1850 exercices de mathématiques

pour l'oral du CAPES de mathématiques et des concours des Grandes Ecoles

réunis par

Luc MOISOTTE

Agrégé de Mathématiques
Docteur ès-Sciences

dunod

INTRODUCTION

Le CAPES de Mathématiques est un concours devenu difficile qu'il s'agit de préparer maintenant de la même manière que tout autre grand concours. Aussi nous a-t-il semblé opportun de présenter sous forme systématique un très large échantillon d'exercices posés à l'oral ces dernières années (très exactement entre 1973 et 1977) afin de constituer par là un lot important d'archives de base utilisables par tout candidat sérieux, comme cela se fait depuis de très nombreuses années pour les autres concours, par livres ou revues spécialisées.

Le Rapport Officiel du CAPES 1977 (SEVPEN, 13, rue du Four, Paris 6^{e}) cerne d'ailleurs très précisément ce qu'il est attendu des candidats, tous au moins licenciés ès Sciences Mathématiques, et il nous a paru extrêmement instructif d'en donner ici les extraits les plus significatifs à cet égard :

> « La diminution rapide, au cours des dernières années, du nombre des places mises au concours (1 400 en 1974, 1 260 en 1975, 1 000 en 1976, 780 en 1977, 574 en 1978), le nombre de candidats restant presque constant, a transformé le CAPES de Mathématiques en une sélection de plus en plus sévère : des épreuves orales très largement supérieures à la moyenne sont désormais nécessaires pour être reçus... *Il s'ensuit qu'un entraînement systématique à la recherche des exercices est donc indispensable pour réussir la deuxième épreuve.*
>
> Le jugement du Jury, lors des épreuves orales, s'appuie essentiellement sur les deux critères suivants : connaissances et culture mathématique du candidat, et comportement face à un public. C'est pourquoi il semble possible de donner aux candidats à venir les conseils suivants...
>
> *Exercice* – Le candidat doit trouver, en vingt-cinq minutes environ, un ou plusieurs exercices dont la résolution ne dépasse pas la compétence d'un bon bachelier. Le Jury aide ou n'aide pas le candidat, cela dépend de la difficulté de l'exercice, du caractère déroutant de l'énoncé, des réactions du candidat (en cas de «blocage» de celui-ci, par exemple).
>
> Un futur professeur doit être capable de résoudre seul les exercices qui seront posés à ses élèves. Cela suppose une bonne connaissance des mathématiques classiques du second degré, un certain nombre de «tours de main», du dynamisme et de l'imagination.
>
> Les conseils donnés ci-dessus pour l'énoncé restent valables. Voici d'autres éléments positifs d'appréciation :
>
> – candidat actif, qui essaie de sa propre initiative diverses voies, même si celles-ci se révèlent trop longues ou infructueuses ;
> – candidat n'hésitant pas à faire des dessins, de manière à se servir le plus efficacement de son intuition. Dans le même ordre d'idées, un candidat qui teste l'énoncé par des exemples simples convenablement choisis est très apprécié ;
> – capacité à voir et à citer correctement les théorèmes nécessaires ;
> – connaissance des méthodes et « astuces » courantes.
>
> Au contraire, que peut penser le Jury d'un candidat muet ou se laissant passivement guider ? »

Il est bien clair que beaucoup de questions ici rassemblées feraient bonne figure à l'oral de nombre de Grandes Ecoles, et sont donc *réellement* du niveau de la classe de Mathématiques Spéciales (ou DEUG de nos Universités). Pour être plus clair et plus concret, donnons un exemple de ce qui peut se passer pratiquement à l'oral avec un bon candidat. Considérons un certain exercice classique sur les séries, par exemple celui où l'on prouve que: $\Sigma 1/n^2 = \pi^2/6$. Au CAPES, il est inenvisageable de poser telle quelle cette question. Mais on pourra commencer par demander de prouver l'inégalité: $u_n = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/n^2 \leqslant 2$. Si le candidat franchit victorieusement ce premier pas, on lui demandera très certainement de prouver l'existence d'une limite ξ pour la suite (u_n), ce qui devrait se passer sans trop d'encombres. Après cela, si tout a été expédié en cinq minutes, tout devient permis... *dans le cadre du programme de Terminales C* ! Par exemple, d'un coup d'intégration par parties astucieux, laissé à la sagacité du candidat, pourquoi ne pas envisager l'intégrale $\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t \, dt$? De là découlera la formule explicite de l'exercice 14.23.10 de la page 125 de ce livre; et alors, s'il restait quelques-unes des précieuses vingt-cinq minutes imparties au candidat vraiment valeureux qui en serait arrivé là, il va de soi qu'on demandera de prouver que $\xi = \pi^2/6$, ce qui découle d'une simple majoration du reste sous forme intégrale... Et voilà !

L'exemple précédent, s'il est un peu tendancieux, est là pour montrer comment le désossement d'un exercice très classique de nos «taupes» peut devenir, à la rigueur, un exercice de Terminales C. L'exemple est donné d'ailleurs depuis quelques années par plusieurs problèmes de Baccalauréat ! A l'opposé, des exercices extraordinairement faciles, recueillis dans ce livre, ont été donnés sans suite à des candidats faibles, faute d'initiatives.

Soyons sérieux, il ne fait pas l'ombre d'un doute que, pour franchir le cap de l'oral du CAPES, il faut avoir assimilé plus que le programme de Terminales, et ce n'est sûrement pas critiquable si l'on songe que les lauréats du concours, *dont la majorité n'a passé aucune épreuve écrite* (les candidats IPES), trouvent là la seule épreuve les jugeant sur pièce devant un exercice, ce qui sera un an plus tard leur pain quotidien de Professeur de Mathématiques.

La situation ainsi instaurée ne doit pas pour autant entamer le moral des candidats, car il faut avoir aussi constamment présent à l'esprit que beaucoup des exercices recueillis ici ne furent *jamais* entièrement résolus au concours pendant les vingt à vingt-cinq minutes que dure normalement l'épreuve. Le Jury, de trois personnes, est là pour juger non pas seulement des connaissances, *condition nécessaire*, mais aussi et surtout la valeur de réflexion du candidat et ses réactions devant la nouveauté et l'imprévisible, choses devant lesquelles il sera constamment confronté au cours de sa future carrière.

Depuis que les concours existent en France, des milliers de personne subissent chaque année l'épreuve d'Exercice de Mathématiques sans traumatisme excessif et fournissent par là un lot d'élèves de très grande valeur à nos Grandes Ecoles, et il en sera probablement désormais ainsi pour le CAPES. Ceci admis, tout étudiant travailleur pourra affronter l'épreuve d'Exercice, avec calme et sécurité, s'il en connaît d'avance un très vaste panorama, ce à quoi le présent petit livre l'aidera très efficacement, nous le pensons.

L.M., Janvier 1978.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

Ensembles et logique

1. LES OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

1 On désigne par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Est-il vrai ou faux que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ pour deux parties quelconques A et B d'un ensemble E ? Même question pour $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

2 Tracez rapidement la courbe (C) d'équation $y = x^3$, et étudiez l'application de (C) dans (C) qui, à un point M associe le point M' d'intersection de la tangente en M à (C) avec (C).

$-\frac{x}{2}$

3 Soit f une application de X dans Y, et A et B des parties de X, et C et D des parties de Y. (1) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. (2) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, l'égalité ayant lieu pour tout couple (A,B) ssi f est injective. (3) Prouver aussi que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$, $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$, $f(A \cap f^{-1}(C)) = f(A) \cap C$.

4 Dans l'ensemble des personnes vivantes, chaque personne a serré la main d'un certain nombre d'autres personnes. Montrer que le nombre de personnes qui ont serré la main d'un nombre impair de personnes est un nombre pair.

5 Pour A et $B \subset X$, on pose $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Démontrer les propriétés suivantes : (1) $A \Delta \emptyset = A$. (2) $A \Delta B = B \Delta A$. (3) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$. (4) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$. (5) $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$. (6) $A \Delta C = B \Delta C \Rightarrow A = B$.

6 Supposant démontré que la différence symétrique $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ est une opération *associative*, montrer que $A_1 \Delta A_2 \Delta A_3 \Delta \ldots \Delta A_n$ est l'ensemble des éléments appartenant à un nombre *impair* de A_i.

7 Soit F l'ensemble des *parties finies* d'un ensemble E. On note $|A|$ le *nombre d'éléments* de toute partie $A \in F$, et $A \Delta B$ la différence symétrique. Montrer que l'on définit une *distance* sur F par $d(A,B) = |A \Delta B|$.

8 Soit (u_n) une suite réelle, $n \geqslant 0$. Appelons $(u_n^{(1)})$ une suite *extraite* de (u_n), en ce sens qu'il existe une application φ_1 *strictement croissante* de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que, pour tout $n \geqslant 0$, on ait $u_n^{(1)} = u_{\varphi(n)}$. On appelle $(u_n^{(2)})$ une suite aussi extraite de $(u_n^{(1)})$, puis $(u_n^{(3)})$ une suite extraite de $(u_n^{(2)})$, etc. Montrer que la suite $(u_0, u_1^{(1)}, u_2^{(2)}, u_3^{(3)}, \ldots)$ est extraite de u_n.

2. LES ENSEMBLES DÉNOMBRABLES

1 Montrer que l'application f de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, définie par :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1)+y,$$

est une bijection. Etant donné $n \in \mathbb{N}$, déterminer le couple (x,y) dont il est l'image par f.

2 Montrer que l'ensemble des parties à k éléments de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

3 Montrer que l'ensemble des *parties finies* de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

4 On se propose de numéroter explicitement les éléments de $\mathbb{N}^3$. Pour cela, le triplet (000) reçoit le numéro 0. Les triplets (001), (010), (100) reçoivent les numéros 1, 2, 3. Les triplets (002), (011), (020), (101), (110), (200) reçoivent les numéros 4, 5, 6, 7, 8, 9. Plus généralement, les triplets (xyz), tels que $x+y+z=n$, seront numérotés dans l'ordre lexicographique, clairement décrit par les exemples précédents. Déterminer le numéro $f(x,y,z) \in \mathbb{N}$. Etant donné $n \in \mathbb{N}$, quel est alors l'unique triplet (x,y,z) dont il est l'image ?

5 Démontrer que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à valeurs entières non négatives, n'est pas dénombrable.

6 Soit A_n l'ensemble des réels qui sont racines d'une équation algébrique de degré n, à coefficients entiers ($\in \mathbb{Z}$). (1) Montrer que A_1 est dénombrable. (2) Même question pour A_2. (3) Même question pour A_n. (4) En déduire que l'ensemble $\cup A_n$ des nombres algébriques est dénombrable.

7 Une partie de $\mathbb{R}$ ayant un nombre fini de points d'accumulation est dénombrable.

3. RELATIONS

1 Soit P l'ensemble des nombres complexes $z = x + iy$ tels que $y > 0$. Montrer que la relation R définie par $z'Rz$ s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z' = \frac{z\cos\theta + \sin\theta}{-z\sin\theta + \cos\theta}$$

est une relation d'équivalence sur P dont on reconnaîtra la nature géométrique des classes.

2 Soit E un ensemble non vide. Montrer que, pour qu'une relation R d'ordre soit totale, il faut et il suffit qu'elle soit maximale (au sens de l'inclusion de R dans $E \times E$).

3 Etudier, dans $\mathbb{R}$, la relation S définie par $uSv \Leftrightarrow P(u) = P(v)$, où $P(\cos\theta) = \cos(7\theta)$.

4 Soit A un anneau commutatif et D la partie de A constituée des x tels que $x^2 = x$. Montrer que la relation définie dans D par $x \leqslant y$ ssi $xy = x$ est une relation d'ordre. On aura un treillis en posant $x \wedge y = x + y - xy$ et $x \vee y = xy$.

5 Sur l'ensemble des fonctions de la variable réelle, on pose fRg s'il existe une bijection h telle que $h \circ f = g \circ h$. (1) Montrer que R est une relation d'équivalence. (2) Les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont-elles équivalentes ? (3) Condition sur a et b pour que x^2 et $x^2 + ax + b$ soient équivalentes.

6 Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de parties de E. On définit la relation binaire R dans E par : xRy si $\forall A \in \mathcal{S}, \{x,y\} \subset A$ ou $\{x,y\} \subset \complement A$. Montrer que R est une relation d'équivalence dont on décrira les classes.

7 Soit E un ensemble non vide, et $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de E, tel que :

$$(1) \quad (X \in \mathcal{A},\ \ Y \in \mathcal{A}) \Rightarrow (X \cup Y \in \mathcal{A})$$

$$(2) \quad (Y \in \mathcal{A},\ \ X \subset Y) \Rightarrow (X \in \mathcal{A})$$

On définit dans l'ensemble des parties de E la relation binaire R par :

$$(XRY) \Leftrightarrow (X \,\Delta\, Y \in \mathcal{A}),$$

où Δ désigne la différence symétrique. Montrer que R est une relation d'équivalence.

8 Soit e_n le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments. Montrer que $e_1 = 1,\ e_2 = 2,\ e_3 = 5,\ e_4 = 15,\ e_5 = 52$.

9 Soit d_n le nombre de relations d'ordre sur un ensemble à n éléments. Montrer que $d_1 = 1,\ d_2 = 3,\ d_3 = 19,\ d_4 = 219$.

10 Dans l'ensemble E des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit la relation S par fSg s'il existe $h \in E$ telle que $g = f \circ h$. Etudiez les diverses qualités de S. Comparez-la à la relation T telle que fTg s'il existe h telle que $g = h \circ f$.

4. LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

1 Montrer que $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \dots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

2 Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

3 Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k \, . \, k\,! = (n+1)! - 1$.

4 Montrer que $\frac{1^3}{1^4+4} - \frac{3^3}{3^4+4} + \frac{5^3}{5^4+4} - \ldots + (-1)^n \frac{(2n+1)^3}{(2n+1)^4+4} = (-1)^n \frac{n+1}{4(n+1)^2+1}$

5 Montrer que $1^6 - 2^6 + 3^6 - \ldots + (-1)^{n-1} n^6 = \frac{(-1)^{n-1}}{2}(n^6 + 3n^5 - 5n^3 + 3n)$.

6 Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels tous $\geqslant 0$. Posant $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, montrer que :

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \leqslant 1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \ldots + \frac{s^n}{n\,!}\,.$$

Cas d'égalité ?

7 La somme $1^k + 2^k + \ldots + n^k$, n et k entiers $\geqslant 1$, k *impair*, est divisible par $n(n+1)/2$.

8 On désigne par $|X|$ le nombre d'éléments de tout ensemble fini X. Alors, pour tout système de parties $A_1, A_2, \ldots, A_n$, on a :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

9 Soit (F_n) la suite de Fibonacci, $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geqslant 0$. Alors $F_n < (7/4)^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

10 Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

est le quotient d'un nombre *impair* par un nombre *pair* (donc ne saurait être entier).

11 Soit f une application de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même, telle que, pour tout n, on ait $\sum_{d/n} f(d) = n$, le symbole d/n signifiant « d divise n ». Montrer que f est l'indicatrice d'Euler.

5. LOGIQUE

1 Ecrivez une phrase claire signifiant la négation de la phrase : « presque tous les enfants aiment les chansons ».

2 Montrez que la formule suivante du calcul propositionnel est une tautologie :

$$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)).$$

3 Pour quelles valeurs (0 ou 1) des variables propositionnelles p, q, r, la formule suivante est-elle vraie :

$$(((p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow s) \leftarrow ((p \vee q) \wedge (q \vee r)).$$

4 Mettez la formule $(p \wedge q) \vee (\neg r)$ sous la forme normale disjonctive.

5 Vis-à-vis des variables propositionnelles $p_1, p_2, \ldots, p_n$, mettez la formule $(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3)$ sous la forme normale disjonctive.

6 Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les propositions $p_1 : |x+y| \leqslant 1$, $p_2 : |x-y| \leqslant 1$, $p_3 : |x| \leqslant 1$. Quelle est la partie de $\mathbb{R}^2$ (que l'on dessinera) pour laquelle la proposition $p_1 \wedge \neg p_2 \leftrightarrow p_3$ est vraie ?

7 Montrer en quoi le proverbe : « toutes les règles ont des exceptions » se contredit lui-même.

8 Un coffre-fort est muni de n serrures différentes et ne s'ouvre que si ces n serrures sont ouvertes à la fois. On considère cinq personnes A, B, C, D, E. On demande de choisir n le plus petit possible et de distribuer des clés à ces cinq personnes afin que le coffre-fort ne puisse être ouvert que par A et B ensemble, ou bien par A, C, D ensemble, ou bien par B, D, E ensemble.

9 Parmi douze pièces de monnaie identiques d'aspect, on sait que l'une d'entre elles est contrefaite, et a donc un poids différent. Montrer qu'on peut la déceler au moyen de *trois* pesées avec une balance de Roberwal, par simple comparaison de poids de certains sous-ensembles de ces douze pièces.

CHAPITRE 2

Combinatoire

1. DÉNOMBREMENTS DIVERS

1 Donner plusieurs démonstrations du fait qu'un ensemble à n éléments possède 2^n parties.

2 Quel est le nombre de parties à 2 éléments non consécutifs de $E = \{1, 2, \ldots, n\}$? Généraliser aux parties à k éléments dont deux quelconques ne sont pas consécutifs.

3 De combien de manières peut-on vider un tonneau de n litres avec un pot de un litre et un autre de deux litres ?

4 Montrez, de diverses manières, que le nombre de solutions en entiers $x_i \geqslant 0$ de l'équation :

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

est égal à $\binom{n+k-1}{k}$ (combinaisons avec répétitions).

5 Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer le nombre de *couples* (A,B) de parties de E dont l'intersection est vide.

6 Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre de *couples* (A,B) de parties de E telles que $A \subset B \subset E$. Généraliser à k parties $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset E$.

7 Soit E un espace vectoriel de dimension d sur K, avec $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier. (1) Quel est le nombre de familles libres à k éléments ? (2) Quel est le nombre de bases ? (3) Quel est le nombre de droites vectorielles ? (4) Quel est le nombre de sous-espaces ?

8 Combien y a-t-il de relations de préordre possibles sur un ensemble à 4 éléments ?

9 Démontrer que le nombre $S(n,k)$ de relations d'équivalence à k classes sur un ensemble à n éléments vaut :

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n .$$

2. DÉNOMBREMENTS D'APPLICATIONS PARTICULIÈRES

1 Montrer que le nombre des applications strictement croissantes de $E = \{1,2,\dots,m\}$ dans $F = \{1,2,\dots,n\}$ vaut $\binom{n}{m}$. Résoudre une question analogue pour les applications de E dans F qui sont croissantes au sens large.

2 Montrer que, sur un ensemble fini à n éléments, il y a $(n-1)!$ permutations circulaires.

3 Montrer que les mots de longueur n, formés des deux lettres a et b et dans lesquels deux lettres a ne se suivent pas, sont en nombre :

$$u_n = \sum_{0 \leqslant j \leqslant (n+1)/2} \binom{n+1-j}{j}.$$

Montrer alors, avec la formule et par énumération, qu'il y a 144 tels mots de longueur 10.

4 Calculer le nombre d'applications f de $E = \{1,2,3,\dots,n\}$ dans $\mathbb{N}$ telles que $\sum_{k=1}^{n} f(k) = q$.

5 Soit p_n le nombre des applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que $\sum_{k \geqslant 0} kf(k) = n$. Montrer que p_n est une suite croissante convexe, tendant vers l'infini.

6 Montrer que le nombre total d'arrangements d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} n(n-1)\dots(n-k+1)$$

est égal à l'entier le plus proche de $e.n\,!$

7 On considère la suite (a_n) d'entiers ainsi définie :

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1}).$$

Montrer que a_n est le nombre de permutations sans points fixes (dérangements) d'un ensemble fini à n éléments.

8 Le nombre de permutations de N, $|N| = n$, se décomposant en k cycles, vaut le coefficient de x^k dans le polynôme $x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$.

3. PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES COEFFICIENTS BINOMIAUX

1 Montrer qu'il existe une infinité de couples (n,k) pour lesquels :

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2}\left\{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}\right\}.$$

2 Montrer que $(n+1)$ divise toujours $\binom{2n}{n}$.

3 Montrer que, pour tous entiers a et $b \geqslant 0$, le nombre $(2a)!(2b)!/a!b!(a+b)!$ est entier.

4 Déterminer tous les entiers $n > 0$ tels que, pour tout k, $0 \leqslant k \leqslant n$, le coefficient $\binom{n}{k}$ soit *impair*.

5 Montrer que sont premiers entre eux, pour tous k et n, les entiers :

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \binom{n+2}{k}, \ldots, \binom{n+k}{k}.$$

6 Si n et k sont premiers entre eux, alors n divise $\binom{n}{k}$.

7 Montrer que, pour tout nombre premier p, on a $\binom{n}{p} \equiv \left[\frac{n}{p}\right] \pmod{p}$.

8 Supposons que l'on connaisse les écritures p-adiques de a et b, avec p premier :

$$a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots, \quad b = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots$$

Montrer que :

$$\binom{a}{b} \equiv \binom{a_0}{b_0}\binom{a_1}{b_1}\binom{a_2}{b_2} \cdots \pmod{p}$$

9 Cherchez des entiers n et k tels que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k+1}$.

10 Pour tout nombre premier p tel que $n < p \leqslant 2n$, on a $\binom{2n}{n} \equiv 0 \pmod{p}$, mais $\binom{2n}{n} \not\equiv 0 \pmod{p^2}$.

11 Si n est de la forme $6k \pm 1$, alors $n^2 - n$ divise $\binom{2n-4}{n-2}$.

4. IDENTITÉS COMBINATOIRES

1 Démontrer la périodicité et calculer *simplement* le terme général de la suite suivante :

$$u_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant (n/2)} (-1)^k \binom{n-k}{k}$$

2 Donner une preuve combinatoire de l'identité $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, où k et $n \geqslant 1$.

3 Donner une preuve combinatoire de l'identité $\binom{n}{k} = (n/k)\binom{n-1}{k-1}$, où k et $n \geqslant 1$.

4 Démontrer de diverses manières l'identité $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.

$\sum C_{n_1}^{p_1} C_{n_2}^{p_2} = C_{n_1+n_2}^{p}$

$p_1+p_2 = p$

5 Donner deux démonstrations de l'identité :

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots,$$

l'une utilisant la formule du binôme (preuve «analytique»), l'autre montrant qu'il y a autant de parties d'effectif pair que de parties d'effectif impair, directement, par une bijection (preuve «combinatoire»).

6 Démontrer de diverses manières l'identité :

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

7 Prouver l'identité :

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n/4}\binom{n}{4k}=2^{n-2}+2^{(n/2)-1}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}\,\delta_{0,n}.$$

8 Démontrer l'identité suivante, où $q=\min(r,s)$:

$$\binom{n}{r}\binom{n}{s}=\sum_{k=0}^{q}\binom{s}{k}\binom{r+s-k}{r-k}\binom{n}{r+s-k}$$

5. RÉDUCTION COMBINATOIRE DE CERTAINES EXPRESSIONS

1 Combien imprime-t-on de chiffres pour numéroter les n pages d'un livre ? Combien de fois aura-t-on utilisé un certain chiffre $i\in[0,9]$?

2 Calculer simplement les trois sommes :

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots,\ \binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\ldots,\ \binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\ldots$$

3 Posant $Z_r=1^r+2^r+\ldots+n^r$, montrer que Z_{2k-1} est un polynôme en Z_1, et que Z_{2k}/Z_2 est aussi un polynôme en Z_1.

4 Posant $Z_r=Z_r(n)=1^r+2^r+\ldots+n^r$, montrer que $Z_r(n)$ est un polynôme de degré $(r+1)$ en n. Montrer aussi que ce polynôme est divisible par le polynôme Z_3 si r est impair $\geqslant 3$, et par le polynôme Z_2 si n est pair $\geqslant 2$.

5 Montrer que, pour tous entiers positifs n et r, on a :

$$Z_r=Z_r(n)=1^r+2^r+3^r+\ldots+n^r=\sum_{k=1}^{r}S(r,k)\binom{n+k}{r+1},$$

où les entiers positifs $S(r,k)$ satisfont à la récurrence :

$$S(r+1,k)=S(r,k-1)+kS(r,k),$$
avec $S(r,1)=S(r,r)=1$, $r\geqslant 1$, $k\geqslant 2$. En déduire les valeurs de Z_4 et Z_5.

6 Calculer, pour tout réel x, l'expression :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2 x^k(1-x)^{n-k}.$$

7 Désignant par $[n]$ l'ensemble $\{1,2,3,\ldots,n\}$, montrer que :

$$\sum_{A\subset[n]}\ \sum_{i\in A} i = 2^{n-2}n(n+1).$$

6. DÉNOMBREMENTS GÉOMÉTRIQUES

1 Dans le plan, n cercles déterminent au plus n^2-n+2 régions. Ce nombre est atteint.

2 Les $\binom{n}{2}$ droites joignant n points du plan se recoupent en $n(n-1)(n-2)(n-3)/8$ autres points, et partagent le plan en $(n-1)(n^3-5n^2+18n-8)/8$ régions, dont $n(n-1)$ ne sont pas bornées.

3 Dans un polygone convexe à n sommets, les diagonales et les côtés découpent l'intérieur en $(1/4!)(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)$ régions. Calculez aussi le nombre de régions extérieures.

4 Deux droites distinctes peuvent partager le plan affine selon $u_2=2$ modèles non homéomorphes selon qu'elles sont sécantes ou parallèles. Montrer que $u_3=4$. Calculer u_4.

5 L'espace est divisé par n sphères en au plus $n(n^2-3n+8)/3$ régions.

6 Le nombre de triangles différents, dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers et dont le périmètre vaut n, est égal à :

$$E\left\{\frac{1}{48}(n^2+3n+21+(-1)^{n-1}.3n)\right\}.$$

7 Pour tout entier $n\geqslant 0$, appelons E_n l'ensemble des points $M(x,y)$ à coordonnées entières, telles que $0\leqslant x\leqslant n, 0\leqslant y\leqslant n$. (1) Quel est le nombre de segments MM' parallèles à la droite $x=y$, tels que M et $M'\in E_n$? (2) Calculer la somme des carrés de ces segments.

8 Soit E l'espace vectoriel K^n, où K est un corps fini à q éléments ($q=p^r$). Montrer qu'il y a $(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\ \ldots\ (q^n-q^{n-k+1})$ suites de

k vecteurs indépendants. En déduire que le nombre $\binom{n}{k}_q$ de sous-espaces vectoriels de dimension k dans E vaut :

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\dots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)(q^k-q^2)\dots(q^k-q^{k-1})}.$$

Si $q=1$, on retrouve, par passage à la limite, les coefficients binomiaux ordinaires $\binom{n}{k}$. Prouver aussi les identités suivantes :

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q \,, \quad \binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k\binom{n-1}{k}_q$$

Démontrer enfin l'identité polynomiale en y :

$$y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q (y-1)(y-q)(y-q^2)\dots(y-q^{k-1}).$$

7. INÉGALITÉS EN ANALYSE COMBINATOIRE

1 Soit N un ensemble de n objets, non nécessairement distincts. Pour $n \geqslant a^2+1$, a entier $\geqslant 0$, montrer que l'un au moins des deux cas suivants se présente : (I) $a+1$ objets sont identiques, (II) $a+1$ objets sont distincts.

2 On considère k parties *distinctes* d'un certain ensemble, chacune à b éléments. Exprimer en fonction de k et b le nombre *minimum* d'éléments de leur réunion.

3 Déterminer le *maximum* de parties d'une partition d'un ensemble à n éléments, sachant que les effectifs de chaque partie de cette partition sont tous différents.

4 Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des parties finies. On note $|B|$ le cardinal de B. Posant :

$$S_k = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_k\leqslant n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k}|,$$

démontrer les inégalités :

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n| &\leqslant S_1\\ \text{d}^\circ\quad &\geqslant S_1-S_2\\ \text{d}^\circ\quad &\leqslant S_1-S_2+S_3, \text{ etc.}\end{aligned}$$

5 On considère, dans $E=\{1,2,3,\dots,n\}$, un système de k paires d'entiers $\{a_1, b_1\}, \dots, \{a_k, b_k\}$ toutes disjointes, et telles que les k sommes $a_1+b_1, \dots, a_k+b_k$ soient toutes différentes et $\leqslant n$. Montrer que la plus grande valeur possible de k est comprise entre $(2n/5)-3$ et $(2n-3)/5$.

6 Sur 100 points du plan en position quelconque, montrer que, parmi les $\binom{n}{3}$ triangles possibles, il y a au plus 70 % de triangles dont tous les angles sont aigus.

CHAPITRE 3

Probabilités et statistique

1. ESPACE DE PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES EN GÉNÉRAL

1 Toute tribu sur un espace fini est finie et est engendrée par une partition.

2 Toute tribu finie est engendrée par une partition finie.

3 Il n'existe pas de tribu infinie dénombrable ; une tribu est donc, soit finie, soit de puissance au moins égale à celle du continu.

4 Montrer qu'il y a bijection entre les tribus (de Ω) et les algèbres sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

5 Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements. On considère les 2^n événements de la forme $Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_n$, où $Z_i = A_i$ ou $\bar{A}_i$ (complémentaire de A_i), $i = 1,2,\ldots,n$. Montrez que la somme des probabilités de ces 2^n événements vaut $2^n - 1$.

6 Montrer que $\mathbb{P}(A \,\Delta\, B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\,\mathbb{P}(AB)$. Plus généralement,

$$\mathbb{P}(A_1 \Delta A_2 \Delta \ldots \Delta A_n) = S_1 - 2S_2 + 2^2 S_3 - \ldots,$$

où

$$S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k})$$

7 Etant donnés n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$, montrer que la probabilité pour que r exactement d'entre eux soient réalisés vaut :

$$\mathbb{P}_{[r]} = S_r - \binom{r+1}{1} S_{r+1} + \binom{r+2}{2} S_{r+2} - \ldots,$$

où les S_k ont été définis dans l'exercice 6.

2. CALCUL DE CERTAINES PROBABILITÉS CONCRÈTES

1 Un sac contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. On en extrait 3 simultanément. Quelle est la probabilité pour que la somme des points tirés soit supérieure à la somme des points restants ? Tenter de généraliser le problème au cas de $2n$ jetons numérotés de 1 à $2n$.

2 Dix livres sont placés n'importe comment sur une étagère. Quelle est la probabilité pour que trois livres donnés soient placés l'un à côté de l'autre ?

3 Invité chez des amis que l'on sait avoir deux enfants, la porte vous est ouverte par une petite fille. Quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit aussi une fille ?

4 Un sac contient six jetons numérotés de 1 à 6. On en tire successivement trois, sans remise. Quelle est la probabilité pour que la suite ainsi obtenue ne soit pas monotone ?

5 Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de vertes, 2 paires de rouges. On tire deux chaussures au hasard. (1) Quelle est la probabilité pour que les deux chaussures soient de la même couleur ? (2) Quelle est la probabilité pour avoir un pied gauche et un pied droit ? (3) Quelle est la probabilité pour avoir une vraie paire de chaussures ?

6 Combien de raisins secs faut-il mettre dans 1 kg de pâte afin que la part de 50 g de gâteau contienne au moins un raisin avec une probabilité $\geqslant 0{,}99$?

7 Si l'on ne tient pas compte des années bissextiles, montrer qu'à partir de 23 personnes présentes dans une salle, il y a plus d'une chance sur deux pour que deux d'entre elles, au moins, aient même anniversaire. Traiter ensuite cette question en tenant compte cette fois des années bissextiles.

8 Une urne contient a boules noires et b boules blanches, $a + b = n$. On tire *successivement* deux boules, sans remise. Calculer la probabilité pour que la seconde soit noire. Généraliser au cas où l'on extrait successivement k boules.

9 Quelles conditions nécessaires et suffisantes trois nombres réels x, y, z doivent-ils satisfaire afin qu'il puisse exister deux événements A et B tels que $x = \mathbb{P}(A)$, $y = \mathbb{P}(B)$, $z = \mathbb{P}(A \cap B)$? (on régionnera l'espace $\mathbb{R}^3$).

10 Dans un jeu de 52 cartes, montrer que la probabilité pour qu'un valet et une dame soient côte-à-côte vaut 0,486.

3. ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

1 Critiquez le raisonnement suivant : « Avec un certain canon, j'ai une chance sur deux de toucher l'objectif. Si j'envoie deux coups, je toucherai donc certainement l'objectif ».

2 On jette un dé équilibré trois fois de suite et l'on obtient les points X, Y, Z. Quelle est la probabilité pour que 2 divise le produit XYZ ? Généraliser à n jets.

3 Si A et B sont indépendants, $\bar{A}$ et B le sont aussi.

4 Si $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B|\bar{A})$, alors A et B sont indépendants.

5 Montrer qu'il peut exister trois événements indépendants deux à deux, et non indépendants entre eux cependant.

6 Soit A et B deux événements indépendants. Posant $x = \mathbb{P}(A \cap B)$, $y = \mathbb{P}(A \Delta B)$, $z = \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$, montrer que l'un au moins de ces trois nombres est $\geqslant 4/9$.

4. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

1 On considère n urnes numérotés de 1 à n, l'urne k contenant n boules noires et k boules blanches. On choisit au hasard une urne, et dans cette urne une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire ? Que vaut cette probabilité, approximativement, si n est grand ?

2 Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés. Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné ? Le vaccin est-il efficace ?

3 Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels p, q, r, s afin qu'il puisse exister deux événements A et B tels que $p = \mathbb{P}(A|B)$, $q = \mathbb{P}(A|\bar{B})$, $r = \mathbb{P}(B|A)$, $s = \mathbb{P}(B|\bar{A})$.

4 Une urne contient deux boules rouges et quatre boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. Si cette boule était rouge, on tire à nouveau trois boules, et si elle était noire, on en tire seulement deux. L'**expérience** aboutit donc ainsi à trois ou quatre boules extraites au total, en deux *tirages*. (1) Quelle est la probabilité pour que l'**expérience** fournisse exactement trois boules noires (et aucune rouge) ? (2) Quelle est la probabilité pour que le nombre de boules noires du **second tirage** soit exactement de deux ? (3) Calculer la moyenne (c'est-à-dire l'espérance mathématique) de la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges extraites au cours de l'**expérience**.

5 Si $\mathbb{P}(A|B) \geqslant \mathbb{P}(A)$, alors $\mathbb{P}(B|A) \geqslant \mathbb{P}(B)$.

5. VARIABLES CLASSIQUES : BERNOULLI, BINOMIALE, POISSON

1 Une urne contient $n - 1$ boules blanches et une boule noire. On effectue n tirages au hasard successif d'une boule, avec remise. (1) Quelle est la probabilité p_n que la boule noire ne sorte à aucun des tirages ? (2) Quelle est la limite de p_n ?

2 Un certain conducteur a, en moyenne, un accident par 10 000 km. (1) Quelle est la probabilité pour qu'il n'ait aucun accident en 20 000 km ? (2) Il achète une voiture neuve. Au bout de combien de kilomètres la probabilité pour qu'il ait eu au moins un accident sera-t-elle $\geqslant 0{,}99$?

3 Comparer les probabilités des deux événements : « avoir au moins un as avec 6 dés » et « avoir au moins deux as avec 12 dés ».

4 Soient deux réels x et y de $[0,1]$ et X et Y les variables de Bernoulli indépendantes définies par $\mathbb{P}(X=1)=x$, $\mathbb{P}(X=0)=1-x$, $\mathbb{P}(Y=1)=y$, $\mathbb{P}(Y=0)=1-y$. Introduisant la variable $Z=X+Y$, on pose $x'=\mathbb{P}(Z=0)$, $y'=\mathbb{P}(Z=1)$, $z'=\mathbb{P}(Z=2)$. Après avoir démontré qu'il n'est pas possible que $x'=y'=z'$ $(=1/3)$, on déterminera x et y afin que max (x', y', z') soit le plus petit possible.

5 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en extrait, au hasard, une poignée. Etudier la variable aléatoire égale à la somme des points extraits, moyenne, variance. Que pensez-vous de sa loi ?

6 Soit X la variable aléatoire aux trois valeurs -1, 0, $+1$ équiprobables (1/3), et soit $Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, les X_k étant indépendantes et de même loi que X. Quelle est la probabilité pour que $|Z|$ soit minimum ?

7 Etudier la variable aléatoire définie par $Y_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k/2^k)$, où (X_k) est une suite de variables de Bernoulli, de même loi, indépendantes. Déterminer la moyenne, la variance et la fonction de distribution de Y_n.

6. AUTRES VARIABLES ALÉATOIRES PARTICULIÈRES

Dans cette section et toutes les suivantes de ce chapitre, on a constamment abrégé « variable aléatoire » en « VA ».

1 Une VA, soit X, prend les valeurs $k=1,\ 2,\ 3,\ 6$ avec les probabilités $\mathbb{P}(X=k)=\lambda k$. Calculer λ. Ceci fait, calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$. Soit alors Y la VA égale à $(X-3)^2$. Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y.

2 D'un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n, $n \geqslant 3$, on en extrait 3. On appelle X la VA égale au point tiré dont la valeur est intermédiaire entre les deux autres. Déterminer la loi de X, sa moyenne et sa variance.

3 D'un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n, on en tire successivement 3, et l'on appelle X la VA lue sur le troisième jeton. Déterminer sa distribution, sa moyenne et sa variance.

4 Un trousseau contient 10 clés dont une seule convient pour ouvrir une porte. On les essaie l'une après l'autre. Etudier la VA égale au numéro d'ordre du bon essai. Même question quand on prend une clé au hasard parmi les 10, à chaque essai, sans avoir isolé celles des essais précédents.

5 Soit X une VA équirépartie sur ses trois valeurs 0, 1, 2. On pose $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, où les X_i sont *indépendantes* de même loi que X. Calculer l'espérance et la variance de Y.

6 Soit X une VA équirépartie sur $\{0,1,2,\ldots,n\}$, avec donc $\mathbb{P}(X = k) = 1/(n+1)$, $k = 0,1,2,\ldots,n$ et soit Y une VA de même loi, indépendante de X. Etudier la répartition de $Z = X + Y$.

7 Soit $X_1, X_2, \ldots, X_k$ des VA de même loi, indépendantes, uniformément réparties sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. On pose $Y = \max(X_1, X_2, \ldots, X_k)$. Etudier la loi de Y et calculer sa moyenne.

7. VARIABLES ALÉATOIRES DANS UN ESPACE PRODUIT

1 Dans le jet de trois dés simultanément, soit X le minimum des trois points marqués, et Y le maximum. (1) Quelle est la loi du couple (X, Y) ? (2) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

2 Deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un même univers ont pour fonction de répartition respectives $F(x)$ et $G(x)$. Exprimer, en fonction de F et G, les fonctions de répartition H et K des variables $V = \min(X, Y)$ et $W = \max(X, Y)$. Généraliser.

3 Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire une boule et l'on définit alors la VA X par $X = 0$ ou 1 selon que l'on a tiré une blanche ou une rouge. Si la boule tirée est blanche (resp. rouge), on la remet, accompagnée de n autres boules blanches (resp. rouges). On tire à nouveau une boule et l'on définit Y comme on l'a fait pour X. Etudier la loi du couple (X, Y).

4 Montrer que $f(x,y) = 2(\mathrm{e}-1)^{-1} x \mathrm{e}^y$ si $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, et $f = 0$ ailleurs, est la densité de probabilité d'un couple aléatoire (X, Y). Calculer les densités marginales φ et ψ. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

5 Sous quelle condition la somme de deux variables de Poisson **indépendantes** est-elle de Poisson ?

6 Sous quelle condition la somme de deux variables binomiales **indépendantes** est-elle binomiale ?

8. SUITES DE VARIABLES ALÉATOIRES, OU CHAINES

1 Un jeune homme écrit chaque jour à une jeune fille, avec la probabilité 1 s'il ne lui a pas écrit la veille, et la probabilité 1/2 s'il lui avait écrit. Montrer qu'il écrit, en moyenne, 266 lettres par an.

2 Une bactérie se divise en deux au bout de chaque seconde. Pendant ce laps de temps de 1 s qui sépare les instants de division, la probabilité pour qu'elle meure est p. (1) Calculer l'ensemble des effectifs possibles, au temps n, de la population issue d'une bactérie depuis le temps 0. (2) Trouver la loi de la VA égale à l'effectif de la population au temps n.

3 Une urne U_1 contient initialement deux boules blanches et une urne U_2 contient deux boules rouges. Chaque seconde, on choisit une boule dans chaque urne et on les interchange. Quelle est la probabilité d'avoir au bout de n échanges exactement deux boules rouges dans U_1 ? Quelle est la limite de cette probabilité pour $n \to \infty$?

4 On considère le graphe à quatre sommets A, B, C, D et quatre arêtes AB, BC, CD, DB, constitué par un triangle équilatéral BCD auquel est accroché le segment AB. A l'instant 0, un mobile M quitte A et va vers B, où il arrive à l'instant 1. Il repart immédiatement vers A ou C ou D équiprobablement, etc., la règle étant qu'à chaque bifurcation, ce mobile choisit une arête au hasard, équibrobablement, la durée du parcours d'une arête étant toujours égale à 1. Calculer la probabilité pour que M se trouve en A à l'instant n. Même question pour B, C et D.

9. PROBABILITÉS GÉOMÉTRIQUES OU CONTINUES

1 Un plancher est composé de lames de parquet de largeur d. On laisse tomber par terre une aiguille de longueur l. (1) Supposant d'abord $l < d$, calculer la probabilité pour que l'aiguille s'immobilise en coupant une rainure. (2) Même question en supposant cette fois $l \geqslant d$.

2 Un plancher est composé de carreaux de côté a. On laisse tomber par terre une pièce de monnaie de rayon r. (1) Supposant d'abord $r < a/2$, calculer la probabilité pour que la pièce immobilisée recouvre un coin de carré. (2) Même question si $r \geqslant a/2$.

3 On partage un segment en trois parties par deux points pris au hasard. Quelle est la probabilité pour que l'on puisse construire un triangle avec les trois morceaux pour côtés ?

4 On partage un segment en deux par un point placé au hasard, puis on partage à nouveau en deux le plus grand des deux morceaux. Montrer que la probabilité pour qu'on puisse construire un triangle avec les trois morceaux pour côtés vaut $2 \ln 2 - 1$.

5 On pose $k+l+1$ points indépendamment sur $[0,1]$. En calculant de deux manières la probabilité pour que le $(k+1)$-ième point à partir de la gauche appartienne au segment $[x, x+\Delta x]$, démontrer la formule :

$$\int_0^1 x^k (1-x)^l \, dx = \frac{k!\, l!}{(k+l+1)!}$$

6 On choisit au hasard X et Y dans $[0,1]$. Calculer la moyenne de $|X-Y|$.

10. INÉGALITÉS PROBABILISTES

1 L'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff dit que :

$$f(t) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \geqslant t\right) \leqslant g(t) = \frac{1}{t^2},$$

où $\mu = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X)\,(>0)$. Appelant X la VA égale au point obtenu lors du jet d'un dé équilibré, étudiez dans ce cas la fonction $g(t) - f(t)$ et, plus précisément, déterminez $\sup_{t \geqslant 1} (g(t) - f(t))$.

2 On considère une suite de 4 000 épreuves de Bernoulli, de probabilité p inconnue, et comprenant 2 040 succès. Utiliser l'inégalité de Bienaymé pour estimer p avec une probabilité $\geqslant 0{,}95$.

3 Montrer que pour tous $t > 0$ et $\alpha > 0$, on a $\mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leqslant \mathbb{E}(|X|^\alpha)/t^\alpha$.

4 Soit X une VA telle que $\mathbb{E}(X) = 0$ et var $X = \sigma^2 > 0$, et soit $F(x)$ sa fonction de répartition. Montrer que $F(x) \leqslant \sigma^2/(\sigma^2 + x^2)$ si $x < 0$, et $F(x) \geqslant x^2/(\sigma^2 + x^2)$ si $x > 0$, ces inégalités étant les meilleures possibles.

5 Si la variable aléatoire X admet une densité f unimodale en x_0, alors l'inégalité de Tchebicheff s'améliore en :

$$\mathbb{P}(|X - x_0| \geqslant t^2 a) \leqslant \frac{4}{9\,t^2},$$

où l'on a posé $a = \operatorname{var} X + (x_0 - \mathbb{E}(X))^2$.

11. CÉLÈBRES PROBLÈMES DE PROBABILITÉS

1 Sur les quinze sièges d'une rangée, au théâtre, s'assoient au hasard huit garçons et sept filles. Quelle est, en moyenne, le nombre de couples garçon-fille l'un à côté de l'autre ?

2 Vous demandez successivement à des personnes différentes la date de leur anniversaire. Montrer qu'il faut, en moyenne, interroger plus de 250 personnes afin d'avoir plus d'une chance sur deux que l'une d'elles ait même anniversaire que vous.

3 Des invités, en (grand) nombre n, laissent leur chapeau au vestiaire et en reprennent un au hasard à la sortie. Montrer que la probabilité pour qu'aucun invité n'ait son propre chapeau est (à peu près) $1/e$.

4 On choisit au hasard une corde d'un cercle. Quelle est la probabilité pour que sa longueur soit supérieure à celle du rayon du cercle ?

5 Combien faut-il acheter, en moyenne, de tablettes de chocolat contenant chacune une image, afin de se constituer la collection complète qui comporte n images ?

6 Quelle est la probabilité pour que deux nombres entiers $\geqslant 1$, choisis au hasard, soient premiers entre eux ?

7 Deux candidats A et B s'affrontent à une élection où, finalement, ils obtiennent respectivement p et q voix, avec $p < q$, ce qui fait que B est donc élu. Montrer que la probabilité pour que, au cours du dépouillement, le candidat B ait constamment la majorité est $(q-p)/(q+p)$.

12. STATISTIQUE

1 La table suivante donne le nombre x de véhicules, en millions, en usage au 1er septembre de chaque année et le nombre y d'accidents, en centaines de milliers, pour l'année civile correspondante :

Années	1971	1972	1973	1974	1975	1976
x	5,8	6,4	6,9	7,5	7,9	8,6
y	2,4	2,7	2,7	2,7	2,9	3,0

Estimer l'année au cours de laquelle le nombre de véhicules dépassera 11 millions, et calculer le nombre d'accidents correspondants.

2 *L'examinateur* – Soit (x_i, y_i), $i = 1, 2, \dots, n$, un nuage de points expérimentaux, résultats d'une enquête, où l'on veut vérifier qu'une certaine fonction y « dépend » d'une certaine variable x. Par exemple, le poids y en fonction de la taille x dans une certaine population. On se propose d'approcher au mieux ce nuage par une droite $y = ax + b$, de façon à rendre la plus petite possible la somme des carrés des « erreurs », à savoir $\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$. Vous allez essayer de me montrer qu'il existe, en général, un unique couple (a, b) de réels répondant à la question.

Le candidat — Oui, je sais, il s'agit de l'*ajustement linéaire* de Gauss, qui s'enseigne en Terminales.

E — Exact, veuillez le rétablir.

C — D'accord !

Quelques instants après, le problème est résolu, y compris le cas d'alignement...

E — Je vais vous poser un autre exercice, voisin de celui-ci, puisqu'il nous reste du temps. Existe-t-il une parabole d'ajustement, c'est-à-dire des réels a, b, c minimisant l'expression :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \ ?$$

3 On donne la série statistique suivante, correspondant à la répartition des quotidiens de province d'après l'importance du tirage moyen ; de 5 000 à moins de 10 000 : 16 ; de 10 000 à moins de 30 000 : 24 ; de 30 000 à moins de 50 000 : 16 ; de 50 000 à moins de 70 000 : 14 ; de 70 000 à moins de 100 000 : 14 ; de 100 000 à moins de 150 000 : 10 ; de 150 000 à moins de 200 000 : 4 ; plus de 200 000 : 2. Construire par cette série statistique (a) le polygone des fréquences cumulées ; (b) l'histogramme ; (c) le polygone des fréquences. On expliquera comment on passe du polygone des fréquences cumulées à l'histogramme, puis de l'histogramme au polygone des fréquences.

CHAPITRE 4

Trigonométrie, nombres complexes et applications

1. ENTIERS DE GAUSS

Dans cette section, on notera $\mathbb{G}$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $x + iy$, où x et $y \in \mathbb{Z}$, et l'on posera $\mathbb{G}^* = \mathbb{G}\backslash\{0\}$.

1 Démontrer que, dans $\mathbb{G}^*$ la relation binaire définie par « α divise β et β divise α » est une relation d'équivalence. Chercher les éléments de $\mathbb{G}^*$ qui sont équivalents à 1, puis ceux équivalents à $1 + i$.

2 Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe au moins un $\alpha \in \mathbb{G}$ tel que $|z - \alpha| < 1$. Cet élément α est-il unique ? Calculer α pour $z = 2 + 3i$, puis pour $z = (5/2)(1 + i)$. En déduire que, quels que soient les éléments α et β de $\mathbb{G}^*$, il existe des éléments δ et ρ de $\mathbb{G}$ tels que l'on ait $\alpha = \beta\delta + \rho$, avec $|\rho| < |\beta|$. A titre d'application, calculer δ et ρ pour $\alpha = -2 + 5i$ et $\beta = 3 + i$.

3 On appelle *diviseur strict* de α dans $\mathbb{G}^*$ tout diviseur de α qui n'est ni élément unitaire, ni le produit de α par un élément unitaire. Un élément de $\mathbb{G}^*$ est dit *premier* dans $\mathbb{G}$ pour exprimer qu'il n'admet pas de diviseurs stricts. Dans le cas contraire, il est dit *composé* dans $\mathbb{G}$. Démontrer que si $\alpha = x + iy \in \mathbb{G}$ est tel que $n(\alpha) = x^2 + y^2$ est un nombre premier dans $\mathbb{N}$, alors α est premier dans $\mathbb{G}$. La réciproque est fausse : on montrera, par exemple, que 3 est premier dans $\mathbb{G}$. A titre d'application numérique, montrer que $1 + i$ est premier, mais que 2, 5, $3 - i$ et $3 + 4i$ sont composés.

4 Montrer que tout élément de $\mathbb{G}$ est décomposable en un produit de facteurs premiers dans $\mathbb{G}$, chacun étant défini à un facteur unitaire près, et cela d'une façon unique. Par exemple, $3 - i = (2 + i)(1 - i)$ et $9 + 7i = (1 - i)(2 + i)(2 + 3i)$.

5 Montrer qu'il n'est pas possible qu'un triangle équilatéral ait ses sommets dans $\mathbb{G}$.

6 Est-il possible qu'un pentagone régulier ait ses sommets pris dans $\mathbb{G}$?

7 Montrer que les solutions dans $\mathbb{G}$ de $x + y + z = xyz = 1$ sont les 6 permutations de $(1, i, -i)$.

8 Toute somme de carrés d'entiers de Gauss est une somme de trois carrés de tels entiers.

2. RACINES DE L'UNITÉ

1 Soit a et b deux nombres complexes différents, et n un entier positif. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(z-a)^n = (z-b)^n$. Condition pour que les racines soient réelles ? Les déterminer alors.

2 Résoudre l'équation en θ réel : $\prod_{k=1}^{n} (\cos k\theta + \mathrm{i} \sin k\theta) = 1$.

3 Soit $\omega = \exp(2\pi \mathrm{i}/5)$. Alors :

$$(x+y+z)(x+y\omega+z\bar{\omega})(x+y\omega^2+z\bar{\omega}^2)(x+y\bar{\omega}^2+z\omega^2)(x+y\bar{\omega}+z\omega) = \\ = x^5+y^5+z^5-5x^3yz-5xy^2z^2.$$

4 Soit ω une racine n-ième de l'unité. Calculer $Q(\omega)$ pour :

$$Q(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

5 Montrez que :

$$\frac{x^{2m}-1}{x^2-1} = \prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{m}+1\right), \quad \frac{x^{2m+1}-1}{x-1} = \prod_{k=1}^{m}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{m+1}+1\right).$$

En déduire :

$$\prod_{k=1}^{m-1} \sin\frac{k\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}, \quad \prod_{k=1}^{m} \sin\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}.$$

6 Calculer $a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n)$, $b_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin(a+k\pi/n)$, $c_n = \prod_{k=0}^{n-1} \operatorname{tg}(a+k\pi/n)$.

7 Résoudre l'équation, où $\alpha \in [0, 2\pi[$:

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 2\cos\alpha.$$

8 Montrer que la courbe $|z^n-1| = 1$ est une « marguerite » d'équation polaire $\rho^n = 2\cos n\theta$.

9 Soit $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité, et $Q(x)$ le polynôme $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$. Calculer $\prod_{i=0}^{n-1} Q(\omega_i)$.

10 Résoudre l'équation $(z^2+1)^n + (z-1)^{2n} = 0$.

11 Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle unité. Montrer que, pour tout point P du plan, on a $\sum_{k=1}^{n} PA_k^2 = n(1+OP^2)$.

12 Trouver une CNS pour que toutes les racines de $((1+\mathrm{i}x)/(1-\mathrm{i}x))^n = a$ soient réelles, et les déterminer alors.

13 Résoudre l'équation $\sum_{k=0}^{n} ((z+\mathrm{i})/(z-\mathrm{i}))^n = 0$.

3. ÉGALITÉS, INÉGALITÉS ET INCLUSIONS DANS $\mathbb{C}$

1 Démontrer que $|z| + |z'| \leqslant |z+z'| + |z-z'|$. Cas d'égalité ?

2 On a toujours $|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im} z| \leqslant |z|\sqrt{2}$. Cas d'égalité ?

3 Montrer que $\mathrm{Re}(1-z)^{-1} < 1/2$ implique $|z| > 1$.

4 Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $r > 0$. Calculez $\max |az+b|$, sachant que $|z| \leqslant r$.

5 Montrer que $\mathrm{Re}\, z < 1/2$ implique $|z/(1-z)| < 1$.

6 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z^3 - 1| \geqslant 1$ ou $|z-1| < 1$ ou $|z-j| < 1$ ou $|z-j^2| < 1$. Interprétation géométrique ?

7 Calculer $\sup |z^2 + 5z + 1|$ sachant que $1 \leqslant |z| \leqslant 6$.

8 Pour tout nombre complexe de module 1, on a $|1+z| \geqslant 1$ ou $|1+z^2| \geqslant 1$.

9 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|1+z| \geqslant 1/2$ ou $|1+z^2| \geqslant 1$.

10 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|2z+1| \geqslant 1$ ou $|z^2+z+1| \leqslant 1$.

11 Si $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$, alors $|1+z| \geqslant 1$, et, plus généralement, $\left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| \geqslant 1$. ? $z = -j^2$ $n=5$

12 La seule solution de $|z^2+1| \leqslant 1$ et $|z^2-1| \leqslant 1$ est $z = 0$.

13 Si $|a| = |b| = 1$, alors $2|a+b|\,|1+a|\,|1+b| \leqslant |2+a+b|^2$.

14 Pour tous nombres complexes $a, b, c,$ on a toujours :

$$|a+b| + |b+c| + |c+a| \leqslant |a| + |b| + |c| + |a+b+c|.$$

Cas d'égalité ?

4. L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{C}$

1 Soit z' et z'' les racines de $z^2 - 2(\lambda + \mathrm{i}\mu)z + 2a\lambda + 2b\mu + c = 0$, où a, b, c, λ, μ sont des réels tels que $-a^2 < c < b^2$. Appelant M' et M'' les images de z' et z'', déterminer l'ensemble des points $\Omega(\omega)$ pour lesquels $\Omega M'$ et $\Omega M''$ ont des directions indépendantes de λ et μ.

2 Résoudre $z^4 - (5 - 14\,i)z^2 - 2(5\,i + 12) = 0$.

3 Soit $z(M)$ et $z'(M')$ les racines de $z^2 - 2(\alpha + i\beta)z - 2(1+i) = 0$, où α et $\beta \in \mathbb{R}$. Déterminer le lieu de $A(\alpha + i\beta)$ de sorte que la droite MM' soit de pente 1. Même question pour que MOM' soit droit.

4 Résoudre l'équation $(1 - i)z^2 - (6 - 4i)z + 9 - 7i = 0$.

5 Soient z' et z'' les racines de $z^2 - 2(\lambda + i\mu)z + a\lambda + b\mu + c = 0$, où a, b, c, λ, μ sont réels. Condition pour que P, milieu de $M'(z')$ et $M''(z'')$ appartienne aux axes.

6 Déterminer les nombres $q \in \mathbb{C}$ tels que les images $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ des racines z' et z'' de $z^2 - 2(i + 2)z + q = 0$ soient orthogonales.

7 Quelle est la CNS sur $a, b, c \in \mathbb{C}$ pour que les racines z' et z'' de $az^2 + bz + c = 0$ soient imaginaires conjuguées ?

8 Décrire géométriquement l'ensemble des racines de $z^2 - tz + 1 = 0$ quand t décrit $\mathbb{R}$.

9 Une CNS pour que les équations $az^2 + bz + c = 0$ et $a'z^2 + b'z + c' = 0$ aient au moins une racine commune est que :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}.$$

Que vaut alors cette racine ?

10 Les nombres complexes a, b, c forment un triangle équilatéral ssi j et $\bar{j}$ sont racines de $az^2 + bz + c = 0$.

11 Soit $c = a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sqrt{c} = \pm\left\{\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\,\sigma(b)\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right\},$$

où $\sigma(b) = 1$ si $b \geqslant 0$ et $\sigma(b) = -1$ sinon.

5. ÉQUATIONS DIVERSES DANS $\mathbb{C}$

1 Déterminer les racines de $|z| = |1 - z| = |1/z|$.

2 Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que i, z, iz soient alignés.

3 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, le système : $z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2$, $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a}$.

4 Résoudre le système : $|z - i| = |z + 1|$, $|z + i| = |z - 2|$.

5 Résoudre le système $|z| = |(2 + i)/z| = |z - 1|$.

6 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, le système : $x + y + z = 1$, $|x| = |y| = |z| = 1$, $xyz = 1$.

7 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, $z^5 = z - \bar{z}$.

8 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, et discuter selon $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, l'équation $z^a = \bar{z}^b$.

9 Résoudre dans $\mathbb{C}$, et discuter selon $\varphi \in \mathbb{R}$, l'équation :

$$(1 + e^{i\varphi})z + (e^{2i\varphi} - 1)\bar{z} + 1 - i = 0.$$

10 Déterminer tous les ensembles de trois nombres complexes x, y, z, distincts, tels que $\{x^2, y^2, z^2\} \subset \{x, y, z\}$.

6. UTILISATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES DANS L'ÉTUDE DU TRIANGLE

1 Des CNS pour que $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ soit un triangle équilatéral sont : (1) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, (2) j ~~et~~ ou j^2 ~~sont~~ est racines de $\underbrace{az^2 + bz + c}_{\Rightarrow a = b = c\ ?} = 0$, (3) $\dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} + \dfrac{1}{a-b} = 0$.

2 L'aire du triangle $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ vaut $(1/2)\,\mathrm{im}\,(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1)$.

3 Si, sur les côtés d'un triangle ABC, on trace extérieurement des triangles équilatéraux ABC', BCA', CAB', les centres de ces triangles sont les sommets d'un autre triangle équilatéral qui a même centre de gravité que ABC.

4 En se servant des affixes, démontrez que, dans un triangle, les hauteurs sont concourantes.

5 L'équation générale d'une droite, dans $\mathbb{C}$, est de la forme $az + \bar{a}\bar{z} = t$, où $t \in \mathbb{R}$.

6 Soit ABC un triangle *équilatéral*, et M un point quelconque de son plan. Montrer que l'on peut construire un triangle dont les côtés aient pour longueurs MA, MB, MC, et ce triangle est *aplati* si M, A, B, C sont cocycliques.

7 Etant donné le triangle $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, construisez géométriquement le point $Z(z)$ tel que $z = a + jb + j^2c$.

8 Etant donné quatre nombres complexes a, b, c, d, on a toujours :

$$|b-a|^2 + |c-b|^2 + |d-c|^2 + |a-d|^2 = |c-a|^2 + |d-b|^2 + |a-b+c-d|^2.$$

9 Sur les côtés d'un triangle ABC, extérieurement, on construit des triangles PBC, QCA, RAB tels que $\widehat{PBC} = 3\alpha$, $\widehat{PCB} = 2\alpha$, $\widehat{QCA} = 2\alpha$, $\widehat{QAC} = 3\alpha$, $\widehat{RAB} = \widehat{RBA} = \alpha$. Montrer que PR et QR sont perpendiculaires et égaux.

10 Soit a, b, c des nombres complexes, α, β, γ des réels et z', z'' les racines de :

$$\frac{\alpha}{z-a}+\frac{\beta}{z-b}+\frac{\gamma}{z-c}=0.$$

Montrer que les couples de droites (AB, AC) et (AM', AM'') ont leurs bissectrices communes.

11 Soit $P(z)$ un polynôme du troisième degré, de racines a, b, c, et $P'(z)$ son dérivé, de racines f, f'. Montrer qu'il existe une ellipse de foyers f et f' inscrite dans le triangle (a, b, c).

7. UTILISATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES DANS L'ÉTUDE DE CERTAINS POLYGONES

1 Connaissant les affixes a et b de deux sommes opposés d'un *carré*, déterminer les affixes des autres sommets.

2 On considère un hexagone inscrit dans un cercle, tel que un sur deux de ses six côtés soit égal au rayon du cercle. Montrer que les milieux des trois autres côtés sont les sommets d'un triangle équilatéral. (Donner deux solutions.)

3 Une CNS pour que les images des racines complexes d'un polynôme $P(z)$ de degré 4 forment un parallélogramme est que les équations $P'(z) = 0$ et $P'''(z) = 0$ aient une racine commune.

4 Déterminer une CNS sur a et $b \in \mathbb{C}$ pour que les racines de $z^4 + z^3 + az + b = 0$ forment un losange.

5 Etant donné un quadrilatère $ABCD$, on a toujours $AC.BD \leqslant AB.CD+BC.AD$, l'égalité ayant lieu si les points $ABCD$ sont cocycliques.

6 Si toutes les racines d'un polynôme $P(z)$ sont d'un même côté d'une certaine droite (D), il en est de même pour les racines du polynôme dérivé $P'(z)$. En déduire le théorème de Lucas : les racines de $P'(z) = 0$ sont dans l'*enveloppe convexe* de l'ensemble des racines de $P(z) = 0$.

7 On suppose $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$. Alors $\sum z_k = 0$ équivaut à dire que z_1, z_2, z_3, z_4 sont les sommets d'un rectangle.

8 Montrer que l'aire (algébrique) enclose par le polygone $z_1 z_2 z_3 \ldots z_n z_1$ vaut :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \cdots + \bar{z}_{n-1} z_n + \bar{z}_n z_1).$$

9 Si les quatre nombres complexes a, b, c, d sont tels que $a+c = b+d$, $a+b\mathrm{i} = c+d\mathrm{i}$, il existe alors z tel que $z-a$, $z-b$, $z-c$, $z-d$ aient mêmes modules.

10 Sur chaque côté d'un quadrilatère convexe $ABCD$, extérieurement, on construit quatre carrés de centres P, Q, R, S. Montrer que les milieux I, J, K, L des côtés de $PQRS$ forment un carré.

8. UTILISATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES DANS L'ÉTUDE DU CERCLE

1 Une CNS pour que a, b, c, d soient cocycliques est que le *birapport* (a, b, c, d) soit réel.

2 Une CNS pour que le quadrangle a, b, c, d soit *harmonique* et que le birapport $(a, b, c, d) = -1$.

3 Montrer que le cercle d'Apollonius $|(z-a)/(z-b)| = k$ a pour rayon $|a-b|k/(1-k^2)$ et pour centre $(a-k^2b)/(1-k^2)$.

4 Soit $A(a), B(b), C(c)$ un vrai triangle, de cercle circonscrit (Γ) et de centre de gravité $G(g)$. On appelle $A'(a'), B'(b'), C'(c')$ les points d'intersection de (Γ) avec les droites AG, BG, CG. Montrer que :

$$\frac{1}{g-a'}+\frac{1}{g-b'}+\frac{1}{g-c'}=0.$$

5 Déterminer, par deux méthodes au moins, l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $(z+1)/(z-1)$ soit imaginaire pur.

6 Déterminer, par diverses méthodes, l'ensemble des points dont les affixes satisfont à $|az+b| \leqslant k$.

7 Déterminer l'affixe du centre du cercle inscrit à un triangle dont les sommets ont pour affixes a, b, c. (N.B. – On n'utilisera que a, b, c, et leurs modules.)

8 Le point $M(z)$ décrit un cercle ssi existent $a \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $z\bar{z} + az + \bar{a}\bar{z} + t = 0$.

9 Déterminez z tel que $1, z, 1/z, 1-z$ soient cocycliques.

10 Soient t et u deux réels variables. Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $z = e^{it} + e^{iu}$.

11 Soit T la transformation $z' = (az+b)/(cz+d)$, où les nombres complexes a, b, c, d satisfont à $ad-bc \neq 0$. Le transformé par T d'un cercle (C) sera désigné par (C'). (1) Quel est le lieu des centres des cercles (C) concentriques avec (C'). (2) Quel est le lieu des centres des cercles (C) tels que (C') soit orthogonal à (C) et passe par O.

9. ENSEMBLES DE NOMBRES COMPLEXES DÉFINIS PAR DES CONDITIONS GÉOMÉTRIQUES

1 Quel est l'ensemble des z tels que $(z-a)^3(z-b)^3$ soit imaginaire pur ?

2 Quel est l'ensemble des z tels que $(z-a)(z-b)$ soit réel ?

3 Caractériser les z tels que z, z^2, z^3 représente un triangle rectangle en z.

4 Déterminer les z tels que z, z^3, z^5 soient alignés.

5 Quel est l'ensemble des z alignés avec i et iz ?

6 Quels sont les $a \in \mathbb{C}$ tels que les racines de $z^3 + az + 1 = 0$ soient les sommets d'un triangle équilatéral ?

7 Déterminer les z tels que z, z^2, z^5 soient alignés (on trouve une droite et une hyperbole).

8 Caractériser les points A, B, C, distincts, dont les affixes a, b, c sont telles que $b(c-a)/c(b-a) \in \mathbb{R}$.

9 Quelle est la figure représentée par les $M(z)$ tels que $(z/a) + (a/z) = r$, où $a \in \mathbb{C}$ est donné, et r est réel variable $\geqslant 2$.

10 Caractériser z afin que l'*orthocentre* de z, z^2, z^3 soit l'origine O.

11 Caractériser z afin que le *centre du cercle inscrit* à z, z^2, z^3 soit à l'origine O.

10. TRANSFORMATIONS DE $\mathbb{C}$

1 Etudier la transformation $z' = (2 + \mathrm{i})\bar{z} + (1 - 3\mathrm{i})$.

2 Etudier l'application f : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, telle que $f(z) = az + b\bar{z}$, où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $|b| = a$. On la considérera comme une application de $\mathbb{C}$, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dans lui-même. On montrera qu'elle est linéaire, et on déterminera son noyau et son image.

3 Etudier la transformation $z' = z^2 - 2jz - 1$. Transformée de $x = 1$ et de $x^2 + y^2 = 1$.

4 Soit $\lambda > 0$ et $|u| = 1$, $u \in \mathbb{C}$. Etudiez $z' = z + |\bar{u}z - u\bar{z}|\, u$.

5 Etudier $z' = z + j^2\bar{z}$.

6 Etudiez-moi la transformation $z \to \mathrm{i}z + (1 - \mathrm{i})\bar{z}$ ... Je vous interdis de faire une étude analytique (sic !).

7 Etudiez l'image par $f(z)=(z-1-4i)/(z-4-i)$ du contour 01i0, constitué par le segment 01, l'arc de cercle unité $|z|=1$, de 1 à i, puis le segment i0.

8 Etudiez $f(z)=(1/2)(z+a^2\bar{z})$, où a est donné dans $\mathbb{C}$.

9 Déterminer les applications φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $f(\varphi(z))=f(z)$, avec:

$$f(z)=\frac{z^2+az+b}{z^2+a'z+b'}.$$

11. SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES

1 Calculez $\cos\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos(2n-1)\theta$.

2 Calculez $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos k\theta$ et $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin k\theta$.

3 Calculez $\sum_{k=1}^{n}\cos^k\theta\,.\cos k\theta$.

4 Mettez sous une forme très réduite chacune des expressions:

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{\cos^k x},\quad T_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin kx}{\sin^k x},\quad U_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{\sin^k x}.$$

5 On a:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2 kx=\frac{n}{2}+\frac{\cos(n-1)x.\sin nx}{2\sin x}.\ \text{Que vaut}\ \sum_{k=0}^{n-1}\sin^2 kx\ ?$$

6 Calculez $n\cos\theta+(n-1)\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta$.

7 Démontrez que $\cos nx$ peut s'exprimer sous forme d'un polynôme en $\cos x$:

$$2\cos nx=\sum_{0\leqslant k\leqslant n/2}(-1)^k\left\{\binom{n-k}{k}+\binom{n-k-1}{k-1}\right\}(2\cos x)^{n-2k}.$$

8 Démontrez que $\sin(n+1)x/\sin x$ peut s'exprimer sous forme d'un polynôme en $\cos x$:

$$\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}=\sum_{0\leqslant k\leqslant n/2}(-1)^k\binom{n-k}{k}(2\cos x)^{n-2k}.$$

9 Montrez que $\sum\cos(\pm a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n)=2^n\cos a_1\cos a_2\ldots\cos a_n$.

10 Démontrez que: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)=n(n-1)$.

CHAPITRE 5

Arithmétique

1. CALCULS DANS LE SYSTÈME BINAIRE

1 Appelons $x_n = 1000\ldots001$ l'entier à n chiffres tous égaux à 0 sauf ceux des bouts qui valent 1, en base 2. Déterminer l'écriture binaire de x_n^2 et x_n^3. Quelle est l'écriture de $x_n^3 - x_n^2 + x_n$?

2 Soit u_k l'entier positif dont l'écriture binaire consiste en k chiffres 1 suivis de $k+1$ chiffres 0, suivis encore d'un seul chiffre 1. Ainsi, $u_2 = 110001$. Montrer que u_k est le carré d'un certain entier v_k dont on déterminera l'écriture binaire.

3 Calculer le cube, base deux, de l'entier u_k qui s'écrit, dans cette base, avec k chiffres 1 consécutifs.

4 Soit x_n l'entier d'écriture binaire $10101\ldots101$, constitué de $2n+1$ chiffres 0 et 1 alternés. Quelle est l'écriture binaire de x_n^2 ? et celle de x_n^3 ?

5 Soit x_n l'entier d'écriture binaire $111\ldots111$, constitué de n chiffres 1 juxtaposés, et y_n l'entier d'écriture binaire $10101\ldots101$, constitué de $2n+1$ chiffres 0 ou 1, alternés. Quelle est l'écriture binaire de $y_n - x_n$ et de $x_n y_n$?

6 Soit x_n l'entier d'écriture binaire $111\ldots11$, constitué de n chiffres 1 juxtaposés. Quelle est l'écriture binaire de l'entier $y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, connaissant celle de n ?

7 Connaissant l'écriture binaire de l'entier n, déterminez celle de $\sum_{k=0}^{n} (k+1)\,2^k$.

8 Pour n fixé et k variable, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, le nombre de coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ qui sont *impairs* vaut 2^q, où q est le nombre de 1 de l'écriture binaire de n.

2. CALCULS DANS LE SYSTÈME DÉCIMAL

1 Montrer qu'un nombre *impair*, non divisible par 5, possède toujours en base 10 un multiple qui ne s'écrit qu'avec des 1. Par exemple, $15\,873 \times 7 = 111\,111$, $3\,367 \times 33 = 111\,111$.

2 Déterminer les couples de carrés parfaits (A, B), $A = a^2, B = b^2$, tels que tout chiffre de B égale le chiffre de même rang de A, augmenté de 1. Par exemple, $A = 2\,025 = 45^2$, $B = 3\,136 = 56^2$; $A = 13\,225 = 115^2$, $B = 24\,336 = 156^2$.

3 Trouver tous les entiers $x \geqslant 1$ dont le produit des chiffres base 10 est égal à $x^2 - 10x - 22$.

4 En base 10, déterminer les entiers dont les deux derniers chiffres sont les mêmes que ceux de leur carré. Généraliser à plus de deux chiffres (exemple : $\leftarrow \dots 181\,787\,109\,376$).

5 En base 10, déterminer un entier se terminant par 4 et dont les cinq derniers chiffres soient les mêmes que ceux de son cube.

6 Soit A la somme des chiffres de $4\,444^{4444}$ et B la somme des chiffres de A, base 10. Trouver la somme des chiffres de B.

7 Montrer qu'un entier écrit avec k chiffres en système décimal nécessite au moins $3k - 2$ chiffres et au plus $4k$ chiffres en système binaire, ces inégalités n'étant pas d'ailleurs les meilleures possibles.

8 Trouver, base 10, un entier x à trois chiffres, tel que les entiers x, $2x$, $3x$ utilisent ensemble exactement une fois les chiffres $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

3. CALCULS EN BASE QUELCONQUE

1 Soit a_k l'entier qui, en base $q \geqslant 2$, s'écrit $111 \dots 11$, avec k chiffres 1 juxtaposés. Calculer la somme $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}$.

2 En base $b \geqslant 4$, on a toujours $11^3 = 1\,331$. Généraliser.

3 En base $b \geqslant 2$, on a le développement : $(b-1)^{-2} = 0{,}0123 \dots (b-1)0123 \dots (b-1) \dots$

4 Le nombre $u_k(a)$ qui, en base $a \geqslant 2$, s'écrit avec k chiffres 1 juxtaposés peut-il être un carré parfait ?

5 En base $b \geqslant 4$, on a toujours $10.11.12.13 = (131)^2$. Généraliser.

6 Montrer qu'en base $b \geqslant 5$, les nombres 121, 12 321, 1 234 321 sont des carrés parfaits. Généraliser.

7 On insère 48 ou milieu de 49, ce qui donne le nombre 4 489 qui est encore un carré parfait. On recommence, d'où 444 889, etc. Montrer qu'on obtient toujours des carrés parfaits. Généraliser en base quelconque.

8 Montrer qu'en base quelconque ($\geqslant 2$), l'entier $10\,000\,100\,001$ n'est jamais premier.

9 Le chiffre des unités en base 12 de tout carré est lui-même un carré. Quelles sont les autres bases jouissant de cette propriété ?

10 Pour tous entiers g et $s \geqslant 2$, appelons $f(n)$ la somme des puissances s-ièmes des chiffres de l'écriture base g de n ($\geqslant 0$). Montrer que la suite $n, f(n), f(f(n))$, $f(f(f(n)))$, ... , est périodique à partir d'un certain rang. Par exemple, si $g = 10$, $s = 2$, on trouve les deux périodes: $\{1\}$ ou $\{4,16,37,58,89,145,42,20\}$.

4. ÉQUATIONS EN NOMBRES ENTIERS ISSUES DE PROBLÈMES DE NUMÉRATION

1 Existe-t-il des entiers n tels que n et n^4 aient mêmes chiffres des dizaines et des unités ?

2 Déterminer le plus petit entier n, s'il existe, pour lequel 7 divise le nombre a_n d'écriture base 10 constituée de n chiffres 1 juxtaposés.

3 Résoudre $aabb_{10} = x^2$.

4 Trouver un nombre de 4 chiffres $abcd$ qui, en base 10, soit un carré parfait ainsi que son retourné $dcba$. Par exemple $1\,089 = 33^2$ et $9\,801 = 99^2$.

5 Résoudre $xyz_{12} = xyz0_5$.

6 Résoudre $(2k-1)^2 + (2k+1)^2 + (2k+3)^2 = xxxx_{10}$.

7 Trouver une permutation (α, β, γ) des chiffres (a, b, c) telle que $abc_9 = \alpha\beta\gamma_{13}$.

8 Résoudre $xyz_7 = zyx_{11}$.

9 Résoudre $341_{10} = 2\,331_a$.

10 Le nombre 276 peut-il être un carré parfait dans une certaine base ?

5. REPRÉSENTATIONS PARTICULIÈRES DES NOMBRES ENTIERS

1 Montrer que tout entier $x \geqslant 0$ s'écrit de manière unique :

$$x = 1!x_1 + 2!x_2 + 3!x_3 + \cdots,$$

où chaque entier x_k est tel que $0 \leqslant x_k \leqslant k$.

2 Soit k un entier donné $\geqslant 1$. A tout entier $n \geqslant 1$ est associée une suite unique d'entiers b_i tels que $n = \binom{b_1}{1} + \binom{b_2}{2} + \cdots + \binom{b_k}{k}$, où $0 \leqslant b_1 < b_2 < \ldots < b_k$.

3 Soit k un entier donné $\geqslant 1$. A tout entier $n \geqslant 1$ est associée une suite unique d'entiers c_i tels que $n = \binom{c_1+1}{1} + \binom{c_2+2}{2} + \cdots + \binom{c_k+k}{k}$, où $0 \leqslant c_1 < c_2 < \ldots < c_k$.

4 Etudier la représentation de tout entier $n \geqslant 1$ ou une somme d'entiers x_1, $x_2, \ldots, x_k$, k dépendant de n, de telle sorte que $0 < x_1$, $x_1^2 < x_2, x_2^2 < x_3$, $\ldots, x_{k-1}^2 < x_k$.

5 Appelons $p(n)$ le nombre de représentations de l'entier $n \geqslant 1$ comme somme d'entiers strictement positifs, croissants au sens large. Par exemple, $p(2) = 2$ car $2 = 1+1$, $p(3) = 3$ car $3 = 1+2 = 1+1+1$, $p(4) = 5$ car $5 = 1+4 = = 2+3 = 1+2+2 = 1+1+1+1+1$. Montrer que $p(n)$ tend vers l'infini en croissant et est convexe.

6 Soit a_n le nombre de solutions de $\sum_{k=-n}^{n} kx_k = 0$, où $x_k = 0$ ou 1. Montrer que $a_n \to \infty$.

7 Montrer l'existence, pour tout entier $x \in \mathbb{Z}$, d'une suite *unique* d'entiers $x_i \in \{-1, 0, 1\}$ tels que $x_k \neq 0$ (k dépendant de n) et $x = x_0 + 3x_1 + 3^2x_2 + + \cdots + 3^k x_k = x_k x_{k-1} \ldots x_1 x_0$. C'est l'écriture base 3 *symétrique* de x. On notera $\overline{1}$ pour -1, de sorte que, par exemple, $8 = 10\overline{1}$. L'opposé d'un nombre s'obtient alors en échangeant les 1 et $\overline{1}$. Le signe de x est le signe de son premier chiffre x_k. On peut d'ailleurs aussi introduire des développements avec « virgule » : $1/2 = 0{,}1111, \ldots, 32\frac{5}{9} = 11\overline{1}0{,}\overline{1}\,\overline{1}$.

8 Pour tout entier $g \leqslant -2$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a une écriture *unique* $n = c_0 + c_1 g + + c_2 g^2 + \cdots + c_N g^N$, où, pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, les entiers rationnels c_k satisfont à $0 \leqslant |c_k| < -g$.

6. DIVISIBILITÉ ET ÉCRITURES EN CERTAINES BASES

1 Montrer que, dans toute base $a \geqslant 3$, l'entier $11\,211_a$ n'est jamais premier.

2 Enoncez et démontrez les preuves par 9 et par 11 de la multiplication.

3 Pour tout entier $a \geqslant 1$, montrer que le reste de la division de $(a^2+(a-1)^2)^2$ par $4a^2$ est $(2a-1)^2$.

4 Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, existe un nombre premier dont la représentation binaire a pour dernier chiffre 1 précédé de n zéros.

5 Soit a un entier $\geqslant 2$, et m et n deux entiers $\geqslant 1$. Montrer que m divise n si $a^m - 1$ divise $a^n - 1$. En déduire : $(a^m-1, a^n-1) = a^{(m,n)} - 1$.

6 Soit a un entier $\geqslant 2$, et m et n deux entiers $\geqslant 1$. Montrer que si m et n sont premiers entre eux, il en est de même pour $1+a+a^2+\cdots+a^{m-1}$ et $1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}$. Réciproque ?

7 Soit a un entier $\geqslant 2$, et m et n deux entiers $\geqslant 1$. Est-il vrai que :

$$(a^m+1,\ a^n+1) = a^{(m,n)}+1 \ ?$$

8 (1) Tout nombre d qui divise la base d'un système de numération, diminuée d'une unité, ainsi que la somme des chiffres d'un nombre n, écrit dans ce système, divise aussi ce nombre. (2) Tout nombre d qui divise la base et le chiffre des unités de n, écrit dans cette base, divise aussi ce nombre n.

7. DIVISION EUCLIDIENNE, IDENTITÉ DE BEZOUT, ALGORITHME D'EUCLIDE

1 Déterminer les entiers n pour lesquels le reste de la division de 19^n par 7 est 2.

2 Tout rationnel $r = a/b > 0$ admet une décomposition du type « égyptien » :

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_n},$$

où (q_k) est une suite strictement croissante d'entiers. La décomposition n'est pas unique.

3 Si l'on réduit en fraction décimale une fraction irréductible a/b, qui donne naissance à un développement périodique simple, la longueur de la période est le plus petit entier n tel que b divise 10^n-1. Il est par conséquent indépendant du numérateur a.

4 Si b est un nombre premier, et si la fraction irréductible a/b possède un développement périodique de longueur $2n$, la somme du nombre formé par les n premiers chiffres de la période et du nombre formé par les n derniers sera un nombre dont les n chiffres sont des 9.

5 Soit $1 < a_1 < a_2 < a_3 \leqslant \ldots$ une suite infinie d'entiers. Démontrez que, pour une infinité d'indices m, existent deux indices distincts p et q, et deux entiers x et $y \geqslant 1$, tels que $a_m = xa_p + ya_q$.

6 On se donne $A \subset \mathbb{N}$ et deux entiers p et q positifs, premiers entre eux. Montrez que les trois conditions suivantes : (1) $0 \in A$; (2) $(n \in A) \Rightarrow (n+p \in A)$; (3) $(n \geqslant q,\ n \in A) \Rightarrow (n-q \in A)$ impliquent que $A = \mathbb{N}$.

7 Soient a et b deux entiers $\geqslant 2$, premiers entre eux. On pose :

$$S = \{ax + by \mid x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N}\}.$$

Montrer qu'il existe un entier m_0, le plus petit possible, tel que $(m \geqslant m_0) \Rightarrow (m \in S)$. Prouver que $m_0 = (a-1)(b-1)$.

8. PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET ENTIERS PREMIERS ENTRE EUX

On notera habituellement (a, b) le PGCD de a et b.

1 Soit δ le PGCD des entiers a et b. Calculer le PGCD de a^2, ab, b^2, puis celui de a^3, a^2b, ab^2, b^3.

2 On définit les entiers a_n et b_n par $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Montrer qu'ils sont premiers entre eux et étudier la limite de a_n/b_n.

3 Quelles sont les diverses valeurs possibles du PGCD de $5n^3 - n$ et $n+2$, où $n \in \mathbb{Z}$?

4 Soit $F_n = 2^{2^n} + 1$. Alors, si $m \neq n$, $(F_m, F_n) = 1$. Prouver aussi que F_n divise $2^{F_n} - 2$.

5 Soit $M_n = 2^n - 1$ la suite des nombres de Mersenne. Montrer que $(M_k, M_l) = M_{(k,l)}$.

6 Résoudre et discuter, dans $\mathbb{N}^*$, le système : $x + y = s$, $(x, y) = d$.

7 Résoudre et discuter, dans $\mathbb{N}^*$, le système : $xy = p$, $(x, y) = d$.

8 Quel est le PGCD de $a^m + 1$ et de $a^n + 1$?

9 Soit $N = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble de n entiers tous $\geqslant 1$. Appelant P_k le produit des $\binom{n}{k}$ PPCM de chaque partie à k éléments de N, montrer que le PGCD de N vaut :

$$\frac{P_1 P_3 P_5 \ldots}{P_2 P_4 P_6 \ldots}$$

9. PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

On notera habituellement $[a, b]$ le PPCM de a et b.

1 Montrer la distributivité du PGCD par rapport au PPCM, et vice-versa.

2 Résoudre et discuter, dans $\mathbb{N}^*$, $x + y = s$, $[x, y] = m$.

3 Résoudre et discuter, dans $\mathbb{N}^*$, $xy = p$, $[x, y] = m$.

4 Résoudre et discuter, dans $\mathbb{N}^*$, $(x, y) = d$, $[x, y] = m$.

5 Résoudre, dans $\mathbb{N}^*$, $[x, y] - (x, y) = 243$.

6 Résoudre, dans $\mathbb{N}^*$, $[x,y]-3(x,y)=135$.

7 Résoudre, dans $\mathbb{N}^*$, $x+y=84$, $[x,y]=(x,y)^2$.

8 Le PPCM de $1,2,3,\ldots,2n-1,2n$ est égal à celui de $n+1, n+2, \ldots, 2n$.

10. PROPRIÉTÉS DE L'ANNEAU $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Dans cette section, on écrira souvent $\mathbb{Z}_n$ au lieu de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour abréger.

1 Montrer que $a^3+b^3+c^3\equiv 0$, mod 7, entraîne $abc\equiv 0$, mod. 7.

2 Si 7 divise a^2+b^2, alors 7 divise a et b.

3 Si 9 divise $a^3+b^3+c^3$, alors 3 divise a ou b ou c.

4 Montrer que toute application f de $\mathbb{Z}_p$ dans lui-même, p premier, coïncide avec une application polynomiale. (Étudier d'abord le nombre de telles applications.)

5 Calculer, dans $\mathbb{Z}_n$, le produit de toutes les classes non nulles.

6 Connaissant la décomposition en facteurs premiers de n, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, déterminer le nombre de diviseurs de zéro de l'anneau $\mathbb{Z}_n$.

7 Si a et b sont premiers entre eux, il existe un isomorphisme entre $\mathbb{Z}_{ab}$ et $\mathbb{Z}_a\times\mathbb{Z}_b$.

8 Dans $\mathbb{Z}_p$, p premier, étudier la suite (u_n) telle que $u_{n+1}=1-1/u_n$, $u_0\neq\dot{0}$, et montrer qu'elle est périodique. En déduire le nombre de racines, dans $\mathbb{Z}_p$, de $x^2-x+1=0$.

9 Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ sont de la forme $\pm\,\dot{5}^k$, où $k\in\mathbb{N}$.

10 Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z}$ sont de la forme $\pm\,\dot{2}^k$, où $k\in\mathbb{N}$.

11. QUELS SONT LES ÉLÉMENTS D'UNE SUITE DIVISIBLES PAR UN CERTAIN ENTIER?

1 Déterminer les entiers $n\in\mathbb{Z}$ tels que 7 divise n^2+n-2, puis les entiers n tels que 3 divise n^2+n-2.

2 Pour tout entier n impair, 512 divise $n^{12}-n^8-n^4+1$.

3 Pour quelles valeurs de $n\in\mathbb{Z}$ l'entier $n^2+(n+1)^2+(n+3)^2$ est-il un multiple de 10 ?

4 Montrer que 121 ne divise jamais $n^2 + 3n + 5$.

5 Montrer que 65 ne divise jamais $4n^2 + 1$.

6 La somme des cubes de trois entiers consécutifs quelconques est divisible par 9.

7 Montrer que 25 divise $2^{n+2} . 3^n + 5n - 4$, $n \geqslant 1$.

8 Montrer que 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$, $n \geqslant 0$.

9 Montrer que 52 divise toujours $10^{3n+2} + 4(-1)^n$, $n \geqslant 0$.

10 Montrer que 11 divise $2^{6n+1} + 3^{2n+2}$, $n \geqslant 0$.

11 Montrer que 169 divise $3^{3n} - 26n - 1$ pour des entiers n que l'on déterminera.

12 Montrer que 7 ne divise jamais $2^n + 1$.

13 Montrer que 10 divise $2^{2^n} - 6$, $n \geqslant 2$.

14 Montrer que 41 divise $5.7^{2(n+1)} + 2^{3n}$, $n \geqslant 0$.

15 Montrer que 21 divise $2^{4^n} + 5$.

12. AUTRES PROBLÈMES DE DIVISIBILITÉ

1 Montrer que 56 786 730 divise toujours $mn(m^{60} - n^{60})$, où m et $n \in \mathbb{N}$.

2 Montrer que 13 divise $2^{70} + 3^{70}$.

3 Déterminer le quotient et le reste de la division de $n^2 + 3n + 1$ par $n - 1$.

4 Montrer que $11.31.61$ divise $20^{15} - 1$.

5 Montrer que 3^{n+2} divise $10^{3n} - 1$.

6 Pour tout entier $n \geqslant 1$, 2^{n+1} divise $E((1 + \sqrt{3})^{2n+1})$.

7 Déterminer tous les entiers $n \geqslant 1$ qui sont divisibles par tous les entiers $\leqslant \sqrt{n}$.

8 Montrer que tout entier positif a au moins autant de diviseurs de la forme $3k + 1$ que de diviseurs de la forme $3k - 1$.

13. DÉTERMINATION DU DERNIER CHIFFRE DE CERTAINS ENTIERS ET RESTE DE CERTAINES DIVISIONS

1 Le chiffre des unités, base 10, de $u_n = 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^n$, vaut 1 si n est pair, et 5 si n est impair.

2 Déterminer le chiffre des unités, base 10, de $u_n = 1 + 6 + 6^2 + \cdots + 6^n$.

3 Toutes les puissances d'un nombre terminé par 12 890 625 se terminent aussi de la même façon. Problème analogue au binaire.

4 Montrer que le chiffre des dizaines de mille d'une puissance quelconque de 5 n'est ni 3 ni 8.

5 Déterminer le chiffre des unités et des dizaines de 2^{1000}.

6 Quel est le reste de la division de 19^{52} par 8 ?

7 Quel est le reste de la division par 7 de $1\,973^{3791} + 3\,791^{1973}$?

8 Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et une suite (u_n) définie par $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$, où l'on connaît les valeurs initiales $(u_0, u_1) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer la périodicité de (u_n).

9 Quel est le reste de la division de $4\,314^{76}$ par 9 ?

14. ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ EN NOMBRES ENTIERS

1 Résolvez, dans $\mathbb{N}$, l'équation : $10x + 15y + 6z = 73$.

2 Résolvez, dans $\mathbb{N}$, le système : $x - 2y + z = 0, \quad x + 2y - 2z = 1$.

3 Résolvez le système de congruences : $x \equiv 1$, mod 2 ; $x \equiv 0$, mod 4.

4 Résoudre, dans $\mathbb{Z}_{12}$, le système : $2x - 3y = 1, \quad 3x + 5y = 5$.

5 Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, le système : $2x + 5y - 11z = 1, \quad x - 12y + 7z = 2$.

6 Une CNS pour que $ax \equiv b$, mod m, soit soluble est que (a, m) divise b. Dans ce cas, il y a (a, m) solutions, mod m.

7 Résoudre et discuter, dans $\mathbb{Z}_5$, le système : $ax + y = 2, \quad x + ay = 3$.

8 Soient $m_1, m_2, \ldots, m_k$ des entiers positifs premiers entre eux deux à deux. Alors, le système : $x \equiv a_1$, mod m_1, $\ldots$, $x \equiv a_k$, mod m_k, admet une solution unique dans $\mathbb{Z}_m$, où $m = m_1 m_2 \ldots m_k$ (théorème « chinois »). Plus généralement, une CNS pour que le système $x \equiv a_i$, mod m_i, où $i = 1, 2, \ldots, k$, soit soluble est que, pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant k$, on ait (m_i, m_j) divise $a_i - a_j$; la solution, si elle existe, est unique, modulo le PPCM de $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

15. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ EN NOMBRES ENTIERS

1 Le produit de trois entiers consécutifs n'est jamais un carré parfait.

2 Résoudre, en entiers positifs, l'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

3 Résoudre $x^2 - x + 1 \equiv 0$, mod 7.

4 Résoudre $x^2 + x + 1 \equiv 0$, mod 13.

5 On vous donne une feuille de papier quadrillé. Peut-on construire un triangle équilatéral dont les sommets appartiennent aux croisées du quadrillage ? Même question avec un triangle isocèle dont les angles sont $\pi/5$ et $2\pi/5$.

6 Si $n \geqslant 5$, il existe toujours au moins un carré parfait entre n et $2n$, strictement.

7 Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, $x^2 - 2y^2 = 1$. En déduire une suite de rationnels encadrant $\sqrt{2}$.

8 Résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'équation $(x - y)/(x^2 + xy + y^2) = 2/67$.

9 Résoudre, dans $\mathbb{N}^*$, l'équation : $(1/x) + (1/y) = 1/z$.

10 Peut-il exister un quadrilatère à côtés entiers et à diagonales perpendiculaires ?

16. ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES EN NOMBRES ENTIERS DE DEGRÉ $\geqslant 3$

1 Résoudre, dans $\mathbb{N}^*$, $(1/x) + (1/y) + (1/z) = 1$.

2 Montrer que l'équation $x^4 + y^4 = z^4$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{N}^*$.

3 Résoudre $x^3 - 1 \equiv 0$, mod 19.

4 Les seules solutions de $x^3 + y^3 = y^6$ dans $\mathbb{N}^2$ sont (0,0) et (0,1).

5 Pour a entier $\geqslant 1$, le seul cas où $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ est un carré parfait est celui où $a = 3$.

6 Pour a entier $\geqslant 0$, le seul cas où $5+2a+2a^2+2a^3+a^4$ est un carré parfait est celui où $a=2$.

7 Résoudre $x^3+3x^2+3x-7\equiv 0$, mod 8.

8 Si a est racine de $f(x)\equiv 0$, mod m, où f est un polynôme à coefficients entiers, alors $x-a$ divise $f(x)$, mod m, et inversement. En déduire qu'il y aura au plus un nombre de racines égal au degré de f.

9 Montrer que $x^3+y^3=z^3$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{N}^*$.

17. ÉQUATIONS EN NOMBRES ENTIERS DANS LESQUELLES L'INCONNUE INTERVIENT EN EXPOSANT

1 Déterminer les entiers n tels que 7 divise $2^{2n}+2^n+1$.

2 Déterminer les entiers n tels que 3 divise $5^{2n}+5^n+1$.

3 Résoudre, dans $\mathbb{N}$, le système : $2^x-5^y\equiv 1$, mod 24 ; $2^x-5^y\equiv -1$, mod 24.

4 Déterminer les entiers $n\geqslant 2$ qui divisent $\sum_{k=1}^{n} k^n$.

5 Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $x^2-10x-22=p(x)$, où $p(x)$ désigne le produit des chiffres de l'écriture de x dans le système décimal.

6 Déterminer les n tels que 3 divise $n\,2^n+1$. Même question avec 5.

7 Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $x^y=y^x$. Dans $\mathbb{Q}$, les solutions sont de la forme $x=(1+(1/n))^n$ et $y=(1+(1/n))^{n+1}$, où $n\in\mathbb{N}^*$.

8 Résoudre $19^n\equiv 2$, mod 7.

9 Résoudre $2^n\equiv 1$, mod 9.

10 Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $x^y=z\,!$.

18. PROPRIÉTÉS DES NOMBRES PREMIERS

Dans cette section, $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers, $\mathbb{P}=\{p_1,p_2,p_3,\dots\}=\{2,3,5,\dots\}$.

1 Pour tout entier positif k existe un entier n tel que l'intervalle $\{n,\ n+1,\dots,n+k-1\}$ ne contienne aucun nombre premier. (En d'autres termes, $\sup_n\,(p_{n+1}-p_n)=+\infty$).

2 Pour $m \neq n$, montrer que $(2^{2^m}+1, 2^{2^n}+1)=1$. En déduire que $\mathbb{P}$ est infini.

3 Soit $E(\subset \mathbb{N})$ l'ensemble des entiers qui sont multiples de 2 ou de 3. Montrer que E est constitué d'intervalles alternativement de longueur 1 et 3. Généraliser.

4 Montrer que $p_{n+1} < 2^{2^n}$.

5 Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4n-1$.

6 Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4n+1$.

7 Montrer que $p_1 p_2 \ldots p_n \geqslant p_{n+1} + p_{n+2}$ si $n \geqslant 3$.

8 Soit p un nombre premier. Montrer que, pour $q \geqslant p$, tout diviseur premier de $(q!^p - 1)(q! - 1)^{-1}$ est congru à 1 modulo p. En déduire l'existence d'une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo p.

9 Soit q_n le plus petit nombre premier ne divisant pas n. Alors $\lim (q_n/n) = 0$.

19. LA DÉCOMPOSITION EN FACTEURS PREMIERS

1 Pour a et n entiers, $a \geqslant 0$, $n \geqslant 2$, l'entier $(1+a+a^2+\cdots+a^n)^2 - a^n$ est composé.

2 Soient m et n deux entiers positifs tels que $n^2 - m^2$ soit premier. Montrer qu'ils sont consécutifs.

3 Le nombre de manières de séparer $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ en facteurs premiers entre eux est 2^{k-1}.

4 Quelle que soit la base de numération, les nombres représentés par 10101, 101010101, 1010101010101, etc. sont tous composés.

5 Montrer que tout entier $n \geqslant 1$ satisfait à $n = \sum [\sqrt{n/k}]$, la sommation ayant lieu sur tous les entiers $k \geqslant 1$ qui sont « libres de carrés », c'est-à-dire dont la décomposition en facteurs premiers a tous ses exposant égaux à 1.

6 Montrer que le rationnel $(5n)!/(40^n \cdot n!)$ est entier.

7 Prouver que si l'un des deux nombres $2^n - 1$ et $2^n + 1$ est premier, $n \geqslant 3$, l'autre est composé.

8 Prouver que si p et $8p^2+1$ sont *premiers*, alors $8p^2-1$ est *aussi premier*.

9 Prouver que si p et $8p-1$ sont *premiers*, alors $8p+1$ est *composé*.

10 *Formule de Legendre* — L'exposant du nombre premier p dans la décomposition de $n!$ vaut :

$$e_p(n!) = [n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + \cdots$$

11 En utilisant la formule de Legendre, ou autrement, montrer que $\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$ est entier.

12 En utilisant la formule de Legendre, ou autrement, montrer que tout coefficient binomial $\binom{n}{k}$, dans lequel $2 \leqslant k \leqslant n-2$, ne saurait être égal à une puissance de nombre premier.

20. CONGRUENCES SELON UN MODULE PREMIER

1 Soit p un nombre premier > 17. Alors 16 320 divise $p^{16} - 1$.

2 Soit p un nombre premier et k un entier tel que $2 \leqslant k \leqslant p-1$. Montrer que p divise $\binom{p}{k}$. En déduire le *théorème de Fermat*, $n^p \equiv n$, mod p, en utilisant les congruences, modulo p :

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p, \ldots, (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^p \equiv a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p.$$

3 Démontrer le *théorème de Wilson* : p est premier ssi p divise $(p-1)! + 1$.

4 Montrer que $x^3 \equiv 1, \bmod p,\ x \not\equiv 1,\ x^2 \not\equiv 1$ entraîne $(x+1)^6 \equiv 1$.

5 Si p est premier, $x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1) \equiv x^p - x$, mod p.

6 Etudier l'application de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ telle que $x \mapsto x^2$.

7 Si a et b sont des entiers naturels et p un nombre premier, on a $a^p - b^p \equiv 0$, mod p^2, ou $a^p - b^p \not\equiv 0$, mod p.

8 Pour tout nombre premier p existent des entiers x et y tels que :

$$x^2 + 6xy + y^2 \equiv 2, \bmod p.$$

9 Tout nombre premier p divise $\binom{p-1}{k} + (-1)^{k-1}$.

10 Tout nombre premier p divise $[(2+\sqrt{5})^p] - 2^{p+1}$.

11 Tout nombre premier p divise $\binom{n}{p} - [n/p]$.

12 Pour tout nombre premier $p \geqslant 5$, montrer que le numérateur de la fraction égale à $\sum_{k=1}^{p-1}(1/k)$ est divisible par p^2. Par exemple :

$$1 + (1/2) + (1/3) + (1/4) = 25/12.$$

21. LA SUITE DE FIBONACCI ET SES PARENTES

Pour cette suite, deux notations sont utilisées : soit (F_n), où $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, soit (f_n), où $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Evidemment $F_n = f_{n+1}$.

1 La suite f_n est le nombre de parties de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dont deux éléments quelconques ne sont pas consécutifs.

2 Soit $f_0 = 0, f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Pour que $f_j = (1/2)(f_i + f_k)$, il faut et il suffit que $k = j+1$ et $i = j-2$.

3 Soit $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Alors u_n est toujours impair et $(u_n, u_{n+1}) = (u_n, u_{n+2}) = 1$.

4 Quel est le nombre de suites finies $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$, k variable, $x_i = 1$ ou 2, avec $\sum u_i = n+1$?

5 Montrer que $F_n = \sum_k \binom{n-k}{k}$.

6 Si (u_n) satisfait à $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, alors $v_n = u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2$ satisfait à une récurrence extrêmement simple. Généraliser.

7 Posant $\alpha = (1 - \sqrt{5})/2$ et $\beta = (1 + \sqrt{5})/2$, montrer que $f_n = (\beta^n - \alpha^n)/\sqrt{5}$.

8 Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de f_n se terminant par quatre zéros.

9 Montrer que 2, 3, 5, 10 divisent respectivement $f_{3n}, f_{4n}, f_{5n}, f_{15n}$.

10 Montrer que $F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{2n}$. Peut-on aussi «linéariser» $F_{n-2}^2 + F_{n-1}^2 + F_n^2$?

11 Montrez que les solutions dans $\mathbb{N}$ de $x + y = z$, $|xz - y^2| = 1$ sont de la forme (a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) où $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

12 Montrer que 2 est la limite de :

$$u_n = f_0 + (f_1/2) + (f_2/2^2) + \cdots + (f_n/2^n).$$

13 Montrer que $f_{2n} = \sum_k \binom{n}{k} f_k$.

14 Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + (-1)^n u_n$, $n \geqslant 0$.

15 Calculer $S_n = (f_2/f_1 f_3) + (f_3/f_2 f_4) + \cdots + (f_{n+1}/f_n f_{n+2})$.

22. FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

1 Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n, $d(1) = 1, d(2) = 2, d(3) = 2, d(4) = 3, \ldots$ Connaissant la décomposition de n en facteurs premiers, calculer $d(n)$. En déduire que $d(ab) = d(a)d(b)$ si $(a, b) = 1$.

2 Appelant $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n, montrer que $\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$ si $(a,b)=1$.

3 Le produit de tous les diviseurs de n vaut $n^{d(n)/2}$.

4 Etudier le *nombre* de solutions en entiers x et $y \geqslant 1$ de $(1/x)+(1/y)=1/n$.

5 Soit $\mu(n)$ la suite définie par $\mu(n)=0$ si n possède au moins un diviseur qui est carré parfait >1, et $\mu(n)=(-1)^k$ si $n=p_1 p_2 \dots p_k$, où les p_i sont des nombres premiers distincts. On pose $\mu(1)=1$. (1) Montrer que $\mu(ab)=\mu(a)\mu(b)$ si $(a,b)=1$. (2) Montrer que $\sum_{d/n} \mu(d)=0$ pour tout $n \geqslant 2$.

6 La somme des diviseurs des nombres $1, 2, 3, \dots, n$ vaut la somme des plus grands multiples de ces nombres inférieurs ou égaux à n.

7 Déterminer les entiers positifs dont le produit des diviseurs vaut 20^{42}.

8 Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout nombre premier p, montrer que n divise $\varphi(p^n-1)$.

9 Soit $d(n)$ le nombre des diviseurs de n, et $s(n)$ leur somme. Alors $s(n)/d(n) \geqslant \sqrt{n}$.

10 Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Alors $\sum_{k=1}^{n} d(k) \sim n \,.\, \ln n$.

23. UTILISATION DE LA PARTIE ENTIÈRE EN ARITHMÉTIQUE

La *partie entière* de x, c'est-à-dire le plus grand entier $\leqslant x$, se note $E(x)$ ou $[x]$.

1 Soit $r>0$ et T le nombre de points entiers dans le disque $x^2+y^2 \leqslant r^2$. Montrer que :

$$T = 1 + 4[r] + 8 \sum_{0<x\leqslant r/\sqrt{2}} [\sqrt{r^2-x^2}] - 4\,[r/\sqrt{2}]^2 .$$

2 Pour $n \in \mathrm{N}^*$, soit T le nombre de points entiers dans le domaine $x>0, y>0$, $xy \leqslant n$. Alors :

$$T = 2 \sum_{0<x\leqslant\sqrt{n}} [n/x] - [\sqrt{n}]^2 .$$

3 Soit $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 2$ des entiers. Si x décrit tous les entiers >0 qui ne sont divisibles par aucune puissance m-ième d'entiers >1, on a :

$$\sum_x [\sqrt[m]{n/x}\,] = [n].$$

4 Déterminez les entiers rationnels a et b, et les entiers positifs x tels que $x = [(x^2 + ax + b)^{1/2}]$.

5 Etudier $u_n = E((1/2)(1 + E(\sqrt{8n - 7})))$.

6 Si p est un nombre premier de la forme $4n + 1$, alors:

$$[\sqrt{p}] + [\sqrt{2p}] + [\sqrt{3p}] + \cdots + \left[\sqrt{\frac{p-1}{4}p}\right] = \frac{p^2 - 1}{12}.$$

7 Soit m et n deux entiers positifs *impairs* premiers entre eux. On pose $m' = (m - 1)/2$, $n' = (n - 1)/2$. Montrer que:

$$\left[\frac{n}{m}\right] + \left[\frac{2n}{m}\right] + \cdots + \left[\frac{m'n}{m}\right] + \left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{2m}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{n'm}{n}\right] = m'n'.$$

8 Soit m et n deux entiers pontifs premiers entre eux. Alors:

$$\left[\frac{n}{m}\right] + \left[\frac{2n}{m}\right] + \left[\frac{3n}{m}\right] + \cdots + \left[\frac{(m-1)n}{m}\right] = \frac{(m-1)(n-1)}{2}.$$

9 Démontrer la formule suivante concernant l'indicatrice d'Euler:

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{(n, k)}\right].$$

CHAPITRE 6

Algèbre générale et polynômes

1. LOIS DE COMPOSITION

1 Montrer qu'est une loi de groupe la loi suivante, définie pour x et $y \in]-1,1[$:

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

2 Etudier la loi, définie sur $\mathbb{R}$ par $x * y = (1/2)(x + y + |x - y|)$.

3 Soit α, β, γ des réels. A tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on associe $x * y = \alpha(x+y) + \beta xy + \gamma$. (1) A quelle condition $(x * y = x * z)$ entraîne-t-il $(y = z)$? (2) A quelle condition a-t-on une loi de groupe ?

4 Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + y)$. Etudier cette loi et l'interpréter géométriquement en construisant le composé des points $M(x,y)$ et $M'(x',y')$.

5 Etudier, dans $\mathbb{R}$, la loi : $a * b = a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}$.

6 Etudier, du point de vue des structures, l'ensemble A_k des réels de la forme $a + b\alpha_k + c\alpha_k^2$, où $\alpha_k = \cos(2k\pi/7)$, et a,b,c sont des rationnels variables.

7 Peut-on affecter à tout réel x un coefficient $\alpha(x)$ afin que soit associative la loi $*$ telle que $z = x * y$ est le barycentre de x et y affectés des coefficients $\alpha(x)$ et $\alpha(y)$?

8 Soit $E \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = 1$ et $z \neq \pm i$. Montrer que :

$$a * b = \frac{a+b+ab-1}{a+b-ab+1}$$

définit une loi de groupe commutatif.

9 Soit AA' et BB' les axes focaux et non focaux d'une ellipse (E). Pour M et $N \in (E)$, on appelle I l'intersection de MN avec AA', et P l'intersection de BI avec (E). Etudier la loi $P = M * N$.

10 Tout magma associatif fini est un groupe si tout élément est simplifiable.

2. GROUPES

1 Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la loi $*$ par $(a,b) * (a', b') = (aa', ba' + b'f(a))$. Déterminer les fonctions f *continues* pour lesquelles cette loi définit un groupe.

2 On considère, dans $\mathbb{R}$, les deux fonctions $f(x) = 1 - x$ et $g(x) = 1/x$. Etudiez le groupe engendré par la composition de ces deux fonctions.

3 Déterminer les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$. [Indication donnée par l'*examinateur* : Montrer que si un tel sous-groupe G a un point d'*accumulation*, on peut extraire de G une suite convergeant vers 0. En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$. Si par contre G n'a pas de point d'accumulation, il est de la forme $G = \omega\mathbb{Z}$, où $\omega > 0$.]

4 Soit G un groupe tel que $x^2 = e$ pour tout x. Alors, il est commutatif.

5 Pour deux sous-groupes A et B d'un groupe G, $A \cup B$ est un sous-groupe si $A \subset B$ ou $B \subset A$.

6 Déterminer toutes les lois de groupe possibles sur un ensemble à trois éléments.

7 Soit (H) une hyperbole du plan affine, et $A \in (H)$. A tout couple (M_1, M_2) de points de (H), on associe le point $M_3 \in (H)$ tel que AM_3 soit parallèle à M_1M_2. Montrer que $M_3 = M_1 * M_2$ est une loi de groupe abélien isomorphe ou groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.

8 Trouver les groupes d'ordre $2n$ pour lesquels existent deux sous-groupes H et K d'ordre n, satisfaisant à $H \cap K = \{e\}$.

3. ANNEAUX

1 Dans $E = \mathbb{R}^2$, on définit les lois $\top$ et $\perp$ par :

$$(a,b) \top (a',b') = (a + a', b + b'), \quad (a,b) \perp (a',b') = (aa', ab' + a'b).$$

Montrer que $(E, \top)$ est un groupe abélien et que $(E, \top, \perp)$ est un anneau commutatif unitaire non intègre.

2 Soient a, b, c trois réels. Montrer que $a + b + c = 0$ entraîne $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Réciproque et cas où a, b, c sont dans un anneau.

3 Montrer que quatre réels x, y, z, t vérifiant $x + y + z + t = x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0$ sont deux à deux opposés. En application, résoudre le système.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 10 \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0 \\ x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 26. \end{cases}$$

4 A tout élément a d'un anneau A $(+\,,\,.)$, unitaire, on associe la partie $E_a \subset A$ des x tels que $x = ax = xa$. Etudiez E_a et donnez une CNS, d'abord pour que $E_a \neq \{0\}$, puis pour que $E_a \neq A$.

5 Démontrer les deux isomorphismes d'anneaux : $\mathbb{Z}_{96}/6\mathbb{Z}_{96} \simeq \mathbb{Z}_6$ et $\mathbb{Z}_{48}/4\mathbb{Z}_{48} \simeq \mathbb{Z}_4$.

6 Montrer que tout homomorphisme d'anneau de $\mathbb{R}$ dans lui-même est soit nul, soit l'identité.

7 Soit K un corps et θ un automorphisme de K. A tout $b \in K$, on associe la suite $\theta^n(b) = \theta(\theta^{n-1}(b))$ pour $n \geqslant 1$, avec $\theta^0(b) = b$. Sur l'ensemble R des polynômes à une indéterminée sur K, on définit l'addition comme d'habitude, et la multiplication $*$ par :

$$\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) * \left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i\,\theta^i(b_j)\right) x^k.$$

Ainsi, on retrouve la multiplication ordinaire dans le cas où θ est l'identité. Montrer que $R\,(+\,,\,*)$ est un anneau unitaire non intègre.

8 Appelant *entiers algébriques* l'ensemble des réels qui sont racines d'une équation algébrique à coefficients entiers ($\in \mathbb{Z}$), le monôme de plus haut degré ayant 1 pour coefficient, montrer que cet ensemble est un anneau.

4. CORPS

1 Déterminer toutes les lois de corps sur un ensemble à trois éléments.

2 Montrer que l'ensemble K des réels de la forme $a + b\sqrt{2} + cj + dj\sqrt{2}$, où a, b, c, d sont rationnels, et $j = \exp(\mathrm{i}\,.\,2\pi/3)$, est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

3 Déterminer tous les automorphismes de $\mathbb{R}$ considéré comme un corps.

4 Tout anneau fini et intègre est un corps.

5 La caractéristique d'un corps est nulle ou égale à un nombre premier.

6 Si K est un corps infini, un espace vectoriel sur K ne peut être réunion finie de vrais sous-espaces vectoriels.

7 Soit K l'ensemble des réels de la forme $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, où a, b, c sont des rationnels. Montrer que K est un corps, et un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{Q}$.

8 Montrer que $\sqrt[3]{2}$ ne saurait s'écrire sous la forme $(a + b\sqrt{c})/(d + e\sqrt{f})$, où a, b, c, d, e, f sont rationnels.

9 Soit F une partie de $\mathbb{Q}$ qui soit un corps pour $+$ et $\times$. Alors $F=\mathbb{Q}$.

10 Le cardinal d'un corps fini est un nombre *primaire* p^n (p premier, $n \geqslant 0$). Le groupe additif d'un tel corps est la somme directe de sous-groupes de cardinal p.

5. IDENTITÉS ALGÉBRIQUES

1 Démontrer l'identité de Lagrange :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right),$$

et en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2 On pose $u_0=a,\ u_1=ax+b,\ u_2=ax^2+2bx+c,\ u_3=ax^3+3bx^2+3cx+d$. Démontrer que $u_0^2u_3-3u_0u_1u_2+2u_1^3$ ne dépend pas de x. Généraliser.

3 Démontrer l'identité :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j-a_i)(b_j-b_i),$$

et en déduire, pour deux suites réelles monotones de même sens (a_n) et (b_n) l'inégalité de Czebyszew :

$$n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$

4 Soit $x=a+b+c+d,\ \ y=a+b-c-d,\ \ z=a-b+c-d,\ \ u=a-b-c+d$. Alors, l'égalité $ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$ implique $xy(x^2+y^2)=zu(z^2+u^2)$.

5 Prouver l'identité :

$$(1+t)(1+t^{2!}+t^{2.2!})\ldots(1+t^{m!}+t^{2.m!}+\ldots+t^{m.m!})=1+t+t^2+t^3+\ldots$$
$$\ldots+t^{(m+1)!-1}.$$

6 Prouver l'identité :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1+x^k}{1-x^k}\, x^{k^2} = \sum_{l=1}^{n} \frac{x^l}{1-x^l}\,(1+x^{ln}).$$

7 Prouver l'identité :

$$x\sum_{k=1}^{n} \frac{a_0a_1\ldots a_{k-1}}{(a_0+x)(a_1+x)\ldots(a_k+x)} = \frac{a_0}{a_0+x} - \frac{a_0a_1\ldots a_n}{(a_0+x)(a_1+x)\ldots(a_n+x)}.$$

8 Prouver l'identité :

$$2\sum_{k=1}^{n} a_k\,(a_1+a_2+\cdots+a_k)=\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2+\sum_{k=1}^{n} a_k^2 .$$

9 Prouver l'identité :

$$(1-x^{2^{n+1}})\prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{x^{2^k}}{2}\right)=(1-x)\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{x^{2^k}(1-x^{2^k})}{2}\right).$$

10 Prouver l'identité :

$$\frac{x^{3^{n+1}}-1}{x-1} = \prod_{k=1}^{n}\,(x^{2.3^k}+x^{3^k}+1).$$

11 Mettez sous forme explicite d'un polynôme en a,b,c la fraction rationnelle :

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)},$$

et généralisez à n lettres $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

6. LE CALCUL AVEC RADICAUX

1 Montrer que si trois réels positifs a,b,c sont en progression arithmétique, il en est de même pour :

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

2 Soit $\epsilon=\pm 1$, a et $b\in\mathbb{Q}^+$, $\sqrt{b}\notin\mathbb{Q}$. Trouver une CNS pour qu'il existe $x,y\in\mathbb{Q}^+$ tels que :

$$\sqrt{a+\epsilon\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\epsilon\sqrt{y}.$$

3 Soit $|a|$ et $|b|\leqslant 1$, $|a|\neq|b|$. Alors :

$$\frac{\sqrt{1-a^2}.\sqrt{1-b^2}+ab}{a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}}+\frac{\sqrt{1-a^2}.\sqrt{1-b^2}-ab}{a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}}=\frac{2\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}(2b^2-1)}{b^2-a^2}$$

4 Pour $a, b, c, x, y, z>0$, on a :

$$\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}=\sqrt{(a+b+c)(x+y+z)} \Leftrightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

5 On a toujours :

$$a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2=(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a-b-c).$$

Pouvez-vous appliquer ce résultat pour « chasser les radicaux » de l'équation :

$$\sqrt{P(x)}+\sqrt{Q(x)}+\sqrt{R(x)} = 0\ ?$$

Expliquez comment traiter le cas général de :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{P_k(x)} = 0.$$

6 Soit k et l deux entiers $\geqslant 1$, et a et b des réels donnés. Eliminer x entre les deux équations :

$$x^k + (1/x^k) = 2a, \quad x^l + (1/x^l) = 2b.$$

7 Régionner le plan des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels :

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}).$$

7. COEFFICIENTS DES POLYNÔMES

1 Calculer les coefficients de :

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)^2 \text{ et de } (1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n)^2.$$

2 Calculer les coefficients de $(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n)^2$.

3 Développer $(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n)$.

4 Désignant par j le nombre complexe $\exp(\mathrm{i}\,.\,2\pi/3)$, développer :

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n)(1+jx+j^2x^2+\cdots+j^nx^n)(1+j^2x+j^4x^2+\cdots+j^{2n}x^n).$$

5 Soient A et $B \in \mathbb{Z}[x]$. Si les coefficients de A sont premiers entre eux, ainsi que ceux de B, il en est de même pour ceux de AB.

6 Calculez les coefficients a_k du polynôme :

$$(1 + tu)(1 + t^2u) \ldots (1 + t^n u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k.$$

7 On définit la suite de polynômes P_n par $P_0(x) = x$, et, pour $n \geqslant 1$, $P_n(x) = (P_{n-1}(x) - 2)^2 = a_n + b_n x + c_n x^2 + d_n x^3 + \cdots$ Calculer ces quatre premiers coefficients a_n, b_n, c_n, d_n.

8 Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit la suite (a_k) par $(1 + x + x^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$. Montrer que cette suite est *unimodale* (d'abord croissante, puis décroissante).

9 Montrer que la suite $p_k = p_k(n)$ des coefficients du polynôme :

$$(1 + 2x + 3x^2)^n = \sum p_k x^k$$

est unimodale et que son maximum, pour n fixé, a lieu en un $k = k(n)$ tel que $k(n) \sim (4/3)n$ si $n \to \infty$.

8. DIVISIBILITÉ DES POLYNÔMES

1 Factoriser le polynôme $12x^4+x^3+15x^2-20x+4$ sachant qu'il y a deux racines rationnelles.

2 Si les polynômes A et B sont premiers entre eux, il en est de même pour toute puissance de A avec toute puissance de B.

3 Soit $A(x)=x^3+x-2$, de racines 1, α, β. Déterminer un polynôme $B(x)$ du second degré tel que $B(1)=1$, $B(\alpha)=\beta$, $B(\beta)=\alpha$. Montrer qu'alors $B(B(x))-x$ est divisible par $A(x)$.

4 Déterminer le quotient de $nx^{n+1}-(n+1)ax^n+a^{n+1}$ par $(x-a)^2$.

5 Déterminer le quotient de $x^{2n}-n^2x^{n+1}+2(n^2-1)x^n-n^2x^{n-1}$ par $(x-1)^4$.

6 Déterminer le quotient de $(x-1)^{2n}-x^{2n}+2x-1$ par $2x^3-3x^2+x$.

7 Déterminer le quotient de $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ par x^2+x+1.

8 Déterminer le quotient de $n^2x^{n+2}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1$ par $(x-1)^3$.

9 Déterminer le quotient de $x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)$ par $(x-a)^2$.

10 Si $P(z)\neq z$, alors $P(z)-z$ divise $P(P(z))-z$. De même $P-Q$ divise $P\circ P-Q\circ Q$ et $P\circ Q-Q\circ P$.

9. POLYNÔMES A COEFFICIENTS ENTIERS

1 Montrer que le polynôme $x(x-a)(x-b)(x-c)+1$, $a, b, c\in\mathbb{Z}$, est toujours irréductible, sauf dans le cas de $x(x+1)(x-1)(x+2)+1=(x^2+x-1)^2$.

2 Si l'équation polynomiale $P(x)=0$, à coefficients entiers, admet la racine $a+\sqrt{b}$, où a et b sont rationnels, mais b non carré de rationnel, alors $a-\sqrt{b}$ est aussi racine.

3 Si $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ prend la valeur 7 en quatre valeurs entières différentes de x, $P(x)$ ne prendra jamais la valeur 14 pour aucune valeur entière de x.

4 Si $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$, $\deg P=7$, vaut ± 1 en sept valeurs entières distinctes de la variable x, alors $P(x)$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

5 Montrer qu'il ne peut exister $P\in\mathbb{Z}[x]$ tels que *toutes* les valeurs $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, ... soient des nombres premiers.

6 Pour tout polynôme $A \in \mathbb{Z}[x]$, appelons $\gamma(A)$ le PGCD des valeurs absolues de ses coefficients. Montrer que pour tous P et Q dans $\mathbb{Z}[x]$, on a $\gamma(P.Q) = \gamma(P).\gamma(Q)$. En déduire qu'un polynôme à coefficients entiers irréductible sur $\mathbb{Z}$ l'est aussi sur $\mathbb{Q}$.

7 Si les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont tous distincts, le polynôme $1 + (x - a_1)^2 (x - a_2)^2 \ldots (x - a_n)^2$ ne saurait être égal au produit de deux polynômes à coefficients entiers.

8 *Critère d'Eisenstein* – Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$. S'il existe un nombre premier p divisant $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, *mais pas* a_n, avec p^2 ne divisant pas non plus a_0, alors P est irréductible sur $\mathbb{Z}$, et donc sur $\mathbb{Q}$. En déduire que $P(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ si p est premier, en considérant $P(x+1)$. Prouver aussi l'irréductibilité de $x^r + p$, si p est premier.

10. DÉTERMINATION DE POLYNÔMES

1 Déterminer les polynômes P tels que $P(2x) = P'(x).P''(x)$.

2 Déterminer les polynômes P divisibles par leur dérivée seconde P''.

3 Si un polynôme réel $P(x)$ est tel que $P(x) \geqslant 0$ pour tout x réel, alors il est la somme de deux carrés de polynômes réels.

4 Trouver tous les polynômes P et Q à coefficients réels tels que :

$$P(x)^2 = 1 + (x^2 - 1) Q(x)^2.$$

5 Déterminer les polynômes P, Q, R, à coefficients réels, tels que :

$$P^2 = x(Q^2 + R^2).$$

6 L'ensemble des polynômes P à valeurs entières sur les entiers, c'est-à-dire tels que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, sont des combinaisons linéaires à *coefficients entiers* des *polynômes binomiaux.*

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)}{k!}.$$

7 En utilisant la base de polynômes $\binom{x}{n}$, montrer que si un polynôme à coefficients réels de degré q prend des valeurs entières sur $q+1$ entiers consécutifs, il a valeurs entières sur $\mathbb{Z}$ tout entier. Peut-on supprimer le mot « consécutifs » et le remplacer par « distincts » dans cet énoncé ?

8 Déterminer tous les polynômes P tels que $P(x^2) = P(x)P(x-1)$.

9 Déterminer tous les polynômes P tels que $P(x^2) = P(x)P(x+1)$.

10 Déterminer tous les polynômes P tels que $P(x)$ divise $P(x^2+1)$.

CHAPITRE 7

Algèbre linéaire

1. SOUS-ESPACES VECTORIELS

1 L'union de deux sous-espaces vectoriels A et B (d'un espace E) est un sous-espace vectoriel ssi $A \subset B$ ou $B \subset A$.

2 Dans l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré $\leqslant n$, étudiez le sous-espace des polynômes s'annulant en ξ, et trouvez-en un supplémentaire.

3 Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ constitué par les fonctions prenant un nombre fini de valeurs est-il un sous-espace vectoriel ?

4 Dans l'espace vectoriel des matrices 2×2, étudiez le sous-espace des matrices qui commutent avec une matrice donnée.

5 Soit P et I les ensembles de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ respectivement paires et impaires. Montrer que ce sont des sous-espaces et que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P \oplus I$. Généraliser.

6 Si A et B sont deux sous-espaces de dimension finie d'un espace vectoriel E, alors :

$$\dim A + \dim B = \dim (A + B) + \dim (A \cap B).$$

7 Etant donné trois sous-espaces vectoriels A_1, A_2, A_3, de dimensions finies, on a :

$$\dim(A_1 + A_2 + A_3) \leqslant \dim A_1 + \dim A_2 + \dim A_3 - \dim (A_2 \cap A_3) - \\ - \dim (A_3 \cap A_1) - \dim (A_1 \cap A_2) + \dim (A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

8 Déterminer lesquels des 15 sous-ensembles suivants de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des sous-espaces vectoriels : (1) les fonctions bornées sur $[a,b]$; (2) les fonctions continues sur $[a,b]$; (3) les fonctions positives sur $[a,b]$; (4) les fonctions paires ; (5) les fonctions impaires ; (6) les fonctions périodiques ; (7) les fonctions monotones ; (8) les fonctions affines par morceaux ; (9) les fonctions discontinues en un point donné x_0 ; (10) les fonctions convexes ; (11) les fonctions polynomiales de degré n ; (12) les fonctions polynomiales ;

(13) lip α ; (14) les fonctions f pour lesquelles existe une homographie H telle que $f(H(x)) = f(x)$; (15) les fonctions qui sont de la forme $o(g)$, $x \to 0$.

9 Etant donné une fonction g, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie dans un voisinage de $+\infty$, montrer que l'ensemble des fonctions f de la forme $O(g)$, $x \to +\infty$, est un sous-espace vectoriel.

10 L'ensemble des suites réelles (u_n) satisfaisant à une récurrence du second ordre, à coefficients constants ou non, $A(n)u_{n+2} + B(n)u_{n+1} + C(n)u_n = 0$, est un espace vectoriel de dimension deux en général.

2. SYSTÈMES LIBRES

1 Dans $\mathbb{R}$, considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, montrer que $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ sont libres.

2 Dans $\mathbb{R}$, considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, montrer que $1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}$ sont libres.

3 Montrer que les racines de $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ sont toutes réelles, dans $]-2, 2[$, distinctes, irrationnelles. Appelons-les α, β, γ ; $\alpha < \beta < \gamma$. Montrer que $\mathbb{Q}(\alpha) = \{u + v\alpha + w\alpha^2 \mid u, v, w \in \mathbb{Q}\}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 3. La somme $\mathbb{Q}(\alpha) + \mathbb{Q}(\beta) + \mathbb{Q}(\gamma)$ est-elle directe dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$?

4 Montrer que les fonctions $f_1 = \sin x$, $f_2 = \sin(x^2)$, $f_3 = \sin(x^3)$ constituent un système libre.

5 Appelons E l'ensemble des fonctions définies sur $I =]a, \infty[$ à valeurs réelles, indéfiniment dérivables, pour lesquelles existe $q = q_f > 1$ tel que $\lim_\infty f(x)/q^x = \infty$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$ et prouver que, pour toute $f \in E$, la suite des dérivées f, f', f'', ... constitue un système libre.

6 Soit $P(x)$ un polynôme de degré n, à coefficients réels, et soit $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ une suite de $n+1$ réels. Montrer que le système $f_i(x) = P(x - a_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, est libre de $\mathbb{R}[x]$.

7 Montrer que la suite infinie de fonctions $f_n(x) = \cos nx$, $n \in \mathbb{N}$, constitue un système libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

8 Soit une suite infinie $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ Montrer que le système $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, e^{a_3 x}, \ldots$, est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

9 Soit une suite infinie $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ Montrer que le système $x^{a_1}, x^{a_2}, x^{a_3}, \ldots$, est libre dans $\mathbb{R}^{]0, \infty[}$.

10 Soit une suite infinie $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ Montrer que le système $\cos a_1 x$, $\cos a_2 x$, $\cos a_3 x, \ldots$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

3. BASES, DIMENSION

1 On se donne les deux matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Etant donné alors un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui, dans la base canonique, a pour matrice A, déterminer l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^3$, dont un vecteur est encore $(1, 0, 0)$, et vis-à-vis desquelles f a pour matrice B.

2 Montrer que l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas de dimension finie.

3 Etant donnés n nombres réels $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$, $n \geqslant 2$, on appelle E l'ensemble des fonctions *continues* sur $[a_1, a_n]$ et *affines* sur chaque intervalle $]a_{i-1}, a_i[$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Bref, ce sont les fonctions «linéaires par morceaux» du bon vieux temps où j'étais étudiant. Montrez-moi que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que le système de fonctions $|x - a_i|$, $i = 1, 2, \ldots, n$, en constitue une base.

4 Soit $P_k = x^k(1-x)^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Montrer que ces P_k constituent une base de $\mathbb{R}_n[x]$. Calculer les coordonnées, dans cette base, du polynôme $\mathrm{d}^n/\mathrm{d}x^n\{x^n(1-x)^n\}$. Retrouver ainsi la formule $\sum_k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

5 Montrer que la dimension de l'espace vectoriel des polynômes à k indéterminées, à coefficients réels, et de degré $\leqslant n$, est $\binom{n+k}{k}$.

6 Soit $(r_n)_{n \geqslant 0}$ un numérotage des rationnels $]0, 1[$. Montrer qu'est une base de $\mathbb{R}[x]$ le système suivant: r_0, $x + r_1$, $(x + r_2)^2$, $(x + r_3)^4$, $(x + r_4)^4, \ldots$, $(x + r_j)^{2^k}$, où $2^{k-1} < j \leqslant 2^k$.

7 Quelles sont les coordonnées du polynôme $\binom{x+n-1}{n}$ dans la base $\binom{x}{k}$, $k \in \mathbb{N}$?

8 Montrer que, dans $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, l'ensemble A_2 des nombres algébriques de degré $\leqslant 2$ (racines d'une équation algébrique à coefficients entiers et de degré $\leqslant 2$) n'est pas un sous-espace vectoriel. Le sous-espace *engendré* par A_2 est-il alors le sous-espace tout entier des nombres algébriques, savoir $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$?

9 Si un polynôme à coefficients réels, de degré n, prend des valeurs entières en $0, 1, 4, 9, \ldots, n^2$, alors prend-il des valeurs entières pour tout autre carré parfait ? Généraliser.

4. PUISSANCES ET POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES

1 Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et f un endomorphisme tel que $f^2 = -I$. Montrer que $\vec{a}\,(\neq \vec{0})$ et $f(\vec{a})$ forment une base. Généraliser à la dimension $2n$.

2 Soit f un endomorphisme en dimension 3. (1) Si $f \neq 0$, et $f^2 = 0$, alors la matrice de f est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (2) Si $f^2 \neq 0$, $f^3 = 0$, alors la matrice de f est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (3) Généraliser.

3 Soit E un espace vectoriel complexe, et u un endomorphisme tel que $u^3 = I$, sans qu'il existe de polynôme P du second degré tel que $P(u) = 0$. Introduisant les sous-espaces suivants : $A = \{ x \mid u(x) = x \}$, $B = \{ x \mid u(x) = jx \}$, $C = \{ x \mid u(x) = j^2 x \}$, où $j = \exp(\mathrm{i}\,.\,2\pi/3)$, montrer que $E = A \oplus B \oplus C$.

4 En dimension 3, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$, $f^3 = 0$. Montrer que tout $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$ est combinaison linéaire de I, f, f^2.

5 Soit E de dimension n. Alors $\ker f = \operatorname{im} f$ implique $f^2 = 0$, n pair, $\operatorname{rg} f = n/2$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, tel que $f^2 + f - 2I = 0$, $f \neq \lambda I$. Alors $E = \ker(f - I) \oplus \ker(f + 2I)$.

6 Soit f un endomorphisme en dimension 3, tel que $f^2 = f^3$, $f \neq 0$, $f \neq I$. Montrer que la matrice de f est semblable à l'une des cinq matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1/\alpha & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(u - I)(u - 2I)^2 = 0$, sans annuler *aucun* polynôme du second degré. Montrer que $\ker(u - I) \oplus \ker(u - 2I) \neq E$.

8 Sur $K[x]$, espace des polynômes à coefficients dans le corps K, on définit les endomorphismes A et B par $A(P(x)) = P'(x)$, le polynôme dérivé, et $B(P(x)) = xP(x)$. (1) Déterminer $AB - BA$. (2) Plus généralement, si A et $B \in \mathcal{L}(E)$ et $AB - BA = I$, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, on aura $A^n B - AB^n = nA^{n-1}$. (3) En dimension finie, il est impossible que $AB - BA = I$ pour deux endomorphismes A et B.

9 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, *involutif*, c'est-à-dire tel que $f^2 = I$. Démontrer que $A = \ker(f - I) = \operatorname{im}(f + I)$, $B = \ker(f + I) = \operatorname{im}(f - I)$ et $E = A \oplus B$. Réciproquement, à toute décomposition $E = A \oplus B$, correspond une *seule* involution f pour laquelle $A = \ker(f - I)$ et $B = \operatorname{im}(f - I)$.

10 Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est *nilpotent*, alors $f^{\dim E} = 0$.

5. AUTRES EXERCICES SUR LES ENDOMORPHISMES

1 Démontrer que deux endomorphismes p et q sont des projecteurs de même noyau si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

2 Montrer que l'application Δ qui, à tout polynôme $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ associe $P(x+1) - P(x)$, est linéaire. Est-elle bijective ?

3 Etant donné un endomorphisme φ d'un espace vectoriel E de dimension 2, peut-on trouver un endomorphisme f tel que $\varphi \circ f + f \circ \varphi = I$?

4 Soit E un espace vectoriel sur K, de dimension 2, et soit u et v deux endomorphismes de cet espace vectoriel. Déterminer la structure de l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $f \circ u = u \circ f$ *et* $f \circ v = v \circ f$. Même question si, en outre, $\lambda u + \mu v$ est injectif, pour tout $(u, v) \in K^2 - (0,0)$.

5 A tout polynôme $P = P(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$, on associe $Q = f(P)$, tel que $Q(x,y) = \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}$. Déterminer le noyau de f et en préciser la dimension dans le cas où l'on se restreint aux polynômes P de degré $\leqslant n$.

6 A toute $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = E$, on associe $g = \varphi(f)$, avec $g(x) = f(x) + f(2x)$. (1) L'application φ est-elle bijective ? (2) Même question pour sa restriction à E_0, espaces des fonctions f *continues* en 0.

7 Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et $\vec{u} \neq \vec{0}$. Caractérisez les $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que le système $\{\vec{u}, \vec{x}, f(\vec{x})\}$ soit *lié* pour tout $\vec{x}$.

8 Soit f et g deux endomorphismes de E, dont la dimension est n. Alors, $\operatorname{rg}(f \circ g) \geqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - n$.

9 Soit E, F, G, H quatre espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$, $w \in \mathcal{L}(G,H)$. Alors :

$$\operatorname{rg}(v \circ u) + \operatorname{rg}(w \circ v) \leqslant \operatorname{rg} v + \operatorname{rg}(w \circ v \circ u).$$

6. FORMES LINÉAIRES

1 Soit f_α la forme linéaire qui, à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré $\leqslant 2$ associe $P(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que les formes $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma$ sont indépendantes ssi α, β, γ sont distincts.

2 A tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ on associe $f(P) = P(0) + P'(1) + P''(2) + \cdots$ Montrer que f est une forme linéaire et chercher ses coordonnées dans la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}[x]$.

3 A tout polynôme P à coefficients réels, de degré $\leqslant 2$, on associe :

$$f(P) = \int_0^1 du \left(\int_0^u P(t)\,dt\right).$$

Montrer que f est une forme linéaire et calculer ses coordonnées dans la base $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ telle que $\epsilon_1(P) = P(1)$, $\epsilon_2(P) = P(2)$, $\epsilon_3(P) = P(3)$.

4 Montrer que si n formes linéaires d'un espace à n dimensions sont simultanément nulles pour un même vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$, elles sont dépendantes.

5 Pour que p formes linéaires soient indépendantes, il faut et il suffit qu'il existe au moins un vecteur de l'espace pour lequel ces formes prennent des valeurs arbitrairement données.

6 Montrer que l'application Φ qui, à tout polynôme P à coefficients réels de degré $\leqslant 3$, associe $\int_0^1 P(t)\,dt$ est une forme linéaire. Appelant f_ξ la forme linéaire $P \to P(\xi)$, montrer qu'il existe quatre réels A, B, α, β tels que $\Phi = Af_\alpha + Bf_\beta$. De même, peut-on déterminer α, β, γ tels que $\Phi = (1/3)(f_\alpha + f_\beta + f_\gamma)$?

7 On considère $(n+1)$ formes linéaires $f_1, f_2, \ldots, f_n, f$. Montrer que :

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \subset \ker f\right) \Rightarrow \left(\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n,\ f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right).$$

8 Montrer que toute forme *cubique* d'ordre 2, à coefficients complexes :

$$\Phi(x,y) = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$$

peut être considérée comme la somme des cubes de deux formes linéaires $f(x,y) = ax + by$ et $g(x,y) = cx + dy$, que l'on obtient comme facteurs du premier degré du Hessien H de Φ, ainsi défini :

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \Phi''_{x^2} & \Phi''_{xy} \\ \Phi''_{xy} & \Phi''_{y^2} \end{vmatrix}.$$

7. CALCUL MATRICIEL

1 Calculer les puissances B^n, $n \in \mathbb{Z}$, de la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2 Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

3 Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

4 Calculer, dans $\mathbb{C}$, une matrice X telle que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5 Si trois matrices A, B, C d'ordre n, non nulles, sont telles que $ABC = 0$, alors deux d'entre elles au moins, sont singulières.

6 Combien y a-t-il de matrices 2×2 inversibles à coefficients dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier ? Même question en ajoutant la condition qu'elles ont un déterminant égal à 1.

7 Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, calculer :
$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 2 & 1 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}^n.$$

8 Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, calculer :
$$\begin{pmatrix} \binom{x}{0} & & \\ \binom{x+1}{0} & \binom{x+1}{1} & \\ \binom{x+2}{0} & \binom{x+2}{1} & \binom{x+2}{2} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}^n.$$

9 Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, et tout x convenable, calculer :
$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix}^n.$$

10 Pour tous réels x et y, étudiez la structure de l'ensemble des matrices de la forme :
$$M(x,y) = \begin{pmatrix} -(x+y) & y & x \\ x & -(x+y) & y \\ y & x & -(x+y) \end{pmatrix}.$$

11 Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^n$.

12 Soient A et B deux matrices réelles carrées de même format. Montrer que $\text{dét}\,(AB - xI) = \text{dét}\,(BA - xI)$. [On traitera d'abord le cas où l'une des matrices, A par exemple, est inversible. Puis, sinon, on remplacera A par $A - tI$, et l'on fera tendre t vers 0.]

13 Déterminer les matrices X, de format 2×2, à coefficients réels, telles que $X^2 = I$.

14 Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, telles que $AB = 0$ et $A + B$ soit inversible. Montrer alors que $\text{rg}\,A + \text{rg}\,B = n$.

15 Si une matrice A carrée d'ordre n satisfait à $A^{n+1} = 0$, alors $A^n = 0$.

16 Soit A une matrice 2×2 satisfaisant à $A^n = I$ pour un certain entier $n \geqslant 0$. Montrer que, nécessairement, on a $A^4 = I$ ou $A^6 = I$.

8. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES SANS DÉTERMINANTS

1 Résoudre et discuter par un régionnement des $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} x + ay - bz = 1 \\ bx - z = b \\ by + az = 0. \end{cases}$$

2 Déterminer et discuter l'existence d'un polygone du plan à n côtés dont on connaît les milieux des côtés. [On pourra utiliser un calcul dans $\mathbb{C}$].

3 Résolvez, dans $\mathbb{C}$, le système $z_2 = az_1 + b$, $z_3 = az_2 + b, \ldots, z_n = az_{n-1} + b$, $z_1 = az_n + b$. Interprétation géométrique ?

4 Déterminer a, b, c, a', b', c' réels tels que, pour tout x réel, on ait :

$$\sin 2x = (a \cos x + b \sin x + c)(a' \cos x + b' \sin x + c').$$

5 Montrer que, dans le système suivant, à coefficients réels,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0, \end{cases}$$

il n'y a que la solution banale $(0, 0, 0)$ si les conditions suivantes sont réalisées : (1) $a_{ii} > 0$, $i = 1,2,3$; (2) $a_{ij} < 0$ si $i \neq j$; (3) $\sum_j a_{ij} > 0$, $i = 1,2,3$.

6 Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les sommets d'un polygone plan et G_i les isobarycentres des triangles successifs $P_iP_{i+1}P_{i+2}$, avec la convention que $P_{n+i} = P_i$. Montrer que la donnée des G_i détermine les P_j ssi n n'est pas divisible par 3.

7 En décomposant en éléments simples la fraction rationnelle :

$$\frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)},$$

ou autrement, montrer que le système d'équations linéaires aux inconnues X_0, $X_1, \ldots, X_n$:

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{X_r}{r+s} = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, n,$$

a pour solutions : $X_r = (-1)^{n-r} \dfrac{(n+r)!}{r!^2\,(n-r)!}$, $\quad r = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Montrer qu'alors $\sum_{r=0}^{n} X_r = 1$.

CHAPITRE 8

Espaces affines en général

1. BARYCENTRES

1 Deux points variables P et Q décrivent deux *segments* $[AB]$ et $[CD]$. Quel est l'ensemble de leurs milieux ?

2 Chaque point A_1, A_2, ... , A_n d'une partie finie E d'un espace affine réel étant affecté de coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de *somme nulle*, $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0$, montrer que toute partition en deux de E, telle que chacune des deux parties admette des barycentres P et Q, a la propriété que le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ garde une direction constante.

3 Quatre points P, Q, R, S décrivent respectivement les *segments* $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, côtés d'un certain quadrilatère. Quel est l'ensemble des isobarycentres de P, Q, R, S ?

4 Soit $Sxyz$ un trièdre et G un point quelconque. Montrer qu'il existe un plan passant par G et coupant les arêtes Sx, Sy, Sz du trièdre en A, B, C, de telle sorte que G soit l'isobarycentre de A, B, C.

5 Si les diagonales AD, BE, CF d'un hexagone $ABCDEF$ ont même milieu, les côtés opposés de l'hexagone sont parallèles.

6 Soit A_0, A_1, A_2 un triangle. On définit une suite de points (A_n) par le fait que A_n est isobarycentre de A_{n-1}, A_{n-2}, A_{n-3} pour $n=3, 4, 5, \ldots$ Etudier cette suite et sa limite.

7 Dans le plan affine P, on se donne un triangle ABC. A partir de $M_0 \in P$, on définit M_1 comme milieu de AM_0, puis M_2 milieu de BM_1, puis M_3 milieu de CM_2, puis M_4 milieu de AM_3, etc. Montrer que la suite de points (M_n) admet trois points limites que l'on déterminera.

8 On se donne deux plans (P) et (P') et, dans (P), un triangle fixe ABC. Trois points *mobiles* A', B', C' décrivent (P'). Déterminer l'ensemble des isobarycentres des points α, β, γ, milieux de AA', BB', CC'.

9 Sur les côtés d'un triangle ABC, on choisit $P \in [BC]$, $Q \in [CA]$, $R \in [AB]$. Déterminer l'ensemble des isobarycentres de P, Q, R quand ces trois points varient.

10 On se donne trois droites formant un vrai triangle. Montrer que l'ensemble des isobarycentres des points d'intersection de ces droites avec une droite variable est l'extérieur d'une certaine ellipse.

2. REPÈRE AFFINE

1 Soit ABC le triangle de référence, A', B', C' les milieux de BC, CA, AB. Appelant P, Q, R les symétriques d'un certain point M par rapport à A', B', C', montrer que les droites AP, BQ, CR sont concourantes. Appelant M' le point de concours, étudier l'application $M \to M'$.

2 Soit A, B, C des points non alignés d'un plan affine réel. Une droite coupe les droites AB, BC, CA respectivement en R, P, Q. Les points I, J, K étant définis par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}$, montrer leur alignement.

3 Etant donné un repère affine ABC, on associe à tout point M tel que les droites (AM) et (BC) se coupent en L, un point M', aligné avec A et M, et tel que la division $(AM'LM)$ soit harmonique. Etudier la transformation f telle que $M' = f(M)$.

4 *Théorème de Menelaüs* – Soit ABC un vrai triangle, et α, β, γ des points situés respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB). Montrer qu'une CNS pour que ces points soient *alignés* est que :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = +1.$$

5 *Théorème de Céva* – Soit ABC un vrai triangle, et α, β, γ des points situés respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB). Montrer qu'une CNS pour que les droites $(A\alpha)$, $(B\beta)$, $(C\gamma)$ soient *concourantes* est que :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -1.$$

6 Soit $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}\}$ un simplexe, c'est-à-dire $(n+1)$ points d'un espace affine euclidien de dimension n. Appelons r-médiane de $\mathcal{A}$ tout segment joignant tout isobarycentre de r points de $\mathcal{A}$ à l'isobarycentre des $(n+1-r)$ points restants, avec $r \leqslant (n+1)/2$. Montrer que la somme des carrés des $\binom{n+1}{r}$ r-médianes vaut la somme des carrés des côtés du simplexe multipliée par le nombre :

$$\frac{1}{nr\,(n+1-r)} \binom{n+1}{r}$$

7 On se donne deux repères affines. Discuter de l'ensemble des points qui ont mêmes coordonnées dans chacun d'eux.

3. CONVEXITÉ

1 Montrez que toute intersection d'ensembles convexes est convexe.

2 L'union de deux convexes est-elle convexe ?

3 Soit A et B deux parties convexes d'un espace vectoriel. La partie $A+B$ est-elle convexe ?

4 Soit A et B deux ensembles convexes. Si P décrit A et Q décrit B, l'ensemble des milieux de PQ est un ensemble convexe.

5 L'image par une application affine d'un ensemble convexe est-elle convexe ?

6 On considère n ensembles convexes plans $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ayant la propriété que toute triade extraite $C_{i_1}, C_{i_2}, C_{i_3}$ ait une intersection non vide. Montrer que l'intersection de *tous* les ensembles C_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, est non vide aussi.

7 Appelons « *points extrêmes* » d'un ensemble convexe C tout point $M \in C$ tel que C privé de M encore convexe. Ainsi, les points extrêmes d'un triangle en sont les trois sommets. Montrer que les points extrêmes de l'ensemble des matrices bistochastiques $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, c'est-à-dire telles que $\forall i$, $\forall j$, $a_{ij} \geqslant 0$ et $\sum_i a_{ij} = \sum_j a_{ij} = 1$, est constitué par les matrices de permutation.

4. APPLICATIONS AFFINES

1 Etudier, du point de vue de la structure, l'ensemble des bijections affines laissant invariante $y^2 = 2x$.

2 Si A, B, C, D ne sont pas dans un même plan, ainsi que A', B', C', D', il existe une transformation affine envoyant les premiers sur les seconds.

3 Que pensez-vous de la transformation :

$$\begin{cases} x' = x + y + z + a \\ y' = x + y + z + b \\ z' = x + y + z + c \end{cases} \quad ?$$

4 Etudiez la transformation :

$$\begin{cases} x' = 1 + (1/7)(3x + 2y - 6z) \\ y' = -1 + (1/7)(2x + 6y + 3z) \\ z' = 2 + (1/7)(-6x + 3y - 2z). \end{cases}$$

5 Dans l'espace affine K^2, où $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, montrer qu'une CNS pour que quatre points soient les sommets d'un parallélogramme est que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés.

5. TRIANGLES ET PARALLÉLOGRAMMES

1 Une droite coupe les droites (AB), (BC), (CA) en C', A', B'. Montrer que les milieux de AA', BB', CC' sont alignés. (En d'autres termes, les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés.)

2 On considère, dans le plan affine, trois points non alignés A, B, C. Une droite variable coupe AB, BC, CA en R, P, Q. Quel est l'ensemble des barycentres de $P(1), Q(2), R(3)$?

3 Sur les côtés d'un triangle comme diagonales, on construit des parallélogrammes ayant leurs côtés parallèles à deux droites données. Montrer que les autres diagonales sont concourantes. Généraliser.

4 Sur chaque côté AB, BC, CA d'un triangle, on choisit respectivement les segments DE, FG, HK, de mêmes milieux que les dits côtés. Montrer que les médianes AA', BB', CC' des triangles ADK, BFE, CHG sont concourantes.

5 Toute droite qui ne passe par aucun des sommets A, B, C d'un vrai triangle, ou bien ne rencontre pas le périmètre $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$, où le rencontre en deux points.

6 On joint les sommets A, B, C, D d'un parallélogramme respectivement aux milieux des côtés BC, CD, DA, AB. On forme ainsi un petit parallélogramme dont l'aire vaut le $1/5$ de celle de $ABCD$. Si l'on avait joint A, B, C, D respectivement aux milieux de CD, DA, AB, BC, on aurait obtenu un autre parallélogramme dont l'intersection avec le précédent est un octogone à centre, que l'on montrerait avoir une aire égale au $1/6$ de celle de $ABCD$.

7 Etant donné deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ indépendants, on prend pour unité d'aire dans le plan affine l'aire d'un parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On considère alors le «lattis» L des points «entiers» M, du type $\vec{OM} = l\vec{a} + m\vec{b}$, où l et $m \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'aire de tout contour polygonal C, simple, dont les sommets sont pris dans L, vaut $c/2 + i - 1$, où c est le nombre de points de L situés sur le bord de C, et i le nombre de points de L situés à l'intérieur de C.

6. TÉTRAÈDRES ET PARALLÉLIPIPÈDES

1 Etant donné un quadrilatère gauche $ABCD$, montrer que les milieux des côtés AB, BC, CD, DA sont les sommets d'un parallélogramme.

2 On se donne un tétraèdre $ABCD$ et une droite (Δ) qui rencontre les plans des faces de ce tétraèdre en A', B', C', D', avec $A \in (BCD)$, etc. Démontrer que les milieux des segments AA', BB', CC', DD' sont coplanaires.

3 Lorsque les droites qui joignent les sommets correspondants de deux tétraèdres sont concourantes, les intersections des faces correspondantes sont dans un même plan, et réciproquement.

4 Si trois droites parallèles à un même plan sont rencontrées par trois autres droites, ces trois dernières sont parallèles à un même plan.

5 Par les sommets d'un tétraèdre $ABCD$ on mène des parallèles à une direction quelconque. Ces droites coupent les faces opposées en des points A', B', C', D' qui sont les sommets d'un tétraèdre de volume triple de celui de $ABCD$.

6 Trouver le lieu des points de concours des diagonales des parallélogrammes inscrits dans un quadrilatère gauche.

7 Soit $ABCD$ un vrai tétraèdre et M un point non situé sur les faces. Le plan MAB coupe CD en P, MBC coupe AD en Q, MCD coupe AB en R, et MAD coupe BC en S. Montrer que P, Q, R, S sont coplanaires.

8 Etant donné deux tétraèdres, il existe en général un seul point ayant mêmes coordonnées barycentriques vis-à-vis de ces tétraèdres.

9 *Théorème de Menelaüs dans l'espace* – Etant donné un tétraèdre $ABCD$, soient α, β, γ, δ des points situés respectivement sur les droites (AB), (BC), (CD), (DA). Montrer qu'une CNS pour que ces points soient *coplanaires* est que :

$$\frac{\overline{\alpha A}}{\overline{\alpha B}} \cdot \frac{\overline{\beta B}}{\overline{\beta C}} \cdot \frac{\overline{\gamma C}}{\overline{\gamma D}} \cdot \frac{\overline{\delta D}}{\overline{\delta A}} = +1.$$

10 Il existe en général trois plans partageant dans le même rapport quatre segments arbitraires de l'espace.

CHAPITRE 9

Espaces vectoriels euclidiens

1. PRODUITS SCALAIRES GÉOMÉTRIQUES

1 Soit $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trois vecteurs unitaires de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, indépendants. On pose $\vec{j}.\vec{k} = \cos\alpha$, $\vec{k}.\vec{i} = \cos\beta$, $\vec{i}.\vec{j} = \cos\gamma$. Trouver la relation à laquelle doivent satisfaire $x = \vec{v}.\vec{i}$, $y = \vec{v}.\vec{j}$, $z = \vec{v}.\vec{k}$ afin que le vecteur $\vec{v}$ soit unitaire.

2 On considère, dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, trois vecteurs unitaires $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tels que $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{u} = \cos\alpha$. Ayant déterminé la CNS sur α afin qu'ils constituent une *base*, on leur appliquera le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

3 Etant donné trois vecteurs a, b, c, étudier l'ensemble des vecteurs v tels que $(v-a)(v-b)+(v-b)(v-c)+(v-c)(v-a) = 0$.

4 Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. (1) Si φ et ψ sont deux produits scalaires, alors $\varphi + \psi$ en est encore un. (2) Soit φ un produit scalaire, et u une isométrie, pour ce produit. Alors, $\varphi(x,y) = \varphi(u(x),u(y))$ est encore un produit scalaire. (3) Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$, et φ un produit scalaire. Alors $\Psi(x,y) = \sum_{u \in G} \varphi(u(x), u(y))$ est un produit scalaire.

5 A toute matrice réelle A, carrée d'ordre deux, on associe $s(A)$, somme de ses coefficients. (1) L'application $(M,N) \to s(MN)$ est-elle un produit scalaire ? (2) Sinon, $(M,N) \to s(MN+NM)$ en est-elle un ?

6 Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, on se donne les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Résoudre et discuter en $\vec{x}$ et $\vec{y}$, le système : $\vec{a}.\vec{x} = 0$, $\vec{b}.\vec{y} = 0$, $\vec{x}+\vec{y} = \vec{c}$, $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$.

7 Démontrer la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique entre «côtés» a, b, c et «angles» A, B, C d'un triangle sphérique (c'est-à-dire «faces» et «dièdres» du trièdre au centre générateur) :

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A.$$

8 Dans un triangle sphérique équilatéral, si l'on représente le côté par a et l'angle par A, on a :

$$\cos A = \frac{\cos a}{1+\cos a}, \quad \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2\cos(a/2)}.$$

2. PRODUITS SCALAIRES DE POLYNÔMES ET DE FONCTIONS

1 On définit sur l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leqslant 2$, la forme :

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que c'est un produit scalaire et déterminer l'orthonormalisée de la base $(1, x, x^2)$.

2 Dans $\mathbb{R}_2[x]$, soit $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^1 (4-t^2)^{-1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$. Montrer que c'est un produit scalaire et déterminer une base orthonormale.

3 Dans $\mathbb{R}_2[x]$, soit $\varphi(P,Q) = \int_0^1 xP(x)Q(x)\mathrm{d}x$. Montrer que c'est un produit scalaire et orthonormaliser la base $x^2, x(1-x), (1-x)^2$.

4 On pose :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n.\, n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \quad n \geqslant 1, \quad P_0(x) = 1.$$

Montrer que pour tous entiers m et n différents, on a $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0$. En déduire alors que si $R(x)$ est un polynôme de degré n pour lequel, pour *tous* polynômes $T(x)$ de degré $<n$, on a $\int_{-1}^1 T(x)R(x) = 0$, alors $R(x) = \lambda P_n(x)$, où λ est une constante réelle.

5 Soit E l'espace vectoriel des fonctions f de la forme $f(x) = a\cos x + b\sin x + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que $\Phi(f,g) = \int_0^\pi f(t)g(t)\mathrm{d}t$, où $f, g \in E$, est un produit scalaire. Etudier l'endomorphisme $f \to f + f' + f''$.

6 Soit E l'espace vectoriel des fonctions *continues*, de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$. Pour f et $g \in E$, on pose $<f,g> = \int_0^\pi f(t)g(t)\mathrm{d}t$. (1) Montrer que c'est un produit scalaire. (2) Montrer que la suite de fonctions $e_n = \cos nx$, $n \geqslant 0$, est un système orthogonal. (3) Pour toute $f \in E$, on pose $\varphi_k = <f, e_k>$. Démontrer l'existence d'une constante $C > 0$, telle que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\sum_{k=0}^n \varphi_k^2 \leqslant C.\, \|f\|^2.$$

3. ÉGALITÉS ET INÉGALITÉS PARTICULIÈRES DANS LES ESPACES EUCLIDIENS

1 Pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, positifs, on a toujours :

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

2 Soit $f(x)$ positive et intégrable sur $[0,1]$. Posant $I_n = \int_0^1 f^n(t)\mathrm{d}t$, on a $I_n^2 \leqslant I_{n-1} \cdot I_{n+1},\ n \geqslant 1$.

3 Pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, on a :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{a_i}{a_j} \geqslant n^2.$$

4 A tout opérateur orthogonal T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, on associe :

$$|||T||| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|.$$

Montrer que l'on définit ainsi une norme vérifiant, en outre :

$$|||S \circ T||| \leqslant |||S||| \cdot |||T|||.$$

5 Toute norme euclidienne satisfait à $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Réciproquement, si une norme satisfait à cette égalité (dite du parallélogramme) pour tous vecteurs x et y, alors elle dérive d'un certain produit scalaire que l'on déterminera.

6 Démontrer, dans un espace euclidien, l'inégalité de Ptolémée :

$$\|z\| \cdot \|x-y\| \leqslant \|x\| \cdot \|y-z\| + \|y\| \cdot \|x-z\|.$$

7 Soit a, b, A, B des réels positifs tels que $a < A$ et $b < B$. On se donne deux suites $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ telles que $a \leqslant x_k \leqslant A$ et $b \leqslant y_k \leqslant B$ pour tous k. Démontrer :

$$1 \leqslant \frac{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)}{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2} \leqslant \left(\frac{\sqrt{(AB/ab)} + \sqrt{(ab/AB)}}{2}\right)^2$$

Cas d'égalité ?

8 Dans tout espace euclidien, on a :

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 + \|a+b+c\|^2 = \|a+b\|^2 + \|b+c\|^2 + \|c+a\|^2.$$

9 Soit N une application d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$(N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2\,((N(x))^2 + (N(y))^2),$$

pour tous vecteurs x et y. Prouver qu'alors :

$$N(x+y) \leqslant N(x) + N(y).$$

10 Dans un espace euclidien, tous vecteurs non nuls a et b satisfont à :

$$\|a-b\| \geqslant \frac{1}{2}(\|a\| + \|b\|) \cdot \left| \frac{a}{\|a\|} - \frac{b}{\|b\|} \right|,$$

l'égalité ayant lieu si $\|a\| = \|b\|$.

4. TRANSFORMATIONS DES ESPACES EUCLIDIENS

1 Soit g une isométrie de $\mathbb{R}^2$ euclidien, et n un entier $\geqslant 1$. Déterminer les isométries f telles que $f^n = g$.

2 Déterminer la rotation vectorielle d'axe dirigé par $\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ qui transforme $\vec{j}$ en $\vec{k}$.

3 Reconnaître la transformation f telle que $f(\vec{i}) = a\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$, $f(\vec{j}) = b\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k}$, $f(\vec{k}) = a\vec{i} + b\vec{j} + a\vec{k}$, où $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée.

4 Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, on appelle s_1, s_2, s_3 les symétries orthogonales par rapport aux plans d'équations $y = z$, $z = x$, $x = y$. Dresser la table de multiplication du sous-groupe engendré par s_1, s_2, s_3 dans le groupe orthogonal.

5 Etudier les endomorphismes f_a tels que $f_a(x) = x - 2\{(a,x)/\|a\|^2\}a$, où $a \neq \vec{0}$.

6 Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ euclidien, de mêmes normes. (1) Quel est l'ensemble des rotations vectorielles faisant passer de u à v ? (2) Même question pour les retournements.

7 Soit U une transformation orthogonale et P un polynôme. S'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $(P(U))^k = 0$, alors $P(U) = 0$.

8 Soit E un espace vectoriel euclidien. Démontrer qu'une CNS pour que f soit une projection orthogonale est que f soit linéaire, satisfasse à $f^2 = f$, et *diminue* la norme, en ce sens que $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in E$.

5. MATRICES ORTHOGONALES

1 Etudier l'endomorphisme dont la matrice est : $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.

2 Quelle est la nature de la transformation de $\mathbb{R}^3$ euclidien de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

3 Pour $\varphi \in \,]0, \pi/2[$, étudier l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice :

$$\begin{pmatrix} -\cos^2\varphi & \sin^2\varphi & -\sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi & -\cos^2\varphi & -\sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi \\ -\sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi & -\sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

4 Reconnaître la transformation :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

5 Déterminez $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ de telle sorte que la matrice :

$$M = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1/2 & b/a & c/a \\ a/b & -1/2 & c/b \\ a/c & b/c & -1/2 \end{pmatrix}$$

représente une isométrie de $\mathbb{R}^3$.

6 Dans l'espace vectoriel euclidien de dimension trois, on considère l'application linéaire f telle que $x' = -z$, $y' = x$, $z' = y$. Montrer que l'on peut mettre f sous la forme $r \circ s = s \circ r$, où r est une rotation d'axe D, et s une symétrie par rapport à un plan P, avec D et P orthogonaux.

7 Exprimer, dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, rapporté à sa base canonique, la matrice d'une rotation vectorielle d'axe $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, et d'angle ω.

8 A quelle condition les réels a, b, c rendent-ils la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ matrice de rotation ? Déterminer alors l'axe et l'angle.

6. LE PRODUIT VECTORIEL

1 Montrer de diverses manières que $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}.\vec{b})$.

2 Pour quatre points quelconques d'un espace affine euclidien de dimension trois, on a toujours :

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}.$$

3 Simplifier l'expression :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) + (\vec{b} \wedge \vec{c}).(\vec{a} \wedge \vec{d}) + (\vec{c} \wedge \vec{a}).(\vec{b} \wedge \vec{d}).$$

4 Résoudre et discuter : $\vec{x} + \vec{y} = \vec{s}$, $\quad \vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{p}$, $\quad \vec{x}.\vec{y} = \alpha$.

5 Soit R une rotation d'angle α autour de $\vec{u}$ unitaire. Calculer $R(\vec{x})$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{x}$ et $\vec{u} \wedge \vec{x}$.

6 Appelant H et H' les projections orthogonales de M sur les droites (D) et (D'), déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{HH'}$ soit constant.

7 Etant donné trois points A, B, C, déterminer le lieu de M tel que :

$$\overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) = \vec{0}.$$

8 On se donne $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^3$. Quel est le noyau de :
$$\vec{v} \to (\vec{a}\,.\,\vec{b})\,\vec{v} + (\vec{a} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{b}\ ?$$

9 Soit $\dim_{\mathbb{R}} E = 3$ et $u(\vec{x}) = \vec{k} \wedge \vec{x}$, où $\|\vec{k}\| = 1$. Montrer que $f = \sum_{k=0}^{\infty} u^k/2^k$ est un automorphisme, et le reconnaître.

10 Résoudre et discuter : $\vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$.

11 Résoudre et discuter : $\vec{x} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{a}) = \vec{b}$.

12 Etant donné quatre points A, B, C, D, déterminer l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$.

7. LE TRIÈDRE

1 Dans un trièdre, les plans passant par chaque arête et contenant la bissectrice intérieure de la face opposée ont-ils une droite commune ?

2 Les bissectrices extérieures des trois faces d'un trièdre sont coplanaires.

3 Les plans menés perpendiculairement aux faces d'un trièdre par les bissectrices de ces faces se coupent suivant une même droite.

4 Les plans menés par chaque arête d'un trièdre perpendiculairement au plan de la face opposée ont une droite commune.

5 Dans deux trièdres supplémentaires, toute face de l'un est supplémentaire du trièdre correspondant de l'autre.

6 La somme des dièdres d'un trièdre est comprise entre deux droits et six droits.

7 Tout dièdre d'un trièdre augmenté de deux droits est supérieure à la somme des deux autres.

8 La somme des faces d'un trièdre quelconque est inférieure à quatre droits.

9 Dans tout trièdre, une face quelconque est inférieure à la somme des deux autres.

10 La somme des angles que fait avec les trois arêtes d'un trièdre une demi-droite issue du sommet du trièdre et intérieure à celui-ci est comprise entre la somme des faces du trièdre et la moitié de cette somme.

CHAPITRE 10

Géométrie plane (affine euclidienne)

1. COORDONNÉES BARYCENTRIQUES EN GÉOMÉTRIE PLANE EUCLIDIENNE

1 Démontrer que les pieds des trois bissectrices extérieures d'un triangle sont alignés.

2 Montrer que les coordonnées barycentriques de l'orthocentre du triangle de référence sont $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg} C$.

3 Déterminer des coordonnées barycentriques des centres des cercles inscrits et exinscrits.

4 Quelles sont les coordonnées barycentriques du centre du cercle d'Euler du triangle de référence ?

5 Soit ABC un triangle de longueurs de côtés a, b, c. Quel est l'ensemble des points M tels que : $a\,.\,MA^2 + b\,.\,MB^2 + c\,.\,MC^2 = abc$?

6 Etant donné un triangle équilatéral ABC, déterminer une CNS pour que l'isobarycentre des points P, Q, R, alignés, tels que $P \in (BC)$, $Q \in (CA)$, $R \in (AB)$, soit sur le cercle circonscrit à ABC.

7 Quelle est l'équation du cercle circonscrit au triangle dont les côtés ont pour équations cartésiennes : $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, $x \cos \beta + y \sin \beta - q = 0$, $x \cos \gamma + y \sin \gamma - r = 0$?

8 Montrer que les coordonnées barycentriques du point de Lemoine du triangle de référence sont (a^2, b^2, c^2).

9 Montrer que l'équation barycentrique du cercle circonscrit au triangle de référence ABC est de la forme $a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0$, où a, b, c sont les longueurs des côtés.

10 Quelle est l'équation barycentrique du cercle inscrit au triangle de référence ?

2. BARYCENTRES DANS LE PLAN EUCLIDIEN

1 Soit A, B, C, D des points du plan affine, et k réel. Déterminer l'ensemble des points M satisfaisant à $\|\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC}+k\overrightarrow{MD}\|$.

2 Etant donné cinq points du plan, et un réel k, déterminer les points M tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA}' + \overrightarrow{MB}'\|.$$

3 On se donne le cercle unité (Γ) de centre O, un point G, et trois réels α, β, γ, de somme non nulle. Peut-on trouver sur (Γ) trois points A, B, C qui, affectés des coefficients α, β, γ aient G pour barycentre ?

4 Soit G le barycentre de A_1, A_2, A_3 affectés des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Montrer que les aires algébriques des triangles GA_2A_3, GA_3A_1, GA_1A_2 sont proportionnelles à ces coefficients. Généraliser.

5 Etant donné un carré $ABCD$, déterminer l'ensemble des isobarycentres des quatre points P, Q, R, S sachant que ces points décrivent respectivement les *segments* $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

6 Soit (C) un cercle donné de diamètre AB. Quel est l'ensemble E des milieux M de PQ, où P décrit le segment $[AB]$ et Q la circonférence (C) ?

7 Soit E un ensemble de n points $A_1, A_2, \dots, A_n$, tous situés sur un cercle de centre O. On pose $\vec{a_i} = \overrightarrow{OA_i}$. A toute *paire* $\{i,j\}$ d'entiers, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, on associe le centre de gravité G_{ij} des $n-2$ points de $E \backslash \{A_i, A_j\}$, et la droite Δ_{ij} perpendiculaire abaissée de G_{ij} sur A_iA_j. Montrer que les $\binom{n}{2}$ droites Δ_{ij} ont un point commun que l'on caractérisera.

3. CONVEXITÉ DANS LE PLAN EUCLIDIEN

1 Montrez que l'intérieur d'une parabole est convexe.

2 Montrez que l'intérieur d'une ellipse est convexe.

3 Montrez la convexité de la partie du plan délimitée par une branche d'hyperbole et contenant le foyer correspondant.

4 Etant donné trois points A, B, C, montrer que l'ensemble E_λ des points M du plan tels que $MA + MB + MC \leqslant \lambda$ est convexe.

5 On se donne n droites du plan. Montrer que l'ensemble des points dont la somme des distances à ces droites est $\leqslant C$ est convexe.

6 Soit E_a l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que $x^a + y^a \leqslant 1$. Montrer que E_a est convexe si $a \geqslant 1$.

7 Soit $E(c)$ l'ensemble des points M du plan tels que $MF.MF' \leqslant c^2$, où $c > 0$, et F et F' sont deux points donnés. Montrer que $E(c)$ est convexe si c est suffisamment grand.

8 La boule unité de toute norme sur $\mathbb{R}^2$ est convexe.

4. ISOMÉTRIES AFFINES PLANES

1 Soit ABC un triangle équilatéral et α, β, γ les rotations de centres respectifs A, B, C, toutes d'angle $\pi/3$. Déterminer $\gamma \circ \beta \circ \alpha$.

2 Soit $A_1A_2A_3$ un triangle et R_1, R_2, R_3 des rotations de centres A_1, A_2, A_3 et angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Peut-on choisir $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ afin que $R_3 \circ R_2 \circ R_1$ soit l'identité ?

3 Etant donné quatre points A, B, C, D, étudiez le produit des quatre symétries orthogonales par rapport aux droites AB, BC, CD, DA.

4 On considère deux rotations $\mathcal{R}(O, \alpha)$ et $\mathcal{R}'(O', \alpha)$, où α varie. Quel est le lieu du centre de la rotation composée $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}'$? droite en O' ⊥ OO'

5 Soit s_P la symétrie par rapport au point P. Partant du triangle $A_0B_0C_0$, on définit $A_1B_1C_1 = s_{A_0}(A_0B_0C_0)$, $A_2B_2C_2 = s_{B_1}(A_1B_1C_1)$, $A_3B_3C_3 = s_{C_2}(A_2B_2C_2)$, etc. Montrer que :

$$s_{C_5} \circ s_{B_4} \circ s_{A_3} \circ s_{C_2} \circ s_{B_1} \circ s_{A_0} = \mathrm{Id}.$$

6 Sur les côtés d'un triangle ABC, à l'extérieur, on construit deux triangles rectangles isocèles ABB_1, $AB = AB_1$, et ACC_1, $AC = AC_1$. Appelant M, H, K les milieux de BC, BB_1, CC_1, montrer que l'on passe de H à K par une rotation de centre M, que l'on précisera.

5. SYMÉTRIES PAR RAPPORT A UNE DROITE

1 On considère les symétries orthogonales s_1 et s_2 par rapport à deux droites concourantes D_1 et D_2. Déterminer le lieu des points M tels que la distance de $s_1(M)$ à $s_2(M)$ demeure constante.

2 Soit s_1, s_2, s_3, s_4 les symétries orthogonales par rapport aux côtés d'un parallélogramme, parcourus dans cet ordre. Que vaut $s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1$?

3 Etant donné un parallélogramme, construisez un quadrilatère ayant les côtés de ce parallélogramme pour bissectrices de ses quatre angles au sommet.

4 On considère les droites D_k passant par O et faisant avec Ox les angles $k\pi/2n$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, et l'on appelle S_0, S_1, S_2, ... , S_{n-1} les symétriques d'un point donné A par rapport à D_0, D_1, D_2, ... , D_{n-1}. Montrer que l'isobarycentre de ces points $(S_0, S_1, \dots, S_{n-1})$ tend vers une certaine limite que l'on déterminera.

5 On notera $s_\Delta(F)$ la symétrique orthogonale d'une figure F par rapport à une droite Δ. Soit ABC un vrai triangle, dans le plan euclidien, de bissectrices intérieures (α), (β), (γ), issues respectivement de A, B, C. A tout point M du plan, on associe les droites $s_\alpha(AM)$, $s_\beta(BM)$, $s_\gamma(CM)$. Montrer que ces droites sont concourantes en un point M', et étudier quelques propriétés de l'application : $M \to M'$.

6 Ecrire l'équation de la droite joignant les symétriques de $M_0(x_0 y_0)$ par rapport aux droites $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ où $b^2 - ac > 0$.

7 Montrer que les droites $Ax + By + C = 0$ et $(Ax + By)^2 - 3(Bx - Ay)^2 = 0$ forment un triangle équilatéral.

8 On donne deux points A et B et une droite D. Trouver sur D le point M tel que la somme des deux segments AM et BM soit la plus petite possible.

9 On donne deux points A et B à l'intérieur d'un angle xOy. Trouver sur Ox un point M et sur Oy un point N tel que la somme $AM + MN + NB$ soit la plus petite possible.

6. SIMILITUDES PLANES DIRECTES

1 On se donne deux similitudes s_1 et s_2. Caractériser la transformation $M \to P$ telle que $\mathrm{O}P = \mathrm{O}M_1 + \mathrm{O}M_2$ où $M_1 = s_1(M)$, $M_2 = s_2(M)$.

2 On considère dans le plan trois cercles de rayons différents. Tracer leurs tangentes intérieures et extérieures et décrire avec précision la figure ainsi obtenue.

3 Soit C_1 et C_2 deux cercles du plan affine euclidien, de centres O_1 et O_2, de rayons R_1 et R_2. Déterminer l'ensemble des similitudes directes s telles que $s(C_1) = C_2$, en précisant l'ensemble de leurs centres.

4 A tout triangle ABC du plan on associe $A'B'C'$ tel que :

$$A' = \mathcal{S}_{B,\sqrt{2},\pi/4}(A),\quad B' = \mathcal{S}_{C,\sqrt{2},\pi/4}(B),\quad C' = \mathcal{S}_{A,\sqrt{2},\pi/4}(C),$$

où $\mathcal{S}_{\mathrm{O},\lambda,\theta}$ désigne la similitude de centre O, rapport λ et angle θ. Montrer que la correspondance entre (A, B, C) et (A', B', C') est bijective.

5 On considère la similitude $s = \mathcal{S}_{0,k,\theta}$, et A, B deux points alignés avec 0, d'images A' et B' par s. Peut-on déterminer s afin que $C = (A'B) \cap (AB')$ appartienne à une droite donnée (Δ) ?

6 Se donnant trois points A, B, C, on appelle respectivement s_1, s_2, s_3 les similitudes de centres A, B, C, telles que $s_1(B) = C$, $s_2(C) = A$, $s_3(A) = B$. Etudier $s_1 \circ s_2 \circ s_3$ et $s_3 \circ s_2 \circ s_1$.

7 Les sous-groupes H du groupe des similitudes directes, tels que chacun de leurs éléments ait au moins un point invariant, sont commutatifs. En déduire que si $H \neq \{\mathrm{id}\}$, il existe un, et un seul point A tel que, pour tout $f \in H$, on ait $f(A) = A$.

7. AUTRES TRANSFORMATIONS AFFINES

1 Etudier la nature, selon $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, de la transformation :

$$\begin{cases} x' = (a-2)x - y/2 \\ y' = x/2 + (a-2)y + b. \end{cases}$$

2 Etudier la transformation :

$$\begin{cases} x' = -x\cos 2\alpha - y\sin 2\alpha + 2\cos\alpha \\ y' = -x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha - 2\sin\alpha. \end{cases}$$

3 Etudier la transformation qui, à tout point M du plan, associe M' ainsi défini : les projections orthogonales P et Q de M' sur Ox et Oy forment avec M un triangle équilatéral, avec $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}) = -\pi/3$.

4 Etudier $z' = (i-1)\bar{z} + 3$.

5 Soit $\mathcal{S}$ une similitude indirecte de centre O et d'axe Δ, et soit P un point donné. Déterminer le lieu des points alignés avec P, et leur image $\mathcal{S}(P)$.

6 Une bijection du plan est une homothétie-translation si tout couple (A,B) se transforme en (A',B') tel que les droites (AB) et $(A'B')$ soient parallèles.

7 Soit ABC un triangle et A', B', C' les milieux des côtés BC, CA, AB. A tout point M du plan, on associe les points P, Q, R tels que A', B', C' soient les milieux respectifs de MP, MQ, MR. Montrer que les droites AP, BQ, CR ont un point commun M'. Etudier la transformation $M \to M'$.

8 Soit ABC un triangle équilatéral. Etudier la transformation $M \to M'$ tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

9 Par le théorème sur la composition des homothéties, démontrez les théorèmes de Menelaüs et de Céva.

8. TRANSFORMATIONS NON AFFINES DU PLAN EUCLIDIEN

1 Etant donnés deux points fixes A et B, étudier $f: M \to M'$, où M' est diamétralement opposé à M sur le cercle ABM.

2 Soit E le plan euclidien muni d'un repère orthonormé, et B le point de coordonnées (O, b), $b > 0$. On considère la transformation $M' = \varphi(M)$ qui, à M, associe M' tel que B, M, M' soient alignés, et OM et OM' perpendiculaires. (1) Déterminer les coordonnées (x', y') de M' en fonction de celles (x, y) de M. (2) Quel est l'ensemble de définition de φ? (3) φ est-elle injective ? (4) Peut-on en définir une réciproque ? (5) Montrer que φ échange l'intérieur du cercle de diamètre OB avec le demi-plan $y > 0$. (6) Discuter l'image par φ d'une droite.

3 Pour tout point M du plan rapporté à des axes rectangulaires $(x'x)(y'y)$, montrer qu'il existe $P \in (x'x)$ et $Q \in (y'y)$ tels que le triangle MPQ soit équilatéral. Ceci fait, étudier la transformation qui à M associe M', centre de gravité du triangle MPQ.

4 Etudier l'application qui à $M(x,y)$ associe $M'(x', y')$ tel que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \pi/2$ et $x' = -2x$.

5 Etudiez la transformation $x' = (4x^2 + y^2)/8x^2$, $y' = (x^2 + 4y^2)/8y^2$.

6 Etant donnés deux points A et B, on associe au point M le point M', orthocentre du triangle MAB. Etudier la transformation f telle que $M' = f(M)$.

7 Etant donné un vrai triangle ABC, et un point M dans son plan, on appelle α, β, γ les intersections des droites (AM), (BM), (CM) avec les droites (BC), (CA), (AB) respectivement. Sur (BC), on définit α' tel que $\alpha\alpha'$ et BC aient même milieu. Sur (CA) et (AB), on définit les points β' et γ' de manière analogue. Démontrer que les droites $(A\alpha)$, $(B\beta)$, $(C\gamma)$ sont concourants en un certain point M', et étudier l'application $M \to M'$.

8 On se donne $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $a > 0$. On considère $M' = f(M)$, centre du cercle inscrit à MAA'. Etudier analytiquement et géométriquement la transformation f.

9. SUITES DE POINTS DANS LE PLAN EUCLIDIEN

1 Désignons par $\mathcal{S}_{C,\lambda,\theta}$ la similitude de centre C, rapport λ et angle θ. On définit la suite (A_n) de points par A_0, A_1 et, avec $\lambda \in]0,1[$:

$$A_{n+1} = \mathcal{S}_{A_n, \lambda, (-1)^n \pi/2}(A_{n-1}), \quad n \geqslant 1.$$

Montrer que la suite (A_n) converge vers un point que l'on précisera.

2 Partant de A_0, A_1, A_2, on définit A_n comme étant le pied de la perpendiculaire abaissée de A_{n-1} sur la droite (A_{n-2}, A_{n-3}), $n \geqslant 3$. Etudier la suite (A_n), en passant au besoin aux nombres complexes.

3 Soit $f: M(x,y) \to M'(y',y')$, telle que $x' = \lambda x + y$, $y' = \lambda y$, où $|\lambda| < 1$. Partant de $M_0(x_0, y_0)$, on définit $M_n = f(M_{n-1})$, $n \geqslant 1$. Etudier la limite éventuelle de P_n tel que $OP_n = \sum_{k=0}^{n} OM_n$.

4 Soient A et B deux points distincts du plan. A tout point M_0 on associe $M_1 = f(M_0)$, centre du cercle inscrit au triangle ABM_0. Montrer que $M_n = f(M_{n-1})$, $n \geqslant 1$, tend vers $\mu \in [AB]$ tel que $A\mu/B\mu = \widehat{ABM_0}/\widehat{BAM_0}$.

5 Montrer que l'arc C_n de la courbe $y = \cos^n x$, $x \in [0, \pi/2]$, $n \geqslant 2$, admet un seul point d'inflexion I_n, dont on déterminera la limite.

6 A tout triangle $T = ABC$ on associe le triangle $T' = f(T)$ dont les sommets sont les points de contact A', B', C' du *cercle inscrit* à T avec les côtés BC, CA, AB. A partir d'un certain triangle T_0, on définit alors la suite de triangles emboîtés $T_1 = f(T_0)_1$, $T_2 = f(T_1)$, etc. Montrer que les trois angles de T_n tendent vers $\pi/3$. Vers quel point de Γ_0 tendent les trois points A_n, B_n, C_n ?

7 Soit P et Q les projections orthogonales de M sur les axes et $M' = f(M)$ la projection orthogonale de M sur la droite PQ. Montrer que la suite des points $M_n = f(M_{n-1})$, $n \geqslant 1$, M_0 donné dans le premier quadrant, non sur la première bissectrice, converge toujours vers un point des axes positifs, dont on calculera la distance à l'origine.

10. LE TRIANGLE EUCLIDIEN

1 Il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets soient à coordonnées entières.

2 Les sommets d'un triangle décrivent les droites $y = x \operatorname{tg} \theta_1$, $y = x \operatorname{tg} \theta_2$, $y = x \operatorname{tg} \theta_3$, de sorte que l'origine O demeure le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Quel est le lieu de l'orthocentre ?

3 Si d'un point on mène des rayons aux trois sommets d'un triangle, les droites menées par ce même point perpendiculairement à ces rayons vont rencontrer les côtés opposés en trois points alignés.

4 Sur les côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ d'un triangle, on choisit des points A', B', C'. Montrer que les cercles circonscrits à $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ ont un point commun. Quel est l'ensemble de ces points quand A', B', C' varient ?

5 Un triangle ABC est rectangle ssi $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$.

6 Par l'orthocentre H d'un triangle ABC on fait passer deux droites perpendiculaires D et D' qui coupent les côtés de ce triangle en P, P', Q, Q', R, R', avec $P, Q, R \in D$ et $P', Q', R' \in D'$. Montrer que les milieux des segments PP', QQ', RR' sont alignés.

7 Les droites de Simson relatives à deux points diamétralement opposés du cercle circonscrit à ABC sont perpendiculaires et le lieu de leur point de concours est le cercle des neuf points de ABC.

8 Des sommets A, B, C d'un triangle, on abaisse sur une droite quelconque Δ de son plan des perpendiculaires AA', BB', CC'. Démontrer que les perpendiculaires abaissées respectivement des points A', B', C' sur les côtés BC, CA, AB sont concourantes en un point appelé l'*orthopôle* de Δ.

9 Etant donné un triangle $A_1A_2A_3$, on appelle A_i' le pied de la hauteur issue de A_i, α_i son milieu, α_i' le milieu du côté opposé à A_i, $i = 1, 2, 3$. Montrer que les trois droites $(\alpha_i \alpha_i')$ concourent au point de Lemoine de $A_1A_2A_3$.

11. RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE

Dans cette section, a, b, c sont les longueurs des côtés, A, B, C les angles au sommet, S la surface, r, r_a, r_b, r_c les rayons des cercles inscrit et exinscrits, R le rayon du cercle circonscrit, $p = (a + b + c)/2$, h_a, h_b, h_c les hauteurs, m_a, m_b, m_c les médianes.

1 Dans un triangle tel que $\hat{B} = 2\hat{A}$, alors $b^2 - a^2 = ac$.

2 Dans un triangle, la propriété $m \,.\, \cos B \,.\, \cos C = \cos A$, où $m \neq -1$, est équivalente à $\operatorname{tg} B \,.\, \operatorname{tg} C = m + 1$.

3 La relation $a + b = (\operatorname{tg}(C/2))(a \operatorname{tg} A + b \operatorname{tg} B)$ implique que le triangle est isocèle.

4 Si dans un triangle deux bissectrices intérieures sont égales, ce triangle est isocèle.

5 Appelant m_a, m_b, m_c les longueurs des médianes, montrer que :

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = (3/4)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$m_a^4 + m_b^4 + m_c^4 = (9/16)(a^4 + b^4 + c^4)$$

Montrer plus généralement l'existence d'une suite de rationnels r_n tels que :

$$m_a^{2n} + m_b^{2n} + m_c^{2n} = r_n(a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}).$$

6 Prouver que $abc = 4\,RS$.

7 Prouver que $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{r r_a r_b r_c}$.

8 On a $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin (A/2) \sin (B/2) \sin (C/2)$
et $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos (A/2) \cos (B/2) \cos (C/2)$.
De même :

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{tg} B \,.\, \operatorname{tg} C.$$

9 Montrer que $1/r_a + 1/r_b + 1/r_c = 1/r$.

10 Montrer que $1/r_a + 1/h_a = 1/h_b + 1/h_c$.

11 Appelant d la distance du centre inscrit au centre du cercle circonscrit, on a : $d^2 = R(R-2r)$.

12. INÉGALITÉS ET PROBLÈMES DE MAXIMUM OU MINIMUM DANS LE TRIANGLE

1 Dans tout triangle, on a toujours : $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}$.

2 Dans tout triangle, on a toujours : $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc$.

3 Dans tout triangle, on a toujours :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

4 Déterminer un triangle inscrit dans un cercle donné et dont la somme des carrés soit maximale.

5 Quel est le maximum du produit $AB.BC.CA$ quand A, B, C décrivent un cercle ? Même question s'ils décrivent un arc de cercle.

6 De tous les triangles inscrits dans un cercle, c'est le triangle équilatéral dont l'aire est la plus grande.

7 Dans un triangle, c'est le centre de gravité dont la somme des carrés des distances aux sommets est la plus petite.

8. Dans un triangle, déterminer le ou les points dont la somme des distances aux côtés est minimum.

9 Deux points M et M' varient indépendamment sur deux cercles (C) et (C') tangents extérieurement en A. Quel est le maximum de l'aire du triangle AMM' ?

10 Dans un triangle où tout angle est $< 120\,°$, le point dont la somme des distances aux trois sommets est minimum est le point intérieur au triangle qui voit chaque côté sous un angle de $120\,°$.

11 Dans un triangle, le point dont la somme des carrés des distances aux trois côtés est minimale est le centre des symédianes, ou point de Lemoine.

13. CONSTRUCTIONS DE TRIANGLES

1 Régionner le plan des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $0 < x < y$, afin que l'on puisse construire un triangle dont les côtés ont pour longueurs $y - x$, $y + x$, $\sqrt{y^2 - x^2}$.

2 Conditions pour que l'on puisse construire un triangle connaissant le cercle inscrit et le cercle circonscrit.

3 Déterminer les triangles dont les côtés sont des nombres entiers et dont le rayon du cercle inscrit vaut 2.

4 Construire un triangle rectangle connaissant son hypoténuse et sachant que la médiane issue du sommet de l'angle droit est moyenne géométrique des deux côtés de l'angle droit.

5 Il existe un seul triangle ayant pour longueur de côté des entiers consécutifs et dont deux angles sont doubles l'un de l'autre.

6 Construire un triangle connaissant un côté, l'angle opposé et la somme des deux autres côtés.

7 Construire un triangle connaissant les trois médianes.

8 Construire un triangle connaissant le périmètre et les angles.

14. POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE

1 Montrer que la droite passant par le centre du cercle exinscrit dans l'angle A d'un triangle ABC, orthogonale à (BC), et les deux autres droites analogues sont concourantes.

2 Un triangle ABC n'a que des angles aigus. Les hauteurs recoupent le cercle circonscrit en A', B' C'. Les côtés des triangles ABC et $A'B'C'$ déterminent un hexagone désigné, en suivant le périmètre, par $DEFD'E'F'$. Montrer que les droites (DD'), (EE'), (FF') passent par l'orthocentre de ABC.

3 A partir d'un triangle ABC de cercle circonscrit (Γ), on construit le triangle

$A'B'C'$ dont (Γ) est le cercle inscrit (donc $A'B'$ est tangente à (Γ) en C, etc.). Montrer que les droites AA', BB', CC' concourent en un certain point K (appelé centre des symédianes, ou point de Lemoine). On montrera également que K est l'isobarycentre de son triangle podaire, dont les sommets sont les pieds des perpendiculaires abaissées de K sur les côtés de ABC.

4 Montrer que toute droite partageant un triangle en deux domaines d'aires égales et de même périmètre passe par le centre du cercle inscrit. Déterminer les droites convenables.

5 Etant donné un vrai triangle ABC, montrer qu'il existe un point O intérieur tel que : $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CB}) = x$, avec $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \hat{A} + \operatorname{cotg} \hat{B} + \operatorname{cotg} \hat{C}$. C'est le premier point de *Brocard*. Montrer aussi l'existence d'un point O' tel que $(\overrightarrow{AO'}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{BO'}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{CO'}, \overrightarrow{CA}) = x$.

6 Les droites issues des sommets et les joignant aux points de contact du cercle inscrit avec les côtés opposés concourent en un point appelé point de *Gergonne*. Le point de *Nagel*, lui, est le point de concours des droites joignant chaque sommet au point de contact sur le côté opposé du cercle exinscrit correspondant.

15. LE QUADRILATÈRE EUCLIDIEN PLAN

1 Dans un quadrilatère, la somme des carrés des diagonales est au plus égale à la somme des carrés des côtés. Cas d'égalité ?

2 L'aire d'un quadrilatère plan articulé est maximum quand le quadrilatère est inscriptible.

3 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On donne les angles $\widehat{BAC} = 60°$, $\widehat{CAD} = 20°$, $\widehat{ABD} = 50°$, $\widehat{DBC} = 30°$. Calculer l'angle $\widehat{ACD}$.

4 Si l'on construit des triangles rectangles isocèles ABA', BCB', CDC', DAD', $A'A = A'B$, etc., extérieurement sur les côtés d'un quadrilatère convexe $ABCD$, alors $A'C'$ est égal et perpendiculaire à $B'D'$.

5 Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O, et $A_1B_1C_1D_1$ son image par une certaine rotation de centre O. Montrer que les intersections de AB et A_1B_1, BC et B_1C_1, CD et C_1D_1, DA et D_1A_1 forment un parallélogramme.

6 Etant donnés quatre points distincts A, B, C, D, montrer que si les segments $[AB]$ et $[CD]$ se coupent, alors ni $[AC]$ et $[BD]$, ni $[AD]$ et $[CB]$ ne se coupent.

7 Soient quatre droites en position générale. Montrer que les cercles circonscrits aux quatre triangles qu'elles forment ont un point commun dont les projections sur ces droites sont alignées. Montrer aussi que les quatre orthocentres sont alignés.

8 Soit a, b, c, d les longueurs des côtés d'un quadrilatère convexe, et S sa surface. Alors $4S \leqslant (a+c)(b+d)$, l'égalité ayant lieu pour le rectangle.

16. ENSEMBLES FINIS DE POINTS ET DE DROITES DANS LE PLAN EUCLIDIEN

1 Etant donnés n points distincts, déterminer une droite D telle que la somme des carrés de ses distances à ces points soit minimum.

2 Etant donnés n points, montrer qu'il existe au moins une droite dont la somme des distances à ces points soit minimum.

3 On donne n droites dans le plan. Montrer que l'ensemble des points, dont les projections orthogonales sur ces droites sont les sommets d'un polygone d'*aire constante*, est un cercle.

4 Comment choisir une configuration de n droites du plan afin que le lieu des points dont la somme des carrés des distances à ces droites est constante *soit un cercle* ?

5 Soit E un ensemble fini de points du plan affine euclidien, tel que, si A et B en sont deux éléments quelconques, il existe alors un troisième point C de E, aligné avec A et B. Montrer que tous les points de E sont alignés.

6 On donne $4n$ points en position générale dans le plan. Montrer qu'on peut les partager en n groupes de quatre points qui soient sommets de n quadrilatères disjoints deux à deux.

7 On se donne n points dans le plan, $n \geqslant 3$, et l'on appelle d la distance maximum de deux d'entre eux. Appelant « diamètre » tout segment de longueur d joignant deux de ces n points, montrer qu'il y a au plus n diamètres.

8 Si $f(x)$ est le maximum de points de distances mutuelles toutes $\geqslant 1$ dans le carré de côté x, montrer l'existence de A et $B > 0$ tels que :

$$Ax^2 \leqslant f(x) \leqslant B(x+1)^2.$$

9 Soit A un *compact* du plan complexe $\mathbb{C}$. On pose :

$$d_n = \sup_{z_1, z_2, \dots, z_n \in A} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |z_i - z_j|.$$

Montrer que $d_n^{2/n(n-1)}$ converge.

17. ENSEMBLES DÉFINIS AU MOYEN DE CONDITIONS SUR DES DISTANCES

1 Soient D et D' deux droites sécantes du plan affine euclidien. Quel est l'ensemble des points M dont la somme des distances à ces deux droites est $\leqslant l$?

2 Soient D et D' deux droites sécantes. A tout point M on associe ses projections orthogonales H et H' sur ces droites. Quel est l'ensemble des points M tels que $|MH' - MH| \leqslant l$?

3 On se donne deux segments OA et OB perpendiculaires. Décrire l'ensemble des points M équidistants de ces deux segments.

4 Etant donné trois droites formant un vrai triangle, montrer que l'ensemble des points dont la somme des distances à ces droites est constante est en général constituée par le bord d'un polygone convexe, dont on discutera la forme selon la valeur de la constante.

5 Déterminer l'ensemble des points dont la somme des distances à un point donné et à une droite donnée est constante.

6 Ensemble des points équidistants de O(0,0) et $A(2,4)$ pour la norme $\|(x,y)\| = \max(|x|, |y|)$.

7 A tout $\vec{V} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on associe $N(\vec{V}) = \max(|x|, |x+y|)$. Montrer que N est une norme et déterminer, au sens de cette norme, l'ensemble des (x,y) équidistants de $A(a,0)$ et de l'axe $y'0y$.

8 Soit A un point du cercle unité. En utilisant la trigonométrie, ou autrement, construire une droite (D), passant par A, et telle que le segment MN découpé sur elle par les axes Ox et Oy ait une longueur donnée l.

9 Discuter la forme de l'ensemble des points équidistants d'un *cercle* et d'un *segment.*

10 Soient $P_1, P_2, \dots, P_n$ des points du plan. Montrer qu'il existe un point A du cercle unité de centre O, O$A = 1$, tel que $\prod_{k=1}^{n} AP_k \geqslant 1$.

CHAPITRE 11

Géométrie dans l'espace (affine euclidienne)

1. DÉPLACEMENTS : TRANSLATIONS, ROTATIONS, VISSAGES

1 Montrer que la transformation $x' = y + 1$, $y' = z - 2$, $z' = x + 3$ est un vissage dont on précisera l'axe, l'angle et le vecteur translation.

2 Donner une CNS pour que la composée de trois symétries-droites soit une translation.

3 Etant donné un plan P et une droite D, coupant P en O, on demande l'ensemble des droites X telles que la symétrique axiale de D par rapport à X appartienne à P.

4 Donner une CNS de permutabilité de deux vissages.

5 On donne trois droites D_1, D_2, D_3 en position quelconque dans l'espace. Déterminer deux vissages d'axes respectifs D_1 et D_2 dont le composé soit un vissage d'axe D_3. [On utilisera le fait que tout vissage est le produit de deux retournements.]

6 Etant donné un tétraèdre régulier $OABC$, étudier la composée des trois demi-tours d'axes OA, OB, OC.

7 Montrer que la composée de deux rotations dont les axes ne sont pas coplanaires n'est pas une rotation.

8 Etant donnés quatre points A, B, A', B', tels que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$, montrer qu'il existe en général une rotation par laquelle (A,B) a pour image (A',B').

9 Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier, et E, F, G les milieux de CD, DB, BC. On note s, s', s'' les demi-tours d'axes AE, AF, AG. Etudier le déplacement $s'' \circ s' \circ s$.

10 Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier, et s, s' les demi-tours d'axes (AB), (CD). Etudier $s' \circ s$.

11 Soit v le vissage d'axe D, d'angle θ, de vecteur $\vec{V}$. (1) Déterminer le point M, d'image M', tel que le milieu de MM' soit un point A donné. (2) Si A varie sur une droite, quel est alors l'ensemble des points M ?

2. ISOMÉTRIES LAISSANT INVARIANTS CERTAINS ENSEMBLES

1 Etudier l'ensemble des isométries laissant invariante la réunion de deux plans affines sécants non perpendiculaires.

2 Etudier les isométries de l'hélice circulaire.

3 Déterminer le groupe des isométries de l'espace laissant invariant la réunion de deux droites parallèles.

4 Déterminer le groupe des isométries de E_3 laissant invariante la réunion de deux plans parallèles.

5 Etudier le groupe des isométries laissant invariant un parallélépipède le plus général.

6 Etudier le groupe des isométries laissant invariant un parallélépipède droit.

7 Etudier le groupe des isométries laissant invariant un parallélépipède rectangle.

8 Etudier le groupe des isométries laissant invariant un parallélépipède rectangle à base carrée.

9 Montrer que le groupe des isométries qui laissent invariant un cube comporte une symétrie-point, neuf symétries orthogonales par rapport à des plans, neuf demi-tours, quatorze rotations et l'identité.

3. DIVERSES TRANSFORMATIONS DE L'ESPACE AFFINE EUCLIDIEN

1 Etudier $x' = x + y - z, \quad y' = -x + y + z, \quad z' = x - y + z$.

2 Trois droites D_1, D_2, D_3 rencontrent orthogonalement Oz. Etudier le produit des retournements par rapport à ces trois droites.

3 Nature de l'application :

$$x' = 3x + 2y - 2z + 2, \quad y' = 2x + 3y - 2z + 2, \quad z' = 2x + 2y - z + 2.$$

4 Montrer que la composée de trois symétries points est une symétrie point. Déterminer son centre.

5 La composée de n symétries orthogonales par rapport à n plans deux à deux distincts peut-elle avoir des points invariants ?

6 Esquisser une théorie de l'itération de l'application affine la plus générale de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d''. \end{cases}$$

7 On se donne un ensemble fini de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ affectés de coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, dans un espace affine euclidien E. A tout point $M \in E$, on associe la *fonction scalaire de Leibniz* f, définie par :

$$f(M) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{MA}_k^2.$$

Si $\sum \alpha_k \neq 0$, montrer que l'ensemble L des points M où $f(M)$ est constante est vide ou est une sphère. Si $\sum \alpha_k = 0$, on trouve un plan en général.

8 On donne un point M et P, Q, R ses projections orthogonales sur les axes Ox, Oy, Oz. Soit $M' = f(M)$ la projection orthogonale de M sur le plan PQR. Partant de M_0, étudier la suite de points $M_n = f(M_{n-1}),\ n \geqslant 1$.

4. FIGURE FORMÉE PAR PLUSIEURS DROITES DE L'ESPACE

1 Déterminez la distance de deux droites (D) et (E) données par l'intersection de deux plans :

$$(D) \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}, \qquad (E) \begin{cases} px + qy + rz + s = 0 \\ p'x + q'y + r'z + s' = 0 \end{cases}.$$

2 Déterminez la perpendiculaire commune aux droites (D) et (D') d'équation :

$$(D) \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}, \qquad (D') \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}.$$

3 Soit un cube $ABCDA'B'C'D'$. Déterminer l'ensemble des milieux des segments XY sachant que X décrit le segment diagonal $[AC]$ et Y le segment diagonal $[B'D']$.

4 Déterminez la distance de deux droites données chacune par un point et un vecteur directeur.

5 L'ensemble des points dont la somme des carrés des distances à deux droites de l'espace est constante peut-il être une sphère ? et pour n droites ?

6 Mener une droite s'appuyant sur trois droites données et qui soit partagée en deux segments égaux par elles.

7 Quel est l'ensemble des droites intersections de deux plans perpendiculaires variables contenant chacun une droite donnée ?

8 En général, il existe deux droites s'appuyant sur quatre droites données de l'espace.

9 On donne trois droites (α), (β), (γ) de l'espace sur lesquelles se meuvent des points A, B, C. Etudier la configuration de ces trois points correspondant au *minimum* de $AB^2 + BC^2 + CA^2$.

10 *Configuration de Morley-Petersen* – On considère, dans l'espace, trois droites D_1, D_2, D_3 en position générale. On appelle Δ_1, Δ_2, Δ_3 les perpendiculaires communes à D_2D_3, D_1D_3, D_1D_2, et δ_1, δ_2, δ_3 les perpendiculaires communes à $D_1\Delta_1$, $D_2\Delta_2$, $D_3\Delta_3$. Montrer que δ_1, δ_2, δ_3 admettent une perpendiculaire commune.

5. LE TÉTRAÈDRE EUCLIDIEN

1 Un plan P coupe les arêtes d'un tétraèdre $ABCD$ en six points. Les six symétriques de chacun de ces points par rapport au milieu de l'arête qui le contient sont situés dans un même plan.

2 Combien peut-il y avoir de points équidistants de quatre plans ? Discuter.

3 Les quatre hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes (en l'orthocentre) ssi les arêtes opposées sont orthogonales, auquel cas le tétraèdre est appelé *orthocentrique.* Montrer que, dans ce cas, les centres de gravité et les orthocentres des quatre faces, ainsi que les points situés au $1/3$ à partir de l'orthocentre des segments joignant cet orthocentre aux sommets sont sur une sphère, appelée sphère des 12 points. Montrer enfin que le centre de gravité du tétraèdre, l'orthocentre, le centre de la sphère circonscrite et le centre de la sphère des 12 points sont alignés.

4 De tous les tétraèdres dont les aires des faces sont données, le tétraèdre de volume maximum est l'orthocentrique.

5 Si l'on choisit arbitrairement un point sur chaque arête d'un tétraèdre, les quatre sphères passant respectivement par chaque sommet et par les points choisis sur les trois arêtes adjacentes ont un point commun.

6 Un tétraèdre a ses arêtes opposées égales. Comparer ses faces et montrer que les droites passant par les milieux des arêtes opposées sont des axes de symétrie du tétraèdre.

7 Les plans qui bissectent extérieurement les dièdres d'un tétraèdre rencontrent les arêtes opposées en six points coplanaires.

8 Pour que les arêtes opposées d'un tétraèdre $ABCD$ soient orthogonales, il faut et il suffit que :

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

9 Les plans menés par les milieux des arêtes d'un tétraèdre perpendiculairement aux arêtes opposées concourent en un point, et ce point coïncide avec le milieu du segment joignant le centre de gravité au centre de la sphère circonscrite au tétraèdre (on l'appelle «point de Monge»).

6. LA SPHÈRE

1 Quel est l'ensemble des points de l'espace d'où un cosmonaute verrait la Terre et la Lune sous un même angle ?

2 On considère deux cercles C_1 et C_2 de l'espace. Quel est l'ensemble des centres Ω du cercle intersection de sphères variables S_1 et S_2, contenant respectivement C_1 et C_2 ?

3 Etant donnés deux points A et A' et un vecteur unitaire $\vec{u}$, déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A'M} = (\overrightarrow{AM}.\vec{u}).(\overrightarrow{A'M}.\vec{u})$.

4 Etant donné un cercle (C) de l'espace, de centre O et de rayon R, montrer que l'ensemble des points qui sont sommets d'un trièdre trirectangle ayant ses trois faces tangentes à (C) est une sphère de centre O et de rayon $R\sqrt{2}$.

5 Quel est le nombre maximum de points sur terre dont les distances mutuelles sont $\geqslant$ 10 000 km ?

6 Etant donnés n points sur une sphère (S) de rayon R, $n \geqslant 3$, on en choisit deux, et l'on construit le plan perpendiculaire à leur segment et passant par l'isobarycentre des $n-2$ restants. Montrer que ces $\binom{n}{2}$ plans ont un point commun, et que la puissance de ce point par rapport à (S) vaut :

$$\frac{1}{(n-2)^2}\left\{4(n-1)R^2 - K^2\right\},$$

où K^2 est la somme des carrés des distances mutuelles des n points.

7 Etant donné un vrai triangle ABC, déterminer les points S de l'espace pour lesquels existe un point M du segment $[BC]$ tel que l'angle ASM soit droit.

8 On considère l'ensemble des sphères passant par deux points A et B et tangentes à un plan (P) (ne séparant pas ces points !). (1) Quel est l'ensemble de leurs centres ? (2) Quel est l'ensemble des points de contact avec (P) ?

9 Si les arêtes opposées d'un tétraèdre sont orthogonales, les milieux des arêtes, les pieds des perpendiculaires communes aux arêtes opposées sont douze points d'une même sphère.

7. SURFACES DIVERSES

1 Soient $1, j, j^2$ les racines cubiques de l'unité. Quel est l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$(x+y+z)(x+jy+j^2z)(x+j^2y+jz) \geqslant 0 \ ?$$

2 Montrer que la surface d'équation $xy + yz + zx = 0$ est un *cône de révolution* dont on déterminera le sommet, l'axe et l'angle.

3 On se donne une sphère (S) et un disque diamétral (D). Deux points P et Q varient respectivement dans (S) et (D). Déterminer l'ensemble des milieux de PQ.

4 La somme des angles plans d'un polyèdre convexe est égale à autant de fois 4 droits qu'il y a de sommets moins 2.

5 Montrer que les quadriques passant par les quatre sommets d'un repère affine ont une équation barycentrique de la forme :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy = 0.$$

6 Montrer que tout plan bitangent à un tore le coupe selon deux cercles.

7 Etant donné un tétraèdre, le lieu des points de l'espace dont les quatre projections orthogonales sur les faces sont *coplanaires* n'est pas la sphère circonscrite, comme on pourrait s'y attendre un peu par analogie avec la propriété de la droite de Simson. C'est en fait une surface du troisième ordre, souvent appelée *surface de Sartiaux*. Cette surface est-elle bornée ?

8 Etant donnés *six* plans quelconques, il existe en général *dix* points de l'espace dont les projections sur ces six plans sont coplanaires.

9 Etudier la surface d'équation :

$$\inf_{\theta \in \mathbb{R}} (x \cos \theta + y \sin \theta + z) = 0.$$

8. GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1 Trouver dans un plan un point de cote et d'éloignement donnés.

2 Construire les traces d'un plan défini par deux droites qui se coupent en un point de la ligne de terre.

3 Construire une horizontale de longueur donnée s'appuyant sur deux droites situées dans un même plan.

4 Construire la projection frontale d'un hexagone plan, connaissant sa projection horizontale qui est un hexagone régulier et les projections verticales de trois sommets.

5 Mener par une droite donnée un plan dont les traces font avec la ligne de terre des angles égaux.

6 Construire un plan qui soit à égales distances de quatre points donnés.

7 Mener par quatre points donnés quatre plans parallèles équidistants.

8 Par un point, faire passer une droite qui rencontre une droite donnée et qui soit parallèle à l'un des bissecteurs.

9 Construire l'intersection d'une droite et d'un plan parallèle au premier bissecteur.

10 Construire une droite parallèle à une direction Δ et s'appuyant sur deux droites données, au moyen d'une projection oblique sur le plan horizontal faite parallèlement à Δ.

CHAPITRE 12

Cercles et coniques

1. LE CERCLE

1 Déterminer l'ensemble des points du plan par lesquels passe au moins une droite coupant deux cercles donnés extérieurs l'un à l'autre.

2 Un point M décrit une corde $[AB]$ d'un cercle (C). Déterminer le lieu des points d'intersection des cercles (α) et (β) tangents à (C) en A et B respectivement, et passant l'un et l'autre par M.

3 On se donne deux points A et B du plan et deux réels α et β dans $]0, \pi/2[$. Quel est l'ensemble des centres M des cercles vus de A sous l'angle α et de B sous l'angle β ?

4 On se donne un demi-cercle (C) de diamètre AB. Déterminer le lieu des centres des cercles tangents à (C) et à AB.

5 Soient A et B deux points du plan, et α un réel > 0. Etudier l'ensemble des points M tels que $MA/MB \leqslant \alpha$.

6 Quatre droites du plan déterminent en général quatre triangles dont les quatre cercles circonscrits ont un point commun M (appelé point de Miquel). Les centres de ces quatre cercles sont cocycliques. Les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur les quatre droites sont alignés, et cette propriété appartient exclusivement à M.

7 Si l'on circonscrit des circonférences aux triangles formés par chacun des côtés d'un pentagone et les prolongements des côtés adjacents, les cinq points d'intersection de ces lignes sont sur une même circonférence.

8 Trois cercles égaux ont un point commun et se recoupent deux à deux en A, B, C. Montrer que le cercle circonscrit à ABC est égal aux cercles précédents.

9 Etant donné un vrai triangle ABC, déterminez l'ensemble des pieds des perpendiculaires abaissées de A sur les droites qui *séparent* les points B et C.

2. POINTS COCYCLIQUES

1 Montrer que les cercles circonscrits aux quatre triangles déterminés par un quadrilatère complet ont un point commun. On donnera de ce résultat trois démonstrations : l'une basée sur des considérations d'*angles*, l'autre utilisant les *nombres complexes* associés aux sommets du quadrilatère, la dernière avec les *similitudes*.

2 Soit ABC un triangle d'orthocentre H et de cercle circonscrit (Γ). Montrer qu'une CNS pour qu'un point M appartienne à (Γ) est que ses projections orthogonales sur les côtés de ABC soient alignés, et qu'alors le milieu de MH est aussi dans l'alignement (droite de Simson de M).

3 Sur chaque côté d'un quadrilatère inscriptible pris pour corde, on décrit une circonférence ; les quatre circonférences se coupent deux à deux en quatre autres points qui appartiennent à une même circonférence.

4 Les centres des cercles inscrits aux quatre triangles que déterminent les deux diagonales d'un quadrilatère inscrit sont les sommets d'un rectangle.

5 Les projections orthogonales des pieds des hauteurs d'un triangle sur ses côtés sont six points cocycliques.

6 Soient A, B, C, D quatre points cocycliques. Les points B et D se projettent sur (AC) en B' et D', les points A et C se projettent sur (BD) en A' et C'. Montrer que A', B', C', D' sont cocycliques.

7 Etant donné, dans le plan, deux droites sécantes (D) et (D') et un point A ne leur appartenant pas, montrer que l'on peut en général mener par A quatre sécantes interceptant sur (D) et (D') des segments de longueur l donnée à l'avance. Les milieux des quatre segments appartiennent à un cercle dont le centre ne dépend pas de l.

8 On considère trois points alignés A, O_1, O_2 et (C_1), (C_2) les cercles centrés en O_1, O_2 et passant par A, (T) la tangente commune en A, P un point *variable* sur (T). Soient (T_1) et (T_2) les autres tangentes menées de P à (C_1) et (C_2), de points de contact A_1 et A_2. Montrer que A_1A_2 passe par un point fixe.

9 Un quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible ssi :

$$AC.BD = AB.CD + BC.AD.$$

10 Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible convexe, de longueurs de côtés $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$. Appelant p le demi-périmètre, $p = (a+b+c+d)/2$, montrer que l'aire S du quadrilatère vaut :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

3. ENSEMBLES FINIS DE POINTS SUR UN CERCLE

1 Soit $AA'BB'CC'$ un hexagone inscrit dans un cercle de rayon R et tel que $AA' = BB' = CC' = R$. On appelle U, V, W les milieux des côtés $B'C$, $C'A$, $A'B$. Montrer que le triangle UVW est équilatéral.

2 Soit F_i l'aire d'un polygone convexe *inscrit* dans le cercle unité et F_c l'aire du polygone *circonscrit* dont les points de contact avec le cercle sont les sommets du polygone inscrit. Montrer que $F_i + F_c \geqslant 6$, l'égalité ayant lieu pour le carré.

3 Soit $A'B'C'D'E'$ les milieux des côtés d'un pentagone convexe $ABCDE$, inscrit dans un cercle. Montrer que :

$$2 \,.\, \text{Aire}\,(A'B'C'D'E') \geqslant \text{Aire}\,(ABCDE).$$

4 Dans le plan euclidien, on considère n points $P_1, P_2, \ldots, P_n$, *n impair,* tous situés d'un même côté d'une droite D passant par O. Montrer que :

$$\|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_n}\| \geqslant 1 \quad \text{si } \|\overrightarrow{OP_k}\| \geqslant 1 \text{ pour tout } k = 1, 2, \ldots, n.$$

5 Soit n vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, tous de norme 1, avec $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n = \vec{0}$. Montrer que l'on peut les réordonner en $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ de telle sorte que, pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$, on ait :

$$\|\sum_{j=1}^{k} b_j\| \leqslant 2.$$

6 Un polygone régulier de n côtés et un polygone régulier de $n + 1$ côtés sont inscrits dans le cercle unité. Montrer que l'on peut choisir un sommet du premier polygone et un sommet du second, de telle façon que la mesure de l'arc de cercle joignant ces deux points soit $< 2\,\pi/n\,(n + 1)$.

7 Soit un polygone convexe à n sommets dont tous les angles aux sommets sont égaux. Montrer que si les longueurs des n côtés consécutifs forment une suite croissante à partir de l'un d'entre eux, le polygone est régulier.

8 Montrer qu'il est toujours possible de disposer autant de points que l'on veut sur le cercle unité tels que leurs distances mutuelles soient rationnelles.

9 Etant donné un ensemble fini de points dans le plan, montrer l'existence d'un disque (fermé) de rayon minimum les contenant tous, et imaginer un algorithme pour le déterminer.

4. LES CONIQUES EN GÉNÉRAL

1 Discuter la nature de $15x^2 - 10y^2 - 30ax + 9a^2 = 0$ selon $a \in \mathbb{R}$.

2 Lieu des sommets et des foyers de : $y^2 = 2x - \lambda x^2$, où $\lambda \in]1, \infty[$.

3 Lieu des sommets des coniques : $\lambda x^2 + (1 + \lambda^2)y^2 - 2\lambda y = 0$.

4 Etudier la famille de coniques : $x^2 + my^2 + 2m^2x - 2m^2y + m^4 + m^3 - m + 3 = 0$.

5 En géométrie affine, l'équation générale des coniques passant par les trois sommets du triangle de référence est de la forme barycentrique :

$$\lambda yz + \mu xz + \nu xy = 0.$$

6 L'équation générale barycentrique des coniques tangentes aux trois côtés du triangle de référence est de la forme :

$$\lambda^2 x^2 + \mu^2 y^2 + \nu^2 z^2 \pm 2\mu\nu yz \pm 2\lambda\nu xz \pm \lambda\mu xy = 0.$$

7 On se donne un quadrilatère dont les côtés ont pour équations : $P = 0, Q = 0, R = 0, S = 0$, où P, Q, R, S sont du premier degré vis-à-vis des variables. Montrer que l'équation générale des coniques circonscrites à ce quadrilatère est de la forme $\lambda PQ + \mu RS = 0$.

8 En coordonnées barycentriques, toute conique inscrite dans un quadrilatère dont les trois diagonales sont les côtés du triangle de référence a une équation de la forme $(x^2/\lambda) + (y^2/1 - \lambda) = z^2$ (les équations des côtés sont alors $x \pm y \pm z = 0$).

9 Les coniques dont les équations sont de la forme :

$$\frac{x^2}{A + \lambda} + \frac{y^2}{B + \lambda} = 1.$$

où λ varie, sont des coniques *homofocales*.

5. L'ELLIPSE

1 La tangente en un point M variable sur une ellipse coupe en P, P' les tangentes aux sommets A, A' du grand axe. Montrer que le produit $\overline{AP} \,.\, \overline{A'P'}$ demeure constant.

2 La courbe qui, vis-à-vis d'un repère orthonormé, a pour équation : $x^2 + xy + y^2 = 1$, est une ellipse dont on précisera le centre, les axes, les sommets et les foyers.

3 Construire une ellipse connaissant son cercle principal, un point et une tangente.

4 Caractérisez les triangles inscrits dans une ellipse et dont le centre de gravité soit au centre de l'ellipse.

5 Déterminez la courbe orthoptique de l'ellipse (lieu des points d'où l'on voit l'ellipse sous un angle droit).

6 On donne n droites dans le plan. Montrer que le lieu des points dont la somme des carrés des distances à ces droites est constante est une ellipse en général.

7 *L'examinateur* – Connaissez-vous la génération de l'ellipse par la méthode de la bande de papier ? N'ayez crainte, cela n'est plus au programme de Terminales C maintenant, et l'on peut vivre sans le savoir. Mais nous allons en faire un exercice qui... *Le candidat* – Je crois savoir de quoi il s'agit car un de mes assistants en a parlé un peu un jour... (Suit un long bredouillage analytique où la méthode est correctement retrouvée.) *L'examinateur* – Splendide ! Très, très bien... Euh ! Seulement, vous nous avez fait ça en cinq minutes, et il nous en reste vingt ! Pourriez-vous démontrer, plus généralement, que si deux points a et b, solidaires d'une plaque mobile, décrivent respectivement des droites Ox et Oy, non nécessairement perpendiculaires, alors tout point m, solidaire de cette plaque mobile, décrit une ellipse... ce qui généralisera, vous en conviendrez, la méthode que vous venez de nous exposer. D'ailleurs, s'il reste encore du temps, vous regarderez dans l'espace une génération analogue de l'ellipsoïde.

8 Quel est le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux droites $y = x$, $y = -x$, $y = 1$ est constante ? On discutera.

9 Un point M décrit une ellipse de foyers F et F'. Quel est le lieu du centre du cercle inscrit au triangle MFF' ?

6. L'HYPERBOLE

1 Parmi tous les triangles ABC d'aire S et d'angle $\hat{A}$ donnés, déterminer celui pour lequel BC est minimum.

2 Tout cercle passant par deux points d'une hyperbole $(\mathcal{H})$, symétriques par rapport au centre de $(\mathcal{H})$, recoupe $(\mathcal{H})$ en deux points diamétralement opposés.

3 Etant donné une hyperbole d'excentricité 2, tout cercle passant par un sommet et le foyer opposé la recoupe en trois points formant un triangle équilatéral.

4 Soit ABC un triangle isocèle, $AB = AC$. On appelle A', B', C' les projections orthogonales d'un point M sur les droites (BC), (CA), (AB). Montrer que l'ensemble des points M satisfaisant à $MB'^2 + MC'^2 = 2MA'^2$ est une hyperbole équilatère passant par les centres des cercles exinscrits, et dont on déterminera les sommets.

5 On se donne deux points A et B. Montrer que le lieu des points M tels que la tangente en M au cercle MAB soit perpendiculaire à AB est une hyperbole équilatère.

6 Soient D et D' deux droites concourantes. Déterminer l'ensemble des points du plan dont le produit des distances à ces droites est constant. En déduire la nature du point intérieur à un triangle ABC dont le produit des distances aux côtés est maximum.

7 On se donne deux points A et B. Montrer que le lieu des points M tels que les bissectrices de (MA, MB) aient des directions fixes est une hyperbole équilatère.

8 Soient P et P' deux points d'une hyperbole équilatère (H), symétriques par rapport au centre de cette hyperbole. Montrez que le cercle centré en P, passant par P', recoupe (H) en trois autres points qui sont sommets d'un triangle équilatéral.

7. LA PARABOLE

1 Montrer que $(ax + by + c)^{1/2} + (a'x + b'y + c')^{1/2} = 1$ représente en général un morceau de parabole. Discuter.

2 Déterminer les pieds des normales abaissées de $A(a, 0)$ sur la parabole $x = y^2$. Même question avec la parabole $y = x^2$.

3 Soit M_0 un point fixe sur une parabole. Deux droites perpendiculaires en M_0 recoupent la parabole en N et N'. Montrer que la droite NN' passe par un point fixe.

4 Discuter la construction des paraboles de directrice donnée et passant par deux points donnés.

5 Quel est le lieu des projections du foyer d'une parabole sur ses normales ?

6 Les tangentes d'inflexion à la courbe $y = x \operatorname{cotg} x$ touchent une certaine parabole que l'on déterminera.

7 Etant donnés deux points O et A, on considère l'ensemble des paraboles (P)

de *sommet* O et passant par A. Quel est le lieu de l'intersection de l'axe de (P) avec la tangente en A à (P) ?

8 Déterminer l'intersection de deux paraboles de foyer commun F et d'axes perpendiculaires.

8. LES CONIQUES PAR FOYER ET DIRECTRICE

1 Quelle est l'excentricité de l'hyperbole équilatère ?

2 Déterminer l'ensemble des foyers des coniques d'excentricité et de directrice données, et passant par un point donné.

3 Démontrer que deux coniques de même excentricité sont deux figures directement semblables.

4 On considère toutes les coniques du plan qui passent par deux points donnés et ont une directrice donnée. Trouver le lieu du foyer correspondant et distinguer sur ce lieu les points qui définissent une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

5 Construire une conique ayant pour directrice une droite donnée et passant par trois points donnés.

6 On considère toutes les coniques du plan qui passent par deux points donnés et ont un foyer donné. Examiner comment varient leurs directrices, distingant entre les directrices qui définissent une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

7 Construire une conique ayant pour foyer un point donné et passant par trois points donnés.

8 La distance d'un point quelconque d'une hyperbole à son foyer F est égale à la distance du même point à la directrice (D), comptée parallèlement à une asymptote.

9 Trouver le lieu des points qui divisent en trois parties égales tous les arcs de cercle ayant deux extrémités données dans le plan. Application à la trisection de l'angle.

CHAPITRE 13

Nombres réels et éléments de topologie

1. L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

1 Montrer qu'il existe un entier n tel que les décimales de $\sqrt{n}$ commencent par 1976. Plus généralement, montrer que l'ensemble des parties fractionnaires de $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, est *dense* dans $[0,1]$.

2 Pour deux parties A et B de $\mathbb{R}$, posons $A+B=\{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Montrer que :

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B.$$

3 Quel est l'ensemble des points d'accumulation de l'ensemble E des rationnels de la forme $1/m+1/n$, où m et n varient dans $\mathbb{N}^*$?

4 Montrer que l'ensemble des réels de la forme $m+n\sqrt{2}$, où m et $n \in \mathbb{Z}$, est dense dans $\mathbb{R}$.

5 Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

6 Caractériser les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

7 De quelle nature sont les parties $A \subset \mathbb{R}$ pour lesquelles est continue la fonction :

$$f(x)=\inf_{a \in A}|x-a| \text{ ?}$$

8 Montrer que :

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin n\alpha|=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

9 Pour l'ensemble triadique de Cantor E, montrer que $E+E=[0,2]$.

10 Montrer qu'il n'existe aucune partition dénombrable du segment $[0,1]$ en sous-ensembles fermés non vides.

11 Montrer que 0 et e sont les deux seuls points d'accumulation de l'ensemble des réels de la forme $((1/m)+(1/n))^{m+n}$, où m et $n \in \mathbb{N}^*$.

2. DISTANCES

1 Soient quatre points A, B, C, D d'un espace affine euclidien. Montrer que :

$$AD + BC \leqslant AB + CD + AC + BD.$$

Cas d'égalité ?

2 Si x, y, z, t sont quatre points quelconques d'un espace métrique, on a toujours :

$$|d(x,y) - d(z,t)| \leqslant d(x,z) + d(y,t).$$

3 Sur $\mathbb{N}^2$, on définit d et δ par :

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|},$$

$\delta(x,x) = 0$, et, pour $x \neq y$, $\delta(x,y) = 2^{-k}$, où k est le plus grand entier tel que 2^k divise $x - y$. Montrer que ce sont des distances. Sont-elles équivalentes ?

4 Soit $(\mathcal{B})$ le bord d'un carré *ouvert* $(\mathcal{C})$ donné. On définit sur $(\mathcal{C})^2$ la fonction f par $f(A,A) = 0$ et $f(A,B) = |\ln(AP/BP)|$, où P est l'intersection de la demi-droite $\overrightarrow{ABP}$ avec $(\mathcal{B})$. Montrer que f est une distance.

5 Soit d la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$. Décrire les boules ouvertes pour $\delta = \min(1, d)$.

6 Si d et δ sont deux distances, il en est de même pour $\sqrt{d^2 + \delta^2}$.

7 Montrer que, dans $\mathbb{C}$, on définit une distance en posant $d(z,z') = |z - z'|$ si $\arg z = \arg z'$ ou si $z = 0$, ou si $z' = 0$, et $d(z,z') = |z| + |z'|$ sinon. Même question pour $d(z,z') = |z - z'|$ si $|z| = |z'|$ et $d(z,z') = |z| + |z'|$ sinon.

8 Dans $\mathbb{C}$, montrer que :

$$d(z,z') = \frac{|z' - z|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}$$

est une distance.

9 Soit $\mathcal{S}(N)$ l'ensemble des permutations d'un ensemble fini N. Pour toute permutation $\alpha \in \mathcal{S}(N)$, on désigne par $N(\alpha)$ l'ensemble des points mobiles de α. Montrer que :

$$d(\alpha, \beta) = \operatorname{card} N(\alpha\beta^{-1})$$

définit une distance sur $\mathcal{S}(N)$.

3. NORMES

1 A tout polynôme P à coefficients réels, on associe :

$$\|P\| = |P(0)| + |P'(1)| + |P''(2)| + |P'''(3)| + \cdots$$

Montrer que l'on définit ainsi une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$.

2 Déterminer le plus simplement possible la norme N sur $\mathbb{R}^2$ dont la boule unité est l'hexagone : $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, $|y-x| \leqslant 1$.

3 Soit E un espace normé sur $\mathbb{R}$. Pour a et $b \in E$, on pose $f(t) = \|a+tb\|$, où $t \in \mathbb{R}$. (1) Montrer que f est continue pour tout t. (2) Montrer que $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = +\infty$. (3) Montrer que l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $a+tb$ appartienne à la boule unité ouverte est vide ou est un intervalle ouvert.

4 Dans $\mathbb{R}^2$, toutes les normes sont équivalentes.

5 Soit P un domaine polygonal *convexe* fermé de $\mathbb{R}^2$, dont O est centre de symétrie. Montrer qu'il existe une norme N sur $\mathbb{R}^2$ dont la boule unité est P, et l'on a $N(\vec{V}) = N(x,y) = \sum \lambda_i |f_i(x,y)|$, où les f_i sont des formes linéaires, $f_i(x,y) = a_i x + b_i y$.

6 Montrer que, sur $\mathbb{R}^2$, en posant pour chaque $\vec{V} = (x,y)$,

$$\|\vec{V}\| = \sup_{t\in[0,1]} |x+yt|,$$

on obtient une norme. Dessiner la boule unité.

7 A tout $\vec{V} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on associe $\|\vec{V}\| = \int_0^1 |x+yt|\,\mathrm{d}t$. Montrer que l'on obtient une norme et dessiner la boule unité.

8 A toute fonction $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$, on associe $p(f) = \left\{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2}$. Montrer que p est une norme.

9 On se donne une norme sur un espace vectoriel réel E, et l'on appelle B et S la boule et la sphère unités. Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha+\beta = 1$, et $z = \alpha x + \beta y$, où x et $y \in B$. Montrer que si $z \in S$, alors aussi x et $y \in S$.

4. REPRÉSENTATIONS D'UN NOMBRE RÉEL

1 Peut-on déterminer α et β rationnels tels que : $(7+5\sqrt{2})^{1/3} = \alpha + \beta\sqrt{2}$?

2 Pour tout entier $n \geqslant 1$, il n'est pas possible que soit décimal le rationnel :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}.$$

3 Ecrire en base 4 le réel d'écriture décimale 0,93 1977 1977 1977 …

4 Prouver l'irréductibilité, pour tout entier $n \geqslant 1$, de la fraction :

$$(n^3 + 2n)/(n^4 + 3n^2 + 1).$$

5 Déterminer les entiers m et $n \geqslant 1$, tels que $mn = 900$ et m/n soit décimal.

6 Déterminer les entiers $n \geqslant 1$ tels que le rationnel $(2n+1)/n(n+1)$ soit décimal.

7 Montrer que tout rationnel $r > 0$ peut s'écrire sous la forme :

$$r = e + (a_1/p) + (a_2/p^2) + \cdots + (a_k/p^k) + \cdots$$

où p est un nombre entier donné $\geqslant 2$, et e, a_i sont des entiers, tels que $0 \leqslant a_i < p$.

8 Déterminer, si possible, un entier n dont la partie décimale de la racine cubique commence par 1975.

9 Montrer que, pour tout $x \in]0,1]$, il existe une seule suite infinie croissante d'entiers $q_n \geqslant 2$ telle que :

$$x = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n}.$$

De plus, $x \in \mathbb{Q}$, si (q_n) est constante à partir d'un certain rang.

10 Soit $(\epsilon_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres égaux à 1 ou -1. Montrer que le nombre réel :

$$x_n = \epsilon_0 \sqrt{2 + \epsilon_1 \sqrt{2 + \epsilon_2 \sqrt{2 + \cdots + \epsilon_n \sqrt{2}}}}$$

est défini, et égal à :

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^{n} \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \ldots \epsilon_k}{2^k}\right).$$

En déduire que $\lim x_n$ existe et que, pour tout réel $x \in [-2, 2]$, il existe une suite (ϵ_n) telle que x soit égal à la limite de la suite (x_n) correspondante. Pour quelles valeurs de x la suite (ϵ_n) est-elle unique ? Pour quelles valeurs de x est-elle périodique ?

5. VALEURS APPROCHÉES D'UN NOMBRE RÉEL

1 Soit m/n une valeur approchée de $\sqrt{2}$, avec m et n entiers positifs. (1) Montrer que $(m + 2n)/(m + n)$ est une meilleure approximation de $\sqrt{2}$ que m/n. (2) Montrer que $\sqrt{2}$ se trouve entre ces deux approximations.

2 Soit p/q une valeur approchée rationnelle de $\sqrt[3]{2}$. Alors :

$$1 + q^2/(p^2 + pq + q^2)$$

est une meilleure approximation de ce nombre, qui se trouve d'ailleurs entre ces deux approximations.

3 On suppose que 72 et 150 sont des valeurs approchées de x et y avec des erreurs *relatives* respectives de 40% et 25%. Quelle est l'incertitude sur la valeur 594 de $2x + 3y$?

4 Les réels x et y sont connus l'un et l'autre avec une erreur relative de 4%. Que peut-on dire de xy ?

5 Les réels a et b ont pour valeurs approchées 10 et 8 avec des erreurs relatives de 2% et 3% respectivement. Entre quelles limites sont nécessairement $a^2b - b^2a$ et $(a^3 - b^3)/(a - b)$?

6 Vous lisez dans une certaine table numérique la valeur approchée d'un réel a, avec une erreur absolue $\leqslant 5.10^{-6}$. Quelle incertitude aurez-vous, selon n, sur le réel : $S_n(a) = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$?

7 Que pensez-vous de l'approximation : $2^{1/n} \# 1 + (n\sqrt{2})^{-1}$?

8 Si $0 \leqslant a \leqslant b$, on a $\sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}4a + 0{,}96b$ avec une erreur relative inférieure à $1/25$.

6. MONTRER QU'UN CERTAIN NOMBRE EST OU N'EST PAS ENTIER

1 Prouver, de diverses manières, que :

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1.$$

2 Soient a et b des entiers $\geqslant 1$. Montrer qu'est entier le rationnel :

$$\frac{(ab)!}{a!\,(b!)^a}.$$

3 Quels sont les entiers n pour lesquels la fraction $(n^2 + 3)/(n + 2)$ est irréductible ?

4 Pour tout couple (m, n) d'entiers premiers entre eux, $(m^2 + n^2)/mn$ n'est pas entier, ni $(m^2 + n^2)/(m^2 - n^2)$.

5 Soit x un réel tel que, pour tout entier $n \geqslant 2$, x^n soit entier. Montrer que x est entier.

6 Soit a un réel non nul, et $S_n = a^n + a^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que s'il existe k tel que S_k et S_{k+1} soient entiers, alors S_n est constamment entier.

7 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fraction $(21n + 4)/(14n + 3)$ est irréductible.

8 Soit $0 \leqslant a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ une suite d'entiers. Prouver le caractère entier de :

$$\prod_{0 \leqslant k < l \leqslant n} \frac{a_l - a_k}{l - k}.$$

9 Pour $n \geqslant 2$, il n'est pas possible que soit entier le rationnel :

$$H_n = 1 + (1/2) + (1/3) + \cdots + (1/n).$$

7. MONTRER QU'UN CERTAIN NOMBRE EST OU N'EST PAS RATIONNEL

1 Déterminer le chiffre des unités, soit u_n, de 7^{n^2} en base 10, puis montrer que le réel x d'écriture décimale $0, u_1 u_2 u_3 \ldots$ est rationnel.

2 Pour tous entiers m et $n \geqslant 0$, le réel $\sqrt[m]{n}$ est entier ou irrationnel.

3 Si $\cos 2a$ est irrationnel, il en est de même pour $\cos a$, $\sin a$ et $\operatorname{tg} a$.

4 Montrer que $\sin(10°)$ est irrationnel.

5 Montrer que $\log_{10} 5 + \log_{10} 3$ est irrationnel.

6 Soit u_n le chiffre des unités, base 10, de $\binom{n}{k}$, k fixé. Alors $x = 0, u_1 u_2 u_3 \ldots$ est rationnel.

7 Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\sqrt{n(n+2)}$ est irrationnel.

8 Montrer que $\log_{10} 2$ est irrationnel.

9 Si c et d sont des entiers positifs différents, alors $\log_{10}(2^c 5^d)$ est irrationnel.

10 Si a, b, c sont des entiers impairs, les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ sont irrationnelles. Réciproque ?

11 Montrer que $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{n}$ est irrationnel.

12 Commencez par prouver l'encadrement, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n.n!},$$

et utilisez-le afin de prouver que e est irrationnel.

8. NOMBRES ALGÉBRIQUES

1 Montrer que $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel et qu'il est solution d'une équation à coefficients entiers de degré 3, et pas de degré moindre.

2 Montrer que $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ est racine d'une certaine équation à coefficients entiers de degré 4, mais pas de degré inférieur.

3 Montrer que $\alpha = \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{4}$ est racine d'une certaine équation algébrique, à coefficients entiers, de degré 5, et pas de degré inférieur.

4 Montrer que $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{2}$ est racine d'une équation algébrique à coefficients entiers, de degré 6, et pas de degré inférieur.

5 Montrer qu'il ne peut pas exister de rationnels a, b, c, d, e, f tels que :

$$\sqrt[3]{2} = \frac{a + b\sqrt{c}}{d + e\sqrt{f}}\,.$$

6 Montrer que $1/\sqrt{3}$ ne saurait être le cosinus d'un multiple rationnel de π.

7 Montrer que $\cos(2\pi/7)$ est irrationnel, et est racine d'une équation algébrique de degré 3.

8 Montrer que le réel $(1 + \sqrt{2})^n$ est égal à la somme de la racine carrée d'un certain entier et de la racine carrée de l'entier suivant. Etudier cet entier en fonction de n.

9 Soient p et q deux nombres premiers. Pour $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} = 0$ implique $a = b = c = 0$.

10 Soient m et n des entiers > 0 tels que $\sqrt{m}$ soit irrationnel. Alors $\sqrt{m} + \sqrt[3]{n}$ est irrationnel aussi.

11 Une équation algébrique à coefficients entiers $f(x) = 0$ n'a pas de racines entières si $f(0)$ et $f(1)$ sont impairs.

12 Etant donnés deux entiers positifs a et b tels que ni a, ni b, ni ab ne soient des carrés parfaits, on définit les suites x_n, y_n, z_n, t_n par :

$$(1 + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab})^n = x_n + y_n\sqrt{a} + z_n\sqrt{b} + t_n\sqrt{ab}.$$

Montrer que ces suites satisfont à la même récurrence linéaire et que : $x_n t_n - y_n z_n = 0$. Etudier la suite $u_n = x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 + t_n^2$.

13 Montrer que le nombre e ne saurait être algébrique de degré 2.

14 Déterminer tous les rationnels a et b tels que $b = \cos(a\pi)$.

15 Soit ξ un réel (algébrique) solution d'une équation à coefficients entiers de degré n, $\xi \in A_n$. Montrer que si l'entier q est suffisamment grand, on a, pour tout entier p : $|\xi - (p/q)| > (1/q^{n+1})$.

CHAPITRE 14

Suites(*)

1. LES SUITES RÉELLES EN GÉNÉRAL

1 Soit φ une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\lim_\infty \varphi(n) = \infty$.

2 Une suite (u_n) pour laquelle :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant \epsilon$$

est-elle nécessairement de Cauchy ?

3 Si $a_n \to \alpha$ et $b_n \to \beta$, alors $\max(a_n, b_n) \to \max(\alpha, \beta)$.

4 Si la suite (a_n) croît, il en est de même pour la suite (b_n) de terme général $b_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$. La réciproque est-elle vraie ?

5 Montrer que si la suite (a_n/b_n), où $b_n > 0$, est croissante, il en est de même pour :

$$c_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

6 Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs, ayant 0 pour valeur d'adhérence. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels u_n est plus petit que tous les termes qui le précèdent, c'est-à-dire $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$.

7 Soit p_n/q_n une suite de rationnels tendant vers le réel ξ, avec p_n et q_n entiers premiers entre eux, $q_n > 0$. Montrer que $|p_n|$ et q_n tendent vers $+\infty$ si ξ est irrationnel. La réciproque est-elle vraie ?

8 Soit (u_n) une suite réelle telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait :

$$u_n \leqslant \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+1}).$$

Une telle suite est-elle nécessairement bornée ?

9 Soit a_n et $b_n > 0$, avec $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Montrer que si $a_n \sim b_n$, et si $B_n \uparrow +\infty$, alors $A_n \sim B_n$.

(*) Pour les suites définies par une intégrale, voyez le chapitre 16, Intégrales.

10 Si une suite (a_n) satisfait à $a_m + a_n - 1 < a_{m+n} < a_m + a_n + 1$ pour tous m et $n \geqslant 1$, alors existe $q = \lim(a_n/n)$ et l'on a, de plus, $qn - 1 < a_n < qn + 1$.

11 Soit (u_n) une suite telle que $u_{m+n} \leqslant u_m + u_n$ pour tous entiers m, $n \geqslant 0$. Alors (u_n/n) tend vers $-\infty$ ou vers une limite finie.

2. LA SUITE HARMONIQUE

Dans toute cette section, on appelle *suite harmonique* et l'on note (H_n) la suite ainsi définie pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

1 Prouver la double inégalité : $\ln(n+1) < H_n < 1 + \ln n$.

2 Montrer que la suite $C_n = H_n - \ln n$ décroît vers une certaine limite C, strictement positive (appelée constante d'Euler). Plus précisément, $C \geqslant 1/2$.

3 Prouver l'identité : $H_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k}/k$.

4 Prouver l'identité : $(-1)^{n-1}/n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} H_{n-k}$.

5 Démontrer, pour tout entier $a \geqslant 0$, la formule :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{a} H_k = \binom{n+1}{a+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{a+1}\right).$$

6 Appelant C la constante d'Euler (définie dans l'exercice 2 plus haut), démontrer que $C < H_m + H_n - H_{mn} \leqslant 1$ pour tous entiers m et $n \geqslant 1$.

7 Montrez que, pour $n \geqslant 2$, H_n n'est jamais un entier. La même propriété tient encore pour le rationnel ainsi défini avec des entiers $a, b, n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \dots + \frac{1}{a+nb}.$$

8 Pour tous entiers a et $r \geqslant 1$, soit $g_r(a) = H(ra) - H(r)$. Démontrer l'inégalité :

$$0 \leqslant g_r(ab) - g_r(a) - g_r(b) \leqslant 1/r.$$

9 Montrer que $a_n = (n-1)!H_{n-1}$, $n \geqslant 2$, est un entier, égal, pour un ensemble à n éléments, au nombre de permutations qui se décomposent en deux cycles exactement.

10 Montrer qu'il est possible d'empiler les unes sur les autres des pièces de monnaie identiques de façon à obtenir une *tour penchée* dont la dernière pierre du haut soit complètement en porte-à-faux vis-à-vis de la première pierre du bas. Quel est le nombre minimum de pièces nécessaires ?

3. SUITES CONVERGENTES

1 Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

2 Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, quelle est la limite de la suite $z^n/n!$?

3 Montrer que la suite $(n!)^{1/n}/n$ tend vers $1/e$.

4 Appelant $E(x)$ la partie entière de x, montrer que $x/2$ est la limite de la suite :

$$\frac{E(x)+E(2x)+E(3x)+\cdots+E(nx)}{n^2}.$$

5 Etudier la suite $u_n(x) = n(\sqrt[n]{x}-1)$, où x est fixé $\geqslant 0$.

6 Une certaine suite u_n est telle que les suites extraites $a_n = u_{3n+2}$, $b_n = u_{4n+1}$, $c_n = u_{5n+3}$ convergent. La suite u_n converge-t-elle ?

7 Soit a_n et b_n deux suites positives tendant vers 0. Que peut-on dire des suites :

$$c_n = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} \quad \text{et} \quad d_n = \frac{a_n + b_n^2}{a_n^2 + b_n} \ ?$$

8 Montrer que chacune des quatre suites $a_n = \cos n$, $b_n = \sin n$, $c_n = \operatorname{tg} n$, $d_n = \operatorname{cotg} n$ est divergente.

4. SUITES (RÉCURRENTES) DÉFINIES PAR ITÉRATION D'UN POLYNÔME OU D'UNE FRACTION RATIONNELLE

1 à 8 Etudier, selon u_0, la suite (u_n) définie, pour $n \geqslant 0$, par :

(1) $u_{n+1} = (u_n - 2)/(u_n + 4)$; (2) $u_{n+1} = (u_n - 1)/(4u_n + 5)$;

(3) $u_{n+1} = 2(u_n - 1)/(u_n + 5)$; (4) $u_{n+1} = (3u_n - 1)/(2u_n + 1)$;

(5) $u_{n+1} = (5u_n - 2)/(u_n + 2)$; (6) $u_{n+1} = -4/(u_n + 4)$;

(7) $u_{n+1} = (2u_n + 1)/(u_n + 2)$; (8) $u_{n+1} = (3u_n - 1)/(4u_n + 1)$.

9 Etudier la suite définie par $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = u_n^2 + (3/16)$.

10 Soit (x_n) la suite définie par x_0 et $x_{n+1} = (Ax_n + B)/(Cx_n + D)$, $C \neq 0$, A, B, C, D réels. Si l'équation $Ax + B = x(Cx + D)$ a deux racines distinctes α et β, on a alors :

$$x_n = -\frac{\alpha(C\alpha - D)^n(x_0 + \beta) - \beta(C\beta - D)^n(x_0 + \alpha)}{(C\alpha - D)^n(x_0 + \beta) - (C\beta - D)^n(x_0 + \alpha)}.$$

Sinon,

$$x_n = \frac{(A+D)x_0 + n((A-D)x_0 + 2B)}{A+D-n(A-D+2Cx_0)}.$$

11 Etudier, pour $a > 0$, la suite définie par :

$$x_0 > 0 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = x_n(x_n^2 + 3a)/(3x_n^2 + a).$$

12 Soit $x_0 = 5$, $x_{n+1} = x_n + 1/x_n$. Montrer que $45 < x_{1000} < 45{,}1$. Plus généralement, prouver que $x_n - (x_0^2 + 2n)^{1/2}$ tend vers 0.

13 Soit a un réel > 0. Montrer que la suite (x_n) définie par :

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = (1/2)(x_n + a/x_n)$$

tend vers $\sqrt{a}$. Prouver aussi qu'à chaque pas de l'itération, on double approximativement le nombre de chiffres «exacts» de x_n. En application de cela, déterminer le nombre de pas fournissant $\sqrt{2}$ avec au moins 100 décimales, $x_0 = 1$. Imaginer un processus « triplant» les chiffres exacts à chaque pas.

14 Soit A un nombre complexe et a l'une de ses racines carrées. On définit alors (u_n) par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = (1/2)(u_n + A/u_n)$. (1) Pour quelles valeurs de u_0 les u_n sont-ils tous définis ? (2) Calculer $(u_{n+1} - a)/(u_{n+1} + a)$ en fonction de u_n. (3) En déduire une discussion de la convergence de (u_n).

15 Montrer que la suite $x_{n+1} = x_n + x_n^2$, $x_0 > 0$, tend vers $+\infty$. Plus précisément, montrer l'existence de $\xi = \xi(x_0) > 0$ tel que $x_n \sim \xi^{2^n}$.

16 Soit (x_n) définie par $x_0 \in]0,1[$ et $x_{n+1} = x_n - x_n^2$. Montrer que $x_n \sim 1/n$.

5. SUITES (RÉCURRENTES) DÉFINIES PAR ITÉRATION D'UNE FONCTION NON RATIONNELLE

1 Etudier la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$, $u_0 \geqslant -1$.

2 Etudier (u_n) telle que $u_{n+1} = \operatorname{Arc\,tg} u_n$.

3 Quelle est la nature, selon u_0, de la suite $u_{n+1} = \cos u_n$?

4 Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit (u_n) de la manière suivante : $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + a$, avec la convention que la suite est finie et s'arrête à u_{n_0} si n_0 est le premier entier pour lequel $u_{n_0} + a < 0$. (1) Donner une CNS afin que la suite (u_n) soit finie. (2) Dans le cas où elle est infinie, étudier sa limite éventuelle. (3) Etudier son sens de variation en fonction de a et u_0.

5 Etant donné $u_0 = a \in]0,1[$, étudier $u_{n+1} = a^{u_n}$.

6 Soit f une fonction réelle continue sur $]0,1[$, et telle que, dans cet intervalle, $0<f(x)<x$. Montrer que, pour tout $x\in]0,1[$ la suite $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$, $n\geqslant 1$, $f_0(x)=x$, converge vers 0. Montrer, par un contre-exemple, que cette assertion peut être fausse si f n'est pas continue.

7 Soit $\lambda>0$ donné. Montrer que la suite $x_0>0$, $x_{n+1}=\ln(e^{x_n}+\lambda)$ tend vers $+\infty$ et calculer explicitement x_n en fonction de x_0 et n.

8 Etudier la suite (u_n) définie par $u_0>0$ et $u_{n+1}=1-e^{-u_n}$, $n\geqslant 0$.

9 Etudier (u_n) telle que $0<u_0<1$ et $u_{n+1}=u_n^2 . E(1/u_n)$.

6. SUITES DÉFINIES PAR DES RÉCURRENCES DU PREMIER ORDRE AVEC LA VARIABLE *n*

1 Etudier la suite (u_n) donnée par $u_0\in]0,2[$ et :

$$u_{n+1}=\sqrt{2+(-1)^n u_n}.$$

2 Etudier la suite (u_n) donnée par $u_0\in\mathbb{R}$ et :

$$u_{n+1}=\frac{au_n+(-1)^n b}{cu_n+(-1)^n d}.$$

3 Montrer que $-1/4$ est la limite de (u_n) telle que :

$$(n+1)^2 u_{n+1}-(n-1)^2 u_n+n=0,\quad n\geqslant 2,\quad u_2 \text{ donné}.$$

4 Etudier (u_n) telle que $u_0\in\mathbb{R}$ et $u_{n+1}=e^{x_n}/(n+1)$, $n\geqslant 0$. Equivalent simple de u_n ?

5 Etudier (u_n) telle que $u_0\in\mathbb{R}$ et $u_n=u_{n-1}^2+(-1)^{n-1}.n$, $n\geqslant 1$.

6 Soit (x_n) telle que $x_n=1+x_{n-1}/n$, $n\geqslant 1$, x_0 donné. Montrer l'existence de réels a, b, c, d tels que :

$$u_n=a+(b/n)+(c/n^2)+(d/n^3)+o(1/n^3).$$

7 Montrer que 1 est la limite de la suite (x_n) donnée par $x_0>0$ et, pour $n\geqslant 0$:

$$x_{n+1}=\frac{1}{x_n+\dfrac{1}{n+1}}.$$

8 On se donne (x_n) par $x_1=1$ et $x_{n+1}=1+n/x_n$ pour $n\geqslant 1$. Montrer que x_n croît et que $x_n-n^{1/2}$ tend vers $1/2$.

7. COUPLES DE SUITES DÉFINIES PAR DES RÉCURRENCES DU PREMIER ORDRE

1 Etudier la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = (1/2)(u_n + 2/u_n)$, $u_0 = 2$. Quel rapport voyez-vous entre cette suite et les suites (a_n), (b_n) telles que :

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2, \quad b_{n+1} = 2a_n b_n, \quad a_0 = 2, \quad b_0 = 1 \ ?$$

2 Soit (u_n) la suite donnée par u_0 et $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$. (1) L'étudier du point de vue de la convergence. (2) Montrer qu'il existe quatre valeurs de u_0 pour lesquelles elle est périodique. (3) Si $u_0 > 1$, il existe alors $\xi = \xi(u_0) > 1$ tel que $u_n \sim \xi^{2^n}$.

3 Soient u et v deux réels > 0. Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$F(x\,;\,u, v) = F(x) = \left(\frac{u^x + v^x}{2}\right)^{1/x}.$$

(1) Montrer que F se prolonge en une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. (2) Si $u \neq v$, f est strictement croissante. (3) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. (3) On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = u$, $v_0 = v$ et par $u_{n+1} = F(x\,;u_n, v_n)$, $v_{n+1} = F(y\,;u_n, v_n)$, où x et y sont des réels donnés tels que $x \leqslant y$. Montrer que $u_n \leqslant v_n$ pour $n \geqslant 1$, et que u_n croît et v_n décroît. (4) Déduire de ce qui précède que (u_n) et (v_n) ont même limite.

4 Etudier les suites (u_n) et (v_n) données par u_0, v_0 et $u_{n+1} = (2u_n + v_n)/3$, $v_{n+1} = (u_n + 2v_n)/3$.

8. COUPLES DE SUITES ADJACENTES

1 Etudier les suites $u_n = (1 + 1/n)^n$ et $v_n = (1 + 1/n)^{n+1}$.

2 Montrer que les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 1/n!$, $b_n = a_n + 1/n.n!$ si $n \geqslant 1$ sont adjacentes.

3 Montrer que sont adjacentes les suites (u_n) et (v_n) ainsi définies :

$$0 < u_0 < v_0, \quad u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^2 v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}.$$

4 Montrer que sont adjacentes les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}, \quad v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

5 Montrer que sont adjacentes les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right), \quad v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n .$$

6 Montrer que sont adjacentes les suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{1.1!}\right)\left(1+\frac{1}{2.2!}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n.n!}\right), \quad v_n = \left(1+\frac{1}{n.n!}\right)u_n .$$

7 Etant donnés a et $b > 0$, déterminer u_0 et v_0 afin que les suites :

$$u_{n+1} = \sqrt{a+bu_n}, \quad v_{n+1} = \sqrt{a+bv_n}$$

soient adjacentes.

8 Pour $x \in]0,\pi/2[$, étudier les suites $a_n = 2^{n+1} \sin(x/2^n)$ et $b_n = 2^{n+1} \operatorname{tg}(x/2^n)$.

9 On définit deux suites (u_n) et (v_n) par u_0, v_0 et :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + av_n}{1+a}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + bv_n}{1+b} .$$

Peut-on choisir a et b de telle sorte qu'elles soient adjacentes ?

10 Les suites :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{x}{n}\right), \quad v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right).$$

sont adjacentes si $x \leqslant 1/2 \leqslant y$.

11 Montrer que e se trouve dans le second quart de l'intervalle :

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right].$$

9. TRIPLETS DE SUITES

1 Etudier les suites (u_n), (v_n), (w_n) telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1/3)(2v_n + w_n) \\ v_{n+1} = (1/3)(2w_n + u_n) \\ w_{n+1} = (1/3)(2u_n + v_n). \end{cases}$$

2 Etudier les suites (a_n), (b_n), (c_n) telles que :

$$a_{n+1} = (b_n + c_n)/2, \quad b_{n+1} = (c_n + a_n)/2, \quad c_{n+1} = (a_n + b_n)/2.$$

3 Partant de $0 < u_0 \leqslant v_0 \leqslant w_0$, on définit les suites (u_n), (v_n), (w_n) par:

$$\begin{cases} 3/u_{n+1} = (1/u_n) + (1/v_n) + (1/w_n) \\ v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n} \\ w_{n+1} = (1/3)(u_n + v_n + w_n). \end{cases}$$

Montrer qu'elles ont une limite commune.

4 Partant de $0 < u_0 \leqslant v_0 \leqslant w_0$, on définit les suites (u_n), (v_n), (w_n) par:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n v_n w_n}{v_n w_n + w_n u_n + u_n v_n} \\[2ex] v_{n+1} = \dfrac{v_n w_n + w_n u_n + u_n v_n}{u_n + v_n + w_n} \\[2ex] w_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n + w_n}{3}. \end{cases}$$

On montrera que $u_n v_n w_n = u_0 v_0 w_0$ et que chaque suite tend très rapidement vers $(u_0 v_0 w_0)^{1/3}$.

5 Soit $a_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, neuf nombres réels $\geqslant 0$ tels que:

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33} = 1.$$

On définit les suites (x_n), (y_n), (z_n) par:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11} x_n + a_{12} y_n + a_{13} z_n \\ y_{n+1} = a_{21} x_n + a_{22} y_n + a_{23} z_n \\ z_{n+1} = a_{31} x_n + a_{32} y_n + a_{33} z_n. \end{cases}$$

Démontrer qu'en général, ces trois suites ont une limite commune que l'on déterminera.

6 On définit les suites (a_n), (b_n), (c_n) par leurs premiers termes a_0, b_0, c_0 et les récurrences: $a_{n+1} = |b_n - c_n|$, $b_{n+1} = |c_n - a_n|$, $c_{n+1} = |a_n - b_n|$. Etablir la convergence de ces suites, puis déterminer leurs limites.

10. SUITES DÉFINIES PAR UNE RÉCURRENCE DU SECOND ORDRE

1 à 18 Etant donnés $u_0 = a$ et $u_1 = b$, calculer u_n pour chacune des suites suivantes et déterminer leur limite éventuelle:

(1) $4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n$;
(2) $6u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$;
(3) $3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$;
(4) $4u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$;
(5) $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$;
(6) $u_{n+2} = -5u_{n+1} + 6u_n$;
(7) $4u_{n+2} = u_n$;
(8) $2u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$;
(9) $4u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$;
(10) $4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n + 12$;

(11) $6u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n + 8$; (12) $3u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$;
(13) $3u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n + 8$; (14) $4u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n + 2$;
(15) $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1$; (16) $4u_{n+2} = u_n + 3$;
(17) $2u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 3$; (18) $4u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 3$.

19 Soit $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Se donnant u_0 et u_1, on peut calculer $u_2, u_3, u_4, \ldots$ Calculer aussi $u_{-1}, u_{-2}, u_{-3}, \ldots$ Cas de Fibonacci ? A-t-on un résultat analogue si l'on se donne u_p et u_q ?

20 Calculer le terme général de la suite (u_n) telle que $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + n^3$ si $n \geqslant 2$, u_0 et u_1 donnés.

21 Calculer u_n sachant que $2/u_n = 1/u_{n-1} - 1/u_{n-2}$ si $n \geqslant 2$, u_0 et u_1 donnés.

22 Calculer u_n et v_n sachant que $u_n = u_{n-1} v_{n-2}$, $v_n = u_{n-1}^3 v_{n-1}^{-1}$.

23 Etudier (u_n) telles u_0 et $u_1 \in]0,1[$, et $u_{n+2} = u_n(1 - u_{n+1})$.

24 Etudier (u_n) données par u_0 et u_1, et telles que $2u_n \leqslant u_{n-1} + u_{n-2}$ si $n \geqslant 2$.

25 Calculer (u_n) sachant que $u_{n+2} = (u_{n+1} u_n)^{1/2}$ si $n \geqslant 0$, avec u_0 et $u_1 > 0$ donnés.

26 Etudier $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$, étant donnés u_0 et $u_1 > 0$.

11. RÉCURRENCES D'ORDRE SUPÉRIEUR

1 Calculer u_n en fonction de n, u_0, u_1, u_2, sachant que :

$$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11\,u_{n+1} - 6u_n = 0.$$

2 Calculer u_n en fonction de n, u_0, u_1, u_2, sachant que :

$$u_{n+4} - 2u_{n+3} + 2u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = n^5.$$

3 Calculer u_n en fonction de n, u_0, u_1, sachant que :

$$u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 2^n.$$

4 Déterminer les suites (x_n) et (y_n) satisfaisant à :

$$\begin{cases} x_{n+1} - 2x_n + y_{n+2} + y_n = 1 \\ x_{n+1} + x_n + y_{n+2} + 3y_{n+1} = n. \end{cases}$$

5 Déterminer les suites (x_n) et (y_n) satisfaisant à :

$$\begin{cases} x_{n+1} - 3y_n - 4x_n = 1 \\ x_{n+1} + y_{n+1} + y_n = n^2. \end{cases}$$

6 Déterminer (y_n) sachant que :

$$y_n \cdot y_{n+2}^2 = y_{n+1}^3 \cdot y_{n+3}, \quad y_0 = (2\pi)^{-1/2}, \quad y_1 = (2\pi e)^{-1/2}, \quad y_2 = (2\pi e^4)^{-1/2}.$$

7 Déterminer (y_n) sachant que : $y_{n+4} \cdot y_{n+2}^6 \cdot y_n = y_{n+1}^4 \cdot y_{n+3}^4$, et connaissant un nombre suffisant de valeurs initiales.

8 Montrer que l'élimination de la suite (y_n) entre :

$$\begin{cases} 2x_n x_{n+1} = y_n - y_{n+1} + 1 \\ x_n^2 + x_{n+1}^2 = y_n + y_{n+1} - 1 \end{cases}, \quad n \geqslant 0,$$

conduit à une récurrence du second ordre pour (x_n) que l'on étudiera.

12. SUITES OÙ CHAQUE TERME DÉPEND DE TOUS LES PRÉCÉDENTS

1 Etudier, du point de vue de la limite, les suites (u_n) telles que $u_0 > 0$, pour tout $n \geqslant 0$:

$$u_{n+1} \geqslant u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

2 Etudier, du point de vue de la limite, les suites (u_n) telles que $u_0 > 0$ et :

$$u_{n+1} \geqslant \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \cdots + \sqrt{u_n}.$$

3 Prouver que la suite $u_0 > 0, u_{n+1} = (u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n)^{1/2}$ tend vers $+\infty$.

4 Que pensez-vous de la suite (x_n) donnée par $x_0 > 0$ et :

$$x_1 = \sqrt{x_0}, \quad x_2 = \sqrt{x_0 + \sqrt{x_1}}, \quad x_3 = \sqrt{x_0 + \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2}}}, \ldots \ ?$$

5 Etudier la suite (x_n) donnée par $x_n > 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$x_{n+1} = x_1 + (x_2/2) + (x_3/3) + \cdots + (x_n/n).$$

6 Etudier (x_n) telle que $x_{n+1} = x_1 x_2^2 x_3^3 \ldots x_n^n$.

7 Etudier (x_n) telle que :

$$x_{n+1} = (1/n^2)(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n).$$

8 On définit (a_n) par $a_0 = 0$ et a_{n+1} valant le plus petit entier $> a_n$ et différent de *tous* les $a_k + k$, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Ainsi, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 6$, ... Montrer que :

$$a_n = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} n\right].$$

13. AUTOUR DE LA FORMULE DE STIRLING

1 Démontrer d'abord que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\ln(1+x) < x < (1+x)\ln(1+x).$$

Ceci fait, en déduire la double inégalité :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} < e^{n} < \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1},$$

et l'équivalent asymptotique $(n!)^{1/n} \sim n/e$.

2 Pour tout entier $n \geqslant 6$, on a $n! \leqslant (n/2)^n$.

3 Quel est le plus grand des deux nombres $300!$ et 100^{300} ?

4 Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$(n!)! > n((n-1)!)^{n!}.$$

5 Montrer que la suite de terme général $n^{n+1/2}e^{-n}/n!$ admet une limite strictement positive.

6 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

7 Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$\frac{4.7.10.\ldots.(3n+4)}{2.5.8.\ldots.(3n+2)} > 1+\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)$$

8 La formule de Stirling ordinaire affirme que :

$$n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}, \qquad n \to \infty.$$

Démontrez ce raffinement, dû à Binet :

$$(n/e)^n\sqrt{2\pi n} < n! < (n/e)^n\sqrt{2\pi n}\,.\,e^{1/12n}.$$

14. SUITES S'EXPRIMANT COMME UN PRODUIT VARIABLE DE FACTEURS VARIABLES

1 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, montrer que $f_n(z) = (1+z/n)^n$ admet une limite, notée $\exp z$. Prouver alors que $\exp(z+z') = \exp z \,.\, \exp z'$.

2 Soit (a_n) une suite telle que $0 < a_n < 1$ et $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ admet une limite. Montrer qu'alors, $B_n = \prod_{k=1}^{n}(1-a_k)$ admet une limite > 0. Réciproque ?

3 Etudier la limite de : $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

4 Etudier le comportement, au voisinage de l'infini, de la suite :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right).$$

5 Soit (v_k) une suite telle que $v_{k+1} \geqslant v_k^2$ si $k \geqslant 1$, $v_1 > 0$. Que pensez-vous de la suite :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{v_k}\right) \ ?$$

6 Etudier la suite : $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n^2 + k^2}\right)$.

7 Etudier la suite : $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}\right)$.

8 Etudier la suite : $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^3}\right)$.

15. SUITES S'EXPRIMANT COMME UNE SOMME VARIABLE DE TERMES VARIABLES

1 Etudier la suite $s_n = \sum_{k=1}^{n} (k\, 2^{n-k})^{-1}$.

2 Soit f une fonction continue et décroissante sur $[1, \infty[$. Montrer l'existence d'une limite à la suite :

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)\mathrm{d}t.$$

A la lumière de ce résultat, ou autrement, déterminer un équivalent simple de :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(1+k)}{\sqrt{k}}.$$

3 Etudier la suite :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n+1}\right) + \exp\left(\frac{1}{n+2}\right) + \dots + \exp\left(\frac{1}{2n}\right) - n.$$

4 Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^n}(1^n + 2^n + \dots + n^n) = \frac{e}{e-1}.$$

5 Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^n}(1^n + 3^n + 5^n + \cdots + (2n-1)^n) = \dfrac{4e}{(e-1)\sqrt{e}}$.

6 Etant donnés des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, montrer que :
$$\lim_{n\to\infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n)^{1/n} = \max_{1\leqslant k\leqslant n} a_k.$$

7 Soit $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$, $u_0 > 0$, et $s_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k)^{-1}$. (1) Montrer que s_n tend vers $+\infty$. (2) Plus précisément, $s_n \sim 2\sqrt{n}$.

8 Etudier $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k/n^2)$, où $f(x) = x/\sqrt{1+x}$.

16. SUITES DÉFINIES IMPLICITEMENT

1 Etudier, du point de vue de la monotonie et d'une limite éventuelle la racine $\xi = \xi_n$, dans $]0,1[$, de $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = 1$.

2 Etant donnés deux réels a et $b > 0$, on définit u_n comme l'unique racine de $x^n = ax + b$, $n \geqslant 2$. Montrer que $u_n \to 1$ et déterminer un équivalent simple de $u_n - 1$.

3 Soit $M_n = \sup x^n \cos((\pi/2)x)$, où $x \in [0,1]$. Montrer que $\lim M_n = 0$.

4 Soit $f_n(x) = x^6/6 + bx^2 - nx$, où $b > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'en un certain $x = a_n$, la fonction f_n admet un minimum b_n que l'on montrera être équivalent, pour $n \to \infty$, à sbn^t, où s et $t \in \mathbb{Q}$.

5 Après avoir montré que, pour n assez grand, l'équation $(x-n)\ln n = x\ln(x-n)$ a une seule racine ξ_n dans l'intervalle $]n+1, n+2[$, étudier $\xi_n - n - 1$.

6 Soit $f_n(x) = \ln|1-x| + \sum_{k=1}^{n} x^k/k$. Etudier la racine ξ_n, proche de 1, de $f_n(x) = 0$. On montrera que ξ_n décroît et qu'il existe $b \in [0{,}37 ; 0{,}38]$ tel que $\xi_n = 1 + b/n + o(1/n)$.

7 Montrer que, pour $n \geqslant 2$, l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ a une seule racine ξ_n dans $]0,1[$, tendant vers zéro, et dont on déterminera un équivalent simple.

8 Soit d_n la distance de l'origine à l'arc de courbe $y = \cos^n x$, $x \in [0, \pi/2]$. Montrer que d_n tend vers 0 et en trouver un équivalent simple.

9 Après avoir montré que, pour tout entier n suffisamment grand, l'équation $e^x - x^n = 0$ possède deux racines positives, on appellera ξ_n la plus petite, et l'on montrera que ξ_n tend vers une certaine limite l. Donner alors un équivalent simple de $u_n - l$.

17. ÉTUDE DE SUITES OÙ IL Y A DES «PARTIES ENTIÈRES», OU DES FONCTIONS PARENTES

Dans toute cette section, la *partie entière* de x, c'est-à-dire le plus grand entier rationnel $\leqslant x$, est notée, indifféremment, $[x]$ ou $E(x)$.

1 Appelant $\|x\|$ l'entier le plus proche de x, avec la convention que $\|(2k-1)/2\|=k$ si $k \in \mathbb{Z}$, démontrer la formule, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n = \left\|\frac{n}{2}\right\| + \left\|\frac{n}{4}\right\| + \left\|\frac{n}{8}\right\| + \left\|\frac{n}{16}\right\| + \cdots$$

2 Que vaut la suite $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}] - [\sqrt{9n+1}]$?

3 Calculer $\sum_{k=0}^{n^2} [\sqrt{k}]$.

4 Calculer $\sum_{k=0}^{n^3} [\sqrt[3]{k}]$.

5 Décrire très simplement les valeurs de la suite :

$$u_n = E\left(\frac{1}{2}(1 + E(\sqrt{1 + 8E(\sqrt{n-1})}))\right).$$

6 Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$\sum_{k\geqslant 1} \left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right] - \sum_{k\geqslant 1} \left[\frac{n}{k}\right] \geqslant n^2 - n.$$

7 Démontrer que $[x] = [(x+1)/2] + [x/2]$. En déduire alors :

$$\sum_{k\geqslant 0} \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = n.$$

18. SUITES ISSUES DE L'ARITHMÉTIQUE

1 Soit c_n le nombre de chiffres base 10 de $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim c_n/n = 0$.

2 Soit $c(n)$ la somme des chiffres base 10 de $n \in \mathbb{N}$. Etudiez la suite :

$$u_n = (1/n)\left\{c(1) + c(2) + \cdots + c(n)\right\}.$$

3 On pose $x_n = 1$ si n est un carré parfait et $x_n = 0$ sinon, $n \geqslant 1$. Montrer que :

$$y_n = (1/n)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

tend vers zéro. Trouvez-en un équivalent simple.

4 Montrer que $S_m = \sum (pq)^{-1}$ est constante si la sommation a lieu sur les entiers (p, q) tels que $1 \leqslant p < q \leqslant m,\ p+q > m,$ les entiers p et q étant aussi premiers entre eux.

5 On considère le développement décimal *périodique* d'un certain rationnel $r = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots \in]0,1[$. Etudier la suite $y_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$.

6 Appelons $d(n)$ l'exposant de 2 dans la décomposition de n en facteurs premiers, $d(1) = 0, d(2) = 1, d(3) = 0, d(4) = 2, \ldots$, et x_n la moyenne arithmétique des $d(k),\ k = 1, 2, \ldots, n$. Alors $x_n \to 1$.

7 Appelons $r_{n,k}$ le reste de la division de n par $k \in \mathbb{N}^*$, et soit C la constante d'Euler. Démontrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r_{n,1}}{1} + \frac{r_{n,2}}{2} + \ldots + \frac{r_{n,n}}{n}\right) = 1 - C.$$

19. PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

Dans cette section, on a abrégé « progression arithmétique » en PA et « progression géométrique » en PG.

1 Si a^2, b^2, c^2 sont en PA, il en est de même pour $a/(b+c), b/(c+a), c/(a+b)$. Réciproque ?

2 Trouver x, y, z en PG avec $x+y+z = s,\ x^2+y^2+z^2 = t.$ Application : $s = 21,\ t = 189$.

3 Si les réels a, b, c sont en PA, $0 < a < b < c$, il en est de même pour :

$$(\sqrt{b}+\sqrt{c})^{-1},\ (\sqrt{c}+\sqrt{a})^{-1},\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-1}.$$

4 Pour toute suite arithmétique (a_n), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et si chaque $a_k \neq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{n+1}{a_0 a_{n+1}},\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{(n+1)(a_0+a_{n+2})}{2a_0 a_1 a_{n+1} a_{n+2}}.$$

Tâchez de généraliser.

5 Calculer explicitement u_n tel que $u_n = au_{n-1} + b,\ n \geqslant 1,\ a,\ b,\ u_0$ donnés complexes. Chercher à quelles conditions deux termes de rangs distincts de la suite sont égaux. Montrer que, dans ce cas, la suite est périodique.

6 Déterminer les réels x pour lesquels la suite $(2x/(x^2-3))^n$ converge.

7 Pour une PA positive $(a_k)_{k\geqslant 0}$, on a toujours :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}+\sqrt{a_k}} = \frac{n}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_n}}.$$

8 Si (a,b,c) sont en PA, il en est de même pour $(a^2-bc,\ b^2-ca,\ c^2-ab)$ et $(b^2+bc+c^2,\ c^2+ca+a^2,\ a^2+ab+b^2)$. La réciproque est vraie si $a+b+c\neq 0$.

20. TRANSFORMATION DES SUITES

1 Si une suite (a_n) est telle que les suites (a_n^2) et (a_n^3) convergent, elle converge.

2 Si deux suites (u_n) et (v_n) sont telles que $\lim(u_n+v_n)=0$ et $\lim(u_n^3-v_n^3)=0$, alors $\lim u_n = \lim v_n = 0$. Généraliser.

3 Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$. Si $\lim(u_n v_n)=1$, alors $\lim u_n = 1$ et $\lim v_n = 1$.

4 Si une suite u_n tend vers $+\infty$, il en est de même pour :

$$v_n = (1/n)(u_1+u_2+\cdots+u_n).$$

La réciproque est-elle vraie ?

5 On suppose $\lim u_n = 1$. Montrer que, pour certains $\alpha\in\mathbb{R}$ que l'on déterminera, on a alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_1+2^\alpha u_2+3^\alpha u_3+\cdots+n^\alpha u_n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}$$

6 Si $\lim x_n = 1$, établir que $1/2$ est la limite de :

$$v_n = \frac{1}{n\,2^n}\left\{\binom{n}{1}x_1 + 2\binom{n}{2}x_2 + 3\binom{n}{3}x_3 + \cdots + n\binom{n}{n}x_n\right\}.$$

7 Soit $a_n>0$ et $A_n=\sum_{k=1}^n a_k$. Montrer que $B_{n+1}=(1/2)(B_n+(B_n^2+a_n)^{1/2})$ définit une suite (B_n) convergeant en même temps que (A_n).

8 Si une suite (u_n), aux termes tous non nuls, est telle que (u_{n+1}/u_n) est alternativement égal à a_n et b_n, et si $\lim a_n=\alpha$ et $\lim b_n=\beta$, alors $\lim (u_n)^{1/n} = (\alpha\beta)^{1/2}$.

9 Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de sommes partielles $A_n=\sum_{k=1}^n a_k$. On pose $b_n=A_n/n$ et $B_n=\sum_{k=1}^n b_k$. (1) Si A_n converge, B_n converge vers la même limite. (2) Réciproquement, si B_n converge *et* si na_n tend vers 0, alors A_n converge vers la même limite que B_n.

10 Si deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont telles que $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \to 0$, alors $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$.

21. SUITES QUI SONT, DE MANIÈRE NATURELLE, DES SOMMES PARTIELLES DE SÉRIES A TERMES POSITIFS

1 Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de réels positifs. On pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. On suppose qu'il existe $c > 0$ et une infinité d'indices n pour lesquels $a_n \geqslant c/n$. Montrer qu'alors A_n tend vers $+\infty$.

2 Soit $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$, la suite des nombres premiers. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = +\infty.$$

3 Soit $(r_1, r_2, r_3, \ldots)$ une numérotation des rationnels de $[0,1]$. Montrer qu'il se peut que la série $\sum_{n\geqslant 1} r_n/n$ converge ou diverge.

4 Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \sigma(n)/n^2$ diverge.

5 Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à termes $\geqslant 0$. On pose $b_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$. Montrer que si la série $\sum a_n^2$ converge, il en est de même pour la série $\sum b_n^2$.

6 Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à termes > 0. On définit b_n par :

$$\frac{n}{b_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

Montrer que si la série $\sum a_n$ converge, il en est de même pour la série $\sum b_n$.

7 Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à termes $\geqslant 0$. On définit b_n par :

$$b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Montrer que si la série $\sum a_n$ converge, il en est de même pour la série $\sum b_n$, et, de surcroît :

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

8 Soit $\delta(x)$ la distance de $x \in \mathbb{R}$ à l'entier le plus proche, pourvu que $x + 1/2 \notin \mathbb{Z}$. Par exemple, $\delta(\pi) = 0{,}314 \ldots$ et $\delta(e) = 0{,}281 \ldots$ On se donne deux entiers positifs a et b tels que $\sqrt{b}$ soit irrationnel et $|a - \sqrt{b}| < 1$. Montrer la convergence de la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta\left((a+\sqrt{b})^n\right)$$

et dire comment on calculerait sa somme. Tâcher de généraliser à certains nombres algébriques ξ et à la série correspondante $\sum \delta(\xi^n)$.

22. SUITES QUI SONT, DE MANIÈRE NATURELLE, DES SOMMES PARTIELLES DE SÉRIES A TERMES QUELCONQUES

1 On pose $u_k = (ak+b)^{-1} + (ck+d)^{-1}$. Comment faut-il choisir les constantes a, b, c, d afin que la suite $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$ converge ?

2 Peut-on choisir les réels a, b, c afin que $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$ converge, où $u_k = a \ln k + b \ln (k+1) + c \ln (k+2)$.

3 Dans la mesure où la série $\sum a_n$ converge, discutez sur des exemples, puis en général de l'éventualité :

$$\int_0^{\to\infty} \left(e^{-x} \sum_{n \geqslant 0} a_n \frac{x^n}{n!} \right) \mathrm{d}x = \sum_{n \geqslant 0} a_n .$$

4 Soit $(a_k)_{k \geqslant 1}$ une suite périodique de période $T \geqslant 2$. On pose $u_n = a_n/n$ et $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Montrer que U_n converge ssi $a_1 + a_2 + \cdots + a_T = 0$.

5 Après avoir montré la convergence pour tout entier $n \geqslant 2$ de l'intégrale $\int_0^{\infty} \cos (x^n) \mathrm{d}x$, on montrera la divergence de la suite :

$$A_n = \int_0^{\infty} (\cos (x^2) + \cos (x^3) + \cdots + \cos (x^n)) \,\mathrm{d}x.$$

6 Soit $(X_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes, de même loi $(1/2, 1/2)$; démontrer la convergence partout de la suite :

$$S_n = X_0 + (X_1/2) + (X_2/2^2) + \cdots + (X_n/2^n).$$

7 Etant donné une suite $(X_n)_{n \geqslant 0}$ de variables aléatoires indépendantes, prenant toutes les valeurs 0 ou 1 avec les probabilités 1/2, 1/2, on considère, dans $\mathbb{C}$, la suite :

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X_k + (1 - X_k) i}{2^n} .$$

Montrer que cette suite converge, quelle que soit la réalisation de la suite (X_n), et que la limite appartient à un certain segment de droite, dans $\mathbb{C}$, que l'on déterminera.

8 Déterminer les réels $s > 0$ pour lesquels a lieu la convergence de la suite $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$, où $u_k = (-1)^{[\sqrt{k}]}/k^s$.

9 Déterminer la nature de la suite $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$, où $u_k = (-1)^{[\ln k]}/k$.

23. CALCUL EXPLICITE DE LA LIMITE DE SUITES QUI SONT, DE MANIÈRE NATURELLE, DES SOMMES PARTIELLES DE SÉRIES A TERMES POSITIFS

1 Calculer simplement $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, où $u_k = (1+3+5+\dots+(2k-1))^{-1}$. En déduire $\lim U_n$.

2 Calculer simplement $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, où $u_k = (k(k+2)(k+5))^{-1}$. En déduire $\lim U_n$.

3 Calculer simplement $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, où $u_k = (1^2+2^2+3^2+\dots+k^2)^{-1}$. En déduire $\lim U_n$.

4 Calculer explicitement $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, où $u_k = \text{Arc tg } (1/k^2)$. En déduire $\lim U_n$.

5 Calculer explicitement $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, où $u_k = \text{Arc tg } (2/k^2)$. En déduire $\lim U_n$.

6 On définit (a_n) par $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, et

$$S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Montrer que S_n tend vers $(3-\sqrt{5})/2$.

7 Soit $a_n = x^{E(\sqrt{n})}$ et $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Calculer $\lim A_n$ pour $|x| < 1$.

8 Déterminer le polynôme $P_n(x)$ dont les racines sont $x_k = \text{cotg}^2\,(k\pi/(2n+1))$, $k = 1, 2, \dots, n$, et tel que $P_n(0) = (-1)^n$. Calculez $P_n(\text{cotg}^2\,\theta)$ et aussi :

$$\sum_{k=1}^{n} \text{cotg}^2 \frac{k\pi}{2n+1}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}}$$

En déduire le résultat connu : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) = \pi^2/6$.

9 Déterminer deux constantes a et b telles que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on ait :

$$\int_0^{\pi} (at + bt^2) \cos nt \, \mathrm{d}t = 1/n^2.$$

En déduire la valeur de $U_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-2}$, puis $\lim U_n$.

10 Par des intégrations par parties judicieuses, montrez que :

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \dots - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t.$$

En déduire que $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \pi^2/6 \dots$

24. CALCUL EXPLICITE DE LA LIMITE DE SUITES QUI SONT, DE MANIÈRE NATURELLE, DES SOMMES PARTIELLES DE SÉRIES A TERMES DE SIGNES NON CONSTANTS

1 Etudier la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, où $u_k = \ln(1 + (-1)^k/k)$, et calculer sa limite.
$k = 1$?

2 On pose :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} - \frac{2}{3k+3}\right).$$

Déterminer la limite de U_n après avoir prouvé que :

$$U_n = \int_0^1 \frac{1+2x}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^{3n}\,\frac{1+2x}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

3 Appelant $\zeta(s)$ la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$, où $s > 1$, calculer, grâce à elle, la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1} n^{-s}$.

4 Si $u_k = (-1)^k/(2k+1)$, montrer que $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ tend vers $\pi/4$.

5 Si $u_k = (-1)^k/(3k+1)$, montrer que $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ tend vers $(\ln 2)/3 + \pi/3\sqrt{3}$ et que, pour $v_k = (-1)^k/(3k+2)$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ tend vers $-(\ln 2)/3 + \pi/3\sqrt{3}$.

6 Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\pi + 2\ln(\sqrt{2}+1)).$$

7 Montrer que :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} = \frac{1}{4}.$$

8 Montrer que :

$$\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\neq 2k}} \frac{(-1)^n}{n^2-4k^2} = \frac{3}{16k^2}.$$

9 En utilisant le résultat $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n = \ln 2$, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n(n+1) = 2\ln 2 - 1.$$

10 En utilisant le résultat $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n = \ln 2$, montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \ldots = \frac{1}{2} \ln 2.$$

25. SUITES DIVERSES

1 Pour tout nombre complexe z, la suite $z^n/n!$ tend vers zéro.

2 Pour quelles valeurs du réel a la suite $z^{[n^a]}/n!$ tend-elle vers zéro ?

3 Pour tout nombre complexe c tel que $|c| < 1$, montrer la convergence de la suite :

$$z_n = c + (c^2/2) + (c^3/3) + \cdots + (c^n/n).$$

Appelant $L(c)$ la limite ainsi trouvée, prouver que, pour c et c' de modules < 1, on a :

$$L(c) + L(c') = L(c + c' - cc').$$

4 Etant donné une suite (z_n) de nombres complexes tendant vers zéro, montrer que l'on peut créer une suite (ϵ_n) de ± 1 pour laquelle la série $\sum \epsilon_n z_n$ converge.

5 Etudier la suite (z_n) dont le terme général est donné, en fonction de $c \in \mathbb{C}$, par

$$z_n = (1 + c) \left(1 + \frac{c}{2}\right) \left(1 + \frac{c}{3}\right) \ldots \left(1 + \frac{c}{n}\right).$$

6 Montrer l'existence d'entiers positifs $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tels que :

$$\frac{1}{n!} (0! + 1! + 2! + \cdots + n!) \approx a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \cdots,$$

et vérifier que $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, $a_5 = 15, \ldots$

7 Soit $u_k = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} n^{k/n}$. Etudier cette suite.

8 Montrer que :

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{n-2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}}} \sim \sqrt{n}.$$

et trouver un équivalent simple de $u_n - \sqrt{n}$.

9 Montrer que :

$$u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{\cdots + \sqrt{n}}}}}$$

tend vers $\xi = 1{,}757\,932\ldots$, avec $|u_n - \xi| \leqslant ((n-1)!)^{-1/2}$.

CHAPITRE 15

Fonctions

1. PARITÉ, PÉRIODICITÉ

1 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, P l'ensemble des fonctions paires, I l'ensemble des fonctions impaires. Après avoir prouvé que P et I sont des sous-espaces, montrez que $E = P \oplus I$.

2 Si f est paire et dérivable, montrer que $f(x) - xf'(x)$ est paire aussi. Réciproque ?

3 Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que 1 et $\sqrt{2}$ soient des périodes. Montrer que f est constante.

4 Déterminer les périodes de $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \cos(x\sqrt{2})$. Montrer que $f+g$ n'est pas périodique.

5 On juxtapose les entiers successifs 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ... et l'on appelle u_n le n-ième chiffre de cette écriture. Par exemple $u_{15} = 2$. Montrer que la suite (u_n) n'est pas périodique.

2. FONCTIONS MONOTONES, FONCTIONS CONVEXES FONCTIONS RÉCIPROQUES

1 Déterminer si les propriétés suivantes concernant une fonction définie sur $[a,b]$ sont vraies ou fausses :

(P_1) (f strictement croissante) $\Rightarrow$ (f injective) ;
(P_2) (f continue) $\Rightarrow$ (f surjective sur $[f(a), f(b)]$) ;
(P_3) (f strictement croissante et continue) $\Rightarrow$ (f dérivable).

2 Si f, définie sur $[a,b]$, est strictement croissante et surjective sur $[f(a), f(b)]$, alors elle est continue.

3 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes : (1) f est strictement monotone et $f(I)$ est un intervalle ; (2) f est continue et injective.

4 Soit f une fonction croissante de $[a,b]$ dans lui-même. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

5 Soit $y = \cos^3 x + \sin^3 x$. Montrer qu'il existe une fonction réciproque g de f, sous certaines conditions, et que son expression est à prendre parmi les branches suivantes :

$$x = g(y) = \frac{\pi}{4} \pm \text{Arc}\cos\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\text{Arc}\cos y + 2k\pi}{3}\right)\right) + 2l\pi,\ (k,l) \in \mathbb{Z}^2.$$

3. LIMITE EN UN POINT D'UNE FONCTION

1 Etudier les limites éventuelles, en 0 et $\pi/2$, de $f(x) = |\sin x|^{\operatorname{tg} x}$.

2 Discuter, selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la limite éventuelle, pour $x \to 0$, de $f(x) = (\cos x)^{x^a}$.

3 Soient a et b deux réels non nuls. Déterminer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} ax - \sin ax}{\operatorname{tg} bx - \sin bx}.$$

4 Soit $F(x) = \int_1^x (e^t/t)\,dt$ alors $\lim_{x \downarrow 0} F(x)/\ln x = 1$.

5 Etudier $\lim_{x \to +\infty} (3 \,.\, 2^{1/x} - 2 \,.\, 3^{1/x})^x$.

6 Cherchez la limite, pour $x = 1$, de $F(x) = \dfrac{1}{x-1} \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

4. LES FONCTIONS CONTINUES

1 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, pour laquelle existe $B > 0$, telle que, $\forall x, x' \in [a,b]$, $|f(x') - f(x)| \leqslant B|x'^3 - x^3|$. Etudier la continuité de $g(x) = f(x) + Ax^3$.

2 Déterminer les réels α pour lesquels $f_\alpha(x) = |x|^\alpha \sin x \,.\, \sin(1/x)$, $f_\alpha(0) = 0$, est continue.

3 Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ telle que, pour $2^k \leqslant x < 2^{k+1}$, k entier $\geqslant 0$, on a : $f(x) = 2^{-k}(x - 2^k)^2 + 2^k$. Cette fonction est-elle continue ?

4 Si f et g sont continues sur $[a,b]$, $\varphi(x) = \max(f(x), g(x))$ l'est aussi.

5 Si f, g, h sont continues sur $[a,b]$, $\varphi(x) = \text{méd}\,(f(x), g(x), h(x))$ l'est aussi, où méd (a, b, c) désigne le réel intermédiaire, ou médian, des trois réels a, b, c.

6 Soit $f \in \mathcal{C}[0,1]$ et $F(x) = \max_{t \in [0,x]} f(t)$. Montrer que $F \in \mathcal{C}[0,1]$.

5. LES FONCTIONS DÉRIVABLES

1 Si f est dérivable en 0, avec $f(0)=0$, alors $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(1/(n+k))$ tend vers une certaine limite.

2 Si f est dérivable en 0, avec $f(0)=0$, alors $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k/n^2)$ tend vers $(1/2)f'(0)$.

3 Si, pour $x>0$, $f(x)>0$ et $\lim_{x\downarrow 0} f(x)/x = l$, alors

$$\lim_{n\to\infty}(n!f(a)f(a/2)\ldots f(a/n))^{1/n} = l.$$

4 Soit $f(x) = \exp(-(1/x^2)\exp(-(1-x)^{-2}))$ si $x\in\,]0,1[$ et $f(x)=0$ ailleurs. Montrer que $f\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

5 Soit $f(x)=\exp(1/(x^2-1))$ si $x\in\,]-1,1[$ et $f(x)=0$ sinon. Alors $f\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

6 Soit $f(x)=\exp(1/x^2)$ si $x\neq 0$, avec $f(0)=0$. Alors $f\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(n)}(0)=0$ pour tout entier n.

7 Si une fonction f, définie sur $[a,b]$, est dérivable et convexe, alors sa dérivée est continue.

6. LES FONCTIONS DÉRIVÉES

1 Supposons qu'une fonction f dérivable sur $]a,b[$ soit telle que $\lim_{x\uparrow b} f(x)=+\infty$. A-t-on nécessairement $\lim_{x\uparrow b} f'(x)=+\infty$? Réciproque ?

2 Soit $f(x)=(\sin x)/x$, $f(0)=1$. Montrer que f est indéfiniment dérivable, et que $|f^{(n)}(x)|\leqslant (n+1)^{-1}$.

3 On suppose $f>0$, avec existence de f' et f'', et l'on pose $g=\ln f$. Alors, si g est convexe (on dit souvent que f est logarithmiquement convexe), nécessairement f est convexe. Réciproque ?

4 Soit f continûment dérivable, de $]-1,1[$ dans $[-1,1]$. Posant :

$$m_1 = \inf_{]-1,0]}|f'(x)| \quad \text{et} \quad m_2=\inf_{[0,1[}|f'(x)|,$$

montrer que $m_1<2$ et $m_2<2$.

5 (1) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires et donner des exemples de fonctions le vérifiant. (2) Le théorème des valeurs intermédiaires entraîne-t-il la continuité ? (3) Montrer que toute fonction dérivée satisfait à ce théorème.

6 Si $f+f'$ tend vers l pour $x=+\infty$, il en est de même pour f. Généraliser.

7. AUTOUR DU THÉORÈME DE ROLLE

1 Montrer que $f(x) = (d/dx)(x(x-1))^2$ possède au moins une racine entre 0 et 1.

2 On suppose que l'équation $f(x) = 0$ possède n racines sur $I =]0, \infty[$. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $g(x) = \alpha f(x) + f'(x)$ en possède au moins $n-1$ dans ce même intervalle. Si, de surcroît, $\lim_\infty e^{\alpha x} f(x) = 0$, il y en aura au moins n.

3 Si f est dérivable sur $[a,b]$, non constante, $f(a) = f(b) = 0$, il existe $\xi \in]a,b[$ pour lequel :

$$|f'(\xi)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)\,dx.$$

4 On donne f dérivable deux fois sur $[0,1]$, avec :

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = f(1) - 1 = 0.$$

Montrer l'existence de $a \in]0,1[$ tel que $|f''(a)| \geqslant 4$.

5 La dérivée n-ième de e^{-x^2} est de la forme $e^{-x^2} P_n(x)$, où P_n est un polynôme de degré n ayant ses n racines toutes réelles et distinctes.

6 Montrer que la fonction $R_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x > -1$, définie par :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_n(x)$$

ne s'annule qu'en $x = 0$.

8. AUTOUR DE LA FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS

1 Soit f continue et dérivable sur $]0,1[$ et telle que, pour tout x de cet intervalle, $|f'(x)| \leqslant 1$. Montrer que $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$ existe.

2 On suppose la fonction f continue et dérivable sur $]a,b[$, et telle qu'existe $\lim_{x \downarrow a} f'(x) = l$. Montrer que f est prolongeable par continuité en $x = a$ et que la nouvelle fonction admet une dérivée à droite valant l.

3 Montrer que, pour $|x|$ assez petit, il existe un seul $\theta = \theta(x)$ tel que $\sin x = x - (x^3/6)\cos(\theta . x)$. Prouver ensuite que $\lim_{x \to 0} \theta(x) = 1/\sqrt{10}$.

4 Pour tout $x > 0$, on a $1 + x/2 - x^2/8 < \sqrt{1+x} < 1 + x/2$. Plus précisément, montrer l'existence d'une fonction $\theta = \theta(x)$ que l'on étudiera, telle que, pour certains x, on ait $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - (x^2/8)\theta$.

5 Si $|x| \leqslant 1/2$, on aura $\ln(1+x) = x - x^2/2 + u . x^3$, où $|u| \leqslant 7/12$. Cette inégalité est-elle la meilleure possible ?

9. CALCULS DE DÉRIVÉES SUCCESSIVES

1 Calculer la dérivée n-ième de $e^x(ax^2+bx+c)$.

2 Calculer la dérivée n-ième de $\cos^3 x + \sin^3 x$.

3 Calculer la dérivée n-ième de $\exp(x^2)$.

4 Soit $f(x) = x/(1-x^2)$. Calculer en moins de 10 secondes $f^{(n)}(0)$. Puis en un temps encore assez court $f^{(n)}(x)$, pour x quelconque.

5 Soit $f(x) = x \sin(1/x)$, $f(0) = 0$. Montrer que f n'est pas dérivable en 0. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$, et calculer $f^{(n)}$.

6 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}e^{1/x}) = (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}.$$

10. OPÉRATEURS DE DÉRIVATION

1 Une généralisation possible de la formule de Leibniz est : pour tout polynôme P, on a :

$$P(D)(uv) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{u^k}{k!} P^{(k)}(D)(v).$$

2 Soit T l'opérateur xD. Calculer T^n comme polynôme de D.

3 Posant $(m)_h = m(m-1)\ldots(m-h+1)$, montrer que :

$$D^n F(x^2) = (2x)^n F^{(n)}(x^2) + 2\binom{n}{2}(2x)^{n-2} F^{(n-1)}(x^2) + \\ + (4)_2 . \binom{n}{4}(2x)^{n-4} F^{(n-2)}(x^2) + (6)_3 . \binom{n}{6}(2x)^{n-6} F^{(n-3)}(x^2) + \cdots$$

4 Montrer l'existence d'entiers $s(n,k)$, que l'on calculera par récurrence, avec lesquels :

$$D^n F(\ln x) = x^{-n} \sum_{k=1}^{n} s(n,k) . F^{(k)}(\ln x).$$

5 Montrer que :

$$D^n F(\sqrt{x}) = \frac{F^{(n)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^n} - \frac{n(n-1)}{1!} \cdot \frac{F^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+1}} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2!} \cdot \frac{F^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+2}} + \cdots$$

11. THÉORIE DU LOGARITHME ET DE L'EXPONENTIELLE

1 Prouver, sans usage d'une table de logarithme, que :

$$\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi}>2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_\pi 2}>2.$$

2 Par des procédés élémentaires, sans aucune machine, et cependant très rapidement, comparez e^π et π^e.

3 Montrer que la courbe d'équation : $((ax+b)/(cx+d))$ admet en général un centre de symétrie.

5 Montrer que ln n'est pas une fraction rationnelle. Même question pour e^x.

6 On donne a et $b>0$. Montrez que $a^x = x^b$ possède 0, ou 1, ou 2 racines.

7 Montrer que l'on a, pour tout $x>0$, avec une erreur relative $<1\%$: $\log_2 x \# \ln x + \log_{10} x$, ce qui permettra de calculer grossièrement, mais rapidement, des logarithmes binaires à partir d'une table de logarithmes vulgaires et d'une table de logarithmes naturels.

12. ÉTUDE DE FONCTIONS RATIONNELLES PARTICULIÈRES

1 Déterminer le lieu des extrema de la famille de courbe d'équation :
$y = f_\lambda(x) = x^2 + \lambda^2/(x^2-1)$.

2 Comment faut-il choisir $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ afin que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on ait :

$$\left|\frac{ax^2+bx+c}{x^2+1}\right| \leqslant 1\ ?$$

3 Déterminer les constantes A, B, C, A', B', C' de telle sorte que la fraction rationnelle suivante soit le carré d'une autre fraction rationnelle :

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\frac{A'}{(x-a)^2}+\frac{B'}{(x-b)^2}+\frac{C'}{(x-c)^2}.$$

4 Soit P un polynôme à coefficients réels, tel que $P(x)>0$ pour tous réels x. Démontrer la même propriété pour le polynôme $Q = P + P' + P'' + \cdots$

5 Soit P un polynôme à coefficients réels, tel que $P(x) > 0$ pour tous réels x. Démontrer la même propriété pour :

$$Q(x) = \sum_{k \geqslant 0} (3^{k+1} + (-1)^k 2^{k+1}) P^{(k)}(x).$$

13. ÉTUDE DE FONCTIONS ALGÉBRIQUES PARTICULIÈRES

1 à 3 Reconnaître :

(1) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{|x| + 2}$. (2) $f(x) = \sqrt{x|x-1|}$. (3) $f(x) = \| |x| - 1 | \cdot \| x+1| + |x-3| \|$.

4 Montrer que $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x} - 1} + \sqrt{x - 2\sqrt{x} - 1}$ vaut 2 si $x \in [1,2]$ et $2\sqrt{x-1}$ si $x > 2$.

5 à 12 Etudier les fonctions $f(x)$ suivantes :

(5) $\sqrt{1 - 2x\sqrt{1 - x^2}}$; (6) $\sqrt[3]{x^2(x-1)}$;
(7) $\sqrt{x^2 + ax + 1} + \sqrt{x^2 - ax + 1}$; (8) $(x+1)^{2/3} + (x-1)^{2/3}$;
(9) $(x+1)^3 x^{2/3}$; (10) $\sqrt[3]{x^3 + 1}$;
(11) $\sqrt[2n+1]{1 - x^{2n+1}}$; (12) $(1 - x - x^2 - \ldots - x^{n-1})^{-1/2}$.

13 à 16 Etudier les fonctions $y = f(x)$ définies par :

(13) $x^{2n} + y^{2n} = 1$; (14) $x^4 - y^4 = x^2 - 2y^2$;
(15) $x^4 - y^4 + xy = 0$; (16) $y^2 - x^4 + x^6 = 0$.

14. ÉTUDE DE FONCTIONS PARTICULIÈRES AVEC LOGARITHMES OU EXPONENTIELLES

1 Soit $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = \ln(\ln x)$, ..., $f_n(x) = (f_1 \circ f_{n-1})(x)$, $n \geqslant 2$. Quel est le domaine de définition de f_n ?

2 Montrer que l'on peut choisir les réels a et $b > 0$ de telle sorte que les courbes représentatives de $y = a^x$ et de $x = b^y$ soient tangentes. Déterminer alors le lieu du point de contact.

3 à 20 Etudier les fonctions $f(x)$ suivantes :

(3) $\ln|x| / \ln|x-2|$; (4) $x^{x-\lambda}$;
(5) $x(x-2)\ln x$; (6) $\log_2(1 - \log_{1/2}(x^2 - 5x + 6))$;
(7) $x^{1/x}$; (8) x^x ;
(9) $(x^2 - 1)\ln(1+x)/(1-x)$; (10) $x \cdot \exp(x/(x^2-1))$;
(11) $(1 + 1/x)^x$; (12) $\ln(x^2 - 3x + 2)$;
(13) $e^{1/x}$; (14) $1/2\left\{\ln(1+e^x) + \ln(1+e^{-x})\right\}$;

(15) $x^{x-\lambda}$; (16) $x/(e^x-1)$;
(17) $(\operatorname{tg} x)\exp(1/\sin x)$; (18) $x \ln |e^x - 1|$;
(19) $x/(1+e^{1/x})$; (20) $\log_x(x^2+1)$.

15. ÉTUDE DE FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES PARTICULIÈRES

1 à 15 Etudier les fonctions $f(x)$ suivantes:

(1) $\operatorname{Arc tg} \operatorname{tg} x$; (2) $\operatorname{Arc cos}(\cos x)$;
(3) $\operatorname{Arc sin}(\cos x)$; (4) $\operatorname{tg}(\sin x)$;
(5) $(\sin x)/x$; (6) $x \operatorname{cotg} x$;
(7) $|\operatorname{tg} x|^{\cos x}$; (8) $\sin x+(1/2)\sin 2x+(1/3)\sin 3x$;
(9) $\operatorname{Arc tg} x + \operatorname{Arc tg} 1/x$; (10) $\operatorname{Arc sin}(x^2)$;
(11) $x^2 \sin 1/x$; (12) $(1+\operatorname{tg} x)^{\sin x}$;
(13) $\sqrt{a+\sin x}+\sqrt{a-\sin x}$; (14) $|\sin x|^{\operatorname{tg} x}$;
(15) $\sqrt{1+\sin x}$.

16 Etudier $f(x) = \operatorname{Arc sin}\sqrt{(1/2)+x} + \operatorname{Arc sin}\sqrt{(1/2)-x}$ et résoudre l'équation $f(x)=f(y)$.

17 Placer les uns vis-à-vis des autres les arcs C_a d'équation:

$$y = \ln(1-2a\cos x + a^2).$$

18 Calculer $\operatorname{tg} 9° + \operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 63° + \operatorname{tg} 81°$.

19 Montrer que $\cos(\pi/7) - \cos(2\pi/7) + \cos(3\pi/7) = 1/2$.

16. ÉTUDE DE FONCTIONS PARTICULIÈRES DANS LESQUELLES INTERVIENT LA PARTIE ENTIÈRE

1 à 6 Etudier les fonctions:

(1) $[2x]-2[x]$; (2) $[x]+(x-[x])^2$;
(3) $x-[x]$; (4) $(-1)^{[x]}(x-[x])$;
(5) $x^2 - x[x]$; (6) $\sin(x[x]\pi/2)$.

7 Quel est l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $[\sqrt{y}]=\sqrt{[x]}$?

8 Montrer que $[x+y]=[x]+[y]+\epsilon$, où $\epsilon=0$ ou 1. De même $[2x]+[2y] = [x]+[x+y]+[y]+\delta$, où δ est une fonction dont on déterminera les valeurs.

9 Pour tout réel x, et tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

10 Démontrer, pour tout réel $x > 0$, l'identité de Liouville :

$$[\sqrt{x}] + [\sqrt{x - 1^2}] + [\sqrt{x - 2^2}] + \cdots = [x/1] - [x/3] + [x/5] - [x/7] + \cdots$$

17. ÉTUDE DE FONCTIONS PARTICULIÈRES COMPORTANT DES VALEURS ABSOLUES

1 à 3 Etudier et reconnaître graphiquement les fonctions $f(x)$ suivantes :
(1) $|x-1| + |x-3| + |x-5|$; (2) $|x-1| - |(x-1)/x|$; (3) $\sqrt{x^2 - |x|} - x$.

4 Pour $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, étudier $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k|$.

5 Etudier $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot |x - k|$.

6 Montrez que l'ensemble des (x, y) satisfaisant à : $||x| + ||y| - 3| - 3| = 1$ affecte la forme d'un «huit anguleux».

18. ÉTUDE DE FONCTIONS PARTICULIÈRES DONNÉES PAR L'INTERMÉDIAIRE DE DIVERS ALGORITHMES

1 Etudier $f(x) = \sup_{t \in [-1,1]} (tx + \sqrt{1 - t^2})$.

2 Etudier la fonction f qui, à $x \in \mathbb{R}$, $x + 1/2 \notin \mathbb{Z}$, associe l'entier le plus proche.

3 Etudier f qui, à $x \in \mathbb{R}$, de développement $x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \ldots$ associe $f(x) = 0, x_2 x_1 x_3 x_4 x_5 \ldots$ (permutation des deux premières décimales).

4 Pour tout $x \in [0,1[$, de développement propre en base 2 : $x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$, on définit $f(x)$ comme ayant le même développement, mais en base 4. Montrer que f est continue à droite, n'est constante dans aucun intervalle, et admet une dérivée à droite partout nulle.

5 Soit $x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ le développement décimal propre de $x \in [0,1[$. On lui associe :

$$f(x) = (x_1^2/100) + (x_2^2/100^2) + (x_3^2/100^3) + \cdots$$

Montrer que f est monotone et est continue pour toute valeur de x représentée par un développement fini.

6 Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. A tout $x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots \in [0,1[$, dont le développement décimal est propre, on associe $g(x) = 0, x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} \ldots$ Montrer que $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1/2$.

19. FONCTIONS DÉFINIES AU MOYEN D'UNE SÉRIE

1 A tout $x \in [0,1[$ de représentation diadique *propre* $\sum_{n \geqslant 1} x_n/2^n$ on associe $f(x) = \sum_{n \geqslant 1} x_n/3^n$. La fonction est-elle injective ? continue à gauche ? continue à droite ?

2 Soit $(r_n)_{n \geqslant 0}$ une numérotation de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels. (1) Montrer que la série dont le terme général u_n vaut 2^{-n} si $r_n < x$, et 0 sinon, converge. (2) Appelant $f(x)$ sa somme, montrer qu'elle est continue ssi $x \notin \mathbb{Q}$.

3 Etudier la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin \pi x$ pour $x \in [0,1]$.

4 Montrer le caractère non borné de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}.$$

5 La fonction de Darboux :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n!}$$

n'est dérivable nulle part, bien que continue partout.

20. SUITES DE FONCTIONS

1 Etudier $F_n(x) = \int_0^x (1+t^4)^{-n}\,\mathrm{d}t$.

2 Soit $f_n(x) = n \cos^n x \,.\, \sin x$, $x \in [0, \pi/2]$. Etudier $f_n(x)$ et sa limite pour $n \to \infty$. Comparer $\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

3 Etudier $f_n(x) = \exp\left(-n\left|x + \frac{1}{x}\right|\right)$. A-t-on :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\ ?$$

4 Soit $F_n(x) = \int_0^x e^{-t} t^n\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} F_n(x)$ existe et vaut $n!$.

5 Soit $f_n(x) = nx^n \sin \pi x$, $x \in [0,1]$. Etudier $b_n = \sup_{[0,1]} f_n(x)$. A-t-on :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\ ?$$

6 Soit $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ telle que $\varphi(x)=x/2$ si $x\in[0,2/3]$ et $\varphi(x)=2x-1$ si $x\in]2/3,1]$. (1) Construire le «graphe» de φ. (2) On pose $f_1=\varphi$, $f_2=\varphi_0\varphi,\ldots,\ f_n=\varphi_0 f_{n-1},\ n\geqslant 2$. Expliciter les fonctions f_2 et f_3 et les représenter graphiquement. (3) Etudier $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ sur $[0,1]$.

7 Grâce à son expression intégrale, déterminer la limite $f(x)$ de la suite de fonctions:

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}.$$

21. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1 Montrer que l'ensemble des valeurs prises par:

$$f(x,y,z,t)=\frac{x}{x+y+t}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{y+z+t}+\frac{t}{x+z+t}$$

pour $x,y,z,t>0$ est $]1,2[$.

2 Soit $f(x,y)=(x^2-y)(3x^2-y)$. Montrer que pour tout chemin radial, $y=tx$, il y a un minimum en $x=0$, mais cependant pas pour la fonction f.

3 Montrer que la fonction $f(x,y)=\int_x^y\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est bornée sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

4 Pour $0<x<y$, déterminer la meilleure approximation affine de $\ln t$ pour $t\in[x,y]$, au sens de la convergence uniforme, c'est-à-dire les coefficients $A=A(x,y)$, $B=B(x,y)$, pour lesquels:

$$\sup_{t\in[x,y]}|\ln t-At-B|=\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\ \sup_{t\in[x,y]}|\ln t-at-b|.$$

22. PROGRAMMATION LINÉAIRE

1 Déterminer le minimum de $y-2x$ sachant que $|3x+5y|\leqslant 8$ et $2x-3y\geqslant 12$.

2 Trouver les extrema de $f(x,y)=x-2y$ sur $|x|+|y|\leqslant 1$.

3 Trouver les extrema de $f(x,y)=x-y$ dans l'ensemble des $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ définis par les inégalités $x^2+4y^2-4x\geqslant 0$, $x^2+y^2-5\leqslant 0$, $x-y-1\leqslant 0$.

4 Trouver le minimum de $f(x,y)=2x+y$, sachant que $3x+y\geqslant 6$, $x+y\geqslant 4$, $x+3y\geqslant 6$.

5 Déterminer les extremums de $f(x,y)=x+2y-1$, sachant que $x+y\leqslant 4$, $x+2y\geqslant -2$, $x-y\geqslant -2$, $x\leqslant 3$.

CHAPITRE 16

Intégrales

1. FONCTIONS INTÉGRALES

1 La fonction $f(x) = \cos(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$ est intégrable sur $[0,1]$. bornée

2 Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$, il en est de même pour $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, et l'on a :

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x \leqslant \min\left\{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right\}.$$

3 Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, et soit g une fonction lipschitzienne sur un intervalle I contenant $f([a, b])$. Montrer que $g \circ f$ est intégrable sur $[a, b]$.

4 La fonction $f(x) = E(-|x\sin(1/x)|)$, $f(0) = 0$, est-elle intégrable sur $[0,1]$?

5 La fonction $f(x) = (-1)^{E(1/x)}$, $f(0) = 0$, est-elle intégrable sur $[0,1]$?

2. VALEUR MOYENNE ET SOMMES DE RIEMANN

1 Chercher la limite de $u_n = (1/n)(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \sqrt[n]{8} + \cdots + \sqrt[n]{2^n})$. $\frac{1}{\ln 2}$

2 Pour $f \in \mathcal{C}[0,1]$, étudier la limite l de :

$$u_n = \frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{2n}\right) + f\left(\frac{3}{2n}\right) + f\left(\frac{5}{2n}\right) + \cdots + f\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right\}.$$

$\int_0^1 f(t)\,dt$

3 Calculer de diverses façons la limite de :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{kx}{n}.$$

$\frac{1-\cos x}{x}$

4 Montrer que la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{n^2 + k^2}$ a pour limite $l = \ln(\sqrt{2} + 1)$. Donner un équivalent simple de $u_n - l$.

5 Pour n entier $\geqslant 1$, on pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} n(n^2+k^2)^{-1}$. (1) Montrer que s_n converge vers un certain réel s que l'on déterminera. (2) Prouver que, pour $n \to \infty$, on a $s - s_n \sim (4n)^{-1}$.

3. INTÉGRATION PAR PARTIES

1 Calculez $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x \, dx$.

2 On a $\int uv' = uv - \int u'v$, $\int uv'' = uv' - u'v + \int u''v$. Généraliser à $\int uv^{(n+1)}$.

3 Calculer par récurrence $J_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \cos^m x . \sin^n x \, dx$, où $m, n \in \mathbb{N}$.

4 Calculer $I_n = \int_0^1 x (\ln x)^n \, dx$.

5 Calculer $I_n = \int_0^1 \exp(-x^{1/n}) \, dx$.

6 Calculer $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} \, dx$ et, plus généralement, $I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos nx}{\cos^n x} \, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

7 Démontrez de diverses manières que $\int_0^{\pi/2} \cos nx . \cos^n x \, dx = \pi/2^{n+1}$, où $n \in \mathbb{N}$.

4. CALCUL DE PRIMITIVES ET D'INTÉGRALES

1 Déterminer les réels a, b, α, β tels que, pour tout polynôme P de degré $\leqslant 3$, on ait :

$$\int_0^1 P(t) \, dt = \alpha P(a) + \beta P(b).$$

2 Peut-on déterminer les réels a, b, c de sorte que $\int \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{(x-1)^2 (x^2+1)^2} \, dx$ soit rationnelle ?

3 Par récurrence, ou autrement, montrer que, pour tous entiers m et $n \geqslant 0$, on a :

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2mx . \cos^{2n} x . \, dx = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{m+n}.$$

4 Pour tout polynôme P de degré $\leqslant 5$, on a :

$$\int_0^1 P(t) \, dt = \frac{4}{9} P\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{18} \left\{ P\left(\frac{1-\sqrt{3/5}}{2}\right) + P\left(\frac{1+\sqrt{3/5}}{2}\right) \right\}$$

5 On pose, pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$: $I_{n,k} = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^k dx$.

Calculez $I_{n,1}$ et $I_{n,2}$. Comment entameriez-vous le calcul de $I_{n,k}$?

5. SUITES PARTICULIÈRES DÉFINIES COMME INTÉGRALES D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE

1 Montrer que $I_n = \int_1^{1+1/n} \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ tend vers 0. Plus précisément $I_n \sim A/n$, et l'on calculera A.

2 Soit $I_n = \int_0^1 x^n(1+x+x^2)^{-1}\,\mathrm{d}x$. (1) $I_n \to 0$. (2) $I_n \sim 1/3n$. (3) Calcul de I_n.

3 Etudier $I_n = \int_0^1 \mathrm{d}x/(1+x^n)$ du point de vue de la monotonie. Montrer que $I_n \to a$ que l'on déterminera. Plus précisément, prouver :

$$I_n = a - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

4 Montrer que $\int_n^{n+1} x^2(1+x^5)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ tend vers 0 et en trouver un équivalent.

5 Soit $I_n = \int_0^1 x^n(1+x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$. Limite, récurrence, calcul.

6 Démontrer la formule : $\int_0^1 \sqrt[n]{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{n}\left(2 - \ln 2 + \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

6. SUITES PARTICULIÈRES DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE COMPORTANT DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

1 Pour $0 \leqslant a < b$, montrer que $I_n = \int_a^b \cos(nt^2)\,\mathrm{d}t$ tend vers zéro.

2 Montrer que la suite $\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{1/x}\,\mathrm{d}x$ tend vers $\pi/2$.

3 Justifiez l'existence et calculez les suites :

$$A_n = \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x, \quad B_n = \int_0^\pi \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 \mathrm{d}x, \quad C_n = \int_0^\pi \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^3 \mathrm{d}x.$$

4 *Intégrales de Wallis* – Pour n entier $\geqslant 0$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$. Etablir les résultats suivants : (1) On a $I_n > 0$, I_n décroissante, $\lim I_n = 0$. (2) $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, $n \geqslant 0$; expliciter I_n. (3) On a $\lim(I_{n+1}/I_n) = 1$. (4) La suite $(n+1)I_nI_{n+1}$ est constante et $I_n \sim (\pi/2n)^{1/2}$.

$1 > \frac{I_{n+1}}{I_n} > \frac{I_{n+2}}{I_{n+1}}$

5 Pour $\lambda \in]-1,1[$, on considère :

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos nx}{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2}\,\mathrm{d}x.$$

Trouver une récurrence entre I_{n+1}, I_n, I_{n-1}, et en déduire la valeur de I_n.

7. SUITES PARTICULIÈRES DÉFINIES COMME INTÉGRALES NI ALGÉBRIQUES, NI TRIGONOMÉTRIQUES

1 Etudier et calculer $I_n = \int_0^1 x\,(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

2 Montrer que la suite $I_n = \int_0^1 t^n . \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0.

3 Etudier $I_n = \int_1^2 (\ln t)^n\,\mathrm{d}t$.

4 Montrer que $\int_0^1 e^{nx^2}\,\mathrm{d}x \sim e^n/2n, \quad n \to \infty$.

5 Soit $I_n = \int_1^\infty \exp(-x^n)\,\mathrm{d}x$. Montrer l'existence de $A > 0$ tel que $I_n \sim A/n$.

6 Montrer que 1 est la limite de la suite (I_n) ainsi définie :

$$I_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

8. SUITES RÉSULTANT DE TRANSFORMATIONS INTÉGRALES DE FONCTIONS NON PARTICULIÈRES

1 Si f est intégrable sur $[0,1]$, montrer que $\int_0^1 f(t)(1+nt)^{-1}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0.

2 Soit $S(x) = 4E(x) - 2E(2x) + 1$. Etudier la suite $u_n = \int_0^1 f(t).S(nt)\mathrm{d}t$, où f est continue sur $[0,1]$.

3 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, avec $\lim_\infty f(x) = C$. Montrer que, si f est continue,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\sum_{k=1}^{n} f(k)} = 1.$$

4 Soit $u_n = \int_a^b f(t) \sin nt\,\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de u_n quand f est en escalier, puis quand f est intégrable.

5 Si f est continue sur $[0,1]$, alors la suite $u_n = n\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$ tend vers $f(1)$.

9. FONCTIONS DÉFINIES PAR L'INTÉGRALE D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE, LA VARIABLE APPARAISSANT DANS LES BORNES DE L'INTÉGRALE

1 Etudier $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{t\,\mathrm{d}t}{|x|+1}$.

2 Pour $0 < b < a$, étudier $F(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{b^2\cos^2 t + a^2 \sin^2 t}\,.\,\mathrm{d}t$.

3 Soit $f(t) = 1 - t$ si $t \in [0,1]$, $f(t) = 0$ si $t \geqslant 1$, et $f(-t) = f(t)$. Etudier $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et montrer que $F(x+y) \leqslant F(x) + F(y)$ pour tous x et y.

4 Etudier $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$.

5 Si f est continue sur un voisinage de 0, étudier la limite éventuelle en $x = 0$ de $F(x) = x \int_x^1 f(t) \,.\, t^{-2}\,\mathrm{d}t$.

10. FONCTIONS DÉFINIES PAR L'INTÉGRALE D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE, LA VARIABLE ÉTANT SOUS LE SIGNE D'INTÉGRATION

1 Etudier $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x - t^3}\,\mathrm{d}t$.

2 Etudier $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + xt^3}\,\mathrm{d}t$.

3 Etudier $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{1 + xt^2}\,\mathrm{d}t$.

4 Pour $x > 0$, on définit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x^3 + t^3}$.

Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour $x \downarrow 0$, on ait $F(x) \sim A/x^2$.

5 Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{x^3 + t^3}}$. Montrer qu'il existe une constante A et une fonction $\epsilon(x)$, tendant vers 0 avec x, tels que $F(x) = \ln(1/x) + A + \epsilon(x)$.

11. FONCTIONS DÉFINIES PAR L'INTÉGRALE D'UNE FONCTION NON ALGÉBRIQUE, LA VARIABLE APPARAISSANT DANS LES BORNES DE L'INTÉGRALE

1 Etudier $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \ln t \,.\, \mathrm{d}t$.

2 Etudier $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arc\,sin} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arc\,cos} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

3 Déterminer les limites en 0 et 1, si elles existent, de :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

4 Etudier $F(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{te^{-t}}{t-2}\,\mathrm{d}t$.

5 Calculez $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} (t \ln t)^{-1}\,\mathrm{d}t$ afin d'en déduire $\lim_{x \to 1} \int_{x^2}^{x^3} (\ln t)^{-1}\,\mathrm{d}t$.

12. FONCTIONS DÉFINIES PAR L'INTERMÉDIAIRE D'UNE FONCTION NON ALGÉBRIQUE, LA VARIABLE ÉTANT SOUS LE SIGNE D'INTÉGRATION

1 Soit $F(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x t \, dt$, $x > -1$. Montrer que $(x+1)F(x+1)F(x)$ est constante.

2 Etudier $F(x) = \int_0^{2x} \frac{dt}{1 - x\cos t}$.

3 Etudier $F(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta}{\sqrt{1 - 2x\cos\theta + x^2}}$.

4 Soit f continue. La fonction $F(x) = \int_a^b f(x+t)\,dt$ est-elle dérivable ?

5 Etudier $F(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin t)\,dt$.

6 Etudier $F(x) = \int_0^{\pi} \sqrt{x + \cos t}\,dt$.

7 Déterminer $\lim_{x \downarrow 0} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos t}{\sqrt{\sin^2 t + x\cos^2 t}}\,dt$.

13. TRANSFORMATIONS INTÉGRALES

1 Etudier la transformation T qui, à $f \in \mathcal{C}[-1,1]$ associe $g = Tf$ telle que :

$$g(x) = \int_{-1}^{1} (2 - |x-t|) f(t)\,dt.$$

2 A toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, on associe $g = Tf$, définie par $g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$. (1) On a $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$. (2) Si f est bornée, il en est de même pour g. (3) La qualité «monotone» se transmet aussi. (4) Ayant montré que T est linéaire, déterminer son noyau. (5) Si $\lim_\infty f = l$, aussi $\lim_\infty g = l$. (6) La réciproque est fausse.

3 Etudier la transformation qui, à $f \in \mathcal{C}[0,1]$ associe $g(x) = \int_0^1 \min(x,t).f(t)dt$.

4 Si f et g sont continues dérivables, alors $F(x) = \int_a^b f(x-t)g(t)\,dt$ l'est aussi.

5 Soit $g(x) = \int_a^b f(t)\sin tx\,dt$, où $f \in \mathcal{C}[0,1]$; alors $\lim_\infty g(x) = 0$.

6 A toute fonction f continue sur $]0,\infty[$ on associe $F(x) = (1/x^2)\int_x^{x^2} f(t)\,dt$, et l'on appelle T l'application faisant passer de f à F. (1) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{C}\ ]0,\infty[$. (2) Montrer que si $\lim_\infty f = l$, on a aussi $\lim_\infty F = l$. (3) Calculer aussi loin qu'il vous est possible $T^n(1)$. (4) Montrer que $F(x)$ est dérivable et calculer sa dérivée. (5) L'application T est-elle injective ?

CHAPITRE 17

Équations

1. L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

1 Etudier la (ou les) fonction(s) $y = f(x)$ telles que $e^{2y} - 2e^{x+y} + e^{2x} = 1$.

2 Résoudre et discuter graphiquement sur $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ l'équation :

$$9 \cos^2 x + 6(p+q) \cos x + p^2 + q^2 = 0.$$

3 Pour b et c réels, résolvez $x^4 - 2(b^2 + c^2)x^2 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 = 0$. Ceci fait, vous en déduirez les points à coordonnées entières sur la surface $x^4 - 2x^2(z^2 + y^2) + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 = 1$.

4 Soit $ax^2 + bx + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $c \neq 0$. Prouver que si cette équation possède une racine rationnelle, alors l'un au moins des coefficients est pair.

5 Résoudre et discuter $e^{2x} - 2ae^x + b = 0$ par régionnement des (a, b).

6 Si $ax^2 + bx + c = 0$ est à coefficients réels et à *racines réelles,* alors :

$$a + b + c \leqslant (9/4) \,.\, \max(a, b, c).$$

2. ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

1 Montrer que l'équation $x^3 + 3x + 3 = 0$ n'a pas de racine rationnelle.

2 Chercher les entiers de Gauss racines de $z^4 + 2z^2 + 32z + 65 = 0$.

3 Si le rationnel irréductible p/q est racine de $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$, $a_k \in \mathbb{Z}$, alors p divise a_0 et q divise a_n.

4 Si le rationnel irréductible p/q est racine de $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$, où $a_k \in \mathbb{Z}$, alors $p - q$ divise $f(1)$ et $p + q$ divise $f(-1)$.

5 Résoudre de manière algébrique, puis trigonométrique, l'équation :

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2}.$$

6 Tracez rapidement la courbe $y = x^3$ et discutez du nombre de tangentes que l'on peut lui mener d'un point variable de son plan.

7 Pour tout réel a, $z^5 + z + a = 0$ a une racine complexe dans chaque quadrant.

3. ÉQUATIONS AVEC RADICAUX

1 Résoudre et discuter : $x\sqrt{x} + \sqrt{x^3 - 2} = m$.

2 Résoudre et discuter : $\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter selon $0 < a \leqslant b$: $\sqrt{x} = \sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}$.

4 Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$: $x - \sqrt{-3x^2 + 6x + 9} = \lambda(x-3)$.

5 Résoudre et discuter, dans $\mathbb{R}$: $3 + 2x = \lambda\sqrt{1+x}$.

4. ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES A UNE INCONNUE

1 Calculer $\cos(3\pi/8)$ et $\cos(\pi/5)$.

2 Montrer que :

$$\sin(3°) = \frac{1}{16}\left\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\right\}.$$

3 Résoudre et discuter : $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in [0, \pi/2]$.

4 Résoudre : $\cos^3 x \cdot \cos 3x - \sin^3 x \cdot \sin 3x = -1/8$.

5 Résoudre : $2\cos x + 4\sin x = \sqrt{15}$.

6 Résoudre : $\cos^3 x + \sin^3 x = 1$.

7 Montrer que l'équation $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0$ possède 18 racines (modulo 2π).

5. ÉQUATIONS DIVERSES A UNE INCONNUE

1 Résoudre : $9^x - 2^{x+1/2} = 2^{x+7/2} - 3^{2x-1}$.

2 Résoudre l'équation : $2^{4\cos^2 x+1} + 16 \cdot 2^{4\sin^2 x-3} = 20$.

3 Quelles sont les heures de la journée où les aiguilles d'une montre sont superposées ?

4 Déterminer les couples d'instants (x, y) de l'après-midi, de midi à minuit, pour lesquels il suffit d'échanger la petite et la grande aiguille en position.

5 Résoudre : $|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x + 2$.

6. SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES NON LINÉAIRES

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{121}{13}$, $x+y=2$.

2 Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$: $x+y=a+b$, $x^3+y^3=a^3+b^3$.

3 Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$: $x^3=ax+by$, $y^3=ay+bx$.

4 Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$: $x^3-3xy^2=x^3-3ab^2$, $y^3-3x^2y=b^3-3a^2b$.

5 Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$: $x\sqrt{1-y^2}=a$, $y\sqrt{1-x^2}=b$.

7. SYSTÈMES DE PLUS DE DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES NON LINÉAIRES

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$: $x^2=y$, $y^2=z$, $z^2=x$.

2 Résoudre: $x+y+z=1$, $1/x+1/y+1/z=1$, $xyz=-4$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x+yzt=2$, $y+xzt=2$, $z+xyt=2$, $t+xyz=2$.

4 Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$: $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $xy=z^2$.

5 Résoudre dans $\mathbb{C}$: $x=y+z$, $x=y^3=z^3$.

6 Résoudre dans $\mathbb{C}$: $x+y+z=1$, $xyz=1$, $|x|=|y|=|z|$.

7 Posant $S_n=x^n+y^n+z^n+t^n$, résoudre $S_1=0$, $S_2=10$, $S_3=0$, $S_4=26$.

8 Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$:
$$y^2+yz+z^2=a^2,\ z^2+zx+x^2=b^2,\ x^2+xy+y^2=c^2.$$

8. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

1 Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$: $\cos x+\cos y=a$, $\sin x+\sin y=b$.

2 Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$: $\cos x+\cos y=a$, $\cos 2x+\cos 2y=b$.

3 Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$: $\cos x+\cos y=a$, $\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 2y=b$.

4 Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$: $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=a$, $\cos 2x+\cos 2y=b$.

5 Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$: $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2y=a$, $\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 2y=b$.

6 Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$: $\cos x+\cos y=a$, $\cos^3 x+\cos^3 y=b$.

7 Déterminer une CNS pour que les équations :

$$a\cos x + b\sin x = c,\ \ a'\cos x + b'\sin x = c'$$

aient au moins une solution commune.

9. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS TRANSCENDANTES NON TRIGONOMÉTRIQUES

1 Résoudre : $7(\log_y x + \log_x y) = 50,\ \ xy = 256.$

2 Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$: $xy = a,\ \ \ln^2 x + \ln^2 y = b.$

3 Les entiers positifs m et n étant donnés, discuter le système :

$$x^{x+y} = y^n, \quad y^{x+y} = x^m.$$

4 Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$: $e^{ax+by} = c, \quad xy = p.$

5 Pour $n \in \mathbb{N}$, a et $b > 0$, résoudre et discuter :

$$a^x b^y = e^{nx-1} + e^{nx+1}, \ \ a^y b^x = e^{ny-1} + e^{ny+1}.$$

6 Discuter sur les réels a et b, $0 < a < b$, du nombre de solutions de :

$$y = a^x, \ \ x = b^y.$$

CHAPITRE 18

Inégalités et inéquations

1. INÉGALITÉS CONCERNANT LES SUITES EN GÉNÉRAL

1 Appelons σ_1, σ_2, σ_3, ... les fonctions symétriques élémentaires des réels $a_1, a_2, a_3, \ldots$, tous dans $[0,1]$. Donc:

$$(1+a_1t)(1+a_2t)(1+a_3t)\ldots = 1+\sigma_1 t+\sigma_2 t^2+\sigma_3 t^3+\cdots$$

Posant $p = \prod_{k=1}^{n}(1-a_k)$, montrez que $p \leqslant 1$, $p \geqslant 1-\sigma_1$, $p_2 \leqslant 1-\sigma_1+\sigma_2$, $p_3 \geqslant 1-\sigma_2+\sigma_3-\sigma_3, \ldots$

2 Soit $x=(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels $\geqslant 0$. Posant $A_n(x)=(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$ et $G_n(x)=(x_1x_2\ldots x_n)^{1/n}$, montrez d'abord, de proche en proche, que $G_2(x)\leqslant A_2(x)$, $G_4(x)\leqslant A_4(x)$, ..., $G_{2^k}(x)\leqslant A_{2^k}(x)$. En déduire alors que $G_n(x)\leqslant A_n(x)$ pour tout $n\geqslant 1$, en observant l'existence d'un plus petit entier k tel que $2^k\geqslant n$, avec lequel, posant pour abrégé $a=A_n(x)$, on aura, grâce à ce qui précède:

$$(x_1x_2x_3\ldots x_n aaa\ldots a)^{1/2^k} \leqslant \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n+(2^k-n)a}{2^k},$$

ce qui fournira, après réduction, l'inégalité demandée.

3 Si $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{-1}\right) \geqslant n^2$.

4 Si une suite $a_n > 0$ satisfait pour tout $n \geqslant 0$ à: $a_{n+1}^2 \geqslant a_0+a_1+\cdots+a_n$, alors existe une constante $C>0$ telle que $a_n \geqslant Cn$ pour tout n.

2. INÉGALITÉS CONCERNANT CERTAINES SUITES PARTICULIÈRES

1 Pour tout entier $n\geqslant 1$, on a: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2.$ $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

2 Pour tout entier $n\geqslant 1$, on a: $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < 1/\sqrt{n} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$. En déduire la partie entière de $1+1/\sqrt{2}+1/\sqrt{3}+\cdots+1/\sqrt{10\,000}$.

3 Pour tout entier $n\geqslant 1$, on a: $1/(n+1)+1/(n+2)+\cdots+1/(3n+1)>1$.

4 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \dots + \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n+1} < \frac{2}{3}.$$

5 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\sqrt{2}.\sqrt[4]{4}.\sqrt[8]{8}.\dots.\sqrt[2^n]{2^n} \leqslant n+1$.

3. INÉGALITÉS RATIONNELLES

1 Pour tous réels $a, b, c > 0$, on a : $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$, avec égalité ssi $a = b = c$.

2 Si a, b, c, d sont des réels non nuls satisfaisant à $a+b+c+d = 0$ *et* $a^3+b^3+c^3+d^3 = 0$, alors deux sont positifs et deux sont négatifs.

3 Pour tout réel $x \geqslant 0$ et tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}}{n + (n-1)x + \dots + 2x^{n-2} + x^{n-1}} \leqslant n.$$

Cas d'égalité ?

4 Pour $0 \leqslant a < b < c$ et $x > 0$, on a toujours :

$$(a + bx + cx^2)^2 \leqslant (a + b + c)^2 \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + x^4\right).$$

Généraliser.

4. INÉGALITÉS ALGÉBRIQUES IRRATIONNELLES

1 Pour tout $x > 0$, on a : $0 < \sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2 < \frac{5}{81}x^3$.

2 Pour tout réel $x \geqslant 0$ et tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$x^n + (1 + 2x)^{n/2} \leqslant (1 + x)^n.$$

3 Montrer que :

$$\inf_{x,y>0} \sqrt{x+y}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = 2\sqrt{2}.$$

4 On considère toutes les fonctions polynomiales $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, réelles, telles que $|f(x)| \leqslant 1$ si $|x| \leqslant 1$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|a| \leqslant C$, dont on déterminera la meilleure valeur possible.

5. INÉGALITÉS LOGARITHMIQUES ET EXPONENTIELLES

1 Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, \delta]$, on ait :

$$1 + x < -\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} < 1 + x + x^2.$$

Comment déterminer le sup de ces δ ?

2 Pour tout réel x, on a $|e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2}.\, e^{|x|}$.

3 Pour tous réels positifs x et y, on a :

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)^y < e^x < \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{x+y}.$$

4 Pour x suffisamment grand, on a $(x+1)^x < x^{x+1}$. Comment déterminer l'inf de ces x ?

6. INÉGALITÉS TRIGONOMÉTRIQUES

1 Pour tout x réel, on a $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

2 Déterminer la plus petite constante $C > 0$ pour laquelle, quels que soient les réels x et y, on ait : $|\sin^2 2x - \sin^2 2y| \leqslant C|\sin x - \sin y|$.

3 Pour tout $x \in]0, \pi/3[$, on a : $x + x^3/3 < \operatorname{tg} x < x + x^3$.

4 Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{n}(|\cos 1| + |\cos 2| + \cdots + |\cos n|) \geqslant \frac{1}{4}.$$

7. INÉGALITÉS DE L'ARITHMÉTIQUE

1 Si $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n, alors $d(n) \leqslant 2\sqrt{n}$.

2 Soit $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$ la suite des nombres premiers. Alors $\prod_{p_i \leqslant n} p_i \leqslant 4^n$.

3 L'indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ jouit de la propriété $\varphi(n) \leqslant n - \sqrt{n}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

4 Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de l'entier $n \geqslant 1$, et $\varphi(n)$ l'indicatrice d'Euler. Alors, pour tout $n \geqslant 2$, on a $\varphi(n).d(n) \geqslant n$.

8. INÉGALITÉS AVEC LA PARTIE ENTIÈRE

1 Pour tout réel $x \geqslant 0$ et tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$[nx] \geqslant [x] + \frac{1}{2}[2x] + \frac{1}{3}[3x] + \cdots + \frac{1}{n}[nx].$$

2 Pour tous entiers positifs a, b, k, l, n, on a :

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \left[\frac{a+b+k}{n}\right] - \left[\frac{a+k}{n}\right] - \left[\frac{b+k}{n}\right] + \left[\frac{k}{n}\right] \right\} \geqslant 0.$$

3 Si p, q, n sont des entiers, $p, q \geqslant 1$, $n \geqslant 2$, on a :

$$\left[\frac{pq}{n}\right] \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{p+i}{n}\right]\left[\frac{q+i}{n}\right] \leqslant \left[\frac{pq}{n}\right] + \left[\frac{n+3}{4}\right].$$

4 Prouver l'existence ou la non-existence de constantes A et B strictement positives telles que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on ait :

$$An^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\left[\frac{n}{k}\right]\right] \leqslant Bn^2.$$

9. INÉGALITÉS INTÉGRALES

1 Pour $e < a < b$, on a : $\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} < \frac{2b}{\ln b}$. Tâchez d'affiner cette inégalité.

2 Si pour $x \in \mathbb{R}$ on a $|f(x) + f'(x)| \leqslant 1$, alors $|f(x) - e^{-x} f(0)| \leqslant |1 - e^{-x}|$.

3 Soit f une fonction continue strictement croissante sur $[0,a]$, avec $f(0) = 0$. Appelant g sa réciproque, et $b = f(a)$, montrer que pour tout $x \in [0,a]$ et $y \in [0,b]$, on a : $xy \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^y g(u)\mathrm{d}u$.

4 Soit $f_0(x) > 0$ pour tout $x \geqslant 0$. On pose $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Montrer que, pout tout $x > 0$, on a :

$$\frac{f_n(x)}{x^n} > \frac{f_{n+1}(x)}{x^{n+1}}.$$

10. INÉQUATIONS ALGÉBRIQUES A UNE INCONNUE

1 à 4 Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$: (1) $\sqrt{mx+1} \geqslant x$. (2) $\sqrt{x^2-1} < x + m$. (3) $\sqrt{7x-13} > \sqrt{3x-19} + \sqrt{5x-27}$. (4) $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$.

5 Résoudre $\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x+1} \leqslant \sqrt{x}$.

11. INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES A UNE INCONNUE

1à4 Résoudre : (1) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$; (2) $\cos x . \cos 2x . \cos 4x \geqslant 1/8$; (3) $\operatorname{tg} x + \sin x \leqslant 1$; (4) $\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x \leqslant \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x$.

5à6 Résoudre et discuter :
(5) $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x \geqslant m$; (6) $\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x \geqslant m$.

12. INÉQUATIONS NI ALGÉBRIQUES, NI TRIGONOMÉTRIQUES A UNE SEULE INCONNUE

1 Résoudre, dans $\mathbb{R}$: $|2x+6| + |3x-12| + x \leqslant 20$.

2 Pour tout entier $n \geqslant 0$, résoudre l'équation :
$$|x| + |x-1| + |x-2| + \dots + |x-n| \leqslant n.$$

3 Résoudre et discuter, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $[2x] + [3x] \leqslant p$.

4à5 Résoudre dans $\mathbb{R}$: (4) $|x-1| + [x] + \sqrt{x} = 10$. (5) $|x^2-1^2| + |x^2-2^2| + |x^2-3^2| \leqslant \lambda$.

6 Désignons la distance de x à l'entier le plus proche par $\delta(x)$. Résoudre et discuter l'inéquation : $\delta(x^2) + \delta(x) \leqslant \lambda$.

13. INÉQUATIONS A PLUSIEURS INCONNUES

1 Déterminer les couples d'entiers (x, y) tels que :
$$y - |x^2 - 2x| \geqslant 0 \text{ et } y + |x-1| \leqslant 2.$$

2 Déterminer les régions du plan pour lesquelles $\log_x(\log_y x) > 0$.

3 Discuter l'ensemble des couples (a, b) tels que l'équation $a\cos x + b\sin x = 1$ possède deux solutions x_1 et x_2 dans $[0, 2\pi[$, pour lesquelles $|x_2 - x_1| = \pi/3$.

4 Quel est l'ensemble des points (x, y) du plan pour lesquels, quel que soit $\theta \in [0, \pi]$, on ait : $x + y\cos\theta + \cos 2\theta \geqslant 0$?

5 Représenter graphiquement dans le plan, par des hachures, les solutions de :
$$\begin{cases} \cos y - \cos x > 0 \\ \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x > 0. \end{cases}$$

6 Régionner le plan par $||x+1| - |y-1|| \leqslant 1$.

CHAPITRE 19

Équations fonctionnelles

1. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET LEURS PARENTES

1 Résoudre : $4xy'' + 2y' - y = 0$, en posant $x = t^2$.

2 Montrer que le polynôme $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} x^k$ satisfait à une certaine équation différentielle du premier ordre que l'on déterminera.

3 Déterminer les fonctions f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que la tangente en $M_0(x_0, y_0)$ de la courbe représentative coupe Oy en un point d'ordonnée $-x_0$.

4 Etant donné a et b, réels, résoudre $f'(x) = bf(a-x)$.

5 Déterminer les fonctions f telles que $f(x) = f''(-x)$.

6 Déterminer toutes les fonctions $f(x)$, dérivables sur $\mathbb{R}$, et telles que : $f'(x).f(-x) = 1$.

2. ÉQUATIONS FONCTIONNELLES AVEC UN SEUL ARGUMENT

1 Quelles sont les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x) + f(2x) = 0$ pour tout x ?

2 Les seules fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, telles que $f(2x) = f(x)$, sont les constantes.

3 Quelles sont les fonctions $f \in \mathcal{C}([0, \infty[)$ telles que $f(x^2) = f(x)$ pour tout x ?

4 On suppose f *continue* de $[0,1]$ dans $[0,1]$, telle que $f \circ f = f$, et soit K l'ensemble des points fixes x de $f : f(x) = x$. (1) Montrer que $K \neq \phi$. (2) K est-il un intervalle ? (3) Si f est *dérivable*, montrer que K est soit réduit à un point, soit égal à $[0,1]$ tout entier.

5 Déterminez les fonctions dérivables f telles que $2f^2(x) + f((\pi/2) - 2x) = 1$ pour tout x.

6 Déterminer toutes les fonctions f, continûment dérivables, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que $(f \circ f)(x) = ax + b$, pour tout x, avec a et b donnés, différents de $-1, 0, 1$.

7 Soit a et b des réels >0. Déterminer la forme générale des fonctions f telles que $f(ax)=bf(x)$ pour tout $x>0$.

3. ÉQUATIONS FONCTIONNELLES AVEC DEUX ARGUMENTS

1 On se propose d'étudier les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous x et y réels, on ait $f(x+y)=f(x).f(y)$. Démontrer les propriétés suivantes: (1) S'il existe un point où f n'est pas nulle, alors f est non nulle partout. (2) S'il existe un point où f est continue, alors f est continue partout. (3) La seule fonction f, continue en 0, telle que $f(0)=1$, est la fonction exponentielle.

2 Soit f, définie sur $[0, \infty[$, à valeurs strictement positives, *décroissante*, telle que $f(x+y)=f(x).f(y)$ pour tous x et y positifs. Montrer que $f(x)$ a la forme ae^{-bx}, où a et b sont des constantes >0.

3 Déterminez de plusieurs manières les fonctions f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues en 0, et telles que, pour tous x et y, on ait :

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x).f(y)}.$$

4 Déterminez les solutions dérivables f de $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$.

4. ÉQUATIONS FONCTIONNELLES DÉFINIES AU MOYEN D'UNE INÉGALITÉ

1 Déterminer les fonctions f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, satisfaisant à $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$ pour tous x et y, et telles que $f(x)/x$ admette une limite égale à 1 en $x=0$.

2 Sur $[0,1]$, on suppose que $f(x)\geqslant 0$ et $f(1)=1$. De plus, pour $x\geqslant 0$, $x'\geqslant 0$, $x+x'\leqslant 1$, on a $f(x)+f(x')\leqslant f(x+x')$. (1) Montrer que $f(x)\leqslant 2x$. (2) Peut-on améliorer ce résultat ?

3 Soit f une fonction positive, définie et continue sur $[0,1]$, pour laquelle existe une constante $C>0$, telle que $f(x)\leqslant C\int_0^x f(t)\,dt$ pour tout x. Montrer que f est la fonction nulle.

4 Montrer que $f(x)=|\sin x|$ satisfait à $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$. Chercher plus généralement les solutions f de l'inégalité précédente sachant que $f(0)=0$ et $f(a)=0$ pour un certain $a>0$.

5 Toute fonction f continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$, satisfaisant à $|f(x)-f(y)|\geqslant$ $\geqslant|x-y|$ pour tous x et y, est nécessairement l'identité.

6 Etudier les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe $C = C_f > 0$ avec le... pour tous x et y, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C_f \,.\, |\sin x - \sin y|.$$

7 Soit a un réel $\geqslant 0$, et soit E l'ensemble des fonctions continues f telles que, pour tous réels u et v, on ait :

$$|f(u+v) - f(u) - f(v)| \leqslant a.$$

D'autre part, soit F l'ensemble des fonctions continues g pour lesquelles existe $c = c_g > 0$ avec lequel on a, pour tout x :

$$|f(x) - cx| \leqslant a.$$

Montrer que $E \subset F$. La réciproque est-elle vraie ?

5. ÉQUATIONS INTÉGRALES

1 Déterminer les fonctions f continues, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tous x et y :

$$(y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2 Déterminer les fonctions f continues, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que, pour tous x et y, on ait :

$$f(x) - f(y) = \int_{x+2y}^{2x+y} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3 Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que, pour tout x :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{3}\,(f(x) + 2f(0)).$$

4 La fonction g étant donnée, déterminer f telle que :

$$f(x) = g(x) + \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5 Déterminer toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

CHAPITRE 20

Fonctions vectorielles et cinématique

1. FONCTIONS VECTORIELLES

1 Les fonctions $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ étant dérivables, montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

2 Soit $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ telle que $x = t$, $y = \cos t$, $y = \sin t$. Montrer que l'on ne peut pas écrire de formule des accroissements finis pour :

$$f(\pi/2) - f(0) = (\pi/2) f'(c), \quad \text{où } c \in]0, \pi/2[.$$

Y a-t-il des couples (a, b) où c'est possible pour $f(b) - f(a)$?

3 Ecrivant (a, b, c) pour le produit mixte, montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f, g, h) = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, g, h\right) + \left(f, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}, h\right) + \left(f, g, \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right).$$

4 La tangente à une conique à centre est toujours l'une des bissectrices des rayons vecteurs focaux. Généraliser à d'autres courbes.

2. MOUVEMENTS RECTILIGNES

1 Deux mobiles M et M' se déplacent à vitesses constantes v et v' sur une droite. Le point M envoie chaque seconde un projectile vers M'. Montrer que M' reçoit en général les projectiles à intervalles de temps réguliers, que l'on déterminera.

2 Soient D et D' deux droites sécantes, d'angle α, sur lesquelles se déplacent deux points M et M', animés d'un mouvement uniforme. Quel est le minimum de la distance MM' ?

3 Montrer que le mouvement rectiligne d'équation :

$$x = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

est un mouvement sinusoïdal simple, dont on déterminera amplitude et phase. Généraliser.

4 *Une bien curieuse conductrice* – Un couple prend l'autoroute pour y un parcours de 250 km. La distance est finalement couverte en 2 voiture étant conduite par la femme. Or, pendant tout le trajet observe avec stupeur que, sur tout laps de temps d'une heure, qu sa compagne effectue 90 km *exactement*. Que faut-il penser de la co et de sa conduite ?

5 Devant vous, à un passage à niveau, arrive à grande vitesse un ra moment du passage, le son émis passe brusquement de sol_3 à mi b_3 (Doppler-Fizau). Quelle est la vitesse du train ?

3. MOUVEMENTS CIRCULAIRES

1 Deux points M et M' décrivent deux cercles égaux de centres O et O', tangent extérieurement, à vitesses égales, de telle sorte que $(OM, O'M') = \pi/2$. Etudie le mouvement du milieu de MM'.

2 Deux points M et M' décrivent deux cercles égaux à vitesses égales. Quel es le lieu du milieu de MM' ?

3 Un disque blanc porte un rayon noir OA. Il effectue 60 tours à la second et il est visible grâce à des éclairs qu'il reçoit périodiquement à raison de 5 à la seconde. Déterminer le mouvement apparent de OA.

4 Dans le plan, un carré roule sans glisser sur une droite. Déterminer la trajec toire du centre de ce carré, et, plus généralement, de tout point qui lui es solidaire. En supposant que la trajectoire du centre du carré est parcouru d'un mouvement *uniforme*, étudier la vitesse de rotation instantanée du pla de ce carré mobile en fonction du temps.

4. MOUVEMENTS DIVERS

1à3 Etudiez le mouvement :

(1) $x = (t+1)^2$, $y = (t-1)^2$; (2) $x = \cos 2t$, $y = \cos 3t$; (3) $x = 3t^2$, $y = 3t - t$

4 Un point M a pour mouvement $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, et M' le mouv ment $x = A \cos t$, $y = A \sin t$, $z = Bt$. Commentez le mouvement du milie de MM'.

5 Quel est l'hodographe d'un mouvement hélicoïdal uniforme. Réciproqu

6 Etant donné un cercle (C) de diamètre AB vertical, B en bas, de centre O de rayon R, on tire d'un point M de ce cercle avec un canon pointé vers de telle sorte que l'obus vienne toucher B sous l'effet de la pesanteu Négligeant la résistance de l'air, montrer que le temps mis par l'obus atteindre B est $\sqrt{2R/g}$ pour tout $M \in (C)$.

Imprimerie LOUIS-JEAN, 05002, GAP Dépôt légal : N° 272 – 2e tr

Imprimé en France

Exercices supplémentaires pour la 2^e^ édition donnés depuis 1978

ENSEMBLES ET LOGIQUE

- Soit E un ensemble infini et Δ la diagonale de $E \times E$. Montrer que $E \times E \setminus \Delta$ ne saurait être une union finie de *pavés.*

- Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, monotone, a un ensemble de discontinuités au plus dénombrable.

- Toute fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est intégrable ($\mathcal{R}$) si l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable.

- Si dans une galerie de n tableaux, $n \geqslant 3$, il existe, pour chaque ensemble de 3 tableaux, une position d'où l'on peut voir ces 3 tableaux, alors il existe une position d'où l'on peut voir les n tableaux.

COMBINATOIRE

- Montrer que le nombre d'applications f d'un ensemble à n éléments dans lui-même, telles que $f \circ f = f$, vaut $\sum_k \binom{n}{k} k^{n-k}$.

PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

- Quatre points sont choisis au hasard sur une sphère. Montrer que la probabilité pour qu'ils appartiennent à un même hémisphère vaut 1/8.

TRIGONOMÉTRIE, NOMBRES COMPLEXES ET APPLICATIONS

- Déterminer a et $b \geqslant 0$ tels que les racines de $z^2 + az + b + ia = 0$ soient de parties réelles $\leqslant 0$.

- Quelle est, selon $r > 0$, la forme des ensembles E_2 des z tels que $\left|z - \frac{1}{z}\right| = r$?

- Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos kx \,.\, \cos (k+1)x}$.

- Calculer $\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} \sin\left(\frac{x}{3^k}\right)$.

- Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin(2^k x)}$.

ARITHMÉTIQUE

- Si $2^n + 1$ est composé, $2^n + 1 = ab$, alors a et b ont même exposants de 2.

- Par combien de zéros base se termine $1\,000\,!$ base 10.

ALGEBRE GÉNÉRALE ET POLYNOMES

- L'opération $*$ sur $\mathbb{N}$ définie par $a * b = a + b + 2\,[\sqrt{a}]\,.\,[\sqrt{b}\,]$ est associative.

- Il existe 5 groupes d'ordre 8.

- Il ne peut pas exister de corps à 6 éléments.

- Soit $P_n(x) = 1 + xP_{n-1}^2(x)$, $n \geqslant 1$, $P_0 = 1$. Montrer que le coefficient dans x^k dans $P_n(x)$ vaut $\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$.

- Déterminer le quotient et le reste de $(x^2 - 1)^n$ par $x^2 - 2x\cos\varphi + 1$.

- Montrer qu'il y a 13 polynômes $P(x) = (x - a)(x - b)$ divisant $P(x^3)$ (dans $\mathbb{C}$).

- L'endomorphisme $\varphi = f(P)$ qui à tout polynôme $P(x)$ associe $Q(x) = \sum a_n P^{(n)}(x)$ est bijectif ssi $a_0 \neq 0$. Explicitez P en fonction des $\varphi^{(n)}$ dans les cas suivants : (1) $a_n = 1$; (2) $a_n = n + 1$; (3) $a_n = \frac{1}{n\,!}$.

ALGEBRE LINÉAIRE

- Déterminer les matrices 3×3 orthogonales à coefficients rationnels.

ESPACES AFFINES EN GÉNÉRAL

- Préciser la transformation qui du point M de coordonnées barycentriques (α, β, γ) fait passer à $M'(\beta + \gamma, \gamma + \alpha, \alpha + \beta)$.

ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

GÉOMÉTRIE PLANE (AFFINE EUCLIDIENNE)

- Déterminer les isométries conservant l'astroïde.

- Les 3 points d'intersection des trisectrices d'un triangle forment un triangle équilatéral.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE (AFFINE EUCLIDIENNE)

- Intersection d'un cône de révolution d'axe vertical avec un plan de bout parallèle à une génératrice.

- Étude $S_3 \circ S_2 \circ S_1$, composition des demi-tours autour des droites D_1 $(y = a, z = 2a)$, D_2 $(z = a, x = 2a)$, D_3 $(x = a, y = 2a)$.

- Comment faut-il choisir a pour que les symétriques de $M(1, 1, a)$ par rapport aux plans : $x + y = 1, y + z = 1, z + x = 1, x - y + z = 10$, soient coplanaires ?

- On se donne un parallélépipède rectangle $ABCDA'B'C'D'$. Déterminer le produit des 3 demi-tours d'axes AB, $B'C'$, DD'.

- Peut-on choisir $\vec{a}$ et (λ, μ) afin que $f(\vec{u}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{a} + \mu(\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{a}$ soit une isométrie vectorielle ?

CERCLES ET CONIQUES

- Ensemble des isobarycentres des triangles dont les côtés sont orthogonaux à une parabole donnée.

- Quel est l'ensemble des milieux des cordes de l'arc de parabole $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$?

- Quel est l'ensemble des milieux des cordes d'un demi-cercle ?

- L'ensemble des foyers des paraboles tangentes à 3 droites données décrit le cercle circonscrit au triangle de ces droites.

- Les tangentes d'inflexion de $y = \dfrac{\sin x}{x}$ touchent une certaine ellipse.

NOMBRES RÉELS ET ÉLÉMENTS DE TOPOLOGIE

- Calculer $\inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \{ \sup\limits_{x \in [0,1]} (|x^2 - ax - b|) \}$

- Toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est une norme euclidienne.

SUITES

- Étudier la suite (x_n) telle que $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-x_n \sin t}\, dt$.

- Soit (a_n) et (b_n) deux suites > 0 ; on pose $c_n = \dfrac{a_n^3 + b_n^3}{a_n^2 + b_n^2}$; les propositions : $\lim a_n = \lim b_n = 0$, et $\lim c_n = 0$ sont-elles équivalentes ?

- Étudier les suites $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n - x^{2n}}{1-x}\, dx$ et $J_n = \int_0^1 \dfrac{1 - x^{2n}}{1+x}\, dx$.

- Soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k \sin(kx)$ et D la partie de $\mathbb{R}$ où cette suite de fonctions converge. Montrer que la fonction limite est elle-même bornée sur D.

- Montrer l'existence pour tout entier $n \geqslant 1$ de $x_n > 0$ tel que :
$$\int_0^{x_n} \frac{t^n}{1+t}\, dt = \ln(1 + x_n).$$

- Étudier $u_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2 + E(\frac{n}{k})}$

- On se donne (a_n) et (b_n) telles que $|a_n| + |b_n| \leqslant C < 1$. Étudier (u_n) et (v_n) telles que :
$$u_{n+1} = a_n u_n + b_n \sin v_n, \quad v_{n+1} = a_n v_n + b_n \sin u_n.$$

- Soit $u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$. Étudier les suites u_n, $\sum_{k=1}^{n} u_k$, $\sum_{k=1}^{n} k u_k$.

- Pour $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, continue, étudier :
$$F_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

- Soit $a = \sqrt{2} - 1$; montrer qu'il existe, pour tout entier $n \geqslant 1$ un entier k tel que $a^n = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle $S(n)$ la somme des chiffres de n. Étudier :
$$\frac{S(n+1)}{S(n)} \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{S(n)}.$$

- Calcul numérique de $\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^2 + 1}$ par accélération de la convergence.

- Soit $f(z) = \frac{1}{2}(z + |z|)$, $z_0 \in \mathbb{C}^*$, $z_{n+1} = f(z_n)$. Alors $z_n \to \dfrac{\operatorname{Im} z_0}{\operatorname{Arg} z_0}$.

- Étudier $x_{n+1} = \sqrt[n]{n + x_n}$ pour $n \geqslant 1$, avec $x_1 > 0$.
- Étudier la suite $x_{n+2} = \sqrt{2x_n + 3x_{n+1}}$, $1 < x_0 < x_1$.
- Étudier $u_n = n^{-3/2} \sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)$.

FONCTIONS

- Étudier $x = x(t)$ telle que $x^3 + tx - e^t = 0$.
- Étudier $y = f(x)$, telle que $\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-2} + \frac{1}{y-3} = x$, y étant le plus grand possible.
- Étudier $H(x) = \max_{|t| \leqslant 1} [f(t) + x\,g(t)]$, où $f(t) = t^4 - 2t$, $g(t) = 4t^2$.
- Étudier $f(x) = |x - x^2|^{1/x}$:
- Il existe une unique fonction f continue telle que $\int_x^{f(x)} e^{t^2}\,dt = 1$.
- Étude de $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{R}$, telle que $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^2}{q+1}$, où $\frac{p}{q}$ est irréductible. Étudier $\lim_{x \to a} f(x)$.
- Une entreprise fabrique des coupes et des trophées avec des bénéfices respectifs de 10 F et 20 F à l'unité. Trouver la production qui maximise le bénéfice, connaissant diverses contraintes (stock, proportion, etc.).
- Formule de Taylor avec reste intégral. Application à $e^x = \sum_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- S'il existe $a = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x^2)}{x}$, f est-elle dérivable en 0 ?
- Si $f(x) \geqslant 0$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il en est de même de $\sqrt{f}$.

INTÉGRALES

- Étudier $f(x) = \int_0^{\pi} |\sin t - xt|\,dt$.
- Étudier $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^3 - 1}}$.

■ Étudier $f(x)=\int_0^1 t^{xt}\,dt$. Discuter d'un développement en série.

■ A tout $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2^n}$, $\varepsilon_n=0$ ou 1, on associe $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{3^n}$. Intégrabilité de f?

■ Calculer $I_n=\int_0^{\pi}\frac{\cos nx-\cos na}{\cos x-\cos a}\,dx$, en discutant.

■ Étudier (f_n) telle que $f_0=1$ et $f_{n+1}(x)=1+\int_0^x f_n(t-t^2)\,dt$, pour tout $x\in[0,1]$.

■ Soit E l'ensemble des fonctions continues $f>0$ sur $[0,1]$. On pose $C(f)=(\int_0^1 f(t)\,dt)\,.\,(\int_0^1\frac{dt}{f(t)})$. Calculer $\inf_{f\in E} C(f)$ et $\sup_{f\in E} C(f)$.

■ Si f a sa dérivée quatrième $f^{(4)}$ continue sur $[0,1]$, de borne supérieure $\|f^{(4)}\|$, et avec $a=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}$, on a :

$$\left|\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{3}\{f(a)+f(b)+f(c)\}\right|\leqslant\frac{\|f^{(4)}\|}{1\,000}.$$

■ A toute fonction f indéfiniment dérivable sur $[0,1]$, on associe $F(x)=\int_0^1 t^{x-1}f(t)\,dt$, $x>0$.

Montrer, par des intégrations par parties successives, que pour tout entier $k\geqslant 1$, en posant $\langle x\rangle_j=x(x+1)(x+2)\ldots(x+j-1)$, on a :

$$F(x)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{f^{(j-1)}(x)}{\langle x\rangle_j}+\frac{(-1)^k}{\langle x\rangle_k}\int_0^1 f^{(k)}(t)\,.\,t^{x+k}\,dt.$$

Application de cette formule au développement limité de $F(x)$ pour $\frac{1}{x}\to 0$.

ÉQUATIONS

■ Déterminer les couples $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que les racines de $z^2+bz+c=0$ soient de modules $\leqslant 1$.

■ Montrer que :

$$\begin{cases}\cos a+\cos b+\cos c=0\\ \sin a+\sin b+\sin c=0\end{cases}\quad\text{implique}\quad\begin{cases}\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c=0\\ \sin 2a+\sin 2b+\sin 2c=0\end{cases}$$

■ Déterminer à 10^{-2} près la valeur de x telle que $\int_0^x e^{t^2}\,dt=1$.

INÉGALITÉS ET INÉQUATIONS

- Pour m et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\min(\sqrt[n]{m}, \sqrt[m]{n}) \leqslant \sqrt[3]{3}$.

- En utilisant l'étude de $\ln x \,.\, \ln(1-x)$, montrer que, pour x et $y > 0$, l'inégalité
$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \leqslant 1$$
implique la suivante
$$\frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^y} \leqslant 1.$$

- On appelle $d(x)$ la distance de $x \in \mathbb{R}$ à $\mathbb{Z}$, et l'on pose :
$$f_n = \sum_{k=1}^{n} k d(kx).$$
Alors $f(x) \leqslant n$.

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

- Déterminer f satisfaisant à $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ pour tout (x, y), et telle que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

- Déterminer les f telles que $f'^2(x) = 4f(x)$.

- Résoudre $y' + |y| = -1$.

- Résoudre $y'' + |y| = 0$.

FONCTIONS VECTORIELLES ET CINÉMATIQUE

- Étudier le mouvement de trajectoire $y^2 = 2px$ et d'hodographe :
$$x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$