جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵙⵉⴷⵉ ⵎⵓⵃⵎⵎⴰⴷ ⴱⵏ ⵄⴱⴷⵍⵍⴰⵀ ⵏ ⴼⴰⵙ
UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES

كلية العلوم والتقنيات فاس
ⵜⴰⵖⵉⵡⴰⵏⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⴰⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⵙⵏⵉⵇⵉⵢⵉⵏ – ⴼⴰⵙ
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE FÈS

INTRODUCTION À L'ALGÈBRE LINÉAIRE

NAJIB MAHDOU

Introduction à l'algèbre linéaire

L'Auteur : Najib MAHDOU

Editeur : Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Faculté Des Sciences et Techniques Fès

: Laboratoire du Modélisation et Structures Mathématiques

Dépôt légal : 2022MO0681

ISBN : 978-9920-30-121-3

Tirage : Imagerie Pub Néon (IPN)- Fès

Tél : +212 5 35 94 20 06

Edition : 2022

Table des matières

A la Mémoire de mes parents :

Brahim Mahdou Lamtiri et Fatima Bent Omar Lamtiri

A ma femme : Chahrazade

A mes enfants : Salah Eddine, Linah et Abderrahmane

A toute ma famille et mes amis.

أسألكم صالح الدعاء

Introduction

L'algèbre linéaire est au centre de mathématiques à la fois pures et appliquées. Par exemple, l'algèbre abstraite se pose en relaxant les axiomes d'un espace vectoriel, ce qui conduit à un certain nombre de généralisations. L'analyse fonctionnelle étudie la version de dimension infinie de la théorie des espaces vectoriels. Combinée avec le calcul, l'algèbre linéaire facilite la solution des systèmes linéaires d'équations différentielles. Les techniques de l'algèbre linéaire sont également utilisées dans la géométrie analytique, de l'ingénierie, la physique, les sciences naturelles, l'informatique, l'animation par ordinateur, et les sciences sociales (en particulier dans l'économie). Parce que l'algèbre linéaire est une théorie bien développée, des modèles mathématiques non-linéaires sont parfois approchés par les linéaires. Bref, bien que l'algèbre linéaire est un sujet relativement neuf par rapport à d'autres pratiques mathématiques, ses utilisations sont très répondues.

L'algèbre linéaire n'est l'objet d'aucune étude générale avant 1840. Le concept des déterminants est initié dès 1748 par Maclaurin colin (Ecosse, 1698 - 1746), Et Gabriel Cramer (Suisse, 1704 – 1753). Ce sont surtout Vandermonde Alexandre Théophile (France, 1735 - 1796) et Laplace Pierre Simon (France, 1749-1827) qui développent la notion.

En 1841, le mathématicien anglais Arthur Cayley (1821 - 1895) publie la première contribution anglaise à la théorie des déterminants. Dans cet article, il a utilisé deux lignes verticales de chaque côté du tableau pour désigner le déterminant, une notation qui est devenue la norme.

On considère souvent Arthur Cayley comme l'inventeur des matrices. Surtout avec la publication de l'un de ces articles sur les matrices en 1858 dans « Philosophical Transactions (Londres) » journal, que la notion de matrice prend tout son sens. Les matrices deviennent alors une entité distincte du déterminant et sont étudiées comme telle. Il définit la somme et le produit de deux matrices, la transposée, donne l'inverse d'une matrice (3,3) à l'aide des cofacteurs et introduit les matrices symétriques et antisymétriques.

Avec le tournant dans le 19ème siècle, le mathématicien allemand Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) a introduit une procédure à suivre pour résoudre un système d'équations linéaires. Les travaux de Gauss sont maintenant nommés la méthode du « pivot de Gauss » ou « élimination de Gauss-Jordan ». Aussi en 1801 dans « Disquisitiones arithmeticae », il a travaillé sur les formes quadratiques.

Pour préparer son enseignement à l'école polytechnique, le mathématicien français Cauchy Augustin-Louis (1789 – 1857) introduit en 1826 le polynôme caractéristique d'une matrice, et il a donc trouvé les valeurs propres comme racines de ce polynôme et a donné les résultats sur une diagonalisation d'une matrice particulière. Cauchy à aussi introduit la notion de matrices semblables. Il a également, dans le cadre des formes quadratiques, prouvé que chaque matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Le mathématicien Alemand Ferdinand Goerg Frobenius (1849 – 1917), en 1878, a écrit un important travail sur les matrices concernant les substitutions linéaires et les formes bilinéaires. Ce papier de 1878 contient également la définition du rang d'une matrice qu'il a utilisé dans son travail sur les formes canoniques et la définition des matrices orthogonales. Il a aussi donné la première démonstration complète du théorème de Cayley-Hamilton.

Ce livre a été élaboré à partir des cours et travaux dirigés de l'algèbre linéaire donnés par l'auteur. C'est le fruit de plusieurs années d'expérience de l'enseignement de l'algèbre linéaire en licences scientifiques et de réflexion sur cet enseignement. L'accent a été mis sur la clarté et la simplicité de la présentation des notions abordées. On a donc fait en sorte que sa lecture ne demande pas d'autres connaissances que celles qu'on pourrait acquérir dans un Baccalauréat scientifique.

Le livre est divisé en six chapitres. Le premier chapitre est consacré à la notion d'espace vectoriel. Le second aborde la notion d'application linéaire. Au chapitre trois, on étudie les matrices et le chapitre quatre traite la notion du déterminant. Ensuite, le chapitre cinq traite les systèmes d'équations linéaires. Enfin, au chapitre six, en traite la réduction des endomorphismes et des matrices carrées.

Notons que chaque chapitre est achevé par des exercices solutionnés. Tous les cas typiques y sont réunis et ces exercices sont corrigés en détail. Bref, ce livre est un outil qui se présente pour vous aider en permanence.

Je remercie vivement mes doctorants du Laboratoire “Modélisation et Structures Mathématiques" de la Faculté des Sciences et Techniques, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fès, Maroc, pour leurs grands soutiens, et tout particulièrement Adam Anebri.

Que tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, m'ont soutenu dans la réalisation de ce livre, trouvent ici l'expression d'une profonde gratitude, spécialement les Professeurs Mohamed Aqalmoun, Mounir El Ouarrachi et Rachida El Khalfaoui.

Chapitre 1

Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Notion d'espace vectoriel

1.1.1 Groupe commutatif

Définition 1.1.

Soit E un ensemble non vide.
On appelle loi de composition interne dans E toute application :

$$f : E \times E \longrightarrow E.$$

Dans ce cours, on va adopter la notation additive, c'est-à-dire que si $x, y \in E$, on note $f(x, y)$ par $x + y$.

1. *On dit qu'une loi de composition interne dans E est associative si pour tout $x, y, z \in E$, on a :*

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

2. *On dit qu'une loi de composition interne dans E est commutative si pour tout $x, y \in E$, on a :*

$$x + y = y + x.$$

Définition 1.2.

1. *On dit qu'une loi de composition interne dans E admet un élément neutre $e \in E$ si pour tout $x \in E$, on a :*
$$x + e = e + x = x.$$
Si l'élément neutre existe, on le note 0.
2. *Soit $(E, +)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne admettant un élément neutre 0 et soit $x \in E$. On dit que x admet un symétrique (ou opposé), s'il existe $y \in E$ tel que :*
$$x + y = y + x = 0.$$
Si y existe, on le note $-x$.

Définition 1.3.

Soit E un ensemble non vide. Un groupe commutatif $(E, +)$ est un ensemble muni d'une loi de composition interne commutative, associative et admettant un élément neutre 0 et tout élément de E admet un symétrique (ou opposé).

Exemples :

1. $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.
2. $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif admettant $(0, 0)$ comme élément neutre et le symétrique (ou opposé) de (x, y) est $(-x, -y) \in \mathbb{R}^2$, où $+$ est définie par :
$$(x + y) + (z, t) = (x + y, z + t).$$

1.1.2 Loi externe

Définition 1.4.

Soit E un ensemble non vide.
Une loi de composition externe sur E de base $\mathbb{K}$ est une application $\mathbb{K} \times E \to E$. La loi sera notée " $\cdot$ " et l'image du couple (α, x) sera notée $\alpha \cdot x$.

Exemples :

1. L'application de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, définie par $\alpha.(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$, pour tous $x_1, \cdots, x_n, \alpha \in \mathbb{R}$ est une loi de composition externe sur $\mathbb{R}^n$ de base $\mathbb{R}$.
2. L'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, définie par $\alpha.z = \alpha z$ est une loi de composition externe sur $\mathbb{C}$ de base $\mathbb{R}$.
3. Soit X un ensemble non vide et E l'ensemble de toutes les fonctions de X à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $f \in E$, notons $\alpha.f$ la fonction définie par $(\alpha.f)(x) = \alpha f(x)$. Alors l'application :
$$\mathbb{K} \times E \to E \quad , \ (\alpha, f) \mapsto \alpha.f.$$
définie une loi de composition externe sur E de base $\mathbb{K}$.

1.1.3 Espace vectoriel sur un corps

Définition 1.5.

On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ un triplet $(E, +, .)$ tel que

1. *$(E, +)$ est un groupe commutatif.*
2. *. est une loi de composition externe sur E de base $\mathbb{K}$ vérifiant, pour tous $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:*
   (a) $1.x = x$,
   (b) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$,
   (c) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$;
   (d) $\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$.

Exemples :

1. $(\mathbb{K}^n, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec les lois :

$$\begin{cases} (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda.(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \end{cases}$$

   où $x_i, y_i, \lambda \in \mathbb{K}$ pour $i = 1, \cdots, n$. En particulier $(\mathbb{K}, +, .)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

2. L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ muni des lois :

$$\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \end{cases}$$

   pour $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3. $(\mathbb{C}, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, c'est aussi un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Notation : Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, l'élément $\alpha.x$ sera noté αx.
Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ et $x_1, \ldots, x_n \in E$, l'élément $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$ sera noté $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$.

Terminologie : Les éléments de E sont appelés des *<u>vecteurs</u>*, et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des *<u>scalaires</u>*.

1.1.4 Règles de calcul dans un espace vectoriel

Propriétés 1.6.

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Pour tous $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a :

1. *$\alpha x = 0$ si, et seulement si, $\alpha = 0$ ou $x = 0$,*
2. *$(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$,*
3. *$\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$;*
4. *$(-\alpha)x = \alpha(-x) = -\alpha x$.*

Preuve :

1. Si $\alpha = 0$, alors $0x = (0+0)x = 0x + 0x$ et donc $0x = 0$. Si $x = 0$, alors $\alpha 0 = \alpha(0+0) = \alpha 0 + \alpha 0$, et donc $\alpha 0 = 0$.
   Inversement, supposons que $\alpha x = 0$ et $\alpha \neq 0$ et montrons que $x = 0$.
   Comme α est non nul dans $\mathbb{K}$, alors on a :
$$\begin{array}{rcl} \alpha^{-1}\alpha x & = & \alpha^{-1}(\alpha x) \\ & = & \alpha^{-1}0 \\ & = & 0. \end{array}$$
   D'où $x = 0$.
2. On a :
$$\begin{array}{rcl} (\alpha-\beta)x + \beta x & = & (\alpha - \beta + \beta)x \\ & = & \alpha x. \end{array}$$
   Donc $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$.
3. Même raisonnement que dans 2.
4. On a :
$$\begin{array}{rcl} (-\alpha)x + \alpha x & = & (-\alpha + \alpha)x \\ & = & 0x \\ & = & 0. \end{array}$$
   Donc $(-\alpha)x = -\alpha x$.
   De même, on a :
$$\begin{array}{rcl} \alpha(-x) + \alpha x & = & \alpha(-x + x) \\ & = & \alpha 0 \\ & = & 0. \end{array}$$
   D'où $\alpha(-x) = -\alpha x$.

$\square$

1.1.5 Espace vectoriel produit

Soit $(E_i, +, .)_{i=1,\cdots,n}$ $1 \leq i \leq n$ une famille de $\mathbb{K}$ espaces vectoriels. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ on pose :
$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\text{et} \qquad \alpha . x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \qquad .$$
Ainsi $+$ est une loi de composition interne sur $\prod_{i=1}^{n} E_i$ et . est une loi externe sur $\prod_{i=1}^{n} E_i$ de base $\mathbb{K}$

Proposition 1.7.

Avec les notations précédent, $(\prod_{i=1}^{n} E_i, +, .)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel appelé espace vectoriel produit des E_i.

Exemples :

1. $(\mathbb{K}^n, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel produit.

1.2 Sous espace vectoriel

1.2.1 Combinaison linéaire

Définition 2.1.

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x, x_1, \ldots, x_n \in E$. On dit que x est une combinaison linéaire des x_i, s'ils existent $\alpha_1 \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, on a $(2, 3, -2) = 2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) - 2(0, 0, 1)$. Donc $(2, 3, -2)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

1.2.2 Sous espace vectoriel

Définition 2.2.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle sous espace vectoriel de E toute partie non vide F de E, telle que les lois induites sur F, c'est à dire les restrictions des lois à F, confèrent à F une structure d'espace vectoriel.

Proposition 2.3.

Soit F une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors F est un sous espace vectoriel de E si, et seulement si, :

1. *$F \neq \emptyset$,*
2. *F est stable pour les deux lois, c'est à dire que pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $x + y \in F$ et $\lambda x \in F$.*
   Ce qui est visiblement équivalent à dire que pour tous $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $x + \lambda y \in F$.

Preuve :
Un sous espace vectoriel F de E est visiblement non vide (car $0 \in F$) et stable pour les deux lois. Inversement, on vérifie facilement qu'un sous ensemble $F \neq \emptyset$ de E qui est stable pour les deux lois est un sous espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. □

Exemples :

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $x_1, \ldots, x_p \in E$ et $F = \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p \ / \ \lambda_i \in \mathbb{K}\}$. On vérifie que F est un sous espace vectoriel de E dit espace des combinaisons linéaires des x_i. Si $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ alors les λ_i sont appelés coefficients de la décomposition de y sur les vecteurs x_i.
2. $\{0\}$ et E sont des sous espaces vectoriels de E.

1.2.3 Sous espace vectoriel engendré par une partie

Définition 2.4.

Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle sous espace vectoriel engendré par A le plus petit sous espace vectoriel de E contenant A. Cet espace vectoriel est noté $\langle A \rangle$ ou $\mathrm{Vect}(A)$.

Théorème 2.5.

Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et A une partie non vide de E. Alors on a :

$$\langle A \rangle := \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i / n \in \mathbb{N}^*, \alpha_i \in \mathbb{K} \ , \ x_i \in A\}.$$

En particulier on a $\langle x_1, \ldots, x_p \rangle = \{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \ / \ \lambda_k \in \mathbb{K}\}$.

Preuve :

Posons $B = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i / n \in \mathbb{N}^*, \alpha_i \in \mathbb{K} \ , \ x_i \in A\}$. Pour montrer que $B = \langle A \rangle$, on doit montrer que B est un sous K-espace vectoriel de E, B contient A et que si H est un sous K-espace vectoriel de E contenant A, alors $B \subseteq H$ (c'est à dire que B est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant A).
Montrons que B est un sous K espace vectoriel de E. On a $B \neq \emptyset$ car $0 = \sum_{i=1}^{n} 0.x_i \in B$. De plus, si $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \in B$ et $\lambda \in K$, alors on a :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) x_i \in B \quad \text{et} \quad \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) x_i \in B.$$

D'où B est un sous K-espace vectoriel de E.
Montrons que $A \subseteq B$. Soit $x \in A$. On a, $x = 1.x \in B$. D'où $A \subseteq B$.
Finalement, soit H un sous K-espace vectoriel de E contenant A et soit $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in B$. Comme $x_i \in H$ qui est un sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $a_i x_i \in B$ et par suite $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in H$. D'où le résultat. $\square$

Propriétés 2.6.

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Alors on a :

1. *Si $A \subseteq B$ alors $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$,*
2. *A est un sous espace vectoriel de E si, et seulement si, $\langle A \rangle = A$.*
3. *$\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$.*
4. *Si $x_1, \dots, x_n \in E$, alors $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ ne change pas si :*
   (a) *On change l'ordre de deux éléments x_i et x_j.*
   (b) *On remplace un x_j par une combinaison linéaire de la forme $\lambda x_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i x_i$ avec $\lambda \neq 0$.*

Preuve :

1. Si $A \subseteq B$, alors $A \subseteq B \subseteq \langle B \rangle$, comme $\langle B \rangle$ est un sous espace vectoriel et il contient A, $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$.
2. Si A est un sous espace vectoriel de E, alors c'est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant A, et donc $\langle A \rangle = A$.
   Réciproquement si $\langle A \rangle = A$, alors A est un sous espace vectoriel de E.
3. On sait que $\langle A \rangle$ est un sous espace vectoriel de E. Dés lors, d'après la propriété précédente, $\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$.
4. (a) Par la commutativité de l'addition dans E.
   (b) Posons $x'_j = \lambda x_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i x_i$. Il s'agit donc de montrer que

$$\langle (x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n) \rangle = \langle (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \rangle.$$

Puisque x'_j est une combinaison linéaire des éléments $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$, toute combinaison linéaire des éléments $x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n$ est aussi combinaison linéaire des éléments $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$, ainsi on a :

$$\langle (x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n) \rangle \subseteq \langle (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \rangle.$$

Par définition de x'_j, on a $x'_j = \lambda x_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i x_i$, puisque $\lambda \neq 0$,

$x_j = \frac{1}{\lambda}(x'_j - \sum_{i \neq j} \lambda_i x_i)$, c'est-à-dire x_j est une combinaison linéaire des éléments $x_1, \ldots, x'_j, \ldots, x_n$. Ainsi, toute combinaison linéaire des éléments $x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ est aussi combinaison linéaire des éléments $x_1, \ldots, x'_j, \ldots, x_n$. D'où :

$$\langle (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \rangle \subseteq \langle (x_1, \ldots, x'_j, \ldots, x_n) \rangle.$$

D'où le résultat. □

1.3 Espace vectoriel quotient

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous espace vectoriel de E. On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ (dans E associée à F) définie pour $x, y \in E$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in F.$$

On vérifie que l'ensemble des classes d'équivalence $E/\mathcal{R}$, noté $E/F; = \{x + F \mid x \in E\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dit espace vectoriel quotient de E par F. Les lois sur E/F sont définies pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ par :

$$(x + F) + (y + F) = (x + y) + F, \text{ c'est-à-dire : } \overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}.$$
$$\lambda(x + F) = (\lambda x) + F, \text{ c'est-à-dire : } \lambda.\overline{x} = \overline{\lambda x}.$$

1.4 Famille génératrice, famille libre et base

1.4.1 Famille génératrice et famille libre

Définition 4.1.

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et A une partie de E.

1. *On dit que A est génératrice de E si $\langle A \rangle = E$.*
2. *L'espace E est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie $A = (x_1, \ldots, x_n)$.*
   Dans ce cas, tout élément x de E est combinaison linéaire des éléments $x_1, \ldots, x_n$ (mais la décomposition de x sur les x_i n'est pas en général unique).

Définition 4.2.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Alors on a :

1. *Une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est dite <u>libre</u> ou <u>linéairement indépendante</u> si pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

2. *On dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est <u>liée</u> lorsqu'elle n'est pas libre, c'est-à-dire lorsqu'il existent des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$.*

Exemples :

1. Dans $\mathbb{K}^n$, on considère les vecteurs $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$. Alors la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.
   En effet ; soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$.
   Donc $(\lambda_1, 0, \ldots, 0) + (0, \lambda_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, 1) = (0, 0, \ldots, 0)$, ou encore $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0)$. D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots, \lambda_n = 0$.
2. La famille des fonctions $(1, \cos, \cos^2, \ldots, \cos^n)$ est libre.
   En effet, soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_0 1 + \lambda_1 \cos + \ldots + \lambda_n \cos^n = 0.$$

   Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 + \lambda_1 \cos(x) + \ldots + \lambda_n \cos^n(x) = 0$.
   On considère le polynôme P à coefficients dans $\mathbb{R}$ définie par $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \ldots + \lambda_n X^n$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(cos(x)) = 0$, par suite pour tout $\alpha \in [-1, 1]$, $P(\alpha) = 0$ (car tout élément $\alpha \in [-1, 1]$ s'écrit sous la forme $\alpha = \cos(x)$, où $x \in \mathbb{R}$). Donc P est un polynôme ayant une infinité de racines, d'où $P = 0$. Il vient alors que,

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Proposition 4.3.

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ *une famille libre. Si* x *est combinaison linéaire des* x_i*, alors la décomposition est unique.*

Preuve :
Soient deux combinaisons linéaires des x_i du vecteur x :

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n.$$

Alors on a $(\lambda_1 - u_1)x_1 + \ldots + (\lambda_n - u_n)x_n = 0$ et par suite $\lambda_1 - u_1 = \ldots = \lambda_n - u_n = 0$. Ainsi $\lambda_1 = u_1, \ldots, \lambda_n = u_n$ et la décomposition est unique. $\square$

Propriétés 4.4.

Soit E *un* $\mathbb{K}$ *espace vectoriel. Alors on a :*

1. *Pour tout* $x \in E$, (x) *est libre si, et seulement si,* $x \neq 0$.
2. *Toute famille qui contient le vecteur nul est liée.*
3. *Les éléments d'une famille libre sont tous non nuls.*
4. *Toute famille où l'un des éléments est combinaison linéaire non nulle des autres éléments est liée.*
5. *Toute sur-famille d'une famille liée est liée.*
6. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

Preuve :
Laisser au lecteur. $\square$

1.4.2 Base

Définition 4.5.

Soient E *un espace vectoriel et* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une famille d'éléments de* E*. On dit que* $\mathcal{B}$ *est une base de* E *si* $\mathcal{B}$ *est à la fois libre et génératrice de* E

Exemple : Dans $\mathbb{K}^n$, les vecteurs $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ forment une base de $\mathbb{K}^n$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, alors $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$.

Théorème 4.6.

Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille d'éléments de E. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E si, et seulement si, $\forall x \in E$, $\exists!(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i e_i$.
Si c'est le cas, la famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est appelé les coordonnées ou les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$.

Preuve :
Supposons que $\mathcal{B}$ est une base de E. Si $x \in E$, alors x est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$ puisque $\mathcal{B}$ est génératrice, l'unicité des coefficients est une conséquence du fait que $\mathcal{B}$ est libre.

Inversement, supposons que $\forall x \in E$, $\exists!(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i e_i$.
Il est clair que $\mathcal{B}$ est génératrice. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$, donc $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0e_1 + \ldots + 0e_n = 0$, par l'unicité de la décomposition du vecteur nul, $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$. $\square$

Proposition 4.7.

Soit S un système générateur fini d'un espace vectoriel E. Alors on peut extraire de S une base de E.
En particulier, tout espace vectoriel de dimension finie admet une base finie.

Preuve :
Soit $S = (x_1, \ldots, x_n)$ un système générateur de E et $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}\}$ un sous système de S comportant le plus grand nombre possible de vecteurs linéairement indépendants et $F = \langle (x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}) \rangle$. Montrons que $E = F (:= \langle (x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}) \rangle)$ pour conclure que $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$ est une base de E.
Par l'absurde, supposons que $E \neq F$ et soit $x \in E \setminus F$ avec $x \in S$. On va montrer que $(x, x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$ est libre et cela sera une contradiction puisque

$(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$ contient le plus grand nombre possible de vecteurs linéairement indépendants de S et $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}) \subsetneq (x, x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$. D'où $E = F$ et $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$ est une base de E.
Il reste donc à montrer que $(x, x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$ est libre. Soit alors une combinaison linéaire :

$$\alpha_0 x + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_{i_j} = 0$$

avec $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{K}$. Si $\alpha_0 \neq 0$, on aura $x = \sum_{j=1}^{p} \frac{-\alpha_j}{\alpha_0} x_{i_j} \in F$, absurde. Donc $\alpha_0 = 0$ et par suite on a $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_{i_j} = 0$, ce qui implique que $\alpha_j = 0$, $\forall j = 1, \cdots, p$ (car $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$ est libre). D'où le résultat. □

Théorème 4.8. (Théorème de la base incomplète)

Si A est un système libre d'un espace vectoriel de dimension finie, le raisonnement précédent montre que l'on peut compléter A en une base de E.

1.4.3 Base infinie

Proposition 4.9.

Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E, non nécessairement finie. Alors $\langle A \rangle$ est l'ensemble des combinaison linéaires finies des éléments de A c'est-à-dire que :

$$\langle A \rangle = \{\sum_{fini} \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \quad et \quad x_i \in A\}.$$

Si $E = \langle A \rangle$, on dit que A est un système générateur de E.

Preuve :
On montre facilement que $\{\sum_{\text{finie}} \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \ \text{ et } \ x_i \in A\}$ est un sous espace vectoriel de E contenant A, et qui est contenu dans tout sous espace vectoriel contenant A. D'où, $\langle A \rangle = \{\sum_{\text{fini}} \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \ \text{ et } \ x_i \in A\}$. □

Définition 4.10.

Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E.

1. *On dit que A est libre si, et seulement si, toute sous-famille finie de A est libre.*
2. *On dit que A est une base de E si elle est libre et génératrice.*

Proposition 4.11.

Soit A une base d'un K-espace vectoriel E. Alors tout élément x de E s'écrit d'une manière unique comme combinaison linéaire finie des éléments de A.

Preuve :
Laisser au lecteur. □

Exemple : Soit $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes sur $\mathbb{K}$. Muni de la loi externe :

$$\lambda.(a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1X + \ldots + \lambda a_nX^n$$

et la loi interne somme, $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et on vérifie immédiatement que $A = (1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

1.5 Dimension d'un espace vectoriel

Proposition 5.1.

Soit E un espace vectoriel engendré par n vecteurs, avec $n \geq 1$. Alors tout système libre dans E comporte au plus n vecteurs. Autrement dit, si T est un système libre de E et S est un système générateur de E, alors on a :

$$Card(T) \leq Card(S).$$

Preuve :
Soient $S = (x_1, \ldots, x_n)$ un système générateur de E et $T = (y_1, \ldots, y_m)$ un système libre dans E. Vu que $y_1 \neq 0$ car $y_1 \in T$ et T est libre, on peut écrire :

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$$

où les α_i ne sont pas tous nuls, par exemple on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. Dés lors, on a $x_1 = \alpha_1^{-1} y_1 - \alpha_1^{-1}(\alpha_2 x_n + \ldots + \alpha_n x_n)$ de sorte que $(y_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un système générateur de E. D'où,

$$y_2 = \beta_1 y_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$$

où $\beta_1, \ldots, \beta_n$ ne sont pas tous nuls, par exemple $\beta_2 \neq 0$ et $x_2 = \beta_2^{-1} y_2 - \beta_2^{-1}(\beta_1 y_1 + \beta_3 x_3 + \ldots + \beta_n x_n)$. Il en résulte que $(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n)$ est un système générateur de E. Si $m > n$, on peut, substituer ainsi $(x_1, \ldots, x_n)$ par $(y_1, \ldots, y_n)$ qui serait un système générateur de E, d'où y_{n+1} serait une combinaison linéaire de $y_1, \ldots, y_n$, absurde. D'où on a

$$m = Card(T) \leq n = Card(S).$$

□

Corollaire 5.2.

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'élément.

Preuve :
Soient S_1 et S_2 deux bases d'un K-espace vectoriel E de dimension finie. Alors on a $Card(S_1) \leq Card(S_2)$ puisque S_1 est libre et S_2 engendre E. De même on a $Card(S_2) \leq Card(S_1)$ car S_2 est libre et S_1 engendre E. D'où le résultat. □

Définition 5.3.

1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie. Le nombre d'éléments de toute base de E s'appelle la dimension de l'espace vectoriel E. On la note $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou $\dim E$.*
   Un espace vectoriel qui ne possède pas de base finie est dit de dimension infinie. On note $\dim E = \infty$.
2. *L'espace vectoriel nul n'a pas de base et on dit qu'il est de dimension zéro.*

Exemple : Les vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, e_n), \dots, e_n = (0, 0, \dots, e_n)$ forment une base de $\mathbb{K}^n$ comme K-espace vectoriel. Donc $\dim \mathbb{K}^n = n$.

Remarque : La dimension d'un espace vectoriel est un entier dépendant du corps de base. Par exemple $E := \mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et on a :

- En tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^1 = 1$ (d'après l'exemple précédent).
- En tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la famille $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$ et donc $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Proposition 5.4.

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et S une famille de E de cardinal n. Alors, S est libre si, et seulement si, S est génératrice de E si, et seulement si, S est une base de E

Preuve :
Supposons que S est libre. D'après le théorème de la base incomplète il existe une famille S' de E tel que $S \cup S'$ soit une base de E. Or comme $\operatorname{card} S = \dim E = n$, alors $\operatorname{card} S' = 0$ et $S = \emptyset$, c'est-à-dire que S est une base de E donc génératrice en particulier.
Supposons maintenant que S est génératrice de E. On a vu qu'il existe une sous famille S' de S qui soit une base de E. Or on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{card} S' &= \dim E \\ &= n \\ &= \operatorname{card} S. \end{aligned}$$

Par suite $S = S'$ est une base de E.
Pour finir les équivalences, on sait que si S est une base de E, alors elle est libre. □

1.6 Somme de sous espaces vectoriels

Soient E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels de E. Tandis que $E_1 \cap E_2$ est un sous espace vectoriel de E, il n'en est pas de même pour $E_1 \cup E_2$.

Par exemple, soit $E = \mathbb{R}^2$, $E_1 = \{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{(0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. $E_1 \cup E_2$ n'est pas stable par la somme car $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin E_1 \cup E_2$ et $(1,0) \in E_1$ et $(0,1) \in E_2$.
On peut par contre considérer l'espace vectoriel engendré par $E_1 \cup E_2$.

Théorème et définition 6.1.

Soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E. On pose :

$$E_1 + E_2 := \{x_1 + x_2 \ / \ x_1 \in E_1 \ , \ \ x_2 \in E_2\}.$$

Alors on a :

$$\langle (E_1 \cup E_2) \rangle = E_1 + E_2.$$

$E_1 + E_2$ est appelé la somme de E_1 et E_2.

Preuve :
On vérifie facilement que $E_1 + E_2$ est un sous espace vectoriel de E contenant $E_1 \cup E_2$ et contenu dans tout sous espace vectoriel de E contenant $E_1 \cup E_2$. D'où $E_1 + E_2 = \langle (E_1 \cup E_2) \rangle$. □

Théorème et définition 6.2.

Soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E et $F = E_1 + E_2$. La décomposition d'un élément de F en somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 est unique si, et seulement si, $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

On écrit alors $F = E_1 \oplus E_2$ et l'on dit que F est somme directe de E_1 et E_2.

Preuve :

Supposons que la décomposition de tout élément de F en somme d'un élément de E_1 et de E_2 est unique et soit $x \in E_1 \cap E_2$. Alors, comme $0 = 0 + 0 = x + (-x)$, alors $x = 0$. D'où, $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Inversement, soit $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ deux décomposition de x, où $x_1, y_1 \in E_1$ et $x_2, y_2 \in E_2$. Alors on a $x_1 - y_1 = -x_2 + y_2 \in E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et donc $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$ et la décomposition de x est unique. □

Ce résultat se généralise au cas de m sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On a en effet le théorème suivant :

Théorème et définition 6.3.

Soit E_i des sous espaces vectoriels de E, où $i = 1, \cdots, n$. On appelle somme de $E_1, \ldots, E_m$ le sous espace vectoriel de E :

$$F := E_1 + \ldots + E_m = \{x \in E \mid x = x_1 + \ldots, x_m \quad \text{où} \quad x_i \in E_i\}.$$

On dit que F est somme directe des sous espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_m$ si la décomposition de tout vecteur de F sur les sous espaces vectoriels E_i est unique. On écrit alors :

$$F = E_1 \oplus \ldots \oplus E_m.$$

On a F est une somme directe des sous espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_m$ si, et seulement si, $E_i \cap (\sum_{j=1, j\neq i}^{m} E_j) = \{0\}$, pour tout $i = 1, \ldots, m$.

Preuve :
Par récurrence en utilisant le même raisonnement que pour $E_1 \oplus E_2$. □

Définition 6.4.

Soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E. On dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si $E_1 + E_2 = E$ et $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, c'est-à-dire que $E_1 \oplus E_2 = E$.

Exemples : Soient $E = \mathbb{R}^2$; $E_1 = \{(x, y) \mid x = y\}$, $E_2 = \{(x, y) \mid x = -y\}$. Alors, $E_1 \oplus E_2 = E$.

Preuve :
On a $E_1 = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrons que $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$.

Montrons que $E_1 \cap E_2 = \{(0,0)\}$. Soit alors $(x,y) \in E_1 \cap E_2$. On a $x = y$ car $(x,y) \in E_1$ et on a $x = -y$ car $(x,y) \in E_2$. Dès lors, on a $x = y = -y$ et par suite $(x,y) = (0,0)$. D'où, $E_1 \cap E_2 = \{(0,0)\}$.
Montrons que $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^2$. On sait, par construction, que $E_1 + E_2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Inversement, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons $(z,z) \in E_1$ et $(t,-t) \in E_2$ tels que $(x,y) = (z,z) + (t,-t)$, avec $z, t \in \mathbb{R}$. On a donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z+t & = & x \\ z-t & = & y \end{array}\right.$$

soit encore

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2z & = & x+y \\ 2t & = & x-y \end{array}\right.$$

de sorte que $z = \frac{x+y}{2}$ et $t = \frac{x-y}{2}$.
D'où on a $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$. □

Théorème 6.5.

Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E.
F et G sont supplémentaires dans E si, et seulement si, pour tout $z \in E$, il existe un unique $(x,y) \in F \times G$ tels que $z = x + y$.

Preuve :
Supposons que $F \oplus G = E$ et soit $z \in E$. Alors il existent $x \in F$ et $y \in G$ tels que $z = x + y$. Si de plus on a une autre décomposition $z = x' + y'$ avec $x' \in F$ et $y' \in G$, alors $x - x' = y' - y$, donc $x - x' \in F$ et $y' - y \in G$. Dés lors, on a $x - x' = y' - y \in F \cap G = \{0\}$ et par suite $x = x'$ et $y = y'$.
Inversement, la propriété d'existence implique que $E = F+G$. Soit $x \in F \cap G$, on a $x = x + 0 = 0 + x$ et puisque l'écriture est unique alors $x = 0$. □

Théorème 6.6. (Existence du supplémentaire)

Tout sous espace vectoriel E_1 de E de dimension finie admet au moins un supplémentaire dans E.

Preuve :
Soit $\{a_1, \ldots, a_p\}$ une base de E_1. D'après le théorème de la base incomplète, il existe une famille libre $\{a_{p+1}, \ldots, a_n\}$ de E telle que $B = \{a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n\}$ soit une base de E. Posons $E_2 =< a_{p+1}, \ldots, a_n >$. Tout élément x de E s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_p a_p + \lambda_{p+1} a_{p+1} + \ldots \lambda_n a_n$ car B est une base de E. Donc x s'écrit d'une manière unique comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2 ; c'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$. $\square$

On en déduit les corollaires suivants :

Corollaire 6.7.

Soit E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors, $E = E_1 \oplus E_2$ si, et seulement si, la réunion de toute base de E_1 avec toute base de E_2 forme une base de E si, et seulement si, la réunion d'une base B_1 de E_1 avec une base B_2 de E_2 avec $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ forme une base de E.

Corollaire 6.8.

Soit E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension fini tels que $E = E_1 \oplus E_2$. Alors, $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$.
En général, si $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_m$ est de dimension finie, alors $\dim E = \dim E_1 + \ldots + \dim E_m$.

1.7 Exercices avec solutions

Exercice 1.1: On munit $\mathbb{R}^3$ de l'addition composante par composante définie par :

$$(x, y, z) + (u, v, w) = (x + u, y + v, z + w).$$

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la multiplication externe à opérateurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

   $$c.(x, y, z) = (cx, 0, 0).$$

   $\mathbb{R}^3$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les deux lois définies ci-dessus ?
2. On munit $\mathbb{R}^3$ de la multiplication externe à opérateurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

   $$c.(x, y, z) = (cx, cy, cz).$$

   a) Vérifier que $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel pour l'addition composante par composante et cette dernière multiplication.

   b) $\mathbb{Q}^3$ est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$?

   c) Les ensembles $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \ \textit{tel que} \ \ xz = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \ \textit{tel que} \ \ x + y = 0\}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Si oui, calculer leurs dimensions.

<u>**Solution:**</u>

1. Pour les deux lois définies dans **1)**, $\mathbb{R}^3$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel car, par exemple, $1.(1, 1, 1)(= (1, 0, 0)) \neq (1, 1, 1)$.
2. **a)** D'après le cours.

   b) $\mathbb{Q}^3$ n'est pas un sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car, par exemple, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $(1, 1, 1) \in \mathbb{Q}^3$, mais $\sqrt{2}.(1, 1, 1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}^3$.

   c) L'ensemble E n'est pas un sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car, par exemple, $(0, 0, 1) \in E$ et $(1, 0, 0) \in E$, mais $(0, 0, 1) + (1, 0, 0) = (1, 0, 1) \notin E$.

   D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} F &= \{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y = 0\} \\ &= \{ \ (x, -x, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{ \ x(1, -1, 0) + z(0, 0, 1) \ / \ x, z \in \mathbb{R}\} \\ &=< \{e_1, e_2\} > \end{aligned}$$

qui est un sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{e_1, e_2\}$, avec $e_1 = (1, -1, 0)$ et $e_2 = (0, 0, 1)$.
On vérifie que $\{e_1, e_2\}$ est un système libre, et comme on a $F =< \{e_1, e_2\} >$, c'est à dire que $\{e_1, e_2\}$ engendre F, alors c'est une base de F. Ainsi, $\dim F = 2$.

Exercice 1.2: Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ muni des lois :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ (rf)(x) = rf(x),$$

avec $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $r \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $F_p = \{$ L'ensemble des applications paires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $F_i = \{$ L'ensemble des applications impaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\}$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F_p dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

<u>Solution:</u> Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ muni des lois :

$$\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (rf)(x) = rf(x) \end{cases}$$

avec $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $r \in \mathbb{R}$.

1. Soit F_p l'ensemble des applications paires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. C'est clair que si $f, g \in F_p$ et $r \in \mathbb{R}$, alors on a $f + g \in F_p$ et $rf \in F_p$. D'où, F_p est un sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. On montre de même que l'ensemble des applications impaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est un sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

   Montrons que $F_p \oplus F_i = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour cela, on doit montrer que $F_p \cap F_i = \{\theta\}$ et $F_p + F_i = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, où θ est l'application nulle.
   Soit $f \in F_p \cap F_i$ et $x \in \mathbb{R}$. On a $f(-x) = -f(x)$ (car $f \in F_i$) et $f(-x) = f(x)$ (car $f \in F_p$) de sorte que $f(x) = -f(x)$ et donc $f = \theta$. D'où $F_p \cap F_i = \{\theta\}$.
   Reste à montrer que $F_p + F_i = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. C'est clair que $F_p + F_i \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   Inversement, soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On a :

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) + f(-x)\Big) + \frac{1}{2}\Big(f(x) - f(-x)\Big)$$

et $\frac{1}{2}\Big(f(x)+f(-x)\Big) \in F_p$ et $\frac{1}{2}\Big(f(x)-f(-x)\Big) \in F_i$. D'où $F_p \oplus F_i = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 1.3: Soit $H = \{ax^2 + bx + c \ \ \textit{tel que}\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$, où x est une indéterminée sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Soient f_1, f_2 et f_3 des fonctions de H définies par :
$$f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = (x-1)^2,\ f_3(x) = (x+1)^2.$$
   a) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de H.
   b) Déterminer les coordonnées des fonctions g et h dans cette base où $g(x) = 12$ et $h(x) = 3x^2 - 1$.

Solution:

1. On a $H \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De plus, $H =< \{1, x, x^2\} >$ est donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. On vérifie facilement que $\mathcal{B}$ est libre et donc $\mathcal{B}$ est une base de H. Ainsi, $\dim H = 3$.
2. **a)** On a $Card\{f_1, f_2, f_3\} = \dim\ H\,(= 3)$. Ainsi, pour montrer que $\mathcal{S} = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de H, il suffit de montrer que $\mathcal{S} = \{f_1, f_2, f_3\}$ est libre.
   Soit alors $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $af_1 + bf_2 + cf_3 = \theta$, c'est à dire que : $ax^2 + b(x-1)^2 + c(x+1)^2 = \theta$ et donc $(a+b+c)x^2 + 2(-b+c)x + (b+c)1 = \theta$. Ainsi, et comme $(x^2, x, 1)$ est libre, alors on a :
$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ \quad -b+c &= 0 \\ \quad\ \ b+c &= 0 \end{cases}$$
   de sorte que $a = b = c = 0$.
   Ainsi, $\mathcal{S} = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de H.

   b) Cherchons les coordonnées (a, b, c) de la fonction $g(x) = 12$ dans la base $\mathcal{S} = \{f_1, f_2, f_3\}$. On a :
$$\begin{aligned} 12 &= ax^2 + b(x-1)^2 + c(x+1)^2 \\ &= (a+b+c)x^2 + 2(-b+c)x + (b+c). \end{aligned}$$
   D'où le système :

$$\begin{cases} a+b+c & =0 \\ 2(-b+c) & =0 \\ \quad b+c & =12 \end{cases}$$

c'est à dire que :

$$\begin{cases} b=c=6 \\ a=-b-c=-12. \end{cases}$$

Ainsi les coordonnées de $g(x)=12$ dans la base $\mathcal{S}$ sont :

$$(a,b,c)=(-12,6,6).$$

Par le même raisonnement, les coordonnées de $h(x)=3x^2-1$ dans la base $\mathcal{S}$ sont $(4,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

Exercice 1.4: Soient E un espace vectoriel et n un entier naturel non nul. Montrer que toute partie de $n+1$ vecteurs de E, combinaison linéaire de n vecteurs, est liée.

Solution: Soient E un espace vectoriel et n un entier naturel non nul. Soit $\mathcal{S}$ une partie de $n+1$ vecteurs de E qui est combinaison linéaire d'une partie $\mathcal{B}$ de n vecteurs. Montrons que $\mathcal{S}$ est liée par un raisonnement par absurde.
Supposons que $\mathcal{S}$ est libre. Donc $\mathcal{S}$ est une base du sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{S}$ et $<\mathcal{S}>\subseteq<\mathcal{B}>$, de sorte que :

$$\begin{array}{rcl} n+1 & = & Card\,(\mathcal{S}) \\ & = & \dim <\mathcal{S}> \\ & \leq & \dim <\mathcal{B}> \\ & \leq & n \end{array}$$

(car $Card\,(\mathcal{B})=n$ et $\mathcal{B}$ engendre $<\mathcal{B}>$), absurde. Ainsi $\mathcal{S}$ est liée.

Exercice 1.5: Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $a,b,c\in E$. On pose :

$$u=b+c,\ \ v=a+c,\ \ w=a+b.$$

1. Montrer que $<\{a,b,c\}>=<\{u,v,w\}>$.
2. Montrer sans calcul que $\{a,b,c\}$ est libre si et seulement si $\{u,v,w\}$ est libre.

Solution: Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $a, b, c \in E$. On pose :

$$u = b + c, \;\; v = a + c, \;\; w = a + b.$$

1. On a : $u = b + c \in < \{a, b, c\} >$, $\;\; v = a + c \in < \{a, b, c\} >$ et $w = a + b \in < \{a, b, c\} >$ de sorte que $< \{u, v, w\} \subseteq < \{a, b, c\} >$.

   Inversement, on a : $a = \frac{1}{2}(-u + v + w) \in < \{u, v, w\} >$, $\; b = \frac{1}{2}(u - v + w) \in < \{u, v, w\} >$ et $c = \frac{1}{2}(u + v - w) \in < \{u, v, w\} >$ de sorte que $< \{u, v, w\} >=< \{a, b, c\} >$.
2. Supposons que $\{a, b, c\}$ est libre. Donc $\{a, b, c\}$ est une base de $< \{a, b, c\} >$ et par suite on a $\dim < \{u, v, w\} >= \dim < \{a, b, c\} >= 3$. De plus, $\{u, v, w\}$ engendre $< \{u, v, w\} >$ et $Card\{u, v, w\} = \dim < \{u, v, w\} >$. dès lors, $\{u, v, w\}$ est une base de $< \{u, v, w\} >$ et donc $\{u, v, w\}$ est libre.

   Par un raisonnement analogue, on montre que si $\{u, v, w\}$ est libre, alors $\{a, b, c\}$ l'est aussi, ce qui achève la preuve de l'exercice.

Exercice 1.6: Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel définie par $E = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \; tel \; que \; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, où x est une indéterminée sur $\mathbb{R}$, et soient $F = \{(x-1)^2(ax+b) \; tel \; que \; a, b \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x+1)^2(ax+b) \; tel \; que \; a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Donner une base $\mathcal{B}_1$ de F et une base $\mathcal{B}_2$ de G.
3. En déduire que $E = F \oplus G$.

Solution: On remarque que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 dont $\{x^3, x^2, x, 1\}$ est une base.

1. On a :

$$\begin{aligned} F &= \{(x-1)^2(ax+b) \; / \; a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{ax(x-1)^2 + b(x-1)^2 \; / \; a, b \in \mathbb{R}\} \\ &=< \{x(x-1)^2, (x-1)^2\} > \end{aligned}$$

   qui est donc un sous-espace vectoriel de E.

De même, on a :

$$\begin{aligned}F &= \{(x+1)^2(ax+b) \ / \ a,b \in \mathbb{R}\}\\ &= \{ax(x+1)^2 + b(x+1)^2 \ / \ a,b \in \mathbb{R}\}\\ &=< \{x(x+1)^2, (x+1)^2\} >\end{aligned}$$

qui est donc un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$, avec $e_1 = x(x-1)^2$ et $e_2 = (x-1)^2$. On a $\mathcal{B}_1$ engendre F et on vérifie facilement que $\mathcal{B}_1$ est libre. Donc $\mathcal{B}_1$ est une base de F.

   De même, on vérifie que $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2)$ est une base de G, avec $f_1 = x(x+1)^2$ et $f_2 = (x+1)^2$.

3. Pour montrer que $E = F \oplus G$ et puisque $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, il suffit de montrer que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.
   Montrons que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{e_1, e_2, f_1, f_2\}$ est libre.
   Soit alors $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tel que $ae_1 + be_2 + cf_1 + df_2 = 0$. Or :

$$\begin{aligned}ae_1 + be_2 + cf_1 + df_2 &= ax(x-1)^2 + b(x-1)^2 + cx(x+1)^2 + d(x+1)^2\\ &= (a+c)x^3 + (-2a+b+2c+d)x^2 + (a-2b+c+2d)x + (b+d).\end{aligned}$$

   Dès lors, on a le système suivant :

$$\begin{cases} a + c = 0\\ -2a + b + 2c + d = 0\\ a - 2b + c + 2d = 0\\ b + d = 0 \end{cases} \quad \textit{ou encore} \quad \begin{cases} a = -c\\ b = -d\\ 4c = 0\\ 4d = 0. \end{cases}$$

   C'est à dire que $a = b = c = d = 0$.
   Ainsi, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est libre. De plus, $Card\,(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = 4 = \dim E$, donc $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E, ce qui achève la preuve de l'exercice.

Exercice 1.7: Soit E le sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{(1,2,0), (0,1,1), (1,0,-2)\}$. Déterminer une base de E et déduire la dimension de E.

Solution: Soit E le sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\mathcal{S} = \{e_1, e_2, e_3\}$, avec $e_1 = (1, 2, 0)$, $e_2 = (0, 1, 1)$ et $e_3 = (1, 0, -2)$.
On vérifie que $\mathcal{S}$ est lié, par exemple on remarque que $e_1 - 2e_2 - e_3 = 0$. Ainsi, $\mathcal{S}$ engendre E et n'est pas libre. Donc dim $E \leq 2$.
Aussi, on vérifie facilement que $\mathcal{S}_0 = \{e_1, e_2\}$ est libre et donc dim $< \mathcal{S}_0 >= 2$. Comme $< \mathcal{S}_0 > \subseteq E$, alors dim $E \geq$ dim $< \mathcal{S}_0 >= 2$ de sorte que dim $E = 2$. Cela montre que dim $E = 2 = Card\,(\mathcal{S}_0)$ et par suite $\mathcal{S}_0$ est une base de E car $\mathcal{S}_0$ est libre.

Exercice 1.8: Soit $E = \{ae^x + be^{-x}\ tel\ que\ a, b \in \mathbb{R}\}$ le sous ensemble du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, où x est une indéterminée sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On désigne par i et j les éléments de E définies par $i(x) = e^x$ et $j(x) = e^{-x}$. Montrer que $\{i, j\}$ est une base de E.
3. On désigne par r et s les éléments de E définies par $r(x) = e^x + e^{-x}$ et $s(x) = e^x - e^{-x}$. Montrer que $\{r, s\}$ est une base de E.
4. Calculer les coordonnées de i et j dans la base $\{r, s\}$.

Solution:

1. On a $E = \{ae^x + be^{-x}\ /\ \ a, b \in \mathbb{R}\} =< \{e^x, e^{-x}\} >$ est le sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par $\{e^x, e^{-x}\}$.
2. On a $\{i, j\}$ engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, où $i(x) = e^x$ et $j(x) = e^{-x}$. Pour montrer que $\{i, j\}$ est une base de E, il suffit de montrer que $\{i, j\}$ est libre.
   Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $ai + bj = \theta$ (où θ est l'application nulle), c'est à dire que $ae^x + be^{-x} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où $ae^{2x} + b = 0$ et donc $b = -ae^{2x}$. Supposons que $a \neq 0$. Donc :
   $$b = \lim_{x \to +\infty} \left(-ae^{2x}\right) = \mp\infty$$
   suivant le signe de a, ce qui est absurde. Donc $a = 0$ et par conséquent $b = 0$. Ainsi $\{i, j\}$ est une base de E.

3. On désigne par r et s les éléments de E définies par $r(x) = e^x + e^{-x}$ et $s(x) = e^x - e^{-x}$ et montrons que $\{r, s\}$ est une base de E.
   On a dim $E = 2 = Card\,\{r, s\}$, ainsi, il suffit de montrer que $\{r, s\}$ est libre pour déduire que c'est une base de E.
   Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $ar + bs = \theta$ l'application nulle. D'où $\theta = ar + bs = a(i + j) + b(i - j) = (a + b)i + (a - b)j$ de sorte que $a + b = a - b = 0$ puisque $\{i, j\}$ est libre. D'où $a = b = 0$ et donc $\{r, s\}$ est une base de E.
4. Soit (a, b) les coordonnées du vecteur i dans la base $\{r, s\}$, c'est à dire que :

$$\begin{aligned} i &= ar + bs \\ &= a(i + j) + b(i - j) \\ &= (a + b)i + (a - b)j. \end{aligned}$$

   Ainsi, on a :

$$\begin{cases} a + b & = 1 \\ a - b & = 0 \end{cases}$$

   c'est à dire que $a = b = \frac{1}{2}$. Ainsi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sont les coordonnées du vecteur i dans la base $\{r, s\}$.
   On vérifie de même que $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ sont les coordonnées du vecteur j dans la base $\{r, s\}$.

Exercice 1.9: Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation :

$$H : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 0. \end{cases}$$

Posons $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, 0, 0, 0)$. Notons $L =< \{u, v\} >$.

1. Déterminer le sous-espace vectoriel $H \cap L$. Puis préciser une base de H.
2. Montrer que H et L sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.
3. Soient a, b, c, d quatre réels. Préciser la décomposition du vecteur (a, b, c, d) de $\mathbb{R}^4$, comme somme d'un vecteur de H et d'un vecteur de L.

Solution:

1. Soit $w \in H \cap L$. Comme $w \in L$, il existe a et b réels tels que :

$$\begin{aligned} w &= au + bv \\ &= a(1,1,1,1) + b(1,0,0,0) \\ &= (a+b, a, a, a). \end{aligned}$$

   Comme $w \in H$, ses coordonnées vérifient les équations de H. On obtient :

$$\begin{cases} (a+b) + a + a + a &= 0 \\ (a+b) - a + a - a &= 0. \end{cases}$$

   Soit $4a + b = 0$ et $b = 0$. Ainsi, $a = b = 0$ et $w = 0$. Nous avons ainsi montré que $H \cap L = \{0\}$.

2. Le vecteur $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in H$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

   ou encore si et seulement si :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ \quad\ 2x_2 \qquad + 2x_4 &= 0 \end{cases}$$

   ou encore si et seulement si :

$$\begin{cases} x_2 = -x_4 \\ x_1 = -x_3. \end{cases}$$

   Ainsi, $H = \{x_3(-1,0,1,0) + x_4(0,-1,0,1) \text{ \textit{tels que} } x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$. La famille $\{(-1,0,1,0), (0,-1,0,1)\}$ est donc une famille génératrice de H. Elle est libre, car si

$$x_3(-1,0,1,0) + x_4(0,-1,0,1) = 0$$

   on obtient :

$$(-x_3, -x_4, x_3, x_4) = (0,0,0,0)$$

   et $x_3 = x_4 = 0$. Ainsi, $\{(-1,0,1,0), (0,-1,0,1)\}$ est une base de H. En particulier, $\dim_{\mathbb{R}}(H) = 2$.

   On montre facilement que la famille (u, v) est libre. Elle engendre L

par définition. C'est donc une base de L et $\dim_{\mathbb{R}}(L) = 2$.
Ainsi, nous avons $H \cap L = \{0\}$ de sorte que $H \oplus L \subseteq \mathbb{R}^4$. De plus, on a $\dim_{\mathbb{R}}(H \oplus L) = \dim_{\mathbb{R}} H + \dim_{\mathbb{R}} L = 2 + 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$. Cela assure que $H \oplus L = \mathbb{R}^4$, c'est-à-dire que H et L sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

3. Comme H et L sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$, le vecteur (a, b, c, d) de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique :

$$(a, b, c, d) = l + h \quad avec \;\; l \in L \quad et \quad h \in H.$$

Comme $l \in L$, il existe α et β réels tels que :

$$l = \alpha u + \beta v = \alpha(1, 1, 1, 1) + \beta(1, 0, 0, 0) = (\alpha + \beta, \alpha, \alpha, \alpha).$$

On obtient :

$$h = (a, b, c, d) - (\alpha + \beta, \alpha, \alpha, \alpha) = (a - \alpha - \beta, b - \alpha, c - \alpha, d - \alpha).$$

Exprimons que $h \in H$, on obtient :

$$\begin{cases} a - \alpha - \beta + b - \alpha + c - \alpha + d - \alpha = 0 \\ (a - \alpha - \beta) - (b - \alpha) - (c - \alpha) - (d - \alpha) = 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} a + b + c + d & = 4\alpha + \beta \\ a - b + c - d & = \beta. \end{cases}$$

Il vient :

$$\begin{cases} \beta = a - b + c - d \\ \alpha = \frac{1}{2}(b + d). \end{cases}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{cases} l = (a - \frac{b}{2} + c - \frac{d}{2}, \frac{b}{2} + \frac{d}{2}, \frac{b}{2} + \frac{d}{2}, \frac{b}{2} + \frac{d}{2}) \\ \\ h = (\frac{b}{2} - c + \frac{d}{2}, \frac{b}{2} - \frac{d}{2}, -\frac{b}{2} + c\frac{d}{2}, -\frac{b}{2} + \frac{d}{2}). \end{cases}$$

Chapitre 2

Applications linéaires

2.1 Définition et propriétés

Soient E et E' deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.

Définition 1.1.

Une application $f : E \to E'$ est dite linéaire si pour tous $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Exemples :

1. L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y, z) = x + y + 2z$ est linéaire.
2. Soit E l'espace vectoriel des application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. L'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(g) = g(1)$ est linéaire.

Propriétés 1.2.

Soit $f : E \to E'$ une application linéaire. Alors :

1. $f(0) = 0$,
2. $f(x - y) = f(x) - f(y)$.

Preuve :

1. On a :
$$f(0_E) = f(0_{\mathbb{K}}.0_E) = 0_{\mathbb{K}} f(0_E) = 0_E.$$
2. Soit $x, y \in E$. On a :
$$\begin{array}{rcl} f(x-y) & = & f(x-y) + f(y) - f(y) \\ & = & f(x-y+y) - f(y) \\ & = & f(x) - f(y). \end{array}$$

□

Proposition 1.3.

Soit $f : E \to E'$ une application. On a l'équivalence entre :

1. *f est linéaire,*
2. *$f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y)$, pour tous $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.*

Preuve :
Supposons que f est linéaire et soient $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :
$$\begin{array}{rcl} f(x+\alpha y) & = & f(x) + f(\alpha y) \\ & = & f(x) + \alpha f(y) \end{array}$$

Inversement, supposons que $f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y)$, pour tous $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour $\alpha = 1$, on obtient $f(x + y) = f(x) + f(y)$; et pour $x = 0$ $f(\alpha y) = \alpha f(y)$ et ceci est vrai pour tous $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. D'où f est linéaire, ce qui achève la preuve. □

Remarque : si $f : E \to E'$ est linéaire, alors on a :
$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$
pour tous $x_i \in E$ et $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

Définition 1.4.

L'ensemble des applications linéaires de E dans E' se note $\mathcal{L}(E, E')$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$:

1. *f est dite un isomorphisme si f est bijective. L'ensemble des isomorphismes se note $\mathrm{Isom}(E, E')$,*
2. *f est dite un endomorphisme de E, si $E = E'$ entant que espace vectoriel. L'ensemble des endomorphisme se note $\mathcal{L}(E)$.*
3. *f est dite un automorphisme de E si f est un endomorphisme de E et bijective. L'ensemble des automorphismes se note $\mathrm{Aut}(E)$,*
4. *f est dite une forme linéaire si $E' = \mathbb{K}$. L'ensemble des formes linéaires se note $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ où E^* appelé duale de E.*

On vérifie facilement que l'ensemble des applications linéaires de E dans E', $\mathcal{L}(E, E')$, à une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ par les lois :

- $f + g : E \to E' \,;\, x \mapsto f(x) + g(x)$,
- $\lambda.f : E \to E' \,;\, x \mapsto \lambda f(x)$.

2.2 Application linéaire et sous espace vectoriel

Théorème et définition 2.1.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$. Alors on a :

1. *L'image d'un sous espace vectoriel de E par f est un sous espace vectoriel de E'.*
   En particulier $f(E)$ est un sous espace vectoriel de E' appelé image de f et se note $\mathrm{Im}(f)$:
   $$\mathrm{Im}(f) := \{f(x) \ / \ x \in E\} \subseteq E'.$$
2. *L'image réciproque d'un sous espace vectoriel de E' par f est un sous espace vectoriel de E.*
   En particulier $f^{-1}(\{0\})$ est un sous espace vectoriel de E appelé noyau de f et se note $\ker f$:
   $$\ker f := \{x \in E \ / \ f(x) = 0\} \subseteq E.$$

Preuve :

1. Soit F un sous espace vectoriel de E. Soient $x, y \in f(F)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, il existent $x', y' \in F$ tels que $x = f(x')$ et $y = f(y')$. Dès lors on a :
   $$\begin{array}{rcl} x + \alpha y & = & f(x') + \alpha f(y') \\ & = & f(x' + \alpha y'). \end{array}$$
   Or, F est un sous espace vectoriel de E, donc $x' + \alpha y' \in F$, par suite $x + \alpha y = f(x' + \alpha y') \in f(F)$.
2. Soit G un sous espace vectoriel de E'. Soient $x, y \in f^{-1}(G)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a $f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y)$, et comme $f(x), f(y) \in G$ et G est un sous espace vectoriel de E', alors $f(x+\alpha y) = f(x)+\alpha f(y) \in G$, et par suite $x + \alpha y \in f^{-1}(G)$.

$\square$

Proposition 2.2.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$. *On a :*

1. f *est surjective si, et seulement si,* $\mathrm{Im}(f) = E'$,
2. f *est injective si, et seulement si,* $\ker(f) = \{0\}$.

Preuve :

1. f est surjective si, et seulement si, $f(E) = E'$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = E'$.
2. Supposons que f est injective, et soit $x \in \ker f$. Alors $f(x) = 0$, et donc $f(x) = f(0)$, c'est-à-dire que $x = 0$. D'où, $\ker f = \{0\}$.
   Inversement, supposons que $\ker f = \{0\}$, et $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $f(x - x') = f(x) - f(x') = 0$ et par suite $x - x' \in \ker f = \{0\}$, c'est-à-dire que $x = x'$, ce qui termine la preuve.

$\square$

Théorème 2.3.

Tout espace vectoriel E *de dimension* n *est isomorphe à* $\mathbb{K}^n$, *moyennant le choix d'une base de* E

Preuve :
Soit $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une base de E. Tout vecteur x de E s'écrit d'une façon unique : $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Soit $\varphi : E \to \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\varphi(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

où $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$. Cette application est bijective et l'on vérifie facilement que c'est un homomorphisme. $\square$

Corollaire 2.4.

Deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps $\mathbb{K}$ *sont isomorphes si, et seulement si, ils ont même dimension sur* $\mathbb{K}$.

Théorème 2.5. (d'isomorphisme)

Soient E, E' deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ et $f : E \to E'$ une application linéaire. L'application $\Psi : E/\ker f \to \operatorname{Im} f$ telle que $\Psi(\overline{x}) = f(x)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. (Notation : $E/\ker f \cong \operatorname{Im} f$)

Preuve :
La correspondance Ψ est surjective par construction. Elle est aussi injective, puisque si $x, y \in E$, alors :

$$\begin{array}{rcl} \Psi(\overline{x}) = \Psi(\overline{y}) & \Leftrightarrow & f(x) = f(y) \\ & \Leftrightarrow & f(x-y) = 0 \\ & \Leftrightarrow & x - y \in \ker f \\ & \Leftrightarrow & \overline{x} = \overline{y}. \end{array}$$

De plus Ψ est linéaire car :

$$\begin{array}{rcl} \Psi(\lambda\overline{x} + u\overline{y}) & = & \Psi(\overline{\lambda x + uy}) \\ & = & f(\lambda x + uy) \\ & = & \lambda f(x) + u f(y) \\ & = & \lambda\Psi(\overline{x}) + u\Psi(\overline{y}). \end{array}$$

Ce qui achève la preuve. $\square$

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 2.6.

Soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E tels que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Alors :

$$(E_1 \oplus E_2)/E_1 \cong E_2 \quad \textit{et} \quad (E_1 \oplus E_2)/E_2 \cong E_1.$$

Preuve :
Soit $\Psi : E_1 \oplus E_2 \to E_2$ telle que $\Psi(x_1 + x_2) = x_2$. On a $\operatorname{Im}\Psi = E_2$ et $\ker\Psi = E_1$. D'où la proposition puisque Ψ est linéaire. $\square$

Corollaire 2.7.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et F un sous espace vectoriel de E. Alors $\dim(E/F) = \dim E - \dim F$.

Preuve :
Soit G un supplémentaire de F dans E :

$$E = F \oplus G.$$

On a donc $E/F = (F \oplus G)/F \cong G$; d'où :

$$\dim(E/F) = \dim G = \dim E - \dim F.$$

□

2.3 Rang d'une application linéaire

Théorème 3.1. (du rang)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps $\mathbb{K}$ et $f : E \to F$ une application linéaire. On a :

$$\dim E = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim \ker f.$$

Preuve :
C'est une conséquence du corollaire précédent et du fait que $E/\ker f \cong \operatorname{Im} f$.

Attention : Ne pas en déduire que E est somme directe de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$!. Par exemple, soit $E = \mathbb{R}^2$ et $f : E \to E$ telle que $f(x, y) = (0, x)$. Dans ce cas on a : $\ker f = \operatorname{Im} f = \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. □

Théorème 3.2.

Soient E, F deux espaces vectoriels de même dimension finie sur le même corps $\mathbb{K}$ et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors on a :

$$\begin{array}{rcl} f \text{ injective} & \Leftrightarrow & f \text{ surjective} \\ & \Leftrightarrow & f \text{ bijective.} \end{array}$$

Preuve :
Supposons que f est injective, c'est-à-dire $\ker f = \{0\}$, ou encore $\dim \ker f = 0$. D'après le théorème du rang on a : $\dim \operatorname{Im} f = \dim E = \dim F$ et par suite $\operatorname{Im} f = F$ et f est surjective.
Supposons maintenant que f est surjective, c'est-à-dire $\operatorname{Im} f = F$, ou encore $\dim \operatorname{Im} f = \dim F = n$. Alors le même théorème du rang montre que :

$$\begin{array}{rcl} \dim \ker f & = & \dim E - \dim \operatorname{Im} f \\ & = & \dim F - \dim \operatorname{Im} f \\ & = & 0 \end{array}$$

et donc $\ker f = \{0\}$; c'est-à-dire f est injective. D'où f est bijective.
Enfin trivialement on a si f est bijective, alors f est injective ce qui termine la preuve du théorème. $\square$

Définition 3.3.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle rang de f et on note $\operatorname{rg} f$ *ou* $\operatorname{rang}(f)$ *la dimension de* $\operatorname{Im} f$ *:* $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$.

2.4 Espace dual

Définition 4.1.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle forme linéaire définie sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des formes linéaires sur E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, noté E^*, dit dual de E :

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K}).$$

Notation Soit E un espace vectoriel et E^* son dual. Si $f \in E^*$ et $x \in E$, le scalaire $f(x)$ se note $\langle f, x \rangle$. Pour tous $f, g \in E^*$, $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$; on a :

1. $\langle f, x+y \rangle = \langle f, x \rangle + \langle f, y \rangle$
2. $\langle f, \alpha x \rangle = \alpha \langle f, x \rangle$
3. $\langle f+g, x \rangle = \langle f, x \rangle + \langle g, x \rangle$
4. $\langle \alpha f, x \rangle = \alpha \langle f, x \rangle$.

Théorème et définition 4.2. (base dual)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et E^* son dual. On appelle base duale de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E la base $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ de E^* définie par :

$$\theta_i(e_j) = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

ou aussi d'une façon équivalente ; si $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$, alors :

$$\theta_i(x) = \lambda_i$$

Notation : $\theta_i = e_i^*$.

Preuve :
On doit montrer que $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ est une base de E^*. Soit $f \in E^*$, alors on

a :

$$\begin{aligned}
\langle f, x\rangle &= \langle f, \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n\rangle \text{ (si } \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \theta_i, x\rangle f(e_i) \\
&= \langle \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\theta_i, x\rangle
\end{aligned}$$

D'où

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\theta_i$$

et $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ est un système générateur de E^*. C'est aussi un système libre car pour toute combinaison linéaire $\lambda_1\theta_1 + \ldots + \lambda_n\theta_n = 0$, on a : pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\langle \lambda_1\theta_1 + \ldots + \lambda_n\theta_n, e_i\rangle = 0$, c'est-à-dire pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\lambda_i = 0$. Ainsi $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ est une base de E^*. □

Conséquence : Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors on a : $\dim E^* = \dim E$.

Définition 4.3.

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $f \in E^*$ et $x \in E$. On dit que f et x sont orthogonaux lorsque $\langle f, x\rangle = 0$.
Si $M \subseteq E$ et $M' \subseteq E^*$. On dit que M et M' sont orthogonaux lorsque tout vecteur de M est orthogonal à tout vecteur de M'.
Notations :
$M^\perp = \{f \in E^* \mid \langle f, x\rangle = 0 \,;$ *pour tout* $x \in E\}$.
$M'^\perp = \{x \in E \mid \langle f, x\rangle = 0 \,;$ *pour tout* $f \in M'\}$.

On vérifie immédiatement qu'on a la proposition suivante :

Proposition 4.4.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

1. *Si $M \subseteq E$, $M^\perp$ est un sous espace vectoriel de E^*. De même si $M' \subseteq E^*$; $M'^\perp$ est un sous espace vectoriel de E^*.*
2. *Si $M_1 \subseteq M_2 \subseteq E$ alors on a :*
$$M_2^\perp \subseteq M_1^\perp \subseteq E^*.$$
De même si $M'_1 \subseteq M'_2 \subseteq E^*$ alors on a :
$$M_2'^\perp \subseteq M_1'^\perp \subseteq E.$$
3. *Si $X \subseteq E$, on a :*
$$X^\perp = < X >^\perp;$$
où $< X >$ est le sous espace vectoriel de E engendré par X.

Théorème 4.5. (Formule des compléments)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et M un sous espace vectoriel de E de dimension p. Alors on a :

1. $\dim M + \dim M^\perp = \dim E$.
2. $(M^\perp)^\perp = M$;
3. *Il existe $S := (f_1, \ldots, f_{n-p})$ libre dans E^* tel que $M = S^\perp$.*

Preuve :

1. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de M. On peut la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E. Tout $f \in E^*$ s'écrit sous la forme $f = \lambda_1 e_1^* + \ldots + \lambda_n e_n^*$, où $\lambda_i \in \mathbb{K}$. De plus on a :
$$\begin{aligned} f \in M^\perp & \Leftrightarrow \langle f, e_1\rangle = \ldots = \langle f, e_p\rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0 \\ & \Leftrightarrow f = \lambda_{p+1} e_{p+1}^* + \ldots + \lambda_n e_n^* \\ & \Leftrightarrow f \in < \{e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*\} > . \end{aligned}$$

Dès lors on a : $M^{\perp} =< \{e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*\} >$ et $\dim M^{\perp} = n - p$.

2. On a $M \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$ avec $\dim M(^{\perp})^{\perp} = \dim E - \dim M^{\perp} = \dim M$, cela implique que $M(^{\perp})^{\perp} = M$.
3. On considère une base $S = (f_1, \ldots, f_{n-p})$ de $M^{\perp}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} M & = & M(^{\perp})^{\perp} \\ & = & (< S >)^{\perp} \\ & = & S^{\perp}. \end{array}$$

□

Conséquence

L'orthogonalité est une bijection décroissante de l'ensemble des sous espaces vectoriels de E sur celui des sous espaces vectoriels de E^*.

2.5 Applications linéaires et familles

Proposition 5.1.

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, E')$, $\mathcal{G} = (e_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille génératrice de E. Alors $f = g$ si, et seulement si, $f(e_i) = g(e_i)$ pour tout $1 \leq i \leq m$.

Preuve :

Le sens direct est évident. Inversement, supposons que $f(e_i) = g(e_i)$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et soit $x \in E$. Alors $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$, pour certain $x_i \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & f(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i) \\ & = & \sum_{i=1}^{m} x_i f(e_i) \\ & = & \sum_{i=1}^{m} x_i g(e_i) \\ & = & g(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i) \\ & = & g(x). \end{array}$$

□

Théorème 5.2.

Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'éléments de E'. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \to E'$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, $f(e_i) = u_i$

Preuve :

Pour $x \in E$, x s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, où $x_i \in \mathbb{K}$. Alors, l'application f définie par $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ est visiblement l'unique application linéaire telle que $f(e_i) = u_i$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. $\square$

Proposition 5.3.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $\mathcal{F} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'éléments de E. On note $f(\mathcal{F}) = (f(u_i))_{1\leq i\leq n}$, alors on a :

1. *Si $f(\mathcal{F})$ est libre alors $\mathcal{F}$ est libre,*
2. *Si $\mathcal{F}$ est liée alors $f(\mathcal{F})$ est liée.*
3. *Si $\mathcal{F}$ est libre et f injective alors $f(\mathcal{F})$ est libre.*

Preuve :

1. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$. Donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = f(0) = 0$ et par suite on a $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ puisque $f(\mathcal{F})$ est libre.
2. D'après 1.
3. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i) = 0$. Alors $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = 0$ implique que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ puisque f est injective et donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ car $\mathcal{F}$ est libre.

$\square$

Proposition 5.4.

Soient $f \in \mathcal{L}(E,E')$ et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille d'éléments de E. Alors :

$$f(<\mathcal{F}>) = <f(\mathcal{F})> .$$

En particulier, si $\mathcal{F}$ est génératrice de E alors $\operatorname{Im} f = <(f(u_i)_i>$.

Preuve :

Soit $y \in f(<\mathcal{F}>)$. Alors, il existe $x \in <\mathcal{F}>$ tel que $y = f(x)$; et puisque $x \in <\mathcal{F}>$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ et par suite on a :

$$\begin{aligned} y &= f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i) \\ &\in <f(\mathcal{F})> . \end{aligned}$$

Réciproquement, si $y \in <f(\mathcal{F})>$, alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i)$, c'est-à-dire $y = f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) \in f(<\mathcal{F}>)$. $\square$

Proposition 5.5.

Soient $f \in \mathcal{L}(E,E')$ et $\mathcal{G} = (u_i)_{1 \le i \le n}$ une famille génératrice de E. Alors f est surjective si, et seulement si, $f(\mathbb{G})$ est une famille génératrice de E'.

Preuve :

On a f surjective si, et seulement si, $f(E) = E'$ si, et seulement si, $f(<\mathcal{G}>) = E'$ si, et seulement si, $<f(\mathcal{G})> = E'$ si, et seulement si, $f(\mathcal{G})$ est une famille génératrice de E'. D'où le résultat. $\square$

Remarque : D'après la proposition précédente, une application linéaire est surjective si, et seulement si, il transforme une famille génératrice en une famille génératrice.

Proposition 5.6.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E. Alors f est un isomorphisme si, et seulement si, $f(\mathcal{B})$ est une base de E'.

Preuve :
Si f est un isomorphisme, alors f est surjective et par suite $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de E'. Comme f est injective et $\mathcal{B}$ est libre alors $f(\mathcal{B})$ est libre. On en déduit que $f(\mathcal{B})$ est une base de E'.
Réciproquement, on suppose que $f(\mathcal{B})$ est une base de E'. En particulier, f transforme une famille génératrice en une famille génératrice, et donc elle est surjective.
Soit $x \in \ker f$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. D'où on a $0 = f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$ et puisque $f(\mathcal{B})$ est libre, on a $x_1 = \ldots = x_n = 0$, d'où $x = 0$. Ainsi $\ker f = \{0\}$ et f est un isomorphisme.
□

En d'autre terme, une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, il transforme une base en une base.

2.6 Projecteurs et symétries

2.6.1 Projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Définition 6.1.

Soient F et G deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans E, c'est-à-dire que $E = F \oplus G$.
L'application $E(= F \oplus G) \to E$, $x(= x_F + x_G) \mapsto x_F$, où $x_F \in F$ et $x_G \in G$, est appelé la projection sur F parallèlement à G. On la note $p_{F,G}$.

Propriétés 6.2.

Soit $p = p_{F,G}$. Alors :

1. *p est un endomorphisme de E et $p^2 = p$.*
2. *$\ker p = G$ et $\operatorname{Im} p = F$.*
3. *Pour tous $x, y \in E$, $y = p(x)$ si, et seulement si, $y \in F$ et $y - x \in G$.*
4. *$F = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$.*

Preuve :

1. Soit $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, et $x = x_F + x_G$, $y = y_F + y_G$ avec $x_F, y_F \in F$ et $x_G, y_G \in G$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} p(x+\alpha y) & = & p((x_F + \alpha y_F) + (x_G + \alpha y_G)) \\ & = & x_F + \alpha x_G = p(x) + p(y). \end{array}$$

D'où $p_{F,G}$ est linéaire. De plus, on a :

$$\begin{array}{rcl} p^2(x) & = & p(p(x)) \\ & = & p(x_F) \\ & = & p(x_F + 0) \\ & = & x_F \\ & = & p(x). \end{array}$$

2. Soit $x \in G$. Alors $x = 0 + x$, donc $p(x) = 0$ et par suite $x \in \ker p$. Réciproquement, si $x = x_F + x_G \in \ker p$, alors $0 = p(x) = x_F$ et par suite $x = x_G \in G$. Il vient alors que $\ker p = G$.

Soit $x \in E$. On a $p(x) = x_F \in F$ et donc $\operatorname{Im} p \subseteq F$. Réciproquement, si $x \in F$ (dans ce cas $x = x_F$), alors $x = x + 0$, et donc $p(x) = x$, par suite $x \in \operatorname{Im} p$. D'où $\operatorname{Im} p = F$.

3. Soit $x, y \in E$ et supposons que $y = p(x)$ et notons $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. La condition $y = p(x)$ est équivalent à $y = x_F$, d'où $y = x_F \in F$ et $y - x = x_F - x = -x_G \in G$.
Inversement, supposons que $y \in F$ et $y - x \in G$. Alors $x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{(x-y)}_{\in G}$
et donc $p(x) = y$.
4. On a :
$$\begin{aligned} x \in F &\Leftrightarrow p(x) = x \\ &\Leftrightarrow p(x) - x = 0 \\ &\Leftrightarrow (p - \operatorname{Id}_E)(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker(p - \operatorname{Id}_E). \end{aligned}$$

□

Définition 6.3.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un projecteur de E si $p^2 = p$.

Théorème 6.4.

Soit p un projecteur de E. Alors $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$.
p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

Preuve :
Soit $x \in \ker p \cap \operatorname{Im} p$. Alors il existe $x' \in E$ tel que $x = p(x')$ et $p(x) = 0$ de sorte que $x = p(x') = p^2(x') = p(p(x')) = p(x) = 0$. D'où $\ker p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$.
Soit maintenant $x \in E$. On a $x = p(x) + (x - p(x))$, et $p(x) \in \operatorname{Im} p$, $x - p(x) \in \ker p$ (car $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0$). D'où le résultat. □

2.6.2 Symétries

Définition 6.5.

Soient F et G deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E, c'est-à-dire que $E = F \oplus G$.
L'application $E = F \oplus G \to E$, $x = x_F + x_G \mapsto x_F - x_G$ est appelée la symétrie par rapport à F parallèlement à G, on la note $s_{F,G}$.

Proposition 6.6.

Soit $s = s_{F,G}$. Alors :

1. *s est un endomorphisme de E et $s^2 = \mathrm{Id}_E$.*
2. *$\ker(s - \mathrm{Id}_E) = F$ et $\ker(s + \mathrm{Id}_E) = G$.*
3. *Pour tous $x, y \in E$, $y = s(x)$ si, et seulement si, $x + y \in F$ et $x - y \in G$.*
   (la réciproque sous la condition que la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de 2).

Preuve :

1. On vérifie simplement que s est une application linéaire et que $s^2 = \mathrm{Id}_E$.
2. Avec les notations précédente, on a :

$$\begin{array}{rcl} x \in \ker(s - \mathrm{Id}_E) & \Leftrightarrow & s(x) = x \\ & \Leftrightarrow & x_F - x_G = x_F + x_G \\ & \Leftrightarrow & x_G = 0 \\ & \Leftrightarrow & x \in F. \end{array}$$

   et

$$\begin{array}{rcl} x \in \ker(s + \mathrm{Id}_E) & \Leftrightarrow & s(x) = -x \\ & \Leftrightarrow & x_F - x_G = -x_F - x_G \\ & \Leftrightarrow & x_F = 0 \\ & \Leftrightarrow & x \in G. \end{array}$$

3. Soit $x, y \in E$ tels que $y = s(x)$. Alors $y = x_F - x_G$, et donc $x + y = 2x_F \in F$ et $x - y = 2x_G \in G$. Réciproquement, si $x+y \in F$ et $x-y \in G$, alors $s(x+y) = x+y$ et $s(x-y) = -x+y$ de sorte que :

$$\begin{array}{rcl} s(2x) & = & s(x+y+x-y) \\ & = & s(x+y)+s(x-y) \\ & = & x+y-x+y \\ & = & 2y, \end{array}$$

et par suite $s(x) = y$.

□

Définition 6.7.

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On dit que s est une symétrie si $s^2 = \mathrm{Id}_E$.

Théorème 6.8.

Soit s une symétrie de E ($\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2). Alors $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Preuve :

Soit $x \in \ker(s - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(s + \mathrm{Id}_E)$. Alors $s(x) = -x$, $s(x) = x$ de sorte que $x = -x$ et donc $x = 0$.

Soit $x \in E$. On a $x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + s(x))}_{x_1} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - s(x))}_{x_2}$, avec :

$$\begin{array}{rcl} (s - \mathrm{Id}_E)(x_1) & = & \frac{1}{2}(s - \mathrm{Id}_E)(x - s(x)) \\ & = & ((s - \mathrm{Id}_E)(s + \mathrm{Id}_E))(x) \\ & = & (s^2 - \mathrm{Id}_E)(x) \\ & = & 0, \end{array}$$

par suite $x_1 \in \ker(s - \mathrm{Id}_E)$. Par un même raisonnement, on a $x_2 \in \ker(s + \mathrm{Id}_E)$. D'où le résultat. □

2.7 Exercices avec solutions

Exercice 2.1: On considère les applications linéaires :
$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, x - z)$
$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y) = (x + 2y, 3x - y, x + y)$

1. Déterminer une base de $Ker(f)$ et une base de $Im(f)$.
2. Déterminer une base de $Ker(g)$ et une base de $Im(g)$.

Solution:

1. On a $Ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x, y, z) = (0, 0)\}$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in Ker(f) &\iff (x + y, x - z) = (0, 0) \\ &\iff \begin{cases} x = -y \\ x = z. \end{cases} \end{aligned}$$

D'où, on a :

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{(x, -x, x) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x\,(1, -1, 1) \,/\, x \in \mathbb{R}\} \\ &= < (1, -1, 1) > . \end{aligned}$$

Puisque $(1, -1, 1) \neq 0$ alors le système $\{(1, -1, 1)\}$ est libre et ainsi c'est une base de $Ker(f)$.

D'après le théorème du rang, $\dim\, Im(f) = \dim\, \mathbb{R}^3 - \dim\, Ker(f) = 3-1 = 2$. Sachant que $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ on déduit que $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$ puisque $\dim\, Im(f) = \dim\, \mathbb{R}^2 (= 2)$. Une base de $\mathrm{Im}\, f$ et donc une base de $\mathbb{R}^2$, par exemple la base canonique $\{(1, 0), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
On pourra raisonner autrement. Soit $\{f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\}$ un système générateur de $Im(f)$, avec

$$f(1, 0, 0) = (1, 1) \quad , \; f(0, 1, 0) = (1, 0) \quad , \; f(0, 0, 1) = (0, -1) \,.$$

Il suffit de choisir deux vecteurs libres du système $\{(1, 1), (1, 0), (0, -1)\}$, soit $S = \{(1, 0), (0, -1)\}$. En effet, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si $\alpha(1, 0) + \beta(0, -1) = (0, 0)$ alors $\alpha = \beta = 0$. D'où on a $card(S) = \dim(\mathrm{Im}\, f)$ et S est un système libre de $\mathrm{Im}\, f$, par conséquent S est une base de $\mathrm{Im}\, f$.

2. On a $Ker(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, g(x, y) = (0, 0, 0)\}$.
   Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
(x, y) \in Ker(g) &\iff (x + 2y, 3x - y, x + y) = (0, 0, 0)\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x + 2y = 0\\ 3x - y = 0\\ x + y = 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x = -2y\\ -7y = 0\\ x = -y\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x = 0\\ y = 0.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

   D'où $Ker(g) = \{(0, 0)\}$.

   Cherchons une base de $\operatorname{Im} f$. On sait que $S = \{g(1, 0), g(0, 1)\}$ est un système générateur de $Im(g)$, avec :

$$\left\{\begin{array}{l} g(1, 0) = (1, 3, 1)\\ g(0, 1) = (2, -1, 1)\,.\end{array}\right.$$

   Du théorème du rang on a :

$$\begin{aligned}
\dim Im(g) &= \dim \mathbb{R}^2 - \dim Ker(g)\\
&= 2 - 0\\
&= 2\\
&= card(S),
\end{aligned}$$

   D'où, S est une base de $\operatorname{Im} g$ car S est un système générateur de $\operatorname{Im} g$.

Exercice 2.2: Soit $E = \mathbb{C}_3[X] = \{P \in \mathbb{C}[X] : deg(P) \leq 3\}$. Soit f l'application de E dans E définie par $f(P) = P(X + \alpha) - P(X + \beta)$, α et β étant deux complexes distincts.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.

Solution:

1. Il est clair que pour tout $P \in E$ on a $f(P) \in E$. En outre, soit $\eta \in \mathbb{C}$ et soient $P, Q \in E$; alors

$$\begin{aligned} f(P+Q) &= (P+Q)(X+\alpha) - (P+Q)(X+\beta) \\ &= P(X+\alpha) + P(X+\alpha) - P(X+\beta) - Q(X+\beta) \\ &= f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(\eta P) &= (\eta P)(X+\alpha) - (\eta P)(X+\beta) \\ &= \eta P(X+\alpha) - \eta P(X+\beta) \\ &= \eta f(P) \end{aligned}$$

D'où f est un endomorphisme de E.

2. On a $Ker(f) = \{P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 \in E \,/\, f(P) = 0\}$, ainsi on a :

$$\begin{aligned} P \in Ker(f) &\iff P(X+\alpha) - P(X+\beta) = 0 \\ &\iff \left[a + b(X+\alpha) + c(X+\alpha)^2 + d(X+\alpha)^3\right] \\ &\quad - \left[a + b(X+\beta) + c(X+\beta)^2 + d(X+\beta)^3\right] = 0 \\ &\iff \left[\left(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3\right) + \left(b + 2c\alpha + 3d\alpha^2\right)X + (c + 3d\alpha)X^2 + dX^3\right] \\ &\quad - \left[\left(a + b\beta + c\beta^2 + d\beta^3\right) + \left(b + 2c\beta + 3d\beta^2\right)X + (c + 3d\beta)X^2 + dX^3\right] = 0 \\ &\iff \left\{\begin{array}{ccccc} b(\alpha-\beta) & + & c(\alpha^2-\beta^2) & + & d(\alpha^3-\beta^3) & = 0 \\ & & 2c(\alpha-\beta) & + & 3d(\alpha^2-\beta^2) & = 0 \\ & & & & 3d(\alpha-\beta) & = 0 \end{array}\right. \\ &\overset{(\alpha\neq\beta)}{\iff} \left\{\begin{array}{ccc} b(\alpha-\beta) & + & c(\alpha^2-\beta^2) & = 0 \\ & & 2c(\alpha-\beta) & = 0 \\ & & d & = 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b\,(\alpha-\beta) & = 0 \\ c & = 0 \\ d & = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0. \end{cases}$$

Ainsi $Ker(f) = \{a \,/\, a \in \mathbb{C}\} =< 1 >$ et puisque 1 n'est pas nul, $\{1\}$ est libre et donc c'est une base de $Ker(f)$.

Cherchons une base de $\operatorname{Im} f$. On sait que $\{f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)\}$ est un système générateur de $Im(f)$, et que $\dim\, Im(f) = \dim\, E - \dim\, Ker(f) = 3$. Il suffit alors de choisir trois vecteurs libres. On a :

$$\begin{cases} f(X) = \alpha - \beta, \\ f(X^2) = (X+\alpha)^2 - (X+\beta)^2 = 2\,(\alpha-\beta)\,X + \alpha^2 - \beta^2, \\ f(X^3) = (X+\alpha)^3 - (X+\beta)^3 = 3\,(\alpha-\beta)\,X^2 + 3\left(\alpha^2-\beta^2\right)X + \alpha^3 - \beta^3. \end{cases}$$

Soient $l, m, n \in \mathbb{C}$, alors si

$$l\,[\alpha-\beta] + m\left[2\,(\alpha-\beta)\,X + \alpha^2 - \beta^2\right] + n\left[3\,(\alpha-\beta)\,X^2 + 3\left(\alpha^2-\beta^2\right)X + \alpha^3 - \beta^3\right] = 0,$$

alors on a :

$$l\,(\alpha-\beta) + m\left(\alpha^2-\beta^2\right) + n\left(\alpha^3-\beta^3\right) + \left[2\,(\alpha-\beta)\,m + 3n\left(\alpha^2-\beta^2\right)\right]X + 3n\,(\alpha-\beta)\,X^2 = 0.$$

Donc,

$$\begin{cases} l\,(\alpha-\beta) & + & m\,(\alpha^2-\beta^2) & + & n\,(\alpha^3-\beta^3) & = 0 \\ & & 2\,(\alpha-\beta)\,m & + & 3n\,(\alpha^2-\beta^2) & = 0 \\ & & & & 3n\,(\alpha-\beta) & = 0 \end{cases}$$

et par conséquent,

$$\begin{cases} l = 0 \\ m = 0 \\ n = 0. \end{cases}$$

D'où $S = \{f(X), f(X^2), f(X^3)\}$ est un système libre de $\operatorname{Im} f$, et donc c'est une base de $Im(f)$ puisque $\dim(\operatorname{Im} f) = card(S)$.

Exercice 2.3: Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique. Soit $f : E \longrightarrow E$ l'application définie par :

$$f(a_0 + a_1X + a_2X^2) = a_0(X + X^2) + a_1(X^2 + 1) + a_2(X - 1).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $Ker(f)$.
3. Déterminer une base de $Im(f)$.
4. Montrer que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Solution:

1. L'application f est un endomorphisme de E puisqu'on montre facilement que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tous $P, Q \in E$ on a $f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q)$.
2. On a $Ker(f) = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 \,/\, f(a_0 + a_1X + a_2X^2) = 0\}$, ainsi

$$\begin{aligned} a_0 + a_1X + a_2X^2 \in Ker(f) &\iff a_0(X + X^2) + a_1(X^2 + 1) + a_2(X - 1) = 0 \\ &\iff \begin{cases} a_1 = a_2 \\ a_0 = -a_1 = -a_2 \\ a_0 = -a_2 \end{cases} \end{aligned}$$

   de sorte que :

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{(-a_2) + a_2X + a_2X^2 \,/\, a_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a_2)\left(-1 + X + X^2\right) \,/\, a_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= < -1 + X + X^2 > . \end{aligned}$$

   Posons $f_1 = -1 + X + X^2$, $\{f_1\}$ est libre (car $f_1 \neq 0$) et engendre $Ker(f)$, donc c'est une base de $Ker(f)$.
3. D'après le théorème du rang, $\dim Im(f) = \dim E - \dim Ker(f) = 3 - 1 = 2$. Posons :

$$\begin{array}{ccccc} f_2 & = & X + X^2 & \in & Im(f) \\ f_3 & = & 1 + X^2 & \in & Im(f). \end{array}$$

   On vérifie que $\{f_2, f_3\}$ est libre, donc $\dim < \{f_2, f_3\} > = 2$ et $\{f_2, f_3\}$ est une base de $< \{f_2, f_3\} >$.
   Or $< \{f_2, f_3\} > \subseteq Im(f)$ et $\dim Im(f) = \dim < \{f_2, f_3\} >$. D'où, $Im(f) = < \{f_2, f_3\} >$ et par suite $\{f_2, f_3\}$ est une base de $Im(f)$.

4. On sait que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$ si et seulement si $\{f_1\} \cup \{f_2, f_3\} = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de E puisqu'on a $\{f_1\} \cap \{f_2, f_3\} = \emptyset$.
On vérifie que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre dans E avec $\dim\, E = card\{f_1, f_2, f_3\} = 3$, donc $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de E. D'où le résultat.

Exercice 2.4: Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ avec $f(x, y, z) = (x + y, x + y, x + y)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Trouver une base de $Ker(f)$.
3. Trouver une base de $Im(f)$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Solution:

1. On montre facilement que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^3$ on a $f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$. D'où f est un endomorphisme.
2. On a $Ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$. Or on a :
$$\begin{aligned} (x, y, z) \in Ker(f) &\iff (x + y, x + y, x + y) = (0, 0, 0) \\ &\iff x = -y. \end{aligned}$$
Par suite, on a :
$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{(x, -x, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x\,(1, -1, 0) + z\,(0, 0, 1) \,/\, x \in \mathbb{R}\} \\ &= <(1, -1, 0)\,, (0, 0, 1)> . \end{aligned}$$
De plus, on vérifie que $\{(1, -1, 0)\,, (0, 0, 1)\}$ est libre de sorte que le système $\{(1, -1, 0)\,, (0, 0, 1)\}$ est une base de $Ker(f)$.
3. On sait que $\dim\, Im(f) = \dim\, \mathbb{R}^3 - \dim\, Ker(f) = 1$. De plus, $f(1, 0, 0) = (1, 1, 1) \in \mathrm{Im}\, f$ et $\{(1, 1, 1)\}$ est libre (puisque $(1, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$). Dès lors, $\{(1, 1, 1)\}$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$ puisque $card\{(1, 1, 1)\} = \dim\, Im(f)$.
On pourra aussi remarquer que : :
$$\begin{aligned} Im(f) &= \{(x + y, x + y, x + y) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x + y)(1, 1, 1) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= <(1, 1, 1)> \end{aligned}$$
et du fait que $\{(1, 1, 1)\}$ est libre (car $(1, 1, 1) \neq 0$) alors c'est une base de $Im(f)$.

4. Puisqu'on a $\{(1,1,1)\} \cap \{(1,-1,0),(0,0,1)\} = \emptyset$, alors on a $E = Ker(f) \oplus Im(f)$ si et seulement si $\{(1,1,1)\} \cup \{(1,-1,0),(0,0,1)\} = \{f_1 := (1,1,1), f_2 := (1,-1,0), f_3 := (0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   On vérifie que $S = \{f_1, f_2, f_3\}$ est libre de $\mathbb{R}^3$ avec $\dim \mathbb{R}^3 = card(S)(= 3)$, donc S est une base de $\mathbb{R}^3$. D'où le résultat.

Exercice 2.5: Soit l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (x+y, x-y, x+2y). \end{aligned}$$

Déterminer une base de $Ker(f)$ et une base de $Im(f)$.

Solution: On a $Ker(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y) = (0,0,0)\}$. Or on a :

$$\begin{aligned} (x,y) \in Ker(f) &\iff (x+y, x-y, x+2y) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=0 \\ y=0. \end{cases} \end{aligned}$$

D'où f est injective. Donc, si (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ($e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$) alors $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est une base de $Im(f)$. On a :

$$\begin{cases} f(e_1) = (1,1,1) \\ f(e_2) = (1,-1,2). \end{cases}$$

D'où $\{(1,1,1),(1,-1,2)\}$ est une base de $Im(f)$.

Exercice 2.6: On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x-y, 2y+z). \end{aligned}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base et la dimension des sous espaces vectoriels $Ker(f)$ et $Im(f)$.
3. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Solution:

1. On montre que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^3$ on a :
$$f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y).$$
D'où f est une application linéaire.
2. • On a $Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = (0,0)\}$, ainsi
$$\begin{aligned}(x,y) \in Ker(f) &\iff (x-y, 2y+z) = (0,0)\\ &\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x = y \\ 2y = -z. \end{cases}\end{aligned}$$
Ainsi $Ker(f) = \{(x,x,-2x) \,/\, x \in \mathbb{R}\} = <(1,1,-2)>$.
Puisque $(1,1,-2) \neq 0$ alors le système $\{(1,1,-2)\}$ est libre et ainsi il est une base de $Ker(f)$. D'où, $\dim Ker(f) = 1$.
   • On a $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Ker(f) = 3 - 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Dés lors, $Im(f) = \mathbb{R}^2$ puisque $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^2$. Ainsi, la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
3. $Ker(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, donc f n'est pas injective. f est surjective puisque $Im(f) = \mathbb{R}^2$. Finalement f n'est pas bijective.

Exercice 2.7: On considère l'application suivante :
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (z-y, z-x, z). \end{aligned}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. On désigne par i l'endomorphisme identique de $\mathbb{R}^3$. Expliciter les applications $(f-i)$ et $(f+i)$.
3. Déterminer une base de $Ker(f-i)$ et une base de $Ker(f+i)$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = Ker(f-i) \oplus Ker(f+i)$.

Solution:

1. On montre que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y).$$

D'où f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Les deux applications s'écrivent :

$$\begin{array}{rccl} f - i : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (-x - y + z, -x - y + z, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} f + i : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x - y + z, -x + y + z, 2z). \end{array}$$

3. • Pour $Ker(f - i)$, on a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in Ker(f - i) &\iff (-x - y + z, -x - y + z, 0) = (0, 0, 0) \\ &\iff -x - y + z = 0 \\ &\iff z = x + y. \end{aligned}$$

Ainsi $Ker(f-i) = \{(x, y, x+y) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\} = < (1, 0, 1), (0, 1, 1) >$. On montre que le système $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ est libre et ainsi il présente une base de $Ker(f - i)$.

• Pour $Ker(f + i)$, on a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in Ker(f + i) &\iff (x - y + z, -x + y + z, 2z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi $Ker(f - i) = \{(x, x, 0) \,/\, x \in \mathbb{R}\} = < (1, 1, 0) >$.
On a $(1, 1, 0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ de sorte que $\{(1, 1, 0)\}$ est libre et ainsi c'est une base de $Ker(f + i)$.

4. Il suffit de montrer que le système $S = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ est libre puisque $card(S) = \dim \mathbb{R}^3$. Pour cela, soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\alpha(1,0,1)+\beta(0,1,1)+\gamma(1,1,0)=(0,0,0) &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha+\gamma=0 \\ \beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta=0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \alpha+\beta+2\gamma=0 \\ \beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta=0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \gamma=0 \\ \beta=0 \\ \alpha=0. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 2.8: Soit E l'espaces vectoriel défini par

$$E = \{P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d / a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

et soit l'application

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow E \\ P(X) &\longmapsto \frac{1}{2}P(X) - \frac{1}{2}P(-X). \end{aligned}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Trouver une base de $Ker(T)$ et une base de $Im(T)$.

Solution:

1. On montre que $\forall P \in E$, $T(P) \in E$; en effet,

$$\begin{aligned} T(aX^3+bX^2+cX+d) &= \frac{1}{2}\left[aX^3+bX^2+cX+d\right] - \frac{1}{2}\left[-aX^3+bX^2-cX+d\right] \\ &= aX^3+cX \in E \end{aligned}$$

Soient maintenant $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
T(\alpha P) &= \frac{1}{2}(\alpha P)(X) - \frac{1}{2}(\alpha P)(-X) \\
&= \frac{1}{2}\alpha P(X) - \frac{1}{2}\alpha P(-X) \\
&= \alpha T(P).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(P+Q) &= \frac{1}{2}(P+Q)(X) - \frac{1}{2}(P+Q)(-X) \\
&= \frac{1}{2}(P(-X)+Q(-X)) - \frac{1}{2}(P(-X)+Q(-X)) \\
&= \left[\frac{1}{2}P(X) - \frac{1}{2}P(-X)\right] + \left[\frac{1}{2}Q(X) - \frac{1}{2}Q(-X)\right] \\
&= T(P) + T(Q).
\end{aligned}$$

D'où T est un endomorphisme de E.

2. • Une base de $Ker(T)$:

   On a $Ker(T) = \{P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E \,/\, T(P) = 0\}$.
   Or on a :

$$\begin{aligned}
aX^3 + bX^2 + cX + d \in Ker(T) &\Longleftrightarrow T(aX^3 + bX^2 + cX + d) = 0 \\
&\Longleftrightarrow aX^3 + cX = 0 \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

   Donc $Ker(T) = \{bX^2 + d \,/\, b, d \in \mathbb{R}\} = < 1, X^2 >$, et puisque $\{1, X^2\}$ est libre (évident), donc c'est une base de $Ker(T)$.

   • Une base de $Im(T)$:

   On sait que $S = \{T(1), T(X), T(X^2), T(X^3)\}$ est un système générateur de $Im(f)$, et que $\dim Im(f) = \dim E - \dim Ker(f) = 2$. Il suffit alors de choisir deux vecteurs libres de S. Or on a :

$$\begin{aligned}
T(X) &= \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}(-X) = X \\
T(X^3) &= \frac{1}{2}X^3 - \frac{1}{2}(-X^3) = X^3.
\end{aligned}$$

   Comme $card\{X, X^3\} = \dim Im(T)$ et puisque $\{X, X^3\}$ est libre (évident) alors c'est une base de $Im(f)$.

Exercice 2.9: Construire un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g^3 = 0$ et $g^2 \neq 0$.

Solution: Essayons de chercher la forme d'un tel endomorphisme g. Puisque $g^2 \neq 0$, il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$g^2(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}.$$

On pose :

$$\mathcal{S} = \{u, v, w\}$$

où

$$v = g(u) \ et \ w = g^2(u).$$

Les vecteurs $u, \ v \ et \ w$ sont tous non nuls, car sinon $g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Montrons que le système $\mathcal{S}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\alpha, \ \beta, \ \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}. \tag{2.1}$$

Puisque g est linéaire, on a :

$$\begin{aligned} g(\alpha u + \beta v + \gamma w) &= \alpha g(u) + \beta g(v) + \gamma g(w) \\ &= 0_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

Du fait que, $v = g(u)$ et $w = g^2(u)$,

$$\alpha g(u) + \beta g^2(u) + \gamma g^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Cependant $g^3 = 0$. On obtient,

$$\alpha g(u) + \beta g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}. \tag{2.2}$$

On applique encore une fois g,

$$\begin{aligned} g(\alpha g(u) + \beta g^2(u)) &= \alpha g^2(u) + \beta g^3(u) \\ &= 0_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\alpha g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Finalement, puisque $g^2(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$,

$$\alpha = 0.$$

La relation (2.2) implique

$$\beta g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

et par suite

$$\beta = 0.$$

La relation (2.1) implique

$$\gamma g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

et par suite

$$\gamma = 0.$$

En conclusion, $\mathcal{S}$ est libre. Puisque $Card\,(\mathcal{S}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, le système $\mathcal{S}$ est alors une base de $\mathbb{R}^3$.

On a :

$$g(u) = v,\ g(v) = w \text{ et } g(w) = 0.$$

L'endomorphisme g est parfaitement défini par l'image d'une base de $\mathbb{R}^3$ qui est $\mathcal{S}$.

Ainsi, la construction d'un tel endomorphisme g est comme suit : étant donnée une base quelconque $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, l'endomorphisme g est défini par :

$$g(e_1) = e_2,\ g(e_2) = e_3 \text{ et } g(e_3) = 0.$$

Exercice 2.10: Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $e \in E$ et g un endomorphisme de E tel que $g^3 = 0$. Résoudre dans E l'équation :

$$e = x + g(x).$$

Solution: Soit x une solution de l'équation E. Puisque g est une application linéaire, alors :

$$\begin{aligned} g(e) &= g(x+g(x)) \\ &= g(x)+g^2(x) \end{aligned}$$

et par suite :

$$\begin{aligned} g^2(e) &= g(g(x)+g^2(x)) \\ &= g^2(x)+g^3(x). \end{aligned}$$

Du fait que $g^3=0$, on déduit que

$$g^2(e)=g^2(x).$$

Or

$$\begin{aligned} g(e) &= g(x)+g^2(x) \\ &= g(x)+g^2(e). \end{aligned}$$

Donc,

$$g^2(e)=g(e)-g(x).$$

Dès lors on a :

$$\begin{aligned} x &= e-g(x) \\ &= e-\big(g(e)-g^2(e)\big) \\ &= e-g(e)+g^2(e). \end{aligned}$$

Finalement,

$$S=\{e-g(e)+g^2(e)\}.$$

Exercice 2.11: Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et g un endomorphisme de E. Montrer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} Ker(g)=Ker(g^2) &\Longleftrightarrow Im(g)=Im(g^2) \\ &\Longleftrightarrow E=Ker(g)\oplus Im(g). \end{aligned}$$

Solution: Commençons par montrer les deux inclusions suivantes :

$$Ker(g) \subseteq Ker(g^2) \ \ et \ \ Im(g^2) \subseteq Im(g).$$

On a :

$$\begin{aligned} x \in Ker(g) &\Longleftrightarrow \ g(x) = 0 \\ &\Longrightarrow \ g^2(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \ x \in Ker(g^2). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$Ker(g) \subseteq Ker(g^2).$$

On a :

$$\begin{aligned} z \in Im(g^2) &\Longleftrightarrow \exists x \in E, \ z = g^2(x) \\ &\Longrightarrow \exists y = g(x) \in E, \ z = g(y) \\ &\Longleftrightarrow z \in Im(g). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$Im(g^2) \subseteq Im(g).$$

Montrons l'équivalence :

$$Ker(g) = Ker(g^2) \Longleftrightarrow Im(g) = Im(g^2).$$

Puisque

$$\dim\, E = \dim\, Im(g) + \dim\, Ker(g) \ \ et \ \ \dim\, E = \dim\, Im(g^2) + \dim\, Ker(g^2),$$

on obtient,

$$\dim\, Im(g) + \ \dim\, Ker(g) = \dim\, Im(g^2) + \dim\, Ker(g^2).$$

Si $Im(g^2) = Im(g)$ alors $\dim\, Ker(g) = \dim\, Ker(g^2)$. Dans ce cas, puisque $Ker(g) \subseteq Ker(g^2)$, on obtient :

$$Ker(g) = Ker(g^2).$$

Si $Ker(g) = Ker(g^2)$ alors $\dim\, Im(g) = \dim\, Im(g^2)$. Dans ce cas, puisque $Im(g^2) \subseteq Im(g)$, on obtient :

$$Im(g) = Im(g^2).$$

Montrons maintenant l'équivalence :

$$Im(g) = Im(g^2) \iff E = Ker(g) \oplus Im(g).$$

On suppose que $Im(g) = Im(g^2)$. Montrons que :

$$E = Ker(g) \oplus Im(g).$$

Puisque $\dim E = \dim Im(g) + \dim Ker(g)$, il suffit de montrer que :

$$Ker(g) \cap Im(g) = \{0_E\}.$$

Soit $z \in Ker(g) \cap Im(g)$. Il existe $x \in E$ tel que :

$$g(z) = 0_E \quad et \quad z = g(x).$$

Ainsi,

$$g^2(x) = 0_E.$$

Donc,

$$x \in Ker(g^2).$$

Cependant, puisque $Im(g) = Im(g^2)$, on a $Ker(g) = Ker(g^2)$. Par suite, $x \in Ker(g)$ et $z = g(x) = 0_E$. On en déduit que :

$$Ker(g) \cap Im(g) = \{0_E\}.$$

On suppose maintenant que $E = Ker(g) \oplus Im(g)$. Montrons que :

$$Im(g) = Im(g^2).$$

D'après ce qui précède, il suffit de vérifier que :

$$Im(g) \subseteq Im(g^2).$$

Soit $z \in Im(g)$. Il existe $y \in E$ tel que $z = g(y)$. Or $E = Ker(g) \oplus Im(g)$, donc il existe $x_1 \in Ker(g)$ et $x_2 \in E$ tels que $y = x_1 + g(x_2)$. Ainsi,

$$z = g(x_1 + g(x_2)).$$

Du fait que g est linéaire, on obtient :

$$\begin{aligned} z &= g(x_1) + (g \circ g)(x_2) \\ &= g^2(x_2) \end{aligned}$$

puisque $g(x_1) = 0$ car $x_1 \in Ker(g)$. Finalement, $z \in Im(g^2)$, ce qui achève la preuve de l'exercice.

Exercice 2.12: Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Pour k entier naturel donné, on pose $N_k = Ker(f^k)$ et $I_k = Im(f^k)$ (avec la convention $f^0 = Id_E$).

1. Montrer que : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(N_k \subset N_{k+1}\ et\ I_{k+1} \subset I_k\ )$.
2. Montrer que : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(N_k = N_{k+1} \Longrightarrow N_{k+1} = N_{k+2}\ )$.

   A partir d'ici, on suppose de plus que E est de dimension finie n.
3. **a)** Montrer que : il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{cases} k < p \Rightarrow\ \ N_k \subsetneqq N_{k+1} \\ et\ k \geq p \Rightarrow\ \ N_k = N_{k+1}. \end{cases}$$
   b) Montrer que $p \leq n$.
4. Montrer que :
$$\begin{cases} k < p \Rightarrow\ \ I_k \supsetneqq I_{k+1} \\ et\ k \geq p \Rightarrow\ \ I_k = I_{k+1}. \end{cases}$$
5. Soit $d_k = \dim I_k$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante (en d'autres termes la suite des images itérées décroît de moins en moins vite ou aussi les noyaux itérées croît de moins en moins vite).

Solution:

1. Soient k un entier naturel et x un élément de E. On a :
$$\begin{aligned} x \in N_k &\Longrightarrow f^k(x) = 0 \\ &\Longrightarrow\ f(f^k(x)) = 0 \\ &\Longrightarrow\ f^{k+1}(x) = 0 \\ &\Longrightarrow\ x \in N_{k+1}. \end{aligned}$$
   On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N},\ N_k \subset N_{k+1}$. Ensuite,
$$\begin{aligned} x \in I_{k+1} &\Longrightarrow \exists y \in E,\ x = f^{k+1}(y) \\ &\Longrightarrow \exists z (= f(y)) \in E,\ x = f^k(z) \\ &\Longrightarrow x \in I_k. \end{aligned}$$
   On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+1} \subset I_k$.

2. Soit k un entier naturel. Supposons que $N_k = N_{k+1}$ et montrons que $N_{k+1} = N_{k+2}$. On a déjà $N_{k+1} \subset N_{k+2}$. Montrons que $N_{k+2} \subset N_{k+1}$. Soit x un élément de E. On a :

$$\begin{aligned} x \in N_{k+2} &\Longrightarrow f^{k+2}(x) = 0 \\ &\Longrightarrow \ f^{k+1}(f(x)) = 0 \\ &\Longrightarrow f(x) \in N_{k+1} = N_k \\ &\Longrightarrow f^k(f(x)) = 0 \\ &\Longrightarrow \ f^{k+1}(x) = 0 \\ &\Longrightarrow x \in N_{k+1}. \end{aligned}$$

3. **a)** On a $\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset N_2 ...$ Supposons que chacune de ces inclusions soient strictes. Alors,
$$0 = \dim\ N_0 < \dim\ N_1 < \dim\ N_2 \cdots$$
Donc $\dim\ N_1 \geq 1$, $\dim\ N_2 \geq 2$ et par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dim\ N_k \geq k$. En particulier, $\dim\ N_{n+1} \geq n+1 > n = \dim\ E$, ce qui est impossible. Donc, il existe k entier naturel tel que $N_k = N_{k+1}$.
Ainsi, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N},\ N_k = N_{k+1}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. L'ensemble $\{k \in \mathbb{N},\ N_k = N_{k+1}\}$ admet donc un plus petit élément. Soit donc p le plus petit des entiers k tels que $N_k = N_{k+1}$. Par définition de p (et même si $p = 0$), pour $k < p$, $N_k \subsetneq N_{k+1}$. D'autre part, d'après 2) et puisque $N_p = N_{p+1}$, on montre par récurrence que pour tout $k \geq p$, on a $N_k = N_p$.
b) Si $p = 0$ (ou encore si f est surjectif), on a $p \leq n$. Sinon,
$$0 < \dim\ N_1 < \cdots < \dim\ N_p$$
et donc, par récurrence, pour $k \leq p$, on a $\dim\ N_k \geq k$. En particulier
$$p \leq \dim\ N_p \leq n.$$

4. Puisque $N_k \subset N_{k+1}$, $I_{k+1} \subset I_k$ et que $\dim\ E < +\infty$, on a :

$$\begin{aligned} N_k = N_{k+1} &\Longleftrightarrow \dim\ N_k = \dim\ N_{k+1} \\ &\Longleftrightarrow n - rg(f^k) = n - rg(f^{k+1}) \\ &\Longleftrightarrow \dim\ I_k = \dim\ I_{k+1} \\ &\Longleftrightarrow I_k = I_{k+1}. \end{aligned}$$

Donc, pour $k < p$, $I_k \supsetneq I_{k+1}$ et pour $k \geq p$, $I_k = I_{k+1}$.

5. Soient k un entier naturel puis g_k la restriction de f à I_k. D'après le théorème du rang,

$$d_k = \dim\, I_k = \dim\, Ker(g_k) + \dim\, Im(g_k).$$

Maintenant, $Im(g_k) = g_k(I_k) = f(I_k) = I_{k+1}$ et donc $\dim\, Im(g_k) = d_{k+1}$. D'autre part, $Ker(g_k) = Ker(f_{/I_k}) = Ker(f) \cap I_k$.
Ainsi, pour tout entier naturel k,

$$d_k - d_{k+1} = \dim(Ker(f)\ \cap I_k).$$

Puisque la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, la suite d'entiers naturels $(\dim(Ker(f) \cap I_k))_{k\in\mathbb{N}} = (d_k - d_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 2.13: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit u un endomorphisme de E.
On dit que u est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$ et on appelle alors l'indice de nilpotence de u le plus petit de ces entiers k.
Par exemple, le seul endomorphisme u, nilpotent d'indice 1 est l'endomorphisme nul.

1. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p. Montrer qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $(x_0, u(x_0), \cdots, u^{p-1}(x_0))$ soit libre.
2. Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer que $u^n = 0$.
3. On suppose dans cette question que u est nilpotent d'indice n exactement. Déterminer $rg(u)$.

Solution:

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de u.
Par définition, $u^{p-1} \neq 0$ et plus généralement, pour $1 \leq k \leq p-1$, $u^k \neq 0$ car si $u^k = 0$ alors $u^{p-1} = u^k \circ u^{p-1-k} = 0$ ce qui n'est pas le cas.
Puisque $u^{p-1} \neq 0$, il existe au moins un vecteur x_0 tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, et en particulier $x_0 \neq 0$.
Montrons que la famille $(u^k(x_0))_{0\leq k\leq p-1}$ est libre.
Soit $(\lambda_k)_{0\leq k\leq p-1} \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0.$$

Supposons par l'absurde qu'au moins un des coefficients λ_k ne soit pas nul. Soit $i = Min\ \{k \in [\![0, p-1]\!]\ /\ \lambda_k \neq 0\}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0 &\Longrightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0\\ &\Longrightarrow u^{p-1-i}\ (\ \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x_0)\ ) = 0\\ &\Longrightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^{p-1-i+k}(x_0)\ \ = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow \lambda_i u^{p-1}(x_0) = 0\ (car\ pour\ k \geq i+1, p-1-i+k \geq p\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad et\ donc\ u^{p-1-i+k} = 0\ )\\ &\Longrightarrow \lambda_i = 0\ (car\ u^{p-1}(x_0) \neq 0\ )\end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de i. Donc tous les coefficients λ_k sont nuls et on a montré que la famille $(u^k(x_0))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.

2. Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace et donc $p \leq n$. Par suite,

$$u^n = u^p \circ u^{n-p} = 0.$$

3. On applique l'exercice précédent. Puisque $u^{n-1} \neq 0$, on a $N_{n-1} \subsetneq N_n$. Par suite, les inclusions $N_0 \subset N_1 \subset ... \subset N_n = E$ sont toutes strictes et donc

$$0 < \dim\ N_1 < \dim\ N_2 < \cdots < \dim\ N_n = n.$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, notons d_k est la dimension de N_k. Par récurrence, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $d_k \geq k$.
Mais si de plus, pour un certain indice i élément de $[\![1, n-1]\!]$, on a $d_i = \dim\ N_i > i$, alors, par récurrence, pour $i \leq k \leq n$, on a $d_k > k$ et en particulier $d_n > n$ ce qui n'est pas le cas. Donc pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$,

$$\dim\ N_k = k.$$

D'après le théorème du rang, $rg(u^k) = n - k$ pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, et en particulier $rg(u) = n - 1$.

Exercice 2.14: Soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que :
$$(E_1 + E_2)^{\perp} = E_1^{\perp} \cap E_2^{\perp}.$$
2. Montrer que si F_1 et F_2 sont deux sous espace vectoriels de E^* de dimension finie, alors on a :
$$(F_1 + F_2)^{\perp} = F_1^{\perp} \cap F_2^{\perp}.$$
3. Montrer que :
$$E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow E^* = E_1^{\perp} \oplus E_2^{\perp}.$$

Solution: Soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Comme $E_1 + E_2 =< E_1 \cup E_2 >$, alors on a :
$$\begin{array}{rcl} f \in (E_1+E_2)^{\perp} & \Leftrightarrow & f \in < E_1 \cup E_2 >^{\perp} \\ & \Leftrightarrow & f \in (E_1 \cup E_2)^{\perp} \\ & \Leftrightarrow & (\forall x \in E_1, f(x) = 0) \text{ et } (\forall x \in E_2, f(x) = 0) \\ & \Leftrightarrow & f \in E_1^{\perp} \text{ et } f \in E_2^{\perp} \\ & \Leftrightarrow & f \in E_1^{\perp} \cap E_2^{\perp}. \end{array}$$
Dés lors on a :
$$(E_1 + E_2)^{\perp} = E_1^{\perp} \cap E_2^{\perp}.$$
2. Le même raisonnement que 1) aboutit à :
$$(F_1 + F_2)^{\perp} = F_1^{\perp} \cap F_2^{\perp}.$$
3. Supposons que $E = E_1 \oplus E_2$. Alors d'après 1) on a :
$$\begin{array}{rcl} E_1^{\perp} \cap E_2^{\perp} & = & (E_1 + E_2)^{\perp} \\ & = & E^{\perp} \\ & = & \{\theta\} \end{array}$$
où θ est la forme nulle de E^*. De plus on a :
$$\begin{array}{rcl} \dim(E_1^{\perp} \oplus E_2^{\perp}) & = & \dim E_1^{\perp} + \dim E_2^{\perp} \ (\text{car } E_1^{\perp} \cap E_2^{\perp} = \{\theta\}) \\ & = & (\dim E - \dim E_1) + (\dim E - \dim E_2) \\ & = & 2\dim E - (\dim E_1 + \dim E_2) \\ & = & \dim E \ (\text{car } E = E_1 \oplus E_2) \\ & = & \dim E^*. \end{array}$$

Dés lors on a : $E^* = E_1^\perp \oplus E_2^\perp$ puisqu'on a $E_1^\perp \oplus E_2^\perp \subseteq E^*$ et $\dim(E_1^\perp \oplus E_2^\perp) = \dim E^*$.
Avec le même raisonnement et en utilisant 2), on montre l'autre sens.

Chapitre 3

Matrices

3.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle matrice à n lignes et p colonne (ou de type (n,p)) à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute application de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$. Les images a_{ij} des couples (i,j) sont appelés coefficients ou termes de la matrice.

La matrice A est notée $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ ou sous forme de tableau rectangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

La suite $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip})$ est appelée i-ème ligne ou i-ème vecteur ligne de la matrice, c'est un élément de $\mathbb{K}^p$.

La suite $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ est appelée j-ème colonne ou i-ème vecteur colonne de la matrice, c'est un élément de $\mathbb{K}^n$. Si tous les coefficients de A sont nuls, on dit que A est la matrice nulle et se note 0.

L'ensemble des matrices de type (n,p) est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemples :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ est une matrice de type $(2,3)$, et à coefficients dans $\mathbb{R}$.
2. $\begin{pmatrix} 6 & 1+i & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ est une matrice de type $(1,5)$, et à coefficients dans $\mathbb{C}$

▶ Matrices carrées :

Définition 1.2.

1. *Une matrice de type (n,n) est appelée matrice carrée d'ordre n. La suite $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ est appelée diagonale principale. L'ensemble des matrice carrées d'ordre n à coefficients dans K se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
2. *On appelle matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée I_n , la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et les autres son nuls, c'est-à-dire que :*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

3. *On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$.*
4. *On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ est triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$.*
5. *Une matrice carrée est dite diagonale si $a_{ij} = 0$ lorsque $i \neq j$.*
6. *Une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont égaux est appelée matrice scalaire.*
7. *Une matrice carrée est dite symétrique (respectivement antisymétrique) si $a_{ij} = a_{ji}$ (respectivement $a_{ij} = -a_{ji}$) pour tous i,j de $[\![1,n]\!]$.*

3.2 Exemple fondamental (matrice d'une application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u \in L_{\mathbb{K}}(E,F)$. Soient $B_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $B_2 = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. On appelle matrice $(a_{ij})_{i,j}$ de u par rapport aux bases B_1 et B_2 la matrice dont les coefficients sont déterminés par les égalités :

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \quad \text{où} \quad j = 1, \ldots, p.$$

La matrice $(a_{ij})_{i,j}$ est de type (n,p). Le nombre de colonnes est égale a la dimension de E et le nombre de ligne est égale à la dimension de F. Le schéma suivant illustre la formulation de la matrice :

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \ldots & u(e_j) & \ldots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & & \ldots & \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \ldots & & \ldots & \\ a_{p1} & \ldots & a_{pj} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Notation : $[u]_{B_1 B_2} = (a_{ij})_{i,j}$.

Relation entre les composantes d'un vecteur et de son image :

Soient $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_j e_j$ un vecteur de E et $u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i f_i$ son image. Comme on a :

$$\begin{aligned} u(x) &= u(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \lambda_j u(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \lambda_j (\sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_{ij}) f_i, \end{aligned}$$

alors on a : $\boxed{u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij} \quad \forall i = 1, \ldots, n.}$

▶ Bijection entre $L_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

Une base B_1 étant fixée dans E et une base B_2 étant fixée dans F, l'application de $L_{\mathbb{K}}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui associé à u sa matrice $[u]_{B_1 B_2}$, est visiblement une bijection. Cette bijection dépend essentiellement du choix des bases dans E et F.

3.3 Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Lois de composition :

Choisissons deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F de dimensions respectivement p et n, une base $B_1 = (e_1, \ldots, e_p)$ de E et une base $B_2 = (f_1, \ldots, f_n)$ de F. On peut transporter la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel $Ł_{\mathbb{K}}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ par la bijection précédente. Cette bijection devenant alors un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soient $(a_{ij})_{i,j}$ et $(b_{ij})_{i,j}$ deux matrices de type (n, p). Elles sont associées respectivement à deux applications u et v de $L_{\mathbb{K}}(E, F)$. Leurs somme est donc la matrice associée à la somme $u + v$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} C_{ij} f_i &= (u + v)(e_j) = u(e_j) + v(e_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} f_i \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) f_i.
\end{aligned}$$

Donc $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$:

$$(a_{ij})_{i,j} + (b_{ij})_{i,j} = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}.$$

De même pour la loi externe, nous trouvons :

$$\lambda (a_{ij})_{i,j} = (\lambda a_{ij})_{i,j}.$$

Ces résultats montrent que la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel ainsi définie sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est indépendante des choix initiaux de E, F , B_1 et B_2.

Base canonique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$:
Désignons par E_{kl} la matrice de type (n,p) dont tous les termes sont nuls sauf le terme situé à la k-ième ligne et la l-ième colonne qui vaut 1. Toute matrice $(a_{ij})_{i,j}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{ij}E_{ij}$.
La famille $(E_{ij})_{(i,j)\in[1,n]\times[1,p]}$ est donc une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On l'appelle base canonique. Ainsi on a en particulier :

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np(= \dim E. \dim F).$$

3.4 Produit de matrices

Soient trois $\mathbb{K}$ espaces vectoriels E, F, G de dimensions respectives p, n, m, une base $(e_j)_j$ de E, une base $(f_i)_i$ de F, et une base $(g_h)_h$ de G. Ces choix étant faits, les ensembles $\mathcal{L}(F,G)$, $\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{L}(E,G)$ sont respectivement en bijection avec $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$.

Soit $A = (a_{hi})_{h,i}$ une matrice de type (m,n) et $B = (b_{ij})_{i,j}$ une matrice de type (n,p). Elles sont associées respectivement à un élément u de $\mathcal{L}(F,G)$ et à un élément v de $\mathcal{L}(E,F)$.
On appelle produit de A et de B dans cette ordre, la matrice $C = (c_{hj})_{h,j}$ de type (m,p) associée à l'élément $u \circ v$ de $\mathcal{L}(E,G)$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{h=1}^{m} c_{hj}g_h &= (u\circ v)(e_j)\\
&= u(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}f_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} b_{ij}u(f_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\sum_{h=1}^{m} a_{hi}g_h\\
&= \sum_{h=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_{hi})g_h.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{(a_{hi})_{h,i}(b_{ij})_{i,j} = (c_{hj})_{h,j} \text{ avec } c_{hj} = \sum_{i=1}^{n} a_{hi}b_{ij}.}$$

Le schéma suivant illustre la formulation du produit :

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hi} & \dots & a_{hn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \\ \dots & b_{ij} & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \\ \dots & b_{nj} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ \dots & c_{hj} & \dots \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Ce résultat montre que la matrice produit est indépendante des choix initiaux de E, F, G, $(e_j)_j$, $(f_i)_i$, $(g_h)_h$.

Remarque : Le produit de la matrice A par la matrice B, dans cet ordre, n'est défini que dans le cas où le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B.

Les propriétés ci-dessous sont conséquences des propriétés correspondantes des applications linéaires :

1. Si A est une matrices de type (n, p) alors $I_nA = A = AI_p$.
2. Soit trois matrices A, B, C, si l'un des produits $(AB)C$ et $A(BC)$ est défini, l'autre l'est aussi et ils sont égaux.
3. Soit trois matrices A, B, C, si l'une des expressions $A(B+C)$ ou $AB+AC$ est définie, l'autre l'est aussi et elles sont égales. On a une propriété analogue avec $(B+C)A$ et $BA+CA$.

Notation Matricielle : Soient $x = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j$ un vecteur de E, $u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i f_i$ son image, et $[u]_{B_1,B_2} = (a_{ij})$. Alors la relation $u_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\lambda_j$ $(\forall i =$

$1, \dots, n)$ peut s'écrire matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

3.5 Algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 5.1.

Une $\mathbb{K}$-algèbre est un ensemble E muni de trois lois de composition ; deux internes notées $+$ et $\times$ et une externe notée . tel que :

1. *$(E, +, \times)$ est un anneau.*
2. *$(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Exemple : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le produit des matrices est une loi de composition interne. Avec l'addition et cette multiplication, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à une structure d'anneau unitaire non commutatif et non intègre isomorphe à $\mathcal{L}(E, E)$. L'élément unité est la matrice identité I_n.

Groupe linéaire Le groupe multiplicatif des unités, c'est-à-dire des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est isomorphe au groupe des unités des $GL(E)$ de $\mathcal{L}(E)$. Il est dit groupe linéaire et noté $GL_n(\mathbb{K})$ ou $GL(n, \mathbb{K})$.
Une matrice A est inversible, c'est-à-dire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$, si, et seulement si, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$. Ceci résulte du fait que si u et v sont deux éléments de $\mathcal{L}(E)$, alors $u \circ v = \mathrm{Id}_E$ équivaut à $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

Définition 5.2.

Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble noté $C(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et défini par :

$$C(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ AB = BA, \ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}.$$

Proposition 5.3. (Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

On a :
$$C(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \{kI_n \mid k \in \mathbb{K}\}.$$

Preuve :
Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in C(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ c'est-à-dire que A se permute avec toutes les matrices E_{kl} éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Or l'égalité $AE_{kl} = E_{kl}A$ est équivaut aux n^2 égalités $a_{ik}\delta_{jl} = a_{lj}\delta_{ik}$; pour tous $i, j = 1, \ldots, n$. Pour $i = k$ quelconque on a $a_{kk}\delta_{jl} = a_{lj}$, donc si $j \neq l$; $a_{lj} = 0$, de sorte que les coefficients non diagonaux d'un élément du centre sont nuls. De plus, pour $j = l$ quelconque on a $a_{ll} = a_{kk}$ de sorte que les éléments diagonaux sont égaux. Un élément du centre est donc une matrice scalaire αI_n.
Réciproquement, une matrice scalaire αI_n, où $\alpha \in \mathbb{K}$ est évidement un élément du centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\square$

3.6 Transposée d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 6.1.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. *On appelle matrice transposée de* A *la matrice de* $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, *notée* ${}^tA$ *définie par* ${}^tA = (a'_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$ *où* $a'_{ij} = a_{ji}$ *pour* $1 \leq i \leq p$ *et* $1 \leq j \leq n$.
${}^tA$ *s'obtient en permutant les lignes de* A *par les colonnes de* A.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, alors on a ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Propriétés 6.2.

1. *Pour tous* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, *on a :* ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.
2. *Pour tous* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$, *on a :* ${}^t(\alpha A) = \alpha {}^tA$.
3. *Pour tous* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, *on a :* ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

En particulier, l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto \varphi(A) = {}^tA$ *est un* $\mathbb{K}$*-automorphisme d'espace vectoriel* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 6.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice inversible. Alors* ${}^tA$ *est inversible.*

Preuve :
Comme A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$. D'où :

$$\begin{aligned} I_n &= {}^tI_n \\ &= {}^t(AB) \\ &= {}^tB {}^tA, \end{aligned}$$

et donc ${}^tA$ est inversible. □

3.7 Exemple d'application des matrices

Dans la Faculté des sciences X de la ville V, il y a cinq sections qui sont : la mathématique, la physique, la chimie, la biologie et la géologie. Les études dans cette Faculté sont de trois niveaux : un premier cycle, un second cycle et un troisième cycle. Le nombre des étudiants inscrits à cette Faculté est donnée par le tableau suivant :

Faculté X	Maths	Physique	Chimie	Biologie	Géologie
Premier cycle X	65	80	110	156	75
Seconde cycle X	34	45	85	103	59
Troisième cycle X	3	1	2	0	0

Retenons que les ligne du tableau ci-dessus désignent les cycles et les colonnes désignent les sections, de la faculté X. Les informations du texte ci-dessus peuvent être données par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 65 & 80 & 110 & 156 & 75 \\ 34 & 45 & 85 & 103 & 59 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si le nombre des étudiants inscrits par cycle et par section, à la Faculté Y de la même ville V, est donnée par la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 40 & 85 & 132 & 112 & 85 \\ 27 & 40 & 85 & 86 & 59 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et si la question est de savoir combien il y a d'étudiants inscrit par section et par cycle dans l'ensemble des deux Facultés X et Y, alors il suffit de considérer la matrice :

$$A + B = \begin{pmatrix} 105 & 165 & 242 & 268 & 160 \\ 61 & 85 & 170 & 189 & 118 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Supposons que chaque étudiant de ces deux Facultés reçoit une bourse mensuelle de :

1. 600 DH s'il est en premier cycle.
2. 800 DH s'il est en deuxième cycle.
3. 1200 DH s'il est en troisième cycle.

Pour évaluer la somme d'argent, en dirham, versée mensuellement à chaque section, on peut procéder de la manière suivante : Posons $S = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \\ 1200 \end{pmatrix}$

S'il s'agit de la Faculté X, il suffit d'évaluer le produit matriciel $P = {}^tAS$, et s'il s'agit de la Faculté Y, il faut évaluer $Q = {}^tBS$.
Pour $i = 1, \ldots, 5$, la somme p_{i1} (respectivement s_{i1}) indique la somme versée, à la section correspondante à la ligne i de ${}^tA$ (respectivement ${}^tB$). D'où

$$P = {}^tAS = \begin{pmatrix} 65 & 34 & 3 \\ 80 & 45 & 1 \\ 110 & 85 & 2 \\ 156 & 103 & 0 \\ 75 & 59 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \\ 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69800 \\ 85200 \\ 136400 \\ 176000 \\ 92200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \\ p_{41} \\ p_{51} \end{pmatrix}$$

$$Q = {}^tBS = \begin{pmatrix} 40 & 27 & 0 \\ 85 & 40 & 0 \\ 132 & 85 & 0 \\ 112 & 86 & 0 \\ 85 & 59 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \\ 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45600 \\ 83000 \\ 147200 \\ 136000 \\ 98200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \\ s_{51} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, par exemple, on a versée la somme de 69800 DH à la section de mathématique de la Faculté X.

3.8 Matrice de passage

Soit E un K un espace vectoriel de dimension n et soit $B_1 = (e_j)_j$ et $B_2 = (e'_j)_j$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de B_1 à B_2 la matrice notée $P_{B_1}^{B_2} = (p_{ij})_{i,j}$ dont les coefficients sont définis par les égalités $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$. Autrement dit la j-ème colonne de $P_{B_1}^{B_2}$ est formée par les composantes de e'_j dans B_1. On peut interpréter la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2 des deux manières suivantes :

- Comme matrice par rapport à la base B_1 de l'automorphisme u défini par $u(e_j) = e'_j$, $\forall j = 1, \ldots, n$.
- Comme matrice par rapport aux bases B_2 et B_1 de l'application identique de E.

La matrice de passage P de la base B_1 à la base B_2 étant matrice d'un automorphisme, donc inversible. Son inverse est la matrice de passage de la base B_2 à la base B_1 : $(P_{B_1}^{B_2})^{-1} = P_{B_2}^{B_1}$.

Soit $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j e'_j$ un vecteur de E. Considérons les matrices unicolonnes :

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}.$$

La matrice P étant interpréter comme matrice par rapport aux bases B_2 et B_1 de l'application identique, le résultat s'écrit $X = P_{B_1}^{B_2} X'$. On a aussi :

$$X' = (P_{B_1}^{B_2})^{-1} X = P_{B_2}^{B_1} X.$$

Théorème 8.1.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n. Soient $B_1 = (e_j)_j$ et $B_1' = (e_j')_j$ deux bases de E et $B_2 = (f_i)_i$ et $B_2' = (f_i')_i$ deux bases de F, $P = P_{B_1}^{B_1'}$ et $Q = P_{B_2}^{B_2'}$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Posons $A = [u]_{B_1,B_2}$ et $A' = [u]_{B_1',B_2'}$. Les deux matrices A et A' vérifient :

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Preuve :
Cette égalité résulte de $u = \mathrm{Id}_F \circ u \circ \mathrm{Id}_E$, de la définition du produit de deux matrices, et du schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
E_{B_1} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "Id_E"] & F_{B_2} \arrow[d, "\mathrm{Id}_F"] \\
E_{B_1'} \arrow[r, "u"] & F_{B_2'}
\end{tikzcd}$$

Cas d'un endomorphisme : Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E, B et B' deux bases de E et $P = P_B^{B'}$. Posons $A = [u]_B$ et $A' = [u]_{B'}$. Alors on a :

$$A' = P^{-1}AP.$$

□

3.9 Matrices équivalentes matrices semblables

Définition 9.1.

1. *Deux matrices A et B de type (n, p) sont dites équivalentes s'ils existent deux matrices carrées R et S inversibles d'ordres respectives n et p telles que $B = RAS$.*
2. *Deux matrices A et B carrées d'ordre n sont dites semblables s'il existe une matrices carrée T inversible d'ordre n telle que $B = T^{-1}AT$.*

Remarque : Deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont aussi équivalentes, mais la réciproque est fausse.

On a les caractérisations suivantes :

Propriétés 9.2.

1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies respectives p et n. Le théorème précédent montre que deux matrices de type (n,p) sont équivalentes si, et seulement si, ce sont les matrices d'une même application linéaire par rapport à des bases différentes.*
2. *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie p. Le théorème précédent montre que deux matrices carrées d'ordre p sont semblables si, et seulement si, ce sont les matrices d'un même endomorphisme par rapport a des bases différentes.*

3.10 Rang d'une matrice

Théorème et définition 10.1.

Soit A une matrice de type (n,p). Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n. Toutes les applications linéaires de E dans F ayant par rapport à des bases convenables pour matrice A ont le même rang. De plus, ce rang est indépendant du choix de E et de F. Il est appelé rang de la matrice.

Preuve :
Soit u une application linéaire de E dans F dont la matrice est A par rapport à une base $B_1 = (e_j)_j$ de E et à une base $B_2 = (f_i)_i$ de F. Soit $(\varepsilon_j)_j$ et $(\varphi_i)_i$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$ et u_0 l'application de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice par rapport à ces bases est A. Soit r l'isomorphisme de $\mathbb{K}^p$ sur E définie par $r(\varepsilon_j) = e_j$, pour tous $j = 1, \ldots, p$ et s l'isomorphisme de F dans $\mathbb{K}^n$ défini par $s(f_i) = \varphi_i$, pour tous $i = 1, \ldots, n$ de sorte qu'on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E_{B_1} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "r"] & F_{B_2} \arrow[d, "s"] \\ \mathbb{K}^p_{(\varepsilon_j)} \arrow[r, "u_0"] & \mathbb{K}^n_{(\varphi_i)} \end{tikzcd}$$

Les applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, u_0 et $s \circ u \circ r$, ont même matrice A par rapport aux bases canoniques, elles sont donc égaux. Par suite, u et u_0 ont le même rang car r et s sont des isomorphismes. □

Remarques :

1. Par définition, le rang d'une matrice est égal au rang de la famille de ses vecteurs colonnes.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) = n$. En effet, si u est associé à A ; $u \in \mathcal{L}(E)$ alors :

$$\begin{array}{rcl} A \text{ est inversible} & \Leftrightarrow & u \text{ est bijective} \\ & \Leftrightarrow & u \text{ est surjective} \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{rg}(u) = n \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{rg}(A) = n. \end{array}$$

Théorème 10.2.

Toute matrice de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ de rang r est équivalente à la matrice $I_r^{(n,p)}$ avec :

$$I_r^{(n,p)} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Preuve :
Soit A une matrice de type (n,p) et de rang r. Choisissons deux $\mathbb{K}$ espaces

vectoriels E et F de dimensions respectives p et n. Soit u l'une des applications linéaires de matrice A. Soit $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_p)$ une base de E dont les $p-r$ derniers vecteurs forment une base du noyau de u. Alors, les vecteurs $u(e_1), \ldots, u(e_r)$ forment une base de l'image de u que l'on complète par des vecteurs de $f_{r+1}, \ldots, f_r$ en une base de F. Par rapport à ces bases, la matrice de u est la matrice $I_r^{(n,p)}$. □

Proposition 10.3.

Deux matrices de même type sont équivalentes si elles ont même rang.

Preuve :
Si deux matrices sont équivalentes, elles sont matrices d'une même applications linéaire, donc ont le même rang. Réciproquement ; deux matrices de même type et de même rang r, sont toutes équivalentes à $I_r^{(n,p)}$; donc équivalentes entre elles. □

Proposition 10.4.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$. Cela veut dire que le rang d'une matrice est aussi le rang du système de ses vecteurs lignes.

Preuve :
Soit $r = \mathrm{rg}(A)$. Alors d'après le théorème précédent ; A est équivalente à $I_r^{(n,p)}$; c'est-à-dire qu'il existe deux matrices carrées R et S inversibles d'ordres respectives n et p telles que $RAS = I_r^{(n,p)}$, d'où

$$\begin{array}{rcl} I_r^{(p,n)} & = & {}^t(I_r^{(n,p)}) \\ & = & {}^t(RAS) \\ & = & {}^tS\ {}^tA\ {}^tR. \end{array}$$

et comme ${}^tS$ et ${}^tR$ sont inversibles ; alors ${}^tA$ est équivalente à $I_r^{(p,n)}$ et par suite $\mathrm{rg}({}^tA) = r$. □

Corollaire 10.5.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(A) \leq \inf(n,p)$.

Exemple : Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Solution

1. <u>1ère méthode :</u>
   Soit $u = (1,2)$, $v = (3,4)$ et $w = (4,6)$. On a $\mathrm{rg}(A) = \dim\langle(u,v,w)\rangle$. Comme $w = u + v$ alors $\langle(u,v,w)\rangle = \langle(u,v)\rangle$. De plus on vérifie que (u,v) est libre dans $\mathbb{R}^2$, d'où (u,v) est une base de $\langle(u,v,w)\rangle = \langle(u,v)\rangle$. D'où $\mathrm{rg}(A) = \dim\langle(u,v,w)\rangle = 2$.
   <u>2ème méthode :</u>
   On a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$, avec ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. Posons $x = (1,3,4)$ et $y = (2,4,6)$. On vérifie que (x,y) est libre dans $\mathbb{R}^3$ et par conséquent c'est une base de $\langle(x,y)\rangle$. Ainsi on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA) = \dim\langle x,y\rangle = 2$.
2. On a $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}({}^tB)$, avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$. Posons $z = (1,3,5,7,9)$ et $t = (2,4,6,8,10)$. On vérifie que (z,t) est libre dans $\mathbb{R}^5$ et par conséquent c'est une base de $\langle(z,t)\rangle$. D'où, $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}({}^tB) = \dim\langle(z,t)\rangle = 2$.

3.11 Exercices avec solutions

Exercice 3.1: Soient B_0 la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B_1 = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$.

1. Montrer que B_1 est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
2. Donner les matrices de passage de B_0 à B_1 et de B_1 à B_0.

Solution:

1. On montre que B_1 est libre. De plus, $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = Card(B_1)$, donc B_1 est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. La matrice de passage de B_0 à B_1 notée $P_{B_0}^{B_1}$ est :
$$P_{B_0}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
$P_{B_1}^{B_0} = (P_{B_0}^{B_1})^{-1}$. On calcule les coordonnées des vecteurs de B_0 dans la base B_1 :
$$\begin{cases} (1,0,0) & = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(1,1,0) \\ (0,1,0) & = \beta_1(1,0,1) + \beta_2(0,1,1) + \beta_3(1,1,0) \\ (0,0,1) & = \gamma_1(1,0,1) + \gamma_2(0,1,1) + \gamma_3(1,1,0). \end{cases}$$
On calcule les α_i, β_i et γ_i et on obtient :
$$P_{B_1}^{B_0} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.2: Soit $A = I_3 + B$, où $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer par récurrence que B^n est un multiple de B.
3. En déduire A^n.

Solution:

1. On calcule A^2 et A^3 (produit matriciel).
2. On a $B^2 = 3B$, d'où par récurrence, on obtient que $B^n = 3^{n-1}B$.
3. $A^n = (I_3 + B)^n$. Comme $I_3B = BI_3$, la formule de binôme de Newton est applicable. On a :

$$\begin{aligned}
A^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (I_3)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k \\
&= I_3 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k 3^{k-1} B \\
&= I_3 + \left(\frac{1}{3}B\right)\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k 1^{n-k} - 1\right) \\
&= I_3 + \frac{1}{3}B[(3+1)^n - 1] \\
&= I_3 + \frac{4^n - 1}{3}B.
\end{aligned}$$

Exercice 3.3: Soit E l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $\mathcal{B} := \{1, X, X^2\}$ est une base de E. Soit f l'application linéaire de E vers E définie pour tout $P := a + bX + cX^2 \in E$ par :

$$f(P) = a(X + X^2) + b(X^2 + 1) + c(X - 1).$$

2. Calculer la matrice A de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.
3. Soient $P_0 = 1 - X - X^2$, $P_1 = X + X^2$ et $P_2 = X^2 + 1$. Montrer que $\mathcal{S} := \{P_0, P_1, P_2\}$ est une base de E.
4. Calculer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{S}$.
5. Déterminer la matrice P^{-1}.
6. Soit N la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{S}$. Écrire N en fonction de A, P, P^{-1} et puis calculer N.

Solution:

1. On a $E = \{a + bX + cX^2 \ / \ a, b, c \in \mathbb{R}\} =< (1, X, X^2) >$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. $\mathcal{B} := (1, X, X^2)$ étant libre, c'est une base de E.
2. On a $f(1) = X + X^2$, $f(X) = X^2 + 1$ et $f(X^2) = X - 1$. D'où,
$$A = Mat(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. On vérifie que $\mathcal{S}$ est libre. De plus, $Card\,(\mathcal{S}) = 3 = \dim\, E$, donc $\mathcal{S}$ est une base de E.
4. On a :
$$\begin{cases} P_0 &= 1 - X - X^2 \\ P_1 &= X + X^2 \\ P_2 &= 1 + X^2. \end{cases}$$
D'où : $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
5. On doit chercher les coordonnées des vecteurs de la base B dans la base S. On a :
$$\begin{cases} P_0 &= 1 - X - X^2 \\ P_1 &= X + X^2 \\ P_2 &= 1 + X^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_0 + P_1 = 1 \\ P_1 = X + X^2 \\ P_2 = 1 + X^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 &= P_0 + P_1 \\ X &= P_1 - X^2 \\ X^2 &= P_2 - 1 = P_2 - P_0 - P_1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 &= P_0 + P_1 \\ X &= P_0 + 2P_1 - P_2 \\ X^2 &= -P_0 - P_1 + P_2. \end{cases}$$
D'où on a :
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
6. On a : $N = P^{-1}AP$, on calcule alors le produit de ces 3 matrices pour obtenir N.

Exercice 3.4: Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On considère les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (-1, 1, 0)$ et $e_3 = (3, 1, 0)$.
   a) Montrer que $\mathcal{B}_1 := (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}_1$.
   c) Calculer C^n pour tout entier naturel n.
2. **a)** Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$.
   b) Calculer P^{-1}.
   c) En déduire A^n pour tout entier naturel n.

Solution:

1. **a)** On montre que $\mathcal{B}_1$ est libre. De plus, $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = Card\,(\mathcal{B}_1)$, donc $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) On a :

   – $$\begin{aligned} f(e_1) &= f(i+k) \\ &= f(i) + f(k) \\ &= (5, 1, 0) + (-3, -1, 2) \\ &= (2, 0, 2) \\ &= 2e_1. \end{aligned}$$

   – $$\begin{aligned} f(e_2) &= f(-i+j) \\ &= f(-i) + f(j) \\ &= (-5, -1, 0) + (3, 3, 0) \\ &= (-2, 2, 0) \\ &= 2e_2. \end{aligned}$$

   – $$\begin{aligned} f(e_3) &= f(3i+j) \\ &= 3f(i) + f(j) \\ &= 3(5, 1, 0) + (3, 3, 0) \\ &= (18, 6, 0) \\ &= 6e_3. \end{aligned}$$

Donc,

$$C = Mat(f, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

c) On obtient par récurrence que $C^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}$, car C est une matrice diagonale.

2. **a)** La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Calculons P^{-1} qui est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}$. On a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} e_1 & = & i + k \\ e_2 & = & -i + j \\ e_3 & = & 3i + j \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} e_1 & = & i + k \\ 4i & = & -e_2 + e_3 \\ 4j & = & 3e_2 + e_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} i & = & -\frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{4}e_3 \\ j & = & \frac{3}{4}e_2 + \frac{1}{4}e_3 \\ k & = & e_1 - i = e_1 + \frac{1}{4}e_2 - \frac{1}{4}e_3. \end{array} \right.$$

Donc on a :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

c) Comme $A = PCP^{-1}$, alors pour tout entier naturel n on a :

$$A^n = PC^nP^{-1}.$$

D'où,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-2}(1+3^{n+1}) & 3.2^{n-2}(-1+3^n) & -3.2^{n-2}(-1+3^n) \\ 2^{n-2}(-1+3^n) & 3.2^{n-2}(1+3^{n-1}) & -2^{n-2}(-1+3^n) \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 3.5: Soit $E = \{M(a,b,c) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ a,b,c \in \mathbb{R}\}$, où :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a-3c & b \\ 3b & 3c-3b & a-3c \end{pmatrix}.$$

1. Trouver deux matrices J et K de E indépendantes de a, b et c telles que toute matrice de E s'écrit sous la forme : $M = aI_3 + bJ + cK$.
2. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
3. Calculer J^2, JK, et K^2.
4. En déduire que le produit de deux éléments de E est un élément de E.

Solution:

1. On a :
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a-3c & b \\ 3b & 3c-3b & a-3c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$
Donc, $M = aI_3 + bJ + cK$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.
La matrice J appartient à E pour $a = 0$, $b = 1$ et $c = 0$. De même pour K pour $a = 0$, $b = 0$ et $c = 1$.
2. L'ensemble E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car c'est un groupe pour l'addition matricielle et il est stable par loi externe, c'est à dire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toute matrice $M(a,b,c) \in E$, $\alpha M(a,b,c) = M(\alpha a, \alpha b, \alpha c) \in E$.
Le système générateur de E, $\{I_3, J, K\}$, est un système libre donc E est de dimension 3.
3. On a :
$$\begin{aligned} J^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\ &= K \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
JK &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ -9 & 9 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 3(I_3 - J)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -9 & 9 & 3 \\ 9 & -18 & 9 \end{pmatrix} \\
&= 3(J - K).
\end{aligned}
$$

Remarquer aussi que $JK = KJ$.

4. Soient M et N deux matrices de E.
   Ils existent a, b, c et a', b', c' des éléments de $\mathbb{R}$ tels que $M = aI_3 + bJ + cK$ et $N = a'I_3 + b'J + c'K$. On a :

$$
\begin{aligned}
MN &= (aI_3 + bJ + cK)(a'I_3 + b'J + c'K) \\
&= aa'I_3 + ab'J + ac'K + ba'J + bb'J^2 + bc'JK + ca'K + cb'KJ + cc'K^2 \\
&= aa'I_3 + ab'J + ac'K + ba'J + bb'K + 3bc'(I_3 - J) + ca'K + \\
&\quad 3cb'(I_3 - J) + 3cc'(J - K) \\
&= (aa' + 3bc' + 3cb')I_3 + (ab' + ba' - 3bc' - 3cb' + 3cc')J + \\
&\quad (ac' + bb' + ca' - 3cc')K.
\end{aligned}
$$

   D'où $MN \in E$, ce qui termine la preuve de l'exercice.

Exercice 3.6: Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Soit $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Exprimer $M(a,b)$ en fonction de I_3 et de A.
2. Soit F l'ensemble des matrices de la formes $M(a,b)$. Montrer que F est muni d'une structure d'espace vectoriel. Donner une base de F.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M(a,b)$. Soient $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (-1,0,1)$, $f_3 = (0,-1,1)$. Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.
4. Calculer $(M(a,b))^n$ puis A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution:

1. Clairement, on a $M(a,b) = aI_3 + bA$.
2. F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En effet, on vérifie que pour toutes matrices $M(a,b), M(a',b') \in F$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $M(a,b) + M(a',b') \in F$ et $\alpha M(a,b) = M(\alpha a, \alpha b) \in F$. Donc F est muni d'une structure d'espace vectoriel. Une autre façon de voir cela est que $F = \langle\{I_3, A\}\rangle$ est le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par $\{I_3, A\}$.
   La famille $\{I_3, A\}$ est une famille libre et génératrice de F et donc c'est une base de F.
3. On montre que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre. De plus, $\dim \mathbb{R}^3 = Card\,(\{f_1, f_2, f_3\})$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
   On note par $\{i, j, k\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a :
   - $$\begin{aligned} f(f_1) &= f(i+j+k) \\ &= f(i) + f(j) + f(k) \\ &= (a,b,b) + (b,a,b) + (b,b,a) \\ &= (a+2b, a+2b, a+2b) \\ &= (a+2b)f_1. \end{aligned}$$
   - $$\begin{aligned} f(f_2) &= f(-i+k) = f(-i) + f(k) \\ &= (-a,-b,-b) + (b,b,a) \\ &= (b-a, 0, a-b) \\ &= (a-b)f_2. \end{aligned}$$
   - $$\begin{aligned} f(f_3) &= f(-j+k) \\ &= f(-j) + f(k) \\ &= (-b,-a,-b) + (b,b,a) \\ &= (0, b-a, a-b) \\ &= (a-b)f_3. \end{aligned}$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1 = \{f_1, f_2, f_3\}$ est :

$$C = Mat(f, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

4. En calculant la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_1 = \{f_1, f_2, f_3\}$, on trouve :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche les coordonnées des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_0$ dans la base $\mathcal{B}_1$, on trouve la matrice P^{-1} qui est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

On a $M(a,b) = PCP^{-1}$. Par récurrence on a :

$$M(a,b)^n = PC^nP^{-1},$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effectuant les calculs on trouve :

$$M(a,b)^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (a+2b)^n + 2(a-b)^n & (a+2b)^n - (a-b)^n & (a+2b)^n - (a-b)^n \\ (a+2b)^n - (a-b)^n & (a+2b)^n + 2(a-b)^n & (a+2b)^n - (a-b)^n \\ (a+2b)^n - (a-b)^n & (a+2b)^n - (a-b)^n & (a+2b)^n + 2(a-b)^n \end{pmatrix}.$$

Soit encore,

$$M(a,b)^n = \frac{1}{3}M((a+2b)^n + 2(a-b)^n, (a+2b)^n - (a-b)^n).$$

On a $A = M(0,1)$. Donc,

$$\begin{aligned} A^n &= M(0,1)^n \\ &= \tfrac{1}{3}M(2^n + 2(-1)^n, 2^n - (-1)^n). \end{aligned}$$

Exercice 3.7: Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.
Soit l'application de E vers E définie pour tout $P \in E$ par :

$$f(P) = \frac{1}{2}(1 - X - X^3 + X^4)P'' + (1 - X^3)P' + (1 + X + X^2)P$$

où P' et P'' désignent respectivement la dérivée première et seconde de P.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice A de f relativement à la base canonique $(1, X, X^2)$ de E et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Solution:</u>

1. Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$. Montrons que $f(P)$ appartient à E.

$$\begin{aligned} f(P) &= \tfrac{1}{2}(1 - X - X^3 + X^4)(2a) + (1 - X^3)(2aX + b) + (1 + X + X^2)(aX^2 + bX + c) \\ &= (a+b+c)X^2 + (a+b+c)X + a + b + c \\ &= (a+b+c)(X^2 + X + 1). \end{aligned}$$

Donc $f(P) \in E$.
Soient P et Q deux éléments de E et α et β des réels, alors :

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= \tfrac{1}{2}(1 - X - X^3 + X^4)(\alpha P + \beta Q)'' + (1 - X^3)(\alpha P + \beta Q)' \\ &\quad + (1 + X + X^2)(\alpha P + \beta Q) \\ &= \tfrac{1}{2}(1 - X - X^3 + X^4)(\alpha P'' + \beta Q'') + (1 - X^3)(\alpha P' + \beta Q') \\ &\quad + (1 + X + X^2)(\alpha P + \beta Q) \\ &= \alpha f(P) + \beta f(Q). \end{aligned}$$

f est donc un endomorphisme de E.

2. On a $f(1) = f(X) = f(X^2) = 1 + X + X^2$, par suite :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Donc,
$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
et par suite, $A^3 = A.A^2 = 3A^2 = 3^2A$.
Supposons que $A^n = 3^{n-1}A$. Alors :
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n.A \\ &= 3^{n-1}A^2 \\ &= 3^nA. \end{aligned}$$
Par conséquent, $A^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3.8: Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E.
Soit $a \in \mathbb{R}^*$, on définit l'endomorphisme u par :
$$\begin{cases} u(e_1) &= a(e_2 + e_3) \\ u(e_2) &= a(e_1 + e_3) \\ u(e_3) &= a(e_1 + e_2). \end{cases}$$

1. Écrire les matrices des applications linéaires u, $u + Id_E$ et $u - 2aId_E$.
2. Déterminer une base (f_1, f_2) de $Ker(u + aId_E)$ et une base (f_3) de $Ker(u - 2aId_E)$ telles que la première composante de chaque vecteur f_i soit égale à 1 sur (e_1, e_2, e_3).
3. **a)** Vérifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de E.
   b) Écrire la matrice B de u par rapport à la base (f_1, f_2, f_3).
4. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que les éléments de la matrice B^n tendent vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$ si et seulement si $|a| < \frac{1}{2}$.
5. Soit A la matrice de u par rapport à la base (e_1, e_2, e_3). Étudier la limite pour $n \longrightarrow +\infty$ de chaque élément de la matrice A^n lorsque $|a| < \frac{1}{2}$.

Solution:

1. On a :

$$\begin{aligned}(u+aId_E)(e_1) &= u(e_1)+ae_1\\ &= a(e_1+e_2+e_3)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl}(u+aId_E)(e_2) & = & a(e_1+e_2+e_3)\\ (u+aId_E)(e_3) & = & a(e_1+e_2+e_3)\\ (u-2aId_E)(e_1) & = & -2ae_1+ae_2+ae_3\\ (u-2aId_E)(e_2) & = & ae_1-2ae_2+ae_3\\ (u-2aId_E)(e_3) & = & ae_1+ae_2-2ae_3.\end{array}$$

   Par suite les matrices de u, $u+aId_E$ et $u-2aId_E$ dans la base (e_1,e_2,e_3) sont respectivement :

$$\begin{pmatrix}0 & a & a\\ a & 0 & a\\ a & a & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a & a & a\\ a & a & a\\ a & a & a\end{pmatrix}\quad et\quad \begin{pmatrix}-2a & a & a\\ a & -2a & a\\ a & a & -2a\end{pmatrix}.$$

2. Soit $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$ un élément de E. On a $x\in Ker(u+aId_E)$ équivaut à

$$\begin{pmatrix}a & a & a\\ a & a & a\\ a & a & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

   c'est-à-dire que $x_1+x_2+x_3=0$.
   Par suite $x\in Ker(u+aId_E)$ si et seulement si $x=(-x_2-x_3)e_1+x_2e_2+x_3e_3=-x_2(e_1-e_2)-x_3(e_1-e_3)$.

   Si on pose $f_1=e_1-e_2$ et $f_2=e_1-e_3$ alors f_1 et f_2 appartiennent bien à $Ker(u+aId_E)$ (car $(u+aId_E)(f_1)=0=(u+aId_E)(f_2)$) et $Ker(u+aId_E)$ est engendré par f_1 et f_2.
   Soient α_1 et α_2 deux réels tels que $\alpha_1f_1+\alpha_2f_2=0$, c'est-à-dire que $(\alpha_1+\alpha_2)e_1-\alpha_1e_2-\alpha_2e_3=0$. Comme $\{e_1,e_2,e_3\}$ est une base de E alors $\alpha_1=\alpha_2=0$. D'où la famille $\{f_1,f_2\}$ est une base de $Ker(u+aId_E)$.

   De la même manière :

   $x\in Ker(u-2aId_E)$ équivaut à $\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3 &=0\\ x_1-2x_2+x_3 &=0\\ x_1+x_2-2x_3 &=0.\end{cases}$

C'est-à-dire $x_1 = x_2 = x_3$.
Donc $x \in Ker(u - 2aId_E)$ si et seulement si $x = x_1(e_1 + e_2 + e_3)$.

Si on pose $f_3 = e_1+e_2+e_3$, alors $f_3 \in Ker(u-2aId_E)$ et $Ker(u-2aId_E)$ est engendré par f_3. Comme ce dernier est un vecteur non nul, alors (f_3) est une base de $Ker(u - 2aId_E)$.

3. **a)** Soient α_1, α_2, α_3 trois réels tels que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$, ce qui équivaut à $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_3 - \alpha_1)e_2 + (\alpha_3 - \alpha_2)e_3 = 0$, d'où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
   Par suite $\{f_1, f_2, f_3\}$ est un système libre de E. Comme $\dim E = card\{f_1, f_2, f_3\}(= 3)$, alors $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de E.

   b) Comme f_1 et f_2 (resp., f_3) appartiennent à $Ker(u + aId_E)$ (resp., $Ker(u - 2aId_E)$), alors on a :
$$\begin{array}{l} u(f_1) = -af_1 \\ u(f_2) = -af_2 \\ u(f_3) = 2af_3. \end{array}$$

   Et la matrice B de u par rapport à la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ est :
$$B = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

4. Montrons que $B^n = \begin{pmatrix} (-a)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-a)^n & 0 \\ 0 & 0 & (2a)^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   La propriété est évidente pour $n = 0$.
   Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang n alors on a :
$$\begin{aligned} B^{n+1} = B^n.B &= \begin{pmatrix} (-a)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-a)^n & 0 \\ 0 & 0 & (2a)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-a)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-a)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (2a)^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
   On a donc l'expression de B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Les éléments de B^n tendent vers 0 si et seulement si $lim_{n \longrightarrow \infty}(2a)^n = 0$ ce qui équivaut à $|2a| < 1$, c'est-à-dire $|a| < \frac{1}{2}$.

5. La matrice de passage P de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (f_1, f_2, f_3) est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $A = PBP^{-1}$ de sorte que $A^n = PB^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que les éléments de A^n sont des combinaisons linéaires des éléments de B^n. Si $|a| < \frac{1}{2}$, les éléments de B^n tendent vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$, il en est de même des combinaisons linéaires de ses éléments et donc des éléments de A^n.

Exercice 3.9: Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose :

$$B = A - I_3.$$

1. Chercher B^2 et B^3.
2. En déduire que A est inversible, et calculer son inverse A^{-1} en fonction de B. Déterminer A^{-1}.

Solution:

1. On a :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Puisque $B^3 = 0$, alors on a :

$$(A - I_3)^3 = 0.$$

Comme $AI_3 = I_3A$, la formule de binôme est applicable et on a :

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0.$$

Donc,

$$A^3 - 3A^2 + 3A = I_3$$

et par suite on a :

$$A(A^2 - 3A + 3I_3) = I_3.$$

Finalement, A est inversible et

$$A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3.$$

Puisque

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 3.10: Soient U_0, V_0 et W_0 trois nombres réels donnés. On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}, (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liées par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} U_n = U_{n-1} + V_{n-1} \\ V_n = V_{n-1} + 2\,W_{n-1} \\ W_n = W_{n-1} \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui permet d'écrire le système sous la forme :
$$X_n = MX_{n-1}.$$
2. Calculer les puissances successives de A, où $A = M - I_3$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de M^n.
4. En faisant un raisonnement par récurrence, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U_n, V_n et W_n en fonction de U_0, V_0 et W_0.

Solution:

1. On a :
$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n-1} \\ V_{n-1} \\ W_{n-1} \end{pmatrix}.$$
En posant
$$X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} \quad et \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
on arrive à :
$$X_n = MX_{n-1}.$$
2. En posant $A = M - I_3$, on trouve :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Puisque

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors pour tout $n \geq 3$, on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Puisque A et I_3 commutent, la formule de binôme est applicable et on a :

$$\begin{aligned} M^n &= (A + I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, A^k \, (I_3)^{n-k} \\ &= C_n^0 \, A^0 + C_n^1 \, A^1 + C_n^2 \, A^2 \end{aligned}$$

car $A^k = 0$ pour tout $k \geq 3$. Ainsi,

$$M^n = I_3 + n\, A + \frac{n(n-1)}{2} A^2.$$

Donc,

$$\begin{aligned} M^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$X_n = M^n X_0.$$

Pour $n = 0$, la relation est bien vérifiée. Par récurrence, on suppose que $X_n = M^n X_0$ et montrons que $X_{n+1} = M^{n+1}X_0$.
Puisque $X_{n+1} = MX_n$, on trouve facilement que $X_{n+1} = M^{n+1}X_0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $X_n = M^n X_0$ et donc on a :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_0 + nV_0 + n(n-1)W_0 \\ V_0 + 2nW_0 \\ W_0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} U_n = U_0 \ + \ nV_0 \ + n(n-1)W_0 \\ V_n = V_0 + \ \ 2n \ W_0 \\ W_n = W_0. \end{cases}$$

Exercice 3.11: Soit g un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g^2 = 0$.

1. Montrer que $Im(g) \subseteq Ker(g)$.
2. Calculer la dimension du noyau et celle de l'image de g.
3. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle l'endomorphisme g a pour matrice
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution:

1. Soit $y \in Im(g)$. Par définition, il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = g(x)$. En appliquant g, on obtient $g(y) = g^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi, $y \in Ker(g)$. En conclusion,
$$Im(g) \subseteq Ker(g).$$

2. D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim\ Ker(g) + \dim\ Im(g) = \dim\ \mathbb{R}^3 = 3.$$

Puisque l'endomorphisme g est non nul, alors $\dim\ Im(g) \geq 1$. Ainsi,

$$\dim\ Ker(g) \leq 2.$$

Montrons que $\dim\ Ker(g) = 2$. Par l'absurde, on suppose que :

$$\dim\ Ker(g) \leq 1.$$

Puisque $Im(g) \subseteq Ker(g)$, on a :

$$\dim\ Im(g) \leq \dim\ Ker(g).$$

Ainsi,

$$\dim\ Im(g) \leq 1.$$

Donc,

$$\dim\ Ker(g) + \dim\ Im(g) \leq 2.$$

Contradiction avec le théorème du rang car $\dim\ \mathbb{R}^3 = 3$. En conclusion,

$$\dim\ Ker(g) = 2.$$

Puisque

$$\dim\ Ker(g) + \dim\ Im(g) = 3.$$

Alors,

$$\dim\ Im(g) = 1.$$

3. Puisque $\dim\ Im(g) = 1$, il existe $u \in \mathbb{R}^3,\ u \neq 0$, tel que :

$$Im(g) = < u > .$$

Par définition, il existe $w \in \mathbb{R}^3,\ w \neq 0$, tel que

$$g(w) = u.$$

Puisque $Im(g) \subseteq Ker(g)$, on déduit que $u \in Ker(g)$. Cependant,

$$\dim\ Ker(g) = 2.$$

Il existe alors un vecteur non nul $v \in Ker(g)$ tel que le système $\{u, v\}$ est une base de $Ker(g)$ et donc libre. On pose :

$$\mathcal{S} = \{u, v, w\}.$$

Montrons que le système $\mathcal{S}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Puisque g est linéaire,

$$\alpha g(u) + \beta g(v) + \gamma g(w) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Du fait que, $u = g(w) \in Ker(g)$, on a :

$$\beta g(v) + \gamma u = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Cependant, $v \in Ker(g)$ et par suite $g(v) = 0$. Comme $u \neq 0$, on a :

$$\gamma = 0.$$

Ainsi on a :

$$\alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Par construction, le système $\{u, v\}$ est libre, et par conséquent $\alpha = \beta = 0$. Donc, $\mathcal{S}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. On déduit que $\mathcal{S}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car $Card(\mathcal{S}) = \dim \mathbb{R}^3$.
La matrice M de l'endomorphisme g dans la base $\mathcal{S}$ est :

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(u) & g(v) & g(w) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ w \end{array} .$$

En effet, puisque $u \in Ker(g)$ et $v \in Ker(g)$, on obtient $g(u) = 0$, $g(v) = 0$ et $g(w) = u$.

Chapitre 4

Les déterminants

Dans ce chapitre, on va s'intéresser au coté pratique de la notion du determinant.

4.1 Déterminant d'une matrice carrée

4.1.1 Existence de la fonction déterminant

Notation Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note aussi $A = (C_1, \ldots, C_n)$, où C_j est la $j$ème colonne de A.

Théorème 1.1.

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$, appelée déterminant et notée det*, vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout scalaires α, β dans $\mathbb{K}$, pour tous vecteurs $C_1, \dots, C_j, C'_j, \dots, C_n \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$,*

$$\det(C_1, \dots, \alpha C_j + \beta C'_j, \dots, C_n) = \alpha \det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) + \beta \det(C_1, \dots, C'_j, \dots, C_n).$$

   L'application det *est linéaire par rapport à chaque colonne.*

2. *S'il existe deux indices $j \neq k$, avec $C_j = C_k = C$, alors on a :*

$$\det(C_1, \dots, C, \dots, C, \dots, C_n) = 0.$$

   L'application det *est dite alternée.*

3. $\det(I_n) = 1$.

On dit que l'application det *est n linéaire alternée.*

Notation : Si $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, son déterminant $\det(A)$ est noté :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4.1.2 Calcul des déterminants d'ordre un et deux

On a le résultat suivant :

Théorème 1.2.

1. *Si* $A = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, *alors* $\det(A) = a$.
2. *Si* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, *alors* $det(A) = ad - bc$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On a $\det(A) = 1.1 - 0.1 = 1$.

4.1.3 Calcul des déterminants d'ordre supérieurs

Notation : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note A^{ij} la matrice d'ordre $n-1$ obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j de A.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^{11} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{12} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Théorème 1.3.

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$. Alors on a :

1. *Pour tout $i = 1, \cdots, n$, on a :*
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij}).$$
C'est le développement du déterminant par rapport à la ligne i.
2. *Pour tout $j = 1, \cdots, n$, on a :*
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij}).$$
C'est le développement du déterminant par rapport à la colonne j.

Exemple : Calculons le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -4 + (-22) + 2(-10) \\ &= -46. \end{aligned}$$

Par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -22 - 3 - 21 \\ &= -46. \end{aligned}$$

D'après le théorème précédent, on obtient :

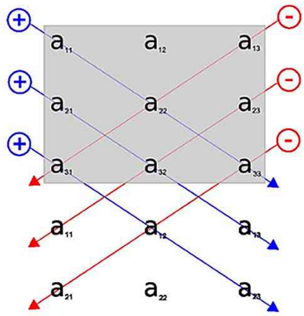
Corollaire 1.4.

Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure (ou supérieure). Alors on a :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Pour $n = 3$, on a une autre méthode pour calculer le determinant, dite méthode de Sarrus et elle est comme suit :

Méthode de Sarrus : Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3. On ajoute les deux premières lignes de A en bas :



et on calcul le déterminant comme suit :

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Exemple : Par la méthode de Sarrus, calculer le determinant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. On ajoute les deux premières lignes de A en bas :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} det(A) &= 1.1.5 + (-2).3.2 + 4.(-1).3 - 2.1.4 + 3.3.1 - 5.(-1).(-2) \\ &= 5 - 12 - 12 - 8 - 9 - 10 \\ &= -46. \end{aligned}$$

Remarque : Attention, la méthode de Sarrus n'est applicable que pour les matrices d'ordre trois, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

On a les corollaires importants suivants :

Corollaire 1.5.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$. Alors on a :

$$\det(A) = \det({}^tA),$$

où ${}^tA$ est la matrice transposée de A.

Corollaire 1.6.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\Delta := \det(A)$ sont déterminant. Alors on a

1. *Si on multiplie une ligne (respectivement une colonne) de A par un scalaire λ, la valeur de Δ est multipliée par λ.*
2. *Si une ligne (respectivement une colonne) de A est nulle, alors la valeur de Δ est nulle.*
3. *Si deux lignes (respectivement deux colonnes), d'indices différents, de A sont identiques, alors la valeur de Δ est nulle.*
4. *Si on échange deux lignes (respectivement deux colonnes) de A, alors la valeur de Δ est multipliée par -1.*
5. *La valeur de Δ ne change pas en ajoutant à l'une des lignes (respectivement des colonnes) de A une combinaison linéaire des autres lignes de A.*
6. *La valeur du déterminant Δ est nulle si, et seulement si, les vecteurs lignes (respectivement colonnes) de A forment une famille liée.*

On utilise 5) du corollaire précédent pour faire apparaitre des zéros et le calcul devient plus simple, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple :

1. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.
2. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 1, 2)$, $e_2 = (2, 4, 4)$ et $e_3 = (3, 5, 7)$. Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution :

1. On a :

$$\begin{array}{rcl} det(A) & = & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} \\ & \begin{array}{c} L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_1 \\ = \end{array} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{array}$$

On a remplacé la deuxième ligne L_2 par la deuxième ligne moins la première $L_2 - L_1$ et on a remplacé la troisième ligne L_3 par la troisième ligne moins deux fois la première ligne $L_3 - 2L_1$.

D'où on a :

$$det(A) = 1.2.1 = 2$$

car la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

2. B est libre car $det(B) = det(A) = 2 \neq 0$, d'après Corollaire 1.6(6). De plus, $card(B) = \dim \mathbb{R}^3$. Dès lors, B est une base de $\mathbb{R}^3$.

Concernant le déterminant du produit de matrices, on a :

Proposition 1.7.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ *où* $n \in \mathbb{N}^*$. *Alors :*

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Corollaire 1.8.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *alors on a :*

1. *A est inversible si, et seulement si,* $\det(A) \neq 0$.
2. *Si A est inversible alors* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Alors $\det(A) = 2 \neq 0$. Donc A est inversible et $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = \frac{1}{2}$.

4.1.4 Inverse d'une matrice inversible

Définition 1.9.

Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$. Si $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, on appelle mineur du coefficient a_{ij} le déterminant, $\det(A^{ij})$, de la matrice A^{ij}, obtenue en supprimant dans A, la $i$ème ligne et la $j$ème colonne. Le scalaire $(-1)^{i+j}\det(A^{ij})$ noté A_{ij}, s'appelle le cofacteur du coefficient a_{ij}. La matrice dont les coefficients sont les cofacteurs s'appelle la comatrice de A et on la note $\mathrm{com}(A)$.

Exemple : Soit $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculons les cofacteurs et la comatrice de A.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\det(A^{11}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\det(A^{12}) = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 22,$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\det(A^{13}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -10,$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\det(A^{21}) = 11,\ A_{22} = (-1)^{2+2}\det(A^{22}) = -3,\ A_{23} = (-1)^{2+3}\det(A^{23}) = -7,$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\det(A^{31}) = -5,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\det(A^{32}) = -7,\ A_{33} = (-1)^{3+3}\det(A^{33}) = -1.$

D'où la comatrice de A est :

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -4 & 22 & -10 \\ 11 & -3 & -7 \\ -5 & -7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.10.

Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Alors on a :*

1. $A^t(\mathrm{com}(A)) = {}^t(\mathrm{com}(A))A = \det(A)I_n$.
2. A *est inversible si, et seulement si,* $\det(A) \neq 0$*, et dans ce cas, on a :*
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t(\mathrm{com}(A)).$$

Exemple : Montrer que la matrice suivante de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible, puis calculer son inverse par la méthode des cofacteurs :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Solution :</u> On a $\det(A) = 1$. Ainsi la matrice A est inversible. De plus , on a :

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$, $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Ainsi, $\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et par suite l'inverse de la matrice A est la matrice :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A}{}^t(\mathrm{com}(A)) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telle que A est inversible.

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} {}^t(\mathrm{com}(A)) \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.1.5 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Proposition 1.11.

Soient n, p et q des entiers naturels tels que $p+q=n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs, c'est-à-dire A s'écrit sous l'une des deux formes :

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{qp} & D \end{pmatrix} \qquad ou \qquad A = \begin{pmatrix} B & 0_{qp} \\ C & D \end{pmatrix},$$

où $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et 0_{qp} est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K})$. Alors on a :

$$\det(A) = \det(B)\det(D).$$

Exemple : Calculer $\det(A)$, où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 100 & 201 & 17 \\ -1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution : Ici on a $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 100 & 201 & 17 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
Ainsi on a $\det(A) = \det(B)\det(D) = 4.(-3) = -12$.

4.2 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 2.1.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit f un endomorphisme de E. Alors on a :

$$\det(\mathcal{M}(f, \mathcal{B})) = \det(\mathcal{M}(f, \mathcal{B}')).$$

Définition 2.2.

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n et $f : E \to E$ un endomorphisme de E. On appelle déterminant de f, et le note $\det(f)$, le déterminant de la matrice de f par rapport à une base quelconque $\mathcal{B}$ de E ; $\det(f) = \det(\mathcal{M}(f, \mathcal{B}))$.

Déterminant et composition :

Proposition 2.3.

On suppose que E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

1. *Si f et g sont deux endomorphismes de E alors :*

$$\det(g \circ f) = \det(g)\det(f).$$

2. *f est un automorphisme de E si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$.*
3. *Si f est un automorphisme de E alors $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.*

Preuve :
Utiliser les résultats des matrices. □

4.3 Système de Cramer

Quand un système linéaire de n équations à n inconnues admet une solution unique, il existe une formule explicite qui relie la solution $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

aux coefficients. Elle est connue, au moins pour les faibles valeurs de n, depuis longtemps, même si elle est attribuée traditionnellement au mathématiciens genevois Gabriel Cramer (1704-1752).

A un système de n équations à n inconnues et à coefficient dans $\mathbb{K}$:

$$(S)\left\{\begin{array}{lllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1m}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2m}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & a_{nm}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

on associe la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et le second membre b défini par :

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Définition 3.1.

Soit (S) un système linéaire à n équations et n inconnues et soit M la matrice associée au système (S).
On dit que (S) est un système de Cramer lorsque $\det(M) \neq 0$, *c'est-à-dire que M est une matrice inversible.*

Exemple : Montrer que le système :

$$\left\{\begin{array}{lll} 2x - y + 4z & = & -4 \\ 3x + 2y - 3z & = & 17 \\ 5x - 3y + 8z & = & -10 \end{array}\right.$$

est un système de Cramer.

La matrice M associée au système est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

D'où le système est de Cramer vu que $det(M) = -23 \neq 0$.

Théorème 3.2.

Soient (S) un système de Cramer. Alors le système (S) admet un seul n-uplet solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, tel que, pour tout $i = 1, \cdots, n$, on a :

$$x_i = \frac{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, b, C_{i+1}, \dots, C_n)}{\det(M)},$$

où M est la matrice de (S), $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de M, et b est le second membre de (S).

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}^3$ le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + 4z & = & -4 \\ 3x + 2y - 3z & = & 17 \\ 5x - 3y + 8z & = & -10 \end{cases}$$

Le déterminant de la matrice associée au système est :

$\Delta = det(M) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = -23$. On a donc :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -1 & 4 \\ 17 & 2 & -3 \\ -10 & -3 & 8 \end{vmatrix}}{\Delta} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 3 & 17 & -3 \\ 5 & -10 & 8 \end{vmatrix}}{\Delta} = 4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 17 \\ 5 & -3 & -10 \end{vmatrix}}{\Delta} = -1.$$

D'où l'ensemble des solutions de (S) est $\mathrm{Sol}(S) = \{(2, 4, -1)\}$.

4.4 Exercices avec solutions

Exercice 4.1: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.

Solution: On a :

$$det(\lambda A) = det(\lambda I_n A) = det(\lambda I_n).det(A)$$

car λI_n est une matrice diagonale.

Exercice 4.2: Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$.
2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.
3. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

Solution:

1. En développant suivant la première ligne, on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} &= -a \begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} \\ &= abc + abc \\ &= 2abc. \end{aligned}$$

2. En sommant les colonnes sur la première et en factorisant, on obtient :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}.$$

En retirant la première ligne au suivante et en développant sur la première colonne, on obtient :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} &= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)\begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)).\end{aligned}$$

3. En retranchant à chaque ligne la précédente, en commençant par la dernière, on obtient :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} \\ &= a(b-a)(c-b)(d-c).\end{aligned}$$

Car c'est le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 4.3: Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Solution: En factorisant les colonnes, on obtient :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_{21}(-a)\\ L_{31}(-a^2)}}{=} abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= abc\,[(b-a)(c-a)(c+a)-(b-a)(b+a)(c-a)] \\ &= abc(b-a)(c-a)\ [(c+a)-(b+a)\ ] \\ &= abc(b-a)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

avec, $L_{ij}(\alpha)$ veut dire remplacer la ligne L_i par la ligne $L_i + \alpha L_j$ (la ligne L_i plus α fois la ligne L_j).

Exercice 4.4: Soit A une matrice antisymétrique réelle d'ordre $2n+1$.

Montrer que $\det(A) = 0$.

Ce résultat est-il encore vrai lorsque A est d'ordre pair ?

Solution: Comme on a ${}^tA = -A$ car A est antisymétrique, alors on a :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det({}^tA) \\ &= \det(-A) = (-1)^{2n+1}\det(A) \\ &= -\det(A). \end{aligned}$$

de sorte que $\det(A) = 0$.

Si la matrice A est d'ordre pair, le résultat n'est pas toujours vrai. En effet, la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est antisymétrique et $\det(A) = 1$ $(\neq 0)$.

Exercice 4.5: Pour $n \geq 2$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(A+X) = \det(A) + \det(X).$$

Montrer que $\det(A) = 0$ puis $A = 0$.

Solution:

Pour $X = A$, la relation $\det(A+X) = \det(A) + \det(X)$ devient :

$$2^n \det(A) = 2 \det(A)$$

de sorte que $\det(A) = 0$.

Soit r le rang de la matrice A. Alors $r < n$ car la matrice A n'est pas inversible $\big(\text{car } \det(A) = 0\big)$. Pour montrer que $A = 0$, on doit montrer que $r = 0$.

Raisonnons par absurde et supposons que $r \neq 0$.
On peut écrire $A = Q\, J_r\, P$ avec $P,\ Q$ inversibles et :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \theta_{n-r} \end{pmatrix}$$

avec I_r la matrice identité d'ordre r et θ_{n-r} la matrice nulle d'ordre $n-r$.
Posons alors $X = Q\, J'_r\, P$, avec :

$$J'_r = \begin{pmatrix} \theta_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Puisque $A + X = Q\, I_n\, P = Q\, P$, la matrice $A + X$ est inversible et donc

$$\det(X) = \det(X) + \det(A) = \det(A+X) \neq 0.$$

On en déduit que la matrice X est inversible et donc J'_r est l'identité et par suite $r = 0$, absurde.

Dès lors, le rang de A est nul et donc $A = 0$.

Exercice 4.6: Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec D inversible.

1. On suppose que C et D commutent. Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

2. Montrer que :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\left(AD - BD^{-1}CD\right).$$

Solution:

1. On a :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & \theta_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ \theta_n & D \end{pmatrix}$$

et en passant au déterminant, on obtient :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\ \det(D) = \det(AD - BC)\ \det(D)$$

de sorte qu'on obtient le résultat voulu puisque $\det(D) \neq 0$.

2. On a :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & \theta_n \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ \theta_n & D \end{pmatrix}$$

et en passant au déterminant, on obtient :

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \det(A - BD^{-1}C)\ \det(D) \\ &= \det(AD - BD^{-1}CD).\end{aligned}$$

Exercice 4.7: Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AC = CA$.
Montrer que :

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC).$$

Solution: Pour commencer, supposons que la matrice A est inversible. Le produit des matrices par blocs donne :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}C \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & D - BA^{-1}C \end{pmatrix}$$

de sorte qu'on obtient :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} &= \det(D - BA^{-1}C) \ \det(A) \\ &= \det(DA - BA^{-1}CA) \\ &= \det(DA - BC) \end{aligned}$$

car les matrices A^{-1} et C commutent puisque A et C commutent.

Supposons maintenant que A n'est pas inversible. Comme dans l'exercice 6.18 de la diagonalisation, la matrice $A_p = A + \frac{1}{p} I_n$ est inversible. De plus, A_p commute avec C puisque A commute avec C. Dès lors, et d'après ce qui précède, on obtient :

$$\det \begin{pmatrix} A_p & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA_p - BC)$$

de sorte qu'en passant à la limite quand $p \to +\infty$, la continuité du déterminant donne :

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC).$$

Exercice 4.8: Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices qui commutent. Montrer que les comatrices de A et B commutent.

Solution: Pour commencer, supposons que les matrices A et B sont inversibles. Puisque A et B commutent, leurs inverses commutent aussi de sorte qu'on a :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\det(A)}\right) {}^t(Com(A)) \left(\frac{1}{\det(B)}\right) {}^t(Com(B)) \\ &= \left(\frac{1}{\det(B)}\right) {}^t(Com(B)) \left(\frac{1}{\det(A)}\right) {}^t(Com(A)). \end{aligned}$$

En simplifiant et en transposant, on obtient :

$$Com(A)\ Com(B) = Com(B)\ Com(A).$$

Supposons maintenant que les matrices A et B ne sont pas forcement inversibles. Comme dans l'exercice 6.18 et pour p assez grand, les matrices $A+\frac{1}{p}I_n$ et $B+\frac{1}{p}I_n$ sont inversibles et commutent de sorte qu'on obtient :

$$Com(A+\frac{1}{p}I_n)\ Com(B+\frac{1}{p}I_n) = Com(B+\frac{1}{p}I_n)\ Com(A+\frac{1}{p}I_n).$$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient :

$$Com(A)\ Com(B) = Com(B)\ Com(A),$$

ce qui achève la preuve de l'exercice.

Exercice 4.9: Soient a, b, c et d des éléments de $\mathbb{R}$ deux à deux distincts. Montrer que le système suivant est de Cramer et le résoudre :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2. \end{cases}$$

Solution: La matrice associée au système à pour déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$$

et donc le système est de Cramer. Les formules de Cramer nous donnent :

$$\begin{cases} x = \frac{(b-d)(c-d)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\ y = \frac{(d-a)(c-a)(c-d)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\ z = \frac{(b-a)(d-a)(d-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)}. \end{cases}$$

Exercice 4.10: Soit

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de P et déduire que P est inversible.
2. Calculer P^{-1} par la méthode des cofacteurs.

Solution:

1. Pour calculer le rang il y a plusieurs méthode pour le faire.
   On va le calculer par le calcul du déterminant de P. Alors,

$$\begin{aligned} \det(P) &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -1.\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 4 \neq 0. \end{aligned}$$

   Donc $rg(P) = 3$. Ainsi P est inversible.

2. Le calcul de P^{-1} par la méthode des cofacteurs.

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\, {}^{t}Com(P)$$

   avec

$$Com(P) = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{pmatrix}.$$

   On a : $P_{1,1} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $P_{1,2} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$, $P_{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$,
   $P_{2,1} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$, $P_{2,2} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $P_{2,3} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$,

$$P_{3,1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \ , \ P_{3,2} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \ , \ P_{3,3} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

On trouve :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.11: Soient $m \in \mathbb{R}$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et f_m l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à une base de E est :

$$A_m = \begin{pmatrix} -m & 0 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de f_m.
2. Pour quelles valeurs de m, f_m est-il un automorphisme ? Déterminer dans ce cas, la matrice A_m^{-1}.

__Solution:__

1. On a :

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} -m & 0 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{L_3-2L_1}{\overset{L_2-L_1}{=}} \begin{vmatrix} -m & 0 & 1 \\ 2+m & m & 0 \\ 1+2m & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+m & m \\ 1+2m & 1 \end{vmatrix} = 2(1-m^2).$$

Si m est différent de 1 et -1, alors $rg(f_m) = 3$.
Si $m = \pm 1$, alors $rg(f_m) \leq 2$. L'application est de rang 2 si on peut trouver un mineur non nul d'ordre 2 ; c'est le cas, puisque $\begin{vmatrix} -m & 0 \\ 2 & m \end{vmatrix} = -m^2$ est non nul. En conclusion,

$$rg(f_1) = rg(f_{-1}) = 2.$$

2. L'endomorphisme f_m est un automorphisme si et seulement si $m \notin \{-1, 1\}$. Dans ce cas,

$$A_m^{-1} = \frac{1}{\det(A_m)}\, {}^tCom(A_m).$$

Or

$$Com(A_m) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -m & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -m & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -m & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -m & 0 \\ 2 & m \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$Com(A_m) = \begin{pmatrix} 2m-1 & -3 & 2-m \\ 1 & -2m-1 & m \\ -m & m+2 & -m^2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$${}^tCom(A_m) = \begin{pmatrix} 2m-1 & 1 & -m \\ -3 & -2m-1 & m+2 \\ 2-m & m & -m^2 \end{pmatrix}.$$

Finalement, en divisant par $\det(A_m) = 2(1-m^2)$, on trouve :

$$A_m^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2m-1}{2(m^2-1)} & -\frac{1}{2(m^2-1)} & \frac{m}{2(m^2-1)} \\ \frac{3}{2(m^2-1)} & \frac{2m+1}{2(m^2-1)} & -\frac{m+2}{2(m^2-1)} \\ \frac{m-2}{2(m^2-1)} & -\frac{m}{2(m^2-1)} & \frac{m^2}{2(m^2-1)} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 5

Systèmes d'équations linéaires

Dans ce chapitre, on expose la résolution d'un système d'équations linéaires par les transformations élémentaires. Cette méthode de résolution des systèmes est appelée par certains auteurs la méthode des pivots de Gauss.

5.1 Transformations élémentaires-lignes

Définition 1.1.

On appelle transformation élémentaire-lignes de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *l'une des trois applications :* L_{ij}, $L_{ij}(\alpha)$ *et* $L_i(\alpha)$, *définies de* $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *dans* $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, *dont l'image d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *est donnée pour chaque* α *et* β *dans* $\mathbb{K}$ *par :*

1. $L_{ij}(A) :=$ *la matrice obtenue à partir de* A, *en permutant sa* i*ème ligne* L_i *avec sa* j*ème ligne* L_j.
2. $L_{ij}(\alpha)(A) :=$ *la matrice obtenue à partir de* A *en remplaçant la* i*ème ligne* L_i *de* A *par* $L_i + \alpha L_j$ *(c'est-à-dire la* i*ème ligne de* A *plus* α *fois la* j*ème ligne de* A*).*
3. $L_i(\alpha)(A) :=$ *la matrice obtenue à partir de* A *en multipliant sa* i*ème ligne par* α.

Remarque : Si la matrice A est bien connue, on note, par abus, $L_{ij}(A)$, $L_{ij}(\alpha)(A)$ et $L_i(\alpha)(A)$ par L_{ij}, $L_{ij}(\alpha)$ et $L_i(\alpha)$ respectivement.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. On a $L_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $L_{12}(-2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Définition 1.2.

Une matrice A de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ est dite échelonnée-lignes si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1. *Après une ligne nulle de A, il n'y a que des lignes nulles.*
2. *Le nombre de zéros consécutifs commençant une ligne non nulle de A, augment strictement de ligne en ligne.*

Exemple :

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ est échelonnée-lignes.
2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée-lignes.

Définition 1.3.

Soit A une matrice échelonnée-lignes de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Alors :

1. *Si L est une ligne non nulle de A, le premier coefficient non nul de L est appelé le pivot de la ligne L.*
2. *La matrice A est dite échelonnée-lignes réduite si tous les pivots des lignes non-nulles de A sont égaux à un.*

Exemple : La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice échelonnée-lignes réduite.

Remarque : Les transformations élémentaires-lignes L_{ij}, $L_{ij}(\alpha)$ et $L_i(\alpha)$ sont des automorphismes de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Moyennant ces automorphismes, toute matrice est équivalente à une matrice échelonnée-lignes réduite.

5.2 Système d'équations linéaires

A un système de m équations à n inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m. \end{array}\right.$$

On associe la matrice élargie A_S du système (S) définie par :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

On cherche ensuite une matrice échelonnée-lignes réduite A'_S à partir de A_S et on réécrit le nouveau système du bas en haut pour avoir la solution du système (S).

On va exposer ce chapitre sous forme d'exemples.

Exemple 1 : Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 6 \\ 2x + 3y + z & = & 6 \\ 3x + y + 2z & = & 6 \end{array}\right.$$

Solution : La matrice élargie du système est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Cherchons une matrice échelonnée-lignes réduite équivalente à la matrice A, on a :

$$\begin{array}{rcl} A & = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \\ & \underset{\substack{L_{21}(-2) \\ L_{31}(-3)}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & -5 & -7 & -12 \end{pmatrix} \\ & \underset{\substack{L_{2}(-1) \\ L_{3}(-1)}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 7 & 12 \end{pmatrix} \\ & \underset{L_{32}(-5)}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -18 & -18 \end{pmatrix} \\ & \underset{L_{3}(-1/18)}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

On réécrit le nouveau système obtenue à partir de la dernière matrice, du bas en haut, en obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 1 \\ y + 5z & = & 6 \\ x + 2y + 3z & = & 6 \end{array} \right.$$

c'est-à-dire que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 1 \\ y & = & 6 - 5z = 1 \\ x & = & 6 - 2y - 3z = 1 \end{array} \right.$$

Donc le système admet une solution unique, à savoir $S = \{(1, 1, 1)\}$.

Exemple 2 : Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x - 3y + 2z + t & = & 1 \\ 3x - 9y + 10z + 2t & = & 0 \\ 2x - 6y + 4y + 3t & = & -1 \end{array} \right.$$

Solution : La matrice élargie du système est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -9 & 10 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cherchons une matrice échelonnée-lignes réduite équivalente à la matrice A. On a :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -9 & 10 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ \underset{\substack{L_{21}(-3) \\ L_{31}(-2)}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ \underset{L_{23}(1)}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ \underset{L_2(1/4)}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le nouveau système, du bas en haut, devient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} t & = & -3 \\ z & = & -3/2 \\ x - 3y + 2z + t & = & 1 \end{array} \right.$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} t & = & -3 \\ z & = & -3/2 \\ x - 3y & = & 7 \end{array} \right.$$

Ainsi, on a une infinité de solutions, à savoir :

$$S = \{(3y + 7, y, -3/2, -3)/y \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 3 : Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x - 3y + 2z + t & = & 1 \\ 3x - 9y + 10z + 2t & = & 0 \\ 2x - 6y + 4z + 3t & = & -1 \\ 2x - 6y + 8y + t & = & 1 \end{array} \right.$$

Solution : Cherchons une matrice échelonnée-lignes réduite équivalentes à la matrice du système. On a :

$$\begin{array}{ccc}
A & = & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -9 & 10 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & -6 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \underset{\substack{L_{21}(-3) \\ L_{31}(-2) \\ L_{41}(-2)}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
 & \underset{L_{42}(-1)}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 & \underset{\substack{L_{2}(1/4) \\ L_{4}(1/2)}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Le nouveau système, du bas en haut, devient :

$$\begin{cases} 0x + 0y + 0z + 0t & = & 1 \\ t = -3 & & \\ z - (1/4)t & = & -3/4 \\ x - 3y + 2z + t & = & 1 \end{cases}$$

L'ensemble de solution est l'ensemble vide, il n'y a pas de solution.

Exemple 4 : Une personne A a dit à une seconde B : J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez et quand vous aurez l'âge que j'ai la somme de nos âges sera de 99 ans. Déterminer l'âge des personnes A et B.

Solution : Soit x l'âge de A et y l'âge de B. Quand A avait l'âge de B, qui est y, la personne B avait l'âge $y-(x-y)$. La première phrase du texte se traduit donc par l'équation $x = 2(y-(x-y))$, ou encore $3x-4y = 0$. Quand B aura l'âge de A, qui est x, alors la personne A aura l'âge $x+(x-y)$. La seconde phrase du texte se traduit donc par : $x + (x + (x - y)) = 99$, ou

encore $3x - y = 99$.
La réponse au problème est donc une solution du système :

$$\begin{cases} 3x - 4y &= 0 \\ 3x - y &= 99 \end{cases}$$

Cherchons une matrice échelonnée-lignes réduite équivalente à la matrice élargie du système. On a :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & 99 \end{pmatrix} \\ &\underset{L_{21}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 99 \end{pmatrix} \\ &\underset{\substack{L_1(1/3) \\ L_2(1/3)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 33 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le nouveau système, du bas en haut, devient :

$$\begin{cases} y &= 33 \\ x - (4/3)y &= 0 \end{cases}$$

La réponse est donc $x = 44$ et $y = 33$.

5.3 Inverse d'une matrice

Pour calculer l'inverse d'une matrice A d'ordre n, dont on sait qu'elle est inversible, on procède de la façon suivante :

1. On considère la matrice E de type $(n, 2n)$, dont les n premières colonnes sont celles de A et les n dernières colonnes sont celles de I_n (la matrice identité).
2. On applique à E des transformations élémentaires de sorte que les n premières colonnes de E se transforment en I_n, dès lors les n dernières colonnes de la matrice transformée forment la matrice inverse de A.

Exemple 1 : Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution : On a :

$$
\begin{aligned}
E &= \begin{pmatrix} A & I_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\underset{L_{32}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\underset{L_{3}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&\underset{L_{23}(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&\underset{L_{12}(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Exemple 2 : Calculer l'inverse de la matrice :

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Solution : On a :

$$\begin{aligned}
E &= \begin{pmatrix} A & I_4 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&\underset{\substack{L_{21}(-2)\\ L_{32}(1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&\underset{\substack{L_{34}(-2)\\ L_{24}(2)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&\underset{L_{14}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&\underset{\substack{L_{23}(1)\\ L_{13}(1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&\underset{L_{12}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&\underset{\substack{L_{2}(-1)\\ L_{3}(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 & -3\\ 4 & -2 & -1 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.4 Recherche d'une base à partir d'un système générateur

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel admettant $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ comme base et $(f_1, \ldots, f_p)$ un système générateur d'un sous espace vectoriel F de E. Supposons que $f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$ pour tout $i = 1, \ldots, p$. On considère la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,n}}$ et on cherche une matrice échelonnée-lignes réduite A' équivalente à A. Alors les lignes non nul de A' forment les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ d'une base de F.

Exemple : Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Cherchons une base du sous espace vectoriel F engendré par la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ avec $f_1 = (1, 2, 1)$, $f_2 = (1, 0, 1)$ et $f_3 = (2, 2, 2)$.

Solution : On a :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\underset{\substack{L_{21}(-1) \\ L_{31}(-2)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\underset{L_{32}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\underset{L_2(-1/2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où, $\{f_1' = (1, 2, 1), f_2' = (0, 1, 0)\}$ est une base de F.

5.5 Rang d'une matrice

D'après le chapitre des matrices, le rang d'une matrice est le rang de la famille des ses vecteurs lignes. En particulier, le rang d'une matrice échelonnée-linges réduite est le nombre de lignes non nulles.

Comme deux matrices équivalentes ont le même rang, donc on va chercher une matrice échelonnée-lignes réduite S d'une matrice donnée A et on va conclure que le rang A est le rang de S qui n'est rien autre que le nombre de lignes non nulles de S.

Exemple : Calculer le rang de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -12 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution : On a :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -12 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &\underset{L_{21}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & -12 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &\underset{L_{41}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\underset{L_{32}(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\underset{\substack{L_2(-1) \\ L_3(-1/3)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, le rang de A est 3 : $\mathrm{rg}(A) = 3$.

5.6 Exercices avec solutions

Exercice 5.1: Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 5x + 2y + 3z = 4 \\ 3x - y + 2z = m \end{cases}$$

Résoudre le système en utilisant la méthode des échelonnements lignes en fonction du paramètre m.

Solution: La matrice élargie associée au système est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & m \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} A &\overset{L_1(\frac{1}{2}),\ L_2(\frac{1}{5}),\ L_3(\frac{1}{3})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 2/5 & 3/5 & 4/5 \\ 1 & -1/3 & 2/3 & m/3 \end{pmatrix} \\ &\overset{L_{21}(-1),\ L_{31}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -11/10 & 1/10 & 3/10 \\ 0 & -11/6 & 1/6 & (2m-3)/6 \end{pmatrix} \\ &\overset{L_2(\frac{-10}{11}),\ L_3(\frac{6}{11})}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/11 & -3/11 \\ 0 & -1 & 1/11 & (2m-3)/11 \end{array}\right) \\ &\overset{L_{32}(1)}{\sim} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1/11 & -3/11 \\ 0 & 0 & 0 & (2m-6)/11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si $m \neq 3$ alors l'ensemble des solutions du système est vide.

Si $m = 3$ alors on a :

$$\begin{cases} x + \dfrac{3}{2}y = -\dfrac{1}{2}z - \dfrac{1}{2} \\ \quad\quad y = \dfrac{1}{11}z - \dfrac{3}{11} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} x = -\dfrac{7}{11}z - \dfrac{1}{11} \\ y = \dfrac{1}{11}z - \dfrac{3}{11} \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est infini et est :

$$S = \left\{ \left(-\frac{7}{11}z - \frac{1}{11}, \frac{1}{11}z - \frac{3}{11}, z \right) \ / \ z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 5.2: Résoudre le système suivant en utilisant la méthode des échelonnements lignes :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 6z = 2 \\ x - 4y + 7z = 3 \end{cases}$$

Solution: La matrice élargie associée au système est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & -4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$
\begin{aligned}
A &\overset{L_2(\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \\
&\overset{L_{21}(-1),\ L_{31}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 8 & 2 \end{pmatrix} \\
&\overset{L_2(\frac{-2}{3}),\ L_3(\frac{1}{6})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -8/3 & 0 \\ 0 & -1 & 4/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\
&\overset{L_{32}(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -8/3 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\
&\overset{L_3(\frac{-3}{4})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{pmatrix} \\
&\overset{L_{23}(\frac{8}{3}),\ L_{13}(\frac{-1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 & 5/8 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{pmatrix} \\
&\overset{L_{12}(\frac{-3}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 31/24 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

En conclusion, $S = \left\{\left(\frac{31}{24}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{4}\right)\right\}$.

Exercice 5.3: On considère le système linéaire :

$$
(S_m) : \begin{cases} mx & + & y & - & (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 2z & = & m+2 \end{cases}
$$

1. Pour quelles valeurs du paramètre m, le système (S_m) est-il de Cramer ?
2. Résoudre le système (S_m) pour $m = 0$.

3. Résoudre le système (S_m) pour $m = -4$.

Solution:

1. On considère la matrice M associée au système (S_m) :

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 2 \end{pmatrix}$$

Calculons son déterminant :

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} m & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 2 \end{vmatrix} \\ &= m \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -m & 2 \end{vmatrix} - (1+m) \begin{vmatrix} 1 & 1-m \\ -m & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1-m \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -7m + 2m^2 + 4 + m^3 \\ &= (m-1)^2(m+4). \end{aligned}$$

Du fait que le nombre de variables est égal au nombre d'équations, le système (S_m) est de Cramer si et seulement si m est différent de -4 et de 1.

2. Si $m = 0$, alors le système (S_m) devient :

$$(S_0) : \begin{cases} \qquad\quad y + z = 2 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x \qquad + 2z = 2 \end{cases}$$

Le système admet une solution unique car $det(M) \neq 0$. On pourra donc le résoudre avec la méthode des échelonnements lignes ou par la méthode de Cramer. On va le résoudre par la méthode de Cramer. Donc on a :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{3}{2}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1}{2}.$$

En conclusion,
$$S = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

3. Si $m = -4$ donc $\det(M) = 0$ et le système n'est pas de Cramer. Il nous reste la méthode des échelonnements lignes. Le système (S_m) devient :

$$(S_{-4}) : \begin{cases} -4x & + & y & + & 5z & = & -2 \\ -3x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & -2 \end{cases}$$

La matrice élargie associée au système S_{-4} est :
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 & -2 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a :
$$A \overset{L_1(\frac{-1}{4}),\ L_2(\frac{1}{3}),\ L_3(\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -5/4 & 1/2 \\ -1 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\overset{L_{21}(1),\ L_{31}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -5/4 & 1/2 \\ 0 & -7/12 & -7/12 & 1/2 \\ 0 & 9/4 & 9/4 & -3/2 \end{pmatrix}$$
$$\overset{L_2(\frac{-12}{7}),\ L_3(\frac{4}{9})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -5/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & -6/7 \\ 0 & 1 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$$
$$\overset{L_{32}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -5/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & -6/7 \\ 0 & 0 & 0 & 4/21 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

Exercice 5.4: On considère le système linéaire :

$$(S_m):\begin{cases} mx + y - z = m-1 \\ x + my + z = m-1 \\ -x + y + mz = 1-m. \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs du paramètre m, le système (S_m) est-il de Cramer ?
2. Résoudre le système (S_m) en utilisant la méthode de Cramer lorsque le système est de Cramer.
3. Résoudre le système (S_m) pour $m=2$.
4. Résoudre le système (S_m) pour $m=-1$.

Solution:

1. On considère la matrice M associée au système (S_m) :

$$M=\begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

Calculons son déterminant :

$$\begin{aligned}\det(M) &= \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} \\ &\overset{C_1-C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} m-2 & 1 & -1 \\ 2-m & m & 1 \\ -2+m & 1 & m \end{vmatrix} \\ &= (m-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3-L_1}{\overset{L_2+L_1}{=}} (m-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 0 & 0 & m+1 \end{vmatrix}$$

$$= (m-2)(m+1)^2.$$

Du fait que le nombre de variables est égal au nombre d'équations, le système (S_m) est de Cramer si et seulement si m est différent de 2 et de -1.

2. Si m est différent de 2 et de -1, le système est de Cramer et admet une solution unique, à savoir :

$$x_m = \frac{\begin{vmatrix} m-1 & m & m \\ m-1 & 1 & m \\ 1-m & m & 1 \end{vmatrix}}{\det(M)}\ ,\ y_m = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m-1 & m \\ m & m-1 & m \\ m & 1-m & 1 \end{vmatrix}}{\det(M)}\ ,\ z_m = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & m-1 \\ m & 1 & m-1 \\ m & m & 1-m \end{vmatrix}}{\det(M)}.$$

Puisqu'on a :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} m-1 & m & m \\ m-1 & 1 & m \\ 1-m & m & 1 \end{vmatrix} &= (m-1)\begin{vmatrix} 1 & m & m \\ -1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} \\ &\underset{L_{31}(1)}{\overset{L_{21}(-1)}{=}} (m-1)\begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 2m & 1+m \end{vmatrix}\end{aligned}$$

alors,

$$x_m = -\frac{(m-1)^2}{(m-2)(m+1)}\,.$$

Puisqu'on a :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & m-1 & m \\ m & m-1 & m \\ m & 1-m & 1 \end{vmatrix} &= (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 1 & m \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\underset{L_{31}(1)}{\overset{L_{21}(-1)}{=}} (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 0 \\ m+1 & 0 & 1+m \end{vmatrix},\end{aligned}$$

alors,

$$y_m = -\frac{(m-1)^2}{(m-2)(m+1)}\,.$$

Puisqu'on a

$$\begin{vmatrix} 1 & m & m-1 \\ m & 1 & m-1 \\ m & m & 1-m \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ m & m & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_{31}(1)}{\overset{L_{21}(-1)}{=}} (m-1)\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & 1-m & 0 \\ m+1 & 2m & 0 \end{vmatrix},$$

alors,

$$z_m = -\frac{(m-1)^2(3m+1)}{(m-2)(m+1)^2}.$$

Finalement,

$$S = \left\{ \left(-\frac{(m-1)^2}{(m-2)(m+1)}, -\frac{(m-1)^2}{(m-2)(m+1)}, -\frac{(m-1)^2(3m+1)}{(m-2)(m+1)^2}, \right) \right\}.$$

3. Si $m = 2$, le système (S_m) n'est pas de Cramer et devient :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & + & 2z & = & -1. \end{array} \right.$$

Ainsi on a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_{31}(\frac{1}{2})}{\overset{L_{21}(\frac{-1}{2})}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_{32}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & \frac{3}{2}y & + & \frac{3}{2}z & = & \frac{1}{2} \\ & & & & 0 & = & -1. \end{array} \right.$$

En conclusion, l'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

4. Si $m = -1$, le système (S_m) n'est pas de Cramer et devient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -2 \\ x & - & y & + & z & = & -2 \\ -x & + & y & - & z & = & 2. \end{array}\right.$$

Ainsi on a :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{L_{21}(1)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -2 \\ & & & & 0 & = & -4 \\ -x & + & y & - & z & = & 2. \end{array}\right.$$

En conclusion, l'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

Exercice 5.5: Trouver tous les polynômes $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ satisfaisant $f(-1) = 0$, $f(0) = 5$, $f(1) = 4$ et $f'(1) = 0$.

Solution: On a $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Donc f satisfait les conditions indiquées si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -a & + & b & - & c & + & d & = & 0 \\ & & & & & & d & = & 5 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 4 \\ 3a & + & 2a & + & c & & & = & 0. \end{array}\right.$$

Ainsi on a :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_{41}(3)}{\overset{L_{31}(1)}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_{24}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_{23}(-2)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_{32}(-2)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 14 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3(1/14)}{\overset{L_1(-1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 & 10/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_{34}(-2/7)}{\overset{L_{14}(1),L_{24}(1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_{23}(6)}{\overset{L_{13}(-1),L_{24}(1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution est $(a, b, c, d) = (2, -3, 0, 5)$. Ainsi, le seul polynôme qui vérifie les hypothèses est le polynôme :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5.$$

Exercice 5.6: On considère un rectangle satisfaisant les conditions suivantes : Si on augmente de $5m$ la largeur d'un rectangle et de $4m$ sa longueur, son aire augmente de $180m^2$. Si on diminue sa largeur de $2m$ et sa longueur de $3m$, l'aire diminue de $72m^2$. Calculer les dimensions du rectangle.

Solution: Notons x la longueur et y la largeur du rectangle. On a $(x+4)(y+5) = xy + 180$, donc $5x + 4y = 160$. Du plus, $(x-3)(y-2) = xy - 72$. Ainsi, $2x + 3y = 78$. On résout le système :

$$\begin{cases} 5x + 4y &= 160 \\ 2x + 3y &= 78. \end{cases}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 160 \\ 2 & 3 & 78 \end{pmatrix} & \underset{\sim}{L_1(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 78 \end{pmatrix} \\ & \underset{\sim}{L_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 70 \end{pmatrix} \\ & \underset{\sim}{L_2(1/7)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \\ & \underset{\sim}{L_{12}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où, $x = 24$ et $y = 10$.
La longueur du rectangle est $24m$ et sa largeur est $10m$.

Exercice 5.7: On note E l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x.$$

1. Montrer que les scalaires α et β sont uniquement déterminés par f.
2. Vérifier que toutes les fonctions f de E sont dérivables.
3. Montrer qu'il existe une unique fonction f de E telle que $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ et $f'(\frac{\pi}{6}) = 3$.

Solution:

1. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \cos x + \beta \sin x = \alpha' \cos x + \beta' \sin x$. Pour $x = 0$, on obtient $\alpha = \alpha.1 + \beta.0 = \alpha'.1 + \beta'.0 = \alpha'$. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\beta = \alpha.0 + \beta.1 = \alpha'.0 + \beta'.1 = \beta'$. D'où, les scalaires α et β sont uniquement déterminés par f.
2. La fonction f est combinaison linéaire des fonctions dérivables cos et sin, donc est dérivable. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f'(x) = \alpha(-\sin x) + \beta \cos x = -\alpha \sin x + \beta \cos x.$$
3. Soit $f \in E$. Il existe des scalaires α et β tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x.$$
On a alors $f(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + \beta)$ et $f'(\dfrac{\pi}{6}) = -\dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\beta$. On doit donc vérifier que le système :
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\alpha & + & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\beta & = & 1 \\ -\dfrac{1}{2}\alpha & + & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\beta & = & 3 \end{array}\right.$$
possède une unique solution. On a :
$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3 \end{pmatrix} \underset{L_2(2)}{\overset{L_1(\sqrt{2})}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & 6 \end{pmatrix}$$
$$\overset{L_{21}(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1+\sqrt{3} & 6+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$\overset{L_2(\frac{1}{(1+\sqrt{3})})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \dfrac{6+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$
$$\overset{L_{12}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} - \dfrac{6+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \dfrac{6+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

On a bien une unique solution : $\alpha = \sqrt{2} - \dfrac{6+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ et $\beta = \dfrac{6+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.
D'où, la solution unique f de E telle que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3$ est la fonction :

$$f(x) = \left(\sqrt{2} - \frac{6+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)\cos(x) + \left(\frac{6+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)\sin(x).$$

Exercice 5.8: Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x+3y+5z=1 \\ 5x+2y+3z=4 \\ 3x+5y+2z=0. \end{cases}$$

Solution: Pour la résolution du système on procède par la méthode des échelonnements ligne. La matrice associée au système est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A \underset{\sim}{L_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & 1/2 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_{21}(-5)} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & -11/2 & -19/2 & 3/2 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & -11 & -19 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_{31}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & -11 & -19 & 3 \\ 0 & 1/2 & -11/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_2(\frac{1}{11}),\ L_{32}(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & -19/11 & 3/11 \\ 0 & 0 & -70/11 & -15/11 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_2(11),\ L_3(11)} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & -11 & -19 & 3 \\ 0 & 0 & -70 & -15 \end{pmatrix}.$$

Et par conséquent, les solutions du système sont :

$$z = \frac{15}{70} = \frac{3}{14},\ y = \frac{-99}{154} \quad et \quad x = \frac{143}{154}.$$

Chapitre 6

Réduction des endomorphismes

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1 Éléments propres d'un endomorphisme

6.1.1 Valeur propre et vecteur propre

Définition 1.1.

Soit u un endomorphisme de E. On dit qu'un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ est un vecteur propre de u, s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
On dit aussi que x est un vecteur propre de u associé à λ et λ une valeur propre de u associée à x.

Exemple : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel non nul.

1. 0 est la seule valeur propre de l'endomorphisme nul, et tous les vecteurs non nuls de E sont des vecteurs propres associés à 0.
2. 1 est la seule valeur propre de Id_E et tous les vecteurs non nuls de E sont des vecteurs propres associés à 1.

Proposition 1.2.

Soient u un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est une valeur propre de u si, et seulement si, l'endomorphisme $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas injectif.

Preuve :
On a :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } u &\Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\},\, u(x) = \lambda x \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\},\, (u - \lambda \operatorname{Id}_E)(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow u - \lambda \operatorname{Id}_E \text{ est non injective.} \end{aligned}$$

D'où le résultat cherché. □

Corollaire 1.3.

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel non nul de dimension finie, u un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, λ est une valeur propre de u si, et seulement si, $\det(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = 0$.

6.1.2 Sous espace propre

Définition 1.4.

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E, et λ une valeur propre de u. Le sous espace propre associé à λ est l'ensemble noté E_λ et défini par :

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda \underset{E}{\operatorname{Id}}) = \{x \in E \ / \ u(x) = \lambda x\}.$$

Remarque : E_λ est donc formé de l'élément 0 de E, et des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ. C'est un sous espace vectoriel de E et puisque, par définition, un vecteur propre est non nul, on a toujours $\dim E_\lambda \geq 1$.

On a le résultat important suivant :

Théorème 1.5.

Soient E un espace vectoriel de dimension n, u un endomorphisme de E, désignons par $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u, et par $E_1, \ldots, E_p$ les sous espaces propres correspondants. Alors la somme $E_1 + \ldots + E_p$ est directe, c'est-à-dire :

$$E_1 + \ldots + E_p = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p.$$

Preuve :
Par l'absurde, si la somme $E_1+\ldots+E_p$ n'est pas directe, il existe des relations de la forme :

$$(1) : \quad \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0,$$

avec $x_i \in E_i \setminus \{0\}$ et les μ_i sont tous non nuls .
Considérons une relation de la forme (1), où le nombre r des scalaires μ_i non nuls est minimum. Remarquer qu'on a nécessairement $r \geq 2$. On peut supposer que cette relation est :

$$(2) : \quad \nu_1 e_1 + \ldots + \nu_r e_r = 0,$$

avec $e_i \in E_i \setminus \{0\}$ et $\nu_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.
Soit $e = \nu_1 e_1 + \ldots + \nu_r e_r (= 0)$ et formons $u(e) - \lambda_1 e (= 0)$. on obtient alors :

$$u(e) - \lambda_1 e = (\lambda_2 - \lambda_1)\nu_2 e_2 + \ldots + (\lambda_r - \lambda_1)\nu_r e_r (= 0).$$

Les $r-1$ coefficients $(\lambda_k - \lambda_1)\nu_k$ $(2 \leq k \leq r)$ étant non nuls. Cette relation contredit le caractère minimal de (2). D'où le résultat $\square$

Conséquence : Soient $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs propres d'un endomorphisme u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. Alors $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est un système libre.

Cas des matrices : Soit A une matrice carrée d'ordre n. On appelle valeur (resp., vecteur, resp., sous espace) propre de A toute valeur (resp., vecteur, resp., sous espace) propre de l'endomorphisme $u : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ défini par $u(X) = AX$.

6.2 Polynôme caractéristique

Définition 2.1.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme :

$$P_A(X) = \det(A - XI_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - X \end{vmatrix}.$$

Remarque : D'après le théorème précèdent, les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A.
Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = P^{-1}AP$ une matrice semblable à A.
On a :

$$\begin{aligned} \det(B - XI_n) &= \det(P^{-1}(A - XI_n)P) \\ &= \det(A - XI_n). \end{aligned}$$

Donc $P_A(X) = P_B(X)$.

Ceci nous amène au théorème et définition suivants :

Théorème et définition 2.2.

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension n et A la matrice de u d'une base choisie de E. Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A est indépendant de la base choisie de E. On l'appel polynôme caractéristique de u et le note également $P_u(X)$.

Preuve :
En effet, si $A = \mathcal{M}(u, \mathcal{B})$ et $B = \mathcal{M}(u, \mathcal{B}')$ où B et B' sont deux bases de E, il existe une matrice inversible P d'ordre n telle que $B = P^{-1}AP$. Donc $P_A(X) = P_B(X)$ car les deux matrices A et B sont semblables. □

Remarque : En pratique, un sous espace propre E_λ de u s'obtient en résolvant le système

$$(A - \lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

on obtient alors les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs x de E_λ dans la base $\mathcal{B}$.

Rappels. Soit P un polynôme sur $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{K}$.

1. On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0$. Cela veut dire que $(X - a)$ divise P.
2. Soit a une racine de P. On appelle ordre de multiplicité de la racine a de P, noté k, le plus grand entier α tel que $(X - a)^\alpha$ divise P. Autrement dit, $(X - a)^k$ divise P et $(X - a)^{k+1}$ ne divise pas P.

Une méthode pour calculer l'ordre de multiplicité d'une racine est donnée dans le résultat suivant :

Une racine a de P est d'ordre de multiplicité k si et seulement si on a :

$$\begin{cases} P(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0 \\ P^{(k)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

avec $P^{(i)}(a)$ est la dérivée $i$ème de P au point a.

On a le théorème important suivant :

Théorème 2.3.

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Si $P_u(X)$ admet une racine λ d'ordre de multiplicité k, alors on a :

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq k.$$

Preuve :
Si λ est une racine de $P_u(X)$, donc λ est valeur propre de u. Ainsi on a $\dim E_\lambda \geq 1$.

Posons $r = \dim E_\lambda$ et soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de E_λ qu'on complète en une base $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ de E via le théorème de la base incomplète. La matrice de u dans cette base est de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & \ldots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & A' \\ 0 & \ldots & \lambda & \\ \hline & 0 & & A'' \end{array}\right),$$

où $A'' \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ et $A' \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$. On a :

$$\begin{array}{rcl} P_u(X) & = & P_A(X) \\ & = & (\lambda - X)^r \det(A'' - XI_{n-h}) \end{array}$$

de sorte que $(\lambda - X)^r$ divise P_A. Comme λ est une racine d'ordre de multiplicité k de $P_u(X)$, on a donc $r = \dim(E_\lambda) \leq k$. □

Remarque : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée. Un calcul simple du déterminant montre que :

$$\boxed{P_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn})X^{n-1} + \ldots + \det(A).}$$

En particulier, on a :

$$\begin{array}{rcl} 0 \text{ est une valeur propre de } A & \Leftrightarrow & P_A(0) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \det(A) = 0 \\ & \Leftrightarrow & A \text{ n'est pas inversible.} \end{array}$$

Exemples :

1. Si $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a :
$$P_A(X) = X^2 - (a+d)X + \det(A).$$

2. Si $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} q & b & c \\ a' & b' & c' \\ q'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on a :
$$P_A(X) = -X^3 + (a + b' + c'')X^2 + \alpha X + \det A.$$

   Reste un seul coefficient à déterminer, c'est α.

6.3 Endomorphismes et matrices diagonalisables

Définition 3.1.

1. *On dit qu'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale, autrement dit une base formée de vecteurs propres de u.*
2. *On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale, autrement dit l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.*
3. *Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit scindé sur $\mathbb{K}$ s'il se décompose en produit de polynômes de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$, autrement dit toutes les racines de P sont dans $\mathbb{K}$.*

Maintenant, on peut énoncer le théorème principal de cette partie.

Théorème 3.2. (Fondamental)

Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$ est diagonalisable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. *Le polynôme caractéristique P_u est scindé sur $\mathbb{K}$.*
2. *Pour chaque racine λ_i d'ordre k_i de P_u on a ; $\dim E_{\lambda_i} = k_i$.*

Preuve :

Supposons que u est diagonalisable. Il existe alors une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $A = \mathcal{M}(u, \mathcal{B}) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, où les λ_i sont les valeurs propres de u. Alors $P_u(X) = P_A(X) = (\lambda_1 - X) \ldots (\lambda_n - X)$; d'où sans perte de généralité, on peut supposer que $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les valeurs propres deux à deux distincts de u. On a donc :

$$P_u(X) = (\lambda_1 - X)^{k_1} \ldots (\lambda_r - X)^{k_r}.$$

Puisqu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u on a $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_r}$; donc $n = \dim E = \dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_r}$. De plus comme on a $\dim E_{\lambda_i} \leq k_i$, pour tous $i = 1, \ldots, r$ et $k_1 + \ldots + k_r = n = \sum_{i=1}^{r} \dim E_{\lambda_i}$ alors on a : $\dim E_{\lambda_i} = k_i$, pour tout $i = 1, \ldots, r$.

Réciproquement, si 1) et 2) sont vérifiées, le sous espace $E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_r}$ est de dimension $k_1 + \ldots + k_r = n$ de sorte que $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_r}$. En prenant l'union des bases des E_{λ_i}, on obtient une base de E formée de vecteurs propres de u, ce qui achève la preuve. $\square$

Corollaire 3.3.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie, dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et toutes ses racines sont simples. Alors u est diagonalisable.

Preuve :
Résulte du théorème précédent puisque dans ce cas, on a $\dim E_{\lambda_i} = 1$ pour toute valeur propre λ_i de u. $\square$

Exemples :

1. Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Cherchons si u est diagonalisable.
Le polynôme caractéristique de u est $P_u(X) = (1-X)(2+X)^2$ est scindé. La valeur 1 est une racine simple donc E_1 est nécessairement de dimension 1. Le problème se pose donc pour la valeur propre -2.
Pour E_{-2} on résout le système linéaire $(A + 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit $x + y + z = 0$. Donc E_{-2} est de dimension 2 et $\{e_1 - e_3, e_2 - e_3\}$ en est une base. Donc u est diagonalisable.
Cherchons une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale. Il reste à déterminer un vecteur propre associé à la valeur propre 1,

pour cela on résout le système $(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est équivalent à $x = y = z$. Donc $\{e_1 + e_1 + e_3\}$ engendre E_1, ainsi on a :

$$\mathcal{M}(u, e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_3, e_2 - e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Cherchons si A est diagonalisable.

   Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = -(2+X)(1-X)^2$ est scindé. Le problème se pose pour $\lambda = 1$. Cherchons E_1, pour cela on résout le système
$$\begin{cases} -5x - 2z & = & 0 \\ 5x + y + 2z & = & 0 \end{cases},$$
   On trouve que $\{(2, 0, -5)\}$ engendre E_1 et donc $\dim E_1 = 1$ qui est différente de l'ordre de multiplicité de la racine 1 de P_A qui est 2. D'après le théorème précédent, A n'est pas diagonalisable.

6.4 Endomorphismes trigonalisables

Définition 4.1.

Un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable s'il est semblable à une matrice triangulaire supérieure, cela veut dire qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

Remarque : Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie et A la matrice de u dans une base de E. Alors u est trigonalisable si, et seulement si, A est trigonalisable.

Maintenant, on peut énoncer le théorème principal de cette partie.

Théorème 4.2. (Fondamental)

Un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension n est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

En particulier, tout endomorphisme u d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ est trigonalisable.

On a le même résultat pour les matrices.

Preuve :
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E dans laquelle la matrice A de u est triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de u est :

$$\begin{aligned} P_u(X) &= \det(A - XI_n) \\ &= \prod_{i=1}^n (a_{ii} - X), \end{aligned}$$

qui est scindé.
Pour la réciproque, raisonnons par récurrence sur $n \geq 1$. La propriété est évidente pour $n = 1$. Supposons la propriété vraie pour un entier $n-1 \geq 1$, et montrons la pour n. Si P_u est scindé sur $\mathbb{K}$ alors il admet au moins une racine λ dans $\mathbb{K}$, c'est une valeur propre de u et soit ε_1 un vecteur propre associé à cette valeur propre. Soit H un sous espace vectoriel de E supplémentaire de la droite $\mathbb{K}\varepsilon_1$ et $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ une base de H. Alors $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E et dans cette base la matrice de u est triangulaire supérieure par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & b_2 & \dots & b_n \\ O & & B & \end{pmatrix},$$

où B désigne une matrice carrée d'ordre $n-1$, et $b_2, \dots, b_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. Désignons par v l'endomorphisme de H dont la matrice dans la base $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$

est B. On a :

$$\begin{array}{rcl} P_u(X) & = & \det(A - XI_n) \\ & = & (\lambda - X)\det(B - XI_{n-1}) \\ & = & (\lambda - X)P_v. \end{array}$$

Ce qui montre que P_v est scindé sur $\mathbb{K}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $(e_2, \ldots, e_n)$ de H dans la matrice de v est triangulaire supérieure. Or, pour $i = 2, \ldots, n$, on a $u(\varepsilon_i) = b_i\varepsilon_1 + v(\varepsilon_i)$; d'où l'on déduit l'existence des scalaires $\beta_2, \ldots, \beta_n$ tels que l'on ait :

$$u(e_i) = \beta_i\varepsilon_1 + v(e_i) \text{ pour } i = 2, \ldots, n. \qquad (\star)$$

Comme la matrice de v dans la base $(e_2, \ldots, e_n)$ de H est triangulaire supérieure et que $u(\varepsilon_1) = \lambda\varepsilon_1$, on déduit de $(\star)$ que la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, e_2, \ldots, e_n)$ est triangulaire supérieure.

Ainsi, si $e_i = \sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij}\varepsilon_j$ on a :

$$\begin{array}{rcl} u(e_i) & = & u(\sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij}\varepsilon_j) \\ & = & \sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij}u(\varepsilon_j) \\ & = & \sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij}(b_j\varepsilon_1 + v(\varepsilon_j)) \\ & = & \beta_i\varepsilon_1 + v(\sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij}\varepsilon_j) \\ & = & \beta_i\varepsilon_1 + v(e_i) \end{array}$$

où $\beta_i = (\sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij})b_j$. Cela achève la preuve du Théorème. $\square$

Exemple : La matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $P_A(X) = -(X+2)^3$ en remarquant que -2 est une racine évidente. La matrice A n'est pas diagonalisable car s'il existait une matrice inversible P telle que $P^{-1}QP = D$ soit diagonale, nécessairement, $D = -2I_3$ et A

serait $-2I_3$, ce qui n'est pas le cas.
A est par contre trigonalisable, puisque son polynôme caractéristique est scindé.

6.5 Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_rX^r \in \mathbb{K}[X]$ et u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. On désigne par $P(u)$ l'endomorphisme :

$$P(u) := a_0 \underset{E}{\mathrm{Id}} + a_1u + \ldots + a_ru^r$$

et par $P(A)$ la matrice :

$$P(A) := a_0I_n + a_1A + \ldots + a_rA^r$$

si A est une matrice carrée d'ordre n.

Théorème 5.1. (Cayley-Hamilton)

Pour tout endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que leurs polynôme caractéristiques soient scindés, on a :

$$P_u(u) = 0\ , \quad P_A(A) = 0.$$

Preuve :
Soit $P_u(X) = (-1)^n(X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$, on a :

$$P_u(u) = (-1)^n(u - \lambda_1 \underset{E}{\mathrm{Id}}) \circ \ldots \circ (u - \lambda_n \underset{E}{\mathrm{Id}}).$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E telle que la matrice de u dans cette base est triangulaire supérieure :

$$\mathcal{M}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $u(e_i) - \lambda_i e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1})$ pour tout $i = 2, \dots, n$. Montrons par récurrence sur i que $(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$ annule $e_1, \dots, e_i$. Pour $i = 1$ c'est clair. Supposons $i > 1$ et que $(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_{i-1} \mathrm{Id}_E)$ annule $e_1, \dots, e_{i-1}$. Puisque les $(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)$ commutent deux à deux $(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$ annule $e_1, \dots, e_{i-1}$. Il annule aussi e_i puisque $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1})$. On en déduit le théorème car $P_u(u)$ annule une base.

Remarque : Le théorème de Cayley-Hamilton reste vrai même si le polynôme caractéristique de A (ou de u) n'est pas scindé. En effet ; on démontre que $\mathbb{K}$ est un sous corps d'un corps algébriquement clos L par exemple $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Donc $P_A(X)$ est scindé comme polynôme de $L[X]$; d'où $P_A(A) = 0$. □
Comme conséquence on a :

Proposition 5.2.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors A^{-1} est combinaison linéaire de $I_n, \dots, A^{n-1}$.

Preuve :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$P_A(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0.$$

Comme A est inversible, $P_A(0)(= a_0) = \det(A) \neq 0$. D'après Cayley-Hamilton, $P_A(A) = 0$; d'où $A((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_1 I_n) = -a_0 I_n$ et donc on a :

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_1 I_n).$$

□

6.6 Polynôme minimale

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n non nulle et u un endomorphisme de E. Le théorème de Cayley-Hamilton montre que $P_u(u) = 0$, où P_u est le polynôme caractéristique de u.

Posons :

$$m = \inf\{d^\circ P \mid P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \textit{ et } P(u) = 0\}.$$

On a $1 \leq m \leq n$. Soit Q_u un polynôme unitaire tel que $d^\circ Q_u = m$ et $Q_u(u) = 0$. Alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(u) = 0$, on a $d^\circ Q_u \leq d^\circ P$. Plus précisément, Q_u divise P.
En effet, la division euclidienne de P par Q_u donne :

$$P = Q_u H + R$$

avec $H, R \in \mathbb{K}[X]$ et $d^\circ R < d^\circ Q_u$. Comme on a :

$$\begin{array}{rcl} R(u) & = & P(u) - Q_u(u)H(u) \\ & = & 0. \end{array}$$

Alors $R = 0$ d'après la définition de Q_u et du fait que $d^\circ R < d^\circ Q_u$. D'où Q_u divise P.

En particulier, le polynôme Q_u divise le polynôme caractéristique P_u.

Définition 6.1.

Le polynôme Q_u défini ci-dessus est appelé polynôme minimal de u. Il vérifie, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$, on a Q_u divise P. En particulier, Q_u divise le polynôme caractéristique P_u de u.

Proposition 6.2.

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie non nulle et u un endomorphisme de E. Alors les valeurs propres de u sont exactement les racines du polynôme minimal Q_u.

Preuve :
Les valeurs propres de u sont des racines de Q_u car $Q_u(u) = 0$. Inversement, comme Q_u divise P_u et que les racines de P_u sont exactement les valeurs propres de u, alors les racines de Q_u sont des valeurs propres de u. $\square$

Pour montrer le théorème principal de cette partie, on a besoin du théorème important suivant, dit théorème de décomposition des noyaux :

Théorème 6.3. (de décomposition des noyaux)

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie E, et P, Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Alors on a :

$$\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u)).$$

Preuve :
On a $\ker(P(u))$ et $\ker(Q(u))$ sont deux sous espaces vectoriels de $\ker((PQ)(u))$. Notons par $F = \ker((PQ)(u))$, $F_1 = \ker(P(u))$ et $F_2 = \ker(Q(u))$. Notre but est de montrer que $F = F_1 \oplus F_2$.
Comme P et Q sont premiers entre eux, alors ils existent deux polynômes R et S de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$PR + QS = 1$$

et par suite en considérant la restriction de u à F et on la notons aussi par u on a :

$$(PR)(u) + (QS)(u) = Id_F.$$

Soit $x \in F$, on a :

$$\begin{aligned} x &= (PR+QS)(u)(x) \\ &= (PR)(u)(x) + (QS)(u)(x) \\ &\in F_1 + F_2 \end{aligned}$$

puisque $(PR)(u)(x) \in F_2$ (car $Q(u)(PR)(u)(x) = R(QP(u))(x) = 0$) et $(QS)(u)(x) \in F_1$ (car $P(QS)(u)(x) = S(PQ(u))(x) = 0$) et par suite on a $F = F_1 + F_2$.
Il reste à montrer que la somme est directe. Soit alors $x \in F_1 \cap F_2$ c'est-à-dire que $P(u)(x) = Q(u)(x) = 0$. On a :

$$\begin{aligned} x &= (PR+QS)(u)(x) \\ &= R(u)(P(u))(x) + S(u)Q(u)(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et par suite on a $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. $\square$

Maintenant on peut montrer le théorème principal de cette partie :

Théorème 6.4.

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie non nulle et u un endomorphisme de E tel que son polynôme minimal Q_u est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors u diagonalisable si, et seulement si, les racines de Q_u sont tous simples.

Preuve :
Supposons que u est diagonalisable. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u et considérons le polynôme $Q = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \ker(Q(u)) & = & \ker(\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)(u)) \\ & = & \underbrace{\bigoplus_{i=1}^r \ker(u - \lambda_i Id_E)}_{\text{D'après le théorème de décomposion des noyaux}} \\ & = & \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i} \\ & = & \underbrace{E}_{\text{car } u \text{ est diagonalisable}} \end{array}$$

Donc $Q(u) = 0$ et par suite Q_u divise Q, c'est-à-dire $Q_u = Q$ (car Q divise Q_u et les deux polynômes sont unitaires) et donc les racines de Q_u sont tous simples.
Réciproquement, Supposons que tous les racines de Q_u sont simples et que Q_u est scindé sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire que $Q_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ où les λ_i sont les valeurs propres distinctes de u. On a d'après le théorème de décomposition des noyaux :

$$\begin{array}{rcl} \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i} & = & \bigoplus_{i=1}^r \ker(u - \lambda_i \operatorname{Id}_E) \\ & = & \ker(\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)(u)) \\ & = & \ker(Q_u(u)) \\ & = & \ker(0) \\ & = & E. \end{array}$$

Dès lors le théorème fondamentale montre que u est diagonalisable, ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

6.7 Applications de la réduction des matrices

6.7.1 Application 1 : Calcul des puissances d'une matrice carrée

Proposition 7.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$. Alors pour tout entier k, on a :

$$A^k = PD^kP^{-1} = P\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)P^{-1}.$$

Exemple : Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On applique la méthode du pivot de Gauss pour calculer le déterminant de la matrice $A - \lambda I_3$:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 & -3 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & (2-\lambda)(\lambda-6) & 2-\lambda \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} (2-\lambda)(\lambda-6) & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2(6-\lambda).
\end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de A sont 2 et 6.

Un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $E_2 = \ker(A - 2I_3)$ si, et seulement si, $(A - 2I_3)X = 0$. D'où :

$$\begin{aligned}
X \in E_2 &\Leftrightarrow x + y - z = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -y + z.
\end{aligned}$$

Donc, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'espace E_2 est alors de dimension 2 et a comme base la famille des deux vecteurs :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $E_6 = \ker(A - 2I_3)$ si, et seulement si, $(A - 6I_3)X = 0$. D'où :

$$\begin{aligned} X \in E_6 \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y - z & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3y \\ z & = & 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

D'où :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le sous espace propre E_6 est de dimension 1 dont une base est formée du seul vecteur :

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\dim E_2 + \dim E_6 = 2+1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, la matrice A est diagonalisable et une base formée de vecteurs propres est $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$. La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $\mathcal{B}'$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après la formule de changement de bases, on a :

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On peut calculer la matrice inverse P^{-1} à l'aide de la méthode de pivot de Gauss ou bien à l'aide de la méthode des cofacteurs. On trouve :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ 1 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour tout entier n, on a :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ 1 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-2}(1+3^{n+1}) & 3.2^{n-2}(-1+3^n) & -3.2^{n-2}(-1+3^n) \\ 2^{n-2}(-1+3^n) & 3.2^{n-2}(-1+3^{n-1}) & -2^{n-2}(-1+3^n) \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.7.2 Application 2 : Systèmes de suites récurrentes linéaires

Nous traitons ici le cas d'un système 3×3 de suite linéaires, mais la méthode est la même pour un système quelconque à p lignes et p colonnes.

Proposition 7.2.

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites définies par les premiers termes u_0, v_0 et w_0, et par le système suivant :

$$\left(\sum\right) : \begin{cases} u_n &= a_{11}u_{n-1} + a_{12}v_{n-1} + a_{13}w_{n-1} \\ v_n &= a_{21}u_{n-1} + a_{22}v_{n-1} + a_{23}w_{n-1} \\ w_n &= a_{31}u_{n-1} + a_{32}v_{n-1} + a_{33}w_{n-1}. \end{cases}$$

On écrit le système sous forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Donc le système $(\sum)$ est équivalent à $X_n = AX_{n-1}$ Pour déterminer les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$, il suffit de déterminer pour tout entier n le vecteur X_n. Supposons que la matrice A est diagonalisable, c'est-à-dire il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale P telle que $A = PDP^{-1}$. Donc la solution X_n est donnée par :

$$X_n = A^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0.$$

Exemple : Soient $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = 1$ et pour tout entier $n > 0$, on a :

$$\begin{cases} u_n &= 5u_{n-1} + 3v_{n-1} - 3w_{n-1} \\ v_n &= u_{n-1} + 3v_{n-1} - w_{n-1} \\ w_n &= 2w_{n-1}. \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

D'après l'exemple précédent, $A = PDP^{-1}$ où :
$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ 1 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
Comme $X_n = A^n X_0$, alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-2}(1+3^{n+1}) & 3.2^{n-2}(-1+3^n) & -3.2^{n-2}(-1+3^n) \\ 2^{n-2}(-1+3^n) & 3.2^{n-2}(-1+3^{n-1}) & -2^{n-2}(-1+3^n) \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-2}(1+3^{n+1}) \\ 3.2^{n-2}(-1+3^{n-1}) \\ 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquence, pour tout entier n, on a :

$$\begin{cases} u_n = 2^{n-2}(1+3^{n+1}) \\ v_n = 3.2^{n-2}(-1+3^{n-1}) \\ w_n = 2^n. \end{cases}$$

6.7.3 Application 3 : Suites récurrentes linéaires

Nous allons traiter le cas d'une suite récurrente d'ordre 3, mais la méthode est valable pour toutes les suites récurrentes linéaire d'ordre p donné.

Proposition 7.3.

Soit $(u_n)_n$ *une suite définie par la donnée des trois premiers termes et par la relation de récurrence d'ordre* 3 *suivante :*

$$(1): \; u_{n+3} = au_{n+2} + b_n u_{n+1} + cu_n$$

où $a, b, c \in \mathbb{K}$
Introduisons deux suites intermédiaires $(v_n)_n$ *et* $(w_n)_n$ *définies par :* $v_n = u_{n+1}$ *et* $w_n = u_{n+2}$*. Alors l'équation* (1) *est équivalente au système :*

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Si la matrice A *est diagonalisable, on se ramène à la méthode développée dans la proposition précédente.*

6.7.4 Application 4 : Exponentielle des matrices

Rappelons que pour tout réel x, la suite de terme générale $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ vérifie :

$$(2) \qquad \lim_{n \to +\infty} (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}) = e^x.$$

Cela veut dire que :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

C'est le développement de la fonction exponentielle en série entière.

Définition 7.4.

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *une matrice carrée et* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de matrices dont le terme général est défini par :*

$$S_n = I_p + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n.$$

La suite $(S_n)_n$ *est convergente et converge vers une matrice de* $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *qu'on note* e^A *et qu'on appelle exponentielle de la matrice* A*. On écrit :*

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}A^n.$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Comme A est une matrice diagonale, pour tout entier n, on a $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. D'où on a :

$$\begin{aligned} S_n &= I_2 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} + \ldots + \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} a_n = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} \\ b_n = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \ldots + \frac{3^n}{n!}. \end{cases}$$

Donc on a :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = e^2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = e^3.$$

On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$e^A = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}.$$

Remarque : On peut montrer par le même raisonnement que si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, alors :

$$e^A = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n})$$

est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n})$.

On montre la proposition suivante :

Proposition 7.5.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On a :

1. *Si $AB = BA$, alors :*
$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$
2. *e^A est une matrice inversible et on a :*
$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$
3. *L'application $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :*
$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$
4. *Si A est une matrice diagonale $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors e^A est aussi diagonale et on a :*
$$e^A = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}).$$
5. *Si A et B sont semblables, alors e^A et e^B sont semblables. Plus précisément, s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$ alors :*
$$e^A = Pe^B P^{-1}.$$

Exemple : Déterminer e^A où la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a :

$$\det(A - \lambda I_3) = \lambda(1-\lambda)(2-\lambda),$$

donc $\mathrm{spec}(A) = \{0, 1, 2\}$. Comme A admet trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. Pour la diagonaliser il faut déterminer les sous espaces propres associés qui sont dans ce cas tous de dimension 1. On trouve $E_0 = \mathbb{R}v_0$, $E_1 = \mathbb{R}v_1$ et $E_2 = \mathbb{R}v_2$ avec :

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\{v_0, v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A. La matrice de passage de la base canonique à la base (v_0, v_1, v_2) est la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice dans la base (v_0, v_1, v_2) est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc $A = PDP^{-1}$. Comme D est diagonale, $e^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$. D'où on a :

$$\begin{aligned} e^A &= PDP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2e & 0 & 0 \\ -2e + 2e^2 & 1 + e^2 & -1 + e^2 \\ -2e + 2e^2 & -1 + e^2 & 1 + e^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.7.5 Application 5 : Systèmes différentiels du premier ordre

Définition 7.6.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et J un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in J$ soit :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

un vecteur formé de n fonctions coordonnées $x_i(t)$ dérivables sur J. On note :

$$\frac{d}{dt}X(t) = X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

On appelle système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants toute équation différentielle du type :

$$\sum \quad \frac{d}{dt}X(t) = AX(t) + B(t).$$

On appelle système d'équations différentielles linéaires homogène associé à $\sum$ le système $\sum\limits_H$ sans second membre suivant :

$$\sum_H \quad \frac{d}{dt}X(t) = AX(t).$$

On montre le théorème suivant :

Théorème 7.7.

1. *La solution générale du système homogène* $\sum_H$ *est donnée par* $X(t) = e^{tA}C$ *où* C *est un vecteur colonne quelconque de* $\mathbb{K}^n$.
2. *Les solutions du système* $\sum$ *s'obtiennent en ajoutant à la solution de* $\sum_H$ *une solution particulière de* $\sum$.
3. *Pour calculer une solution particulière de* $\sum$, *on peut appliquer la méthode de la variation de la constante, qui consiste à chercher une solution particulière sous la forme :*

$$X(t) = e^{tA}C(t),$$

où $C(t)$ *est une fonction inconnue dérivable sur* J *à déterminer. On obtient alors le système différentiel :*

$$\frac{d}{dt}C(t) = e^{-tA}B(t)$$

et il suffit de calculer une primitive pour obtenir une solution.

Exemple : Considérons le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) &= -8y(t) + 6z(t) \\ y'(t) &= -x(t) - 8y(t) + 7z(t) \\ z'(t) &= x(t) - 14y(t) + 11z(t). \end{cases}$$

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Donc le système est équivalent à $X'(t) = AX(t)$, qui est un système homogène. Cherchons les valeurs propres de A. On a $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3)$. Donc A admet trois valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et les sous-espaces propres sont tous de dimension un et on trouve que $E_{-2} = \mathbb{R}v_1$, $E_2 = \mathbb{R}v_2$ et $E_3 = \mathbb{R}v_3$, avec :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ , \ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Donc la solution générale est de la forme :

$$X(t) = \alpha_1 e^{-2t} v_1 + \alpha_2 e^{2t} v_2 + \alpha_3 e^{3t} v_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{-2t} + \alpha_2 e^{2t} + 2\alpha_3 e^{3t} \\ \alpha_1 e^{-2t} + 2\alpha_2 e^{2t} + 3\alpha_3 e^{3t} \\ \alpha_1 e^{-2t} + 3\alpha_2 e^{2t} + 5\alpha_3 e^{3t} \end{pmatrix}$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$.

6.8 La réduction de Jordan d'une matrice

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ c'est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.8.1 Réduction de Jordan pour les matrices nilpotentes

Théorème 8.1.

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$. Alors N est semblable à la matrice $\mathcal{J}$, qui s'écrit par blocs :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_s \end{pmatrix}$$

avec

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices J_i sont appelées "blocs de Jordan nilpotent".

Preuve :
On procède par récurrence sur n (la taille de la matrice N). Pour $n = 1$, le résultat est évident, puisqu'une matrice scalaire nilpotente est nécessairement nulle.

Supposons le résultat acquis pour toute matrice nilpotente de taille strictement inférieure à n. Soit alors $N \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ nilpotente ; on note $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme qui lui est associé via la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Si l'endomorphisme u est nul, le résultat est évident. Sinon, notons $k > 1$ l'ordre de nilpotence de u, c'est-à-dire l'entier k qui vérifie $u^{k-1} \neq 0$ et $u^k = 0$. Soit alors $x \notin \ker u^{k-1}$ et F le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$F = Vect(x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{k-1}(x)).$$

Montrons que la dimension de F est exactement k ce qui impliquera en particulier que $k \leq n$. Cela revient à prouver que la famille $\{x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{k-1}(x)\}$

est libre, soit $\alpha_0, ..., \alpha_{k-1} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$(2) \quad \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l u^l(x) = 0.$$

Si les scalaires α_l ne sont pas tous nuls, on définit $i = min\{l \mid \alpha_l \neq 0\}$. En appliquant u^{k-1-i} à l'égalité (2), on obtient $\alpha_i u^{k-1}(x) = 0$, qui fournit la contradiction puisque x n'appartient pas au noyau de u^{k-1}.
Le sous-espace F est clairement stable par u, et la matrice de l'endomorphisme $u|_F$ dans la base $(u^{k-1}(x), \dots, u(x), x)$ est un bloc de Jordan de taille k. Si $k = n$, la preuve est terminée car la décomposition recherchée ne compte qu'un seul bloc. Sinon, on pourra conclure à l'aide de l'hypothèse de récurrence sitôt qu'on aura trouvé un supplémentaire à F, lui-aussi stable par u.

On peut réaliser une telle construction par dualité. Soit $\varphi \in E^*$ telle que le crochet $\langle u^{k-1}(x), \varphi\rangle$, soit non-nul. On introduit Γ comme suit :

$$\Gamma = Vect(\varphi, u^{\top}(\varphi), {u^{\top}}^2(\varphi), \dots, {u^{\top}}^{k-1}(\varphi)).$$

Le sous-espace Γ est de dimension k. En effet, soit $\alpha_0\varphi + \alpha_1 u^{\top}(\varphi) + \dots + \alpha_{k-1}{u^{\top}}^{k-1}(\varphi) = 0$ une combinaison linéaire nulle. Si les scalaires α_l ne sont pas tous nuls, on note, comme plus haut, $i = min\{l \mid \alpha_l \neq 0\}$. Alors, pour tout $y \in E$, on a :

$$0 = \sum_{l=i}^{k-1} \alpha_l \langle y, {u^{\top}}^l(\varphi)\rangle = \sum_{l=i}^{k-1} \alpha_l \langle u^l(y), \varphi\rangle.$$

Pour $y = u^{k-1-i}(x)$, on obtient $\alpha_i\langle u^{k-1}(x), \varphi\rangle = 0$, qui fournit la contradiction.

Ainsi, l'ensemble polaire $G = \Gamma^{\perp} = \{y \in E; \forall\psi \in \Gamma, \langle y, \psi\rangle = 0\}$ est de dimension $n - k$. De plus, comme Γ est stable par $u^{\top}$, le sous-espace G est stable par u. Pour achever de prouver que G est un supplémentaire de F, il suffit de montrer que l'intersection $F \cap G$ est nulle. Cela veut dire qu'il s'agit de montrer que toute combinaison linéaire $\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \dots + \alpha_{k-1}u^{k-1}(x)$ orthogonale à chaque ${u^{\top}}^l(\varphi)$ a tous ses coefficients nuls. La démonstration utilise la même technique que celles concernant les dimensions de F et Γ.

En Résumé : on a trouvé deux sous-espaces F et G, tous-deux stables par u, recouvrant E en somme directe, et tels que la restriction de u à F soit semblable à un bloc de Jordan. Pour obtenir une écriture matricielle, fixons une base $(e_{k+1},\ldots,e_n)$ de G ; si Q désigne la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et la base $(u^{k-1}(x),\ldots,u(x),x,e_{k+1},\ldots,e_n)$ alors on a :

$$N = Q\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & N' \end{pmatrix}Q^{-1}$$

où J_1 est un bloc de Jordan. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à N', clairement nilpotente. Il existe une matrice de passage $P' \in \mathcal{GL}_{n-k}(\mathbb{K})$ telle que $N' = P'\mathcal{J}'P'^{-1}$, où $\mathcal{J}'$ est composée de blocs de Jordan. L'identité suivante permet de conclure :

$$N = \overbrace{Q\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}}^{P}\overbrace{\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}' \end{pmatrix}}^{\mathcal{J}}\overbrace{\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & P'^{-1} \end{pmatrix}Q^{-1}}^{P^{-1}}.$$

$\square$

Remarque : On peut faire le lien entre la forme de Jordan d'un endomorphisme nilpotent et le lemme des noyaux emboîtés. En effet, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors :

$$\ker u \subset \ker u^2 \ldots \subset \ker u^n = E,$$

la suite de sous-espaces étant strictement croissante, puis constante. Il est facile de relier la dimension du noyau $\ker u^i$ en fonction de la taille des blocs de Jordan. On a :

1. $\dim\ker u$ est égal au nombre de blocs de Jordan ;
2. $\dim\ker u^i = \dim\ker u^{i-1} + d_i$, $(i \geq 2)$, où d_i est le nombre de blocs de Jordan de taille $\geq i$.

Exemple : Soient A et B les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la matrice A, on a :

$$\dim\ker A = 2, \qquad \dim\ker A^2 = 4.$$

Alors que la matrice B vérifie :

$$\dim\ker B = 2, \qquad \dim\ker B^2 = 3 \quad et \qquad \dim\ker B^3 = 4.$$

On peut en déduire, entre autres, que les matrices A et B ne sont pas semblables.

On énonce maintenant le résultat concernant la réduction de Jordan pour les endomorphismes non-nilpotents.

6.8.2 Réduction de Jordan pour des matrices quelconques

Théorème 8.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont le polynôme caractéristique P_A est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors A est semblable à la matrice :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix},$$

avec

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

où les λ_i sont les valeurs propres (non-nécessairement distinctes) de A. Les matrices J_i sont appelées “blocs de Jordan”.

Preuve :
On écrit la factorisation de P_A sur $\mathbb{K}$:

$$P_A(X) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{\alpha_i} \qquad avec \qquad (\lambda_i \neq \lambda_j \;\; si \;\; i \neq j).$$

D'après le lemme de décomposition des noyaux (les facteurs sont deux-à-deux premiers entre-eux) et le théorème de Cayley-Hamilton, $E := \mathbb{K}^n$ apparaît comme somme directe des sous espaces caractéristiques :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i, \quad avec \quad F_i = ker(A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}.$$

Chaque F_i est stable par A ; on note A_i la matrice $A|F_i$. Alors $A_i - \lambda_i I_{F_i}$ est nilpotente. D'après le théorème précédent, il existe une matrice de passage $P_i \in \mathcal{GL}(F_i)$ telle que $A_i - \lambda_i I_{F_i} = P\mathcal{J}_i P^{-1}$, où $\mathcal{J}_i$ est composé de blocs de Jordan nilpotents. On en déduit que A_i est semblable à une matrice composée de blocs de Jordan relatif à la valeur propre λ_i. Le résultat énoncé se déduit en juxtaposant les blocs diagonaux correspondant à chaque sous-espace F_i.

□

La réduite de Jordan constitue “la forme diagonalisée d'une matrice non-diagonalisable”, ce qui signifie qu'à bien des points de vue, la forme de Jordan est la plus simple qu'on puisse obtenir. Cette forme de Jordan coïncide avec la forme diagonalisé dans le cas diagonalisable.

Dans le cas $\Bbbk = \mathbb{C}$, l'hypothèse concernant P_A n'est pas contraignante, si bien qu'on pourra toujours utiliser la réduite complexe d'une matrice. La situation d'une matrice réelle est plus délicate : on peut bien sur plonger $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et considérer la réduite complexe. Néanmoins on aura parfois besoin d'une réduite réelle. La structure des polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ permet d'obtenir un résultat dans ce sens.

6.8.3 Réduction de Jordan réelle

Théorème 8.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients réels. Alors A est semblable à la matrice $\mathcal{J}$, qui s'écrit par blocs :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_s & & & \\ & & & K_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & K_r \end{pmatrix}$$

avec,

$$J_l = \begin{pmatrix} \lambda_l & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_l \end{pmatrix},$$

et les matrices K_l s'écrivent par blocs 2×2 sous la forme :

$$K_l = \begin{pmatrix} \Lambda_l & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & I_2 \\ 0 & \cdots & 0 & \Lambda_l \end{pmatrix} \text{ avec } \Lambda_l = \begin{pmatrix} a_l & b_l \\ -b_l & a_l \end{pmatrix}.$$

Les réels λ_l sont les valeurs propres réelles non-nécessairement distinctes de A et les nombres complexes $a_l \pm ib_l$ ($b_l \neq 0$) sont les valeurs propres complexes conjuguées non nécessairement distinctes.

Preuve :

Un moyen simple pour démontrer ce résultat consiste à remarquer que les matrices A et $\mathcal{J}$ ont la même réduite de Jordan complexe. On commence par vérifier que les blocs de Jordan complexes correspondant à une valeur propre (non-réelle) λ et ceux correspondant à $\overline{\lambda}$ se correspondent deux-à-deux. Cela découle de la caractérisation des tailles des blocs à l'aide des dimensions des sous-espaces caractéristiques successifs. Il suffit donc de montrer que le bloc

K_l, de taille $2m_l$, a pour réduite de Jordan complexe la matrice

$$\mathcal{J}_l = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_l^+ & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_l^- \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{J}_l^{\pm}$ est un bloc de Jordan de taille m_l associé à la valeur propre $a_l \pm ib_l$. Or si on note $(e_1, f_1, \ldots.., e_{m_l}, f_{m_l})$ la base canonique dans laquelle K_l est la matrice de l'endomorphisme u_l, alors la matrice de u_l dans la base :

$$(e_1 + if_1, e_2 + if_2, \ldots\ldots\ldots, e_{m_l} + if_{m_l}, e_1 - if_1, e_2 - if_2, \ldots\ldots, e_{m_l} - if_{m_l})$$

n'est autre que $\mathcal{J}_l$.

Ainsi les matrices A et $\mathcal{J}$ ont la même réduite de Jordan complexe ; elles sont donc semblables sur $\mathbb{C}$. Comme elles sont toutes-deux réelles, elles sont aussi semblables sur $\mathbb{R}$ d'après le lemme ci-dessous, ce qui termine la preuve du Théorème 8.3. □

On rappelle ici l'énoncé et la démonstration d'un résultat classique simple :

Lemme 8.4.

Deux matrices à coefficients réels semblables sur $\mathbb{C}$ sont aussi semblables sur $\mathbb{R}$.

Preuve :
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PBP^{-1}$. On note U et V les parties réelle et imaginaire de P :

$$U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad et \quad P = U + iV.$$

En identifiant parties réelle et imaginaire, il vient

$$(*) \qquad AU = UB \quad et \quad AV = VB.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note Q_t la matrice à coefficients réels $U + tV$, et $\phi(t)$ son déterminant. La fonction ϕ est un polynôme en la variable t, qui ne saurait être nul car $\phi(i) = detP \neq 0$. Ainsi, il existe une valeur réelle t_0 telle que la matrice Q_t soit inversible. Par combinaison linéaire des relations $(*)$, on vérifie que $AQ_t = Q_tB$, ce qui montre que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$. □

6.8.4 Calcul de la matrice de Jordan d'une matrice donnée

Une question naturelle est : Étant donnée une matrice A explicite, comment calculer une matrice de Jordan $\mathcal{J}$ à laquelle elle est semblable ?
Pour répondre à cette question il faut suivre les étapes suivantes :

1. Calculer le polynôme caractéristique.
2. Vérifier si le polynôme caractéristique est scindé.
3. Pour chaque valeur propre λ, on calcule alors la suite des sous-espaces $ker(A - \lambda I_n)^i$ où i est l'ordre de multiplicité de λ.

Voici deux exemples pratiques de réponse à cette question :

Exemple 1 : Trouver la forme réduite de Jordan de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

Solution. On a :

$$\begin{array}{rcl} P_A(X) & = & det(A - XI_4) \\ & = & (1-X)^2(2-X)^2. \end{array}$$

D'après le lemme de décomposition des noyaux on a :

$$E = \ker(f - Id_E)^2 \oplus \ker(f - 2Id_E)^2,$$

où $E = \mathbb{R}^4$, f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A et $(e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Pour $\ker(f - Id_E)$, on résout :

$$\left\{ \begin{array}{r} 2y + 3z + 14t = 0 \\ 5z + 7t = 0 \\ z + 7t = 0 \\ t = 0, \end{array} \right.$$

ce qui équivaut à $y = z = t = 0$.
Donc $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ engendre $\ker(f - Id_E)$.

Après avoir fait les calculs, on trouve $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 13 & 49 \\ 0 & 0 & 5 & 42 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'où :

$$(x,y,z,t) \in \ker(f - Id_E)^2 \Leftrightarrow z = t = 0$$

donc (e_1, e_2) est une base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)^2$.
Ainsi, $\{e_2\}$ engendre un supplémentaire de $\ker(f - Id_E)$ dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)^2$.
D'où, la base de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)^2$ disposée comme suit :

$$\begin{array}{c} e_2 \\ \uparrow \\ (f - \mathrm{Id}_E)(e_2) = 2e_1. \end{array}$$

Soit f_1 la restriction de f sur $\ker(f - \mathrm{Id}_E)^2$, on a :

$$Mat(f_1, (2e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve que $\ker(f - 2Id_E)$ est de dimension 1 engendré par $u_1 = (13, 5, 1, 0)$.
Pour $ker(f - 2Id_E)^2$ on résout :

$$\begin{cases} x - 4y + 7z + 21t = 0 \\ \quad y - 5z + 28t = 0. \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} x = 13z - 133t \\ y = 5z - 28t. \end{cases}$$

D'où u_1 et $u_2 = (-133, -28, 0, 1)$ constituent une base de $\ker(f - 2Id_E)^2$.
Ainsi $\{u_2\}$ engendre un supplémentaire de $\ker(f - 2Id_E)$ dans $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E)^2$.
D'où la base de $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E)^2$ est disposée comme suit :

$$\begin{array}{c} u_2 \\ \uparrow \\ (f - 2\,\mathrm{Id}_E)(u_2) = 7u_1. \end{array}$$

par rapport à cette base la matrice de f_2 induite par f sur $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E)^2$ est :

$$Mat(f_2, (7u_1, u_2)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$Mat(f,(2e_1,e_2,7u_1,u_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

C'est la réduite de Jordan de A.
La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base $B' = (2e_1, e_2, 7u_1, u_2)$ est la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 91 & -133 \\ 0 & 1 & 35 & -28 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2 : Trouver la forme réduite de Jordan de la matrice :

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution. Le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(X) = det(A - XI_4) = (3+X)^4.$$

On pose $M = A + 3I$. On a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On cherche une base de $Ker(M)$ et on trouve que :

$$dim \ker(M) = 2.$$

On calcule M^2 et on trouve :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La troisième et la quatrième colonnes de M^2 sont identiques. Donc $\mathrm{rg}(M^2) = 1$ et d'après le théorème du rang, on a :

$$\dim \ker(M^2) = 3.$$

On calcule M^3 et on trouve :

$$M^3 = 0.$$

Donc on a clairement :

$$\dim \ker(M^3) = 4 = \text{l'ordre de multiplicité de la racine } -3 \text{ de } P_A.$$

Donc, on en déduit que la réduite de Jordan de A comporte deux blocs associés à la valeur propre -3 car $\dim \ker(M) = 2$, et on sait que le plus grand des blocs est de taille 3 car $M^3 = 0$.
On sait donc que, dans une base de Jordan, la matrice réduite de Jordan sera de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Précisons la base de Jordan et la matrice de passage.
On choisit donc un vecteur $v_3 \in \ker(M^3) \setminus \ker(M^2)$. On peut choisir :

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(M^3) \setminus \ker(M^2).$$

Puis

$$v_2 = Mv_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin :

$$v_1 = Mv_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il nous manque un vecteur u qui soit dans $\ker(M) \backslash Vect(v_1)$. On peut choisir :

$$u = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(M) \setminus Vect(v_1).$$

Ainsi (u, v_1, v_2, v_3) est une base de Jordan dans laquelle la réduite de Jordan est exactement J.
La matrice de passage correspondante est alors :

$$P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.9 Décomposition de Dunford

6.9.1 Théorème de décomposition de Dunford

Le théorème de décomposition de Dunford est le suivant :

Théorème 9.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont le polynôme minimal est scindé. Alors, il existe un couple de matrices (B, N) tel que

1. $A = B + N$.
2. *B est diagonalisable et N est nilpotente.*
3. *B et N commutent.*

De plus, B et N sont données par

$$B = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_p P_p, \quad N = (A - \lambda_1 I)P_1 + \ldots + (A - \lambda_p I)P_p;$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A et $P_1, \ldots, P_p$ sont les matrices des projections sur les sous-espaces caractéristiques $F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_p}$.

Preuve :
Soit u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soient $m_1, \ldots, m_p$ les ordres de multiplicité des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de P_A respectivement. On sait d'après le lemme de décomposition des noyaux que $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}$. On sait que chacun des sous-espaces caractéristiques F_{λ_i} est stable par u et que pour tout $i \leq p$, $F_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{m_i}$ (lemme de décomposition des noyaux) et $\dim F_{\lambda_i} = m_i$.
Soit v et n les deux endomorphismes définis par leurs restrictions v_i et n_i à F_{λ_i}, pour $i = 1, ..., p$, comme suit :

$$\text{pour tout } x \in F_{\lambda_i}, \quad v_i(x) = \lambda_i x, \quad n_i(x) = (u_i - \lambda_i id)(x),$$

où u_i est la restriction de u à F_{λ_i} . Considérons une base $\{f_{i,1}, ..., f_{i,m_i}\}$ de F_{λ_i}. La famille $(f_{i,k})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq m_i}$ est une base de $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}$.
Dans cette base, la matrice de v est clairement diagonale. On conclut que v est diagonalisable. Par ailleurs, la restriction n_i de n à F_{λ_i}, $i = 1, \ldots, p$, est nilpotente car elle vérifie ${n_i}^{m_i} = 0$ et $F_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{m_i}$. Donc n est nilpotent car $n^m = 0$ où $m = max(m_1, ..., m_p)$. De plus, étant donné que pour tout $i \leq p$, n_i et v_i commutent au sein de F_{λ_i} (car ce sont tous les deux des polynômes en u_i), on en déduit que v et n commutent. Les matrices B

et N peuvent être choisies comme les matrices de v et n respectivement dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. L'unicité est admise. $\square$

Une application directe de cette décomposition est le calcul des puissances de la matrice A quelconque.
En effet : pour tout $k \geq 0$ puisque B et N commutent, on a d'après la formule du binôme :

$$\begin{aligned} A^k &= (B+N)^k \\ &= \sum_{m=0}^{k} C_k^m B^{k-m} N^m. \end{aligned}$$

Le calcul des puissances de la matrice diagonalisable B et de la matrice nilpotente N est facile.

Exemple 1 : Matrice ayant une seule valeur propre.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ d'ordre 3 à coefficients réels.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer la décomposition de Dunford de A.

Solution :

1. Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A est :

$$\begin{aligned} det(A - XI_3) &= \begin{vmatrix} 3-X & 0 & 8 \\ 3 & -1-X & 6 \\ -2 & 0 & -5-X \end{vmatrix} \\ &= (-1-X)\begin{vmatrix} 3-X & 8 \\ -2 & -5-X \end{vmatrix} \\ &= (-1-X)^3. \end{aligned}$$

2. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A. D'où on a : $(A+I_3)^3 = 0$.
   La matrice $N = A + I_3$ est donc une matrice nilpotente et A s'écrit :

$$A = -I_3 + N$$

Comme toute matrice d'ordre n de la forme αI_n, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et I_n est la matrice unité, commute avec toute matrice d'ordre n, les matrices $-I_3$ et N commutent, donc $A = -I_3 + N$ est la décomposition de Dunford de A :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple 2 : Matrice triangulaire supérieure

Soient $m \in \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$ et f_m l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^3$ dont la matrice dans la base canonique de E est A_m.

On considère les deux matrices $B_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que la matrice C est nilpotente.
2. Déterminer l'ensemble F des scalaires m pour lesquels $B_m + C$ est la décomposition de Dunford de A_m.

Solution :

1. Le polynôme caractéristique $P_C(X)$ de la matrice C est $-X^3$, donc d'après le théorème de Cayley Hamilton, on a $C^3 = 0$.
   On peut aussi calculer les premières puissances de C et l'on trouve :
   $$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad C^3 = 0.$$
   Donc C est nilpotente.
2. Il est clair que $A_m = B_m + C$.
   Pour que cette écriture représente la décomposition de Dunford de A_m,

il faut de plus (et il suffit) que les matrices B_m et C commutent. Or on a :

$$B_mC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$CB_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $B_m + C$ est la décomposition de Dunford de A_m si et seulement si $m = 1$. Donc $F = \{1\}$.

6.10 Exercices avec solutions

Exercice 6.1: Soient A et B deux matrices diagonalisables appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. La matrice produit AB est-elle diagonalisable en général ? Justifier.
2. La matrice somme $A+B$ est-elle diagonalisable en général ? Justifier.

Solution:

1. On ne peut pas conclure comme le montre l'exemple suivant :
   Soient :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$
   Les matrices A et B étant triangulaires, leurs valeurs propres se lisent sur les diagonales. Les matrices A et B admettent chacune trois valeurs propres distinctes, elles sont diagonalisables. Comme on a :
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{13}{3} & 1 \end{pmatrix}$$
   est triangulaire inférieure, 1 est l'unique valeur propre de AB. Par l'absurde, supposons que la matrice AB est diagonalisable. Il existerait une matrice carrée inversible P telle que :
$$\begin{aligned} AB &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
   Ce résultat est visiblement absurde. Donc AB est une matrice qui n'est pas diagonalisable.

2. On ne peut pas conclure comme le montre l'exemple suivant :
   Soient :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$
   Les matrices A et B étant triangulaires, leurs valeurs propres se lisent sur les diagonales. Les matrices A et B admettent chacune trois valeurs propres distinctes, elles sont diagonalisables. Mais leurs somme :
$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
   admet 0 comme unique valeur propre, elle n'est pas diagonalisable par le même argument en haut.

Exercice 6.2: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Un endomorphisme non nul de E est dit nilpotent si $u^p = 0$ pour un entier naturel non nul p.
Soit u un endomorphisme nilpotent non nul de E.

1. Montrer que la seule valeur propre de u est zéro.
2. Montrer que u n'est jamais diagonalisable.

Solution:

1. Soit λ une valeur propre de u, c'est-à-dire que $u(x) = \lambda x$ pour un certain $x \in E\backslash\{0\}$. On montre par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u^p(x) = \lambda^p x$ et par suite on a $\lambda^p x = 0$ puisque $u^p = 0$. Ainsi, $\lambda^p = 0$ car $x \in E\backslash\{0\}$ et donc $\lambda = 0$. Il reste à montrer que $\lambda = 0$ est une valeur propre. Comme $u^p = 0$, soit alors m le plus petit entier tel que $u^m = 0$, c'est-à-dire que $u^m = 0$ et $u^{m-1} \neq 0$. D'où, il existe $x \in E$ tel que $y := u^{m-1}(x) \neq 0$ et par suite $u(y) = u^m(x) = 0$. Ainsi, 0 est une valeur propre associée au vecteur propre y. Donc $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de u.
2. Supposons que u est diagonalisable. Donc il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que la matrice de u par rapport à $\mathcal{B}$, $Mat(u, \mathcal{B})$, est une matrice

diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de u, c'est-à-dire zéro. D'où $Mat(u, \mathcal{B}) = 0$ et par suite $u = 0$, absurde. Donc u n'est jamais diagonalisable.

Exercice 6.3: Soit A une matrice carrée d'ordre n triangulaire supérieure (resp., inférieure) telle que les termes diagonaux sont égaux à une constante non nulle a.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Déduire que A est diagonalisable si et seulement si $A = aI_n$.

<u>Solution:</u>

1. On a :
$$\begin{array}{rcl} P_A(X) & = & \det(A - XI_n) \\ & = & (a - X)^n \end{array}$$
car la matrice $(A - XI_n)$ est triangulaire supérieure (resp., inférieure) comme A. D'où a est la seule valeur propre de A.
2. Si $A = aI_n$, alors A est diagonale et donc diagonalisable. Inversement, supposons que A est diagonalisable. Donc il existe une matrice carrée inversible P (c'est la matrice de passage entre deux bases) et une matrice B diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de A, c'est-à-dire a, telles que $A = P^{-1}BP$. Comme $B = aI_n$, alors on a $A = P^{-1}aI_nP = aP^{-1}P = aI_n$.

Exercice 6.4: Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, soit :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme carractéristique de A.
2. Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres associés de A.
3. Déduire que A est diagonalisable.
4. Déterminer le polynôme minimal de A.
5. Déduire A^2 en fonction de A et de I_3.

Solution:

1. On a :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI_3) \\ &= \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ -1 & (3-X) & -1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= -(X-1)^2(X-2). \end{aligned}$$

2. On a 1 est une valeur propre double et 2 est une valeur propre simple.
   Calcul de $E_1 = Ker(A - I_3)$:
   Les coordonnées (x, y, z) d'un vecteur propre associé à la valeur propre 1 sont solution du système :

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 0z = 0. \end{cases}$$

   qui se réduit à la seule équation $x - 2y + z = 0$. Donc, on a :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - z\} \\ &= \{(2y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= < \{V_1 := (2, 1, 0), V_2 := (-1, 0, 1)\} > . \end{aligned}$$

   D'où, $\{V_1, V_2\}$ engendre E_1 et il est facile de vérifier que c'est un système libre, donc c'est une base de E_1.

   Calcul de $E_2 = Ker(A - 2I_3)$:
   Les coordonnées (x, y, z) d'un vecteur propre associé à la valeur propre 2 sont solutions du système :

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -z = 0. \end{cases}$$

   donc la solution générale est donnée par $x = y$ et $z = 0$. D'où,

$$E_2 = \{(x, x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$= < \{V_3 := (1, 1, 0)\} > .$$

   Comme $(1, 1, 0) \neq (0, 0, 0)$, il est libre donc $\{V_3\}$ est une base de E_2.

3. Comme toutes les racines de $P_A(X)$ appartiennent à $\mathbb{R}$ et comme l'ordre de multiplicité des racines est égal à la dimension des sous espaces propres associés, alors A est diagonalisable.
4. Comme A est diagonalisable, les racines du polynôme minimal, c'est-à-dire que les valeurs propres sont simples et le polynôme minimal est unitaire, alors le polynôme minimal est $Q_A(X) = (X-1)(X-2)$.
5. On a $Q_A(A) = (A - I_3)(A - 2I_3) = 0$. D'où $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$ et $A^2 = 3A - 2I_3$.

Exercice 6.5: Soient E l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients reéls et f l'application linéaire de E vers E définie par :

$$f(P) = (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X)$$

où $P \in E$, P' et P'' désignent respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de P.

1. Calculer la matrice A de f par rapport à la base canonique de $\mathcal{B} := (1, X, X^2)$ de E.
2. Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres associés de A.
3. Déduire que A est diagonalisable.
4. Déterminer le polynôme minimal de A.

Solution:

1. On a :
$$A = Mat(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
car $f(1) = 0$, $f(X) = 2X$ et $f(X^2) = -2 + 6X^2$.
2. On a :
$$\begin{array}{rcl} P_A(X) & = & \det(A - XI_3) \\ & = & \begin{vmatrix} -X & 2 & -2 \\ 0 & (2-X) & -1 \\ 0 & 0 & 6-X \end{vmatrix} \\ & = & -(X)(2-X)(6-X). \end{array}$$
Donc les valeurs propres sont 0, 2 et 6.

Calcul du sous espace propre E_0 :

$$\begin{aligned}
E_0 &= Ker(f - 0Id_E)\\
&= \left\{ P = a + bX + cX^2 \mid Mat(f, \mathcal{B}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\\
&= \left\{ P = a + bX + cX^2 \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\\
&= \left\{ P = a + bX + cX^2 \mid \begin{cases} -2c & = 0 \\ 2b & = 0 \\ 6c & = 0 \end{cases} \right\}\\
&= \{P = a + bX + cX^2 \mid c = b = 0\}\\
&= \{P = a.1 \mid a \in \mathbb{R}\}\\
&= < \{1\} > .
\end{aligned}$$

Comme $1 \neq 0$, alors $\{1\}$ est une base de E_0.

Calcul du sous espace propre E_2 :

$$\begin{aligned}
E_2 &= \ker(f - 2Id_E)\\
&= \{P = a + bX + cX^2 \mid (f - 2Id_E)(P) = 0\}\\
&= \left\{ P = a + bX + cX^2 \mid Mat(f - 2Id_E, \mathcal{B}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\\
&= \left\{ P = a + bX + cX^2 \mid (A - 2I_3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\\
&= \left\{ P = a + bX + cX^2 \mid \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\\
&= \left\{ P = a + bX + cX^2 \mid \begin{cases} -2a - 2c & = 0 \\ 0 & = 0 \\ 4c & = 0 \end{cases} \right\}\\
&= \{P = a + bX + cX^2 \mid a = c = 0\}\\
&= \{bX \mid b \in \mathbb{R}\}\\
&= < X > .
\end{aligned}$$

Comme $X \neq 0$, alors $\{X\}$ est une base de E_2.

Calcul du sous espace propre E_6 :

$$
\begin{aligned}
E_6 &= \{P = a + bX + cX^2 \mid (f - 6I_E)(P) = 0\} \\
&= \left\{ P = a + bX + cX^2 \mid Mat(f - 6Id_E, \mathcal{B}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ P = a + bX + cX^2 \mid (A - 6I_3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ P = a + bX + cX^2 \mid \begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ P = a + bX + cX^2 \mid \left\{ \begin{array}{rl} -6a - 2c & = 0 \\ -4b & = 0 \\ 0 & = 0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \{P = a + bX + cX^2 \mid b = 0 \text{ et } c = -3a\} \\
&= \{P = a - 3aX^2 \mid a \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a(1 - 3X^2) \mid a \in \mathbb{R}\} \\
&= < \{1 - 3X^2\} > .
\end{aligned}
$$

Comme $1 - 3X^2 \neq 0$, alors $\{1 - 3X^2\}$ est une base de E_6.

3. Comme toutes les racines de $P_f(X)\,(= P_A(X))$ appartient à $\mathbb{R}$ et comme l'ordre de multiplicité des racines est égale à la dimension des sous espaces propres associés, alors f (et donc A) est diagonalisable.

4. Comme les valeurs propres sont des racines simples du polynôme caractéristique, alors le polynôme minimal de f est :

$$Q_f(X)\,(= Q_A(X)) = X(X - 2)(X - 6).$$

Exercice 6.6: Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de $Im(f)$ est une base de $\ker(f)$.

2. Soit e un vecteur de $Im(f)$. Montrer que e est un vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée. ?
3. Déterminer les valeurs propres de f.
4. f est-il diagonalisable ? Si oui, déterminer une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Solution:

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Rappelons que :

$$Im(f) \ = < \{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\} > .$$

Dans notre cas, pour tout entier i compris entre 1 et 4, on a :

$$f(e_i) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 := V_1.$$

Donc $\dim Im(f) = 1$ et une base de $Im(f)$ est $\{V_1\}$. D'où, d'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{rcl} \dim \ker(f) & = & \dim E - \dim Im(f) \\ & = & 4 - 1 \\ & = & 3. \end{array}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(f)$. Alors on a $AX = 0$ c'est-à-dire que :

$$AX = \begin{pmatrix} x+y+z+t \\ x+y+z+t \\ x+y+z+t \\ x+y+z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que $x + y + z + t = 0$. D'où on a :

$$\begin{array}{rl} \ker(f) & = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\} \\ & = \{(x, y, z, -x - y - z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ & = \{x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, -1) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ & = < \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\} > . \end{array}$$

Comme $\{V_2 := (1, 0, 0, -1), V_3 := (0, 1, 0, -1), V_4 := (0, 0, 1, -1)\}$ est libre, donc c'est une base de $\ker(f)$.

2. Soit $e\,(\neq 0) \in Im(f)$. Donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $e = aV_1$. Or comme $f(V_1) = 4V_1$, alors on a $f(e) = 4e$. Donc e est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 4.
3. Comme 0 est une valeur propre associée au sous espace propre $E_0\,(:= \ker(f))$ et 4 est une valeur propre associée au sous espace propre $E_4\,(\supseteq Im(f))$, et Comme dim E_0 + dim $Im(f) = 4 =$ dim E, alors on a $E_0 \oplus E_4 = \mathbb{R}^4$ et par suite $Im(f) = E_4$ et 0 et 4 sont les seules valeurs propres.
4. f est diagonalisable et (V_1, V_2, V_3, V_4) est une base telle que la matrice de f dans cette base est diagonale :

$$Mat(f,(V_1,V_2,V_3,V_4)) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.7: Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n et u un endomorphisme de E. On suppose $u^3 - u = 0$ tel que les endomorphismes u, $u^2 - Id_E$, $u^2 - u$ et $u^2 + u$ soient non identiquement nuls.

1. Montrer que si $x \in E$, alors $x - u^2(x) \in \ker(u)$. En déduire que $E = Im(u) \oplus \ker(u)$.
2. **a)** Soit λ une valeur propre de u. Montrer que λ ne peut être que -1, 0 ou 1.

   b) Établir que $\ker(u) \neq 0$, $\ker(u + Id_E) \neq 0$, $\ker(u - Id_E) \neq 0$.
   En déduire que -1, 0 et 1 sont effectivement des valeurs propres de u.
3. On suppose $n = 4$.

   a) Montrer que les vecteurs propres associés aux valeurs propres -1 et 1 sont linéairement indépendants. En déduire que le rang de u est 2 ou 3.

   b) On suppose en plus que $rg(u) = 2$.

   i) Montrer que $E = \ker(u) \oplus Im(u)$.

ii) Montrer qu'il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution:

1. On a :

$$\begin{aligned} u(x - u^2(x)) &= u(x) - u^3(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $x - u^2(x) \in \ker(u)$. Or tout x peut s'écrire $x = (x - u^2(x)) + u^2(x)$, alors $E = Im(u) + \ker(u)$.

Montrons que $Im(u) \cap \ker(u) = \{0\}$.
Soit $x \in Im(u) \cap \ker(u)$, c'est-à-dire que $x \in Im(u)$ et $x \in Ker(u)$. Comme $x \in Im(u)$ alors il existe $x_1 \in E$ tel que $x = u(x_1)$. D'autre part, puisque $x \in \ker(u)$ alors $u(x) = 0$, d'où $u(x) = u^2(x_1) = 0$. Or $u^3 = u$, par suite :

$$\begin{aligned} x &= u(x_1) \\ &= u^3(x_1) \\ &= u(u^2(x_1)) \\ &= u(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $Im(u) \cap \ker(u) = \{0\}$ et par suite $E = Im(u) \oplus \ker(u)$.

2. **a)** Si λ est une valeur propre de u, alors il existe $x \in E$, non nul tel que $u(x) = \lambda x$ et :

$$\begin{aligned} u^2(x) &= u(u(x)) \\ &= u(\lambda x) \\ &= \lambda u(x) \\ &= \lambda^2 x. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{array}{rcl} \lambda x & = & u(x) \\ & = & u^3(x) \\ & = & u(u^2(x)) \\ & = & u(\lambda^2 x) \\ & = & \lambda^2 u(x) \\ & = & \lambda^3 x \ , \end{array}$$

par suite $(\lambda^3-\lambda)x = 0$. Comme $x \neq 0$ on a, $0 = \lambda^3-\lambda = \lambda(\lambda^2-1)$ d'où $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$ ou $\lambda = +1$.

b) Montrons que $\ker(u) \neq \{0\}$. Pour cela raisonnons par l'absurde. Supposons que $\ker(u) = \{0\}$. Alors u est injectif et donc u est bijectif et u^{-1} existe puisque u est un endomorphisme sur E et E est de dimension finie.
L'égalité $u^3 - u = 0$ implique $u^{-1}(u^3-u) = u^2 - id_E = 0$, d'où la contradiction avec $u^2 - Id_E$ non identiquement nul.
Donc $\ker(u) \neq \{0\}$.

De même si on suppose que $\ker(u - Id_E) = 0$, le même raisonnement que ci-dessus nous conduit à l'existence de $(u - Id_E)^{-1}$ qu'on applique à l'égalité :

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & u^3 - u \\ & = & (u - Id_E)(u^2+u) \end{array}$$

ce qui implique que $u^2 + u = 0$. D'où la contradiction avec l'hypothèse.

On suppose maintenant $\ker(u + Id_E) = 0$, c'est-à-dire que $(u + Id_E)$ est inversible. Comme on a :

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & u^3 - u \\ & = & (u - Id_E)(u^2+u). \end{array}$$

En appliquant $(u+Id_E)^{-1}$ à l'expression ci-dessus on obtient $u^2 - u = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.
Ainsi, ils existent x_1, x_2 et x_3 des éléments de E tous différents de 0 tels que $u(x_1) = 0, u(x_2) = x_2$ et $u(x_3) = -x_3$. Ce qui entraine que 0, -1 et $+1$ sont bien des valeurs propres de u.

3. **a)** Soient x_2 et x_3 tels que $u(x_2) = x_2$ et $u(x_3) = -x_3$ les vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $+1$ et -1. Montrons qu'ils sont linéairement indépendants et soient λ et μ deux réels tels que $\lambda x_2 + \mu x_3 = 0$.
On a :
$$\begin{aligned} 0 &= u(\lambda x_2 + \mu x_3) \\ &= \lambda u(x_2) + \mu u(x_3) \\ &= \lambda x_2 - \mu x_3 = 0. \end{aligned}$$
On obtient donc le système :
$$\begin{cases} \lambda x_2 + \mu x_3 = 0 \\ \lambda x_2 - \mu x_3 = 0 \end{cases}$$
qui donne $2\lambda x_2 = 0$. Or $x_2 \neq 0$, donc $\lambda = 0$.
Il reste $\mu x_3 = 0$. Comme $x_3 \neq 0$, on obtient $\mu = 0$ et le système $\{x_2, x_3\}$ est libre.
L'écriture $u(x_2) = x_2$ et $x_3 = -u(x_3) = u(-x_3)$ entraine que $\{x_2, x_3\} \subseteq Im(u)$, d'où $rg(u) = \dim\, Im(u) \geq 2$. D'autre part on a :
$$4 = \dim\, E = \dim\, \ker(u) + \dim\, Im(u).$$
Comme $\ker(u) \neq \{0\}$ alors $\dim\, \ker(u) > 0$, ce qui implique $\dim\, Im(u) < 4$. On a alors $2 < \dim\, Im(u) < 4$. D'où $rg(u) := \dim\, Im(u) = 2$ ou 3.

b) Si $rg(u) = 2$ alors l'égalité $4 = rg(u) + \dim\, \ker(u)$ nous donne $\dim\, \ker(u) = 2$.
On a vu que $\{x_2, x_3\}$ est libre de $Im(u)$. De plus, $\dim\, Im(u) = Card(\{x_2, x_3\}) = 2$, alors $\{x_2, x_3\}$ est une base de $Im(u)$.

i) Montrons que $E = \ker(u) \oplus Im(u)$. Soit (x_0, x_1) une base de $\ker(u)$ ($:= E_0$ le sous espace propre associé à la valeur propre 0). Comme $\{x_2, x_3\}$ est une base de $Im(u)$, $x_2 \in E_1$ et $x_3 \in E_{-1}$, alors $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ est libre car :
$$E_0 + E_1 + E_{-1} = \ker(u) \oplus E_1 \oplus E_{-1}$$
(puisque $\{x_0, x_1\}$ est une base de $\ker(u)$, $x_2 \in E_1$ et $x_3 \in E_{-1}$).
Comme $Card(\{x_0, x_1, x_2, x_3\}) = 4 = \dim E$, alors $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ est une base de E et par suite :
$$E = \ker(u) \oplus Im(u)$$

(car $\{x_0, x_1\}$ est une base de $\ker(u)$ et $\{x_2, x_3\}$ est une base de $Im(u)$).

ii) On a $B = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ est une base de E. Comme $u(x_0) = 0$, $u(x_1) = 0$, $u(x_2) = x_2$ et $u(x_3) = -x_3$ alors la matrice de u dans B est :

$$Mat(u, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.8: Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$, ayant chacun n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$.

Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

$i)$ $f \circ g = g \circ f$.

$ii)$ f et g ont les mêmes vecteurs propres.

Solution: Toutes les valeurs propres λ sont simples, donc la dimension des sous espaces propres E_λ est 1.

$i) \Rightarrow ii)$ Soit $x \in E_\lambda$, un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, c'est-à-dire que $f(x) = \lambda x$. $\{x\}$ est une base de E_λ car E_λ est de dimension 1. Or on a :

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \\ &= g(\lambda x) \\ &= \lambda g(x). \end{aligned}$$

Donc $g(x) \in E_\lambda$, c'est-à-dire que $g(x) = \alpha x$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. D'où x est un vecteur propre de g. D'où $ii)$ car f et g jouent un rôle symétrique.

$ii) \Rightarrow i)$ Supposons que f et g admettent les mêmes vecteurs propres $(V_1, ..., V_n)$ associés aux valeurs propres $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ pour f et $(\mu_1, ..., \mu_n)$ pour g. Le système $(V_1, ..., V_n)$ est une base de E et sur cette base la matrice de f est A et celle de g est B telles que :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

On a :

$$AB = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix} = BA.$$

Par suite $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 6.9:

1. Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ telles que $AB = BA$. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes. Montrer que B est diagonalisable.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes et soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Déduire que $P(A)$ est une matrice diagonalisable.

Solution:

1. Soit A et B deux matrices carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ telles que $AB = BA$. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes. Alors, si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres distinctes de A, le sous espace propre de A associé à la valeur propre λ_i, noté E_{λ_i}, est de dimension un, c'est-à-dire que $E_{\lambda_i} =< e_i >$, où $e_i \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. De plus, $S = \{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{C}^n$ formée par les vecteurs propre de A.
   Comme S est une base de $\mathbb{C}^n$, il suffit de montrer que S est formée par des vecteurs propres de B pour montrer que B est diagonalisable.
   Soit alors $i = 1, \cdots, n$. On a :
   $$\begin{array}{rcl} A(Be_i) & = & (AB)(e_i) \\ & = & (BA)(e_i) \\ & = & B(Ae_i) \\ & = & B(\lambda_i e_i) \\ & = & \lambda_i(Be_i), \end{array}$$
   de sorte que $Be_i \in E_{\lambda_i} =< e_i >$. Ainsi on a $Be_i = \alpha_i e_i$ pour un certain $\alpha_i \in \mathbb{C}$ de sorte que e_i est un vecteur propre de B. D'où le résultat.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes et soit $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$. On a :

$$\begin{array}{rcl} P(A)A & = & \left(\sum_{i=0}^{m} a_i A^i\right) A \\ & = & \sum_{i=0}^{m} a_i A^{i+1} \\ & = & A\left(\sum_{i=0}^{m} a_i A^i\right) \\ & = & AP(A). \end{array}$$

D'où, d'après 1), la matrice $P(A)$ est diagonalisable.

Exercice 6.10: Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent. Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation.

Solution: Supposons que u et v sont deux endomorphismes diagonalisables de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent.

Montrons d'abord que tout sous-espace propre de u est stable par v.
En effet, soit E_λ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ et soit $x \in E_\lambda$. On a :

$$\begin{array}{rcl} u(v(x)) & = & v(u(x)) \\ & = & v(\lambda x) \\ & = & \lambda v(x). \end{array}$$

Donc $v(x) \in E_\lambda$. Considérons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de u et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ les sous-espaces propres associés.

Pour tout $1 \leq i \leq k$, E_{λ_i} est stable par v et la restriction de v à E_{λ_i} induit un endomorphisme diagonalisable de E_{λ_i}. Il existe donc une base $\mathcal{B}_i$ de E_{λ_i} de vecteurs propres de v et aussi de u puisque $u_{|E_{\lambda_i}} = \lambda_i Id_{E_{\lambda_i}}$

On sait que $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$ et donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ est une base de diagonalisation commune de u et v.

Exercice 6.11: En utilisant le théorème de Cayley Hamilton, montrer que la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

Solution: Le théorème de Cayley Hamilton affirme qu'une matrice A annule son polynôme caractéristique P_A, c'est-à-dire que $P_A(A) = 0$. Or on a :

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = -X^3 - 1.$$

Donc d'après Cayley Hamilton, on a $A^3 + I_3 = 0$, et donc $A(-A^2) = I_3$, avec I_3 est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ainsi A est inversible et on a A^{-1}=$-A^2$. Soit

$$A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.12: En utilisant le Théorème de Cayley-Hamilton, calculer la puissance $n^{ième}$ de la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution: Un polynôme annulateur de A est P_A d'après le théorème de Cayley-Hamilton. On a :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} X & -3 & -2 \\ 2 & X-5 & -2 \\ -2 & 3 & X \end{vmatrix} \\ &= X\left(X^2 - 5X + 6\right) - 2(-3X + 6) - 2(2X - 4) \\ &= X(X-2)(X-3) + 6(X-2) - 4(X-2) \\ &= (X-2)(X(X-3) + 2) \\ &= (X-1)(X-2)^2. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par P_A s'écrit sous la forme :

$$X^n = Q \times P_A + a_n X^2 + b_n X + c_n \ (*)$$

où Q est un polynôme et a_n, b_n et c_n sont trois réels. En évaluant en A et en tenant compte de $P_A(A) = 0$, on obtient :

$$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3.$$

Déterminons a_n, b_n et c_n. On évalue les deux membres de $(*)$ en 1 et 2 en tenant compte de $P_A(1) = P_A(2) = 0$, puis on dérive les deux membres de $(*)$ et on évalue de nouveau en 2 en se rappelant que $P_{\text{A}}(2) = P'_A(2) = 0$ puisque 2 est une racine double de $P_A(X)$. On obtient :

$$\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 \\ 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n \\ 4a_n + b_n = n2^{n-1} \end{cases} \iff \begin{cases} b_n = -4a_n + n2^{n-1} \\ a_n + \left(-4a_n + n2^{n-1}\right) + c_n = 1 \\ 4a_n + 2\left(-4a_n + n2^{n-1}\right) + c_n = 2^n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b_n = -4a_n + n2^{n-1} \\ -3a_n + c_n = 1 - \frac{n}{2}2^n \\ -4a_n + c_n = (1-n)2^n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_n = 1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)2^n \\ b_n = -4\left(1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)2^n\right) + \frac{n}{2}2^n \\ c_n = 3\left(1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)2^n\right) + 1 - \frac{n}{2}2^n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_n = 1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)2^n \\ b_n = -4 + \left(-\frac{3n}{2} + 4\right)2^n \\ c_n = 4 + (n-3)2^n\,. \end{cases}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \text{A}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 9 & 6 \\ -6 & 13 & 6 \\ 6 & -9 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dés lors, on a :

$$A^n = \left(1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right) 2^n\right) \begin{pmatrix} -2 & 9 & 6 \\ -6 & 13 & 6 \\ 6 & -9 & -2 \end{pmatrix} + \left(-4 + \left(-\frac{3n}{2} + 4\right) 2^n\right) \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ (4 + (n-3)2^n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 - 2^n & -3 + 3 \times 2^n & -2 + 2 \times 2^n \\ 2 - 2 \times 2^n & -3 + 4 \times 2^n & -2 + 2 \times 2^n \\ -2 + 2 \times 2^n & 3 - 3 \times 2^n & 2 - 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.13: Soit A une matrice carrée d'ordre 3 telle que, $A^3 - 3A^2 = -2A$.

1. Trouver les valeurs propres possibles de A.
2. Déduire que A est diagonalisable.

Solution:

1. La matrice carrée A est une racine du polynôme :

$$\begin{aligned} P(X) &= X^3 - 3X^2 + 2X \\ &= X(X-1)(X-2). \end{aligned}$$

Soit Q_A le polynôme minimal de A. Comme Q_A divise P, alors les racines de Q_A, qui sont les valeurs propres de A, sont simples et ce sont des racines de P. Donc, les valeurs propres possibles sont 0, 1 et 2.

2. Puisque les racines du polynôme minimal sont simples comme ceux de P et puisque le polynôme minimal est scindé comme P, alors A est diagonalisable.

Exercice 6.14: Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Trouver les valeurs propres et une base pour chaque sous espace propre associé de A.
3. Déduire que A est diagonalisable.
4. Déterminer le polynôme minimal de A.

Solution:

1. On a :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI_3) \\ &= \begin{vmatrix} -X & 1 & 2 \\ 1 & -X & 2 \\ 1 & 2 & -X \end{vmatrix} \\ &= (X+1)(X+2)(-X+3). \end{aligned}$$

2. Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique, donc sont :

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2 \text{ et } \lambda_3 = 3.$$

$*$ Cherchons une base du sous espace propre E_{-1}. On a :

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \det(A + I_3) \\ &= \{(x,y,z)\ \in \mathbb{R}^3 \mid (A+I_3)(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = -3z \ et\ y = z\} \\ &= \{(-3z,z,z)\ \in \mathbb{R}^3 / z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-3,1,1)\ \in \mathbb{R}^3 / z \in \mathbb{R}\} \\ &=< \{(-3,1,1)\} > . \end{aligned}$$

Comme $(-3,1,1) \neq 0$, alors $\{(-3,1,1)\}$ est de base de E_{-1}.

$*$ Cherchons une base du sous espace propre E_{-2}. On a :

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \det(A + 2I_3) \\ &= \{(x,y,z)\ \in \mathbb{R}^3\ /\ (A+2I_3)(x,y,z) = (0,0,0)\}. \end{aligned}$$

De même, on trouve que $\{(-2,-2,3)\}$ est une base de E_{-2}.

$*$ Cherchons une base du sous espace propre E_3. On a :

$$E_3 = \det(A - 3I_3).$$

On trouve de même que $\{(1,1,1)\}$ est une base de E_3.

3. Les racines du polynôme caractéristique sont simples, donc A est diagonalisable.
4. Dans ce cas, le polynôme minimal est $Q_A(X) = (X+1)(X+2)(X-3)$ car les racines du polynôme caractéristique sont simples.

Exercice 6.15: Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$, et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les sous espaces propres de f et préciser leurs dimensions respectives.
2. Déterminer le polynôme minimal de f.
3. Déduire si f est diagonalisable ou non.

Solution:

1. On a $P_A(X) = \det(A - XI_3) = -(2+X)^3$. Il y a donc une seule valeur propre, à savoir $\lambda = -2$. On a :

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \det(A + 2I_3) \\ &= \{(x,y,z)\ \in \mathbb{R}^3\ /\ (A+2I_3)(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &=< \{(1,1,1)\} > . \end{aligned}$$

Comme $(1,1,1) \neq (0,0,0)$, alors $\{(1,1,1)\}$ est une base de E_{-2}. Ainsi, on a $\dim E_{-2} = 1$ est différente de l'ordre de multiplicité de la racine -2 de P_A qui est 3. On peut donc déduire que A n'est pas diagonalisable
.

2. Soit Q_A le polynôme minimal de A. On a Q_A est unitaire et $Q_A(X)$ divise $P_A(X)$. Donc les possibilités pour $Q_A(X)$ sont : $(X+2)$, $(X+2)^2$ et $(X+2)^3$. Or on sait que $Q_A(A)=0$. D'autre part, $A+2I_3 \neq 0$ et $(A+I_3)^2 \neq 0$. Dès lors on a nécessairement $Q_A(X)=(X+2)^3$.
3. f (et donc aussi A) n'est pas diagonalisable car le polynôme minimal $Q_A(X)$ admet (-2) comme racine triple.

Exercice 6.16: Soit E l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à deux, muni de sa base $\mathcal{B}=\{1, X, X^2\}$. On considére l'endomorphisme f de E défini par :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ P=a+bX+cX^2 & \mapsto & f(P)=a-b+(b-a)X+(a+b+2c)X^2 \end{array}$$

1. **a)** Calculer $\det(f)$.
   b) En déduire que 0 est une valeur propre de f.
   c) Déterminer le sous-espace propre de f associé à 0 et en donner une base.
2. Donner la dimension de $Im(f)$ et montrer que la famille $\{1-X, X^2\}$ est une base de $Im(f)$.
3. Montrer que :
$$E=\ker(f) \oplus Im(f).$$
4. **a)** Déterminer les valeurs propres de f.
   b) Montrer que $Im(f)$ est un sous-espace propre de f associé à une valeur propre que l'on déterminera.
   d) Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E par rapport à laquelle la matrice de f est :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   d) Déduire de 4. b) que pour $n \geq 1$, on a :
$$f^n = 2^{n-1} f$$
   avec
$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\ fois}.$$

5. Montrer que :
   a) $Im(f) = Im(f^2)$.
   b) $\ker(f) = \ker(f^2)$.

Solution:

1. **a)** On a par définition : $\det(f) = \det M(f, \mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}}(f(1), f(X), f(X^2))$.
   Or on a :
$$\begin{cases} f(1) & = 1 - X + X^2 \\ f(X) & = -1 + X + X^2 \\ f(X^2) & = 2X^2. \end{cases}$$
   Par suite, on a :
$$M := Mat(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   D'où,
$$\det(f) = \det M = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$
   b) Comme $\det(f) = 0$, f n'est pas injective et il existe alors un élément non nul P de E tel que $f(P) = 0 = 0.P$, ce qui signifie que 0 est une valeur propre de f.
   c) Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est l'ensemble de tous les éléments P qui vérifient $f(P) = 0$, c'est donc $\ker(f)$.
   Soit $P = a + bX + cX^2$ un élément de E. On a :
$$\begin{aligned} P \in \ker(f) &\Longleftrightarrow f(P) = 0 \\ &\Longleftrightarrow a - b + (b - a)X + (a + b + 2c)X^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow a - b = 0 = a + b + 2c \\ &\Longleftrightarrow a = b \ \ et \ \ c = -a \\ &\Longleftrightarrow P(X) = a(1 + X - X^2). \end{aligned}$$
   Par conséquent $\ker(f) = \{P = a(1 + X - X^2) \ / \ a \in \mathbb{R}\}$.
   $\ker(f)$ est engendré par le polynôme non nul $P_1 = 1 + X - X^2$, c'est donc un sous-espace vectoriel de dimension 1 et $\mathcal{B}_1 = \{P_1\}$ est une base de $\ker(f)$.

2. D'après le théorème du rang, on a :

$$\begin{array}{rcl} \dim Im(f) & = & \dim E - \dim \ker(f) \\ & = & 3 - 1 \\ & = & 2. \end{array}$$

Comme on a :

$$\begin{cases} f(1) = 1 - X + X^2 \in Im(f) \\ f(X^2) = 2X^2 \in Im(f), \end{cases}$$

alors $X^2 = \frac{1}{2} f(X^2) \in Im(f)$ et $1 - X = f(1) - X^2 \in Im(f)$. De plus, on vérifie facilement que $\{1 - X, X^2\}$ est libre. Dés lors, $\mathcal{B}_2 := \{P_2 := 1 - X, P_3 := X^2\}$ est une base de $Im(f)$, vu que $Card\{P_2, P_3\} = \dim Im(f)$.

3. On a $\mathcal{B}_1 = \{P_1\}$ est une base de $\ker(f)$ et $\mathcal{B}_2 = \{P_2, P_3\}$ est une base de $Im(f)$. Donc pour montrer que $E = \ker(f) \oplus Im(f)$, il faut montrer que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E (puisque $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$). Or on a $Card(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = 3 = \dim E$ et on vérifie facilement que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{P_1, P_2, P_3\}$ est libre. Dés lors, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E ce qui achève la preuve de la question 3).

4. **a)** Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme caractéristique. On a :

$$\begin{aligned} P_M(X) &= \det(M - XI_3) \\ &= \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 0 \\ -1 & 1-X & 0 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= -X(X-2)^2. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de f sont donc 0 et 2.

b) Soit E_2 le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 2.
Soit $P = a(1 - X) + bX^2$ un élément de $Im(f)$, alors on a :

$$\begin{aligned} f(P) &= 2a - 2aX + 2bX^2 \\ &= 2[a(1-X) + bX^2] \\ &= 2P. \end{aligned}$$

Par suite $Im(f) \subseteq E_2$.
Réciproquement, soit $P \in E_2$. On a alors $f(P) = 2P$, soit encore $f(\frac{1}{2}P) = P$, d'où $P \in Im(f)$. Dés lors, $E_2 \subseteq Im(f)$ et par suite $E_2 = Im(f)$.

c) Comme $E = Ker(f) \oplus Im(f)$, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E. Or $f(P_1) = 0$, $f(P_2) = 2P_2$, $f(P_3) = 2P_3$, d'où on a :

$$Mat(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) Pour $n = 1$ on a $f^1 = 2^0 f$.
Soit $P \in E$, on a $f^2(P) = f(f(P))$. Comme $f(P) \in Im(f) = E_2$, alors E_2 étant le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 2, on a $f^2(P) = f(f(P)) = 2f(P)$ et par suite $f^2 = 2f$.
Par récurrence, supposons que $f^n = 2^{n-1}f$ et montrons que $f^{n+1} = 2^n f$.
Soit $P \in E$, on a :

$$\begin{aligned} f^{n+1}(P) &= f(f^n(P)) \\ &= f[2^{n-1}f(P)] \\ &= 2^{n-1}f^2(P) \\ &= 2^{n-1}2f(P) \\ &= 2^n f(P) \end{aligned}$$

de sorte que $f^{n+1} = 2^n f$.

5. **a)** L'inclusion $Im(f^2) \subseteq Im(f)$ est évidente puisqu'on a :

$$y = f^2(x) \in Im(f^2) \Longrightarrow y = f(f(x)) \in Im(f).$$

Montrons que $Im(f) \subseteq Im(f^2)$. Soit $P \in Im(f)$. Il existe $Q \in E$ tel que $f(Q) = P$. D'où $f^2(Q) = f(P)$. Or $P \in Im(f)$, donc d'aprés 4. b), on a $f(P) = 2P$ et par suite $f^2(Q) = 2P$. Soit encore $P = f^2(\frac{1}{2}Q)$ ce qui signifie $P \in Im(f^2)$. Dés lors, $Im(f) \subseteq Im(f^2)$ et par suite $Im(f) = Im(f^2)$.

b) L'inclusion $\ker(f) \subseteq \ker(f^2)$ est évidente, reste à montrer que $\ker(f^2) \subseteq \ker(f)$.

Soit $P \in \ker(f^2)$. Alors on a $f^2(P) = 0$. Or $f^2(P) = 2f(P)$ et donc on a $f(P) = 0$ et par suite $P \in \ker(f)$. Donc $\ker(f^2) \subseteq Ker(f)$. On a donc montré que $\ker(f) = \ker(f^2)$.

Exercice 6.17: Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E vers F et u un endomorphisme de E. On désigne par φ_u l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ définie pour tout élément $f \in \mathcal{L}(\text{E})$ par : $\varphi_u(f)$=$u \circ f$.

1. Soit α une valeur propre de u et d la dimension du sous espace propre E_α associé à α.
   a) Montrer que α est une valeur propre de φ_u et caractériser les vecteurs propres de φ_u associés à α.
   b) Quelle est la dimension du sous espace propre de $\mathcal{L}(E)$ associé à la valeur propre α.
2. Montrer que si u est diagonalisable, alors φ_u est diagonalisable.

Solution: Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, dim $E = n$ et φ_u l'endomorphisme défini sur $\mathcal{L}(E)$ par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_u : \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \longmapsto & u \circ f. \end{array}$$

1. **a)** Soit α une valeur propre de u et d la dimension du sous espace propre E_α associé à α.
   On cherche l'existence de $f \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $\varphi_u(f) = u \circ f = \alpha f$, c'est-à-dire $(u - \alpha Id_E) \circ f = 0$, c'est-à-dire que $Im(f) \subseteq \ker(u - \alpha Id_E)$. Or $\ker(u - \alpha Id_E) := E_\alpha \neq 0$ car α est une valeur propre de u. Donc on cherche l'existence de $f \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $Im(f) \subseteq E_\alpha$ ($\neq 0$). Cette existence est assurée et voici un exemple d'un tel f :

   Soit $x(\neq 0) \in E_\alpha$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $x_2, ..., x_n \in E$ tels que $(x, x_2, \ldots, x_n)$ forme une base de E. Posons f l'endomorphisme tel que $f(x) = x$ et $f(x_i) = 0$ pour tout $i = 2, \ldots, n$. Ainsi, α est une valeur propre de φ_u et f est un vecteur propre de φ_u associé à la valeur propre α si et seulement si $Im(f) \subseteq E_\alpha$.

b) Posons F_α le sous espace propre de $\mathcal{L}(E)$ associé à la valeur propre α de φ_u. On a donc $f \in F_\alpha$ si et seulement si $Im(f) \subseteq E_\alpha$. D'où F_α est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, E_\alpha)$ des applications linéaires de E vers E_α et qui est de dimension nd.
D'où dim $F_\alpha = nd$.

2. Soient α_i les valeurs propres de u et E_{α_i} les sous espaces propres de E associés aux ϕ_i. Si u est diagonalisable, ses valeurs propres sont réels et on a $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\alpha_i}$. Posons $d_i = \dim\, E_{\alpha_i}$. Donc on a :

$$\begin{array}{rcl} n & = & \dim\, E \\ & = & \sum_{i=1}^p \dim\, E_{\alpha_i} \\ & = & \sum_{i=1}^p d_i. \end{array}$$

Posons $F = \bigoplus_{i=1}^p F_{\alpha_i}$. Alors, F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension :

$$\begin{aligned} \dim\, F &= \sum_{i=1}^p \dim\, F_{\alpha_i} \\ &= \sum_{i=1}^p n.d_i \\ &= n\sum_{i=1}^p d_i \\ &= n^2 \\ &= \dim\, \mathcal{L}(E). \end{aligned}$$

Dès lors on a $F = \mathcal{L}(E)$ et par suite $\mathcal{L}(E) = \bigoplus_{i=1}^p F_{\alpha_i}$. Ainsi φ_u est diagonalisable.

Exercice 6.18: Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une seule valeur propre α et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une seule valeur propre β. On définit la matrice par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

A quelle condition M est-elle diagonalisable ?
(Indication : distinguer deux cas, $\alpha = \beta$ et $\alpha \neq \beta$).

Solution:

Cas 1 : $\alpha \neq \beta$:

On a $P_M(X) = P_A(X)P_B(X) = (\alpha - X)^n(\beta - X)^n$. Ainsi on a M est diagonalisable si et seulement si le polynôme minimal $Q_M(X)$ à des racines simples, c'est à dire que $Q_M(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$.

Si $Q_M(X) = (X-\alpha)(X-\beta) = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta$, alors on aura $0 = Q_M(M) = M^2 - (\alpha+\beta)M + \alpha\beta I_{2n}$, ce qui donne par un calcul simple que :

$$Q_M(M) = \begin{pmatrix} Q_M(A) & (A-\alpha I_n)C + C(B-\beta I_n) \\ 0 & Q_M(B) \end{pmatrix} = 0.$$

Ainsi, M est diagonalisable si et seulement si $Q_M(A) = 0$, $Q_M(B) = 0$, et $(A-\alpha I_n)C + C(B-\beta I_n) = 0$. Or, $0 = Q_M(A) = (A-\alpha I_n)(A-\beta I_n)$ avec le faite que $(A-\beta I_n)$ est inversible (puisque β n'est pas une valeur propre de A), montre que $A - \alpha I_n = 0$, c'est à dire que $A = \alpha I_n$. Par le même raisonnement, on obtient aussi $B = \beta I_n$.

Dès lors, on pourra conclure, dans ce cas, que M est diagonalisable si et seulement si $A = \alpha I_n$ et $B = \beta I_n$ (et C quelconque).

Cas 2 : $\alpha = \beta$.

Dans ce cas, on a $P_M(X) = P_A(X)P_B(X) = (\alpha - X)^{2n}$ et M est diagonalisable si et seulement si le polynôme minimal $Q_M(X) = (X-\alpha)$. Alors on aura $Q_M(M) = M - \alpha I_{2n}$ ce qui donne :

$$Q_M(M) = \begin{pmatrix} A-\alpha I_n & C \\ 0 & B-\alpha I_n \end{pmatrix} = 0.$$

On pourra déduire facilement, dans ce cas, que M est diagonalisable si et seulement si $A = B = \alpha I_n$ et $C = 0$.

Exercice 6.19: Soit A une matrice carrée telle que $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$.

1. Calculer le polynôme minimal de A.
2. A est-elle diagonalisable ? Justifier par deux méthodes différentes.

Solution:

1. Posons $P(X) = X^3$. On a $P(A) = A^3 = 0$ et par suite Q_A divise P, où Q_A est le polynôme minimal de A. Ainsi, $Q_A(X) = X^\alpha$ avec $1 \leq \alpha \leq 3$. Comme $Q_A(A) = A^\alpha = 0$ et $A^2 \neq 0$ (et donc $A \neq 0$), d'où $\alpha = 3$, de sorte que $Q_A(X) = X^3$.
2. $1^{ère}$ méthode. La matrice A n'est pas diagonalisable car 0 est une racine du polynôme minimal d'ordre de multiplicité trois et donc 0 n'est pas une racine simple de Q_A.

   $2^{ème}$ méthode. Supposons que A est diagonalisable. D'où, comme 0 est la seule valeur propre de A (car c'est la seule racine de Q_A), alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   tel que :

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ &= P0P^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Absurde car $A^2 \neq 0$. Ainsi, A n'est pas diagonalisable.

Exercice 6.20: Soient $u_0 = 1,\ v_0 = 1$ et $w_0 = -1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} + 3v_{n-1} - 3w_{n-1} \\ v_n = -u_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = -u_{n-1} + v_{n-1} \end{cases}$$

Calculer $u_n,\ v_n,\ w_n$ en fonction de n.

Solution: Le système de suites peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Nous obtenons par récurrence que :

$$\begin{aligned} X_n &= AX_{n-1} \\ &= A^n X_0. \end{aligned}$$

Il reste donc à calculer A^n.

Diagonalisation de A.

Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = (-1-X)(1-X)(2-X)$ de sorte que -1, 1 et 2 sont les trois valeurs propres distinctes de A, donc A est diagonalisable.

Les sous-espaces propres correspondant sont :

$$E_{-1} =< (1,0,1) > , \; E_1 =< (0,1,1) > , \; E_2 =< (-1,1,1) > .$$

Soient $\mathcal{B}_0$ la base canonique et $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,1),(-1,1,1)\}$ la base formée des vecteurs propres de A. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ notée $P := P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}}$ est la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on calcule son inverse et on trouve :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et la matrice D dans la base B est la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme on a $A = PDP^{-1}$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n + (-1)^{n+1} & (-1)^n - 2^n \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & (-1)^{n+1} - 2^n + 2 & (-1)^n + 2^n - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n + (-1)^{n+1} & (-1)^n - 2^n \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & (-1)^{n+1} - 2^n + 2 & (-1)^n + 2^n - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}.2 + 3.2^n \\ 4 - 3.2^n \\ 4 - 3.2^n + 2(-1)^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En conclusion, on obtient :

$$\begin{cases} u_n = (-1)^{n+1}.2 + 3.2^n \\ v_n = 4 - 3.2^n \\ w_n = 4 - 3.2^n + 2(-1)^{n+1}. \end{cases}$$

Exercice 6.21: En utilisant la théorie de la diagonalisation, déterminer les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par leur premier terme u_0, v_0 et w_0 et les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$

pour $n \geq 0$.

Solution: On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4u_n - 6v_n \\ 3u_n + 5v_n \\ 3u_n + 6v_n + 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} X_n. \end{aligned}$$

Alors, on a $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Par récurrence, on a $X_n = A^n X_0$.
On calcule le polynôme caractéristique de A. On trouve :

$$P_A(X) = (X+1)(X-2)(X-5).$$

Alors A a trois valeurs propres simples qui sont $-1, 2$ et 5.
Cherchons les sous-espaces propres associés.
Pour la valeur propre -1 et pour $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} AX = -X &\Longleftrightarrow \begin{cases} -3x - 6y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \\ 3x + 6y + 6z = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y = y \\ z = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Le vecteur $(2, -1, 0)$ est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1. De même, avec la valeur propre 2, on trouve le vecteur propre $(1, -1, 1)$ et pour 5, on trouve le vecteur propre $(0, 0, 1)$. Posons :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

On a $PDP^{-1} = A$. Le calcul de P^{-1} donne :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui entraîne par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$. D^n se calcule facilement en mettant les coefficients de la diagonale à la puissance n. En effectuant les deux produits de matrices, on trouve :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2.5^n & 5^n \end{pmatrix}.$$

Alors on déduit que :

$$\begin{cases} u_n = (2(-1)^n - 2^n)\, u_0 + (2(-1)^n - 2^{n+1})\, v_0 \\ v_n = ((-1)^{n+1} + 2^n)\, u_0 + ((-1)^{n+1} + 2^{n+1})\, v_0 \\ w_n = (-2^n + 5^n)\, u_0 + (-2^{n+1} + 2.5^n)\, v_0 + 5^n w_0\,. \end{cases}$$

Exercice 6.22: Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P_C le polynôme caractéristique d'une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est une matrice inversible, alors $P_{AB} = P_{BA}$.
2. **a)** Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que pour tout $p \geq n_0$, on a $A - \frac{1}{p} I_n$ est une matrice inversible.

   b) Déduire que $P_{AB} = P_{BA}$.

Solution:

1. On a :

$$\begin{aligned} P_{AB}(X) &= \det(AB - XI_n) \\ &= \det(A^{-1})\det(AB - XI_n)\det(A) \\ &= \det(A^{-1}ABA - XA^{-1}I_nA) \\ &= \det(BA - XI_n) \\ &= P_{BA}(X). \end{aligned}$$

2. **a)** Soit α la plus petite valeur propre strictement positive s'il existe une valeur propre strictement positive, sinon on prend $\alpha = 1$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n_0} < \alpha$. Ainsi, pour tout $p \geq n_0$, on a $0 < \dfrac{1}{p} \leq \dfrac{1}{n_0} < \alpha$ de sorte que $\dfrac{1}{p}$ n'est pas une valeur propre et par conséquent $\det(A - \frac{1}{p}I_n) \neq 0$. Cela veut dire que la matrice $A - \frac{1}{p}I_n$ est inversible.

   b) D'après 1) et comme $(A - \frac{1}{p}I_n)$ est inversible, alors on a : $P_{(A-\frac{1}{p}I_n)B} = P_{B(A-\frac{1}{p}I_n)}$ pour tout $p \geq n_0$. On obtient le résultat en tendant $p \to +\infty$.

Exercice 6.23: Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $i = 1, ..., n$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \alpha.$$

Donner une valeur propre de A.

Solution: On a :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi α est une valeur propre de A associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.24: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $B^5 = A$.

Solution: Comme A est une matrice diagonalisable, il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale tel que $A = PDP^{-1}$.

Pour chaque $i = 1, ..., n$, soit $\beta_i \in \mathbb{C}$ tel que $\beta_i^5 = \alpha_i$ et posons $C = \begin{pmatrix} \beta_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \beta_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale. Clairement, on a $C^5 = D$ et par suite on a :

$$\begin{array}{rcl} (PCP^{-1})^5 & = & PC^5P^{-1} \\ & = & PDP^{-1} \\ & = & A \end{array}$$

de sorte qu'il suffit de prendre $B = PCP^{-1}$.

Exercice 6.25: Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est trigonalisable.
2. Montrer que le sous espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 est de dimension un et a pour base $\{u = (1, 1, 0)\}$. Déduire que f (et donc A) n'est pas diagonalisable.
3. Montrer que $v = (0, 0, 1)$ vérifie $(f - Id_E)(v) = u$.
4. Déterminer un vecteur propre w associé à la valeur propre $\lambda = 2$ et montrer que $\{u, v, w\}$ est une base de E.
5. Calculer la matrice T de f dans la base $\{u, v, w\}$.
6. Calculer $f^n(v)$ pour $n \in \mathbb{N}$; en déduire T^n. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution:

1. Le polynôme caractéristique de A, c'est-à-dire de f, est donné par :

$$\begin{aligned}
P_f(X)(=P_A(X)) &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_{12}(-1)}{=} \begin{vmatrix} 2-X & -2-X & 0 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&\overset{C_{21}(1)}{=} \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 0 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (2-X)(1-X)^2.
\end{aligned}$$

   Alors, P_f est scindé sur $\mathbb{R}$, donc f est trigonalisable. En outre, les valeurs propres de f sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

2. On a :

$$\begin{aligned}
E_1 &= \ker(A - I_3) \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A-I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ -x+y = 0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \{(x,x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \\
&= < \{u = (1,1,0)\} > .
\end{aligned}$$

   Comme $u \neq (0,0,0)$, alors $\{u\}$ est une base de E_1.
   Comme $\dim E_1 (=1) \neq 2$ (qui est l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans P_f), alors on déduit que f (et donc A) n'est pas diagonalisable.

3. On a :

$$\begin{aligned}
(f - Id_E)(v) &= f(v) - v \\
&= f(0,0,1) - (0,0,1) \\
&= (1,1,0) \\
&= u.
\end{aligned}$$

4. comme on a $E_2 = \ker(A-2I_3)$, on montre de même que $\{w = (1,0,1)\}$ est une base de E_2.
   Pour montrer que $B = \{u, v, w\}$ est une base, il suffit de montrer que B est libre puisque $Card(B) = \dim \mathbb{R}^3$, chose qu'on vérifie facilement. D'où B est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. On a montré que :
$$\begin{cases} f(u) = u & \text{car} \quad u \in E_1 \\ f(v) = u + v & \text{car} \quad (f - Id_E)(v) = u \\ f(w) = 2w & \text{car} \quad w \in E_2. \end{cases}$$
   D'où on a :
$$T := Mat(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
6. On a $f(v) = u + v$, d'où :
$$\begin{array}{rcl} f^2(v) & = & f(f(v)) \\ & = & f(u+v) \\ & = & f(u) + f(v) \\ & = & u + (u+v) \\ & = & 2u + v. \end{array}$$
   Par récurrence, on montre que $f^n(v) = nu + v$.

   Pour calculer $T^n = Mat(f, B)^n = Mat(f^n, B)$, il suffit d'exprimer $f^n(u)$, $f^n(v)$ et $f^n(w)$ en fonction des vecteurs de B. Comme on a $f^n(u) = u$, $f^n(v) = nu+v$ et $f^n(w) = 2^n w$ (car $f(u) = u$ et $f(w) = 2w$), alors :
$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$
   Calculons maintenant A^n, pour $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de changement de base et si B_0 désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors on a :
$$\begin{array}{rcl} A(= Mat(f, B_0)) & = & P_{B_0}^{B} Mat(f, B)(P_{B_0}^{B})^{-1} \\ & = & PTP^{-1} \end{array}$$

avec $P = P_{B_0}^{B}$ la matrice de passage de B_0 à B_1. Donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et par suite, en calculant P^{-1}, on obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte qu'en calculant $A^n = PT^nP^{-1}$, on obtient :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - n & 1 + n - 2^n & n \\ -n & 1 + n & n \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.26: On considère la matrice $A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Quel est le rang de la matrice A_a ?
2. La matrice A_a est-elle diagonalisable ? Justifier.

Solution:

1. On a :

$$\begin{aligned} A_a \underset{\substack{L_{21}(-1) \\ L_{31}(-a)}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \\ \underset{L_{32}(1)}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a^2-a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) \end{pmatrix}.$$

On a ainsi trois cas :

<u>1^{er} cas : $a \neq 1$ et $a \neq -2$.</u>
Dans ce cas, on a :

$$A_a \underset{\substack{L_2(\frac{1}{a-1}) \\ L_3(\frac{1}{(1-a)(2+a)})}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que $rg(A_a) = 3$, car le rang est le nombre de ligne non nul d'une matrice échelonnée réduite ligne.

<u>$2^{ème}$ cas : $a = 1$.</u>
Dans ce cas, on a :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $rg(A_1) = 1$.

<u>$3^{ème}$ cas : $a = -2$.</u>
Dans ce cas, on a :

$$A_{-2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2(-\frac{1}{3})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que $rg(A_{-2}) = 2$.

2. Calculons le polynôme caractéristique de A_a. On a :

$$\begin{aligned} P_{A_a}(X) &= \det(A_a - XI_3) \\ &= \begin{vmatrix} a-X & 1 & 1 \\ 1 & a-X & 1 \\ 1 & 1 & a-X \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a-X)\begin{vmatrix} a-X & 1 \\ 1 & a-X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a-X \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (a-X)\Big[(a-X)^2-1\Big] - \Big[(a-X)-1\Big] + \Big[1-(a-X)\Big] \\
&= (a-X)(a-X-1)(a-X+1) - 2(a-X-1) \\
&= (a-X-1)\Big[(a-X)(a-X+1)-2\Big] \\
&= (a-1-X)(a+1-X)(a-2-X).
\end{aligned}$$

Il y a donc trois valeurs propres distinctes, à savoir $a-1,\ a+1,\ a-2$. La matrice A_a est donc diagonalisable.

Exercice 6.27: Trouver la forme réduite de Jordan de la matrice :

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

où a est un réel.

Solution: Le polynôme caractéristique de A_a est :

$$P_{A_a}(X) = \det(A_a - XI_3) = (1-X)^2(2-X).$$

La matrice A_a admet donc la valeur propre double $\lambda_1 = 1$ et la valeur propre simple $\lambda_2 = 2$.

Cherchons le sous-espace propre E_1 associé à $\lambda_1 = 1$. Pour cela résolvons le système :

$$\begin{cases} ay + az = 0 \\ -x - z = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Si $a = 0$, E_1 est de dimension 2 et $\Big\{(0,1,0),(1,0,-1)\Big\}$ est une base de E_1.

Si $a \neq 0$, E_1 est de dimension 1 et $\Big\{(1,1,-1)\Big\}$ est une base de E_1.

Ainsi A_a est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

Si $a = 0$, la matrice de f_a par rapport à la base $\Big\{(e_1 = (0,1,-1),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (1,0,-1)\Big\}$ est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $a \neq 0$, d'après le lemme de décomposition des noyaux, on a :

$$\mathbb{R}^3 = \ker(f_a - 2Id) \oplus \ker(f_a - Id)^2.$$

Une base de $\ker(f_a - 2Id)$ est $\{e_1\}$. La matrice de $(f_a - Id)^2$ est :

$$(A_a - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -a & -(a+1) \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur (x, y, z) de $\ker(f_a - Id)^2$ vérifie donc l'équation : $x + ay + (a+1)z = 0$, de sorte que le vecteur $e''_3 = (a, -1, 0)$ engendre un supplémentaire de $\ker(f_a - Id)$ dans $\ker(f_a - Id)^2$.

On a :

$$(A_a - I_3)e''_3 = (-a, -a, a),$$

donc $(f_a - Id)(e''_3) = -ae'_2$. Posons $e''_2 = -ae'_2 = (-a, -a, a)$.

Sur la base (e_1, e''_2, e''_3), la matrice de f_a est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est la réduite de Jordan de A_a.

Exercice 6.28: Donner la décomposition de Dunford de la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution: Le polynôme caractéristique de A est :

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 0 \\ 1 & -X & -1 \\ -1 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)\begin{vmatrix} -X & -1 \\ 0 & 2-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)\left(X^2-2X\right) + (1-X) \\
&= (1-X)\left(X^2-2X+1\right) \\
&= (1-X)^3.
\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de A admet une valeur propre triple $\lambda = 1$.

Cherchons les sous-espaces propres et caractéristiques de A :
La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = 1$ de multiplicité 3, le sous-espace propre associé est l'espace $E_1 = \ker(A - I_3)$, et on a :

$$(x,y,z) \in E_1 \iff \begin{cases} x - y = x \\ x - z = y \\ -x + 2z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z. \end{cases}$$

Le sous-espace propre E_1 est engendrée par le vecteur $(1,0,1)$. Le sous-espace caractéristique de A, associé à l'unique valeur propre $\lambda = 1$, est le sous-espace $F_1 = \ker(A - I_3)^3$. Or, compte tenu du théorème de Cayley-Hamilton, on sait que $P_A(A) = 0$, ainsi la matrice $(A - I)^3$ est la matrice nulle, cela implique $F_1 = \mathbb{R}^3$, c'est donc l'espace tout entier.

Démontrons l'existence d'une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous cherchons des vecteurs e_1, e_2 et e_3 tels que $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 + e_2$ et $Ae_3 = e_2 + e_3$. Le vecteur e_1 appartient à $E_1 = Ker(A - I)$, et $Ker(A - I)$

est la droite d'équations $\{y=0,\ x=z\}$. On détermine $e_2=(x,y,z)$ tel que $Ae_2=e_1+e_2$, on obtient le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+x \\ 1+y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-y=1+x \\ x-z=y \\ -x+2z=1+z \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x-z=-1. \end{cases}$$

Ainsi, le vecteur $e_2=(-1,-1,0)$ convient. Il reste à chercher un vecteur e_3 tel que $Ae_3=e_2+e_3$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+x \\ -1+y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-y=x-1 \\ x-z=y-1 \\ -x+2z=z \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=z. \end{cases}$$

Le vecteur $e_3=(0,1,0)$ convient. On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A=PBP^{-1}$:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cherchons la décomposition de Dunford :
On a :

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices commutent car l'une est égale à I_3. Or, il existe un unique couple de matrices D et N où D est diagonalisable et N est nilpotente, telles que $B=D+N$ et $DN=ND$. Or si :

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

On aura :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $N^3 = 0$. La décomposition $B = D + N$ est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

Exercice 6.29: Donner la réduction de Jordan de la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution:

1. Montrons que A n'est pas diagonalisable. Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI_4) \\ &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3-X & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X) \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 1 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(2-X)((3-X)(1-X)+1) \\ &= (1-X)(2-X)(X-2)^2 \\ &= (1-X)(2-X)^3. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 qui est une racine simple et 2 qui est une racine triple. Calculons les sous-espaces propres correspondants.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in E_1 &\Longleftrightarrow AX = X \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x = x \\ -x + 3y - z + t = y \\ -x + y + z = z \\ 2t = t \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = x \\ z = x \\ t = 0. \end{cases}$$

Donc, on obtient que $E_1 =< u := (1, 1, 1, 0) >$.
D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
X \in E_2 &\Longleftrightarrow AX = 2X \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \\ 2t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2x \\ -x + 3y - z + t = 2y \\ -x + y + z = 2z \\ 2t = 2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = y \\ t = 0. \end{cases}$$

Donc on a $E_2(f) =< (0,1,1,0) >$.

On remarque donc en particulier que $\dim E_2 \neq 3$ qui est l'ordre de multiplicité de la racine 2 de P_A, f n'est donc pas diagonalisable.

2. Déterminons une réduite de Jordan en précisant la base et la matrice de passage.

La valeur propre $\lambda = 1$ étant simple, le bloc de Jordan est entièrement déterminé.
Construisons donc la suite de noyaux des puissances de $M = A - 2I_4$, c'est-à-dire que :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on a $\dim \ker(M) = 1$.

On peut déjà dire qu'il y aura un unique bloc de Jordan associé à la valeur propre 2. Comme on a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on voit que $\ker(M^2) =< \{(0,1,0,0), (0,0,1,0)\} >$ est de dimension 2. On a :

$$M^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc $\ker(M^3) = < \{(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\} >$ est de dimension 3.

Cela signifie que la taille du bloc de Jordan associé à la valeur propre 2 est de taille 3.

On prend $v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(M^3) \setminus \ker(M^2)$

Puis, $v_2 := Mv_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 := Mv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors dans la base (u, v_3, v_2, v_1), la réduite de Jordan de A est de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.30: Pour tout réel t, calculer l'exponentielle de la matrice tA en utilisant le Théorème de Cayley-Hamilton, avec A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution: Le polynôme caractéristique de A est :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 2 \\ 1 & -X & 1 \\ -1 & 1 & -X \end{vmatrix} \\ &= (3-X)\left(X^2-1\right) - (-2X-2) - (2X+2) \\ &= -(X+1)(X-1)(X-3). \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par $P_A(X)$ s'écrit sous la forme

$$X^n = Q_n \times P_A + a_n X^2 + b_n X + c_n \quad (*)$$

où $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$. En évaluant les deux membres de cette égalité en -1, 1 et 3 on obtient :

$$\begin{cases} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ a_n + b_n + c_n = 1 \\ 9a_n + 3b_n + c_n = 3^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_n = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right) \\ a_n + c_n = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right) \\ 8a_n + \frac{3}{2}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right) = 3^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{8}\left(3^n - 2 + (-1)^n\right) \\ b_n = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right) \\ c_n = \frac{1}{8}\left(-3^n + 6 + 3(-1)^n\right). \end{cases}$$

Le théorème de Cayley-Hamilton fournit, d'après $(*)$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = \frac{1}{8}\Big(\left(3^n - 2 + (-1)^n\right)A^2 + 4\left(1-(-1)^n\right)A + \left(-3^n + 6 + 3(-1)^n\right)I_3\Big).$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel t, on a :

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot \frac{1}{8}\Big(\left(3^n - 2 + (-1)^n\right)A^2 + 4\left(1-(-1)^n\right)A + \left(-3^n + 6 + 3(-1)^n\right)I_3\Big) \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{3t}-2e^{t}+e^{-t}}{8}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \frac{4\left(e^{t}-e^{-t}\right)}{8}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{-e^{3t}+6e^{t}+3e^{-t}}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8e^{3t} & 8e^{3t}-8e^{t} & 8e^{3t}-8e^{t} \\ 2e^{3t}-2e^{-t} & 2e^{3t}+6e^{-t} & 2e^{3t}-2e^{-t} \\ -2e^{3t}+2e^{-t} & -2e^{3t}+8e^{t}-6e^{-t} & 2e^{3t}+8e^{t}+2e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4e^{3t} & 4e^{3t}-4e^{t} & 4e^{3t}-4e^{t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+3e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ -e^{3t}+e^{-t} & -e^{3t}+4e^{t}-3e^{-t} & e^{3t}+4e^{t}+e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.31: Résoudre le système différentiel réel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{cases}$$

où $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont deux fonctions inconnues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, avec $x_0 = x(0)$ et $y_0 = y(0)$.

Solution: Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et cherchons à diagonaliser A. Calculons donc son polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-2)(\lambda+2).$$

Comme ce polynôme caractéristique admet deux racines distinctes simples alors la matrice A est diagonalisable.
Recherchons le sous espace propre associé à $\lambda_1 = 2$. Il faut résoudre :

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 3 \\ 1 & -1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où $x = 3y$ et donc $(x, y) = y(3, 1)$ et par suite $\{(3, 1)\}$ est une base de $E_2 := \ker(A - 2I)$.

Recherchons le sous espace propre associé à $\lambda_2 = -2$. Il faut résoudre :

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 3 \\ 1 & -1+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où $x + y = 0$ et donc $(x, y) = x(1, -1)$ et par suite $\{(1, -1)\}$ est une base de $E_{-2} := \ker(A + 2I)$.

Posons $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En termes de système différentiel :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = DP^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Posons donc $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} X'(t) = 2X(t) \\ Y'(t) = -2Y(t) \end{cases}$$

Ainsi la diagonalisation a découplé les nouvelles fonctions inconnues. Il existe deux constantes réelles k_1 et k_2 telles que $X(t) = k_1\mathrm{e}^{2t}$ et $Y(t) = k_2\mathrm{e}^{-2t}$. En revenant à la définition de X et de Y, on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= P\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1e^{2t} \\ k_2e^{-2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3k_1e^{2t} + k_2e^{-2t} \\ k_1e^{2t} - k_2e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour $t = 0$, il reste :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

et donc,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} &= P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} x_0 + y_0 \\ x_0 - 3y_0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La solution du système est :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3x_0+3y_0}{4}\mathrm{e}^{2t} + \frac{x_0-3y_0}{4}\mathrm{e}^{-2t} \\ y(t) = \frac{x_0+y_0}{4}\mathrm{e}^{2t} - \frac{x_0-3y_0}{4}\mathrm{e}^{-2t} \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t} & \frac{3}{4}\left(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t}\right) \\ \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t}\right) & \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.32: Soient $a \in b \in \mathbb{R}$ et A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner les valeurs de a et de b pour lesquelles la décomposition de Dunford de A est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>**Solution:**</u> Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La décomposition $A = D+N$ est la décomposition de Dunford si et seulement

si N est nilpotente, D est diagonale et si $ND = DN$.
Vérifions que N est nilpotente. On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice N est bien nilpotente pour toutes les valeurs de a et b .
Déterminons pour quelles valeurs de a et b les matrices N et D commutent.
On a :

$$D \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$N.D = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $ND = DN$ si, et seulement si, $b = 2b$, c'est-à-dire si $b = 0$.
Le paramètre a peut prendre n'importe quelle valeur et $b = 0$ pour que la décomposition $A = D + N$ soit celle de Dunford.

Exercice 6.33: Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Écrire la décomposition de Dunford de B.

2. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{tB}.

3. Donner les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$.

Solution:

1. Cherchons la décomposition de Dunford de B. On a :
   On a :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et il est clair que les deux matrices commutent car l'une est égale à $-I_3$. Or, il existe un unique couple de matrices D et N, D diagonalisable et N nilpotente, telles que $B = D + N$ et $DN = ND$. Or si

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad et \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $N^3 = 0$. La décomposition $B = D + N$ est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

2. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculons e^{tB}. On a $N^3 = 0$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(tN)^3 = 0$ et l'exponentielle est égale à :

$$e^{tN} = I + tN + (\frac{t^2}{2})N^2.$$

Par ailleurs, $ND = DN$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, les matrices tN et tD commutent également, $(tN)(tD) = (tD)(tN)$, on a donc :

$$\begin{array}{rcl} e^{tB} & = & e^{tD+tN} \\ & = & e^{tD}e^{tN} \\ & = & e^{-tI}e^{tN} \\ & = & e^{-t}I(I + tN + (\frac{t^2}{2})N^2). \end{array}$$

D'où :

$$e^{tB} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. La solution générale du système $Y^{'} = BY$ s'écrit sous la forme :

$$Y(t) = exp(tB)v,$$

où $v = (a, b, c)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. La solution $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} a + bt + c\frac{t^2}{2} \\ b + ct \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald ,An introduction to commutative algebra, *Addison- Wesley, 1969.*

[2] D. Eisenbud, Commutative algebra with a View Toward Algebraic Geometry,*Springer, 2004.*

[3] R. Godement ,Théorie des faisceaux, *Actualité scientifiques et industrielles, 1252, Hermann, Paris (1964).*

[4] U. Görtz, T. Wedhorn, Algebraic Geometry I, *Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010.*

[5] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku mathematical journal,9,(1955), pp. 119-221.*

[6] J. Harris, D. Eisenbud, The Geometry of schemes,*Springer, 2000.*

[7] R. Hartshorne, Algebraic Geometry,*Springer, 1977.*

[8] D. C. Lay, Linear Algebra and its applications, *Addison-Wesley Publishing Company, 1994.*

[9] Q. Liu, Algebraic Geometry and Arithmetic Curves,*6th Edition, Oxfrord Gradu- ate Texts in Mathematics, 2002.*

[10] A. Neeman, Steins, affines and Hilbert's fourtheenth problem, *Annals of Mathematics, 127(1988),229-244.*

[11] F. Pécastaings, Chemin vers l'algèbre, Tome 2, *Vuibert, 1986.*

[12] H. E. Rose, Linear Algebra, A pure Mathematical approach, *Birkhäuser Verlag, 2002.*

[13] J.-P. Serre, Faisceaux algébriques coherent, *Ann. of Maths, 61,(1955).*

[14] I. Shafarevich , Basic Algebraic Geometry 1 : Varieties in Projective Space , *Springer-Verlag, 1994.*

[15] I. Shafarevich , Basic Algebraic Geometry 2 : Schemes and Complex Manifolds , *Springer-Verlag, 1996*

[16] C. A. Weibel, An Antroduction to Homological Algebra, *Vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.*

A propos de l'Auteur :

NAJIB MAHDOU, Professeur Emérite à la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fès Maroc, a obtenu son Doctorat de Troisième Cycle en 1992 et son Doctorat d'Etat en 2001 à la Faculté des Sciences Dhar Al Mahraz de l'Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fès.

Najib Mahdou est auteur et co-auteur de plus de 170 articles en Algèbre Commutative et Algèbre Homologique dans des revues internationales. Il a encadré 28 Doctorants dont 6 en cours. Il est aussi :

- Directeur du laboratoire « Modélisation et Structures Mathématiques » de janvier 2020 jusqu'au Janvier 2022.

- Directeur du Laboratoire « Algèbre, Analyse Fonctionnelle et Applications » de Janvier 2011 jusqu'au décembre 2019.

- Editeur-En-Chef du Journal «Moroccan Journal of Algebra and Geometry with Applications ».

- Editeur du Journal « Palestine Journal of Mathematics » (Indexé dans Scopus).

- Editeur du Journal « The Korean Journal of Mathematics» (Indexé dans Web of Science).

- Editeur du Journal "Gulf Journal of Mathematics".