Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Relizane — Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de MI, 1 ère année MI — Année universitaire:2022-2023

Module : Analyse 2, Session : Normale — Durée : 1h30, Date : 16/05/2023

Exercice 1: (7.5 point) Calculer les intégrales suivantes:

1) $I_1(x) = \displaystyle\int \frac{4x+6}{x^2+1}dx,$

2) $I_2(x) = \displaystyle\int x^2 (\ln x)\, dx,$

3) $I_3(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$

Exercice 2: (7.5 point) Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $y'' - 5y' + 6y = x^2 + x + 1$

2) $y' + y = 2e^x$

3) $y'' + y = x.$

Exercice 3: (5 point) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction tel que

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^3(x^2+x+1)}.$$

Ecrire f sur la forme

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{\alpha x + \beta}{x^2+x+1}.$$

Bon courage

Correction

Exercice 1: (7.5 point) On calcule les intégrales suivantes:

$I_1(x) = \int \frac{4x+6}{x^2+1}dx$, ...(2.5)

On a

$$\begin{aligned}
\frac{4x+6}{x^2+x+1} &= 2\frac{2x+3}{x^2+1} \\
&= 2\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+1}\right) \\
&= 2\frac{2x}{x^2+1} + \frac{6}{x^2+1}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= \int \frac{4x+6}{x^2+1}dx \\
&= 2\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{6}{x^2+1}dx \\
&= 2\ln\left(x^2+1\right) + 6\arctan(x) + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$I_2(x) = \int x^2(\ln x)\,dx$........................... (2.5)

par la méthode d'intégration par parties,

on choisit $u'(x) = x^2$ et $v(x) = \ln x$

alors $u(x) = \frac{1}{3}x^3$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

donc

$$\begin{aligned}
\int x^2(\ln x)\,dx &= \frac{1}{3}x^3\ln x + \int \frac{1}{3}x^3\frac{1}{x}dx \\
&= \frac{1}{3}x^3\ln x + \int \frac{1}{3}x^2dx \\
&= \frac{1}{3}x^3\ln x + \frac{1}{9}x^3 + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$I_3(x) = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ .... (2.5)

Par la méthode du changement de variable $y = e^x$

on calcule $F(x) = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^x+1}dx &= \int \frac{1}{y+1}dy \\ &= \ln|y+1| + c, c \in \mathbb{R} \\ &= \ln(e^x+1) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} I_3(x) &= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx \\ &= \ln\left|e^1+1\right| - \ln\left|e^0+1\right| \\ &= \ln\frac{e+1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 2: (7.5 point)

1) $y'' + -5y' + 6y = x^2 + x + 1$............. (E) .... (2.5)

EH: $y'' + -5y' + 6y = 0$

EC: $r^2 - 5r + 6 = 0$

$r_1 = 2, r_2 = 3$

donc la solution générale de (EH):

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Pour chercher une solution particulière

on pose $y_p(x) = ax^2 + bx + c$

alors $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p''(x) = 2a$.

On a $y'' + -5y' + 6y = x^2 + x + 1$

donc $2a - 5(2ax + b) + 6\left(ax^2 + bx + c\right) = x^2 + x + 1$

$6ax^2 + (-10a + 6b)x + 2a + c - 5b = x^2 + x + 1$

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ -10a + 6b = 1 \\ 2a + 6c - 5b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{4}{9} \\ c = \frac{13}{27} \end{cases}$$

donc $y_p(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{13}{27}$

finalement la solution générale de (E) : $y(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{13}{27} + c_1e^{2x} + c_2e^{3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2) $y' + y = 2e^x$....................................... (2.5)

EH: $y' + y = 0$,

la solution générale de (EH):

$y_h(x) = ke^{-x}, k \in \mathbb{R}$.

Solution particulière

$y_p(x) = e^x$

finalement la solution générale de (E) :

$y(x) = e^x + ke^{-x}, k \in \mathbb{R}$.

3) $y'' + y = x$... (2.5)

EH: $y'' + y = 0$

EC: $r^2 + 1 = 0$

$r_1 = i, r_2 = -i$

donc la solution générale de (EH):

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Solution particulière

$y_p(x) = x$

finalement la solution générale de (E) : $y(x) = x + c_1 \cos x + c_2 \sin x, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 3: (5 point) $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^3(x^2 + x + 1)}$.

on écrit f sur la forme

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + x + 1}$$

donc

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{ax^2\left(x^2+x+1\right)+bx\left(x^2+x+1\right)+c\left(x^2+x+1\right)+(\alpha x+\beta)x^3}{x^3\left(x^2+x+1\right)} \\
&= \frac{ax^4+ax^3+a^2+bx^3+bx^2+bx+cx^2+cx+c+\alpha x^4+\beta x^3}{x^3\left(x^2+x+1\right)} \\
&= \frac{(a+\alpha)x^4+(a+\beta+b)x^3+(a+b+c)x^2+(b+c)x+c}{x^3\left(x^2+x+1\right)} \\
&= \frac{x^4+1}{x^3\left(x^2+x+1\right)}
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\left\{\begin{array}{c} a+\alpha=1 \\ a+\beta+b=0 \\ a+b+c=0 \\ b+c=0 \\ c=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha=1 \\ \beta=1 \\ a=0 \\ b=-1 \\ c=1 \end{array}\right.$$

finalement $f(x)=\frac{0}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{x+1}{x^2+x+1}$.