma(3p) = 2p, \sigma(3p+1) = 4p+1 \text{ et } \sigma(3p+2) = 4p+3.$$

Vérifier que σ est une permutation de $\mathbb{N}$ c'est à dire σ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Que peut-on dire de la série $\sum_n u_{\sigma(n)}$?

Solution 1.5.12 1) $\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ est une série semi-convergente.

En effet, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge car c'est une série de Leibniz et de plus, la série

$$\sum_{n \geq 0} |u_n| = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
 est divergente puisqu'on a

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}}.$$

et la série de Riemann $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^{1/2}}$ est divergente pour $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge mais elle ne converge pas absolument. Donc, elle est semi-convergente.

2) Soit $\sum_{n \geq 0} w_n$ le produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} u_n$ par $\sum_{n \geq 0} u_n$ défini par

$$\sum_{n \geq 0} w_n = \left(\sum_{n \geq 0} u_n \right) \left(\sum_{n \geq 0} u_n \right),$$

où,

$$w_n = \sum_{p=0}^n u_p u_{n-p}.$$

Ainsi,

$$w_n = (-1)^n \sum_{p=0}^n \frac{1}{\sqrt{(p+1)(n-p+1)}}.$$

On montre maintenant que la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ ne converge pas. Il est clair que pour tout $0 \leq p \leq n$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{(p+1)(n-p+1)}} \geq \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{p=0}^n \frac{1}{\sqrt{(p+1)(n-p+1)}} \geq 1.$$

Par conséquent,

$$|w_n| \geq 1 > 0.$$

D'ici, on conclut que $\sum_{n \geq 0} w_n$ ne converge pas car son terme général ne tend pas vers 0. On déduit enfin, que le produit de Cauchy de ces deux séries semi-convergentes ne converge pas.

3) Soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$\sigma(3p) = 2p, \quad \sigma(3p+1) = 4p+1 \quad \text{et} \quad \sigma(3p+2) = 4p+3.$$

On montre que σ est une bijection i.e.,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists! n \in \mathbb{N} : \sigma(n) = m.$$

Soit $m \in \mathbb{N}$ alors $m = 2p$ ou $m = 2p+1$. Si $m = 2p$ alors il existe $n = 3p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sigma(n) = \sigma(3p) := 2p = m.$$

Supposons m est impair i.e., $m = 2p + 1$. Alors, on distingue deux cas :
 $p = 2k$ ou $p = 2k + 1$. Si $p = 2k$ alors $m = 4k + 1$, il suffit de prendre
 $n = 3k + 1$ pour avoir $\sigma(n) = m$ et si $p = 2k + 1$ alors $m = 4k + 3$, il
suffit de prendre $n = 3k + 2$ pour avoir $\sigma(n) = m$. De plus, n est unique
car l'écriture est unique ($n = 2p$ ou $n = 2p + 1$). Par conséquent, σ est
une permutation de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

On pose

$$w_n = u_{\sigma(3n)} + u_{\sigma(3n+1)} + u_{\sigma(3n+2)} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{4n+2}} - \frac{1}{\sqrt{4n+4}}$$

de sorte que

$$w_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{c}{\sqrt{n}} \text{ avec } c < 0.$$

En effet, la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ est à termes négatifs car

$$w_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 0.$$

De plus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = c < 0.$$

D'où, $w_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{c}{\sqrt{n}}$. Par conséquent, la série de terme général w_n diverge.

Et comme $\sum_{n=1}^N w_n = \sum_{n=1}^{3N} u_{\sigma(n)}$, la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ est aussi
divergente.

Exercice 1.5.13 On pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

1) Prouver que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

2) On pose $v_n = u_n - \ln n$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.

Etudier la nature de la série $\sum w_n$ et en déduire que la suite $(v_n)_n$ est
convergente. On notera γ sa limite.

3) Soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Déterminer un équivalent à R_n .

Section 1.5. Exercices avec solutions

- 4) Soit C_n tel que $u_n = \ln n + \gamma + C_n$ et soit $t_n = C_{n+1} - C_n$. Donner un équivalent du reste $\sum_{k \geq n} t_k$. En déduire que

$$u_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Solution 1.5.13 Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

- 1) On montre que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$ i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1.$$

En utilisant les encadrements qui découlent de la preuve du théorème 1.2.8 (voir l'inégalité 1.21) suivants :

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq u_k \leq \int_{k-1}^k f(t) dt,$$

où $f(t) = \frac{1}{t}$ et $u_k = f(k)$. Alors, pour tout $k \geq 1$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}.$$

En sommant membre à membre, on trouve

$$\sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}.$$

Ce qui donne après calcul,

$$\ln(n+1) - \ln 2 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \ln n.$$

Or,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = u_n - 1.$$

Donc,

$$\ln(n+1) - \ln 2 + 1 \leq u_n \leq \ln n + 1.$$

Par conséquent,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} + \frac{-\ln 2 + 1}{\ln n} \leq \frac{u_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1.$$

Et donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

2) On étudie la nature de $\sum w_n$ avec $w_n = v_{n+1} - v_n$ et $v_n = u_n - \ln n$.

On a

$$w_n = v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \ln \left(\frac{n}{n+1} \right).$$

Or,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}.$$

Donc,

$$w_n = \frac{1}{n+1} + \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} + \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right).$$

En utilisant un développement limite de $\ln(1-u)$ au voisinage de $u=0$, on trouve

$$w_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

Ceci montre que

$$w_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2(n+1)^2},$$

et on en déduit que $\sum w_n$ est convergente. Soit l sa limite i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n w_k = l.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^n w_k = v_{n+1} - v_1.$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_1) = l.$$

Section 1.5. Exercices avec solutions

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = v_1 + l.$$

D'où la suite $(v_n)_n$ est convergente.

3) On détermine un équivalent à $\mathcal{R}_n$ où

$$\mathcal{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

On sait que le reste $\mathcal{R}_n$ d'une série convergente (cf. Proposition 1.2.3) vérifie l'encadrement suivant :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \mathcal{R}_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

où $f(t) = \frac{1}{t^2}$. Or,

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{n+1}^a \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{n+1},$$

et,

$$\int_n^{+\infty} f(t) dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_n^a \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{n}.$$

Donc,

$$\frac{1}{n+1} \leq \mathcal{R}_n \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

ou encore,

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{\mathcal{R}_n}{1/n} \leq 1.$$

Par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{R}_n}{\frac{1}{n}} = 1.$$

D'où

$$\mathcal{R}_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}. \quad (1.43)$$

4) On donne un équivalent du reste $\sum_{k \geq n} t_k$. Alors, on a

$$\begin{aligned} t_n &= C_{n+1} - C_n, \\ &= u_{n+1} - \ln(n+1) - \gamma - u_n + \ln n + \gamma, \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \\ &= -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right). \end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$t_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2(n+1)^2}.$$

On applique le critère de comparaison des séries à termes constants, la série $\sum t_n$ est convergente et on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} t_k = \sum_{k=n}^{+\infty} (C_{k+1} - C_k) \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} -\frac{1}{2(k+1)^2} = -\frac{1}{2} \mathcal{R}_n. \quad (1.44)$$

De (1.43) et (1.44), il vient

$$\sum_{k=n}^{+\infty} t_k \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

On en déduit maintenant que

$$u_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On a,

$$\sum_{k=n}^m t_k = \sum_{k=n}^m (C_{k+1} - C_k) = C_{m+1} - C_n, \quad (1.45)$$

avec $C_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$. En effet,

$\lim_{m \rightarrow +\infty} C_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} (u_m - \ln m - \gamma) = \lim_{m \rightarrow +\infty} (v_m - \gamma) = 0$,
car $\lim_{m \rightarrow +\infty} v_m = \gamma$. Par passage à la limite dans (1.45) quand $m \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\sum_{k=n}^{+\infty} t_k = -C_n.$$

Aussi, en utilisant le résultat de la question précédente, on trouve

$$-C_n = \sum_{k=n}^{+\infty} t_k \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

Ce qui s'écrit aussi

$$C_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par conséquent,

$$u_n = \ln n + \gamma + C_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

γ est appelée la constante d'Euler.

Exercice 1.5.14 On pose $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}.$$

1) Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ (effectuer un développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$ au voisinage de $x=0$).

2) En déduire l'existence d'une constante $\alpha > 0$ telle que

$$n! \underset{\infty}{\asymp} n^n e^{-n} \sqrt{n} \alpha.$$

Solution 1.5.14 1) On a

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right), \\ &= \ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}\right], \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1. \end{aligned}$$

En effectuant un développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$ au voisinage de $x=0$, on trouve

$$v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] - 1.$$

Chapitre 1. Séries numériques

Après calcul, il vient

$$v_n = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Par conséquent,

$$v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$

Par le critère de comparaison, $\sum v_n$ converge puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{12n^2}$ est convergente.

2) On peut écrire v_n sous la forme :

$$v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln u_{n+1} - \ln u_n.$$

D'autre part, la suite des sommes partielles de la série $\sum v_n$ est

$$S_n = \sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n (\ln u_{k+1} - \ln u_k).$$

Après calcul, on trouve

$$S_n = \ln u_{n+1} - \ln u_1 = \ln u_{n+1} + 1.$$

Or la série $\sum v_n$ converge, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l \text{ existe.}$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_{n+1} = l - 1.$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = e^{l-1}.$$

On pose $c = e^{l-1} > 0$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} = c.$$

Par suite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \frac{1}{c}.$$

Ce qui est encore équivalent à

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \alpha n^n e^{-n} \sqrt{n},$$

avec $\alpha = \frac{1}{c} > 0$.

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

Comme on l'a déjà remarqué, un nombre réel peut s'exprimer comme la limite d'une suite ou comme la somme d'une série. Il est donc naturel d'étudier la représentation de certaines fonctions comme limite d'une suite de fonctions ou comme somme d'une série de fonctions. Une question fondamentale est alors l'étude des propriétés topologiques ou autres (par exemple, continuité, dérivabilité, intégration, etc) des fonctions limites ou des fonctions sommes.

Après avoir défini les différents types de convergence pour une suite de fonctions, on examine les propriétés essentielles qui sont conservées par passage à la limite, à savoir, la continuité, les limites, l'intégration sur un segment et la dérivation. On fera le même travail sur les séries de fonctions, notamment en introduisant la notion de convergence normale qui n'a pas d'intérêt théorique supplémentaire mais qui se révèle facile à manipuler.

2.1 Suites de fonctions

Soit $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définies sur $E \subset \mathbb{R}$.

Définition 2.1.1 On appelle suite de fonctions définies sur E , toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ et est notée par $(f_n)_n$.

Exemple 2.1.1 Soit $E = [0, 1]$ et $f_n(x) = x^n \forall n \in \mathbb{N}$. $(f_n)_n$ est une suite de fonctions définies sur $[0, 1]$.

Remarque 2.1.1 Pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_n$ est une suite numérique qui peut être convergente ou divergente.

Définition 2.1.2 On appelle domaine de convergence de la suite (f_n) , l'ensemble D défini par

$$D = \{x \in E \mid (f_n(x))_n \text{ converge}\}.$$

2.1.1 Convergence simple

Définition 2.1.3 Une suite de fonction $(f_n)_n$ est dite simplement convergente sur E si pour tout $x \in E$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ est convergente.

Définition 2.1.4 La fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E : f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x),$$

est dite limite de la suite $(f_n)_n$ quand $n \rightarrow +\infty$ et l'on écrit

$$f = \lim_E f_n \quad \text{où} \quad f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{cs} f \quad \text{sur } E.$$

Exemple 2.1.2 Etudier la convergence simple des suites de fonctions suivantes :

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit f_n sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}.$$

Alors, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Section 2.1. Suites de fonctions

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit f_n sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = x^n.$$

Alors, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Remarque 2.1.2 La convergence simple est équivalente à la convergence en tout point. En effet,

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{cs} f \text{ sur } E &\iff \forall x \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x). \\ &\iff \forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : \\ &\quad (n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon). \end{aligned}$$

On remarque que l'entier N dépend de $x \in E$ et $\varepsilon > 0$.

2.1.2 Convergence uniforme

On dispose maintenant d'une seconde convergence appelée convergence uniforme qui est une notion essentielle pour les suites et séries de fonctions.

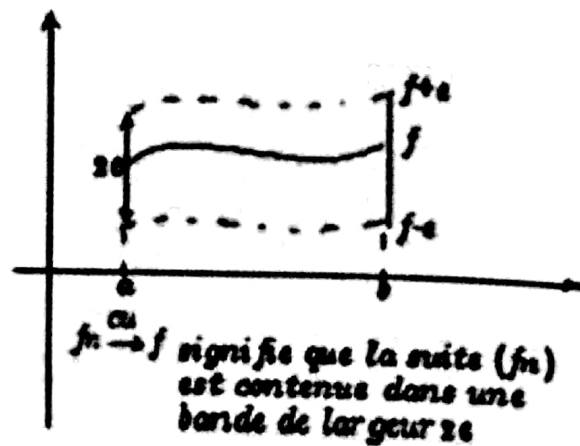
Définition 2.1.5 Une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur E si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in X).$$

Ce qui est encore équivalent à

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

On note $f_n \xrightarrow[c.u.]{} f$ sur E .



Exemple 2.1.3 Etudier la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur $E = [0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n} \left(\frac{2nx}{1+n^2x^2} \right).$$

On sait que

$$(1-nx)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n.$$

Alors,

$$1+n^2x^2 \geq 2nx \implies \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq 1.$$

D'où,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2n} \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n},$$

avec $f(x) = 0$. Pour que $|f_n(x) - f(x)|$ soit plus petit que ε , il suffit que

$$n > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Donc, il suffit de prendre $N = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil + 1$. Par conséquent $f_n \xrightarrow[c.u.]{} f$ sur E .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur $E = [a, +\infty[$ où $a > 0$ par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}.$$

Section 2.1. Suites de fonctions

La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f = 1$ sur $[a, +\infty[$. En effet, pour tout $x \in [a, +\infty[$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1 + nx} := \delta_n(x).$$

Or, puisque

$$\delta'_n(x) = \frac{-n}{(1 + nx)^2} \leq 0, \quad \forall x \in [a, +\infty[.$$

Donc, le suprémum est atteint pour $x = a$. Ainsi,

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [a, +\infty[} \delta_n(x) = \delta_n(a) = \frac{1}{1 + na}.$$

Puisque $a > 0$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + na} = 0.$$

C'est à dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

$$\text{Ainsi } f_n \xrightarrow[cu]{[a, +\infty[} f.$$

Remarque 2.1.3 Il en résulte des propriétés de la valeur absolue et celle de la borne supérieure que si $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent uniformément sur E respectivement vers f et g et si λ et μ sont des scalaires, alors la suite $(\lambda f_n + \mu g_n)_n$ converge uniformément sur E vers $\lambda f + \mu g$.

La proposition suivante donne le lien entre la convergence uniforme et la convergence simple.

Proposition 2.1.1 La convergence uniforme implique la convergence simple : si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur E , alors elle converge simplement vers f .

Preuve En effet, on a

$$\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

Et si on a la convergence uniforme i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in E.$$

Ce qui signifie la convergence simple de $(f_n)_n$ vers f . ■

Remarque 2.1.4 La réciproque de la proposition est fausse i.e., une suite de fonctions peut converger simplement sans converger uniformément comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.1.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit f_n sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{n}{1 + (x - n)^2}$$

La suite de la fonction $(f_n)_n$ converge simplement vers $f \equiv 0$. La convergence vers f est-elle uniforme ?

On a,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \delta_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{n}{1 + (x - n)^2}.$$

Or,

$$\delta'_n(x) = \frac{-2n(x - n)}{[1 + (x - n)^2]^2},$$

donc le graphe de δ_n passe par un maximum en $x = n$. Ainsi,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \delta_n(x) = n \rightarrow +\infty.$$

Ce qui montre bien que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

2.1.3 Théorème de Dini pour les suites de fonctions

Le résultat suivant est appelé théorème de Dini¹. Il donne une classe de suite de fonctions pour laquelle la convergence simple entraîne la convergence uniforme. A savoir, on a

¹Ulisse Dini (né le 14 novembre 1845 à Pise, en Toscane, et mort dans la même ville le 28 octobre 1918) est un mathématicien et homme politique italien de la fin du XIX et du début du XX siècle.

Section 2.1. Suites de fonctions

Théorème 2.1.1 On suppose que :

1. $f_n \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, où I un compact de $\mathbb{R}$.
2. $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction continue f sur I .
3. $(f_n)_n$ une suite monotone.

Alors, $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I .

Preuve On suppose que $(f_n)_n$ est croissante i.e.,

$$f_{n+1} \geq f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$\delta_n := f - f_n \geq 0$$

puisque $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$. Alors $(\delta_n)_n$ est une suite décroissante de fonctions continues qui converge simplement vers 0. On note

$$\alpha_n := \sup_{x \in I} \delta_n(x).$$

Afin de montrer la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f , il suffit de montrer que $(\alpha_n)_n$ converge vers 0. Il est clair que $(\alpha_n)_n$ est décroissante et positive. Elle est donc convergente vers un réel $\alpha \geq 0$. On montre maintenant que $\alpha = 0$. Pour cela, on va raisonner par l'absurde i.e., on suppose que $\alpha > 0$. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, les parties

$$K_n = \left\{ x \in I, \delta_n(x) \geq \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

Chaque partie K_n est non vide, bornée car contenue dans I compact, et en tant qu'image réciproque fermé $\left[\frac{\alpha}{2}, +\infty \right[$ par la fonction continue δ_n , K_n est fermée dans I donc dans $\mathbb{R}$. Comme $\delta_{n+1} \leq \delta_n$, on a $K_{n+1} \subset K_n$. Il s'ensuit, par le théorème des compacts emboîtés, que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset.$$

Il existe donc c appartenant à $K_n \quad \forall n$, et par conséquent $\delta_n(c) \geq \frac{\alpha}{2}$ pour tout n , ce qui contredit la convergence simple vers 0. ■

Exemple 2.1.5 Soient $I = [-1, 1]$ et $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On va satisfaire les hypothèses du théorème de Dini.

1. Il est clair que f_n est continue sur I , $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $(f_n)_n$ est décroissante puisque pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$f_{n+1}(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{(n+1)^2}} \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = f_n(x).$$

3. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{cs} f$ sur I / $f(x) = |x|$. Donc f est continue sur $[-1, 1]$.

Par application du théorème de Dini, on conclut que $f_n \xrightarrow{c.u.} f$ sur $[-1, 1]$.

Remarque 2.1.5 Le théorème de Dini peut tomber en défaut si on ne suppose pas I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.1.6 Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit f_n sur $I =]0, 1[$ par

$$f_n(x) = \frac{-1}{1 + nx}.$$

Cette suite est croissante sur I . En effet, pour tout $x \in I$, on a

$$f_{n+1}(x) = \frac{-1}{1 + (n+1)x} \geq \frac{-1}{1 + nx} = f_n(x).$$

De plus, $(f_n)_n$ converge simplement vers $f = 0$ sur I . Mais, $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers $f = 0$ sur I , car

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{-1}{2}.$$

2.1.4 Critère de Cauchy pour la convergence uniforme

Comme pour les séries numériques, il existe le critère de Cauchy pour la convergence uniforme d'une suite ou série de fonctions. L'utilité de ce critère est qu'il permet de montrer la convergence sans connaître explicitement la limite.

Proposition 2.1.2 Une suite de fonction $(f_n)_n$ converge uniformément sur E si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$,

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : (n, m \geq N \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in E).$$

Preuve On montre l'implication $(\implies)$. On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément sur E i.e., pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in E).$$

D'ici, on a

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq N.$$

Ainsi, pour $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \geq N$, on a pour tout $x \in E$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)|, \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Inversement, on suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$,

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : (n, m \geq N \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in E). \quad (2.1)$$

On fixe $x \in E$, alors la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet donc elle converge i.e.,

$$\exists f : E \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \quad \forall x \in E.$$

Par passage à la limite dans (2.1) quand $m \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\forall x \in E, \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

i.e., $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur E . ■

2.1.5 Convergence uniforme et continuité

La notion de convergence uniforme est très importante pour la stabilité des propriétés de continuité, intégration de Riemann et dérivation relatives à la fonction limite. On commence par la continuité des limites uniformes.

Le théorème suivant montre que la convergence uniforme conserve la continuité de la limite.

Ser:

Théorème 2.1.2 *Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$,
2. $(f_n)_n$ converge uniformément f sur I .

Alors, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Preuve On veut montrer que f est continue sur I , ce qui revient à montrer que pour tout $x_0 \in I$, f est continue en x_0 i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon). \quad (2.2)$$

Soit $\varepsilon > 0$, de l'hypothèse 2.), on a

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N} : (n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}). \quad (2.3)$$

En particulier pour $x = x_0$, on a

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n > N. \quad (2.4)$$

De l'hypothèse 1.), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, (n fixé)

$$\exists \delta > 0, \forall x \in I : (|x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}) \quad (2.5)$$

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n > N$, on a

$$\begin{aligned} & |f(x) - f(x_0)| \\ &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|, \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

De (2.3) – (2.5), l'inégalité (2.6) devient

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

si $x \in I$ / $|x - x_0| < \delta$. D'où (2.2) est réalisée et par conséquent f est continue en x_0 quelconque i.e., f est continue sur I . ■

Par contraposition, le théorème précédent permet de montrer la non convergence uniforme. Ainsi, on a

Corollaire 2.1.1 Si les f_n sont continues sur I , si $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{cs} f$ et si f n'est pas continue, alors la convergence de $(f_n)_n$ vers f n'est pas uniforme.

Remarque 2.1.6 La convergence simple d'une suite de fonctions continues ne conserve pas la continuité de la limite ; on a vu plusieurs exemples (cf. exemple 2.1.2) de suites de fonctions $(f_n)_n$ continues dont la limite simple f n'est pas continue.

Remarque 2.1.7 La conclusion du théorème 2.1.2 peut s'écrire comme une interversion de limites :

$$\forall x_0 \in I, \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

Remarque 2.1.8 Le théorème 2.1.2 donne une condition nécessaire mais pas suffisante pour la convergence uniforme, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.1.7 On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2} \quad \text{où } x \in [0, 1].$$

Il est clair que $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur $[0, 1]$ avec

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1].$$

De plus, f est continue sur $[0, 1]$, mais $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$. En effet, on a

$$\delta_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2} - 0 \right| = \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}.$$

En dérivant δ_n , on obtient

$$\delta'_n(x) = \frac{\sqrt{n}(1-nx^2)}{(1+nx^2)^2}.$$

La fonction δ_n admet un maximum en $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc

$$\sup_{x \in [0, 1]} \delta_n(x) = \delta_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

La convergence n'est pas uniforme.

2.1.6 Convergence uniforme et intégration sur un segment

Le théorème suivant permet d'intervertir la limite avec le signe intégrale.

Théorème 2.1.3 *On suppose que :*

1. $f_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, (continuité des f_n).
2. $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Alors pour tout $x \in]a, b]$, on a

$$\int_a^x f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x f_n(t) dt.$$

Ce qui est encore équivalent à

$$\int_a^x \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x f_n(t) dt.$$

Preuve On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^x f_n(t) dt \text{ existe,}$$

car $f_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \implies \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t)) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, et comme $f_n \xrightarrow{c.u} f$ sur $[a, b]$, il va exister $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall t \in [a, b], \forall n > N \implies |(f_n(t) - f(t))| < \varepsilon / (b - a).$$

Donc pour tout $n > N$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t)) dt \right| &\leq \int_a^x |(f_n(t) - f(t))| dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b - a} \int_a^b dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t)) dt \right| \leq \varepsilon \quad \forall x \in]a, b].$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^x f(t) dt.$$

■

Remarque 2.1.9 Le théorème 2.1.3 tombe en défaut si on n'a pas la convergence uniforme. Par exemple,

Exemple 2.1.8 Soit $f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}$ avec $x \in I = [0, 1]$. Alors, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

i.e., $f_n \xrightarrow{c.s} f$ sur I . D'autre part,

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 2n^2 x e^{-n^2 x^2} dx = - \int_0^1 d(e^{-n^2 x^2}) = e^{-n^2} - 1.$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1.$$

Par suite,

$$\int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Remarque 2.1.10 Le théorème 2.1.3 reste toujours valable si on remplace l'hypothèse de continuité des f_n par l'hypothèse suivante :

$$\forall n, \quad f_n \text{ intégrable sur } [a, b].$$

Section 2.1. Suites de fonctions

2.1.7 Convergence uniforme et dérivation

Le résultat suivant est très utile en pratique, il permet d'intervertir la dérivée et la limite uniforme.

On a alors,

Théorème 2.1.4 *On suppose que :*

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$,
2. $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur $[a, b]$,
3. $(f'_n)_n$ converge uniformément vers g sur $[a, b]$.

Alors, f est dérivable et on a,

- i. $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

- 2i. $\forall x \in [a, b]$, on a $g(x) = f'(x)$ i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{d}{dx} f_n(x) \right) = \frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right).$$

Preuve On applique le théorème 2.1.3 à la suite $(f'_n)_n$, on obtient

$$\int_a^x g(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x f'_n(t) dt \quad \forall x \in]a, b].$$

Or,

$$\int_a^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(a).$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = \int_a^x g(t) dt.$$

De plus $f_n \xrightarrow{c.s} f$ sur $[a, b]$, donc

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t) dt \quad \forall x \in]a, b]. \quad (2.7)$$

Section 2.1. Suites de fonctions

Or g est continue sur $[a, b]$ comme limite uniforme de la suite de fonctions continues $(f'_n)_n$, alors la fonction $x \longrightarrow \int_a^x g(t) dt$ est dérivable et de plus,

$$\left(\int_a^x g(t) dt \right)' = g(x). \quad (2.8)$$

De (2.7) et (2.8), on déduit que

$$g(x) = f'(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

■

Remarque 2.1.11 Le théorème 2.1.3 donne une condition suffisante, mais non nécessaire, pour la convergence uniforme d'une suite de fonctions dérivables. Comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.1.9 On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par :

$$f_n(x) = x - \frac{\ln(1 + nx)}{n}, \quad x \in [0, 1].$$

Alors, par passage à la limite, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = x = f(x).$$

D'où $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{cs} f$ sur $[0, 1]$.

On montre maintenant que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{cu} f$ sur $[0, 1]$. On a pour tout $x \in [0, 1]$

$$\delta_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{\ln(1 + nx)}{n} \leq \frac{\ln(1 + n)}{n}.$$

Alors,

$$\sup_{x \in [0, 1]} \delta_n(x) \leq \frac{\ln(1 + n)}{n}$$

Par conséquent,

$$\sup_{x \in [0, 1]} \delta_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

■

et la convergence est uniforme.

La suite $(f'_n)_n$ définie par

$$f'_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, \quad x \in [0, 1],$$

ne converge pas uniformément vers $f' \equiv 1$, car elle converge simplement vers la fonction g telle que

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x \in]0, 1]. \end{cases}$$

qui n'est pas continue. Mais, on constate que

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

C'est à dire que f est la primitive de g .

En conséquence de ce qui précède, on a

Théorème 2.1.5 On suppose que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$.
2. $\exists x_0 \in [a, b]$ tel que la suite numérique $(f_n(x_0))_n$ converge.
3. $(f'_n)_n$ converge uniformément vers g sur $[a, b]$.

Alors,

- i. $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
- 2i. $\forall x \in [a, b], g(x) = f'(x)$.

Preuve Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0)$. On sait que pour tout $x \in [a, b]$,

$$f_n(x) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt + f_n(x_0). \quad (2.9)$$

Par passage à la limite dans (2.9), on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x f'_n(t) dt + l = \int_{x_0}^x g(t) dt + l.$$

On définit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt + l. \quad (2.10)$$

D'où $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur $[a, b]$. Alors, on affirme que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$. En effet, de (2.9) et (2.10), il vient

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \int_{x_0}^x (f'_n(t) - g(t)) dt + f_n(x_0) - l \right|.$$

Ainsi,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \left(\sup_{t \in [a, b]} |f'_n(t) - g(t)| \right) |x - x_0| + |f_n(x_0) - l|.$$

Par conséquent,

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \left(\sup_{t \in [a, b]} |f'_n(t) - g(t)| \right) |b - a| + |f_n(x_0) - l|.$$

Or, $(f'_n)_n$ converge uniformément vers g sur $[a, b]$ i.e.,

$$\sup_{t \in [a, b]} |f'_n(t) - g(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et comme $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur $[a, b]$, alors

$$|f_n(a) - l| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où,

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

2.2 Séries de fonctions

Les séries de fonctions trouvent leur utilité dans la résolution des équations différentielles ordinaires, ou des équations aux dérivées partielles. Très souvent, ces équations n'ont pas de solution évidente exprimable à l'aide de fonctions usuelles. L'idée est donc de rechercher des solutions sous forme de séries.

Définition 2.2.1 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies de $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ est appelée série de fonctions.

La suite des sommes partielles $(S_n)_n$ de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ est définie par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) = f_0(x) + \dots + f_n(x) \quad \forall x \in E.$$

2.2.1 Domaine de convergence

Définition 2.2.2 L'ensemble D défini par

$$D = \left\{ x \in E \mid \sum_{n \geq 0} f_n(x) \text{ converge} \right\}$$

est appelé domaine de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$.

Exemple 2.2.1 On va calculer le domaine de convergence pour chaque série des séries suivantes :

1. Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ où $x \in \mathbb{R}$. Alors, par la règle de d'Alembert

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \text{ converge} \right\} = \mathbb{R}.$$

2. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ où $x \in \mathbb{R}$. Par application de la règle de d'Alembert, il vient

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x| \frac{n}{n+1} = |x|.$$

Alors, si $|x| < 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et si $|x| > 1$, elle diverge.

Enfin, pour le cas $|x| = 1$ i.e., $x = \pm 1$, on obtient deux séries numériques $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ qui sont respectivement divergente et convergente. Ainsi le domaine de convergence est

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} \text{ converge} \right\} = [-1, 1[.$$

3. Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} nx^n$ où $x \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$nx^n \rightarrow 0 \quad \text{si } x \neq 0.$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 0} nx^n$ diverge si $x \neq 0$ et elle converge si $x = 0$.

Par conséquent,

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n \geq 1} nx^n \text{ converge} \right\} = \{0\}.$$

De façon analogue, on définit pour les séries de fonctions les notions de convergence étudiées précédemment.

2.2.2 Convergence simple et uniforme

Définition 2.2.3 La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur E si la suite des somme partielle $(S_n)_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur E .

La proposition suivante donne une caractérisation de la convergence uniforme.

Proposition 2.2.1 La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur E si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } E \text{ et,} \\ \text{la suite des restes } (\mathcal{R}_n)_n \text{ converge uniformément vers } 0 \text{ sur } E. \end{array} \right.$$

Preuve On suppose que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur E . Alors

$(S_n)_n$ converge uniformément sur E , donc simplement.

D'où $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur E .

Montrons maintenant que la suite des restes $(\mathcal{R}_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur E . On note S la limite uniforme de $(S_n)_n$, on a donc

$$S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{cu} S \quad \text{sur } E, \quad (2.11)$$

puisque $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur E . Et comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k = S - S_n,$$

on déduit que

$$\mathcal{R}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{cu} 0 \quad \text{sur } E.$$

Réciproquement, on suppose que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur E et $(\mathcal{R}_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur E . On note S la limite simple de $(S_n)_n$, on a donc

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$$

Comme

$$\mathcal{R}_n = S - S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{cu} 0 \quad \text{sur } E,$$

on déduit (2.11), et donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément. ■

Section 2.2. Séries de fonctions

Exemple 2.2.2 La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. En effet, cette série converge simplement sur $\mathbb{R}$, car c'est une série de Leibniz. De plus, on a

$$|\mathcal{R}_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x^2 + k} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{x^2 + (n+1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{x^2 + (n+2)} + \dots + \dots \right|.$$

Par la proposition 1.3.1, le reste de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}$ série de Leibniz vérifie

$$|\mathcal{R}_n(x)| \leq \frac{1}{x^2 + (n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$|\mathcal{R}_n(x)| \leq \frac{1}{x^2 + (n+1)} \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathcal{R}_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathcal{R}_n(x)| = 0 \iff R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

D'après la proposition 2.2.1, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Comme pour les séries numériques, on dispose d'une condition nécessaire de la convergence uniforme. En fait, la contraposée de cette condition est très utile pour justifier la divergence d'une série de fonctions. Elle est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.2.2 Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur E , alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur E .

Preuve En effet, puisque $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur E i.e., $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} S$ sur E , on a donc

$$f_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} S - S = 0 \quad \text{sur } E.$$

■

En conséquence, on a la corollaire.

Corollaire 2.2.1 Si $f_n \xrightarrow{c.u.} 0$ sur E i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E} |f_n(x)| \neq 0$, alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur E .

Exemple 2.2.3 On considère la série de fonction de terme général f_n défini par

$$f_n(x) = x^n \quad \text{où } x \in]-1, 1[= E.$$

Alors, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in E} |f_n(x)| = \sup_{x \in E} |x^n| = 1.$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E} |f_n(x)| \neq 0.$$

Par conséquent $\sum_{n \geq 0} x^n$ ne converge pas uniformément sur E .

Remarque 2.2.1 La convergence uniforme d'une série de fonctions entraîne la convergence simple de cette série. Ceci découle du fait que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge uniformément vers S , et donc elle converge simplement.

2.2.3 Convergence absolue

Comme pour les séries numériques, on définit la notion de convergence absolue pour les séries de fonctions.

Définition 2.2.4 La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ est dite absolument convergente si $\sum_{n \geq 0} |f_n|$ est convergente.

Exemple 2.2.4 On considère la série de fonctions

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1 - x^n}{1 + x^n} \frac{1}{n^2}, \quad x \in [0, +\infty[. \quad (2.12)$$

Section 2.2. Séries de fonctions

Soit $x \geq 0$ fixé quelconque, alors on peut écrire

$$\left| \frac{1-x^n}{1+x^n} \frac{1}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

puisque on a

$$\left| \frac{1-x^n}{1+x^n} \right| \leq 1 \quad \forall x \geq 0.$$

Et comme la série de Riemann $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2}$ est convergente, alors par comparaison, la série $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{1-x^n}{1+x^n} \frac{1}{n^2} \right|$ est convergente. Ce qui montre que la série (2.12) est absolument convergente sur $\mathbb{R}^+$.

2.2.4 Convergence normale

On introduit une notion supplémentaire de convergence. Elle est très utile en pratique pour établir la convergence uniforme d'une série de fonctions, car elle ramène l'étude de celle-ci à celle de la convergence d'une série à termes positifs.

Définition 2.2.5 Toute série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ vérifiant :

1. il existe une suite numérique $(a_n)_n$ avec $a_n > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \quad |f_n(x)| \leq a_n,$$

2. la série numérique $\sum a_n$ converge,
est appelée série normalement convergente sur E .

Exemple 2.2.5 La série de fonctions définie par

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^\alpha} \quad x \in \mathbb{R}, \alpha > 1,$$

est normalement convergente, puisque on a

$$\left| \frac{\cos nx}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente (série de Riemann avec $\alpha > 1$). Il en est de même pour la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$.

De ce qui précède, on déduit que les séries de fonctions $\sum_{n \geq 0} a_n \sin nx$ et $\sum_{n \geq 1} a_n \cos nx$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$ si $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ est convergente.

La proposition suivante donne une caractérisation de la convergence normale.

Proposition 2.2.3 La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur E ssi la série numérique à termes positifs $\sum_{n \geq 0} \sup_{x \in E} |f_n(x)|$ converge.

Preuve En effet, si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur E , donc il existe une suite $(a_n)_n$ telle que

$$a_n > 0 \quad / \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \quad |f_n(x)| \leq a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} a_n \text{ converge.}$$

D'où,

$$0 \leq \sup_{x \in E} |f_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Or $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge, alors par comparaison $\sum_{n \geq 0} \sup_{x \in E} |f_n(x)|$ converge.

Réciproquement, si $\sum_{n \geq 0} \sup_{x \in E} |f_n(x)|$ converge.

On a pour tous $x \in E, n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in E} |f_n(x)| \geq |f_n(x)|.$$

On pose :

$$a_n = \sup_{x \in E} |f_n(x)| > 0.$$

Ainsi, on a

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E \text{ et } \sum_{n \geq 0} a_n \text{ converge.}$$

Section 2.2. Séries de fonctions

Ce qui montre que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ est normalement convergente sur E . ■

Exemple 2.2.6 On étudie la convergence normale sur E des séries de fonctions suivantes :

1. soit la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x) = \sum_{n \geq 1} x^n (\ln x)^2$, $x \in E = [0, 1]$. Calculons $\sup_{x \in E} |f_n(x)|$. On a

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |x^n (\ln x)^2| = \frac{4e^{-2}}{n^2} = f_n\left(e^{-\frac{2}{n}}\right).$$

Ainsi,

$$\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \sum_{n \geq 1} \frac{4e^{-2}}{n^2}.$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{4e^{-2}}{n^2}$ est convergente, donc la série de fonctions

$\sum_{n \geq 1} x^n (\ln x)^2$ est normalement convergente.

2. la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} x^n (\ln x)$, $x \in [0, 1]$ n'est pas normalement

convergente sur $[0, 1]$, car $\sup_{x \in [0,1]} |x^n \ln x| = \frac{1}{ne}$ est le terme générale d'une série divergente.

2.2.5 Lien entre les différentes notions de convergence

On essaye de faire une comparaison entre les différentes notions de convergence pour les séries de fonctions : convergence simple, convergence absolue, convergence uniforme et convergence normale. Quelles sont les implications qui existent ? ou encore quelle notion est plus forte que l'autre ?

La proposition suivante montre que la convergence normale entraîne la convergence absolue

Section 2.2. Séries de fonctions

Proposition 2.2.4 Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur E , alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument sur E .

Preuve En effet, pour tout $x \in E$, on a

$$|f_n(x)| \leq \sup_{x \in E} |f_n(x)|.$$

Comme $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur E i.e., $\sum_{n \geq 0} \sup_{x \in E} |f_n(x)|$ converge, alors pour chaque $x \in E$, $\sum_{n \geq 0} |f_n(x)|$ converge (par comparaison). Donc

$\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument sur E . ■

Aussi, on a le résultat suivant qui donne le lien entre la convergence absolue et la convergence simple.

Proposition 2.2.5 Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument sur E , alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur E .

Preuve Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument sur E , alors pour tout $x \in E$, $\sum_{n \geq 0} |f_n(x)|$ converge et donc pour tout $x \in E$, $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge (cf. théorème 1.4.1) i.e., $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur E . ■

L'intérêt de la convergence normale réside dans la proposition suivante :

Proposition 2.2.6 Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur E , alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur E .

Preuve Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur E , donc $\sum_{n \geq 0} \sup_{x \in E} |f_n(x)|$ converge. Par les propositions 2.2.4 et 2.2.5, $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur E . De plus, pour tous $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n vérifie

$$|\mathcal{R}_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sup_{x \in E} |f_k(x)|. \quad (2.13)$$

Comme la série numérique $\sum_{n \geq 0} \sup_{x \in E} |f_n(x)|$ est convergente, son reste d'ordre n tend vers 0 i.e.,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \sup_{x \in E} |f_k(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, par passage à la limite dans (2.13), on déduit

$$\mathcal{R}_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après la proposition 2.2.1, la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur

E . ■

Et enfin, on donne le lien entre la convergence uniforme et la convergence simple.

Proposition 2.2.7 Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur E , alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur E .

Preuve On a déjà vu que si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément, elle converge simplement (cf. Proposition 2.2.1). ■

En conclusion, on donne un schéma donnant les implications qui existent entre les différentes notions de convergence pour les séries de fonctions dont il est important de le retenir. Alors, on a

$$\sum_{n \geq 0} f_n \text{ C.N} \implies \begin{cases} \sum_{n \geq 0} f_n \text{ C.A} \\ \sum_{n \geq 0} f_n \text{ C.U} \end{cases} \implies \sum_{n \geq 0} f_n \text{ C.S},$$

où C.N, C.A, C.U et C.S sont les convergences normale, absolue, uniforme et simple respectivement.

Dans ce qui suit, on donne en remarques, les implications de convergence pour les séries de fonctions qui n'ont pas eu lieu.

Remarque 2.2.2 En général, la convergence uniforme n'implique pas la convergence absolue (voir exemple suivant).

Exemple 2.2.7 La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ (cf. Exemple 2.2.2), mais la série

$$\sum_{n \geq 1} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 + n},$$

est divergente puisque

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{x^2 + t} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{dt}{x^2 + t} = \ln(x^2 + t) \Big|_1^a \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}$ n'est pas absolument convergente.

Remarque 2.2.3 Il est possible que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément et absolument sur E mais $\sum_{n \geq 0} |f_n|$ ne converge pas uniformément sur E , comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.2.8 La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1 + x^2)^n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (car c'est une série Leibniz). De plus, le reste d'ordre n de cette série vérifie

$$|\mathcal{R}_n(x)| \leq u_{n+1}(x) = \frac{x^2}{(1 + x^2)^{n+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{x^2}{(1 + x^2)^{n+1}} = \frac{x^2}{C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 x^2 + \dots + C_{n+1}^{n+1} (x^2)^{n+1}} \leq \frac{x^2}{(n+1)x^2},$$

où $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Donc,

$$|\mathcal{R}_n(x)| \leq \frac{x^2}{(1 + x^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Par passage à la limite dans (2.14), on trouve

$$\mathcal{R}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Ce qui montre d'une part que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$ converge uniformément. D'autre part, cette série converge absolument. En effet,

$$\sum_{n \geq 1} \left| \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Soit $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S_n(x) = x^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+x^2)^k} = 1 - \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n.$$

Par passage à la limite, on obtient

$$S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ce qui veut dire que $\sum_{n \geq 1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, et donc

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$ converge absolument sur $\mathbb{R}$.

Mais la série $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ ne converge pas uniformément puisque (cette série ne vérifie pas le critère de Cauchy, (cf. Proposition 2.2.8)) : il existe $\varepsilon > 0$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n, m \in \mathbb{N}$, et il existe $x \in \mathbb{R}$, vérifiant

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \geq \varepsilon \quad \text{où} \quad f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Remarque 2.2.4 Il existe des séries de fonctions qui convergent uniformément et absolument mais elles ne convergent pas normalement (voir l'exemple qui suit).

Exemple 2.2.9 La série $\sum_{n \geq 1} f_n = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x^2 n^2 + n}$ converge absolument sur $]0, 1]$, car on a

$$\forall x \in]0, 1], \quad \left| \frac{(-1)^n}{x^2 n^2 + n} \right| \leq \frac{1}{x^2 n^2}.$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 n^2}$ converge pour tout $x \in]0, 1]$, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x^2 n^2 + n}$ converge absolument. De plus, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x^2 n^2 + n}$ est une série de Leibniz et donc elle converge simplement et on a pour tout $x \in]0, 1]$,

$$|\mathcal{R}_n| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{x^2 (n+1)^2 + (n+1)} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{R}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} 0 \quad \text{sur }]0, 1].$$

D'où la convergence de $\sum_{n \geq 1} f_n$ est uniforme sur $]0, 1]$. Par contre,

$$\sup_{x \in]0, 1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in]0, 1]} \left(\frac{1}{x^2 n^2 + n} \right) = \frac{1}{n}.$$

Ainsi $\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in]0, 1]} |f_n(x)| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, ce qui montre $\sum_{n \geq 1} f_n$ n'est pas normalement convergente.

Les théorèmes suivants sont des applications directes des théorèmes sur les suites de fonctions appliqués aux séries de fonctions.

2.2.6 Continuité d'une série uniformément convergente

Théorème 2.2.1 On suppose que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur I .

Alors, la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

Preuve Soit $S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$, $x \in I$. Comme les f_n sont continues sur I , alors les S_n sont continues sur I . De plus, $\sum_{n \geq 0} f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} S$ i.e., $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} S$ sur I . D'après le théorème de continuité de la limite (voir théorème 2.1.2), il en résulte que S est continue sur I . ■

Section 2.2. Séries de fonctions

2.2.7 Intégration d'une série uniformément convergente

Théorème 2.2.2 On suppose que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[a, b]$.

2. la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur I .

Alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable et on a pour tout $x \in]a, b]$,

$$\int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^x f_n(t) dt \right).$$

Preuve Soit $S_n(t) = f_0(t) + f_1(t) + \dots + f_n(t)$, $t \in [a, b]$. les S_n sont intégrables, de plus, $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} S$ sur $[a, b]$. D'après le théorème d'intégrabilité de la limite uniforme (cf. théorème 2.1.3), il vient

$$\int_a^x S(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x S_n(t) dt.$$

C'est à dire

$$\int_a^x \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x S_n(t) dt.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x (f_0(t) + f_1(t) + \dots + f_n(t)) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t) dt. \end{aligned}$$

■

2.2.8 Dérivation d'une série uniformément convergente

Théorème 2.2.3 On suppose que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n sont de classe C^1 sur $[a, b]$,

Section 2.2. Séries de fonctions

2. la série $\sum_{n \geq 0} f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$. Soit G sa somme,

3. il existe $x_0 \in [a, b]$ / $\sum_{n \geq 0} f_n(x_0)$ converge.

Alors, $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ et sa somme S vérifie

$$S'(x) = G(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

C'est à dire,

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Preuve Soit $S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$. Alors, pour tout n , S_n est $\mathcal{C}^1$ car $f_n \in \mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in [a, b]$,

$$S'_n(x) = f'_0(x) + f'_1(x) + \dots + f'_n(x).$$

De plus, on a par hypothèse $\sum_{n \geq 0} f'_n$ converge uniformément vers G sur $[a, b]$ donc (S'_n) converge uniformément vers S .

De l'hypothèse 3), il existe x_0 , tel que la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x_0)$ converge i.e., la suite $(S_n(x_0))_n$ converge. Ainsi, toutes les hypothèses du théorème de dérivation (cf. théorème 2.1.4) sont satisfaites, donc

$$\frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{d}{dx} S_n(x) \right).$$

Ce qui est encore équivalent à

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x).$$

■

Remarque 2.2.5 On fait remarquer que le théorème de dérivation précédent est encore vrai si l'intervalle fermé borné $[a, b]$ est remplacé par un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$. Mais dans ce cas, la conclusion est que la somme de cette série est dérivable. Plus précisément, si une série de fonctions converge simplement sur I et la série de ses dérivées est uniformément convergente sur I , alors la somme de la série est dérivable et sa dérivée est égale à la somme de la série des dérivées.

Section 2.2. Séries de fonctions

2.2.9 Théorème de Dini pour les séries de fonctions

Comme pour les suites de fonctions, le théorème de Dini donné ci-dessous montre que la convergence simple entraîne la convergence uniforme sous certaines conditions.

Théorème 2.2.4 *On suppose que :*

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$,
2. pour tout $x \in [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(x) \geq 0$ ou $f_n(x) \leq 0$,
3. $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[a, b]$,
4. la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a, b]$.

Alors, la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $[a, b]$ est uniforme.

Preuve Soit $S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$, $x \in [a, b]$. Cette suite vérifie les hypothèses du théorème de Dini pour les suites de fonctions i.e.,

1. $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.s.} S$ sur $[a, b]$, (convergence simple de $\sum_{n \geq 0} f_n$).
2. S_n et S sont continues (continuité des f_n).
3. $(S_n)_n$ est monotone (elle est croissante si $f_n(x) \geq 0$ et décroissante si $f_n(x) \leq 0$). Alors la convergence de S_n vers S est uniforme sur $[a, b]$.

Ce qui veut dire que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$. ■

2.2.10 Critères de la convergence uniforme

On donne ici deux critères de convergence uniforme pour les séries de fonctions.

2.2.11 Critère de Cauchy

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ où $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$. Alors, le critère de Cauchy est donné par la proposition suivante :

Proposition 2.2.8 La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur E si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, \forall x \in E : \left(n, m \geq N \implies \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| < \varepsilon \right).$$

Preuve Soit $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$, alors, pour tout $x \in E$

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x).$$

La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur E i.e.,

$$S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.u.} S \quad \text{sur } E. \quad (2.15)$$

D'où par le critère de Cauchy pour les suites de fonctions, (2.15) est équivalent à $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \forall x \in E : (n, m \geq N \implies |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon).$$

Ce qui est encore équivalent à $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \forall x \in E : \left(n, m \geq N \implies \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| < \varepsilon \right).$$

■

2.2.12 Critère d'Abel

On considère la série de la forme :

$$\sum_{n \geq 0} a_n(x) b_n(x) \quad \text{où } a_n, b_n : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ainsi, le critère d'Abel est donné par la proposition :

Proposition 2.2.9 On suppose que :

1. pour tout $x \in E$, la suite $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante de réels positifs,

Section 2.2. Séries de fonctions

2. la suite de fonctions $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur E ,
3. la suite des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} b_n$ est bornée i.e.,

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E : \left| \sum_{k=0}^n b_k(x) \right| \leq M.$$

Alors, la série $\sum_{n \geq 0} a_n(x) b_n(x)$ converge uniformément sur E .

Preuve La preuve de cette proposition est analogue à celle donnée pour les séries numériques (cf. la preuve du théorème 1.4.2). ■

2.3 Exercices avec solutions

Exercice 2.3.1 Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}.$$

- 1) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$ et uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
- 2) Pour quelles valeurs de α , la convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Solution 2.3.1 Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ / $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$.

- 1) Il faut distinguer le cas particulier $x = 0$ pour lequel on a

$$f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et le cas général lorsque $x > 0$. Dans ce dernier cas, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha x e^{-nx} = 0.$$

En effet, pour tout $n \geq 1$, et $x > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n^\alpha x e^{-nx}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\alpha \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln x}{n} - x \right) = -\infty.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha x e^{-nx} = 0.$$

Ainsi $(f_n)_n$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$. De plus, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f = 0$ sur $[a, +\infty[$. En effet, pour tout $x \in [a, +\infty[$ avec $a > 0$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = n^\alpha x e^{-nx} = \delta_n(x).$$

Or, puisque

$$\delta'_n(x) = n^\alpha e^{-nx} (1 - nx), \quad \forall x \in [a, +\infty[.$$

Donc, le suprémum est atteint pour $x = \frac{1}{n}$.

Soit x tel que $x > a > \frac{1}{n}$, et comme f_n est décroissante dans $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right]$, donc

$$f_n(x) \leq f_n(a) = n^\alpha a e^{-na}.$$

Et puisque $f = 0$ et $f_n \geq 0$, il résulte que

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \leq n^\alpha a e^{-na}.$$

Par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Ce qui montre que $f_n \xrightarrow[cu]{[a, +\infty[} f$.

2) Pour étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0, +\infty[$, On essaye de calculer :

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)|$$

De ce qui précède le suprémum est atteint pour $x = \frac{1}{n}$. D'où,

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, +\infty[} \delta_n(x) = \delta_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{\alpha-1}}{e}.$$

Enfin, on déduit que si $\alpha < 1$, on a

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \frac{n^{\alpha-1}}{e} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi $f_n \xrightarrow[cu]{[0, +\infty[} f$ pour $\alpha < 1$.

Exercice 2.3.2 Pour $n \geq 1$ et $x \in]0, +\infty[$, on considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies par :

$$f_n(x) = n |\ln x|^n.$$

- 1) Déterminer le domaine de convergence simple D de cette suite de fonctions.
- 2) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur D et sur les intervalles fermés bornés de D .

Solution 2.3.2 Soient $n \geq 1$, $x \in]0, +\infty[$ et $f_n(x) = n |\ln x|^n$.

1) Il est clair que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n |\ln x|^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |\ln x| < 1, \\ +\infty & \text{si } |\ln x| \geq 1. \end{cases}$$

Par conséquent, $f_n \xrightarrow{cs} f = 0$ sur $\left] \frac{1}{e}, e \right[$. Ainsi le domaine de convergence simple D de cette suite de fonctions est

$$D = \left] \frac{1}{e}, e \right[.$$

2) On étudie la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur D . Pour cela, on va calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \left] \frac{1}{e}, e \right[} n |\ln x|^n.$$

Or,

$$\sup_{x \in \left] \frac{1}{e}, e \right[} n |\ln x|^n = \sup [0, n[= n.$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \left] \frac{1}{e}, e \right[} n |\ln x|^n = +\infty.$$

Ainsi la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur D . Maintenant, on va se placer sur un intervalle fermé et borné $[a, b] \subset D$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, b]} n |\ln x|^n.$$

Et comme,

$$\sup_{x \in [a, b]} n |\ln x|^n = \max(n |\ln a|^n, n |\ln b|^n).$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \max(n |\ln a|^n, n |\ln b|^n) = 0. \quad (2.16)$$

Car, $[a, b] \subset D$ ce qui entraîne que

$$[\ln a, \ln b] \subset]-1, 1[.$$

D'où,

$$|\ln a| < 1 \quad \text{et} \quad |\ln b| < 1.$$

Par conséquent,

$$n |\ln a|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad n |\ln b|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ce qui montre (2.16). Ainsi la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, b] \subset D$.

Exercice 2.3.3 Soit α un nombre réel strictement positif. On considère la suite de fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = nx^n(1-x)^\alpha, \quad \forall n \geq 1.$$

- 1) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur l'intervalle $[0, 1]$ et trouver sa limite.
- 2) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers sa limite sur l'intervalle $[0, 1]$ ssi $\alpha > 1$.
- 3) On suppose $0 < \alpha \leq 1$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur le segment $[0, a]$ pour tout $a \in [0, 1[$.

Solution 2.3.3 Soit $f_n(x) = nx^n(1-x)^\alpha$, $n \geq 1$, $x \in [0, 1]$ et $\alpha > 0$.

- 1) Si $x \in [0, 1[$ alors $nx^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'où $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 := f(x)$. Et si $x = 1$, $f_n(1) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On conclut alors que la suite de fonctions converge simplement vers $f \equiv 0$ sur $[0, 1]$.

2) Pour $x \in [0, 1]$, on a

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} [nx^n(1-x)^\alpha].$$

On montre après étude de la fonction $x \rightarrow nx^n(1-x)^\alpha$ que le supremum est atteint en $x = \frac{n}{n+\alpha}$. Par conséquent,

$$\sup_{x \in [0,1]} [nx^n(1-x)^\alpha] = n \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-n} \left(\frac{\alpha}{\alpha+n}\right)^\alpha.$$

Or,

$$n \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-n} \left(\frac{\alpha}{\alpha+n}\right)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha n^{1-\alpha}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-n} \left(\frac{\alpha}{\alpha+n}\right)^\alpha \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha n^{1-\alpha} = 0 \quad \text{ssi } \alpha > 1. \end{aligned}$$

On en déduit enfin,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1]} [nx^n(1-x)^\alpha] = 0 \quad \text{ssi } \alpha > 1.$$

D'où la convergence uniforme est établie ssi $\alpha > 1$.

3) On suppose maintenant que $0 < \alpha \leq 1$. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+\alpha} = 1.$$

Alors par définition de la limite, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow \left| \frac{n}{n+\alpha} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Ce qui implique pour $\varepsilon = 1 - a > 0$ avec $a \in [0, 1[$ fixé, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N} : n > N$, on a

$$\frac{n}{n+\alpha} > a.$$

Or $(f_n)_n$ est croissante sur $[0, a]$, donc,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,a]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in [0,a]} [nx^n(1-x)^\alpha] \\ &= f_n(a) = na^n(1-a)^\alpha. \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, a]} [nx^n (1-x)^\alpha] = 0,$$

puisque $a \in [0, 1[$. D'où $f_n \xrightarrow{cu}_{[0, a]} f$ pour $0 \leq \alpha < 1$.

Exercice 2.3.4 Etudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$:

a) $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$ sur $\mathbb{R}_+$, b) $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}$ sur $[0, 1]$,
 c) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(nx)}{nx} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $[a, +\infty[$ ($a > 0$).

Solution 2.3.4 On étudie la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$:

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{nx+1} = 1.$$

Et si $x = 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0.$$

Ainsi, $f_n \xrightarrow{cs} f$ sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ce qui permet de dire que la convergence de la suite de fonctions continues $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sinon la limite simple f serait continue ce qui n'est pas le cas.

b) Pour tout $x \in]0, 1]$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n x}{1+n2^n x^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx} = 0.$$

Et si $x = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0.$$

Ainsi, $f_n \xrightarrow{cs} f \equiv 0$ sur $[0, 1]$. Si la suite de fonctions continues $(f_n)_n$ convergeait uniformément vers f sur $[0, 1]$, on aurait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Ce qui n'est pas le cas puisque

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} \ln(1 + n2^n x^2) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|f_n(x)| = \frac{\sin^2(nx)}{n|x|} \leq \frac{1}{n|x|}.$$

Par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Et si $x = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Ainsi, $f_n \xrightarrow{cs} f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$. La suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. En effet, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^*} \frac{\sin^2(nx)}{n|x|}.$$

Mais comme,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^*} \frac{\sin^2(nx)}{n|x|} \geq \frac{\sin^2(nx)}{n|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Donc en particulier pour $x = \frac{\pi}{2n}$, on aura

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^*} \frac{\sin^2(nx)}{n|x|} \geq \frac{2}{\pi}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{2}{\pi} > 0.$$

Ce qui justifie que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

On étudie maintenant la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[a, +\infty[$ ($a > 0$). La convergence simple de $(f_n)_n$ vers $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence simple vers f sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$. Une simple majoration va nous permettre de conclure

$$|f_n(x)| = \frac{\sin^2(nx)}{n|x|} \leq \frac{1}{n|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Ainsi pour $x \geq a > 0$, on a

$$|f_n(x)| = \frac{\sin^2(nx)}{n|x|} \leq \frac{1}{na}.$$

Donc,

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x \in [a, +\infty[} \frac{\sin^2(nx)}{n|x|} \leq \frac{1}{na}.$$

Par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = 0.$$

Ce qui montre la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers $f \equiv 0$ sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 2.3.5 Montrer que la suite $(f_n)_n$ où $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall n \geq 2$,

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n n^3 x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ (-1)^{n+1} n^3 \left(x - \frac{2}{n}\right) & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

converge simplement et non uniformément vers 0.

Section 2.3. Exercices avec solutions

Solution 2.3.5 Si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. De plus, pour tout $x \in]0, 1]$ fixé, on peut trouver $N \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ (utiliser la définition de la partie entière de x pour trouver un tel N) tel que

$$\frac{2}{N} < x.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies \frac{2}{n} < \frac{2}{N} < x.$$

Mais par définition de la suite de fonctions $(f_n)_n$

$$\frac{2}{n} < x \leq 1 \implies f_n(x) = 0.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in]0, 1], \exists N > 1, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies f_n(x) = 0.$$

Il résulte que $f_n \xrightarrow{cs} f \equiv 0$ sur $]0, 1]$. On conclut enfin que $f_n \xrightarrow{cs} f \equiv 0$ sur $[0, 1]$.

La convergence de $(f_n)_n$ sur $[0, 1]$ n'est pas uniforme. En effet, il est clair que

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = n^2.$$

Ce supremum ne tend pas vers 0, il n'y a pas donc convergence uniforme.

Exercice 2.3.6 Montrer que la formule $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ définit une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Donner l'expression de sa dérivée f' .

Solution 2.3.6 Pour montrer que la somme de la série donnée est de classe C^1 , on va appliquer le théorème de dérivation (cf. théorème 2.2.3). Pour cela, on pose :

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^3}.$$

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in C^1(\mathbb{R})$. De plus, la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$

$$|f_n(x)| = \frac{|\cos nx|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}.$$

Puisque la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ est convergente pour $\alpha = 3 > 1$, alors la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ est normalement convergente. Et par suite $\sum_{n \geq 1} f_n$ est uniformément convergente. Vérifions maintenant que $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge aussi uniformément sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$

$$f'_n(x) = \frac{-\sin nx}{n^2}.$$

Ainsi,

$$|f'_n(x)| = \frac{|\sin nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ étant convergente, donc la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et par conséquent elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de dérivation, on déduit que f est dérivable et on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\sin nx}{n^2}. \quad (2.17)$$

Et puisque la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et la suite de fonctions f'_n est continue, alors d'après le théorème de continuité (cf. théorème 2.2.1) f' est continue sur $\mathbb{R}$. On conclut alors que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et l'expression de sa dérivée est donnée par (2.17).

Exercice 2.3.7 Etudier la convergence simple, normale et uniforme des séries de fonctions $\sum f_n$ sur la partie E de $\mathbb{R}$ donnée. Le cas échéant, on se placera sur des intervalles contenus dans E . Etudier aussi la continuité de la somme de la série de fonctions, lorsque celle-ci converge.

a) $f_n(x) = \frac{1}{(\ln n)^2} \arctan \frac{x}{n}$ sur $E = \mathbb{R}$, b) $f_n(x) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$

sur $E = [0, +\infty[$, c) $f_n(x) = \sin \left(\frac{x}{n^2}\right) e^{-x/\sqrt{n}}$ sur $E = \mathbb{R}$,

d) $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{1 + nx}$ sur $E = [a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Solution 2.3.7 On étudie la convergence simple, normale et uniforme des séries de fonctions $\sum f_n$ suivantes :

a) La série de fonctions $\sum_{n \geq 2} f_n$ où $f_n(x) = \frac{1}{(\ln n)^2} \arctan \frac{x}{n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{(\ln n)^2} \left| \arctan \frac{x}{n} \right| \leq \frac{|x|}{n (\ln n)^2}, \quad (2.18)$$

puisque

$$\left| \arctan \frac{x}{n} \right| \leq \left| \frac{x}{n} \right|.$$

Comme $\sum_{n \geq 2} \frac{|x|}{n (\ln n)^2}$ est une série de Bertrand convergente pour $\alpha = 1$ et $\beta = 2 > 1$, alors $\sum_{n \geq 2} |f_n(x)|$ converge par le critère de comparaison. Il résulte que, pour tout x fixé, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument. Et donc la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Maintenant, on va étudier la convergence normale de cette série sur $\mathbb{R}$.

Cela revient à étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$. L'étude des variations de la fonction $x \rightarrow f_n(x)$ sur $\mathbb{R}$ montre que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{\pi}{2 (\ln n)^2}.$$

Or la série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{\pi}{2 (\ln n)^2}$ est divergente pour $\alpha = 0 < 1$,

$\beta = 2 \in \mathbb{R}$, donc $\sum_{n \geq 2} f_n(x)$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

On fait remarquer qu'on peut majorer le second membre de l'inégalité (2.18) sur un intervalle borné de façon à éliminer x . Soit alors $[-a, a]$ où $a > 0$ un intervalle donné. La majoration (2.18) peut aussi s'écrire :

$$\forall x \in [-a, a], \quad |f_n(x)| \leq \frac{a}{n (\ln n)^2}.$$

Comme la série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{a}{n (\ln n)^2}$ est convergente, la série $\sum_{n \geq 2} f_n(x)$ converge normalement sur $[-a, a]$. Par conséquent, la

série $\sum_{n \geq 2} f_n(x)$ converge uniformément sur $[-a, a]$. On conclut enfin par le théorème de continuité (cf. théorème 2.2.1) que sa somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^2} \arctan \frac{x}{n}$ est continue sur chaque segment $[-a, a]$, et est donc continue sur tout $\mathbb{R}$.

b) Pour $x \geq 0$ fixé, $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$, où $f_n(x) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$, est une série numérique alternée.

En effet, pour tous $x \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1 + \frac{x}{n} \geq 1 \implies \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \geq 0.$$

De plus cette série alternée est une série de Leibniz car

$$\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et la suite $\left(\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)_{n \geq 1}$ est décroissante, en effet

$$1 + \frac{x}{n+1} \leq 1 + \frac{x}{n} \implies \ln \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \leq \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Ce qui montre enfin que $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ est une série Leibniz, donc convergente. Ainsi $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

Soit $\mathcal{R}_n$ le reste d'ordre n de la série de Leibniz. D'après la proposition 1.3.1), $\mathcal{R}_n$ vérifie :

$$|\mathcal{R}_n(x)| \leq \ln \left(1 + \frac{x}{n+1}\right), \quad \forall x \in [0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.19)$$

On peut majorer l'inégalité (2.19) sur un intervalle borné de façon à éliminer x . Soit alors l'intervalle $[0, a]$ où $a > 0$. La majoration (2.19) peut aussi s'écrire :

$$\forall x \in [0, a], \quad |\mathcal{R}_n(x)| \leq \ln \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \leq \ln \left(1 + \frac{a}{n+1}\right).$$

Ainsi,

$$\sup_{x \in [0, a]} |\mathcal{R}_n(x)| \leq \ln \left(1 + \frac{a}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où le reste $\mathcal{R}_n$ converge uniformément vers 0 sur $[0, a]$, ce qui montre que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$ converge uniformément sur $[0, a]$. D'après le théorème de continuité (cf. théorème 2.2.1) la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$ est continue sur chaque segment $[0, a]$, et est donc continue sur $[0, +\infty[$.

Maintenant, on va étudier la convergence normale de cette série sur $[0, a]$. Cela revient à étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [0, a]} |f_n(x)|$.

Il est clair que

$$\sup_{x \in [0, a]} |f_n(x)| = \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right).$$

Or la série numérique $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right)$ est divergente car son terme général est équivalent à $\frac{a}{n}$ qui est le terme général d'une série divergente, donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ ne converge pas normalement sur $[0, a]$.

c) $\sum_{n \geq 1} f_n$, où $f_n(x) = \sin \left(\frac{x}{n^2} \right) e^{-x/\sqrt{n}}$, converge simplement sur $\mathbb{R}$. En effet, si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ et donc la série est une série nulle convergente. Si $x \neq 0$, on peut écrire

$$|f_n(x)| = \left| \sin \left(\frac{x}{n^2} \right) \right| e^{-x/\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{|x|}{n^2} e^{-x/\sqrt{n}},$$

puisque $|\sin u|$ est équivalent à $|u|$ au voisinage de 0. De plus,

$$\frac{|x|}{n^2} e^{-x/\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{|x|}{n^2}.$$

Ainsi pour tout $x \neq 0$, on a

$$|f_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{|x|}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{|x|}{n^2}$ est convergente, alors la série $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ est convergente par la critère de comparaison des séries à termes positifs. Par suite, la série numérique $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est absolument convergente, et donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$.

Il résulte enfin que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

L'étude de la convergence normale sur tout $\mathbb{R}$ est délicate, on va se contenter de l'étude ici sur un segment. On a

$$|f_n(x)| = \left| \sin\left(\frac{x}{n^2}\right) \right| e^{-x/\sqrt{n}} \leq \frac{|x|}{n^2} e^{-x/\sqrt{n}}. \quad (2.20)$$

On peut majorer l'inégalité (2.20) sur un intervalle fixé $[-a, a]$ où $a > 0$. Grace à la majoration (2.20), on a

$$\forall x \in [-a, a], \quad |f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n^2} e^{-x/\sqrt{n}} \leq \frac{a}{n^2} e^{a/\sqrt{n}}.$$

Pour n assez grand, par exemple pour $n > a^2 + 1$, on a

$$\frac{a}{\sqrt{n}} < 1 \implies e^{a/\sqrt{n}} < e.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in [-a, a], \quad |f_n(x)| \leq \frac{a}{n^2} e.$$

La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} e \frac{a}{n^2}$ étant convergente, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ est donc normalement convergente sur $[-a, a]$. Il en résulte que $\sum_{n \geq 1} f_n$ est uniformément convergente sur l'intervalle $[-a, a]$. D'après le théorème de continuité (cf. théorème 2.2.1), la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right) e^{-x/\sqrt{n}}$ est continue sur chaque segment $[-a, a]$, et est donc continue sur tout $\mathbb{R}$.

Section 2.3. Exercices avec solutions

d) Pour $x > 0$ fixé, $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$, où $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{1+nx}$ est une série numérique de Leibniz. Donc elle est convergente sur $]0, +\infty[$. Ce qui signifie que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est simplement convergente sur $]0, +\infty[$.

Soit R_n le reste d'ordre n de la série de Leibniz. D'après la proposition 1.3.1, R_n vérifie

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{1+(n+1)x}, \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.21)$$

Sur une demi-droite $[a, +\infty[$ ($a > 0$), ce reste est majoré indépendamment de x . La majoration (2.21) donne

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad |R_n(x)| \leq \frac{1}{1+(n+1)a}.$$

Ainsi,

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |R_n(x)| \leq \frac{1}{1+(n+1)a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où le reste R_n converge uniformément vers 0 sur $[a, +\infty[$, ce qui montre bien que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{1+nx}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. D'après le théorème de continuité (cf. théorème 2.2.1), la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{1+nx}$ est continue sur toute demi-droite $[a, +\infty[$, et est donc continue sur $]0, +\infty[$.

Pour la convergence normale de cette série sur $[a, +\infty[$, on a

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{1+na}.$$

Or la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+na}$ est divergente puisque son terme général est équivalent à $\frac{1}{na}$ qui est le terme général d'une série divergente, donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ ne converge pas normalement sur $[a, +\infty[$.

Exercice 2.3.8 On pose $f_n(x) = \frac{x^n}{n^3(1+x^n)}$ pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$.

1) Etudier la convergence simple puis normale de cette série de fonctions sur $[0, 1]$.

2) Montrer que sa somme S est dérivable sur $[0, 1]$ et écrire sa dérivée.

3) Pour $x \in [0, 1]$, on pose $g_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$. Montrer que la série de

fonctions $\sum g_n$ est uniformément convergente sur $[0, 1]$ et que sa somme est une fonction continue et croissante.

Solution 2.3.8 $\sum_{n \geq 1} f_n$ où $f_n(x) = \frac{x^n}{n^3(1+x^n)}$, $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, est une série à termes positifs.

1) Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ et donc la série est convergente. Pour $x \in]0, 1]$, on a

$$0 \leq \frac{x^n}{n^3(1+x^n)} \leq \frac{1}{n^3} \quad \forall n \geq 1. \quad (2.22)$$

Ainsi pour tout $x \in]0, 1]$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^3(1+x^n)}$ converge par la critère de comparaison. Il en résulte alors que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^3(1+x^n)}$ converge simplement sur $]0, 1]$.

En conclusion cette série de fonctions converge simplement sur $[0, 1]$.

De l'inégalité (2.22), on montre aussi que la série de fonctions

$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^3(1+x^n)}$ est normalement convergente sur $[0, 1]$.

2) On note $S(x)$ la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^3(1+x^n)}$ telle que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3(1+x^n)}.$$

Comme les f_n sont continues sur $[0, 1]$ et la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^3(1+x^n)}$ est uniformément convergente sur $[0, 1]$ puisqu'elle est normalement convergente, alors par application du théorème de continuité (cf. théorème 2.2.1), la somme S est continue sur $[0, 1]$.

De plus, chaque f_n est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et on a

$$f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n^2(1+x^n)^2}.$$

La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f'_n$ est normalement convergente sur $[0, 1]$

car pour tous $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, on a

$$0 \leq f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n^2(1+x^n)^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Et par la théorème de dérivation (cf. théorème 2.2.3), on déduit que S est dérivable sur $[0, 1]$ et sa dérivée est :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2(1+x^n)^2}.$$

- 3) Les g_n sont de classe C^1 sur $[0, 1]$ puisque les f_n le sont. La série $\sum_{n \geq 1} g_n$ est convergente en $x = 0$. De plus, $\sum_{n \geq 1} g'_n = \sum_{n \geq 1} f_n$ est normalement donc uniformément convergente sur $[0, 1]$. Par application du théorème de dérivation (cf. théorème 2.2.3), la série $\sum_{n \geq 1} g_n$ est uniformément convergente sur $[0, 1]$ et sa somme F est dérivable et sa dérivée est égale à S . Ainsi, on a

$$F'(x) = S(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Or $S(x)$ est positif comme somme d'une série positive, donc F est croissante sur $[0, 1]$.

Exercice 2.3.9 On pose $f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}$ pour $n \geq 1$ et x réel.

- 1) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, et calculer sa somme.
- 2) La série est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}$? Soit $0 < a < b$. Etudier la convergence normale sur $[a, b]$.

- 3) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_1^b f_n(t) dt$.

Solution 2.3.9 On a $f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}$ pour $n \geq 1$ et x réel.

1) Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$. Donc la série est convergente en $x = 0$.
Si $x \neq 0$, $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est une série géométrique de premier terme

$\frac{x}{1+x^2}$ et de raison $q = \frac{1}{1+x^2} < 1$. Sa suite des sommes partielles $(S_n(x))_n$ est :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{x}{(1+x^2)^k} = x \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+x^2)^k}, \\ &= \frac{x}{1+x^2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+x^2}}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{x}{1+x^2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0.$$

Par conséquent, pour tout $x \neq 0$, la série est convergente et sa somme est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{x}.$$

Enfin, on déduit que la série de fonctions est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ et a pour somme :

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

2) S n'est pas continue en 0, et donc elle n'est pas continue sur tout intervalle contenant 0. Puisque les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, alors forcément la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ n'est pas uniformément ni normalement convergente sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Sinon par le théorème de dérivation, sa somme serait continue sur tout intervalle contenant 0, ce qui n'est pas le cas.

On va étudier la convergence normale sur $[a, b]$ avec $0 < a < b$. Pour $x \in [a, b]$, on a la majoration :

$$|f_n(x)| = \frac{x}{(1+x^2)^n} \leq \frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{b}{(1+a^2)^n}$ est une série géométrique convergente, donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ est normalement convergente sur l'intervalle $[a, b]$ ne contenant pas 0. Il en résulte que $\sum_{n \geq 1} f_n$ est uniformément convergente sur $[a, b]$ avec $0 < a < b$.

- 3) Les f_n sont intégrables et $\sum_{n \geq 1} f_n$ est uniformément convergente sur $[1, b]$, par application du théorème d'intégration (cf. théorème 2.2.2), la série est alors intégrable sur $[1, b]$ et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_1^b f_n(t) dt = \int_1^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \int_1^b S(t) dt = \int_1^b \frac{1}{t} dt = \ln b.$$

Exercice 2.3.10 On considère la série de fonctions $\sum \frac{1}{n^2 x^2 + 1}$.

- 1) Etudier la convergence simple de cette série de fonctions sur $\mathbb{R}$. Etudier la convergence normale sur un segment $[a, b]$ ne contenant pas 0.
- 2) Soit S la somme de cette série. Montrer que pour tout p entier on a

$$S(x) > \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^2 x^2 + 1}.$$

- 3) En déduire la limite de $S(x)$ quand $x \rightarrow 0$.

Solution 2.3.10 $\sum_{n \geq 1} f_n$ où $f_n(x) = \frac{1}{n^2 x^2 + 1}$ est une série à termes positifs.

- 1) Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 1$ et la série $\sum_{n \geq 1} f_n(0)$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0. Pour $x \neq 0$, on a

$$0 < \frac{1}{n^2 x^2 + 1} \sim_{+\infty} \frac{1}{n^2 x^2}.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 x^2}$ est convergente (série de Riemann), donc par comparaison la série numérique $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est convergente.

On conclut donc que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}^*$.

Sur un intervalle $[a, b]$ ne contenant pas 0 (par exemple $0 < a < b$), on a la majoration suivante :

$$0 < \frac{1}{n^2 x^2 + 1} < \frac{1}{n^2 a^2}.$$

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 a^2}$ est une série positive convergente ne dépendant pas de x , donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ est normalement convergente sur $[a, b]$.

2) De ce qui précède, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$, donc sa somme $S(x)$ existe et on a

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x^2 + 1}.$$

Comme chaque terme de la série est strictement positif, alors la somme $S(x)$ est supérieure à chacune de ses sommes partielles. Pour tout p entier on a

$$S(x) > \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^2 x^2 + 1}. \quad (2.23)$$

3) Par passage à la limite dans (2.23) quand $x \rightarrow 0$, on trouve

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) \geq p, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = +\infty.$$

Exercice 2.3.11 On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ pour $n \geq 1$.

1) Montrer que cette série converge pour tout $x \geq 0$. On note $S(x)$ la somme. Donner un encadrement simple de $S(x)$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.

- 2) Montrer qu'il n'existe aucun intervalle $[a, b]$ où la série converge normalement.
- 3) Montrer qu'elle converge uniformément sur $[0, +\infty[$. Que peut-on en conclure pour S ?
- 4) Montrer que S est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de $S'(x)$.

Solution 2.3.11 Soit $\sum_{n \geq 1} f_n$ où $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$.

- 1) Pour tout $x \geq 0$ fixé, $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est une série de Leibniz. En effet, pour tous $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on a

$$g_n(x) = \frac{1}{n+x} \geq 0, \quad g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \quad \text{et} \quad g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ étant une série de Leibniz, pour tout $x \geq 0$, elle est donc convergente. Par conséquent, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ est simplement convergente sur $[0, +\infty[$ et l'on a l'encadrement (cf. remarque 1.3.1) :

$$S_{n+1}(x) \leq S(x) \leq S_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[.$$

Et le signe de S est le signe du premier terme non nul de la série.

En particulier pour $n = 1$, on aura

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} \leq S(x) \leq \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

Ainsi,

$$0 < \frac{1}{(1+x)(2+x)} \leq S(x) \leq \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

Par passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on trouve

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0.$$

2) Soit maintenant l'intervalle $[a, b]$ avec $a \geq 0$. On va étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)|$. On a

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [a, b]} \frac{1}{n+x} = \frac{1}{n+a} \sim \frac{1}{n}.$$

Or la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente,, donc la série numérique $\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)|$ est divergente. Par conséquent la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur tout intervalle $[a, b] \subset [0, +\infty[$.

3) $\sum_{n \geq 1} f_n$ est une série de Leibniz, donc son reste d'ordre n vérifie :

$$|\mathcal{R}_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)+x} \leq \frac{1}{n+1}, \quad \forall x \geq 0.$$

Ainsi,

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} |\mathcal{R}_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ce qui signifie que $\mathcal{R}_n$ converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$. D'où la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

On conclut enfin par le théorème de continuité (cf. théorème 2.2.1) que la somme S de cette série est une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

4) les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et on a

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}.$$

De plus, $\sum_{n \geq 1} f'_n$ est normalement donc uniformément convergente sur $[0, +\infty[$, puisqu'on a la majoration :

$$|f'_n(x)| = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \geq 0,$$

et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ une série positive convergente. Il en résulte que la somme S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}.$$

Exercice 2.3.12 On considère la série de fonctions $\sum e^{-nx} \frac{\sin(n\sqrt{3})}{n}$ pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$.

- 1) Etudier la convergence, simple, uniforme, normale de cette série de fonctions sur des intervalles que l'on précisera.
- 2) La somme S est-elle continue sur $[0, +\infty[$? Est-elle dérivable sur $]0, +\infty[$?

Solution 2.3.12 Soit $\sum_{n \geq 1} f_n$ où $f_n = e^{-nx} \frac{\sin(n\sqrt{3})}{n}$ avec $x \geq 0$.

1) Pour $x = 0$, on a

$$\sum_{n \geq 1} f_n(0) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\sqrt{3})}{n} = \sum_{n \geq 1} u_n v_n,$$

où $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \sin(n\sqrt{3})$. Cet exemple a déjà été traité dans la partie cours dans le cas général (cf. exemple 1.4.4). D'après le critère de convergence d'Abel (cf. théorème 1.4.2), la série numérique $\sum_{n \geq 1} f_n(0)$ converge et par conséquent la série de fonctions est convergente en $x = 0$.

Pour $x > 0$ donné, on a

$$|f_n(x)| = e^{-nx} \frac{|\sin(n\sqrt{3})|}{n} < e^{-nx}. \quad (2.24)$$

Comme $\sum_{n \geq 1} e^{-nx}$ est une série géométrique convergente puisque sa raison $q = e^{-x} < 1$ pour tout $x > 0$, alors $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ est convergente par comparaison. Et par conséquent, $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge ab-

seulement, ce qui implique que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Enfin, on conclut que cette série de fonctions converge simplement sur $[0, +\infty[$.

Il vient de l'inégalité (2.24) que si $x \in [a, b]$ avec $a > 0$,

$$|f_n(x)| < e^{-na}.$$

Or $\sum_{n \geq 1} e^{-na}$ est une série numérique positive convergente, donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ est normalement convergente sur $[a, b]$ avec $a > 0$ et même sur toute demi-droite $[a, +\infty[$.

De plus, la série $\sum_{n \geq 1} |f_n(0)| = \sum_{n \geq 1} \frac{|\sin(n\sqrt{3})|}{n}$ est divergente car

$$\frac{\sin^2(n\sqrt{3})}{n} \leq \frac{|\sin(n\sqrt{3})|}{n},$$

et comme $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n\sqrt{3})}{n}$ est divergente (par comparaison série-intégrale), il en est de même pour la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|\sin(n\sqrt{3})|}{n}$. Par conséquent, la série de fonctions ne peut pas être normalement convergente sur $[0, +\infty[$.

On va utiliser de nouveau le critère d'Abel avec :

$$\sum_{n \geq 1} e^{-nx} \frac{\sin(n\sqrt{3})}{n} = \sum_{n \geq 1} u_n v_n,$$

où $u_n = \frac{e^{-nx}}{n}$ et $v_n = \sin(n\sqrt{3})$. On a déjà montré dans la partie cours que :

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin(k\sqrt{3}) \right| \leq \frac{1}{\sin(\sqrt{3}/2)} = M.$$

De plus, $(u_n)_n$ décroissante positive et tendant 0. D'après le critère d'Abel, la série $\sum_{n \geq 1} u_n v_n$ converge et le reste d'ordre n de la série vérifie (cf. corollaire 1.4.1) :

$$|\mathcal{R}_n(x)| \leq 2Mu_{n+1} = 2 \frac{1}{\sin(\sqrt{3}/2)} \times \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}.$$

Or,

$$2 \frac{1}{\sin(\sqrt{3}/2)} \times \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leq \frac{2}{\sin(\sqrt{3}/2)} \times \frac{1}{n+1}, \quad \forall x \geq 0.$$

D'où,

$$|\mathcal{R}_n(x)| \leq \frac{2}{\sin(\sqrt{3}/2)} \times \frac{1}{n+1}, \quad \forall x \geq 0.$$

Ce qui montre que $\mathcal{R}_n$ converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$.

Donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

3) On déduit par le théorème de continuité (cf. Théorème 2.2.1) que la somme S de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ est une fonction continue sur $[0, +\infty[$ car les f_n sont continues et $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

De plus, les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a

$$f'_n(x) = -e^{-nx} \sin(n\sqrt{3}).$$

On peut facilement montrer par un raisonnement analogue à ce qui précède que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ est normalement convergente sur toute demi-droite $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. D'après le théorème de dérivation (cf. théorème 2.2.3), la somme S est une fonction dérivable sur chaque demi-droite $[a, +\infty[$, et est donc dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2.3.13 On considère la série de fonctions $\sum \frac{nx^n}{1+n^2x^2}$ pour $n \geq 1$.

1) Montrer que cette série converge ssi $-1 \leq x < 1$.

2) Etudier la convergence normale de la série sur $[-a, a]$ où $0 < a < 1$.

La somme de la série S est-elle continue sur $] -1, 1[$?

3) S est-elle de classe C^1 sur $] -1, 1[$. Si oui donner l'expression de S' .

4) S est-elle monotone sur $[0, 1[$?

5) Montrer que $\int_0^a \frac{nt^n}{1+n^2t^2} dt \leq a^{n+1}$ où $a \in]0, 1[$ et en déduire que

$$0 \leq \int_0^a S(t) dt \leq \frac{a^2}{1-a}.$$

Solution 2.3.13 Soit $\sum_{n \geq 1} f_n$ où $f_n = \frac{nx^n}{1+n^2x^2}$.

1) Pour $|x| > 1$ donné, on a

$$|f_n(x)| = \frac{n|x|^n}{1+n^2x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n|x|^n}{n^2x^2} = \frac{|x|^{n-2}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc $f_n(x) \nrightarrow 0$. Il en résulte que la série est divergente.

Pour $|x| < 1$, on a

$$|f_n(x)| = \frac{n|x|^n}{1+n^2x^2} \leq n|x|^n, \quad (2.25)$$

puisque $1+n^2x^2 > 1$. Et comme $\sum_{n \geq 1} n|x|^n$ est une série convergente

(car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)|x|^{n+1}}{n|x|^n} = |x| < 1$, par la règle de d'Alembert, on a convergence), la série $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ converge par le critère de comparaison.

Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge ssi $|x| < 1$.

Pour $x = 1$, on a

$$f_n(1) = \frac{n}{1+n^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}.$$

La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ étant divergente, il en est de même

pour $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{1+n^2}.$

Pour $x = -1$, on a

$$f_n(-1) = \frac{n(-1)^n}{1+n^2}.$$

La série $\sum_{n \geq 1} f_n(-1) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n}{1+n^2}$ est une série de Leibniz donc convergente.

En conclusion, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement ssi $-1 \leq x < 1$.

2) Pour $x \in [-a, a]$ où $0 < a < 1$, l'inégalité (2.25) devient

$$|f_n(x)| \leq n|x|^n \leq na^n.$$

Comme $\sum_{n \geq 1} na^n$ est une série convergente (utiliser la règle d'Alembert), on conclut que la série de fonction $\sum_{n \geq 1} f_n$ est normalement convergente sur $[-a, a]$ avec $0 < a < 1$.

Comme $\sum_{n \geq 1} f_n$ est uniformément convergente sur $[-a, a]$ (puisque'elle est normalement convergente sur cet intervalle et les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$), la somme S de la série est donc continue sur tout intervalle $[-a, a]$, avec $0 < a < 1$. On en déduit que S est continue sur $] -1, 1[$.

3) Chaque f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$f'_n(x) = \frac{n^2 x^{n-1} (1 + x^2 (n^2 - 2n))}{(1 + n^2 x^2)^2}.$$

De plus pour tout $x \in [-a, a]$ où $0 < a < 1$, on a la majoration :

$$f'_n(x) \leq n^2 a^{n-1} (1 + a^2 n^2).$$

Par la règle d'Alembert, la série $\sum_{n \geq 1} n^2 a^{n-1} (1 + a^2 n^2)$ est convergente et par conséquent la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f'_n$ est normalement donc uniformément convergente sur tout intervalle $[-a, a]$ avec $0 < a < 1$. D'après le théorème de dérivation, on conclut que La somme S de la série est dérivable sur tout intervalle $[-a, a]$ avec $0 < a < 1$ et on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x).$$

On applique le théorème de continuité sur la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$, on déduit que S' est continue sur $[-a, a]$, $\forall a / 0 < a < 1$. Ce qui montre que S est de classe C^1 sur tout segment $[-a, a]$, et est donc C^1 sur $] -1, 1[$.

- 4) On va étudier la monotonie de S sur $[0, 1[$. De l'expression de f'_n , on déduit que

$$f'_n(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0, 1[\text{ et } n \geq 2.$$

Pour $n = 1$, on a

$$f'_1(x) = \frac{(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} > 0, \quad \forall x \in [0, 1[.$$

Ainsi S' est la somme d'une série positive, et est donc positive.

Par conséquent S est croissante sur $[0, 1[$.

- 5) Soit $a \in]0, 1[$. On déduit de l'inégalité (2.25) que

$$0 \leq f_n(t) \leq nt^n, \quad \forall t \in [0, a].$$

En intégrant par rapport à $t \in [0, a]$, on obtient

$$0 \leq \int_0^a f_n(t) dt \leq n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^a = n \frac{a^{n+1}}{n+1} < a^{n+1}.$$

Par conséquent,

$$0 \leq \int_0^a \frac{nt^n}{1+n^2t^2} dt \leq a^{n+1}. \quad (2.26)$$

La série de fonctions étant normalement convergente sur $[0, a]$, donc uniformément convergente sur cet intervalle. De plus, les f_n sont continues sur $[0, a]$, donc intégrables sur $[0, a]$. Par application du théorème d'intégration (cf. théorème (2.2.2)), on conclut que S est intégrable sur $[0, a]$, et on a

$$\int_0^a S(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^a f_n(t) dt. \quad (2.27)$$

De (2.26) et (2.27), on déduit que

$$0 \leq \int_0^a S(t) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n+1} = \frac{a^2}{1-a}.$$

Exercice 2.3.14 Soit la série de fonction $\sum \frac{x}{\sqrt{n}(x+n)}$ pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$.

-) Montrer que cette série converge, simplement sur $[0, +\infty[$ et normalement sur $[0, a]$ pour tout $a > 0$. Est-elle normalement convergente sur $[0, +\infty[$?
-) Montrer que S est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
-) En déduire que S est de classe C^1 et décroissante sur $]0, +\infty[$.

Solution 2.3.14 Soit $\sum_{n \geq 1} f_n$ où $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}(x+n)}$ pour $x \geq 0$.

) Pour $x \geq 0$, on a

$$|f_n(x)| = \frac{x}{\sqrt{n}(x+n)} \leq \frac{x}{n\sqrt{n}} = \frac{x}{n^{3/2}}. \quad (2.28)$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^{3/2}}$ est convergente (série de Riemann convergente pour $\alpha = 3/2 > 1$), donc la série numérique $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ est convergente

par comparaison. Par conséquent, $\sum_{n \geq 1} f_n$ est absolument convergente sur $[0, +\infty[$, et est donc simplement convergente sur $[0, +\infty[$.

On peut majorer le second terme de l'inégalité (2.28) de façon à éliminer x . Soit alors l'intervalle $[0, a]$ où $a > 0$. De l'inégalité (2.28), il vient

$$|f_n(x)| = \frac{x}{\sqrt{n}(x+n)} \leq \frac{a}{n^{3/2}}, \quad \forall x \in [0, a],$$

et comme $\sum_{n \geq 1} \frac{a}{n^{3/2}}$ est convergente, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ est normalement convergente sur $[0, a]$ pour tout $a > 0$.

La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ n'est pas normalement convergente sur $[0, +\infty[$. En effet, de l'étude la fonction $x \rightarrow f_n(x)$, on déduit que

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, +\infty[} \frac{x}{\sqrt{n}(x+n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente car $\alpha = 1/2 < 1$,

donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

2) $\sum_{n \geq 1} f_n$ étant normalement convergente sur $[0, a]$ pour tout $a > 0$, elle est donc uniformément convergente sur cet intervalle, de plus les f_n sont continues sur $[0, +\infty[$ en particulier donc sur $[0, a]$ pour tout $a > 0$. On conclut du théorème de continuité que la fonction somme S de la série est continue sur $[0, a]$ pour tout $a > 0$. Donc, elle est continue sur $[0, +\infty[$.

Chaque f_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et on a

$$f'_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{(x+n)^2}.$$

Pour tout $x \in [a, +\infty[$ où $a > 0$, on a la majoration :

$$|f'_n(x)| \leq \frac{\sqrt{n}}{(a+n)^2}.$$

Section 2.3. Exercices avec solutions

Comme la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{(a+n)^2}$ est convergente car

$$\frac{\sqrt{n}}{(a+n)^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}},$$

la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f'_n$ est normalement donc uniformément convergente sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. D'après le théorème de dérivation, on conclut que la fonction somme S de la série est dérivable sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ et on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x).$$

3) En appliquant le théorème de continuité à la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$, on déduit que la fonction somme S' de la série est continue sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Par conséquent, S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Et enfin, la fonction S est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ car pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x+n)^2} > 0.$$

Exercice 2.3.15 On considère la série de fonction suivante :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

- 1) Etudier la convergence simple de cette série de fonctions. Soit S la somme de cette série.
- 2) Sur l'intervalle I où elle converge, est-elle normalement convergente ?
- 3) Montrer que la série converge normalement sur l'intervalle $[-a, a]$ où $0 < a < 1$. La fonction S est-elle continue sur $] -1, 1[$?
- 4) Montrer que la série de fonctions est uniformément convergente sur $[-1, 0]$. Que peut-on en conclure ?

5) Montrer que

$$\forall x \in]0, 1[, \forall n \geq 1, \quad S(x) \geq \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{\sqrt{k}},$$

et en déduire que $\lim_{x \rightarrow 1} S(x) = +\infty$.

Solution 2.3.15 Soit $\sum_{n \geq 1} f_n$ où $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

1) Par la règle de d'Alembert, on a

$$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \frac{\sqrt{n}}{x^n} \right| = |x| \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|.$$

Si $|x| < 1$, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge absolument et donc elle converge simplement. Et si $|x| > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ diverge. Enfin si $|x| = 1$

c'est à dire $x = \pm 1$. Pour $x = 1$, $\sum_{n \geq 1} f_n(1) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une

série de Riemann divergente car $\alpha = 1/2 < 1$. Et pour $x = -1$, $\sum_{n \geq 1} f_n(-1) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série de Leibniz, donc convergente.

Ainsi $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[-1, 1[$.

2) On pose $I = [-1, 1[$ l'intervalle de convergence de $\sum_{n \geq 1} f_n$.

$\sum_{n \geq 1} f_n$ n'est pas normalement convergente sur I . En effet,

$$\sup_{x \in I} |f_n(x)| = \sup_{x \in I} \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, donc $\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in I} |f_n(x)|$ diverge. Ce qui montre que $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur I .

3) Pour tout $x \in [-a, a]$ avec $0 < a < 1$, on a

$$|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} \leq \frac{a^n}{\sqrt{n}} \leq a^n.$$

Comme $\sum_{n \geq 1} a^n$ est une série géométrique de raison $q = a$ telle que $0 < a < 1$, donc convergente, et alors $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$ avec $0 < a < 1$.

Puisque les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[-a, a]$ avec $0 < a < 1$, de plus $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[-a, a]$.

Alors par application du théorème de continuité, on conclut que S est continue sur $[-a, a]$, pour tout a / $0 < a < 1$. Il en résulte enfin que S est continue sur $] -1, 1[$.

4) Pour tout $x \in [-1, 0]$, on peut écrire

$$f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n \frac{(-x)^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n g_n(x),$$

où

$$g_n(x) = \frac{(-x)^n}{\sqrt{n}}.$$

Il est clair que g_n est positive, décroissante et tend vers 0. Donc

$\sum_{n \geq 1} f_n$ est une série de Leibniz. Il en résulte que son reste $\mathcal{R}_n(x)$ vérifie :

$$0 \leq |\mathcal{R}_n(x)| \leq g_{n+1}(x) = \frac{(-x)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}.$$

Or $x \in [-1, 0]$, ou encore $-x \in [0, 1]$, il vient alors

$$\frac{(-x)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

On déduit que

$$0 \leq |\mathcal{R}_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \forall x \in [-1, 0].$$

Par conséquent,

$$\sup_{x \in [-1, 0]} |\mathcal{R}_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

C'est à dire que $\mathcal{R}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{cu} 0$ sur $[-1, 0]$. Ce qui justifie que $\sum_{n \geq 1} f_n$ est uniformément convergente sur $[-1, 0]$. On conclut que S est continue à droite de -1 .

5) Pour tout $x \in]0, 1[$, on a pour tout $n \geq 1$

$$f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}} > 0.$$

Ce qui implique que

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{\sqrt{k}} > 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Ainsi,

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{\sqrt{k}}, \quad \forall n \geq 1 \quad (2.29)$$

Par passage à la limite quand $x \xrightarrow{\leq} 1$ dans (2.29), on trouve

$$\lim_{x \xrightarrow{\leq} 1} S(x) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En faisant tendre maintenant n vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{x \xrightarrow{\leq} 1} S(x) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Or $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est une série de Riemann divergente, donc sa somme

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$. Par conséquent,

$$\lim_{x \xrightarrow{\leq} 1} S(x) = +\infty.$$

Chapitre 3

Séries entières

Un type de séries de fonctions, qui joue un rôle important en mathématiques est constitué de fonctions puissances et généralise les fonctions polynômes : ce sont les séries entières, qu'on va étudier dans ce chapitre. Plus précisément, on étudie des séries de fonctions de la forme $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Ces séries sont appelées séries entières. Elles sont dites entières du fait qu'elles font intervenir des puissances entières de la variable complexe z .

Les séries entières possèdent des propriétés de convergence remarquables, d'où l'étude spécifique de ces séries.

De plus, certaines fonctions indéfiniment dérivables peuvent être écrites au voisinage de zéro comme somme d'une série entière. On parle dans ce cas de fonctions développables en série entière au point 0.

Un résumé sur les suites et séries à valeurs complexes est essentiel pour l'étude des séries entières.

3.1 Suites et séries à valeurs complexes

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes i.e $z_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On note :

$$z_n = x_n + iy_n,$$

où $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$. Et soit $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$z_0 = x_0 + iy_0 \quad / \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$

3.1.1 Convergence d'une suite de complexes

Définition 3.1.1 On dit que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers z_0 , et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon).$$

Ce qui est encore équivalent à : $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : \left(n \geq N \Rightarrow \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon \right).$$

Proposition 3.1.1 On a alors l'équivalence suivante :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0 \right) \iff \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_0 \right).$$

Preuve En effet, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0$, alors, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \Rightarrow \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Or,

$$\begin{aligned} |x_n - x_0| &\leq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \\ \text{et } |y_n - y_0| &\leq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

De (3.1) et (3.2), on déduit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon \text{ et } |y_n - y_0| < \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_0.$$

Inversement, si on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_0$, alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Section 3.1. Suites et séries à valeurs complexes

et, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2 \implies |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n \geq N$,

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

D'où, $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0$. ■

3.1.2 Convergence d'une série à termes complexes

On définit maintenant la notion de convergence pour les séries à termes complexes.

Définition 3.1.2 La série à termes complexes $\sum_{n \geq 0} z_n$ où $z_n \in \mathbb{C}$, est dite convergente si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ telle que

$$S_n = \sum_{k=0}^n z_k = z_0 + z_1 + \dots + z_n,$$

est convergente.

Le résultat suivant caractérise la convergence d'une série à termes complexes.

Théorème 3.1.1 La série $\sum_{n \geq 0} z_n$ où $z_n = x_n + iy_n$ converge si et seulement si les séries $\sum_{n \geq 0} x_n$ et $\sum_{n \geq 0} y_n$ sont convergentes dans $\mathbb{R}$ et de plus, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} y_n. \quad (3.3)$$

Preuve En effet, soit $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} z_n$, alors,

$$S_n = \sum_{k=0}^n z_k = \sum_{k=0}^n x_k + i \sum_{k=0}^n y_k = A_n + iB_n, \quad (3.4)$$

où $(A_n)_n, (B_n)_n$ sont les suites des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} x_n$ et $\sum_{n \geq 0} y_n$ respectivement.

Par passage à la limite dans (3.4) quand n tend vers $+\infty$ et par application de la proposition 3.1.1, on conclut le résultat du théorème et on obtient (3.3). ■

Exemple 3.1.1 *Etudier la série à termes complexes suivantes :*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1.$$

Puisque

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx,$$

il suffit donc d'étudier les deux séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}$.

Par le critère d'Abel (cf. proposition 2.2.9), $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}$ converge pour

tout $x \in \mathbb{R}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n}$ converge pour tout $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Donc, par

application du théorème précédent la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n}$ est convergente pour tout $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 3.1.1 *On perd dans $\mathbb{C}$ les résultats basés sur la relation d'ordre comme par exemple les résultats utilisant la monotonie car il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$.*

On conserve pour les séries à termes complexes une condition suffisante très utile de convergence d'une série. En effet,

Théorème 3.1.2 *Toute série complexe $\sum_{n \geq 0} z_n$ absolument convergente*

(i.e. la série $\sum_{n \geq 0} |z_n|$ des modules converge), est convergente dans $\mathbb{C}$.

Autrement dit,

$$\left(\sum_{n \geq 0} |z_n| \text{ converge} \right) \Rightarrow \left(\sum_{n \geq 0} z_n \text{ converge} \right).$$

Preuve On a

$$|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n| \quad \text{et} \quad |y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n|.$$

$\sum_{n \geq 0} |z_n|$ étant convergente (i.e., $\sum_{n \geq 0} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ converge), on déduit donc par le théorème de comparaison que $\sum_{n \geq 0} |x_n|$ et $\sum_{n \geq 0} |y_n|$ convergent. Par conséquent, les séries $\sum_{n \geq 0} x_n$ et $\sum_{n \geq 0} y_n$ convergent aussi. Et d'après le théorème 3.1.1, la série $\sum_{n \geq 0} z_n$ converge. ■

Exemple 3.1.2 On se propose d'étudier la nature des séries complexes :

1. soit $\sum_{n \geq 1} z_n$, $z_n = \frac{i^n}{n^2}$. On va étudier la convergence absolue de cette série. Pour cela, on a

$$|z_n| = \frac{1}{n^2}.$$

Donc,

$$\sum_{n \geq 1} |z_n| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

Et comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (car série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), alors la série $\sum_{n \geq 1} |z_n|$ converge aussi. Par conséquent,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n^2} \text{ converge.}$$

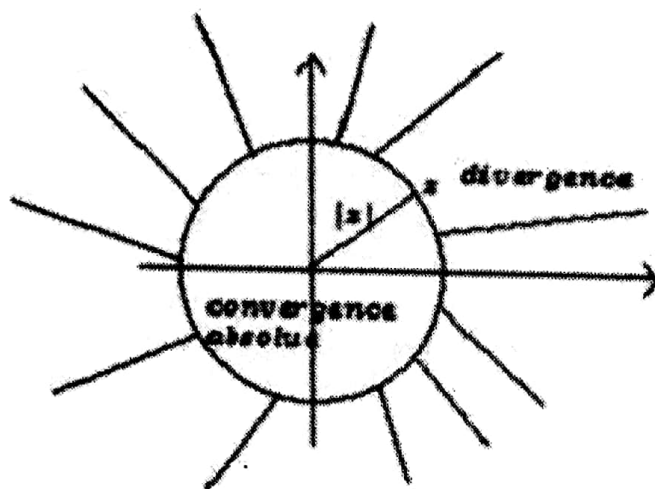
2. Soit $\sum_{n \geq 0} z^n$, $z \in \mathbb{C}$. Par la règle d'Alembert, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{z^{n+1}}{z^n} \right| = |z| < 1.$$

Alors si $|z| < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} |z^n|$ converge. D'où la série $\sum_{n \geq 0} z^n$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |z^n| = \frac{1}{1-|z|}, \quad z \neq 1.$$

Et si $|z| > 1$, la série $\sum_{n \geq 0} z^n$ diverge. Enfin, si $|z| = 1$, alors la série $\sum_{n \geq 0} z^n$ diverge puisque son terme général ne tend pas vers zéro ($z^n \not\rightarrow 0$). Le schéma suivant interprète la nature de la série en question :



On rappelle une condition nécessaire de convergence qui reste vraie pour les séries complexes.

Théorème 3.1.3 Si la série complexe $\sum_{n \geq 0} z_n$ converge alors son terme général z_n tend vers 0.

Preuve En effet, si $\sum_{n \geq 0} z_n$ converge, d'après le théorème 3.1.1, les séries

$\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re} z_n$ et $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im} z_n$ convergent dans $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\operatorname{Re} z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \operatorname{Im} z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par conséquent,

$$z_n = \operatorname{Re} z_n + i \operatorname{Im} z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

■

3.2 Séries entières

Les séries entières sont une classe particulière des séries de fonctions. On s'intéresse dans un premier temps aux propriétés de la somme d'une

Section 3.2. Séries entières

série entière (domaine de convergence, continuité, etc.). On verra ensuite comment exprimer les fonctions usuelles comme des sommes de séries entières.

Définition 3.2.1 On appelle série entière complexe (resp. réelle) une série de fonctions de la forme $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ (resp. $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$) où $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sont des nombres complexes (resp. réels) donnés, appelés coefficients de la série, et où z (resp. x) est une variable complexe (resp. réelle).

Exemple 3.2.1 Déterminons le domaine de convergence pour chaque série entière des séries suivantes :

1. Soit la série entière complexe $\sum_{n \geq 0} z^n$. cette série est une série géométrique qui converge lorsque $|z| < 1$. Ainsi son domaine de convergence est :

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n \geq 0} z^n \text{ converge} \right\} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}.$$

C'est le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1, appelé disque de convergence. Dans le cas où la série entière est réelle, son domaine de convergence :

$$D =]-1, 1[.$$

2. Soit la série entière complexe $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$. Par la règle de d'Alembert, cette série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors, son domaine de convergence :

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \text{ converge} \right\} = \mathbb{C}.$$

Dans le cas où cette série entière est réelle son domaine de convergence est $D = \mathbb{R}$.

3. La série entière complexe $\sum_{n \geq 0} n! z^n$ converge pour $z = 0$ et diverge pour $z \neq 0$ (car son terme général ne tend pas vers 0). Ainsi son

domaine de convergence est :

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \ / \ \sum_{n \geq 0} n! z^n \text{ converge} \right\} = \{0\}.$$

Remarque 3.2.1 Toute série de la forme $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge en un point $z = 0$. En effet, soit $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ alors, on a

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \implies S_n(0) = a_0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(0) = a_0.$$

Ainsi le domaine de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ n'est jamais vide.

Le résultat fondamental concernant les séries entières suivant est connu sous le nom du lemme d'Abel.

Théorème 3.2.1 Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge en un point complexe $z_0 \neq 0$, ($z_0 = a_0 + ib_0$ et $a_0^2 + b_0^2 > 0$), alors

1. elle converge absolument sur $D_{|z_0|} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < |z_0|\}$.
2. elle converge uniformément sur $\overline{D}_{\theta|z_0|} = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq \theta |z_0|\}$,
où $\theta \in]0, 1[$.

Preuve 1. La série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge en $z_0 \neq 0$ par hypothèse, alors

$$a_n z_0^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ce qui implique

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N : |a_n z_0^n| < 1. \quad (3.5)$$

Soit $|z| < |z_0|$ alors,

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \right| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n. \quad (3.6)$$

De (3.5) et (3.6), on déduit que :

$$|a_n z^n| < \left| \frac{z}{z_0} \right|^n.$$

Or $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ est une série géométrique convergente car $\frac{|z|}{|z_0|} < \frac{|z_0|}{|z_0|} = 1$.

D'après le critère de comparaison, $\sum |a_n z^n|$ converge et donc $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq \theta |z_0|$ avec $0 < \theta < 1$. Alors, de (3.5)

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq \left| \frac{z}{z_0} \right|^n = \theta^n.$$

Or $\sum_{n \geq 0} \theta^n$ converge car $0 < \theta < 1$, donc $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est normalement convergente sur $\overline{D}_{\theta|z_0|}$. Par conséquent, elle est uniformément convergente sur $\overline{D}_{\theta|z_0|}$. ■

Comme conséquence du théorème précédent, on déduit :

Corollaire 3.2.1 Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge en un point complexe $z_0 \neq 0$, alors cette série est divergente en tout complexe z tel que $|z| > |z_0|$.

Preuve En effet, soit $z_1 : |z_1| > |z_0|$ tel que $\sum_{n \geq 0} a_n z_1^n$ est convergente.

D'après le théorème précédent, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument sur $D_{|z_1|}$.

Donc elle converge en particulier en $z = z_0$, ceci contredit l'hypothèse. ■

3.2.1 Rayon de convergence d'une série entière

On considère la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, et soit D son domaine qui est toujours non vide (cf. Remarque 3.2.1).

Définition 3.2.2 On appelle rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, le nombre $0 \leq R \leq +\infty$, défini par :

$$R = \sup \{ |z| \mid z \in D \}$$

Exemple 3.2.2 calculer les rayon de convergence des séries suivantes :

1. Soit $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$, $x \in \mathbb{R}$. On pose $u_n = \frac{x^n}{n}$, alors par la règle de d'Alembert, on a

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n}{n+1} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|.$$

Si $|x| < 1$ alors

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} \text{ converge absolument.}$$

Si $|x| > 1$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} \text{ diverge.}$$

Enfin, si $|x| = 1$ i.e $x = \pm 1$, on a alors deux séries $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ qui converge (car c'est une série de Leibniz), et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ qui diverge (série harmonique). Ainsi le domaine de convergence est $D = [-1, 1[$. Par conséquent, le rayon de convergence de cette série est

$$R = \sup \{|x| \mid x \in D\} = \sup([0, 1]) = 1.$$

2. Soit $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$. Alors, cette série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ (voir exemple 3.2.1, 2.). Par suite, son domaine de convergence est $D = \mathbb{C}$. Par conséquent la rayon de convergence de cette série est

$$R = \sup \{|z| \mid z \in \mathbb{C}\} = +\infty.$$

3. Soit $\sum_{n \geq 1} n! z^n$, $z \in \mathbb{C}$. Alors, $D = \{0\}$ (voir exemple 3.2.1, 3.). Ainsi le rayon de convergence de cette série est

$$R = \sup \{0\} = 0.$$

Le rayon de convergence est complètement caractérisé par le théorème suivant.

Section 3.2. Séries entières

Théorème 3.2.2 Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Alors,

1. $R = 0 \iff D = \{0\}$ i.e., la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge pour $z = 0$.
2. $R = +\infty \iff D = \mathbb{C}$ i.e., la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.
3. $0 < R < +\infty$, alors on a

$$\begin{cases} i) |z| < R \implies \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ converge absolument,} \\ 2i) |z| > R \implies \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ diverge.} \end{cases}$$

Preuve 1. Si $R = 0 \iff \sup \{|z| \mid z \in D\} = 0 \iff D = \{0\}$.

2. Si $R = +\infty \iff \sup \{|z| \mid z \in D\} = +\infty$. Alors par la caractérisation de la borne supérieure, il vient

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists z_m \in D \mid |z_m| > m. \quad (3.7)$$

Or $z_m \in D$, donc $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge pour $z_m \neq 0$. D'après le théorème 3.2.1, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument sur $D_{|z_m|}$. C'est à dire

$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge pour tout z tel que $|z| < |z_m|$. D'ici et de (3.7),

on conclut que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge sur $\overline{D}_m, \forall m \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge sur $\mathbb{C}$, ce qui veut dire que $D = \mathbb{C}$.

Inversement, si $D = \mathbb{C}$ signifie que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge, d'où $R = +\infty$.

3. On suppose que $0 < R < +\infty$, et soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Par la caractérisation de la borne supérieure, on obtient

$$\exists z_0 \in D \mid |z| < |z_0| < R. \quad (3.8)$$

Or $z_0 \in D$, donc $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge pour z_0 . Par application du théorème

3.2.1, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge pour tout z tel que $|z| < |z_0|$. D'ici et de (3.8),

on déduit que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge si $|z| < R$.

2i) Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$. Alors, il existe $r = \frac{R + |z|}{2} > 0$ tel que $0 < R < r < |z|$. Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ était convergente, on aurait d'après le théorème 3.2.1, $r \in D$ ce qui est absurde car $R < r$. ■

Le résultat suivant est le théorème de Cauchy-Hadamard¹, il est utilisé pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière.

Théorème 3.2.3 Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière et soit R son rayon de convergence. On suppose qu'il existe $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Alors,

1. si $0 < l < +\infty$ alors $R = \frac{1}{l}$.
2. si $l = 0$ alors $R = +\infty$.
3. si $l = +\infty$ alors $R = 0$.

Preuve 1. On suppose que $0 < l < +\infty$, où $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Et soit $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|}$, d'où

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} |z| \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| l.$$

Ainsi,

$$L = |z| l.$$

La règle de Cauchy pour les séries numériques permet alors de conclure : si $L < 1 \iff |z| < \frac{1}{l}$, alors $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument sur $D_{\frac{1}{l}}$ et d'ici

$R = \frac{1}{l}$. Et elle diverge si $|z| > \frac{1}{l}$.

2. Si $l = 0$, alors $L = 0$, d'après la règle de Cauchy la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par conséquent $R = +\infty$.

3. Si $l = +\infty$, alors $L = +\infty$. Donc par la règle de Cauchy la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge pour tout $z \neq 0$. Par suite $R = 0$. ■

¹est un résultat d'analyse complexe Il a été publié en 1821 par Cauchy mais est resté relativement méconnu jusqu'à sa redécouverte par Hadamard (Jacques Salomon Hadamard né le 8 décembre 1865 à Versailles, mort le 17 octobre 1963 à Paris, est un mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie), qui le publia une première fois en 1888.

Exemple 3.2.3 Calculer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n \geq 2} (3^n \ln n) z^n.$$

On a $a_n = 3^n \ln n$, et donc le rayon de convergence R est :

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{3 \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{3}.$$

Le théorème suivant est dû à Hadamard-d'Alembert. Il permet lui aussi de déterminer le rayon de convergence.

Théorème 3.2.4 Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de

convergence. On suppose qu'il existe $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. Alors,

1. si $0 < l < +\infty$ alors $R = \frac{1}{l}$.

2. si $l = 0$ alors $R = +\infty$.

3. si $l = +\infty$ alors $R = 0$.

Preuve La preuve est identique à celle donnée dans le théorème de Cauchy-Hadamard (cf. théorème 3.2.3), sauf qu'ici on utilise la règle de d'Alembert au lieu de Cauchy. ■

Exemple 3.2.4 Calculer le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2n+5}$.

On a $a_n = \frac{1}{2n+5}$, donc

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{2n+5}{2n+7} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi le rayon de convergence de cette série est

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = 1.$$

Remarque 3.2.2 Le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ne dépend que du module des coefficients a_n (i.e., $|a_n|$). Ainsi, les séries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} \overline{a_n} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.

3.2.2 Propriétés des séries entières

Voici un résultat important qu'on utilise pour étudier la continuité et la dérivabilité de la somme d'une série entière.

Proposition 3.2.1 Soient les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$. Soit R le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et ρ le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$. Alors,

$$R = \rho.$$

Preuve On considère $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|n a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|}$ et on suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ existe. Alors,

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|n a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} = l.$$

D'où, si L et $l \in]0, +\infty[$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{l} \iff R = \rho.$$

Si maintenant $L = l = 0$ alors $\rho = +\infty = R$. Et enfin, si $L = +\infty$ et $l = +\infty$ alors $\rho = 0 = R$. ■

Définition 3.2.3 La série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ est appelée série entière dérivée de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Remarque 3.2.3 Puisque la série entière et sa série dérivée admettent le même rayon de convergence, il est possible de dériver indéfiniment cette série sur ce même domaine de convergence.

On déduit de ce qui précède le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.2 Soit $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ (cette série est appelée série primitive de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$) de rayon de convergence μ . Alors $R = \mu$, où R le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Remarque 3.2.4 Les séries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ converge uniformément sur le disque fermé $\overline{D_r}$ de centre 0 et de rayon r , pour tout $r < R$ où R le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

3.2.3 Continuité de la somme d'une série entière

Pour l'étude de la continuité, la dérivation et l'intégration de la somme d'une série entière, on se place dans les réels i.e., on considère $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$

où $a_n \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

On commence par un résultat sur la continuité de la somme. Cependant, on a

Théorème 3.2.5 Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R . On note par S la somme de la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Alors, S est continue sur chaque intervalle $[-r, r] \subset]-R, R[$.

Preuve En effet, $\forall n$, $f_n(x) = a_n x^n$ sont continues sur $[-r, r]$ et de plus, la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[-r, r]$. En appliquant le théorème de la continuité de la somme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ (cf. Théorème 2.2.1), on a la continuité de S sur $[-r, r]$. ■

3.2.4 Dérivation et intégration de la somme d'une série entière

Le résultat suivant donne les propriétés de dérivation et d'intégration de la somme d'une série entière. On a

Théorème 3.2.6 Soient $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle, R son rayon de convergence ($R > 0$), S sa somme. Alors, pour tout $x \in [-\theta R, \theta R]$ où $0 < \theta < 1$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Ce qui est encore équivalent à :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)'.$$

Et,

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Autrement dit,

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt.$$

Preuve Il suffit d'appliquer les théorèmes de dérivation et d'intégration des séries de fonctions (cf. théorème 2.2.3 ; théorème 2.2.2). ■

3.2.5 Continuité au bord de l'intervalle de convergence

Le résultat suivant dû à Abel consiste, en gros, à intervertir la limite et le signe somme. Il permet en particulier de calculer la somme de certaines séries numériques.

Théorème 3.2.7 Soit $0 < R < +\infty$, le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme de la série. Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge en $x = R$ (resp. $x = -R$) alors S est continue en $x = R$ (resp. $x = -R$).

Remarque 3.2.5 Dans le cas complexe, le théorème est formulé comme suit :

Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge en z^0 un point du cercle de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ($z^0 \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$), alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue en z^0 .

Exemple 3.2.5 Calculer les sommes des séries entières suivantes :

1. On considère la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ alors $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Afin de déterminer le rayon de convergence, on applique la règle d'Alembert. Alors, on a

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{n}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

D'où $R = 1 > 0$. Par conséquent, $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ est absolument convergente sur $] -R, R[=] -1, 1[$. De plus, $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ est convergente en $x = 1 = R$ (car série de Leibniz), alors d'après le théorème d'Abel (cf. théorème 3.2.7), la somme $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ est continue en $x = 1$ i.e.,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

Or, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ est la primitive (nulle en $x = 0$) de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

Et,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \frac{1}{1 - (-x)} \quad \forall x / |x| < 1.$$

D'où,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1 + x}, \quad \forall x / |x| < 1.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x). \quad (3.10)$$

De (3.9) et (3.10), on déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1+x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

Ce qui est encore équivalent à

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

2. On considère maintenant la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n \geq 1} u_n$, alors, on a

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{n-1}}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}.$$

Puisque les a_n ne sont pas tous non nuls, on ne peut pas donc utiliser la règle de d'Alembert. Par contre, on peut appliquer cette règle pour les u_n . Il vient,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \frac{2n-1}{x^{2n-1}} \right| = |x|^2.$$

La règle de d'Alembert permet de conclure : si $|x|^2 < 1$ i.e. $|x| < 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge absolument et si $|x|^2 > 1$ i.e. $|x| > 1$, il y a divergence de cette série. D'où le rayon de convergence de cette série est $R = 1$. Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ converge absolument sur $] -1, 1[$.

De plus, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ converge en $x = 1$ (série de Leibniz). Du théorème d'Abel (cf. théorème 3.2.7), on conclut que la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ est continue en $x = 1$ i.e.,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

D'autre part, $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ est la primitive (nulle en $x=0$) de la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n}$ et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \quad / \quad |x| < 1.$$

Par suite,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x. \quad (3.12)$$

de (3.11) et (3.12), on conclut que :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots$$

3.2.6 Opérations sur les séries entières

Ici, on définit sur l'ensemble des séries entières les opérations suivantes.

- La somme des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ est la série entière

$$\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n.$$

- Le produit des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ est la série entière

$$\sum_{n \geq 0} c_n z^n \text{ où } c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}. \text{ Cette définition est donnée par analogie avec le produit de Cauchy des deux séries numériques } \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

$$\text{et } \sum_{n \geq 0} b_n z^n.$$

Alors, on a :

Proposition 3.2.2 Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence et de sommes respectives R_1, R_2 et S_1, S_2 . Alors,

Section 3.2. Séries entières

1. le rayon de convergence R et la somme S de la série $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ (appelée série somme) vérifient :

$$R \geq \min(R_1, R_2),$$

$$|z| < \min(R_1, R_2) \implies S(z) = S_1(z) + S_2(z),$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

De plus, si $R_1 \neq R_2 \implies R = \min(R_1, R_2)$.

2. le rayon de convergence R et la somme S de la série produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ où $c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}$ vérifient :

$$R \geq \min(R_1, R_2),$$

$$\forall z \in \mathbb{C} / |z| < \min(R_1, R_2) \implies S(z) = S_1(z) \cdot S_2(z).$$

3. le rayon de convergence R de la série $\sum_{n \geq 0} \lambda a_n z^n$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$) et la somme vérifient :

$$R = R_1$$

$$\forall z \in \mathbb{C} / |z| < R \implies S(z) = \lambda S_1(z).$$

Exemple 3.2.6 On considère les deux séries $\sum_{n \geq 0} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^n}$ de rayons de convergence R_1 et R_2 respectivement. Alors par la règle de Cauchy-Hadamard, $R_1 = 1$ et $R_2 = 2$. Aussi, le rayon de convergence de R de la série somme est égal à 1 par la règle d'Hadamard. Ce qui montre bien (comme dans la proposition précédente) $R = \min(R_1, R_2)$, puisque $R_1 \neq R_2$.

Exemple 3.2.7 Si on considère maintenant $\sum_{n \geq 0} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2^n} - 1\right) z^n$ de rayon $R_1 = R_2 = 1$ alors le rayon convergence R de la somme est $2 \geq \min(R_1, R_2) = 1$.

3.2.7 Développements en série entière

Les développements en série entière généralisent par des séries ce que les développements limités procurent par des polynômes. On s'intéresse ici aux fonctions définies dans un voisinage ouvert de 0 dans le plan complexe qui peuvent s'écrire comme somme d'une série entière.

Fonction développable en série entière

Définition 3.2.4 Soit f une fonction définie dans un voisinage de 0 à valeurs dans $\mathbb{C}$ (i.e., $f : \mathcal{V}(0) \rightarrow \mathbb{C}$).

1. On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0 s'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon $R > 0$ et un voisinage $V \in \mathcal{V}(0)$ tels que

$$\forall z \in V : f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

2. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est développable en série entière au voisinage de z_0 s'il existe une série entière de rayon $R > 0$ et un voisinage $V \in \mathcal{V}(z_0)$ tels que

$$\forall z \in V : f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Exemple 3.2.8 La fonction $f : z \rightarrow f(z) = \frac{1}{1-z}$ est développable en série entière au $\mathcal{V}(0)$ car pour tout z / $|z| < 1$, on a

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Séries de Taylor d'une fonction

Pour la suite de ce paragraphe, on se limite aux séries entières et de fonctions de la variable réelle.

Section 3.2. Séries entières

Définition 3.2.5 Soit $f \in C^\infty$ dans un voisinage $\Delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ de x_0 ($\delta > 0$). On appelle série de Taylor² de f au voisinage de x_0 la série entière de la forme $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$.

Si $x_0 = 0$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est appelée série de Maclaurin de f .

On peut donc énoncer le résultat suivant.

Théorème 3.2.8 Soit f une fonction numérique développable en série entière au voisinage de x_0 alors, les coefficients a_n de cette série sont de la forme :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le développement de f en série entière est unique et s'identifie avec la somme de la série de Taylor de f au voisinage de x_0 i.e.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x / |x - x_0| < R,$$

où $R > 0$ est le rayon de convergence de la série entière.

Preuve f étant développable en série entière au voisinage de x_0 , donc, on a pour tout $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n. \quad (3.13)$$

Or f est indéfiniment dérivable sur $]x_0 - R, x_0 + R[$, donc

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n C_n^p p! (x - x_0)^{n-p}.$$

D'où,

$$f^{(p)}(x_0) = a_p C_p^p p! \Rightarrow a_p = \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}.$$

² Brook Taylor est un homme de science anglais, né à Edmonton, aujourd'hui un quartier de Londres, le 18 août 1685, et mort à Londres le 29 décembre 1731. Principalement connu comme mathématicien, il s'intéressa aussi à la musique, à la peinture et à la religion.

Section 3.2. Séries entières

Ainsi, en remplaçant la valeur de a_n dans (3.13), on obtient la série de Taylor :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[.$$

■

Fonction développable en série de Taylor

Définition 3.2.6 On dit qu'une fonction numérique définie au voisinage de x_0 , peut être développable en série de Taylor au voisinage de x_0 , s'il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$ on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Remarque 3.2.6 Une fonction numérique f de classe C^∞ au voisinage de x_0 n'est pas nécessairement développable en série de Taylor. Comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 3.2.9 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Il est clair que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En effet, l'application $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0).$$

Ce qui prouve que f est continue sur $\mathbb{R}$ (i.e., $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). De plus, en calculant la dérivée de f , on obtient

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Or l'application $x \mapsto \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f'(0).$$

D'où f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (i.e., $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Ainsi, on obtient par récurrence la $n^{\text{ième}}$ dérivée de f donnée par

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x^{-3n} p_n(x) e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Afin de montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (i.e., $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$), il suffit de prouver la propriété de récurrence suivante :

$$f \in C^n \implies f \in C^{n+1}.$$

On suppose que f est développable en série de Taylor au voisinage de $x_0 = 0$ i.e.,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Et puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$, alors la série s'annule identiquement sur le voisinage de 0, i.e.,

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in V \in \mathcal{V}(0).$$

Tandis que f s'annule qu'en point $x_0 = 0$. Ainsi f n'est pas développable en série de Taylor en 0.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de classe C^∞ sur un voisinage de 0 soit développable en série entière est donnée par le théorème qui suit.

Théorème 3.2.9 Soit f une fonction de classe C^∞ sur un voisinage $\Delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ de x_0 ($\delta > 0$). Pour que l'on ait,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x \in \Delta,$$

il faut et il suffit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x) = 0 \quad \forall x \in \Delta,$$

où $r_n(x)$ est le reste dans la formule de Taylor défini par :

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \text{avec } \xi = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1.$$

Preuve D'après la formule de Taylor-Lagrange, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x), \quad x \in \Delta.$$

Ce qui est encore équivalent à

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x) \quad \text{où} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

D'où,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \\ \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) &= f(x) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x) = 0, \forall x \in \Delta. \end{aligned}$$

■
La condition du reste tend vers 0 quand n tend l'infini est à priori très pénible à vérifier. Il y a cependant une condition suffisante très simple pour que le développement de f en série de Taylor soit réalisé. On a alors,

Théorème 3.2.10 On suppose que :

1. f est classe C^∞ sur un voisinage $\Delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ($\delta > 0$).
2. $\exists M > 0, \forall x \in \Delta$, on a

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, pour tout $x \in \Delta$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Preuve Il suffit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x) = 0 \quad \forall x \in \Delta.$$

En effet, on a

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (3.14)$$

Or la série $M \sum_{n \geq 0} \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}$ converge, donc son terme général tend vers 0
i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \quad (3.15)$$

De (3.14) et (3.15), on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x) = 0$. ■

Remarque 3.2.7 La 2^{ème} condition du théorème précédent est suffisante pour le développement de f en série de Taylor au voisinage de x_0 mais elle n'est pas nécessaire. En effet, on a :

Exemple 3.2.10 Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!} x^n = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \dots$$

Cette série converge sur $\mathbb{R}$ car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 0 < 1, \quad \text{où } u_n = \frac{2^n}{n!} x^n.$$

De plus f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f^{(n)}(0) = 2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc,

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in]-\delta, \delta[,$$

n'est pas vérifiée.

3.2.8 Développements en série entière des fonctions au voisinage de 0

Pour développer une fonction en série entière, on se ramène à des développements de fonctions usuelles. En voici quelques unes.

Section 3.2. Séries entières

Fonctions trigonométriques

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction sinus. Alors, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée d'ordre n existe et est donnée par :

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

De plus, on a

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

On en conclut ainsi (cf. Théorème 3.2.10) que la fonction sinus est égale à sa série de Taylor au voisinage de 0 sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ce qui est encore équivalent à

$$\sin x = x - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De la même manière, on trouve le développement en série entière de la fonction cosinus, donné par :

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Fonction exponentielle

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction exponentielle. Alors, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée d'ordre n existe et est donnée par :

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

De plus, le reste de Taylor-Lagrange de cette fonction est :

$$r_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{où } c = 0 + \theta(x-0) = \theta x,$$

avec $0 < \theta < 1$. Puisque la série $\sum_{n=0}^{+\infty} e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors son terme général tend vers 0 i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

D'après le théorème 3.2.9 (ici le point $x_0 = 0$), le développement en série entière de la fonction exponentielle est donné par :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De la même manière, on trouve :

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Fonctions hyperboliques

Le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique sont les fonctions notées $\cosh$ et $\sinh$ respectivement, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Un raisonnement analogue à ce qui précède, on trouve le développement en série entière de ces deux fonctions. Alors, on a

$$\cosh x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Et,

$$\sinh x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Fonction logarithme

On rappelle que (cf. exemple 3.2.5 ; 1.) la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$ possède un rayon de convergence égale à 1 et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Par le théorème d'intégration de la somme d'une série entière (cf. théorème 3.2.6), on a pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Par conséquent, pour tout x tel que $|x| < 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Fonction arctangente

On rappelle que (cf. exemple 3.2.5 ; 2.) la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n}$ possède un rayon de convergence égale à 1 et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Par le théorème d'intégration de la somme d'une série entière (cf. théorème 3.2.6), on a pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Par conséquent,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad \forall x \text{ / } |x| < 1.$$

Fonction $x \rightarrow (1+x)^\alpha$

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On ne peut pas appliquer ici le théorème 3.2.10 parce que l'expression du reste de Taylor-Lagrange pour cette fonction est trop compliquée. Pour cela, on va procéder d'une autre méthode totalement différente : en utilisant une équation différentielle dont f est solution, on détermine le développement en série entière de f . En effet, on peut facilement vérifier que f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} (1+x)y' - \alpha y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

Section 3.2. Séries entières

On cherche les solutions y de (3.16) développable en série entière de la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Alors par dérivation, on a

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

En remplaçant y dans (3.16) et par identification, on obtient

$$a_1 = \alpha a_0, \quad 2a_2 = (\alpha - 1) a_1, \dots, (n+1) a_{n+1} = (\alpha - n) a_n.$$

Or,

$$y(0) = 1.$$

Donc,

$$a_0 = 1.$$

Par conséquent,

$$a_1 = \alpha, \quad a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}, \dots, \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1) + \dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Le rayon de convergence de la série $1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) + \dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ est égal à 1, sachant que f est aussi solution de (3.16), par unicité de la solution de l'équation différentielle, il vient

$$f(x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) + \dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Autrement dit, pour tout x tel que $|x| < 1$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

3.2.9 Exponentielle complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$, on représente par e^z (ou $\exp z$) la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ de rayon de convergence infini ($R = +\infty$) i.e.,

$$\forall z \in \mathbb{C} : e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

L'application $z \longrightarrow e^z$ définit la fonction exponentielle de la variable complexe.

3.2.10 Fonctions trigonométriques complexes

Soit $z \in \mathbb{C}$, on représente par $\sin z$ (resp. $\cos z$), la somme de la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (resp. $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$) i.e., pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\text{resp. } \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}).$$

L'application $z \longrightarrow \sin z$ (resp. $z \longrightarrow \cos z$) définit la fonction sinus (resp. cosinus) de la variable complexe.

Les lemmes suivants permettent de retrouver les propriétés de la fonction exponentielle, ainsi que celles des fonctions trigonométriques usuelles.

Lemme 3.2.1 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Preuve En effet, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Ainsi,

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Par conséquent,

$$e^z = \sin z + i \cos z.$$

■

En conséquence, on a

Lemme 3.2.2 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

De plus,

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

3.2.11 Fonctions hyperboliques complexes

Soit $z \in \mathbb{C}$, on représente par $\sinh z$ (resp. $\cosh z$) la somme de la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\text{resp.} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}) \quad \text{i.e.,}$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\text{resp.} \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}).$$

L'application $z \longrightarrow \sinh z$ (resp. $z \longrightarrow \cosh z$) définit la fonction sinus hyperbolique (resp. cosinus hyperbolique) de la variable complexe.

Lemme 3.2.3 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Preuve La preuve découle de la définition de e^z et e^{-z} . ■

3.2.12 Logarithme complexe

Il est naturel de compléter la définition de l'exponentielle complexe par celle du logarithme, en tant que fonction réciproque de la précédente. Cette fonction doit bien sûr coïncider avec son homologue réel.

Définition 3.2.7 *On appelle logarithme d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$, tout nombre complexe Z , tel que*

$$e^Z = z.$$

C'est à dire

$$\log z = Z = \ln |z| + i \arg z.$$

L'application $z \longrightarrow \log z$ définit la fonction logarithme de la variable complexe.

Remarque 3.2.8 *On notera que, dans la mesure où l'argument du nombre complexe z n'est défini que modulo 2π , la fonction logarithme ne sera une "vraie fonction" que si l'on impose en outre une condition sur les valeurs prises par l'argument de z . Plus précisément, si on pose $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ où $\theta := \arg z$ et $Z = X + iY$ alors $X = \ln |z|$ et $Y = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. En effet, par la définition du logarithme on a*

$$e^Z = z.$$

Ce qui est équivalent, en remplaçant Z et z par leur valeurs respectives, à

$$e^X (\cos Y + i \sin Y) = |z| (\cos \theta + i \sin \theta).$$

De cette égalité, il vient

$$e^X = |z| \quad \text{et} \quad Y = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi le logarithme d'un nombre complexe z est donné par la formule :

$$\log z = Z = X + iY = \ln |z| + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si on impose des conditions sur θ , on définit ainsi une fonction logarithme complexe, notée $\log$, définie par

$$\log z = \ln |z| + i \arg z.$$

Remarque 3.2.9 *On peut démontrer que pour tout z tel que $|z| < 1$,*

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots$$

3.3 Exercices avec solutions

Exercice 3.3.1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$1) \sum 2^n x^{2n+1}, \quad 2) \sum \frac{2 + \cos n}{n^2} x^n, \quad 3) \sum \frac{n!}{(n+1)^n} x^n, \quad 4) \sum \frac{n^3}{3^n} x^n, \\ 5) \sum \sin \frac{n\pi}{3} x^n.$$

Solution 3.3.1 On détermine le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1) soit la série entière $\sum f_n$ où $f_n(x) = 2^n x^{2n+1}$. Alors par la règle de d'Alembert, on a

$$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = 2x^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2x^2.$$

Si $2x^2 < 1$ alors $\sum_{n \geq 1} 2^n x^{2n+1}$ converge absolument et si $2x^2 > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} 2^n x^{2n+1}$ diverge.

Ce qui est encore équivalent à : Si $|x| < 1/\sqrt{2}$, la série converge absolument et si $|x| > 1/\sqrt{2}$, la série diverge. En $x = \pm 1/\sqrt{2}$, la série diverge. Par conséquent, le rayon de convergence de cette série $R = 1/\sqrt{2}$.

2) Soit la série entière $\sum f_n$ où $f_n(x) = \frac{2 + \cos n}{n^2} x^n$. Ici, on ne peut pas utiliser la règle de d'Alembert car $\cos n$ n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$. On va alors encadrer le terme général $f_n(x)$. On sait que :

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{2 + \cos n}{n^2} \leq \frac{3}{n^2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{|x|^n}{n^2} \leq |f_n(x)| = \frac{2 + \cos n}{n^2} |x|^n \leq \frac{3|x|^n}{n^2}.$$

La règle de d'Alembert donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3|x|^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{3|x|^n} = |x|.$$

Alors si $|x| < 1$, la série $\sum \frac{3|x|^n}{n^2}$ converge et si $|x| > 1$, la série diverge. Enfin si $|x| = 1$, la série $\sum \frac{3|x|^n}{n^2} = \sum \frac{3}{n^2}$ série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$. De même, la série $\sum \frac{|x|^n}{n^2}$ converge si $|x| \leq 1$ et diverge si $|x| > 1$.

On conclut alors que la série $\sum f_n$ converge absolument si et seulement si $|x| \leq 1$. En effet, si $|x| \leq 1$, la série $\sum \frac{3|x|^n}{n^2}$ converge et donc la série $\sum |f_n(x)|$ converge par comparaison. Par suite la série $\sum f_n$ converge absolument. Maintenant si $|x| > 1$, la série $\sum \frac{|x|^n}{n^2}$ diverge et par comparaison la série $\sum |f_n(x)|$ diverge. Ce qui est encore équivalent par la contraposée à : $\sum |f_n(x)|$ converge implique $|x| \leq 1$. Ainsi l'équivalence est établie. Ce qui signifie enfin que le rayon de convergence de cette série est $R = 1$.

3) Soit la série entière $\sum f_n$ où $f_n(x) = \frac{n!}{(n+1)^n} x^n$. On a, par la règle de d'Alembert,

$$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{e}.$$

Si $|x| < e$, la série $\sum f_n$ converge absolument et elle diverge si $|x| > e$. Pour $x = \pm e$, on montre par la formule de stirling que

$$|f_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\sqrt{2\pi n}}{e} \rightarrow 0.$$

Donc la série $\sum f_n$ est divergente. Par conséquent le rayon de convergence de cette série $R = e$.

4) Soit la série entière $\sum f_n$ où $f_n(x) = \frac{n^3}{3^n} x^n$. En utilisant la règle de d'Alembert, on obtient

$$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} |x|.$$

Alors si $|x| < 3$, la série $\sum f_n$ converge absolument, et elle diverge si $|x| > 3$. Pour $x = \pm 3$, la série diverge car son terme général ne tend pas vers 0. On déduit donc que le rayon de convergence de cette série est $R = 3$.

5) Soit la série entière $\sum f_n$ où $f_n(x) = \sum \sin \frac{n\pi}{3} x^n$. On sait que

$$\left| \sin \frac{n\pi}{3} \right| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors,

$$|f_n(x)| = \left| \sin \frac{n\pi}{3} \right| |x|^n \leq |x|^n.$$

$\sum |x|^n$ est une série géométrique de raison $|x|$, et elle converge si $|x| < 1$. Par le critère de comparaison, $\sum f_n$ converge absolument si $|x| < 1$. Ainsi le rayon de convergence de cette série $R \geq 1$. Mais R ne peut pas être strictement plus grand que 1 car si $R > 1$, alors la série convergerait absolument pour tout $x < R$. En particulier pour $x = 1$, la série $\sum f_n(1) = \sum \sin \frac{n\pi}{3}$ converge. Ce qui est absurde car $\sum \sin \frac{n\pi}{3}$ est divergente puisque son terme général ne tend pas vers 0. Ainsi $R = 1$.

Exercice 3.3.2 Sachant que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R = 2$. Déterminer le rayon de convergence des séries :

1) $\sum a_n z^{2n}$ 2) $\sum n^4 a_n z^n$, 3) $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

Solution 3.3.2 On utilise la définition du rayon de convergence : pour $|x| < R$ la série converge, et pour $|x| > R$ elle diverge.

1) Puisque la rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R = 2$, alors la série $\sum a_n z^{2n} = \sum a_n (z^2)^n$ converge si $|z|^2 < 2$ et diverge si $|z|^2 > 2$. Donc son rayon est $\sqrt{2}$.

2) On a montré en cours que la série entière $\sum n a_n z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$. La série $\sum n^2 a_n z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum n a_n z^n$. Ainsi de suite, la série $\sum n^4 a_n z^n$ a le même rayon que $\sum a_n z^n$. Par conséquent, son rayon de convergence est 2.

3) Sachant que le rayon de convergence $\sum a_n z^n$ est $R = 2$, alors cette série converge pour tout z tel que $|z| < R = 2$. En particulier pour $z = 1$, la série $\sum a_n$ converge. Ceci implique que le terme général a_n tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Ainsi, on a

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |a_n| < 1.$$

Donc,

$$\left| \frac{a_n}{n!} z^n \right| \leq \frac{|z|^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N.$$

On sait, par la règle de d'Alembert, que la série $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. Il en résulte que $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ converge absolument sur $\mathbb{C}$. On a donc son rayon égal à $+\infty$.

Exercice 3.3.3 Donner le rayon de convergence R et calculer la somme des séries entières suivantes :

- 1) $\sum_{n \geq 0} a^n x^n$ ($a \neq 0$), 2) $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$, 3) $\sum_{n \geq 0} 2^{(-1)^n} x^n$,
4) $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^n$.

Solution 3.3.3 On donne le rayon de convergence R et on calcule la somme des séries.

- 1) La série $\sum_{n \geq 0} a^n x^n = \sum_{n \geq 0} (ax)^n$ est une série géométrique de raison $q = ax$. Elle converge absolument si $|ax| < 1$ et diverge si $|ax| > 1$. Ainsi le rayon $R = \frac{1}{|a|}$, et de plus pour $|ax| < 1$, la somme de cette série est donnée par :

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n x^n = \frac{1}{1-ax}.$$

- 2) Pour déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$, on va appliquer le théorème Hadamard-d'Alembert (cf. théorème 3.2.4). On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| = 1.$$

Donc $R = 1$. On sait que pour tout x tel que $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi par dérivation, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En multipliant par x , il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \forall x / |x| < 1.$$

On dérive de nouveau, on trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Enfin, on multiplie par x , on déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}, \quad \forall x / |x| < 1.$$

Ainsi la somme de cette série est

$$S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}, \quad \forall x / |x| < 1.$$

3) On ne peut pas appliquer la règle d'Hadamard-d'Alembert (cf. théorème 3.2.4) à la série $\sum_{n \geq 0} 2^{(-1)^n} x^n$ car

$$2^{(-1)^n} x^n = \begin{cases} 2x^n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{1}{2}x^n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Par contre, on a

$$|2^{(-1)^n} x^n| \leq 2|x|^n.$$

Si $|x| < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} 2|x|^n$ est une série géométrique convergente,

et par le critère de comparaison la série $\sum_{n \geq 0} 2^{(-1)^n} x^n$ converge absolument. Si $|x| > 1$, le terme général $2^{(-1)^n} x^n \rightarrow \infty$, donc la série $\sum_{n \geq 0} 2^{(-1)^n} x^n$ diverge. Ainsi, $R = 1$.

On sait que pour tout x tel que $|x| < 1$, $\sum_{n \geq 0} 2x^{2n}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2}x^{2n+1}$ sont deux séries géométriques convergentes, alors $\sum_{n \geq 0} 2x^{2n} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2}x^{2n+1}$ est aussi convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{(-1)^n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}x^{2n+1}.$$

Ainsi, en calculant les deux sommes, on trouve

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{(-1)^n} x^n = \frac{2}{1-x^2} + \frac{x}{2(1-x^2)}, \quad \forall x / |x| < 1.$$

D'où,

$$S_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{(-1)^n} x^n = \frac{4+x}{2(1-x^2)}, \quad \forall x / |x| < 1.$$

4) En appliquant la règle d'Hadamard-d'Alembert (cf. théorème 3.2.4) à la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^n$, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n (-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{n+1}{n+2} = 2.$$

Ainsi, $R = \frac{1}{2}$. Pour le calcul de la somme, on a pour tout x tel que $|x| < \frac{1}{2}$

$$S_4(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2x)^n}{n+1}.$$

En multipliant par x , on obtient

$$xS_4(x) = \frac{-1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2x)^{n+1}}{n+1}.$$

En passant à la dérivée, on déduit

$$(xS_4(x))' = \frac{-2}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-2x)^n.$$

Or,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-2x)^n = \frac{1}{1+2x}, \quad \forall x / |x| < \frac{1}{2}.$$

D'où,

$$(xS_4(x))' = \frac{1}{1+2x}, \quad \forall x / |x| < \frac{1}{2}.$$

On intègre par rapport $t \in [0, x]$, on alors

$$\int_0^x (tS_4(t))' dt = \int_0^x \frac{dt}{1+2t}.$$

Ainsi,

$$S_4(x) = \frac{1}{2x} \ln(1+2x), \quad \forall x / |x| < \frac{1}{2} \text{ et } x \neq 0.$$

Et si $x = 0$,

$$S_4(0) = 0.$$

Exercice 3.3.4 Donner le développement en série entière des fonctions suivantes :

$$1) f_1(x) = \frac{3}{x^2-5}, \quad 2) f_2(x) = \frac{2x+4}{(x-1)(x-3)}, \quad 3) f_3(x) = (\sin x)^2, \\ 4) f_4(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Solution 3.3.4 1) On rappelle que la somme d'une série géométrique

$\sum_{n \geq 0} q^n$ est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad \forall q / |q| < 1. \quad (3.17)$$

On a

$$f_1(x) = \frac{3}{x^2-5} = \frac{-3}{5} \frac{1}{1 - (x/\sqrt{5})^2},$$

on déduit alors de (3.17),

$$\frac{1}{1 - (x/\sqrt{5})^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x/\sqrt{5})^{2n}, \quad \forall x / |x/\sqrt{5}| < 1.$$

Ainsi le développement en série entière de f_1 est :

$$f_1(x) = \frac{-3}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x/\sqrt{5}\right)^{2n}, \quad \forall x / |x| < \sqrt{5}.$$

2) Une décomposition en éléments simples donne :

$$f_2(x) = \frac{2x+4}{(x-1)(x-3)} = \frac{-3}{x-1} + \frac{5}{x-3}.$$

Or,

$$\frac{-3}{x-1} = \frac{3}{1-x} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \forall x / |x| < 1.$$

Et,

$$\frac{5}{x-3} = \frac{-5}{3} \frac{1}{1-x/3} = \frac{-5}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (x/3)^n, \quad \forall x / |x| < 3.$$

Donc f_2 est développable en série entière sur l'intervalle $] -1, 1[$ et on a

$$f_2(x) = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{5}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (x/3)^n, \quad \forall x / |x| < 1.$$

Par conséquent,

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \left(3 - \frac{5}{3^{n+1}}\right), \quad \forall x / |x| < 1.$$

3) Pour développer f_3 en série entière, on se ramène à des développements de fonctions usuelles. On utilise la transformation suivante :

$$f_3(x) = (\sin x)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Or le développement en série entière de cosinus est

$$\cos y = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Donc,

$$f_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Après calcul, on obtient,

$$f_3(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n-1} x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4) Sachant que le développement en série entière de sinus est

$$\sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^*.$$

Ainsi la fonction $t \rightarrow \frac{\sin t}{t}$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. On peut donc l'intégrer terme à terme sur tout intervalle $[0, x]$:

$$f_4(x) = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \right] dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} dt.$$

Par conséquent,

$$f_4(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.3.5 Soit la série entière $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2) Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.
- 3) Exprimer f' et f , à l'aide de fonctions usuelles sur l'intervalle $]-1, 1[$.
- 4) En déduire la valeur de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Solution 3.3.5 Soit $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

1) Par la règle d'Hadamard-d'Alembert (cf. théorème 3.2.4), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1.$$

Ainsi le rayon de convergence $R = 1$. D'où la série $\sum_{n \geq 2} a_n x^n$

converge pour tout x tel que $|x| < 1$.

Pour $x = 1$, la série $\sum_{n \geq 2} a_n x^n = \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ est une série de Leibniz,

elle est donc convergente.

Pour $x = -1$, la série $\sum_{n \geq 2} a_n x^n = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est une série conver-

gente puisque son terme général est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.

On conclut que le domaine de définition de f est :

$$D_f = [-1, 1].$$

2) f étant la somme d'une série entière, elle est continue sur tout intervalle $] -r, r[\subset] -R, R[$ (cf. théorème 3.2.5). Ainsi f est continue sur $] -1, 1[$. Pour la continuité de la fonction somme f au bord de l'intervalle de convergence i.e., en $x = \pm 1$. Comme $R = 1 > 0$ et la série entière $\sum_{n \geq 2} a_n x^n$ est convergente en $x = \pm 1$, alors d'après le théorème d'Abel (cf. théorème 3.2.7), la fonction somme f est continue en $x = \pm 1$. D'où f est continue sur D_f .

3) Pour tout x tel que $|x| < 1$, on a,

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

puisque l'on peut dériver terme à terme sur $] -1, 1[$.

Or le développement en série entière de la fonction $x \rightarrow \ln(1+x)$ est

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad \forall x / |x| < 1.$$

Donc,

$$f'(x) = \ln(1+x), \quad \forall x / |x| < 1.$$

En intégrant la fonction f' sur $[0, x]$ avec $0 < x < 1$, on obtient

$$\int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \ln(1+t) dt.$$

Ainsi,

$$f(x) = (1+x) \ln(1+x) - x, \quad \forall x / |x| < 1. \quad (3.18)$$

4) Par passage à la limite dans (3.18) quand $x \rightarrow 1$, il vient

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (1+x) \ln(1+x) - x = 2 \ln 2 - 1.$$

Comme f est continue sur son domaine de définition D_f , en particulier en $x = 1$, alors

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \ln 2 - 1.$$

Or,

$$f(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)},$$

d'où,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2 \ln 2 - 1.$$

Exercice 3.3.6 On se donne la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

- 1) Trouver la rayon de convergence de cette série. Soit f la somme.
- 2) Ecrire les dérivées f' et f'' comme somme de séries entières, et en déduire la valeur de

$$f(x) + f'(x) + f''(x),$$

à l'aide d'une fonction élémentaire.

- 3) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^x$ et en déduire la valeur de f (on utilisera par exemple les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$).

Solution 3.3.6 Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ où $f_n(x) = \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

1) En utilisant la règle de d'Alembert, on aura

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| &= \left| \frac{x^{3(n+1)}}{(3n+3)!} \times \frac{(3n)!}{x^{3n}} \right| \\ &= \frac{|x|^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le rayon de convergence est donc infini.

2) Soit f la somme de $\sum_{n \geq 0} f_n$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!},$$

puisque l'on peut dériver terme à terme sur $\mathbb{R}$. On en déduit que :

$$f(x) + f'(x) + f''(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x^{3n}}{(3n)!} + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} \right].$$

Or,

$$\begin{aligned} &1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x^{3n}}{(3n)!} + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} \right] \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = e^x. \end{aligned}$$

D'où, pour tout x ,

$$f(x) + f'(x) + f''(x) = e^x.$$

3) On fait remarquer que $\frac{e^x}{3}$ est une solution particulière de l'équation $y'' + y' + y = e^x$. De plus la solution générale de l'équation homogène $y'' + y' + y = 0$ est de la forme :

$$y = e^{-x/2} \left(A \cos \left(x\sqrt{3}/2 \right) + B \sin \left(x\sqrt{3}/2 \right) \right), \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Ainsi la solution générale de l'équation $y'' + y' + y = e^x$ est donnée par :

$$y = \frac{e^x}{3} + e^{-x/2} \left(A \cos \left(x\sqrt{3}/2 \right) + B \sin \left(x\sqrt{3}/2 \right) \right).$$

Par conséquent,

$$f(x) = \frac{e^x}{3} + e^{-x/2} \left(A \cos \left(x\sqrt{3}/2 \right) + B \sin \left(x\sqrt{3}/2 \right) \right),$$

où A et B sont de constantes qui peuvent être déterminées par les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. On trouve alors,

$$f(x) = \frac{e^x}{3} + \frac{2}{3}e^{-x/2} \cos \left(x\sqrt{3}/2 \right).$$

Exercice 3.3.7 Soit f définie sur $] -1, 1[$ par :

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- 1) Justifier que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.
- 2) Montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y' - xy = 1.$$

- 3) Déterminer le développement en série entière de f sur $] -1, 1[$.

Solution 3.3.7 Soit f telle que $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in] -1, 1[$.

- 1) On peut écrire,

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \arcsin x.$$

D'après le cours l'application $u \rightarrow (1+u)^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ admet un développement en série entière sur $] -1, 1[$. En particulier, l'application $x \rightarrow (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ admet un développement en série entière sur $] -1, 1[$. De plus, la fonction $\arcsin$ admet un développement en série entière sur $] -1, 1[$ qui s'obtient en intégrant le développement en série entière de sa dérivée donnée par :

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Par conséquent, le produit de deux séries admettant des développements en séries entières sur $] -1, 1[$, admet un développement en série entière sur $] -1, 1[$. Ce qui justifie que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

2) On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \arcsin x \right)' \\ &= x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \arcsin x + (1-x^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(1-x^2) f'(x) = x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \arcsin x + 1 = x f(x) + 1.$$

D'où,

$$(1-x^2) f'(x) - x f(x) = 1, \quad (3.19)$$

ceci montre bien que f est solution de $(1-x^2) y' - xy = 1$.

3) On pose pour $x \in] -1, 1[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Alors,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Or f vérifie (3.19), donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1.$$

Après calculs, on trouve

$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1) a_{n+1} - n a_{n-1}) x^n = 1, \quad \forall x \in] -1, 1[.$$

Ce qui implique que

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ (n+1)a_{n+1} - na_{n-1} = 0, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Ce qui est encore équivalent à

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ na_n - (n-1)a_{n-2} = 0, \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

On distingue deux cas : $n = 2p$ et $n = 2p + 1$. Si $n = 2p$, alors de l'équation précédente, il vient

$$2pa_{2p} = (2p-1)a_{2p-1}.$$

De cette équation et du fait que $0 = f(0) = a_0$, on déduit que

$$a_{2p} = 0.$$

Si, maintenant, $n = 2p + 1$ alors

$$(2p+1)a_{2p+1} = 2pa_{2p-1} \iff a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}a_{2p-1}.$$

On montre facilement par récurrence que

$$a_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)(2p-4)\dots 4.2}{(2p+1)(2p-1)(2p-3)\dots 5.3}a_1,$$

ou encore,

$$a_{2p+1} = \frac{2^p p!}{(2p+1)(2p-1)(2p-3)\dots 5.3}.$$

En multipliant en haut et en bas par :

$$2^p p! = 2p(2p-2)(2p-4)\dots 4.2,$$

on aboutit à

$$a_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Ainsi le développement en série entière de f est

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}, \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Chapitre 4

Séries de Fourier

Dans ce chapitre, on va étudier les séries de Fourier¹ qui sont des séries de fonctions d'un type particulier. On ne peut pas toucher un sujet de physique sans utiliser ces séries (ou leur généralisation, les transformées de Fourier). Elles servent à étudier des fonctions périodiques : l'idée est d'exprimer une fonction 2π périodique quelconque comme combinaison linéaire (en général, une somme infinie) de fonctions 2π périodiques simples, de la forme $\cos nx$ ou $\sin nx$ avec $n \in \mathbb{N}$.

4.1 Séries trigonométriques

4.1.1 Fonctions périodiques

Définition 4.1.1 On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est périodique de période $T > 0$ (ou T -périodique) si elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x).$$

Exemple 4.1.1 1. Les fonctions $x \rightarrow \sin x$ et $x \rightarrow \cos x$ sont 2π -périodiques et la fonction $x \rightarrow e^{(2i\pi/T)x}$ est T -périodique.

¹ Jean Baptiste Joseph Fourier est un mathématicien et physicien français né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris. Il est connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier et leur application au problème de la propagation de la chaleur.

2. La fonction $x \rightarrow \tan x$ est périodique de période π .
3. La fonction $x \rightarrow x - [x]$ est 1-périodique.

4.1.2 Fonctions continues par morceaux

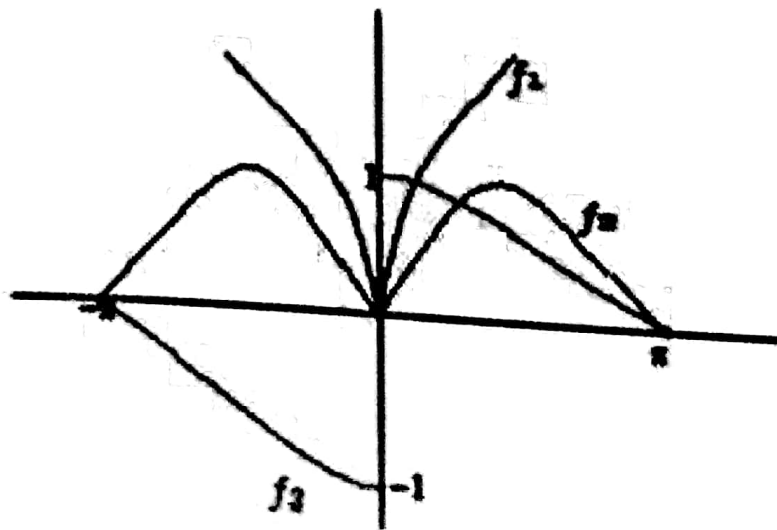
Définition 4.1.2 On dit qu'une fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$ quand il existe un nombre fini de points $c_1 = a < c_2 < c_3 < \dots < c_{k-1} < c_k = b$ tels que f est continue sur chaque intervalle ouvert $]c_j, c_{j+1}[$ et admet une limite finie à gauche et à droite de chaque c_j . Ces limites à droite et à gauche, qu'on notera $f(c_j^-)$ et $f(c_j^+)$ peuvent être différentes de la valeur $f(c_j)$.

Exemple 4.1.2 La fonction partie entière $f : x \rightarrow [x]$ est continue par morceaux sur $[0, 4]$ (on peut prendre $c_1 = 0 < c_2 = 1 < c_3 = 2 < c_4 = 3 < c_5 = 4$, et f est continue sur chaque intervalle ouvert $]c_j, c_{j+1}[$ de plus les limites à gauche et à droite de f existe en chaque c_j , pour tout $j = 1, \dots, 5$).

4.1.3 Fonctions dérivables par morceaux

Définition 4.1.3 On dit qu'une fonction f est dérivable par morceaux sur $[a, b]$ quand il existe un nombre fini de points $c_1 = a < c_2 < c_3 < \dots < c_{k-1} < c_k = b$ tels que f est dérivable sur chaque intervalle ouvert $]c_j, c_{j+1}[$ et admet une dérivée à gauche et à droite de chaque c_j .

Exemple 4.1.3 Les applications $f_1 : x \rightarrow \sqrt{|x|}$, $f_2 : x \rightarrow |\sin x|$ et $f_3 : x \rightarrow \frac{\sin x}{|x|}$ sont dérivables sur $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$. Elle ne sont pas dérivables en 0. Les applications f_2, f_3 sont dérivables par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ (il suffit de prendre $c_1 = -\pi < c_2 = 0 < c_3 = \pi$), mais l'application f_1 n'est pas dérivable par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ (voir la figure ci dessous).



Définition 4.1.4 f est dite continue (resp. dérivable) par morceaux sur l'intervalle I si et seulement si elle l'est sur tout segment de I .

4.1.4 Fonctions 2π -périodiques continues sur $\mathbb{R}$

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, de période 2π , est parfaitement déterminée par sa restriction à un intervalle semi-ouvert de longueur 2π . On prendra souvent $]-\pi, \pi]$ ou $[0, 2\pi[$.

Pour montrer qu'une fonction f 2π -périodique est continue sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de montrer que :

1. f est continue sur l'intervalle ouvert $]-\pi, \pi[$,
2. f est continue en π i.e.,

$$f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x).$$

La dernière égalité signifie que f admet une limite à gauche égale à la limite à droite en $x = \pi$. Ceci découle de la périodicité de la fonction f .

Exemple 4.1.4 La fonction 2π périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = x^2 - \pi^2$$

est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, cette fonction est clairement continue sur $] -\pi, \pi[$, en tant que polynôme. Par ailleurs, on a

$$f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = 0.$$

Ce qui montre que f est continue en π et donc partout sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4.1.5 La fonction 2π -périodique définie sur $] -\pi, \pi]$ par

$$f(x) = x$$

n'est pas continue sur $] -\pi, \pi]$, mais seulement par morceaux. En effet, cette fonction est un polynôme, donc elle est continue sur $] -\pi, \pi[$.

D'autre part,

$$f(\pi) = \pi = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x),$$

et,

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = -\pi \neq f(\pi).$$

Donc f n'est pas continue en $x = \pi$. Mais comme elle y admet une limite à gauche et une limite à droite, elle est continue par morceaux sur $] -\pi, \pi]$.

4.1.5 Fonctions 2π -périodique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Pour vérifier une fonction f 2π -périodique est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\pi, \pi]$, i.e., sur $\mathbb{R}$, tout entier. On doit vérifier que :

1. f est continue sur $] -\pi, \pi[$,
2. f est continuellement dérivable sur $] -\pi, \pi[$,
3. $f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x)$,
4. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f'(x)$.

La dernière égalité signifie que f admet une dérivée à gauche égale à la dérivée à droite en $x = \pi$, et qu'elle y est donc bien dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4.1.6 La fonction 2π périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = (x^2 - \pi^2)^2$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En effet, les trois premières conditions sont satisfaites et on a

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{f(x) - f(-\pi)}{x - (-\pi)} = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{(x^2 - \pi^2)^2}{x + \pi} = 0,$$

et,

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(x^2 - \pi^2)^2}{x - \pi} = 0.$$

Exemple 4.1.7 La fonction 2π périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = x^2 - \pi^2$$

n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle n'est pas $\mathcal{C}^1$. En effet, il est facile à vérifier les trois premières conditions mais la dernière condition n'est pas satisfaite car,

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{f(x) - f(-\pi)}{x - (-\pi)} = -2\pi,$$

et,

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = 2\pi.$$

D'où f n'est pas $\mathcal{C}^1$, elle est seulement $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

On rappelle la propriété élémentaire suivante qui est constamment utilisée.

Proposition 4.1.1 Soit f une fonction T -périodique. Si f est continue par morceaux sur $[0, T]$ alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, f est continue par morceaux sur $[x_0, x_0 + T]$ et l'on a

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

Remarque 4.1.1 Pour toute fonction g supposée 2π -périodique continue par morceaux, la proposition 4.1.1 donne en particulier la relation

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

4.1.6 Séries trigonométriques

Définition 4.1.5 On appelle série trigonométrique toute série de fonctions de la forme :

$$\sum_{n \geq 0} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

où $a_n, b_n \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont appelées coefficients de la série et $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 4.1.8 La série $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{inx}}{n!}$ est une série trigonométrique. En effet,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{e^{inx}}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cos nx + \frac{i}{n!} \sin nx,$$

avec $a_n = \frac{1}{n!}$ et $b_n = \frac{i}{n!}$.

4.1.7 Convergence d'une série trigonométrique

L'étude de la convergence des séries trigonométriques n'est pas aisée en général. On se contentera des résultats suivants.

Proposition 4.1.2 Si $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ sont absolument convergentes alors la série $\sum_{n \geq 0} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et sa somme S est 2π -périodique.

Preuve La série $\sum_{n \geq 0} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. En effet, ceci découle de l'inégalité :

$$|(a_n \cos nx + b_n \sin nx)| \leq |a_n| + |b_n| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Et du fait $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ sont absolument convergentes, donc la série

$\sum_{n \geq 0} (|a_n| + |b_n|)$ est convergente.

On note maintenant S la somme de la série $\sum_{n \geq 0} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

On vérifie que S est 2π -périodique i.e.,

$$S(x + 2\pi) = S(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a,

$$S(x + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos n(x + 2\pi) + b_n \sin n(x + 2\pi).$$

Et comme,

$$\cos(nx + 2n\pi) = \cos nx \quad \text{et} \quad \sin(nx + 2n\pi) = \sin nx,$$

donc,

$$S(x + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = S(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

Remarque 4.1.2 On remarque que si $\sum_{n \geq 0} (|a_n| + |b_n|)$ est convergente

alors la série $\sum_{n \geq 0} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

4.1.8 Système trigonométrique

Définition 4.1.6 La suite de fonctions $(\cos nx, \sin nx)_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in \mathbb{R}$ est appelée système trigonométrique.

Le lemme suivant donne certaines relations très utiles par la suite.

Section 4.1. Séries trigonométriques

Lemme 4.1.1 *Le système trigonométrique possède la propriété d'orthogonalité suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx = 0, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

pour tous $n, m \in \mathbb{N}$.

Preuve Pour la vérification de (4.1) on applique les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin nx \sin mx = 1/2 [\cos (n-m)x - \cos (n+m)x], \\ \sin nx \cos mx = 1/2 [\sin (n-m)x + \sin (n+m)x], \\ \cos nx \cos mx = 1/2 [\cos (n-m)x + \cos (n+m)x]. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

■

4.2 Séries de Fourier

4.2.1 Série de Fourier d'une fonction périodique

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique (ou de période 2π sur $\mathbb{R}$) et localement intégrable sur $\mathbb{R}$ c'est à dire, f est intégrable sur tout intervalle $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.

Définition 4.2.1 *On appelle série de Fourier de la fonction f la série trigonométrique de la forme :*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

où les coefficients a_n et b_n sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{array} \right.$$

Les nombres a_n et b_n sont appelés les coefficients de Fourier de la fonction f .

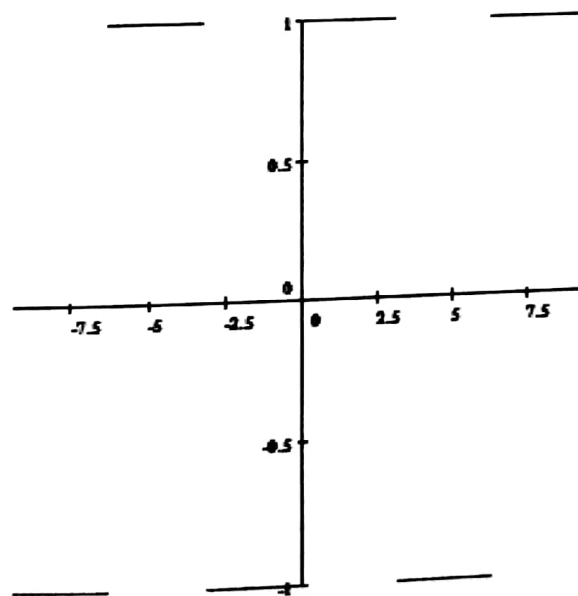
Notation 4.2.1 Lorsque la série de Fourier de la fonction f converge en $x \in \mathbb{R}$, on note par $S_f(x)$ sa somme i.e

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Remarque 4.2.1 Si f est une fonction 2π périodique et localement intégrable sur $\mathbb{R}$, f n'est pas nécessairement la somme de la série de Fourier. C'est à dire on peut avoir $S_f \neq f$, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4.2.1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π périodique telle que :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$



Graphes de f 2π -périodique.

Afin de déterminer la série de Fourier de f , on va calculer ses coefficients. On a

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -1 dx + \int_0^{\pi} 1 dx \right] = 0.$$

Après calcul, on obtient

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0,$$

et,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx.$$

Ainsi,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n),$$

ou encore,

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k, \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Par conséquent, la série de Fourier de la fonction f , notée $S_{\infty}(f)$, est

$$S_{\infty}(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour $x = 0$ on a

$$S_{\infty}(f)(0) = 0 \neq f(0) = 1.$$

Ce qui justifie bien que la somme de la série de Fourier de f ne coïncide pas avec f .

Ainsi, on a le théorème suivant.

Théorème 4.2.1 Si la série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, elle est la série de Fourier de sa somme.

Preuve Montrons que la série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est la série de Fourier de sa somme S i.e.,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos nx dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin nx dx,$$

avec $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, $x \in \mathbb{R}$. Par hypothèse la série trigonométrique converge uniformément et comme les fonctions $x \rightarrow f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ sont continues, S est continue et de plus, S est 2π -périodique.

On multiplie $S(x)$ par $\cos mx$ et on intègre les résultats terme à terme sur $[-\pi, \pi]$, on obtient alors,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos mx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx \\ &\quad + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx. \end{aligned}$$

Or,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \end{cases}$$

et,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = 0.$$

D'où,

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos mx dx = \pi a_m.$$

Ainsi,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos mx dx.$$

On multiplie maintenant $S(x)$ par $\sin mx$ et on intègre les résultats terme à terme sur $[-\pi, \pi]$, on trouve,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin mx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx \\ &\quad + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx. \end{aligned}$$

Après calcul, il vient

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin mx dx = b_m \pi.$$

Par conséquent,

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin mx dx.$$

■

4.2.2 Séries de Fourier de fonctions paires et impaires

Dans la suite, on a besoin fréquemment du résultat suivant qui est bien connu et fait intervenir la parité d'une fonction.

Lemme 4.2.1 *Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. Alors,*

1. *si g est impaire alors pour tout $a > 0$, $\int_{-a}^a g(x) dx = 0$,*
2. *si g est paire alors pour tout $a > 0$, $\int_{-a}^a g(x) dx = 2 \int_0^a g(x) dx$.*

En conséquence, on a :

Corollaire 4.2.1 *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique et localement intégrable. Alors,*

1. *si f est impaire alors les coefficients de Fourier de f sont :*

$$\begin{cases} a_n = 0, & \forall n \in \mathbb{N}, \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \end{cases}$$

2. *si f est paire alors les coefficients de Fourier de f sont*

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n = 0, & \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Ainsi, la série de Fourier d'une fonction paire ne contient que des cosinus, et la série de Fourier d'une fonction impaire ne contient que des sinus.

Preuve 1. Si f est impaire, alors les applications $x \rightarrow f(x) \cos nx$ et $x \rightarrow f(x) \sin nx$ sont impaire et paire respectivement. D'après le lemme précédent, on a

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx. \end{cases}$$

Or les coefficients de Fourier de f sont

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, & \forall n \in \mathbb{N}, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, & \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} a_n = 0, & \forall n \in \mathbb{N} \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, & \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

2. Si maintenant f est paire, alors les applications $x \rightarrow f(x) \cos nx$ et $x \rightarrow f(x) \sin nx$ sont paire et impaire respectivement. On en déduit donc du lemme précédent que :

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0. \end{cases}$$

Ainsi les coefficients de Fourier sont :

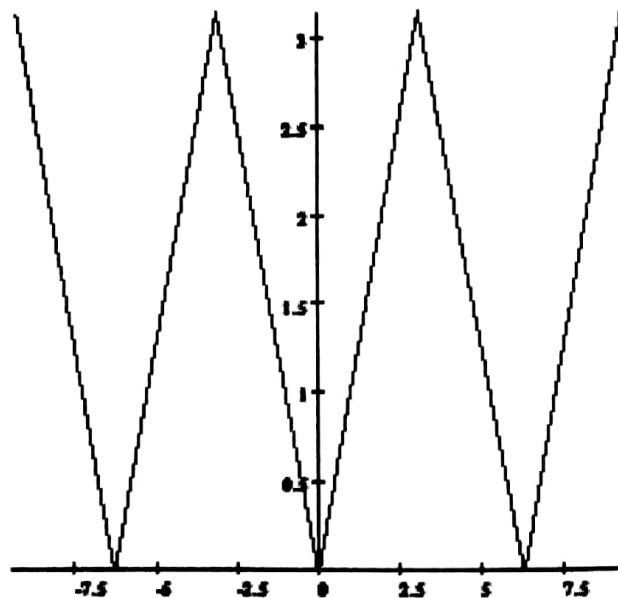
$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, & \forall n \in \mathbb{N} \\ b_n = 0, & \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

■

Exemple 4.2.2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique telle que :

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

La courbe représentant f est donnée dans le schéma suivant :



Graphes de f 2π -périodique.

f étant paire alors par le corollaire 4.2.1, les coefficients de Fourier de f sont donnés par :

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n = 0, & \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Après calcul, on obtient

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \pi,$$

et,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1).$$

Par conséquent,

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{-4}{n^2 \pi}, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Ainsi la somme de la série de Fourier de f est donnée par :

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

puisque la série $\sum_{n \geq 1} |a_n| = \sum_{k \geq 1} \frac{4}{\pi (2k+1)^2}$ converge.

Or, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, donc

d'après le théorème 4.2.1, il vient

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

En posant $x = 0$, on obtient

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \quad (4.3)$$

D'ici on peut déduire la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. En effet,

$$\begin{aligned} S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

En appliquant (4.3) dans (4.4), on obtient

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S.$$

Par conséquent,

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4.2.3 Convergence simple des séries de Fourier : Théorème de Dirichlet

Soit $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ une série de Fourier d'une fonction f . On se pose les questions suivantes :

1. Cette série est-elle convergente ?
2. Si oui, a-t-on f égale à la somme de cette série ? i.e.,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) ?$$

3. Si cette série converge sans converger vers $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Quelle est la somme de cette série ?

Le théorème suivant appelé théorème de Dirichlet² répond aux questions ci-dessus. Cependant, on a

Théorème 4.2.2 *Soit f une fonction 2π -périodique, dérivable par morceaux sur un intervalle de longueur 2π . Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge. Sa somme en x_0 vaut :*

- $f(x_0)$ si x_0 est un point où f est continue ;
- $\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \right)$ si x_0 est un point où f est discontinue.

Preuve Soit $S_n(x_0)$ la somme partielle d'ordre n en x_0 de la série de Fourier de f définie par

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^n (a_p \cos px_0 + b_p \sin px_0).$$

² Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13 février 1805 - 5 mai 1859) était un Allemand mathématicien qui a fait des contributions profondes à la théorie des nombres (y compris la création du domaine de la théorie analytique des nombres), et la théorie des séries de Fourier et d'autres sujets dans l'analyse mathématique.

Compte tenu de l'expression des coefficients de Fourier de f , on a

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{p=1}^n \frac{1}{\pi} \left(\cos px_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ptdt + \sin px_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ptdt \right).$$

Ainsi,

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{p=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos px_0 \cos pt + \sin px_0 \sin pt) f(t) dt.$$

En utilisant les formules trigonométriques (4.2), on obtient

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(1 + 2 \sum_{p=1}^n \cos p(t - x_0) \right) dt. \quad (4.5)$$

Et puisque,

$$1 + 2 \sum_{p=1}^n \cos p(t - x_0) = \frac{\sin \left[(2n+1) \left(\frac{t-x_0}{2} \right) \right]}{\sin \left(\frac{t-x_0}{2} \right)}.$$

Donc, l'équation (4.5) devient

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \left[(2n+1) \left(\frac{t-x_0}{2} \right) \right]}{\sin \left(\frac{t-x_0}{2} \right)} dt. \quad (4.6)$$

En faisant un changement de variable $u = t - x_0$ dans (4.6), il vient

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(u+x_0) \frac{\sin \left[(2n+1) \left(\frac{u}{2} \right) \right]}{\sin \frac{u}{2}} du. \quad (4.7)$$

Comme la fonction à intégrer est 2π périodique car f et sinus le sont et elle est continue par morceaux sur $]-\pi, \pi]$ car f est dérivable par morceaux et $u \rightarrow \frac{\sin \left[(2n+1) \left(\frac{u}{2} \right) \right]}{\sin \frac{u}{2}}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi]$. Donc par application de la proposition (4.1.1), (4.7) devient

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x_0) \frac{\sin \left[(2n+1) \left(\frac{u}{2} \right) \right]}{\sin \frac{u}{2}} du.$$

Ce qui peut être écrit en somme deux intégrales comme suit :

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(u+x_0) \frac{\sin \left[(2n+1) \left(\frac{u}{2} \right) \right]}{\sin \frac{u}{2}} du \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(u+x_0) \frac{\sin \left[(2n+1) \left(\frac{u}{2} \right) \right]}{\sin \frac{u}{2}} du.$$

En faisant un changement de variable $u = -u$ dans la première intégrale, on obtient

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0-u) + f(x_0+u)) \frac{\sin \left[(2n+1) \left(\frac{u}{2} \right) \right]}{\sin \frac{u}{2}} du.$$

On pose maintenant

$$y_0 = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2},$$

où

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ et } f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Alors,

$$S_n(x_0) - y_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g(u) \sin \left[(2n+1) \left(\frac{u}{2} \right) \right] du,$$

où g est une application de $]0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(u) = \frac{f(x_0-u) - f(x_0^-) + f(x_0+u) - f(x_0^+)}{\sin \frac{u}{2}}.$$

Comme par hypothèse f est dérivable par morceaux, les deux limites suivantes existent :

$$\beta = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0-u) - f(x_0^-)}{u} \text{ et } \alpha = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+u) - f(x_0^+)}{u}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{u \rightarrow 0} g(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0-u) - f(x_0^-) + f(x_0+u) - f(x_0^+)}{\sin \frac{u}{2}} = 2(\beta + \alpha),$$

puisque on a

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Ainsi, l'application g est prolongeable par continuité en 0. Comme f est 2π -périodique et dérivable par morceaux sur un intervalle de longueur 2π , l'application g est continue par morceaux sur $[0, \pi]$ et par conséquent, Riemann intégrable sur $[0, \pi]$. On déduit du lemme de Lebesgue³ que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g(u) \sin \left[(2n+1) \left(\frac{u}{2} \right) \right] du = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(x_0) - y_0) = 0.$$

Ainsi la suite $(S_n(x_0))_n$ converge et a pour limite y_0 . Si, en particulier, f est continue en x_0 alors

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0).$$

Par conséquent,

$$y_0 = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} = f(x_0),$$

et $(S_n(x_0))_n$ converge et a pour limite $f(x_0)$. D'où le théorème de Dirichlet est démontré. ■

Remarque 4.2.2 Il existe de nombreux autres résultats concernant la convergence des séries de Fourier. On cite par exemple le résultat suivant : si f est une fonction 2π -périodique, continue par morceaux sur un intervalle de longueur 2π et monotone par morceaux⁴. Alors la série de Fourier de f converge en $x_0 \in \mathbb{R}$ et a pour somme

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \right).$$

³Lemme de Lebesgue : Soit f une application définie sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique et Riemann intégrable sur $[-\pi, \pi]$. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx dx = 0.$$

⁴Une fonction f est monotone par morceaux sur $[a, b]$ quand il existe un nombre fini de points $c_1 = a < c_2 < c_3 < \dots < c_{k-1} < c_k = b$ tels que f est monotone sur chaque intervalle ouvert $]c_j, c_{j+1}[$.

En conséquence de ce qui précède, on a

Corollaire 4.2.2 *Si f une fonction 2π -périodique, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f .*

4.2.4 Séries de Fourier de fonctions de période quelconque

Soit f une fonction $2l$ -périodique, $l > 0$. Pour trouver la série de Fourier de f , on effectue le changement de variable suivant :

$$x = \frac{lt}{\pi}.$$

Alors,

$$g(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$$

est 2π -périodique. En effet, pour $k \in \mathbb{Z}$

$$g(t + 2k\pi) = f\left(\frac{l(t + 2k\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{lt}{\pi} + 2kl\right).$$

Et comme f une fonction $2l$ périodique, il vient

$$f\left(\frac{lt}{\pi} + 2kl\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = g(t).$$

Ainsi,

$$g(t + 2k\pi) = g(t).$$

Sous les conditions de Dirichlet appliquées à la fonction g , on aura

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

où t un point de continuité de g et où

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin ntdt.$$

Donc,

$$f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (4.8)$$

où

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \sin ntdt. \quad (4.9)$$

Or, $x = \frac{lt}{\pi}$ donc

$$t = \frac{\pi}{l}x \quad \text{et} \quad dt = \frac{\pi}{l}dx.$$

De plus, si $t = \pm\pi$ alors $x = \pm l$. En remplaçant t par sa valeur dans (4.8) et (4.9), on obtient la série de Fourier pour une période $2l$, donnée par :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right)$$

où

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx.$$

Exemple 4.2.3 On considère la fonction f $2l$ -périodique avec $l > 0$, définie par

$$f(x) = |x| \quad \text{pour} \quad -l \leq x \leq l.$$

Puisque f est paire donc les coefficients de Fourier de f sont :

$$\begin{cases} b_n = 0, \\ a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x dx = l, \\ a_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{n\pi}{l}x dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{-4l}{\pi^2 n^2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \end{cases}$$

Ainsi la série de Fourier pour une période $2l$ donnée par :

$$f(x) = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left[\frac{\cos \frac{\pi}{l}x}{1^2} + \frac{\cos \frac{3\pi}{l}x}{3^2} + \dots + \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi}{l}x}{(2k+1)^2} + \dots \right].$$

Sans.

4.2.5 Séries de Fourier sous la forme complexe

Cette représentation des séries de Fourier sous forme de somme des fonctions sinus et cosinus n'est pas unique. En effet, on peut aussi exprimer la somme de Fourier sous forme exponentielle, ceci simplifiera l'écriture et les calculs.

soit f une fonction 2π -périodique telle que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (4.10)$$

où a_n, b_n sont les coefficients de Fourier de f . Alors, d'après les formules d'Euler⁵ on a :

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \\ &= a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) - ib_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) \\ &= \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{inx} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-inx}. \end{aligned}$$

On note par :

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{et} \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}. \quad (4.11)$$

De (4.10) et (4.11), on obtient la forme complexe de la série :

$$f(x) = c_0 + \sum_{n \geq 1} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$$

ou dans la forme

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-inx}.$$

de la série de Fourier de f

⁵ Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans le 18 septembre 1783 à Saint-Petersbourg (Empire russe)¹, est un mathématicien et physicien suisse qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin.

Calcul des coefficients c_n , c_{-n} et c_0

On rappelle que les coefficients complexes vérifient :

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \quad \text{et} \quad c_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Et comme a_n , b_n sont les coefficients de Fourier de f , donc on aura

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \\ c_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx + i \sin nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx, \\ c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i0x} dx. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

4.2.6 Inégalité de Bessel

La proposition suivante est appelée inégalité de Bessel⁶. Elle découle du théorème de projection sur un espace de dimension finie.

Proposition 4.2.1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique, Riemann intégrable sur $[0, 2\pi]$, de coefficients de Fourier a_n et b_n . Alors les séries numériques $\sum_{n \geq 1} |a_n|^2$ et $\sum_{n \geq 1} |b_n|^2$ convergent et on a

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

⁶Friedrich Wilhelm Bessel (22 juillet 1784, Minden — 17 mars 1846, Königsberg) est un astronome et mathématicien allemand, connu principalement pour avoir effectué en 1838 les premières mesures précises de la distance d'une étoile et pour être le fondateur de l'école allemande d'astronomie d'observation.

Dans le cas des coefficients complexes, l'inégalité de Bessel s'écrit :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

4.2.7 Égalité de Parseval

Le résultat suivant, qu'on admettra, est dû à Parseval⁷, et il est d'une grande importance en traitement de signal. La formule de Parseval indique que l'énergie totale d'un signal périodique s'obtient en sommant l'énergie des différentes harmoniques du signal. Il s'agit d'une amélioration de l'inégalité de Bessel.

Proposition 4.2.2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique, de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$, de coefficients de Fourier a_n et b_n . Alors les séries numériques $\sum_{n \geq 1} |a_n|^2$ et $\sum_{n \geq 1} |b_n|^2$ convergent et on a

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Dans le cas des coefficients complexes, l'égalité de Parseval s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2).$$

Remarque 4.2.3 Si f est T -périodique et vérifiant les hypothèses de la proposition précédente, l'égalité de Parseval s'écrit :

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2.$$

⁷Marc-Antoine Parseval des Chênes, né en 1755 à Rosières-aux-Salines et mort en 1836 à Paris, est un mathématicien français. On a donné son nom à l'égalité de Parseval, une formule fondamentale de la théorie des séries de Fourier.

Remarque 4.2.4 L'égalité de Parseval permet d'affirmer qu'il existe des séries trigonométriques qui ne sont des séries de Fourier d'aucune fonction périodique et intégrable. Comme par exemple la série trigonométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx$. D'après la règle d'Abel, cette série converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Par ailleurs pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, cette série est la série nulle, elle converge simplement sur $\mathbb{R}$. Si cette série trigonométrique était la série de Fourier d'une fonction f 2π -périodique et Riemann intégrable sur $[0, 2\pi]$, on aurait alors

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Cette égalité conduit à une contradiction car comme f est de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$, l'intégrale $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$ est bien définie alors que la

série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

4.3 Exercices avec solutions

Exercice 4.3.1 Soit f la fonction 2π -périodique définie par :

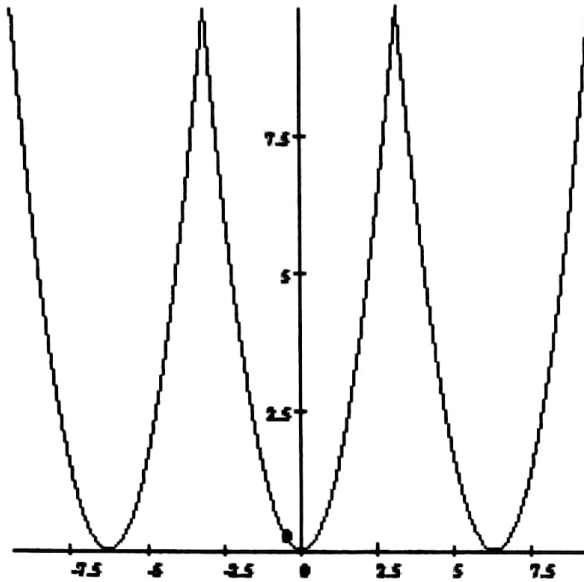
$$f(x) = x^2 \quad \text{sur } [-\pi, \pi].$$

- 1) Déterminer la série de Fourier de f .
- 2) En déduire la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Solution 4.3.1 Pour construire sur $\mathbb{R}$ la fonction périodique f telle que $f(x) = x^2$, de période $T = 2\pi$, il suffit de construire la courbe de f sur $[-\pi, \pi]$, puis dupliquer indéfiniment (voir courbe représentant f).

Section 4.3. Exercices avec solutions

Courbe représentant f .

- 1) f est 2π périodique et localement intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus, f est paire, alors les coefficients de Fourier de f sont :

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pour $n = 0$, on a

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

et en faisant deux fois une intégration par parties, on aura

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2\pi}{n^2} \cos n\pi \right) = \frac{4}{n^2} (-1)^n.$$

Ainsi la série de Fourier de f , notée S_{∞} , est donnée par :

$$S_{\infty}(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Comme $\sum_{n \geq 1} |a_n| = \sum_{n \geq 1} \frac{4}{n^2}$ est la série de Riemann convergente, alors $\sum_{n \geq 1} a_n$ est absolument convergente. Il en résulte que la sé-

rie $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème 4.2.1, il vient

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

2) En posant $x = \pi$ dans (4.12), on obtient

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Pour $x = 0$ dans (4.12), on trouve

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Enfin, par l'égalité de Parseval il vient

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2,$$

puisque les b_n sont nuls. Ainsi,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4}.$$

Par conséquent,

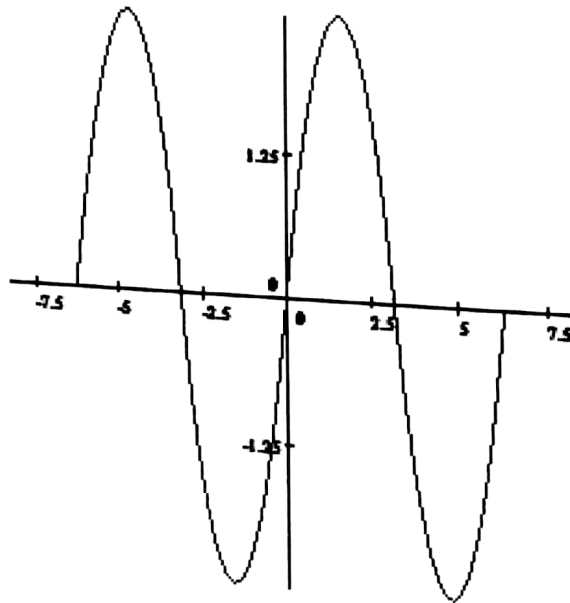
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16} \left(\frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9} \right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 4.3.2 Développer en série de Fourier de sinus la fonction 2π -périodique définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(x) = x(\pi - x).$$

En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

Solution 4.3.2 Le graphe de cette fonction est donnée dans la figure suivante :



Graphe de f .

Pour développer f en série de Fourier de sinus, on prendra f impaire. Donc, les coefficients de Fourier sont :

$$\begin{cases} a_n = 0, \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Après calculs, on trouve

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x\pi - x^2) \sin nx dx = \frac{4}{n^3\pi} (1 - (-1)^n).$$

D'où,

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair,} \\ \frac{8}{n^3\pi} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Section 4.3. Exercices avec solutions

Ainsi la série de Fourier de f , notée S_∞ , est donnée par :

$$S_\infty(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{8}{\pi(2n+1)^3} \sin(2n+1)x.$$

Comme $\sum_{n \geq 0} |b_n| = \sum_{n \geq 0} \frac{8}{\pi(2n+1)^3}$ est une série convergente, alors $\sum_{n \geq 0} b_n$ est absolument convergente.

Il en résulte que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{8}{\pi(2n+1)^3} \sin(2n+1)x$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème 4.2.1, il vient

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.13)$$

En posant $x = \frac{\pi}{2}$ dans (4.13), on trouve

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

D'où,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Sachant que les a_n sont nuls, l'égalité de Parseval donne :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|^2.$$

Par suite, on a

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi x - x^2)^2 dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{64}{\pi^2 (2n+1)^6}.$$

On trouve, après calcul,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{16\pi^4}{15} \times \frac{\pi^2}{64} = \frac{\pi^6}{15 \times 4}.$$

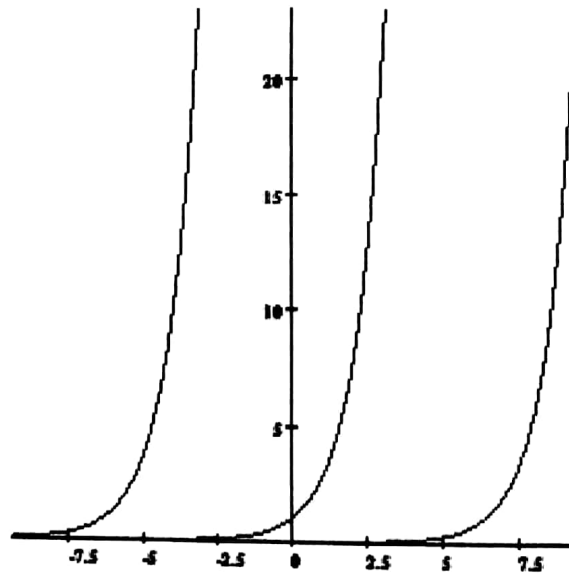
Exercice 4.3.3 Soit f la fonction 2π périodique définie par :

$$f(x) = e^x \quad \text{si } x \in]-\pi, \pi[.$$

- 1) Déterminer les coefficients de Fourier complexes de f .
- 2) Donner la série de Fourier trigonométrique de f .
- 3) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{\pi \coth \pi - 1}{2}.$$

Solution 4.3.3 Tout d'abord, on va tracer la courbe de f . On a :



Graphique de f .

On fait remarquer que f est ni paire ni impaire.

- 1) Les coefficients de Fourier complexes de f sont :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

En remplaçant f par sa valeur, on trouve

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-in} e^{(1-in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi(1-in)} \left(e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi} \right). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} & e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi} \\ &= e^\pi (\cos n\pi - i \sin n\pi) - e^{-\pi} (\cos n\pi + i \sin n\pi) \\ &= e^\pi (-1)^n - e^{-\pi} (-1)^n, \end{aligned}$$

donc,

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2\pi(1-in)} (e^\pi - e^{-\pi}) = \frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1-in)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.14)$$

2) On rappelle que les coefficients complexes vérifient :

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \quad \text{et} \quad c_0 = \frac{a_0}{2},$$

où a_n, b_n sont les coefficients de Fourier de f . Ainsi,

$$\begin{cases} a_n &= c_n + c_{-n}, \\ b_n &= \frac{c_{-n} - c_n}{i}. \end{cases} \quad (4.15)$$

En appliquant (4.14) dans (4.15), il vient

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1-in)} + \frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+in)} = \frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi} \times \frac{2}{1+n^2}, \\ b_n &= \frac{1}{i} \left(\frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+in)} - \frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1-in)} \right) = \frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi} \times \frac{-2n}{1+n^2}, \end{aligned}$$

et,

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{\sinh \pi}{\pi}.$$

Ainsi la série de Fourier trigonométrique de f , notée S_∞ , est donnée par :

$$S_\infty(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + 2 \sum_{n \geq 1} \left[\frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \cos nx - \frac{n(-1)^{n+1} \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \sin nx \right].$$

3) Cette série est la somme d'une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$ (celle en cosinus) et d'une série vérifiant le critère d'Abel (celle en sinus). Donc elle est convergente.

Puisque f est 2π -périodique et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de Dirichlet. Ce théorème affirme alors que cette série converge et a pour somme :

$$S_f(x) = f(x), \quad \forall x \text{ où } f \text{ est continue,}$$

et

$$S_f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad \forall x \text{ où } f \text{ est discontinue.}$$

Ce qui signifie que pour tout $x \in \mathbb{R} / \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$\frac{\sinh \pi}{\pi} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \cos nx - \frac{n(-1)^{n+1} \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \sin nx \right] = e^x,$$

et pour $x_k = (2k+1)\pi$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{\sinh \pi}{\pi} + \\ & 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \cos nx_k - \frac{n(-1)^{n+1} \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \sin nx_k \right] \\ &= \frac{f(x_k+0) + f(x_k-0)}{2}, \end{aligned}$$

avec,

$$f(x_k+0) = \lim_{t \xrightarrow{>} x_k} f(t) = e^{-\pi}, \quad f(x_k-0) = \lim_{t \xrightarrow{<} x_k} f(t) = e^{\pi}.$$

Ainsi pour $x_k = (2k+1)\pi$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{\sinh \pi}{\pi} + \\ & 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \cos nx_k - \frac{n(-1)^{n+1} \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \sin nx_k \right] \\ &= \frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{2} = \cosh \pi. \end{aligned}$$

Maintenant pour $x_0 = \pi$, on obtient

$$\frac{\sinh \pi}{\pi} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} = \cosh \pi.$$

Ainsi,

$$\frac{\pi \cosh \pi}{\sinh \pi} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \cosh \pi}{\sinh \pi} - 1 \right) = \frac{\pi \coth \pi - 1}{2}.$$

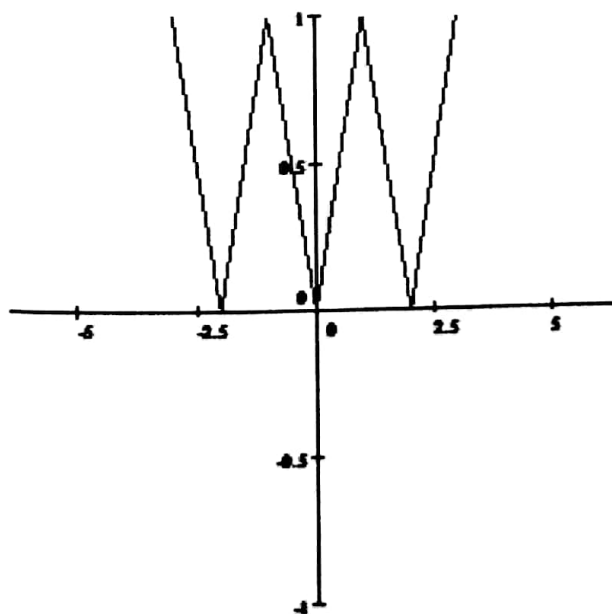
Exercice 4.3.4 Soit f la fonction périodique de période $T = 2$ définie par :

$$f(x) = |x| \quad \text{si } x \in [-1, 1].$$

1) Déterminer la série de Fourier de f .

2) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Solution 4.3.4 Soit f , telle que $f(x) = |x|$ pour $x \in [-1, 1]$, une fonction périodique de période $T = 2$. Voici le graphe de cette fonction



Courbe représentant f .

1) f étant paire, alors les coefficients de Fourier de f de période quel-

conque $T = 2l$ avec $l > 0$ sont :

$$\begin{cases} b_n = 0, \\ a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x dx = l, \\ a_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{n\pi}{l} dx. \end{cases}$$

Le calcul a déjà été fait dans la partie cours, et nous a donné :

$$\begin{aligned} b_n &= 0, \\ a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l x dx = l, \\ a_n &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair,} \\ \frac{-4l}{\pi^2 n^2} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour notre cas, f est périodique de période $T = 2$, donc $l = 1$.
Ainsi, on a

$$\begin{cases} b_n = 0, \\ a_0 = 2 \int_0^1 x dx = 1, \\ a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair,} \\ \frac{-4}{\pi^2 n^2} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases} \end{cases}$$

Par conséquent, la série de Fourier de f , notée $S_\infty(x)$, est :

$$S_\infty(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 0} \frac{-4}{\pi^2 (2n+1)^2} \cos(2n+1)\pi x.$$

2) Comme $\sum_{n \geq 0} |a_n| = \sum_{n \geq 0} \frac{4}{\pi^2 (2n+1)^2}$ est une série de Riemann convergente, donc la série de Fourier est uniformément convergente et on a

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-4}{\pi^2 (2n+1)^2} \cos(2n+1)\pi x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particulier pour $x = 0$, on a

$$0 = f(0) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

D'où,

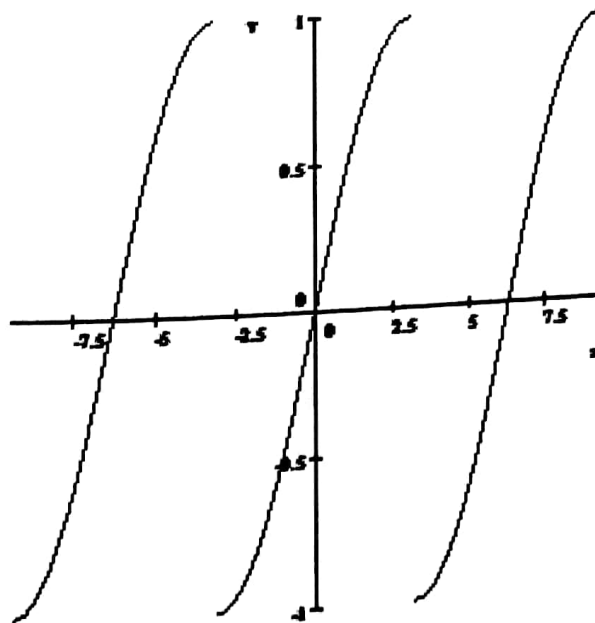
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 4.3.5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et soit f une fonction 2π -périodique définie par :

$$f(x) = \sin \alpha x, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

- 1) Déterminer la série de Fourier de f .
- 2) La fonction f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?

Solution 4.3.5 On trace d'abord le graphe de f .



Graph of f for $\alpha = \frac{1}{2}$.

- 1) f est impaire, alors les coefficients de Fourier de f sont :

$$\begin{cases} a_n = 0, \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} a_n = 0, \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \alpha x \sin nx dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Or par les transformations trigonométriques, on a

$$\sin \alpha x \sin nx = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - n) x - \cos (\alpha + n) x].$$

D'où,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos (\alpha - n) x - \cos (\alpha + n) x] dx.$$

Après calcul, on trouve

$$b_n = (-1)^n \left(\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \right) \left(\frac{2n}{\alpha^2 - n^2} \right).$$

Ainsi la série de Fourier de f , notée S_{∞} , est donnée par :

$$S_{\infty}(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \left(\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \right) \left(\frac{2n}{\alpha^2 - n^2} \right) \sin nx$$

- 2) Puisque f est 2π -périodique et que f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de Dirichlet. Ce dernier affirme alors que cette série converge et a pour somme :

$$S_f(x) = f(x), \quad \forall x \text{ où } f \text{ est continue,}$$

et

$$S_f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad \forall x \text{ où } f \text{ est discontinue.}$$

Ce qui signifie que pour tout $x \in \mathbb{R} / \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \right) \left(\frac{2n}{\alpha^2 - n^2} \right) \sin nx = \sin \alpha x,$$

et pour $x_k = (2k+1)\pi$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \right) \left(\frac{2n}{\alpha^2 - n^2} \right) \sin nx_k = \frac{f(x_k+0) + f(x_k-0)}{2}.$$

avec,

$$\begin{aligned} f(x_k + 0) &= \lim_{t \searrow x_k} f(t) = -\sin \alpha \pi, \\ f(x_k - 0) &= \lim_{t \nearrow x_k} f(t) = \sin \alpha \pi. \end{aligned}$$

Ainsi pour $x_k = (2k + 1)\pi$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \right) \left(\frac{2n}{\alpha^2 - n^2} \right) \sin nx_k = 0.$$

En conclusion la somme de la série de Fourier de f vaut :

$$S_f(x) = \begin{cases} \sin \alpha x & \text{si } x \in \mathbb{R} / \{(2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \\ 0 & \text{si } x \in \{x_k = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

Exercice 4.3.6 On considère la série trigonométrique $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin nx}{\ln n}$. Montrer qu'elle converge simplement mais qu'elle ne peut être la série de Fourier d'une fonction f .

Solution 4.3.6 On montre que $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin nx}{\ln n}$ converge simplement. On peut écrire :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\sin nx}{\ln n} = \sum_{n \geq 2} u_n v_n,$$

où

$$u_n = \sin nx \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{\ln n}.$$

La suite $(v_n)_n$ est positive, décroissante et tend vers 0. De plus la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est bornée. Par le critère d'Abel,

$\sum_{n \geq 2} \frac{\sin nx}{\ln n}$ converge simplement.

On suppose que $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin nx}{\ln n}$ est la série de Fourier d'une fonction f . Il en résulte que

$$\begin{cases} a_n &= 0, \\ b_n &= \frac{1}{\ln n}. \end{cases} \quad (4.16)$$

Alors cette série vérifie l'égalité de Parseval i.e.,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2). \quad (4.17)$$

En appliquant (4.16) dans (4.17), on trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

D'où $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2$ converge, ce qui est absurde car

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$$

est la série de Bertrand divergente pour $\alpha = 0$ et $\beta = 2$.

Exercice 4.3.7 Soit f une fonction de classe C^2 , de période 2π telle que $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$. Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

Solution 4.3.7 D'après le corollaire 4.2.2, on sait que si f est de classe C^2 , 2π -périodique alors sa somme de Fourier est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f . Donc,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Or $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$, donc $a_0 = 0$. Ainsi,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Puisque on peut dériver la somme de cette série, on obtient donc la série de Fourier de f' i.e.,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n \cos nx - a_n \sin nx.$$

L'égalité de Parseval appliquée à f et f' , donne

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Et,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Or pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

D'où,

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

Exercice 4.3.8 1) Développer $\frac{1}{2-z}$ en série entière lorsque $|z| \leq 1$ et en déduire la série de Fourier complexe de la fonction complexe de la variable réelle :

$$f(x) = \frac{1}{2 - e^{ix}}.$$

En déduire les séries de Fourier réelles des parties réelle et imaginaire de la fonction f .

2) En déduire la valeur $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4 \cos x}$.

Solution 4.3.8 1) Pour tout z tel que $|z| \leq 1$, on a

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-z/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n,$$

puisque $\left| \frac{z}{2} \right| = \frac{1}{2} |z| \leq \frac{1}{2} < 1$. Ainsi,

$$\frac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}. \quad (4.18)$$

En posant $Z = \cos x + i \sin x = e^{ix}$ dans (4.18), on obtient

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2 - (\cos x + i \sin x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\cos x + i \sin x)^n}{2^{n+1}}$$

Par la formule de Moivre, on déduit que

$$\frac{1}{2-e^{ix}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos nx + i \sin nx}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx + i \sin nx}{2^{n+1}}.$$

Ainsi la série de Fourier complexe de f est

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2^{n+1}} \cos nx + \frac{i}{2^{n+1}} \sin nx \right).$$

Comme

$$\frac{1}{2-e^{ix}} = \frac{2 - \cos x + i \sin x}{5 - 4 \cos x},$$

donc,

$$\frac{2 - \cos x + i \sin x}{5 - 4 \cos x} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx + i \sin nx}{2^{n+1}}.$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on obtient

$$\frac{2 - \cos x}{5 - 4 \cos x} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \frac{\sin x}{5 - 4 \cos x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{2^{n+1}}.$$

Ainsi les séries de Fourier réelles de la partie réelle et de la partie imaginaire de la fonction f sont respectivement,

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{2^{n+1}}.$$

2) On pose :

$$g(x) = \frac{2 - \cos x}{5 - 4 \cos x}.$$

Alors, on peut écrire

$$g(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{5 - 4 \cos x}.$$

En intégrant g sur $[0, 2\pi]$, on obtient

$$\int_0^{2\pi} g(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} dx + \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4 \cos x}.$$

Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4 \cos x} = \frac{4}{3} \left(\int_0^{2\pi} g(x) dx - \frac{\pi}{2} \right).$$

Or,

$$1 = a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) dx,$$

donc

$$\int_0^{2\pi} g(x) dx = \pi.$$

On conclut que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4 \cos x} = \frac{4}{3} \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Chapitre 5

Intégrales généralisées (ou impropres)

Pour tout intervalle fermé borné $I = [a, b]$ avec a et b réels, et pour toute fonction f continue ou continue par morceaux sur I , il est possible de définir l'intégrale de Riemann $\int_a^b f(t)dt$ comme limite de somme de Riemann. Il s'agit d'étendre cette définition à des fonctions définies sur l'ouvert $]a, b[$ borné ou non.

5.1 Intégrales généralisées sur une demi-droite

Soit $I = [a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable sur I , c'est à dire la fonction f est intégrable sur tout intervalle $[\alpha, \beta] \subset I$. Soit $A > a$, on note

$$\varphi(A) = \int_a^A f(x)dx.$$

Définition 5.1.1 La limite $\lim_{A \rightarrow +\infty} \varphi(A)$ est appelée intégrale généralisée

ou impropre de f sur I et on la note par $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Autrement dit,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx.$$

Si cette limite existe et est finie, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente. Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.

De manière analogue, on définit

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^b f(x)dx.$$

Remarque 5.1.1 On peut définir de la même manière l'intégrale généralisée

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x)dx.$$

Exemple 5.1.1 On étudie la nature des intégrales suivantes :

1- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ est divergente. En effet, on a par définition

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln A - \ln 1) = +\infty.$$

Ce qui montre la divergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

2- L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge car

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\arctan x)_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}.$$

3- L'intégrale $\int_{-\infty}^0 \sin x dx$ est divergente, en effet,

$$\int_{-\infty}^0 \sin x dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \left(\int_B^0 \sin x dx \right) = \lim_{B \rightarrow -\infty} (\cos B - 1).$$

Cette limite n'existe pas.

Remarque 5.1.2 Pour tout α fixé dans $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx,$$

si les deux intégrales existent.

Exemple 5.1.2 L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge et sa valeur est égale à π . En effet, de l'exemple précédent, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

de même

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Remarque 5.1.3 Soit F la fonction primitive pour f , c'est à dire F vérifie

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} (F(A) - F(a)) = F(+\infty) - F(a). \end{aligned}$$

où

$$F(+\infty) := \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A).$$

Donc

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \iff \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) \text{ est finie.}$$

5.1.1 Propriétés des intégrales généralisées convergentes

On donne ici quelques propriétés des intégrales généralisées convergentes. Cependant, on a :

Proposition 5.1.1 Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $I = [a, +\infty[$ et soient α et β deux réels quelconques. Alors,

1. Si les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ convergent, alors

l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx$ converge aussi.

2. Si une des deux intégrales généralisées converge et l'autre diverge, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx$ diverge.

3. Si les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ divergent, alors on ne connaît pas à priori la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx.$$

Preuve La preuve découle directement de la définition d'une intégrale généralisée convergente ou divergente et des propriétés des limites. ■
Les propositions suivantes sont utiles pour la suite.

Proposition 5.1.2 Soit $I = [a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur I . Alors,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ converge} \iff \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \text{ converge, } \forall \alpha > a.$$

Preuve Ceci découle du fait qu'on peut toujours écrire

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^{\alpha} f(x)dx + \int_{\alpha}^A f(x)dx.$$

D'où la convergence du premier membre entraîne la convergence du second membre et vice versa sachant que $\int_a^{\alpha} f(x)dx$ est finie. ■

Proposition 5.1.3 Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ converge} \iff \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_{\xi}^{+\infty} f(x)dx = 0, \quad \xi > a.$$

Preuve En effet, on a par définition

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_a^{\xi} f(x)dx.$$

Mais,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{+\infty} f(x)dx,$$

ainsi,

$$\int_{\xi}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^{\xi} f(x)dx.$$

Par passage à la limite quand $\xi \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_{\xi}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx - \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_a^{\xi} f(x)dx.$$

Ainsi la convergence de $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est équivalente à

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_{\xi}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

■

5.2 Cas des fonctions de signe constant sur l'intervalle I

Ici, on va énoncer tous les résultats dans le cas de fonctions positives sur l'intervalle I . Si le cas de fonctions négatives se présente, on étudiera l'intégrale de la fonction $-f$.

Proposition 5.2.1 *On suppose que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est localement intégrable sur $I = [a, +\infty[$ et*

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in I.$$

Pour que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ soit convergente, il faut et il suffit que la fonction φ telle que

$$\varphi(A) = \int_a^A f(x)dx$$

soit majorée sur I i.e.,

$$\exists M > 0, \forall A \in I, \text{ on a } \varphi(A) \leq M.$$

Preuve On a par hypothèse $f(x) \geq 0, \forall x \in I$ alors la fonction φ est croissante car elle est dérivable et sa dérivée vaut f .

On suppose que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge alors $\lim_{A \rightarrow +\infty} \varphi(A) = l$ existe et on a

$$\forall A \in I, \varphi(A) \leq l.$$

D'où φ est majorée.

Inversement, on suppose que φ est majoré. Alors, la fonction φ est croissante et majorée sur I , donc elle admet une limite finie quand A tend vers $+\infty$. ■

5.2.1 Critère de comparaison

Le résultat suivant est appelé théorème de comparaison. Il permet d'affirmer la convergence de certaines intégrales généralisées en les comparant avec des intégrales généralisées convergentes.

Théorème 5.2.1 *On suppose $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables et vérifiant :*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, +\infty[.$$

Alors,

1. si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge aussi.

2. si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge aussi.

Preuve 1. Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge alors d'après le proposition 5.2.1.

$\int_a^A g(x)dx$ est majorée. D'où,

$$\exists M > 0, \quad \forall A \geq a, \quad \int_a^A g(x)dx \leq M.$$

Or, on a par hypothèse

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, +\infty[.$$

Donc,

$$\forall A \geq a, \quad \int_a^A f(x)dx \leq M.$$

Ce qui montre en utilisant la proposition 5.2.1 que $\int_a^A f(x)dx$ est convergente.

2. On procède par l'absurde. On suppose que $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge alors

de 1., l'intégrale $\int_a^A f(x)dx$ converge aussi. Ce qui contredit le fait que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est divergente par hypothèse. ■

5.2.2 Critère d'équivalence

Ici, on se propose d'étudier la nature des intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ lorsque les fonctions f et g sont équivalentes.

Le résultat suivant est la forme la plus fréquemment utilisée de la comparaison de deux intégrales généralisées.

Théorème 5.2.2 Soient $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables. On suppose que pour tout $x \in I = [a, +\infty[$, $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

avec $0 < k < +\infty$. Alors les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sont de même nature.

Section 5.2 Cas des fonctions de signe constant sur l'intervalle I

Preuve Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$ alors, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > a, \forall x / x \geq \alpha \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \varepsilon.$$

Ainsi,

$$k - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq k + \varepsilon, \quad \forall x \geq \alpha$$

Par conséquent,

$$(k - \varepsilon)g(x) \leq f(x) \leq (k + \varepsilon)g(x), \quad \forall x \geq \alpha,$$

puisque g est strictement positive.

Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge alors, par application de la proposition 5.1.2, l'in-

tégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge aussi. Et en utilisant le théorème de compa-

raison 5.2.1, l'intégrale $(k - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge aussi. Par conséquent,

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge.

Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge alors, d'après la proposition 5.1.2, l'intégrale

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge aussi. Ce qui entraîne que la convergence de l'in-

tégrale $(k - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Et par comparaison (cf. théorème 5.2.1), $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge. D'après

la proposition 5.1.2, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge aussi. ■

Exemple 5.2.1 L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ converge. En effet, on pose :

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Alors,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \neq 0.$$

Par application du théorème précédent, $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ sont de même nature. Et comme, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge car

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left. \frac{-1}{x} \right|_1^{+\infty} = 1.$$

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ converge aussi.

Une conséquence du théorème (5.2.2) donne le corollaire suivant :

Corollaire 5.2.1 Soient $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables, positives et équivalentes au voisinage de $+\infty$. Alors les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sont de même nature.

tégraes généralisées $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sont de même nature.

5.3 Critère de convergence de Cauchy

Le critère de Cauchy pour les fonctions fournit un critère de convergence des intégrales généralisées. Ce critère donne une condition nécessaire et suffisante pour les intégrales généralisées. Il est surtout utile dans les questions théoriques. On a alors le théorème dit de Cauchy suivant :

Section 5.3. Critère de convergence de Cauchy

Théorème 5.3.1 Soit $I = [a, +\infty[$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable. Pour que l'intégrale de f sur I soit convergente, il faut et il suffit que soit vérifiée la condition de Cauchy suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > a, \forall A', A'' > A \implies \left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Preuve En effet,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \text{ existe et finie,}$$

où $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$. Ce qui est encore équivalent, en utilisant la définition de la limite, à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > a, \forall A', A'' > A \implies |\varphi(A') - \varphi(A'')| < \varepsilon.$$

D'où,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > a, \forall A', A'' > A \implies \left| \int_a^{A'} f(x) dx - \int_a^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > a, \forall A'' > A' > A \implies \left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

■

5.4 Intégrales généralisées absolument convergentes

En général, on rencontre des intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ avec des fonctions f ayant un signe changeant sur $[a, +\infty[$. Pour cela, on va introduire la notion de convergence absolue pour étudier la nature de ces intégrales généralisées.

Section 5.4. Intégrales

5.4.1 Intégrale généralisée absolument convergente

Définition 5.4.1 L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est dite absolument convergente

si $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ converge.

Exemple 5.4.1 L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ est absolument convergente sur

$[1, +\infty[$ car on a pour tout $x \neq 0$,

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

Et comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, il résulte du critère de comparaison que

l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$ converge.

Voici une condition suffisante pour qu'une intégrale généralisée soit convergente.

Corollaire 5.4.1 Si $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge aussi.

Preuve En effet, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ converge donc elle vérifie le critère de Cauchy suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > a, \forall A', A'' > A \Rightarrow \left| \int_{A'}^{A''} |f(x)| dx \right| < \varepsilon.$$

Or,

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| \leq \int_{A'}^{A''} |f(x)| dx = \left| \int_{A'}^{A''} |f(x)| dx \right| < \varepsilon, \quad \forall A', A'' > A,$$

Section 5.4. Intégrales généralisées absolument convergentes

d'où,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > a, \forall A', A'' > A \Rightarrow \left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Ce qui montre bien que $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge. ■

Remarque 5.4.1 La réciproque du corollaire précédent est fausse comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 5.4.2 L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ où $a > 0$ converge (ceci découle

du théorème d'Abel 5.4.1, voir exemple 5.4.4), mais $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ diverge.

En effet, on a toujours

$$\frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{|\sin x|}{x}, \quad \forall x > 0, \quad (5.1)$$

puisque pour tout $y \in [-1, 1]$, $y^2 \leq |y|$. Si $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ converge alors,

d'après (5.1) et par application du théorème de comparaison, $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ converge. Mais,

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx,$$

donc, $\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx$ converge aussi. D'autre part, on a

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \left[\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx \right]. \quad (5.2)$$

Et par le théorème d'Abel 5.4.1, on déduit que $\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ converge.

Alors, du fait qu'on a (5.2) $\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ converge ce qui est absurde car

$$\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_a^A \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} [\ln A - \ln a] = +\infty.$$

Ainsi, $\int_a^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ diverge, donc elle ne converge pas absolument.

5.4.2 Intégrale généralisée semi-convergente

Définition 5.4.2 On dit que $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est semi-convergente si elle converge sans être absolument-convergente.

Exemple 5.4.3 L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

Remarque 5.4.2 On a vu, dans le paragraphe précédent, qu'une intégrale peut converger sans converger absolument. On remarque donc que la situation de l'intégrale de Riemann et celle de l'intégrale généralisée sont inverses l'une de l'autre :

1. si f est Riemann-intégrable alors $|f|$ est Riemann-intégrable et la réciproque est fausse,
2. si $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge et la réciproque est fausse.

Il n'existe hélas pas de critère simple pour établir la semi-convergence d'une intégrale généralisée. On a cependant le théorème suivant :

Section 5.4 Intégrales généralisées absolument convergentes

5.4.3 Théorème d'Abel pour les intégrales généralisées

Dans ce paragraphe, on dispose, pour les fonctions de signe quelconque et dont l'intégrale n'est pas absolument convergente, du théorème d'Abel énoncé par la suite et qui est démontré grâce au théorème de Cauchy pour les intégrales généralisées et la deuxième formule de la moyenne pour les intégrales définies. On a alors,

Théorème 5.4.1 Soient $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement-intégrables. On suppose que :

1. f est décroissante à valeurs positives sur $[a, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
2. Il existe une constante $M > 0$ tel que

$$\forall A > a, \quad \left| \int_a^A g(x) dx \right| \leq M. \quad (5.3)$$

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ converge.

Preuve Il suffit de montrer que $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ vérifie le critère de Cauchy i.e ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > a, \forall A'' > A' > a \implies \left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, il va exister $A > a$, tel que pour tout $x > A$ on ait $f(x) < \varepsilon/2M$. En particulier, pour $A' > A$, on a

$$f(A') < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad (5.4)$$

Section 5.4. Intégrales généralisées absolument convergentes

où M est la constante vérifiant (5.3). D'autre part, par la deuxième formule de la moyenne¹ il vient :

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx \right| = \left| f(A') \int_{A'}^{\xi} g(x)dx \right| = f(A') \left| \int_{A'}^{\xi} g(x)dx \right|, \quad (5.5)$$

où $\xi \in [A', A'']$. De (5.4) et (5.5), on déduit que

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M} \left| \int_{A'}^{\xi} g(x)dx \right| \quad (5.6)$$

De plus, on a

$$\left| \int_{A'}^{\xi} g(x)dx \right| \leq \left| \int_{A'}^a g(x)dx \right| + \left| \int_a^{\xi} g(x)dx \right| \quad (5.7)$$

En appliquant l'hypothèse (5.3), l'inégalité (5.7) devient

$$\left| \int_{A'}^{\xi} g(x)dx \right| \leq 2M. \quad (5.8)$$

De (5.6) et (5.8), on conclut que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > a, \forall A' > A'' > a \implies \left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx \right| < \varepsilon,$$

d'où l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ est convergente. ■

Exemple 5.4.4 On se propose d'étudier la nature de l'intégrale généralisée suivante :

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \text{avec } \alpha > 0 \text{ et } a > 0.$$

¹ Si f et g sont deux fonctions intégrable sur $[a, b]$ et f décroissante à valeurs positives sur $[a, b]$. Alors, il existe $\xi \in [a, b]$ telle que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$.

On pose :

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{et} \quad g(x) = \sin x.$$

Alors il est clair que f est décroissante à valeurs positives sur $[a, +\infty[$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. De plus, on a

$$\forall A > a, \quad \left| \int_a^A g(x) dx \right| = \left| \int_a^A \sin x dx \right| = |-\cos A + \cos a| \leq 2 = M.$$

Par application du théorème d'Abel, l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$

converge. En particulier pour $\alpha = 1$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge.

Remarque 5.4.3 Tous les résultats énoncés et démontrés sur un intervalle $[a, +\infty[$, peuvent être adoptés au cas $]-\infty, b]$ i.e., pour l'étude de

l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^b f(x) dx$.

5.5 Intégrales généralisées des fonctions non bornées

On va maintenant s'intéresser aux fonctions f à valeurs réelles définies sur des intervalles $[a, b[$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ (resp. $]a, b]$) et qui ne sont pas nécessairement bornées.

5.5.1 Intégrales généralisées de fonctions définies sur $[a, b[$

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) une fonction telle que

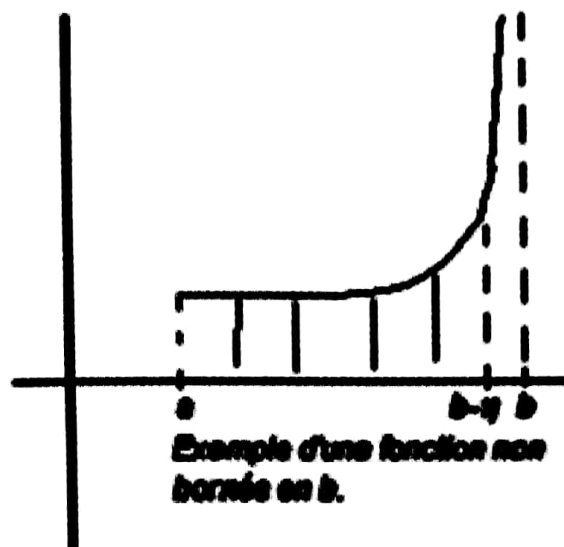
$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$$

(i.e., b est un point singulier de f). Plus précisément, on suppose que :

1. f est intégrable sur tout intervalle $[a, b - \eta]$ $\forall \eta, 0 < \eta < b - a$.

Section 5.5. Intégrales généralisées des fonctions non bornées

2. f est non bornée sur tout intervalle $[b - \eta, b[$.



Définition 5.5.1 On note $\varphi(\eta) = \int_a^{b-\eta} f(x)dx$ (il résulte de l'hypothèse 1. que $\varphi(\eta)$ existe). La limite : $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \varphi(\eta)$ est appelée *intégrale généralisée* de f sur $[a, b[$. On la note $\int_a^b f(x)dx$ C'est à dire :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x)dx. \quad (5.9)$$

Si la limite (5.9) existe et est finie, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est convergente. Dans le cas contraire (la limite n'existe pas ou elle est infini), l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est dite divergente.

Exemple 5.5.1 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [0, 1[.$$

$x = 1$ est un point singulier de f car $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$. on se propose d'étudier la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. On a par

définition,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \arcsin x \Big|_0^{1-\eta} = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est convergente.

Remarque 5.5.1 Le point $x = 0$ n'est pas un point singulier pour l'intégrale $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$ car

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq \infty.$$

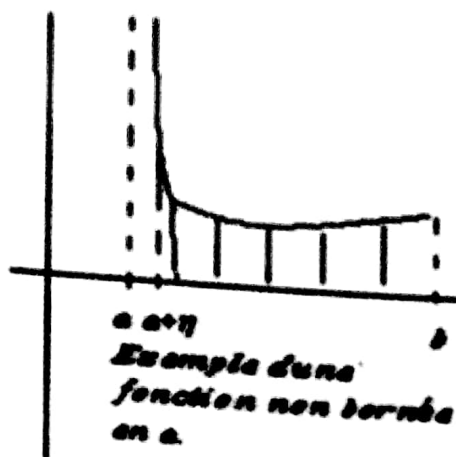
5.5.2 Intégrales généralisées de fonctions définies sur $]a, b]$

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) une fonction telle que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

(i.e., a est un point singulier de f). Plus précisément, on suppose que :

1. f est intégrable sur tout intervalle $[a + \mu, b] \forall \mu, 0 < \mu < b - a$.
2. f est non bornée sur tout intervalle $]a, a + \mu]$.



Définition 5.5.2 On note $\varphi(\mu) = \int_{a+\mu}^b f(x) dx$. La limite : $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \varphi(\mu)$ est appelée intégrale généralisée de f sur $]a, b]$ et on la note $\int_a^b f(x) dx$.

Section 5.5. Intégrales généralisées des fonctions non bornées

C'est à dire,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \int_{a+\mu}^b f(x)dx. \quad (5.10)$$

Si la limite (5.10) existe et est finie, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est convergente. Dans le cas contraire, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est divergente.

Exemple 5.5.2 L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est convergente. En effet, puisque 0 est un point singulier de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$, on a par définition de l'intégrale généralisée :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \int_{\mu}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} (2\sqrt{\mu} + 2) = 2.$$

D'où la convergence de $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

5.5.3 Intégrale généralisée de fonctions définies sur $]a, b[$

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) une fonction. On suppose que :

1. f est intégrable sur tout intervalle $[a + \mu, b - \eta]$ où $a + \mu < b - \eta$, $0 < \mu < b - a$ et $0 < \eta < b - a$.
2. f est non bornée sur tout intervalle $]a, a + \mu]$ et $[b - \eta, b[$ (a et b sont des points singuliers de f).

Définition 5.5.3 La limite : $\lim_{\substack{\mu \rightarrow 0^+ \\ \eta \rightarrow 0^-}} \int_{a+\mu}^{b-\eta} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ est appelée intégrale généralisée de f sur $]a, b[$. Si cette limite existe et est finie,

on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est convergente. Dans le cas contraire,

l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est divergente.

Exemple 5.5.3 On considère l'intégrale de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ sur $I =]0, 1[$. f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) en 0 (resp. en 1), donc 0 et 1 sont deux points singuliers de f . On écrit alors, utilisant la relations de Chasles :

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{1/2} f(x)dx + \int_{1/2}^1 f(x)dx.$$

On se retrouve avec deux intégrales généralisées qui ont chacune un seul point singulier. Une primitive de f étant $F(x) = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x}$, on a

$$\int_0^{1/2} f(x)dx = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \int_{\mu}^{1/2} f(x)dx = F(x)|_{\mu}^{1/2} = 4\sqrt{1/2} - 2.$$

Et,

$$\int_{1/2}^1 f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{1/2}^{1-\eta} f(x)dx = F(x)|_{1/2}^{1-\eta} = 2 - 4\sqrt{1/2}.$$

Ces deux intégrales convergent. l'intégrale sur $]0, 1[$ existe et vaut donc la somme des deux intégrales i.e., 0.

Remarque 5.5.2 Toutes les propriétés de l'intégrale généralisée décrite dans les sections précédentes (les théorèmes de comparaison, critère d'équivalence et critère de Cauchy) restent encore vraies pour les intégrales généralisées de fonctions non bornées à valeurs positives.

5.6 Calcul pratique des intégrales généralisées

Dans cette section, on va étendre tous les résultats et propriétés vus sur les intégrales Riemann aux intégrales généralisées.

5.6.1 Application de la fonction primitive

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable où $b < +\infty$, b un point singulier ou bien $b = +\infty$. Soit F la primitive de la fonction f , c'est à dire,

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b[.$$

On a,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b^-} (F(x) - F(a)).$$

Alors, $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ existe et est finie.

Exemple 5.6.1 On se propose de calculer l'intégrale généralisée $\int_0^1 \ln x dx$.

Il est clair que 0 est un point singulier de la fonction $\ln$. D'autre part, la primitive F de la fonction $\ln$ est donnée par :

$$F(t) = t \ln t - t, \quad t \in]0, 1].$$

Ainsi,

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1 - (x \ln x - x)) = -1.$$

D'où la convergence de l'intégrale généralisée.

Exemple 5.6.2 Maintenant, on va calculer l'intégrale généralisée :

$$J = \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x dx, \quad (\alpha > 0).$$

Une primitive de f étant $F(x) = -\frac{\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha x}$, on a

$$J = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - F(0)) = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

D'où J est convergente.

5.6.2 Intégration par parties

Pour calculer une intégrale généralisée, on peut aussi utiliser d'autres méthodes, par exemple, l'intégration par parties. On a alors :

Théorème 5.6.1 *On suppose que*

1. $I = [a, b[$ où $a < b$, $b < +\infty$, b point singulier ou $b = +\infty$.
2. Les fonctions f et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 .
3. $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \cdot g(x)$ existe.

Alors les deux intégrales $\int_a^b f'(x) g(x) dx$ et $\int_a^b f(x) g'(x) dx$ sont de même nature et si elles convergent, on a de plus

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx,$$

où,

$$f(x) g(x) \Big|_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) g(x) - f(a) g(a).$$

Preuve On fixe $\xi \in]a, b[$ et on applique la formule d'intégration par parties sur $[a, \xi]$, on obtient

$$\int_a^\xi f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^\xi - \int_a^\xi f(x) g'(x) dx. \quad (5.11)$$

Par passage à la limite dans (5.11), quand $\xi \rightarrow b$, on obtient notre formule. ■

Exemple 5.6.3 *On cherche à déterminer la valeur de l'intégrale généralisée.*

Section 5.6. Calcul pratique des intégrales généralisées

ralisée $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx$. Une intégration par parties donne,

$$\begin{aligned} J_n &= -e^{-x} x^n \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-x} n x^{n-1} dx, \\ &= -e^{-x} x^n \Big|_0^{+\infty} + n \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx, \\ &= -e^{-x} x^n \Big|_0^{+\infty} + n \cdot J_{n-1}. \end{aligned}$$

Or,

$$-e^{-x} x^n \Big|_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-n x^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0,$$

donc,

$$J_n = n \cdot J_{n-1}.$$

Et par récurrence on obtient,

$$J_n = n \cdot (n-1) \cdot J_{n-2} = n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot J_0 = n! J_0.$$

Mais,

$$J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Ainsi,

$$J_n = n!.$$

5.6.3 Changement de variable

Le résultat suivant établit la méthode du changement de variable qui permet de calculer les intégrales généralisées. Cependant, on a

Théorème 5.6.2 On suppose que :

1. f est continue sur $[a, b[$ où $b < +\infty$ ou $b = +\infty$, b point singulier.
2. $x = \varphi(t)$, φ est strictement croissante sur $[\alpha, \beta]$ où $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$ (ou $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = \varphi(\beta)$).

Soit

Alors, les deux intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt$ sont de même nature et si elles convergent on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt.$$

Preuve Soit $t = \theta(x)$, où θ est la fonction inverse de φ avec $x = \varphi(t)$. Alors, la fonction θ est aussi croissante sur $[a, b[$ (car φ est strictement croissante sur $[\alpha, \beta]$) et de plus, $\lim_{x \rightarrow b^-} \theta(x) = \beta$. On fixe $t_0 \in]\alpha, \beta[$ et soit $x_0 = \varphi(t_0)$, $x_0 \in]a, b[$. On applique la formule pour le changement de variable sur $[a, x_0]$, on a

$$\int_a^{x_0} f(x)dx = \int_\alpha^{t_0} f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt. \quad (5.12)$$

On remarque que si $x_0 \rightarrow b^-$ alors $t_0 \rightarrow \beta^-$. Par conséquent, les deux intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt$ sont de même nature.

On suppose maintenant que l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt$ existe. Par passage à la limite quand $x_0 \rightarrow b^-$ (5.12), on obtient

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt.$$

■

Exemple 5.6.4 Par la méthode du changement de variable, on calcule l'intégrale généralisée :

$$J = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(-x+b)}}, \quad a < b.$$

On remarque que a et b sont deux point singuliers. On pose :

$$x = \varphi(t) = a \cos^2 t + b \sin^2 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

D'où, on a

$$\varphi(0) = a, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = b.$$

Ainsi,

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}.$$

De plus, φ est strictement croissante sur $[\alpha, \beta] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\varphi'(t) = -2a \sin t \cos t + 2b \cos t \sin t = (b - a) \sin 2t > 0.$$

D'après le théorème (5.6.2), il vient

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(b - a) \sin 2t}{\sqrt{(a \cos^2 t + b \sin^2 t - a)(-a \cos^2 t + b \sin^2 t + b)}} dt, \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(b - a) \sin 2t dt}{\sqrt{(b - a)^2 \cos^2 t \sin^2 t}}, \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi. \end{aligned}$$

Exemple 5.6.5 Etudier la convergence de l'intégrale généralisée :

$$J = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx.$$

On pose :

$$x = \varphi(t) = \sqrt{t}, \quad x^2 = t \quad 0 \leq t \leq +\infty.$$

On a alors

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(+\infty) = +\infty.$$

φ est strictement croissante puisque

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0 \quad \text{pour } t \in]0, +\infty[.$$

Par application du théorème 5.6.2, on trouve

$$J = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt,$$

et les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ sont de même nature. Et

comme $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ converge (d'après le critère d'Abel), alors $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ converge aussi.

5.7 Exercices avec solutions

Exercice 5.7.1 Calculer les intégrales suivantes en précisant leurs natures :

$$\begin{aligned} 1) \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \quad 2) \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \quad 3) \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{t^2 + 4}, \quad 4) \int_{-\infty}^2 \frac{dt}{t^2 + 4}, \\ 5) \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Solution 5.7.1 Calculons les intégrales suivantes en précisant leurs natures :

1) La fonction $t \rightarrow f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ présente un problème en $t = 0$. On a par définition,

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{B \rightarrow 0^+} \int_B^1 \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Or,

$$\int_B^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} -\ln B & \text{si } \alpha = 1, \\ \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_B^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{B^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Donc par passage à la limite quand B tend vers 0^+ , on trouve

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Ainsi $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$. Cette intégrale est appelée intégrale de Riemann.

2) La fonction $t \rightarrow f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ présente un problème en $t = +\infty$. On a alors,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dt}{t^\alpha}$$

Comme,

$$\int_1^A \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln A & \text{si } \alpha = 1, \\ \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^A = \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

D'où,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha = 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1, \\ -\frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Ainsi l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si $\alpha > 1$ et est divergente si $\alpha \leq 1$. Cette intégrale est appelée intégrale de Riemann.

3) La fonction $t \rightarrow f(t) = \frac{t}{t^2 + 4}$ présente un problème en $t = +\infty$. On a par définition,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{t^2 + 4} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{t dt}{t^2 + 4}.$$

Comme,

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{t dt}{t^2 + 4} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(t^2 + 4) \right]_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(A^2 + 4) - \ln 2 \right] \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{t^2 + 4} = +\infty.$$

Et on conclut que l'intégrale est divergente.

- 4) La fonction $t \rightarrow f(t) = \frac{1}{t^2 + 4}$ présente un problème en $t = -\infty$.

On a,

$$\int_{-\infty}^2 \frac{dt}{t^2 + 4} := \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^2 \frac{dt}{t^2 + 4} = \lim_{B \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} \right]_B^2,$$

ainsi,

$$\int_{-\infty}^2 \frac{dt}{t^2 + 4} = \lim_{B \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left[\arctan 1 - \arctan \frac{B}{2} \right].$$

Or,

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{B \rightarrow -\infty} \arctan \frac{B}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Donc,

$$\int_{-\infty}^2 \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{3\pi}{8}.$$

Ainsi l'intégrale est convergente et est égale à $\frac{3\pi}{8}$.

- 5) La fonction $t \rightarrow f(t) = \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}$ semble présenter un problème aux deux extrémités de l'intervalle $]0, 1[$. En fait, cette fonction peut se prolonger en $t = 0$ en une fonction C^1 , et l'intégrale donnée présente uniquement un problème en $t = 1$.

On peut écrire donc,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t} dt = \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt + \int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt,$$

avec,

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt := \lim_{B \rightarrow 0} \int_B^{1/2} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt,$$

et,

$$\int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt := \lim_{A \rightarrow 1} \int_{1/2}^A \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt.$$

Une intégration par parties donne :

$$\int_B^{1/2} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln(1-t^2)}{t} - \ln(1+t) + \ln(1-t) \right]_B^{1/2}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} & \lim_{B \rightarrow 0} \int_B^{1/2} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt \\ &= \lim_{B \rightarrow 0} \left[-\frac{\ln(1-t^2)}{t} - \ln(1+t) + \ln(1-t) \right]_B^{1/2} \\ &= -3 \ln 3 + 4 \ln 2, \end{aligned}$$

puisque $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$. Il en résulte que,

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = -3 \ln 3 + 4 \ln 2.$$

Et,

270

$$\begin{aligned} & \int_{1/2}^A \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt \\ &= \left[-\frac{\ln(1-t^2)}{t} + \ln(1+t) - \ln(1-t) \right]_{1/2}^A, \\ &= \left[\frac{(t-1)\ln(1-t)}{t} - \frac{(1+t)\ln(1+t)}{t} \right]_{1/2}^A. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} & \lim_{A \rightarrow 1} \int_{1/2}^A \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow 1} \left[\frac{(t-1)\ln(1-t)}{t} - \frac{(1+t)\ln(1+t)}{t} \right]_{1/2}^A \\ &= -6 \ln 2 + 3 \ln 3, \end{aligned}$$

puisque $\lim_{u \rightarrow 0} u \ln u = 0$. Donc,

$$\int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = -6 \ln 2 + 3 \ln 3.$$

On conclut que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = -2 \ln 2.$$

Ainsi l'intégrale converge et vaut $-2 \ln 2$.

Exercice 5.7.2 Etudier la nature des intégrales de Bertrand suivantes

$$1) \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}, \quad 2) \int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha (|\ln t|)^\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Solution 5.7.2 On notera que les bornes 2 ou 1/2 servent uniquement à éviter le problème en $t = 1$.

Section 5.7. Exercices

1) Si $\alpha < 1$. Soit $\delta > 0$ tel que $\alpha + \delta < 1$ et on écrit :

$$\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha+\delta}} \frac{t^\delta}{(\ln t)^\beta}.$$

Or,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\delta}{(\ln t)^\beta} = +\infty,$$

donc il existe $A > 0$, tel que

$$\frac{t^\delta}{(\ln t)^\beta} > 1, \quad \forall t \geq A.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} > \frac{1}{t^{\alpha+\delta}}, \quad \forall t \geq A.$$

Comme $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+\delta}} dt$ est une intégrale de Riemann divergente pour

$\alpha + \delta < 1$, il en va de même pour $\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ et donc pour l'in-

tégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$.

Si $\alpha = 1$, on va calculer $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t (\ln t)^\beta}$ suivant la valeur de β . On a alors,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t (\ln t)^\beta} := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dt}{t (\ln t)^\beta}.$$

Or,

$$\int_2^A \frac{dt}{t (\ln t)^\beta} = \begin{cases} [\ln (\ln t)]_2^A = \ln (\ln A) - \ln (\ln 2) & \text{si } \beta = 1, \\ \left[\frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta} \right]_2^A = \frac{(\ln A)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{si } \beta \neq 1. \end{cases}$$

Section 5.7. Exercices avec solutions

D'où par passage à la limite quand $A \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t (\ln t)^\beta} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta = 1, \\ +\infty & \text{si } \beta < 1, \\ -\frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{si } \beta > 1. \end{cases}$$

Ainsi $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t (\ln t)^\beta}$ converge ssi $\beta > 1$ et diverge ssi $\beta \leq 1$.

Si $\alpha > 1$. Soit $\delta > 0$ tel que $\alpha - \delta > 1$ et on écrit :

$$\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha-\delta}} \frac{1}{t^\delta (\ln t)^\beta}.$$

Or,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^\delta (\ln t)^\beta} = 0, \quad \forall \beta.$$

Il existe donc $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, on ait

$$0 < \frac{1}{t^\delta (\ln t)^\beta} < 1$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} < \frac{1}{t^{\alpha-\delta}}, \quad \forall t \geq A.$$

Comme $\int_2^A \frac{1}{t^{\alpha-\delta}} dt$ est une intégrale de Riemann convergente pour

$\alpha - \delta > 1$, il en va de même pour $\int_2^A \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$ et donc pour

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}.$$

En conclusion, on a

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1, \beta > 1), \\ \text{diverge} & \text{si } \alpha < 1 \text{ ou } (\alpha = 1, \beta \leq 1). \end{cases}$$

2) On a par définition,

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha (|\ln t|)^\beta} := \lim_{B \rightarrow 0^+} \int_B^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha (|\ln t|)^\beta}.$$

En faisant le changement de variable :

$$u = \frac{1}{t},$$

il vient,

$$\lim_{B \rightarrow 0^+} \int_B^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha (|\ln t|)^\beta} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_2^u \frac{du}{u^{2-\alpha} (\ln u)^\beta}.$$

Ce qui nous ramène au cas précédent avec $2 - \alpha$ en guise de α .
C'est à dire que :

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } 2 - \alpha > 1 \text{ ou } (2 - \alpha = 1, \beta > 1), \\ \text{diverge} & \text{si } 2 - \alpha < 1 \text{ ou } (2 - \alpha = 1, \beta \leq 1). \end{cases}$$

On conclut enfin que,

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha < 1 \text{ ou } (\alpha = 1, \beta > 1), \\ \text{diverge} & \text{si } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1, \beta \leq 1). \end{cases}$$

Exercice 5.7.3 Etudier la convergence de chacune des intégrales généralisées suivantes :

$$\begin{aligned} 1) \int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t^\alpha} dt, \alpha \in \mathbb{R}, \quad 2) \int_2^{+\infty} \frac{(\ln t)^3 \sin t}{(3 + \cos t) t^{\frac{4}{3}}} dt, \quad 3) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t} + 1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^5}} dt, \\ 4) \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Solution 5.7.3 Etudions la convergence de chacune des intégrales généralisées suivantes :

Section

- 1) L'application $t \rightarrow f(t)$ où $f(t) = \frac{1 - \cos t}{t^\alpha}$ est positive sur $]0, 1]$.
De plus, au voisinage de 0, on a

$$\cos t \underset{0}{\sim} 1 - \frac{t^2}{2}.$$

Donc,

$$\frac{1 - \cos t}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2t^\alpha} = \frac{1}{2t^{\alpha-2}}.$$

Alors $\int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t^\alpha} dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-2}} dt$ sont de même nature. Et puisque

l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-2}} dt$ converge ssi $\alpha - 2 < 1$, soit $\alpha < 3$,

il en est de même pour l'intégrale $\int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t^\alpha} dt$.

- 2) L'application $t \rightarrow f(t)$ où $f(t) = \frac{(\ln t)^3 \sin t}{(3 + \cos t) t^{\frac{4}{3}}}$ est de signe quelconque sur $[2, +\infty[$. On va étudier alors la convergence absolue de cette intégrale. On a pour tout $t \geq 2$,

$$|f(t)| = \frac{(\ln t)^3 |\sin t|}{(3 + \cos t) t^{\frac{4}{3}}}.$$

Or,

$$|\sin t| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\cos t| \leq 1,$$

donc,

$$(\ln t)^3 |\sin t| \leq (\ln t)^3. \quad (5.13)$$

Et,

$$2t^{\frac{4}{3}} \leq (3 + \cos t) t^{\frac{4}{3}} \leq 4t^{\frac{4}{3}}. \quad (5.14)$$

De (5.13) et (5.14), on déduit que

$$|f(t)| = \frac{(\ln t)^3 |\sin t|}{(3 + \cos t) t^{\frac{4}{3}}} \leq \frac{(\ln t)^3}{2t^{\frac{4}{3}}}, \quad \forall t \in [2, +\infty[.$$

Comme l'intégrale de Bertrand $\int_2^{+\infty} \frac{(\ln t)^3}{2t^{\frac{4}{3}}} dt$ est convergente pour

$\alpha = \frac{4}{3} > 1$, alors $\int_2^{+\infty} |f(t)| dt$ converge aussi par comparaison.

Par conséquent, $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ converge absolument, ce qui implique qu'elle est convergente.

3) L'application $t \rightarrow f(t)$ où $f(t) = \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^5}}$ est positive sur $]0, +\infty[$. On peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^5}} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^5}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^5}} dt.$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^5}} dt$ est convergente puisque au voisinage de 0, on a

$$\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^5}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}},$$

et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est convergente pour $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^5}} dt$ est aussi convergente. En effet, au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^5}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t^5}} = \frac{1}{t^2},$$

et comme l'intégrale généralisée de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est conver-

gente pour $\alpha = 2 > 1$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^5}} dt$ converge aussi par comparaison.

En conclusion, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^5}} dt$ converge comme étant la somme de deux intégrales convergentes.

4) L'application $t \rightarrow f(t)$ où $f(t) = e^{-t^2}$ est positive sur $[0, +\infty[$.
On écrit

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

L'intégrale définie $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ est convergente, car f est continue sur $[0, 1]$ donc intégrable sur $[0, 1]$.

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente. En effet, on pose :

$$g(t) = \frac{1}{t^2}, \quad t \in [1, +\infty[.$$

Alors,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente pour

$\alpha = 2 > 1$, alors $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est aussi convergente par le critère de comparaison.

On conclut que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente puisqu'elle est la somme de deux intégrales convergentes.

Exercice 5.7.4 En admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1$, montrer la convergence et calculer la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+2at} dt$, où $a \in \mathbb{R}$.

Solution 5.7.4 On remarque que,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+2at} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-a)^2+a^2} dt = e^{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\left(\frac{t-a}{\sqrt{\pi}}\right)^2} dt.$$

En faisant le changement de variable :

$$u = \frac{t-a}{\sqrt{\pi}},$$

on obtient,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+2at} dt = e^{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\left(\frac{t-a}{\sqrt{\pi}}\right)^2} dt = e^{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2} \frac{du}{\sqrt{\pi}}.$$

Or,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2} du = 1,$$

donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+2at} dt = \frac{e^{a^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Ce qui signifie que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+2at} dt$ est convergente et vaut $\frac{e^{a^2}}{\sqrt{\pi}}$.

Exercice 5.7.5 On considère l'intégrale généralisée suivante :

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}.$$

- 1) Cette intégrale est-elle convergente ? Justifier.
- 2) En déduire la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\sin \pi t}{\ln t} dt$.

Solution 5.7.5 1) $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$ est une intégrale de Bertrand convergente pour $\alpha = 1$ et $\beta = 2 > 1$.

2) Une intégration par parties permet de montrer la convergence de

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin \pi t}{\ln t} dt. \text{ En effet, on a}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin \pi t}{\ln t} dt := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{\sin \pi t}{\ln t} dt.$$

Une intégration par parties donne,

$$\int_2^A \frac{\sin \pi t}{\ln t} dt = \left[-\frac{\cos \pi t}{\pi \ln t} \right]_2^A - \frac{1}{\pi} \int_2^A \frac{\cos \pi t}{t (\ln t)^2} dt.$$

Comme $t \rightarrow \cos \pi t$ est bornée et $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\pi \ln A} = 0$, alors

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{\cos \pi A}{\pi \ln A} = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\cos \pi t}{\pi \ln t} \right]_2^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\cos \pi A}{\pi \ln A} + \frac{1}{\pi \ln 2} \right] = \frac{1}{\pi \ln 2}. \quad (5.15)$$

De plus, on a

$$\left| \frac{\cos \pi t}{t (\ln t)^2} \right| \leq \frac{1}{t (\ln t)^2}, \quad \forall t \geq 2.$$

D'après 1) l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t (\ln t)^2}$ converge et par comparaison l'intégrale

$\int_2^{+\infty} \frac{\cos \pi t}{t (\ln t)^2} dt$ converge absolument. Il en résulte que l'intégrale

$\int_2^{+\infty} \frac{\cos \pi t}{t (\ln t)^2} dt$ converge i.e.,

$$\int_2^{+\infty} \frac{\cos \pi t}{t (\ln t)^2} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{\cos \pi t}{t (\ln t)^2} dt \quad (5.16)$$

existe et est finie.

De (5.15) et (5.16), On conclut que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{\sin \pi t}{\ln t} dt = \frac{1}{\pi \ln 2} - \frac{1}{\pi} \int_2^{+\infty} \frac{\cos \pi t}{t (\ln t)^2} dt.$$

existe et est finie. Ce qui signifie que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\sin \pi t}{\ln t} dt$ est convergente.

Exercice 5.7.6 Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x dx$ converge.

Solution 5.7.6 Une intégration par partie donne :

$$\int_1^A e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x dx = \left[-\cos x e^{-\sqrt{\ln x}} \right]_1^A - \frac{1}{2} \int_1^A \frac{\cos x e^{-\sqrt{\ln x}}}{x \sqrt{\ln x}} dx, \quad \forall A \geq 1. \quad (5.17)$$

Par passage à la limite dans (5.17) quand $A \rightarrow +\infty$, on trouve

$$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x dx = \cos 1 - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos x e^{-\sqrt{\ln x}}}{x \sqrt{\ln x}} dx,$$

puisque $\lim_{A \rightarrow +\infty} -\cos A e^{-\sqrt{\ln A}} = 0$. Pour montrer que $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x dx$

converge, il suffit de montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x e^{-\sqrt{\ln x}}}{x \sqrt{\ln x}} dx$. Pour

tout $x > 1$, on a

$$\left| \frac{\cos x e^{-\sqrt{\ln x}}}{x \sqrt{\ln x}} \right| \leq \frac{e^{-\sqrt{\ln x}}}{x \sqrt{\ln x}}.$$

Comme,

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{\ln x}}}{x \sqrt{\ln x}} dx = \left[-2e^{-\sqrt{\ln x}} \right]_1^{+\infty} = -2,$$

d'où l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{\ln x}}}{x\sqrt{\ln x}} dx$ converge, et par comparaison l'intégrale

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x e^{-\sqrt{\ln x}}}{x\sqrt{\ln x}} dx$ converge absolument donc converge simplement. Et

ce qui montre que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x dx$ converge.

Exercice 5.7.7 Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue telle que

$\int_0^1 \frac{1}{t} f(t) dt$ converge.

1) Montrer que $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

2) On note $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que g est dérivable à droite en 0 et que $g'_d(0) = 0$.

Solution 5.7.7 1) L'application $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(x) = - \int_x^1 \frac{1}{t} f(t) dt$$

est continue sur $[0, 1]$, de classe C^1 sur $]0, 1]$ et on a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} f(x),$$

car f et l'application $t \rightarrow \frac{1}{t}$ sont continues sur $]0, 1]$.

D'où pour tout $B \in]0, 1]$,

$$\int_B^1 f(t) dt = \int_B^1 t \varphi'(t) dt.$$

Une intégration par parties donne :

$$\int_B^1 t\varphi'(t) dt = [t\varphi(t)]_B^1 - \int_B^1 \varphi(t) dt.$$

Ainsi,

$$\int_B^1 f(t) dt = B\varphi(B) - \int_B^1 \varphi(t) dt,$$

puisque $\varphi(1) = 0$.

Comme φ est continue sur $[0, 1]$, alors

$$\lim_{B \rightarrow 0} \int_B^1 f(t) dt = - \lim_{B \rightarrow 0} \int_B^1 \varphi(t) dt.$$

C'est à dire que,

$$\int_0^1 f(t) dt = - \int_0^1 \varphi(t) dt.$$

On conclut que $\int_0^1 f(t) dt$ converge puisque $\int_0^1 \frac{1}{t} f(t) dt$ converge par hypothèse.

2) Pour tout $x \in]0, 1]$,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x t\varphi'(t) dt.$$

Une intégration par parties donne :

$$\frac{1}{x} \int_0^x t\varphi'(t) dt = \frac{1}{x} \left([t\varphi(t)]_0^x - \int_0^x \varphi(t) dt \right) = \varphi(x) - \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(t) dt.$$

Ainsi,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \varphi(x) - \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(t) dt.$$

Par passage à la limite quand x tend vers 0, on trouve

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(t) dt \right).$$

Or φ est continue sur $[0, 1]$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \varphi(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(t) dt = \varphi(0).$$

Il en résulte que

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} := g'_d(0).$$

Ce qui signifie que g est dérivable à droite en 0 et que $g'_d(0) = 0$.

Chapitre 6

Intégrales dépendant d'un paramètre

Un problème qui se présente souvent en analyse est l'étude d'une fonction $F : T \rightarrow \mathbb{R}$, définie comme suit :

$$F(t) = \int_J f(t, x) dx, \quad t \in T,$$

où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et où l'on suppose que pour tout $t \in T$, l'intégrale $\int_J f(t, x) dx$ existe. Cette fonction dépend d'un paramètre t .

En général, on ne sait pas calculer explicitement cette intégrale, et donc la seule expression qu'on puisse avoir de F est sa forme implicite (intégrale) et non explicite. On va alors étudier les propriétés de continuité et de dérivabilité de F à partir de celles de f .

6.1 Intégrales propres à paramètre

Soient I un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $t \in I$, l'intégrale $\int_a^b f(t, x) dx$ existe. Ainsi, on définit la

fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$F(t) = \int_a^b f(t, x) dx.$$

Définition 6.1.1 $F(t)$ est appelée *intégrale propre dépendant du paramètre* $t \in I$.

Exemple 6.1.1 On considère la fonction F définie par :

$$F(t) = \int_0^1 \sin(tx) dx, \quad t \in]0, +\infty[\text{ et } x \in [0, 1].$$

On a, pour $t \in]0, +\infty[$, l'application $x \rightarrow \sin tx$ est continue. Donc F est bien définie. Un calcul simple donne,

$$F(t) = -\frac{\cos(tx)}{t} \Big|_0^1 = \frac{1 - \cos t}{t}, \quad t \in]0, +\infty[.$$

Remarque 6.1.1 Soit en particulier $I = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Alors

$$f(t, x) = f(n, x) = f_n(x)$$

On a la suite de fonctions $(f_n)_n$ et

$$F(t) = F(n) = F_n = \int_a^b f_n(t) dt.$$

6.1.1 Continuité de l'intégrale propre à paramètre

Ici, on va donner les conditions sur f pour que la fonction F définie ci-dessus soit continue. On a le résultat suivant :

Théorème 6.1.1 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue sur $I \times [a, b]$ alors $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$F(t) = \int_a^b f(t, x) dx,$$

est définie et continue sur I .

Preuve On effectue la preuve dans le cas d'un intervalle I ouvert. Montrons que F est continue sur I i.e., $\forall t_0 \in I$, F est continue en t_0 . Ce qui est encore équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in I, |t - t_0| < \alpha \implies |F(t) - F(t_0)| < \varepsilon.$$

Soit $t_0 \in I$ ouvert. Alors, il va exister $\delta > 0$ tel que

$$t_0 \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset I.$$

Comme f est continue sur $I \times [a, b]$, elle est donc continue sur l'intervalle $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [a, b]$ qui est compact. Donc f est uniformément continue sur ce compact i.e., pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta' > 0$ tel que pour tous $(t, x), (t', x') \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [a, b]$, on a

$$|t - t'| + |x - x'| < \delta' \implies |f(t, x) - f(t', x')| < \frac{\varepsilon}{(b - a)}.$$

En particulier pour $t' = t_0$ et $x = x'$, on a

$$|t - t_0| < \delta' \implies |f(t, x) - f(t, x_0)| < \frac{\varepsilon}{(b - a)}, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (6.1)$$

On pose $\alpha = \min(\delta, \delta')$ et soit $t \in I$. Alors si $|t - t_0| < \alpha$, donc

$$|t - t_0| < \delta \quad \text{et} \quad |t - t_0| < \delta'.$$

Ce qui implique, en utilisant (6.1), que

$$|f(t, x) - f(t, x_0)| < \frac{\varepsilon}{(b - a)}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Par conséquent, pour tout t tel que $|t - t_0| < \alpha$, on ait

$$\int_a^b |f(t, x) - f(t, x_0)| dx \leq \frac{\varepsilon}{(b - a)} \cdot (b - a) = \varepsilon.$$

Or,

$$|F(t) - F(t_0)| \leq \int_a^b |f(t, x) - f(t, x_0)| dx,$$

donc,

$$|F(t) - F(t_0)| < \varepsilon \quad \forall t : |t - t_0| < \alpha.$$

Ainsi F est continue en t_0 , $\forall t_0 \in I$.

La démonstration est analogue au précédent pour le cas $I = [c, d]$ ou $[c, d[$. ■

6.1.2 Dérivabilité de l'intégrale propre à paramètre

Après la continuité, on a étudié la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale. On a

Théorème 6.1.2 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :

1. f est continue sur $I \times [a, b]$.
2. f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}$ sur $I \times [a, b]$ et $\frac{\partial f}{\partial t}$ est continue sur $I \times [a, b]$.

Alors, la fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_a^b f(t, x) dx,$$

est de classe C^1 sur I . De plus, on a

$$\forall t \in I, \quad F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx.$$

Preuve Soit $t_0 \in I$ et soit $[u, v]$ un voisinage de t_0 dans I . L'ensemble $[u, v] \times [a, b]$ est un compact dans $\mathbb{R}^2$, et la fonction $\frac{\partial f}{\partial t}$ est continue sur cet ensemble puisque elle est par hypothèse continue sur $I \times [a, b]$. Elle y est donc uniformément continue. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$|t - t'| < \alpha \quad \text{et} \quad |x - x'| < \alpha$$

impliquent

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t', x') \right| < \varepsilon.$$

Donc, si $|t - t_0| < \alpha$ et $x \in [a, b]$, on a d'une part

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right| < \varepsilon.$$

D'autre part, si $|t - t_0| < \alpha$ et $x \in [a, b]$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]t, t_0[$ tel que

$$\frac{f(t, x) - f(t_0, x)}{t - t_0} = \frac{\partial f}{\partial t}(c_x, x).$$

Alors,

$$\left| \frac{f(t, x) - f(t_0, x)}{t - t_0} - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(c_x, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right| < \varepsilon.$$

Il en résulte que $\frac{f(t, x) - f(t_0, x)}{t - t_0}$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)$ uniformément

sur $[a, b]$ lorsque t tend vers t_0 , et donc $\int_a^b \frac{F(t, x) - F(t_0, x)}{t - t_0} dx$ tend vers

$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) dx$ lorsque t tend vers t_0 . Ceci montre que F est dérivable en t_0 et que

$$F'(t_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) dx.$$

De plus, il résulte du théorème de continuité précédent que F' est continue sur I . ■

Exemple 6.1.2 On considère l'intégrale propre dépendant d'un paramètre suivant :

$$F(t) = \int_0^1 \ln(t^2 + x^2) dx, \quad t \in [\alpha, \beta] \quad / \quad 0 < \alpha < \beta.$$

On pose

$$f(t, x) = \ln(t^2 + x^2).$$

Alors f est continue sur $[\alpha, \beta] \times [0, 1]$ de plus, f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}$ sur $[\alpha, \beta] \times [0, 1]$ définie par

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{2t}{t^2 + x^2},$$

et cette dérivée est continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^*$. En appliquant le théorème 6.1.2, on a

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_0^1 \frac{2t}{t^2 + x^2} dx, \\ &= 2 \int_0^1 \frac{\frac{dx}{t}}{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2}, \\ &= 2 \arctan \frac{x}{t} \Big|_0^1, \\ &= 2 \left(\arctan \frac{1}{t} \right), \quad t \in [\alpha, \beta] \quad 0 < \alpha < \beta. \end{aligned}$$

6.1.3 Cas où les bornes d'intégration dépendent du paramètre

Comme précédemment, on considère une fonction f de deux variables (t, x) où $t \in [\alpha, \beta]$ et $x \in [a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse aux propriétés de la fonction définie pour tout $t \in [\alpha, \beta]$ par :

$$F(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t, x) dx,$$

où les fonctions $\varphi, \psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ sont supposées continues et telles que pour tout $t \in [\alpha, \beta]$,

$$\varphi(t) \leq \psi(t).$$

On étudie la continuité et la dérivabilité de la fonction F . Alors, on a

Proposition 6.1.1 On suppose que :

1. f est continue sur $[\alpha, \beta] \times [a, b]$,
2. $\varphi, \psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ sont continues et

$$\varphi(t) \leq \psi(t) \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Alors, $F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $t \rightarrow F(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t, x) dx$ est continue sur $[\alpha, \beta]$.

Preuve Soit $t_0 \in [\alpha, \beta]$. On va démontrer que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0).$$

On a,

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t, x) dx, \\ &= \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} f(t, x) dx + \int_{\varphi(t_0)}^{\psi(t_0)} f(t, x) dx + \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} f(t, x) dx, \\ &= \int_{\varphi(t_0)}^{\psi(t_0)} f(t, x) dx + \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} f(t, x) dx - \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} f(t, x) dx. \end{aligned}$$

On note :

$$K(t) = \int_{\varphi(t_0)}^{\psi(t_0)} f(t, x) dx.$$

D'après le théorème 6.1.1, K est continue. Donc,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} K(t) = K(t_0) = \int_{\varphi(t_0)}^{\psi(t_0)} f(t_0, x) dx = F(t_0).$$

On note $M = \max \{|f(t, x)|, (t, x) \in [\alpha, \beta] \times [a, b]\}$, et par

$$N(t) = \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} f(t, x) dx.$$

Alors, on a

$$|N(t)| \leq M |\psi(t) - \psi(t_0)|.$$

Et par passage à la limite quand t tend vers t_0 , on trouve

$$\lim_{t \rightarrow t_0} N(t) = 0,$$

puisque ψ est continue sur $[\alpha, \beta]$. Aussi, on a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} P(t) = 0,$$

où

$$P(t) = \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} f(t, x) dx.$$

Enfin,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} (K(t) + N(t) - P(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} K(t) = F(t_0).$$

D'où F est continue sur $[\alpha, \beta]$. ■

Le résultat suivant donne la dérivabilité de la fonction F .

Proposition 6.1.2 *On suppose que :*

1. $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue,
2. $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe et est continue sur $[\alpha, \beta] \times [a, b]$.
3. $\varphi, \psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ sont dérivables.

Alors l'application $t \rightarrow F(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t, x) dx$ est dérivable et on a de plus,

$$F'(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx + \psi'(t) f(t, \psi(t)) - \varphi'(t) f(t, \varphi(t)).$$

Preuve Soit $t_0 \in [\alpha, \beta]$ et on montre que F est dérivable en t_0 . Alors, on peut écrire

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t, x) dx, \\ &= I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5, \end{aligned}$$

Section 6.1. Intégrales propres à paramètre

où,

$$I_1 = \int_{\varphi(t_0)}^{\psi(t_0)} f(t, x) dx,$$

$$I_2 = \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} f(t_0, x) dx,$$

$$I_3 = \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} f(t_0, x) dx,$$

$$I_4 = \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} (f(t, x) - f(t_0, x)) dx,$$

$$I_5 = \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} (f(t, x) - f(t_0, x)) dx;$$

La fonction $t \rightarrow \int_{\psi(t_0)}^{\varphi(t_0)} f(t, x) dx$ est dérivable de dérivée en t_0 égale à

$$\int_{\psi(t_0)}^{\varphi(t_0)} \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) dx \text{ d'après le théorème 6.1.2.}$$

La fonction $y \rightarrow \int_{\varphi(t_0)}^y f(t_0, x) dx$ est dérivable de dérivée en $\varphi(t_0)$ égale à $f(t_0, \varphi(t_0))$. En effet, pour $y, y+h$ deux points de $[a, b]$, on peut écrire

$$J(y+h) - J(y) = \int_{\varphi(t_0)}^{y+h} f(t_0, x) dx - \int_{\varphi(t_0)}^y f(t_0, x) dx = \int_y^{y+h} f(t_0, x) dx.$$

D'après la première formule de la moyenne, il vient

$$\int_y^{y+h} f(t_0, x) dx = hf(t_0, c),$$

où c est compris entre y et $y+h$. On peut donc écrire, si $h \neq 0$:

$$\frac{J(y+h) - J(y)}{h} = f(t_0, c).$$

Fixons y . Quand $h \rightarrow 0$, $c \rightarrow y$, donc par continuité de f ,

$$f(t_0, c) \rightarrow f(t_0, y).$$

Section 6.1. Intégrales propres à paramètre

Ce qui montre que J est dérivable en y et que

$$J'(y) = f(t_0, y).$$

En particulier, J est dérivable en $\varphi(t_0)$ et on a

$$J'(y) = f(t_0, \varphi(t_0)).$$

D'où, en composant par la fonction φ , la fonction $t \rightarrow \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} f(t_0, x) dx$ est dérivable de dérivée en t_0 égale à $\varphi'(t_0) f(t_0, \varphi(t_0))$.

Un raisonnement analogue à ce qui précède montre que la fonction

$$t \rightarrow \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} f(t_0, x) dx$$

est dérivable de dérivée en t_0 égale à $\psi'(t_0) f(t_0, \psi(t_0))$.

Finalement, on peut écrire

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} (f(t, x) - f(t_0, x)) dx \right| \\ & \leq \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} |f(t, x) - f(t_0, x)| dx, \\ & \leq |\varphi(t) - \varphi(t_0)| \sup_{x \in [a, b]} |f(t, x) - f(t_0, x)|. \end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, b]} |f(t, x) - f(t_0, x)| & \leq |t - t_0| \sup_{x \in [a, b], t \in [\alpha, \beta]} \left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} \right| \\ & \leq M |t - t_0|. \end{aligned}$$

Par continuité de la fonction φ , le terme $|\varphi(t) - \varphi(t_0)|$ tend vers 0 quand t tend vers t_0 et ceci implique que

$$\left| \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} (f(t, x) - f(t_0, x)) dx \right| = o(t - t_0).$$

De même, on a

$$\left| \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} (f(t, x) - f(t_0, x)) dx \right| = o(t - t_0).$$

On déduit de ces résultats que la fonction F est bien dérivable en t_0 avec

$$F'(t_0) = \int_{\psi(t_0)}^{\varphi(t_0)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx - \varphi'(t_0) f(t_0, \varphi(t_0)) + \psi'(t_0) f(t_0, \psi(t_0)).$$

Puisque t_0 est quelconque, ceci montre bien le théorème. ■

6.2 Intégrale généralisée (impropre) à paramètre

Le théorème 6.1.1 n'est plus valable pour les intégrales généralisées comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 6.2.1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(t, x) = \begin{cases} \frac{\sin tx}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Il est clair que f est continue sur tout $\mathbb{R}^2$, mais pour $x \neq 0$, on a

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } t > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Ce qui montre que F n'est pas continue en 0.

6.2.1 Convergence uniforme de l'intégrale généralisée à paramètre

Afin d'établir un résultat de continuité pour les intégrales généralisées, il est nécessaire d'introduire la notion de convergence uniforme. Pour cela, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On

Section 6.2. Intégrale généralisée (impropre) à paramètre

suppose ou bien que $b = +\infty$ ou bien que $b < +\infty$ et que pour certains $t \in I$, la fonction $x \rightarrow f(t, x)$ n'est pas définie en b . Et soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I par l'intégrale généralisée :

$$F(t) = \int_a^b f(t, x) dx.$$

Définition 6.2.1 On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t, x) dx$ converge uniformément sur I si

1. elle converge simplement, c'est à dire,

$$\forall t \in I, \int_a^b f(t, x) dx \text{ converge,} \quad (6.2)$$

2. et on a de plus,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall u \in]\beta, b[\implies \left| \int_u^b f(t, x) dx \right| < \varepsilon, \quad \forall t \in I.$$

6.2.2 Critère de Cauchy de la convergence uniforme

Les critères permettant de s'assurer qu'une intégrale converge uniformément ressemblent fort à ceux des séries. Ici, on donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre soit uniformément convergente.

On a le critère de Cauchy suivant :

Théorème 6.2.1 Soit $f : I \times [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, ($b \leq +\infty$) une fonction localement intégrable sur $[a, b[$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

1. $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$ converge uniformément sur I .

$$2. \forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall u, v \in [a, b[\text{ / } u, v > \beta \implies \left| \int_u^v f(t, x) dx \right| < \varepsilon, \\ \forall t \in I.$$

Preuve On suppose que $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$ converge uniformément sur I .

Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall u \in [a, b[\text{ / } u > \beta \implies \left| \int_u^b f(t, x) dx \right| < \varepsilon/2, \quad \forall t \in I. \quad (6.3)$$

Soient $u, v \in [a, b[$ tels que $u, v > \beta$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_u^v f(t, x) dx \right| &= \left| \int_u^b f(t, x) dx + \int_b^v f(t, x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_u^b f(t, x) dx \right| + \left| \int_b^v f(t, x) dx \right|. \end{aligned} \quad (6.4)$$

De (6.3) et (6.4), on déduit

$$\left| \int_u^v f(t, x) dx \right| < \varepsilon, \quad \forall u, v \in [a, b[\text{ / } u, v > \beta.$$

Inversement, on suppose que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall u, v \in [a, b[\text{ / } u, v > \beta \implies \left| \int_u^v f(t, x) dx \right| < \varepsilon.$$

Par passage à la limite quand v tend vers b , on obtient la définition de la convergence uniforme de $\int_a^b f(t, x) dx$. ■

6.2.3 Convergence normale de l'intégrale généralisée à paramètre

Comme pour les séries, on introduit la notion de convergence normale pour établir la convergence uniforme des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ($b \leq +\infty$) une fonction. Soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I par l'intégrale généralisée :

$$F(t) = \int_a^b f(t, x) dx.$$

Définition 6.2.2 Pour tout $x \in [a, b[$, on note f_x l'application partielle $t \rightarrow f(t, x)$. On rappelle que

$$\|f_x\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t, x)|.$$

On dit que l'intégrale généralisée $F(t)$ converge normalement, si l'intégrale $\int_a^b \|f_x\|_\infty dx$ converge.

La proposition suivante montre que la convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Proposition 6.2.1 Si une intégrale converge normalement sur un intervalle, alors elle converge uniformément sur ce même intervalle.

Preuve Par définition de la norme uniforme, pour tout $t \in I$,

$$|f(t, x)| \leq \|f_x\|_\infty.$$

Par le théorème de comparaison des intégrales, l'intégrale $\int_a^b \|f_x\|_\infty dx$ converge donc $\int_a^b f(t, x) dx$ converge absolument. D'autre part, on a pour $A \in [a, b[$

$$\begin{aligned} |F(t) - F_A(t)| &:= \left| \int_a^b f(t, x) dx - \int_a^A f(t, x) dx \right|, \\ &\leq \int_A^b |f(t, x)| dx, \\ &\leq \int_A^b \|f_x\|_\infty dx. \end{aligned}$$

Le dernier majorant est le reste d'une intégrale convergente, il ne dépend pas de t . Donc la convergence est bien uniforme. ■

Remarque 6.2.1 Il n'est pas indispensable de calculer $\|f_x\|_\infty$ explicitement : il suffit d'en connaître un majorant de x dont l'intégrale soit convergente.

Corollaire 6.2.1 Soit g une fonction définie sur $[a, b[$, telle que l'intégrale $\int_a^b g(x)dx$ soit convergente et telle que

$$\forall t \in I, \forall x \in [a, b[, \quad |f(t, x)| \leq g(x).$$

Alors l'intégrale $F(t)$ est normalement convergente, donc uniformément convergente.

L'utilisation de ce corollaire est très fréquente, il est connu sous le nom de convergence dominée.

Exemple 6.2.2 L'intégrale généralisée à paramètre suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{1+x^2} dx$$

est normalement convergente. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in I$, on a

$$\left| \frac{\sin tx}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} = g(x),$$

et comme l'intégrale,

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2},$$

donc convergente. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{1+x^2} dx$ converge normalement, donc uniformément.

6.2.4 Continuité de l'intégrale généralisée à paramètre

Le résultat suivant donne des conditions sous lesquelles l'intégrale généralisée est continue. On a alors,

Théorème 6.2.2 *On suppose que :*

1. la fonction $f : I \times [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ($b \leq +\infty$) est continue,

2. $\int_a^b f(t, x) dx$ converge uniformément sur I .

Alors l'application $t \rightarrow F(t) = \int_a^b f(t, x) dx$ est continue.

Preuve Soit $(A_n)_n$ une suite de réels, telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = b.$$

Pour tout $n \in N$, on pose :

$$F_{A_n}(t) = \int_a^{A_n} f(t, x) dx.$$

Pour tout n , fixé, la fonction F_{A_n} est continue, par application du théorème 6.1.1. Par définition, la suite de fonctions converge simplement vers F . Il suffit de montrer que la convergence est uniforme pour en déduire la continuité de F , par le théorème 2.1.2. C'est précisément ce qu'affirme l'hypothèse. ■

6.2.5 Dérivabilité de l'intégrale généralisée à paramètre

Ici, on étudie la dérivation des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre. Cependant, on a

Théorème 6.2.3 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :*

1. la fonction $f : I \times [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ($b \leq +\infty$) est continue,

2. $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe et est continue sur $I \times [a, b[$,

Section 6.2. Intégrale généralisée (imprononçable)

3. $\int_a^b f(t, x) dx$ converge simplement sur I ,

4. $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$ converge uniformément sur I .

Alors l'application $t \longrightarrow F(t) = \int_a^b f(t, x) dx$ est de classe C^1 et de plus, on a pour tout $t \in I$

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx.$$

Preuve Un raisonnement analogue à celui de la preuve précédente et par application du théorème 2.1.4, on obtient le résultat. ■

6.3 Exercices avec solutions

Exercice 6.3.1 Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction F par :

$$F(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin t} dt.$$

- 1) Vérifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que F est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer F' .
- 3) Montrer que F est de classe C^2 et vérifie :

$$xF''(x) + F'(x) - xF(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Solution 6.3.1 On remarque que $F(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x, t) dt$, où

$$f(x, t) = e^{-x \sin t},$$

est une intégrale propre dépendant du paramètre $x \in \mathbb{R}$.

1) f est une fonction continue sur $\mathbb{R} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale (cf. Théorème 6.1.1), F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur $\mathbb{R} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin t e^{-x \sin t},$$

et cette dérivée est continue sur $\mathbb{R} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. En appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégrale (cf. Théorème 6.1.2), on aura F de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et de plus

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt, \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sin t e^{-x \sin t} dt. \end{aligned}$$

3) On pose :

$$G(x) = F'(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h(x, t) dt,$$

où

$$h(x, t) = -\sin t e^{-x \sin t}.$$

L'application h est continue sur $\mathbb{R} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et de plus

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \sin^2 t e^{-x \sin t},$$

existe et est continue sur $\mathbb{R} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, par application du théorème de dérivation sous le signe intégrale (cf. Théorème 6.1.2), il vient que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\begin{aligned} G'(x) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt, \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t e^{-x \sin t} dt. \end{aligned}$$

Ainsi F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on a,

$$F''(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t e^{-x \sin t} dt.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sin t e^{-x \sin t} dt \\ &= [\cos t e^{-x \sin t}]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 t e^{-x \sin t} dt. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F'(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 t e^{-x \sin t} dt.$$

Et comme

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t,$$

donc,

$$F'(x) = x \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin t} dt - x \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t e^{-x \sin t} dt.$$

Ce qui signifie encore,

$$F'(x) = xF(x) - xF''(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent,

$$F'(x) - xF(x) + xF''(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6.3.2 On considère les fonctions définies par :

$$F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

- 1) Montrer que F et G sont de classe C^1 et calculer F' et G' .
- 2) Montrer que $F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Solution 6.3.2 $F(x)$ et $G(x)$ sont des intégrales propres dépendant du paramètre x . On pose :

$$f(x, t) = e^{-t^2}, \quad g(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \quad \text{et} \quad H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} e^{-t^2} dt,$$

et où $u(x) = 0$, $v(x) = x$.

- 1) f étant continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, u et v sont continues sur $\mathbb{R}$, alors H est continue sur $\mathbb{R}$ (cf. Proposition 6.1.1). Il résulte que F est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit de deux fonctions continues. De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 0,$$

existe et est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Les fonctions u et v sont dérivable sur $\mathbb{R}$, alors par application de la proposition de dérivation (cf. Proposition 6.1.2), H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned} H'(x) &= \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + v'(x)f(x, v(x)) - u'(x)f(x, u(x)), \\ &= f(x, x), \\ &= e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Ainsi H est classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque $F = H^2$, et on a

$$F'(x) = [H^2]'(x) = 2H'(x)H(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

g est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$$

existe et est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale (cf. Théorème 6.1.2), il vient que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\begin{aligned} G'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt, \\ &= \int_0^1 -2xe^{-x^2(1+t^2)} dt. \end{aligned}$$

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F'(x) + G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt.$$

En faisant dans $\int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt$ le changement de variable $u = xt$, on obtient

$$\int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt = \int_0^x \frac{e^{-u^2}}{x} du.$$

On déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$F'(x) + G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2xe^{-x^2} \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{x} dt = 0.$$

Ainsi,

$$F(x) + G(x) = c, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particulier pour $x = 0$, on trouve

$$c = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

On conclut que

$$F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3) De la question précédente, on a

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - G(x).$$

Par passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{4} - \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x).$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \int_0^1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \right) dt = 0,$$

donc,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Ce qui signifie encore que

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Il en résulte que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 6.3.3 Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de F .
- 2) Démontrer que F est décroissante sur son domaine de définition.
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

Solution 6.3.3 $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$ est une intégrale généralisée (ou impropre) dépendant du paramètre x .

- 1) Le domaine de définition F est le domaine de la convergence simple de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.

Section 6.3. Exercices avec solutions

Pour $x > 0$, on a

$$\frac{1}{1+t^x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^x}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$ converge si et seulement si $x > 1$,

donc par comparaison l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$ converge ssi $x > 1$.

Pour $x < 0$, on peut écrire

$$\frac{1}{1+t^x} = \frac{1}{1+t^{-y}},$$

où $y = -x$. Comme $y > 0$, on a alors

$$\frac{1}{1+t^{-y}} = \frac{t^y}{1+t^y} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^y}{t^y} = 1.$$

Par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$ est divergente puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} dt$ diverge.

Pour $x = 0$, il est clair que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2}$ diverge.

En conclusion, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$ converge ssi $x > 1$. Il en résulte que le domaine de définition de F est :

$$D_F =]1, +\infty[.$$

2) Soient $x, y \in D_F$ tels que $x \leq y$. Alors,

$$t^x \leq t^y$$

Ce qui implique que

$$\frac{1}{1+t^x} \geq \frac{1}{1+t^y}.$$

Ainsi,

$$F(x) \geq F(y).$$

Ce qui signifie que F est décroissante sur son domaine de définition.

3) Pour tout $x > 1$, on a

$$0 < \frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{t^x}.$$

Ainsi,

$$0 < \int_1^A \frac{1}{1+t^x} dt \leq \int_1^A \frac{1}{t^x} dt \quad \forall A > 1.$$

Par passage à la limite quand A tend vers $+\infty$, on trouve

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^x} dt \leq \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{t^x} dt.$$

Or,

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{t^x} dt &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1} \right]_1^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{A^{-x+1}}{-x+1} - \frac{1}{-x+1} \right] = -\frac{1}{-x+1}, \end{aligned}$$

puisque $A > 1$. D'où,

$$0 \leq F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^x} dt \leq \frac{1}{-x+1}.$$

Par passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on conclut que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

Exercice 6.3.4 Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t} \sin t dt$.

1) Calculer explicitement $F'(x)$ et en déduire $F(x)$.

Section 6.3. Exercices avec solutions

2) En admettant la continuité de F en 0, calculer la valeur de I où

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Solution 6.3.4 $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$, où $f(x, t) = \frac{e^{-tx}}{t} \sin t$, est une intégrale impropre dépendant du paramètre x .

1) L'application f est continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. De plus, puisque $|\sin t| \leq t$ pour tout $t > 0$, on a

$$\left| \frac{e^{-tx}}{t} \sin t \right| \leq e^{-tx}, \quad \forall x > 0.$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-tx} dt$ converge car

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \left[\frac{-1}{x} e^{-tx} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t} \sin t dt$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin t e^{-xt},$$

et cette dérivée est continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. De plus, pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = |-\sin t e^{-xt}| \leq e^{-xt}. \quad (6.5)$$

On peut majorer le second membre de l'inégalité (6.5) de façon à éliminer les x . Soit alors $a > 0$ et $x \geq a$, la majoration (6.5) implique.

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at}.$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge, car on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \left[\frac{-1}{a} e^{-at} \right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{a},$$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$. D'après le théorème de dérivation (cf. théorème 6.2.3), on déduit que F est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, et est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} -\sin t e^{-xt} dt.$$

Or,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} -e^{it} e^{-xt} dt \right) = \operatorname{Im} \left[-\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} \right]_0^{+\infty} \\ &= \operatorname{Im} \left(-\frac{1}{x-i} \right) = -\frac{1}{1+x^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

On en déduit qu'il existe une constante C telle que

$$F(x) = -\arctan x + C, \quad \forall x > 0. \quad (6.6)$$

2) Pour tout $x > 0$, on a

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-tx}}{t} \sin t \right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}.$$

Par passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0. \quad (6.7)$$

Section 6.3. Exercices avec solutions

De (6.7) et (6.6), on déduit que

$$C = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi,

$$F(x) = -\arctan x + \frac{\pi}{2}, \quad \forall x > 0. \quad (6.8)$$

3) De la continuité de F en 0 et du fait qu'on a (6.8), on conclut que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

D'où,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6.3.5 Soit la fonction f définie par :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx.$$

- 1) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
- 2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 3) Calculer F' et vérifier que

$$F'(t) - F(t) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}, \quad \forall t > 0.$$

Solution 6.3.5 $F(t) = \int_0^{+\infty} f(t, x) dx$, où $f(t, x) = \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$ est une intégrale généralisée dépendant du paramètre t .

- 1) Pour montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+$, il suffit de montrer que

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. Alors pour tout $t \geq 0$, on a

$$0 < \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ est convergente car

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$$

alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$ converge aussi par comparaison. Il en

résulte que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Et ce qui montre bien que F est définie sur $\mathbb{R}_+$.

L'application f est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. De plus l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$

converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ puisque

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x)| = \frac{1}{1+x^2},$$

et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ converge. Il résulte que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Par application du théorème de continuité des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre (cf. théorème 6.2.2), on déduit que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}$ sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, +\infty[$ définie par

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = -x^2 \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2},$$

et cette dérivée est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, +\infty[$. De plus, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, +\infty[$, on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| = \left| -x^2 \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} \right| \leq e^{-tx^2}. \quad (6.9)$$

On fait remarquer qu'on peut majorer le second membre de l'inégalité (6.9) de façon à éliminer les x . Soit alors $a > 0$ et $t \geq a$. la majoration (6.9) donne

$$\forall t \in [a, +\infty[, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq e^{-ax^2}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$ converge car c'est la somme de deux intégrales convergentes. En effet, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \int_0^1 e^{-ax^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-ax^2} dx.$$

avec $\int_0^1 e^{-ax^2} dx$ est une intégrale d'une fonction continue sur $[0, 1]$,

donc existe et $\int_1^{+\infty} e^{-ax^2} dx$ est aussi convergente puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-ax^2} = 0 \implies \int_1^{+\infty} e^{-ax^2} dx \text{ converge.}$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. En appliquant le théorème de dérivation des intégrales généralisées à paramètres (cf. théorème 6.2.3), on déduit que F est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, et est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a pour tout $t > 0$,

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx.$$

3) On a ainsi

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} -x^2 \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx \quad \forall t > 0.$$

De plus,

$$F'(t) - F(t) = \int_0^{+\infty} -x^2 \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} -e^{-tx^2} dx,$$

puisque les deux intégrales convergent.

En faisant, dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} -e^{-tx^2} dx$, le changement de variable $u^2 = tx^2$, on trouve

$$\int_0^{+\infty} -e^{-tx^2} dx = -\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = -\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Par conséquent,

$$F'(t) - F(t) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}, \quad \forall t > 0.$$

Exercice 6.3.6 On considère l'intégrale généralisée $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t} dt$.

- 1) Pour quelles valeurs de α la fonction F est-elle définie ?
- 2) Montrer que $\frac{1}{2(1+\alpha)} \leq F(\alpha) \leq \frac{1}{(1+\alpha)}$. En déduire $\lim_{\alpha \rightarrow -1} F(\alpha)$ et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} F(\alpha)$.
- 3) En utilisant une identité remarquable, calculer $F(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire une façon de définir $\ln 2$.
- 4) Etudier le sens de variation de F .

Solution 6.3.6 $F(\alpha)$ est une intégrale d'une fonction positive et continue sur $]0, 1]$.

- 1) On a au voisinage de 0,

$$\frac{t^\alpha}{1+t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{-\alpha}}.$$

Comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{-\alpha}} dt$ converge si et seulement si $-\alpha < 1$,

soit $\alpha > -1$, il en va de même de $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t} dt$. Ainsi cette intégrale converge ssi $\alpha > -1$. La fonction F est définie sur $] -1, +\infty[$.

- 2) Pour tout $0 < t \leq 1$, on a

$$\frac{t^\alpha}{2} \leq \frac{t^\alpha}{1+t} \leq t^\alpha.$$

Une intégration sur $[0, 1]$ donne

$$\frac{1}{2(1+\alpha)} = \int_0^1 \frac{t^\alpha}{2} dt \leq F(\alpha) \leq \int_0^1 t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1}, \quad \forall \alpha > -1.$$

On en déduit donc :

$$\lim_{\alpha \xrightarrow{\geq} -1} F(\alpha) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} F(\alpha) = 0.$$

3) On rappelle que,

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-t)^{n-1} = \frac{1 - (-t)^n}{1 + t}, \quad \forall t \neq -1.$$

D'où,

$$(-1)^n \frac{t^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k.$$

Or,

$$F(n) = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt,$$

donc,

$$(-1)^n F(n) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (-1)^k t^k dt.$$

Par conséquent,

$$(-1)^n F(n) = \ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = 0$, on en déduit :

$$\ln 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right).$$

4) Soit $0 < t < 1$, l'application $\alpha \in \mathbb{R} \rightarrow t^\alpha$ est décroissante. Soient $a, b \in]-1, +\infty[$ avec $a < b$ alors, on a

$$t^a \geq t^b, \quad \forall t \in]0, 1[.$$

Ce qui implique que,

$$F(a) - F(b) = \int_0^1 \frac{t^a - t^b}{1+t} dt \geq 0.$$

D'où F est décroissante de $+\infty$ à 0, en passant par la valeur $F(0) = \ln 2$.

Table des matières

Notations	vi
Avant-propos	vii
1 Séries numériques	1
1.1 Définitions et théorèmes généraux	1
1.1.1 Notion de séries	2
1.1.2 Nature d'une série numérique	5
1.1.3 Condition nécessaire de convergence	8
1.1.4 Propriété des séries numériques	11
1.1.5 Reste d'une série convergente	12
1.1.6 Critère de Cauchy pour les séries numériques	15
1.2 Séries numériques à termes positifs	16
1.2.1 Théorèmes de comparaison	21
1.2.2 Règle de Cauchy	23
1.2.3 Règle de d'Alembert	25
1.2.4 Règle de Duhamel	28
1.2.5 Règle de Riemann ou " $n^{\alpha}u_n$ "	28
1.2.6 Comparaison d'une série à une intégrale.	32
1.2.7 Encadrement du reste d'une série	33
1.3 Séries alternées	33
1.3.1 Théorème de Leibniz	35
1.3.2 Encadrement du reste d'une série alternée	37
1.4 Séries à termes de signes quelconques	

1.4.1	Convergence absolue	37
1.4.2	Semi-convergence	39
1.4.3	Règle de Cauchy et de d'Alembert pour les séries à termes de signe quelconque	39
1.4.4	Critère de convergence d'Abel	41
1.4.5	Groupement des termes	45
1.4.6	Changement de l'ordre des termes	49
1.4.7	Produit de Cauchy de deux séries	50
1.5	Exercices avec solutions	54
2	Suites et séries de fonctions	83
2.1	Suites de fonctions	83
2.1.1	Convergence simple	84
2.1.2	Convergence uniforme	85
2.1.3	Théorème de Dini pour les suites de fonctions . . .	88
2.1.4	Critère de Cauchy pour la convergence uniforme .	90
2.1.5	Convergence uniforme et continuité	91
2.1.6	Convergence uniforme et intégration sur un segment	94
2.1.7	Convergence uniforme et dérivation	96
2.2	Séries de fonctions	100
2.2.1	Domaine de convergence	100
2.2.2	Convergence simple et uniforme	101
2.2.3	Convergence absolue	104
2.2.4	Convergence normale	105
2.2.5	Lien entre les différentes notions de convergence .	107
2.2.6	Continuité d'une série uniformément convergente .	112
2.2.7	Intégration d'une série uniformément convergente .	113
2.2.8	Dérivation d'une série uniformément convergente .	113
2.2.9	Théorème de Dini pour les séries de fonctions . . .	115
2.2.10	Critères de la convergence uniforme	115
2.2.11	Critère de Cauchy	115
2.2.12	Critère d'Abel	116

2.3 Exercices avec solutions	117
3 Séries entières	151
3.1 Suites et séries à valeurs complexes	151
3.1.1 Convergence d'une suite de complexes	152
3.1.2 Convergence d'une série à termes complexes	153
3.2 Séries entières	156
3.2.1 Rayon de convergence d'une série entière	159
3.2.2 Propriétés des séries entières	164
3.2.3 Continuité de la somme d'une série entière	165
3.2.4 Dérivation et intégration de la somme d'une série entière	165
3.2.5 Continuité au bord de l'intervalle de convergence .	166
3.2.6 Opérations sur les séries entières	169
3.2.7 Développements en série entière	171
3.2.8 Développements en série entière des fonctions au voisinage de 0	176
3.2.9 Exponentielle complexe	181
3.2.10 Fonctions trigonométriques complexes	181
3.2.11 Fonctions hyperboliques complexes	182
3.2.12 Logarithme complexe	182
3.3 Exercices avec solutions	184
4 Séries de Fourier	199
4.1 Séries trigonométriques	199
4.1.1 Fonctions périodiques	199
4.1.2 Fonctions continues par morceaux	200
4.1.3 Fonctions dérivables par morceaux	200
4.1.4 Fonctions 2π -périodique continues sur $\mathbb{R}$	201
4.1.5 Fonctions 2π -périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$	202
4.1.6 Séries trigonométriques	204
4.1.7 Convergence d'une série trigonométrique	204
4.1.8 Système trigonométrique	205

4.2	Séries de Fourier	206
4.2.1	Série de Fourier d'une fonction périodique	206
4.2.2	Séries de Fourier de fonctions paires et impaires	210
4.2.3	Convergence simple des séries de Fourier : Théorème de Dirichlet	214
4.2.4	Séries de Fourier de fonctions de période quelconque	218
4.2.5	Séries de Fourier sous la forme complexe	220
4.2.6	Inégalité de Bessel	221
4.2.7	Egalité de Parseval	222
4.3	Exercices avec solutions	223
5	Intégrales généralisées (ou impropres)	240
5.1	Intégrales généralisées sur une demi-droite	240
5.1.1	Propriétés des intégrales généralisées convergentes	243
5.2	Cas des fonctions de signe constant sur l'intervalle I	245
5.2.1	Critère de comparaison	246
5.2.2	Critère d'équivalence	247
5.3	Critère de convergence de Cauchy	249
5.4	Intégrales généralisées absolument convergentes	250
5.4.1	Intégrale généralisée absolument convergente	251
5.4.2	Intégrale généralisée semi-convergente	253
5.4.3	Théorème d'Abel pour les intégrales généralisées	254
5.5	Intégrales généralisées des fonctions non bornées	256
5.5.1	Intégrales généralisées de fonctions définies sur $[a, b[$	256
5.5.2	Intégrales généralisées de fonctions définies sur $]a, b]$	258
5.5.3	Intégrale généralisée de fonctions définies sur $]a, b[$	259
5.6	Calcul pratique des intégrales généralisées	260
5.6.1	Application de la fonction primitive	261
5.6.2	Intégration par parties	262
5.6.3	Changement de variable	263
5.7	Exercices avec solutions	266

6	Intégrales dépendant d'un paramètre	283
6.1	Intégrales propres à paramètre	283
6.1.1	Continuité de l'intégrale propre à paramètre	284
6.1.2	Dérivabilité de l'intégrale propre à paramètre . .	286
6.1.3	Cas où les bornes d'intégration dépendent du pa- ramètre	288
6.2	Intégrale généralisée (impropre) à paramètre	293
6.2.1	Convergence uniforme de l'intégrale généralisée à paramètre	293
6.2.2	Critère de Cauchy de la convergence uniforme . . .	294
6.2.3	Convergence normale de l'intégrale généralisée à paramètre	295
6.2.4	Continuité de l'intégrale généralisée à paramètre .	298
6.2.5	Dérivabilité de l'intégrale généralisée à paramètre .	298
6.3	Exercices avec solutions	299
		316

bibliographie