Université de Bordj Bou Arreridj
Faculté des mathématiques et de l'informatique
Département R.O

Examen finale (Analyse 2)
Première Année MI
semestre 2(2022/2023)

Documents et téléphones portables sont strictement interdits **Durée :1h.30mn**

Exercice 1 (Questions de cours) : (7pts)

1) Calculer en utilisant la limite de la sommme de Darboux inferieure l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^a x^2 dx, \quad \text{où} \quad a > 0.$$

2) Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse :

$$a)\ ch\left(\frac{1}{2}\ \ ln(4)\right) = \frac{5}{4}. \qquad b)\ ln\left(\sqrt{\frac{1-th(x)}{1+th(x)}}\right) = -x.$$

3) Éxpliquer la méthode de résolution de l'équation différentielle de second ordre suivante :

$$ay'' + by' + cy = p(x)e^{\alpha x}, \quad \text{avec} \quad b^2 - 4ac > 0, \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Application : résoudre l'équation : $y'' - y - e^{2x} = 0$.

Exercice 2 : (7 pts)

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int \frac{x+1}{2x^2+x+1} dx \qquad I_2 = \int \frac{arccos^2(2x)}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$K_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

a) Calculer K_1.

b) Montrer, en effectuant une intégration par partie, que : $K_1 = \frac{1}{2} + 2(K_1 - K_2)$.

c) En déduire la valeur de K_2.

Exercice 3 : (6 pts) On considère l'équation de Réccati suivantes :

$$(x^3 - 1)y' - x^2 y - y^2 = -2x........(E.R).$$

1) Vérifier que $y_1 = x^2$ est une solution particuliere de l'équation $(E.R)$.

2) En posant $y = z + y_1$, montrer que z vérifier l'équation de Bernoulli suivante :

$$(x^3 - 1)z' - 3x^3 z = z^2........(E.B)$$

3) Résoudre l'équation (E.B).

4) En déduire la solution générale de $(E.R)$.

BON COURAGE

Corrigé type de l'examen Analyse 2

l'année 2022/2023

Ex01: 7 pts

1) σ_n une subdivision de $[0,a]$ avec : $\sigma_n = \{x_0, x_1, \dots x_k, \dots x_n\}$ et 0,5

$$x_k = \frac{ka}{n}$$

La somme de Darboux inferieure : $S_{inf}(f, \sigma_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) \, (x_{k+1} - x_k)$ 0,5

$$\lim_{n\to\infty} S_{inf}(f, \sigma_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (x_k)^2 \frac{a}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n} \sum_{0}^{n-1} \left(\frac{ak}{n}\right)^2$$ 1

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{n^3} \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) = \boxed{\frac{a^3}{3}} = I$$

2) a) $ch\left(\frac{1}{2} \ln(4)\right) = \frac{5}{4}$ (Vraie) 1

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow ch\left(\frac{1}{2} \ln(4)\right) = ch(\ln\sqrt{4}) = ch(\ln(2))$$

$$= \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

b) $$\ln\left(\sqrt{\frac{1 - Th(x)}{1 + Th(x)}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}\right)$$ 1

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{\frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}}\right) = \frac{1}{2} \ln(e^{-2x}) = -x$$

3) La solution générale : $y_G = y_h + y_p$

La solution homogène y_h : $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$

$$y_h = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$ 0,5

$\left(r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \; r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right.$ les solution de l'équation caractéristique $\{ ar^2 + br + c = 0$ ... (E.C)

- La solution particulières $\boxed{y_p(x) = x^m \varphi(x) e^{\alpha x},\ d^\circ\varphi(x) = d^\circ p(x)}$

- Si α n'est pas une racine de (E.C) $\Rightarrow \boxed{m=0}$ 1
- Si α est une racine simple de (E.C) $\Rightarrow \boxed{m=1}$
- Si α est une racine double de (E.C) $\Rightarrow \boxed{m=2}$

Application $y'' - y = e^{2x}$ .... (1)

l'equation caracteristique : $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1$

$$\boxed{y_h = \lambda_1 e^{x} + \lambda_2 e^{-x}}\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

$y_p = x^m \varphi(x) e^{\alpha x} = x^m . k e^{2x}$ $(d^\circ \varphi(x) = 0)$ 1,5

$\alpha = 2$ est 2 n'est pas une racine de (E,C) $\Rightarrow m = 0$.

$y_p = k e^{2x}$, $y_p' = 2ke^{2x}$, $y_p'' = 4ke^{2x}$

(1) $\Leftrightarrow 4k - k = 1 \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{3}}$ et Donc : $y_p = \frac{1}{3} e^{2x}$

$$\boxed{y_G = y_h + y_p = \lambda_1 e^{x} + \lambda_2 e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}}$$

Exo2 (7 pts)

I) $I_1 = \int \frac{x+1}{2x^2+x+1} dx$, $\varphi(x) = 2x^2+x+1$, $\Delta = -7 < 0$

$$I_1 = \frac{1}{4}\int \frac{4x+4}{2x^2+x+1} dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1} dx + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{2x^2+x+1}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2+x+1| + \frac{3}{4}\int \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 + \frac{7}{16}} dx \quad \text{.... } 0,5$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2+x+1| + \frac{3}{8}\int \frac{1}{\frac{7}{16}\left[\frac{16}{7}(x+\frac{1}{4})^2 + 1\right]} dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2+x+1| + \frac{6}{7}\int \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2 + 1} dx. \quad \text{.... } 0,5$$

$t = \frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4}) \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{7}}{4} dt$

$$I_1 = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+x+1\right| + \frac{6}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$ ---------- (0,5)

$$= \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+x+1\right| + \frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)+C$$ — (0,5)

$$I_2 = \int \frac{\arccos^2(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

Posons : $t = \arccos(2x)$, alors : $-\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = dt$ ---- (1,5)

$$I_2 = \int -\frac{1}{2}t^2\,dt = -\frac{1}{2}\frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{6}\arccos^3(2x) + C$$

II) a) $K_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ ---- (1)

b) On pose : $\begin{cases} U = \dfrac{1}{(1+x^2)} \\ V' = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} U' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} \\ V = x \end{cases}$ ---------- (0,5)

Donc : $K_1 = \left[\dfrac{x}{1+x^2}\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$ ---------- (0,5)

On a : $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{x^2+1}{(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{(1+x^2)^2} = K_1 - K_2$ ---------- (0,5)

Donc : $\boxed{K_1 = \frac{1}{2} + 2(K_1 - K_2)}$

c) On a : $K_1 = \dfrac{1}{2} + 2(K_1 - K_2)$ ---------- (1)

D'où : $K_1 = \dfrac{1}{2} + 2K_1 - 2K_2$

$$2K_2 = \frac{1}{2} + K_1 \Rightarrow K_2 = \frac{1/2 + K_1}{2} = \boxed{\frac{2+\pi}{8}}$$

Exercice 3 (6 pts)

1) $y_1 = x^2 \Rightarrow y_1' = 2x$, D'où:

$$(x^3-1)y_1' - x^2 y_1 - y_1^2 = (x^3-1)(2x) - x^4 - x^4 = -2x.$$ 1

y_1 vérifie (E.R) donc c'est une solution particulière.

2) En posant $y = z + x^2$ on a $y' = z' + 2x$ D'où:

$$(x^3-1)(z'+2x) - x^2(z+x^2) - (z+x^2)^2 = -2x.$$ 1

$$\Rightarrow x^3 z' - z' + 2x^4 - 2x - x^2 z - x^4 - z^2 - 2x^2 z - x^4 = -2x$$

$$\Rightarrow (x^3-1)z' - 3x^2 z = z^2 \Leftrightarrow$$ c'est une (E.B) avec $m = 2$.

3) On a: $(x^3-1)z' - 3x^2 z = z^2$ . . . (E.B)

$: (x^3-1)\dfrac{z'}{z^2} - 3x^2\dfrac{1}{z} = 1$ . . . (E.B) 1

Posons: $u = \dfrac{1}{z} \Rightarrow u' = -\dfrac{z'}{z^2}$

En remplaçant dans (E.B) on obtient:

$$\boxed{-(x^3-1)u' - 3x^2 u = 1} \quad (1)$$

* L'équation homogène associée est:

$$-(x^3-1)u' - 3x^2 u = 0 \Leftrightarrow \int \frac{du}{u} = \int -\frac{3x^2}{x^3-1}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|u| = -\ln|x^3-1| + c$$ 1

$$\Leftrightarrow \boxed{u = \frac{k}{x^3-1},\ k = e^c = cste}$$

* Par la méthode de la variation de cst on aura:

$$u'(x) = \frac{k'(x)}{x^3-1} - \frac{3x^2 . k(x)}{(x^3-1)^2}$$ 1

Remplaçons dans l'équation (1) on obtient:

$$\boxed{K(x) = -x + c}$$

D'ou la solution de (E.B) est : $U = \dfrac{-x+c}{x^3-1}$, $x \neq 1$

~~[illegible]~~ : $\boxed{z = \dfrac{1}{u} = \dfrac{x^3-1}{-x+c}}$ $\begin{pmatrix} c = cst \\ c \neq x \end{pmatrix}$ 0,5

4) D'après (2) on a : $y = z + x^2 \Rightarrow y = \dfrac{x^3-1}{-x+c} + x^2$

et $y_1 = x^2$ solution particulière de (E.R) 0,5

D'où la solution générale de (E.R) est :

$$y = \frac{x^3-1}{c-x} + x^2 + y_1$$

$$\boxed{y = \frac{x^3-1}{c-x} + 2x^2} \quad \begin{pmatrix} c = cst \\ c \neq x \end{pmatrix}$$

5