

Jean **Franchini**
Jean-Claude **Jacquens**

MATHS

Cours

Exercices et travaux dirigés corrigés

MP-MP*
MPI-MPI*

**NOUVEAUX
PROGRAMMES**

ellipses

MATHS

Cours

Exercices et travaux dirigés corrigés

MP-MP*

MPI-MPI*

MATHS

Cours
Exercices et travaux dirigés corrigés

MP-MP*
MPI-MPI*



Jean Franchini

Professeur honoraire agrégé de mathématiques au lycée Chaptal (Paris)
en classes préparatoires scientifiques

Jean-Claude Jacquens

Professeur honoraire agrégé de mathématiques au lycée Charlemagne (Paris)
en classes préparatoires scientifiques



Retrouvez les publications des auteurs sur le site des éditions Ellipses :



ISBN 9782340-066168
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Ce manuel de mathématiques est écrit à l'intention des étudiants des classes préparatoires de seconde année MP/MP* et MPI/MPI*. Il est conforme au programme en vigueur à partir de septembre 2022.

Nous nous sommes efforcés de respecter tant l'esprit que la lettre du programme qui a été rédigé de façon à la fois directive pour les enseignants et contraignante pour les examinateurs des concours.

Les démonstrations « hors programme » sont omises et celles déclarées « non exigibles des étudiants » sont signalées. Ces dernières sont explicitées et pourront n'être abordées qu'en seconde lecture.

Les notations sont celles indiquées dans le contrat (le programme) ou celles que la tradition mathématique a consacrées.

Chaque chapitre est à considérer comme un triptyque dont la partie centrale serait le cours et les panneaux les exercices et les travaux dirigés. Les exercices sont tous intégralement corrigés. Les travaux dirigés prolongent le cours et ouvrent des horizons vers les sciences physique, les sciences de l'ingénieur, et les mathématiques enseignées dans les Écoles d'ingénieur.

Nous n'avons pas privilégié les exercices « rusés » mais les exercices riches tant par l'utilisation du cours qu'ils nécessitent que par les espaces de liberté qu'ils ouvrent.

Des coquilles ? Il en reste probablement ! Nous serons heureux d'accueillir toutes les observations de nos lecteurs.

On ne fait pas de mathématiques seul et *ex nihilo*. Nous saluons nos prédécesseurs universitaires et professeurs de classes préparatoires scientifiques qui œuvrent depuis longtemps à l'amélioration et l'évolution de l'enseignement des mathématiques, et ont contribué de façon induite à la réalisation de cet ouvrage.

Table des matières

1. ALGÈBRE GÉNÉRALE	1
I. Groupes et sous-groupes	1
1. Groupes	1
2. Produit de groupes	1
3. Sous-groupes	1
4. Génération	2
5. Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$	4
II. Morphismes de groupes	5
1. Définition	5
2. Propriétés	5
III. Groupes monogènes et cycliques	6
1. Congruence modulo n	6
2. Morphisme canonique	7
3. Groupes cycliques	7
IV. Anneaux	8
1. Définitions	8
2. Idéaux d'un anneau commutatif	10
3. Idéaux de $\mathbb{Z}$; anneaux $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$	12
V. Anneaux de polynômes à une indéterminée	14
VI. Algèbres	16
Exercices	17
Travaux dirigés	26
Dévissage du groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	26
Polynômes cyclotomiques	29
Corps des quaternions ; théorème des quatre carrés	33
2. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES	37
I. Sommes directes	37
A. Somme	37
B. Définition et premières propriétés	37
C. Décomposition de E en somme directe	39
II. Sous-espaces vectoriels stables	40

III. Polynômes d'endomorphisme	41
A. Généralités	41
B. Théorème de décomposition des noyaux	43
IV. Éléments propres	45
A. Cas d'un endomorphisme	45
B. Cas d'une matrice	46
C. Polynôme caractéristique	47
D. Sous-espaces caractéristiques	51
V. Réduction en dimension finie	52
A. Diagonalisation	52
B. Trigonalisation	56
Exercices	58
Travaux dirigés	77
Matrices cycliques	77
Sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$ de codimension 1	81
Matrice de Vandermonde	84
Décomposition de Dunford ; applications	86
Suites récurrentes linéaires	88
3. ESPACES VECTORIELS NORMÉS	91
I. Normes et distances	91
A. Définitions	91
B. Exemples fondamentaux	94
C. Applications lipschitziennes	96
II. Suites	97
A. Nature d'une suite	97
B. Comparaison des normes	99
C. Suites extraites. Valeurs d'adhérence	100
III. Topologie d'un espace vectoriel normé	101
A. Voisinages, ouverts, fermés	101
B. Adhérence, intérieur, frontière	104
IV. Limites, continuité	105
A. Limites	105
B. Continuité	108
C. Continuité uniforme	111
V. Applications linéaires continues	112
VI. Compacité	113
VII. Espace vectoriel normé de dimension finie	116
VIII. Convexité	118

IX. Connexité par arcs	119
Exercices	121
Travaux dirigés	135
Des normes sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$	135
Valeurs d'adhérence d'une suite ; applications	136
Morphismes continus entre les groupes $GL_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^\star$.	139
4. SÉRIES	141
I. Généralités	141
A. Séries vectorielles	141
B. Structure d'espace vectoriel	142
C. Compléments sur les séries numériques	143
II. Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	144
Exercices	146
Travaux dirigés	152
Règle de Raabe-Duhamel	152
Développement asymptotique du reste d'une série de Riemann	154
Théorème du point fixe et applications	155
Groupement par paquets	156
Espaces ℓ^p	158
Transformation d'Abel ; premières applications	161
5. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS	163
I. Divers types de convergence de suites de fonctions	163
II. Continuité et limites uniformes	166
III. Approximations de fonctions	168
IV. Séries de fonctions	173
A. Divers modes de convergence	173
B. Propriétés de la somme	175
Exercices	176
Travaux dirigés	184
Théorèmes de Dini (MP*)	184
Un produit infini	187
Une convergence vers la fonction exponentielle	190
6. FONCTIONS VECTORIELLES	193
I. Dérivation	193
A. Définitions	193
B. Opérations	195

C. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$	198
II. Intégrale sur un segment	200
III. Dérivation et intégration	203
A. Primitives de fonctions continues	203
B. Accroissements finis	204
C. Formules de Taylor	206
D. Exemple des intégrales de Wallis	207
IV. Suites et séries de fonctions	207
A. Convergence en moyenne	207
B. Dérivation	208
V. Arcs paramétrés	210
Exercices	211
Travaux dirigés	223
Une suite de fonctions périodiques	223
Majoration d'une fonction dérivée	226
Théorème de Borel	228
Intégration approchée	230
Une racine carrée de fonction	233
Fonctions à variation bornée	236
7. INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE	241
I. Intégrales généralisées	241
A. Définitions	241
B. Propriétés	241
II. Intégration de relations de comparaison	246
A. Théorème	246
B. Applications	247
III. Intégrales et séries	248
A. Comparaison à une série numérique	248
B. Application à l'étude de séries	249
C. Passage à la limite sous l'intégrale	250
D. Intégrales à paramètre	252
E. Compléments sur la fonction Γ	254
Exercices	255
Travaux dirigés	275
Fonction définie par une intégrale	275
Convolution et régularisation	277
Transformation de Fourier	280
Transformation de Laplace	284
Méthode de Laplace ; application à la formule de Stirling	288

Calcul d'une intégrale	290
Formule des compléments	295
Développements asymptotiques de fonctions définies par une intégrale	297
8. SÉRIES ENTIÈRES	303
I. Rayon de convergence	303
A. Définitions	303
B. Détermination du rayon	304
II. Propriétés de la somme	307
A. Continuité	307
B. Intégration	307
C. Dérivabilité	308
III. Fonctions développables en série entière	309
A. Définitions	309
B. Séries de Taylor	310
C. Développements classiques	310
Exercices	312
Travaux dirigés	330
Théorème de Bernstein	330
Comportement aux bornes de l'intervalle de convergence	332
Inégalités de Cauchy ; applications	335
Une équation fonctionnelle	338
Un théorème de Hardy et Littlewood	343
9. ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS	349
I. Espaces préhilbertiens réels	349
A. Produit scalaire	349
B. Orthogonalité	352
C. Projection orthogonale	355
II. Espaces euclidiens	358
A. Expressions analytiques	358
B. Isomorphisme canonique	358
C. Adjoint d'un endomorphisme	359
D. Automorphismes orthogonaux	362
E. Endomorphismes symétriques	365
F. Endomorphismes normaux d'un espace euclidien	367
Exercices	369
Travaux dirigés	379
Matrice et déterminant de Gram	379
Théorème de Courant-Fischer et applications	382
Approximation d'une matrice de rang fixé	384

Conditionnement d'une matrice de Hilbert	389
Norme d'un endomorphisme symétrique	395
Formes positives et produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (MP*)	400
10. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES	405
I. Espaces probabilisés	405
II. Propriétés des probabilités	406
III. Probabilités conditionnelles et indépendance	408
IV. Variables aléatoires discrètes	411
V. Couple de variables aléatoires	412
VI. Lois discrètes usuelles	415
VII. Moments d'une variable aléatoire discrète	417
VIII. Fonctions génératrices	426
Exercices	428
Travaux dirigés	442
Autour des records	442
Somme aléatoire de variables aléatoires	446
Variables aléatoires entières décomposables	450
Variables aléatoires infiniment divisibles ; exemples	454
Variable aléatoire gaussienne	459
Étude du processus de Galton-Watson	462
11. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	473
I. Généralités	473
II. Équations linéaires scalaires d'ordre 1	473
III. Équations linéaires du premier ordre	476
IV. Équations scalaires d'ordre 2	482
Exercices	485
Travaux dirigés	495
Solutions pseudo-périodiques d'une équation différentielle	495
Équation différentielle de Bessel	500
Lemme de Gronwall ; applications	504
Fonctions oscillantes	507
12. CALCUL DIFFÉRENTIEL	513
I. Généralités	513
II. Opérations sur l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$	516
III. Algèbre $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{K})$	519

IV. Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$	523
Exercices	529
Travaux dirigés	540
Endomorphismes conservant un opérateur différentiel	540
Équation aux dérivées partielles	544
Optimisation, méthode du gradient (MP*)	548
INDEX	553

Index des notations

$\mathcal{F}(E, F)$: ensemble des applications de E dans F .

$\mathcal{C}(E, F)$: ensemble des applications continues sur E et à valeurs dans F .

$\mathcal{CM}(I, E)$: ensemble des applications continues par morceaux de $\mathcal{F}(I, F)$.

$\mathcal{C}^k(I, E)$: ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans E .

$\mathcal{L}(E, F)$: espace vectoriel des applications linéaires de E dans F .

$\mathcal{L}_c(E, F)$: espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F .

$\text{GL}(E)$: groupe linéaire de E .

I_E : application identique dans E .

$\mathcal{O}(E)$: groupe orthogonal de E .

$\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: espace vectoriel des matrices (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$: algèbre des matrices carrées (n, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$\text{GL}_n(\mathbb{K})$ groupe des éléments inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

I_n : élément unité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

$\mathcal{O}(n)$: groupe des matrices orthogonales de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$S_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices symétriques de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathfrak{S}_n$: groupe symétrique.

Ker : noyau.

${}^tM = M^T$: transposée de la matrice M .

Im : image.

$\det$: déterminant.

Card : cardinal.

$\text{Vect}(A)$: sous-espace vectoriel engendré par A .

$\mathbb{I}_A$: fonction caractéristique de A .

$d(x, F)$: distance du vecteur x au sous-espace vectoriel F .

$\llbracket a, b \rrbracket = [a, b] \cap \mathbb{Z}$.

$\delta_{i,j}$: symbole de Kröneckner. $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

$\mathbb{V}(X)$: variance d'une variable aléatoire X .

$\mathbb{E}(X)$: espérance mathématique d'une variable aléatoire X .

1. Algèbre générale

I. Groupes et sous-groupes

1. Groupes

Nous rappelons dans ce tout premier paragraphe, des résultats vus en MPSI.

1.1. Définition

Un ensemble $G \neq \emptyset$ muni d'une loi de composition interne $\star$ est un groupe si cette loi est associative, s'il existe un élément neutre et si tout élément de G a un symétrique pour la loi $\star$ dans G . Si de plus $\star$ est commutative, le groupe est dit commutatif ou abélien.

1.2. Exemples

$(\mathbb{K}, +)$ est un groupe abélien si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$(\mathbb{K}^*, \times)$ est un groupe abélien si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+, \mathbb{U}, \mathbb{U}_n$.

$(\mathfrak{S}(E), \circ)$ est le groupe des permutations (bijections) de l'ensemble E .

$(\mathfrak{S}_n, \circ)$: groupe des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est le groupe symétrique d'ordre n .

1.3. Propriétés

- Dans un groupe, l'élément neutre est unique.
- Dans un groupe, le symétrique de tout élément est unique.
- Si a, b sont deux éléments d'un groupe $(G, \cdot)$, alors $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

2. Produit de groupes

2.1. Théorème et définition

Si G_1 et G_2 sont deux groupes, alors $G_1 \times G_2$ est muni d'une loi de composition interne notée :

$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ en notation additive,

$(x_1, x_2) \times (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)$ en notation multiplicative.

Muni de cette loi $G_1 \times G_2$ a une structure de groupe.

2.2. Exemples

Si $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ alors, pour $n \geq 2$, $(\mathbb{K}^n, +)$ est un groupe abélien.

3. Sous-groupes

3.1. Définition

Une partie non vide H de G est un sous-groupe de $(G, \star)$ si elle est stable par $\star$ et si, munie de la loi induite, elle a une structure de groupe.

3.2. Caractérisations

Soit $(G, \star)$ un groupe. H est un sous-groupe de $(G, \star)$ si l'une des assertions équivalentes suivantes est vraie.

- (i) $(H \subset G), (H \neq \emptyset)$ et $(\forall (x, y) \in H^2, x \star y' \in H)$ où y' est le symétrique de y dans G .
- (ii) $(H \subset G), (H \neq \emptyset), (\forall (x, y) \in H^2, x \star y \in H \text{ et } y' \in H)$ où y' est le symétrique de y dans G .

3.3. Exemples

- $\{-1, 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
- $\mathbb{Z}[i] = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2, z = a + ib\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$.
- $\mathbb{K}^{(I)} = \{x = (x_i) \in \mathbb{K}^I \mid x_i = 0 \text{ sauf sur une partie finie de } I\}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{K}^I$.
- Si G est un groupe additif (resp. multiplicatif), le sous-groupe $\text{gr}(a)$ défini par : $\text{gr}(a) = \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (resp. $\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$) est le sous-groupe de G engendré par l'élément a de G .

3.4. Intersection

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Si $(G_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-groupes de $(G, \cdot)$, alors leur intersection est un sous-groupe de G .

Démonstration

Notons F l'intersection des $G_i, i \in I$ et e l'élément neutre de G . Comme $e \in G_i$, pour tout $i \in I$, on a $e \in F$. Si $(x, y) \in F^2$, alors $(x, y) \in G_i^2$ pour tout $i \in I$. Comme les G_i sont des sous-groupes de G , pour tout $i \in I, xy^{-1} \in G_i$. Donc $xy^{-1} \in F$. Il s'ensuit que F est un sous-groupe de G . $\square$

Remarque

La réunion de sous-groupes n'est en général pas un sous-groupe. En effet, $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $+$ définie par $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ est un groupe, d'après 2.2. On montre aisément que $G_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $G_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{R}^2, +)$, mais que $G_1 \cup G_2$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$; en effet, $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \notin G_1 \cup G_2$ alors que $(1, 0) \in G_1 \subset G_1 \cup G_2$ et que $(0, 1) \in G_2 \subset G_1 \cup G_2$.

Mais, si $\forall (i, j) \in I^2, \exists k \in I, G_i \cup G_j \subset G_k$, on vérifie aisément que la réunion des G_i est un sous-groupe de G .

En particulier si $I = \mathbb{N}$ et si la suite $(G_n)_{n \geq 0}$ est croissante (pour l'inclusion), la réunion des G_n est un sous-groupe de G .

4. Génération

4.1. Définition

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et A une partie de G . L'intersection des sous-groupes de $(G, \cdot)$ contenant A est le plus petit sous-groupe de G contenant A . On l'appelle le **sous-groupe de $(G, \cdot)$ engendré par A** , on le note $\text{gr}(A)$. On dit aussi que A est une **partie génératrice** de $\text{gr}(A)$.

Comme intersection de sous-groupes, $\text{gr}(A)$ est un sous-groupe de $(G, \cdot)$.

4.2. Théorème

Soient $(G, \cdot)$ un groupe d'élément neutre e et A une partie de G .

Si $A = \emptyset$, alors $\text{gr}(A) = \{e\}$, sinon, $\text{gr}(A)$ est l'ensemble des produits $a_1^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n}$ où n varie dans $\mathbb{N}^*$ et pour $1 \leq i \leq n$, les a_i sont dans A et les ε_i dans $\{-1, 1\}$.

Démonstration

Si A est non vide, il suffit de montrer que l'ensemble H des produits $a_1^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n}$ où n varie dans $\mathbb{N}^*$ et pour $1 \leq i \leq n$, les a_i sont dans A et les ε_i dans $\mathbb{Z}$, est un sous-groupe de G contenant A .

Si $a \in A$, alors $a = a^1 \in H$. Donc H est non vide et contient A .

Si x et y sont éléments de H , il existe deux entiers naturels p et q tels que $x = a_1^{\alpha_1} \dots a_p^{\alpha_p}$, $y = b_1^{\beta_1} \dots b_q^{\beta_q}$ où $(a_i, b_i) \in A^2$ et $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{Z}^2$.

Donc $y^{-1} = b_q^{-\beta_q} \dots b_1^{-\beta_1} \in H$ et $x.y^{-1} \in H$. $\square$

4.3. Exemples

- $\{1\}$ est une partie génératrice du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.
- $\mathbb{R} \cup \{i\}$ est une partie génératrice du groupe $(\mathbb{C}, +)$.
- Si E est un plan vectoriel euclidien, $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est engendré par l'ensemble des réflexions de E .
- Si $\tau_{i,j}$ est la transposition de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui échange i et j , les parties A , B et C suivantes sont des parties génératrices du groupe symétrique $(\mathfrak{S}_n, \circ)$.

$$A = \{\tau_{i,j} \mid (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2\}; B = \{\tau_{i,i+1} \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\};$$

$$C = \{\tau_{1,2}, r\} \text{ où } r \text{ est la permutation circulaire notée } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{S}_n = \text{gr}(A)$ est un théorème vu en MPSI.

$\mathfrak{S}_n = \text{gr}(C)$ peut se déduire de $\mathfrak{S}_n = \text{gr}(B)$. Il suffit de vérifier que :

$$\tau_{i+1,i+2} = r^i \circ \tau_{1,2} \circ r^{-i}, \text{ car } r^i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & (n-i) & (n-i+1) & \dots & n \\ i+1 & i+2 & \dots & n & 1 & \dots & i \end{pmatrix}.$$

Montrons que $\mathfrak{S}_n = \text{gr}(B)$. Comme $\mathfrak{S}_n = \text{gr}(A)$, il suffit de montrer que si $i < j$, $\tau_{i,j}$ est produit d'éléments de B , puisque $\tau_{k,\ell}^{-1} = \tau_{k,\ell}$.

La permutation $\sigma = \tau_{j-1,j} \circ \tau_{j-2,j} \circ \dots \circ \tau_{i+1,i+2} \circ \tau_{i,i+1}$ est élément de $\mathfrak{S}_n$. On a $\sigma(i) = j$ mais $\sigma(i+1) = i$, $\sigma(i+2) = i+1, \dots, \sigma(j-1) = j$. On vérifie aisément que $\tau_{i,j} = \tau_{i,i+1} \circ \tau_{i+1,i+2} \circ \dots \circ \tau_{j-2,j-1} \circ \sigma$.

4.4. Définition

Un groupe est dit **monogène** s'il admet une partie génératrice réduite à un élément. Un groupe monogène fini est appelé **groupe cyclique**.

4.5. Définition

Soit $(G, \cdot)$ un groupe d'élément neutre e . On appelle **ordre** d'un élément x de G , s'il existe, le plus petit entier positif non nul n tel que $x^n = e$. Si un tel entier n'existe pas, on dit que l'élément x est d'ordre infini.

4.6. Théorème

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et x un élément de G d'ordre n . Alors tout entier naturel k non nul tel que $x^k = e$ est divisible par n .

Démonstration

Si $k \in \mathbb{N}^*$ et $x^k = e$, par division euclidienne par n , on a $k = nq + r$ avec $0 \leq r < n$. Donc $e = x^k = (x^n)^q x^r = x^r$. Comme $r < n$, par définition de n , on a $r = 0$. $\square$

Exemple

Dans $(\mathbb{U}, \cdot)$, le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1, les éléments $i, j, -j$ et ij sont d'ordres respectifs : 4, 3, 6 et 12.

4.7. Complément

| Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble non vide E . Si l'on note $cl(x)$ la classe d'équivalence de x ie. $\{x' \in E \mid x'\mathcal{R}x\}$, Les classes d'équivalence forment une partition de E .

Démonstration

- Pour tout $x \in E$, $cl(x) \neq \emptyset$. En effet, $x \in cl(x)$ puisque $\mathcal{R}$ est réflexive.
- Pour tout $(x, y) \in E^2$, $cl(x) \neq cl(y) \Rightarrow cl(x) \cap cl(y) = \emptyset$.

En effet, en raisonnant par contraposition, on a puisque $\mathcal{R}$ est symétrique : $z \in cl(x) \cap cl(y) \Rightarrow [(x\mathcal{R}z) \text{ et } (z\mathcal{R}y)] \Rightarrow x\mathcal{R}y$. D'où $cl(x) = cl(y)$.

- E est réunion des classes d'équivalence. En effet, pour tout x de E , on a : $x \in cl(x) \subset \bigcup_{y \in E} cl(y)$. L'inclusion inverse est évidente puisqu'une réunion de parties de E est incluse dans E . $\square$

4.8. Théorème de Lagrange

| Si G est fini, le cardinal de tout sous-groupe de $(G, \cdot)$ divise $\text{Card}[G]$.

Démonstration

On montre que si H est un sous-groupe de G , la relation binaire définie par $x\mathcal{R}y \iff xy^{-1} \in H$ est une relation d'équivalence.

Pour $x \in G$ la classe de x modulo cette relation d'équivalence est donc :

$\mathcal{O}(x) = \{y \in G \mid y = xz, z \in H\} = xH$. Donc $\text{Card}[\mathcal{O}(x)] = \text{Card}[H]$. Comme les classes d'équivalence forment une partition de G et qu'elles ont toutes même cardinal, on a le résultat. $\square$

4.9. Corollaire

| Si G est fini de cardinal n , l'ordre de tout élément de G divise n . En particulier, $a^n = e$ quel que soit a élément de G .

Démonstration

Si ω est l'ordre de $a \in G$, alors $a^\omega = e$. Le groupe cyclique $\text{gr}(a)$ étant isomorphe à $\mathbb{Z}/\omega\mathbb{Z}$, son cardinal est ω et ω divise n d'après le corollaire précédent. Donc $n = \omega r$ avec $r \in \mathbb{N}$. D'où $a^n = e$. $\square$

5. Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$

| H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ si, et seulement si, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.

Démonstration

Si $H = \{0\}$, alors $H = 0\mathbb{Z}$. Supposons $H \neq \{0\}$. Alors il existe $x \in H \setminus \{0\}$. Comme H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, l'élément $-x$ appartient à H , donc

$|x| \in H \cap \mathbb{Z}_+^* = H'$. D'où H' est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = \min_{\mathbb{N}}(H')$. Le sous-groupe de H engendré par n i.e. $(n) = n\mathbb{Z}$ est inclus dans H . Inversement, si x est un élément quelconque de H , par division euclidienne, $x = nq + r$ où $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ et $0 \leq r < n$. Comme $nq \in n\mathbb{Z} \subset H$ qui est sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, $r = x - nq$ est élément de H . Comme $r < n$, donc $r \notin H'$. D'où $r = 0$ et $x = nq \in n\mathbb{Z}$. L'unicité du plus petit élément strictement positif de H implique l'unicité de $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $H = a\mathbb{Z}$ si $H \neq \{0\}$. $\square$

II. Morphismes de groupes

1. Définition

Si (G, T) et (G', T') sont deux groupes, une application f de G dans G' est un morphisme de groupes si, pour tout $(x, y) \in G^2$, $f(xTy) = f(x)T'f(y)$.

2. Propriétés

On conserve les notations de la définition précédente.

- a) L'image par f du neutre de (G, T) est le neutre de (G', T') .
- b) L'image par f du symétrique de $x \in G$ pour la loi T est le symétrique de $f(x) \in G'$ pour la loi T' .
- c) $f(G)$ est un sous-groupe de (G', T') .
- d) L'image réciproque de l'élément neutre e' de (G', T') , appelée le **noyau** du morphisme f et notée $\text{Ker}(f)$, est un sous-groupe de (G, T) .
- e) f est injective si, et seulement si, $\text{Ker}(f)$ est réduit à l'élément neutre de (G, T) .
- f) Si f est un **isomorphisme** de groupes i.e. si f est un morphisme bijectif de groupes, il en est de même de f^{-1} .

Démonstrations

a) Si e est l'élément neutre dans G et e' l'élément neutre dans G' , pour tout $x \in G$, $xTe = eTx = e \Rightarrow f(x)T'f(e) = f(e)T'f(x) = f(e) \Rightarrow f(e) = e'$.

b) Si $xTx' = x'Tx = e$, alors $f(x)T'f(x') = f(x')T'f(x) = f(e) = e'$. Donc $f(x')$ est le symétrique de $f(x)$ dans le groupe (G', T') .

c) On a déjà $f(e) = e' \in f(G)$. Donc $f(G)$ est non vide. Si a et b sont éléments de $f(G)$, il existe x et y dans G tels que $a = f(x)$ et $b = f(y)$. Si b' est le symétrique de b pour T' , on a vu que $b' = f(y')$ où y' est le symétrique de y dans G pour T . Donc $aT'b' = f(x)T'f(y') = f(xTy') \in f(G)$ car (G, T) est un groupe.

Donc $f(G)$ est un sous-groupe de (G', T') .

d) $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{e'\}) = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$ contient e , d'après a), donc $\text{Ker}(f)$ est non vide. Si $(x, y) \in (\text{Ker}(f))^2$ $f(xTy) = f(x)T'f(y) = e'T'e' = e'$.

Si y' est le symétrique de y dans G pour T , alors $f(y')$ est le symétrique de $f(y)$ dans G' pour T' . Donc $f(y) = e' \Rightarrow f(y') = e'$ i.e. $y' \in \text{Ker}(f)$.

Donc $\text{Ker}(f)$ est un sous-groupe de $(G, \cdot)$.

e) Si f est injective, $x \in \text{Ker}(f) \iff f(x) = e' \iff f(x) = f(e) \Rightarrow x = e$.

Donc, si f est injective, son noyau est réduit à $\{e\}$.

Réciproquement si $\text{Ker}(f) = \{e\}$, pour tout $x, y \in G$, $f(x) = f(y)$ implique $f(x)T'f(y') = e'$ d'après b), si y' est le symétrique de y dans G pour T . Comme

f est un morphisme, $f(xTy') = e'$ i.e. $xTy' \in \text{Ker}(f)$. Comme $\text{Ker}(f) = \{e\}$, il s'ensuit que $xTy' = e$ ce qui équivaut à $x = y$. Donc f est injective.

f) Il suffit de prouver que f^{-1} est un morphisme de groupes.

Soit $(x', y') \in G'^2$, il existe un unique couple $(x, y) \in G^2$ tel que :

$x' = f(x)$ et $y' = f(y)$ puisque f est bijective.

$f^{-1}(x')Tf^{-1}(y') = xTy = f^{-1}(f(xTy)) = f^{-1}(f(x)T'f(y))$ car f est un morphisme. Donc $f^{-1}(x')Tf^{-1}(y') = f^{-1}(x'T'y')$. $\square$

3. Exemples

- $\ln$ est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur le groupe $(\mathbb{R}, +)$.
- $\det$ est un morphisme du groupe $(\text{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
- L'application $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}, \sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$, la signature de la permutation σ , est un morphisme de groupes.

III. Groupes monogènes et cycliques

1. Congruence modulo n

1.1. Théorème et définition

Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par $x\mathcal{R}y$ si, et seulement si, $x - y \in n\mathbb{Z}$, est une relation d'équivalence appelée relation de congruence modulo n . On note $x\mathcal{R}y : x \equiv y \pmod{n}$.

La classe d'équivalence de x modulo n est $\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z} \mid x \equiv y \pmod{n}\}$.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

Démonstration

$\mathcal{R}$ est réflexive car $0 \in n\mathbb{Z}$ puisque $(n\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ (1)

$\mathcal{R}$ est symétrique car si $z \in n\mathbb{Z}$, alors $-z \in n\mathbb{Z}$ d'après (1).

$\mathcal{R}$ est transitive d'après (1), car $(x - z) = (x - y) + (y - z)$.

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. $\square$

1.2. Proposition

(x, y) appartenant à $\mathbb{Z}^2$ et n étant un entier naturel non nul, $x \equiv y \pmod{n}$ si, et seulement si, x et y ont même reste dans la division euclidienne par n .

Démonstration

Si $x = nq + r$ et $y = nq' + r$ avec $(q, q', r) \in \mathbb{Z}^3$, alors $x - y = n(q - q') \in n\mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $x \equiv y \pmod{n}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = nk$.

Si r est le reste de la division euclidienne de y par n , alors $y = np + r$ où $0 \leq r < n$, donc $x = n(p + k) + r$. De l'unicité du couple quotient-reste dans la division euclidienne, on déduit que r est le reste de la division euclidienne de x par n . $\square$

1.3. Conséquence

$$\text{Si } n \geq 2, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

En effet, les seuls restes possibles sont $0, 1, \dots, (n-1)$. Donc, si $x = nq + r$, alors $x \equiv r \pmod{n}$ i.e. $\bar{x} = \bar{r}$.

1.4. Compatibilité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $x \equiv x' \pmod{n}$ et $y \equiv y' \pmod{n}$, alors :
 $x + y \equiv x' + y' \pmod{n}$ et $xy \equiv x'y' \pmod{n}$.

Démonstration

L'hypothèse s'écrit $(x - x' \in n\mathbb{Z}$ et $y - y' \in n\mathbb{Z})$ ou $(x = x' + nk$ et $y = y' + nk')$ avec $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$. Donc :

$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in n\mathbb{Z}$ car $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
 D'autre part $xy - x'y' = n(nkk' + ky' + k'x) \in n\mathbb{Z}$. $\square$

1.5. Conséquence

$$x \equiv y \pmod{n} \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}, x^p \equiv y^p \pmod{n}.$$

Exercice

Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, les restes R_n de la division euclidienne de 3^n par 5.

Solution

$$3 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow 3^2 \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow 3^3 \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 3^4 \equiv 1 \pmod{5}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists !(q, r) \in \mathbb{N}^2, n = 4q + r, 0 \leq r < 4.$$

Comme $3^n = (3^4)^q 3^r$, on a : $3^n \equiv 3^r \pmod{5}$. D'où la conclusion.

Si $n \equiv 0 \pmod{4}$, alors $R_n = 1$. Si $n \equiv 1 \pmod{4}$, alors $R_n = 3$.

Si $n \equiv 2 \pmod{4}$, alors $R_n = 4$. Si $n \equiv 3 \pmod{4}$, alors $R_n = 2$.

2. Morphisme canonique

2.1. Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $\pi_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, x \mapsto \bar{x}$ est surjective. On l'appelle la surjection canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2.2. Théorème et définition

On définit une loi de composition interne notée $+$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en posant :

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}.$$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est alors muni d'une structure de groupe abélien et π_n est un morphisme de groupes additifs.

Démonstration

On déduit de C.1.4. que si $\bar{x} = \bar{x}'$ et $\bar{y} = \bar{y}'$, alors $\overline{x + y} = \overline{x' + y'}$. Donc on a bien défini une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a : $\pi_n(x + y) = \pi_n(x) + \pi_n(y)$.

Comme π_n est surjective et $(\mathbb{Z}, +)$ un groupe abélien, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est alors muni d'une structure de groupe abélien. $\square$

3. Groupes cycliques

3.1. Théorème

Soit G un groupe et $a \in G$. Le morphisme $k \mapsto ka$ (ou $k \mapsto a^k$) du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ dans G a pour image le groupe monogène $\text{gr}(a)$ et pour noyau $n\mathbb{Z}$.

Si $n = 0$, $\text{gr}(a)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

Si $n \neq 0$, $\text{gr}(a)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ donc cyclique.

Démonstration

(Dans le cas où la loi sur G est multiplicative). Donc $\text{gr}(a) = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

L'application $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \text{gr}(a), k \mapsto a^k$ est un morphisme surjectif de groupes. $\text{Ker}(\varphi)$ étant un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker}(\varphi) = n\mathbb{Z}$.

- Si $n = 0$, φ est injective, donc bijective et réalise un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ sur $(\text{gr}(a), \cdot)$.
- Si $n > 0$, soit π_n la surjection canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, montrons qu'il existe une unique $\bar{\varphi} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \text{gr}(a)$ telle que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi_n$ et que $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme de groupes.

Si $\bar{\varphi}$ existe, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi(k) = (\bar{\varphi} \circ \pi)(k) = \bar{\varphi}(\bar{k})$. Elle est donc unique.

De plus, elle est surjective puisque φ l'est. D'autre part, on a :

$$a^k = a^{k'} \iff a^{k-k'} = e \iff k - k' \in \text{Ker}(\varphi) = n\mathbb{Z} \iff \bar{k} = \bar{k'}. \quad (\star)$$

Donc, on définit bien une application $\bar{\varphi}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\text{gr}(a)$ en posant $\bar{\varphi}(\bar{k}) = a^k$.

De plus, elle est injective d'après $(\star)$. Elle est un isomorphisme de groupes car

$$\bar{\varphi}(\bar{k} + \bar{k'}) = \varphi(k + k') = \varphi(k) \varphi(k') = a^k a^{k'} = \bar{\varphi}(\bar{k}) \bar{\varphi}(\bar{k'}). \quad \square$$

3.2. Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Un élément $\bar{x}$ est générateur du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si, et seulement si, x et n sont premiers entre eux.

Démonstration

$\bar{x}$ est générateur du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si, et seulement si, il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $\bar{1} = y\bar{x}$ ie. (il existe $(y, z) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $1 = xy + nz$), ce qui, d'après le théorème de Bézout, équivaut à $(x$ et n sont premiers entre eux).

3.3. Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{\omega^k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$ où $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ est un sous-groupe cyclique de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Ses générateurs sont les $\alpha_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$ où k et n sont premiers entre eux.

IV. Anneaux

1. Définitions

1. Définition

$(A, +, \star)$ est un anneau si $(A, +)$ est un groupe abélien, la loi $\star$ est associative et distributive par rapport à la loi $+$ et si A admet un élément neutre 1_A pour la loi $\star$.
Si la loi $\star$ est commutative, l'anneau est dit commutatif.

Exemples

Si $\mathbb{K}$ est l'un des ensembles $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, les ensembles $\mathbb{K}, \mathbb{K}[X], \mathcal{F}(A, \mathbb{K}), \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sont munis d'une structure d'anneau commutatif et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ d'une structure d'anneau non commutatif.

Si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.

2. Définition

Soit $(A, +, \star)$ un anneau. Une partie A' de A est un sous-anneau de $(A, +, \star)$ si $1_A \in A'$, si A' est stable par les lois $+$ et $\star$ et si, muni des lois induites, c'est un anneau.

On en déduit immédiatement, comme pour les sous-groupes, la caractérisation suivante.

3. Caractérisation

Soit $(A, +, \star)$ un anneau. Une partie A' de A est un sous-anneau de $(A, +, \star)$ si, et seulement si, $1_A \in A'$ et $(\forall (x, y) \in A'^2, x - y \in A' \text{ et } x \star y \in A')$.

Exemples

- $\mathbb{Z}[i] = \{p + iq \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
- $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un sous-anneau de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), +, \cdot)$.

4. Définition

$(\mathbb{K}, +, \star)$ est un **corps** si $(\mathbb{K}, +, \star)$ est un anneau commutatif et si tout élément non nul de $\mathbb{K}$ est inversible dans $\mathbb{K}$ (pour la loi $\star$).

Exemples

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}[i] = \{p + iq \mid (p, q) \in \mathbb{Q}^2\}$ sont des corps.

5. Définition

On appelle **sous-corps** d'un corps $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ tout sous-anneau $\mathbb{K}'$ qui, pour les lois induites, est un corps.

6. Définition : anneau produit

Si A_1 et A_2 sont des anneaux, $A_1 \times A_2$ est muni de deux lois de composition internes notées :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$(x_1, x_2) \times (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2).$$

Muni de ces lois, $A_1 \times A_2$ a une structure d'anneau.

7. Éléments remarquables dans un anneau

7.1. Définition

Dans un anneau $(A, +, \star)$, on appelle **diviseur de zéro** à gauche (resp. à droite) tout élément $a \in A \setminus \{0_A\}$ tel que : $\exists b \in A \setminus \{0_A\}, a \star b = 0_A$ (resp. $b \star a = 0_A$).

7.2. Définition

Un anneau commutatif sans diviseurs de zéro est dit **intègre**.

Dans un tel anneau, $a \star b = 0_A \Rightarrow (a = 0_A \text{ ou } b = 0_A)$.

Exemples

- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont des anneaux intègres.
- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ n'est pas un anneau intègre. En effet, si $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ sont tels que $a_{2p} = b_{2p+1} = 1$ et $b_{2p} = a_{2p+1} = 0$, alors $a \cdot b = 0$ avec a et b non nuls.
- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un anneau non commutatif avec des diviseurs de zéro.

En effet, si $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est sa base canonique, $E_{i,j} E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$.

7.3. Définition

Un élément a de l'anneau $(A, +, \star)$ est **nilpotent** si : $\exists n \in \mathbb{N}^*, a^n = 0_A$.

7.4. Proposition

Soit a un élément d'un anneau $(A, +, \cdot)$.

(i) Si a est nilpotent non nul, a est un diviseur de zéro.

(ii) Si a est nilpotent, alors $1_A - a$ est inversible et

$$(1_A - a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k = 1_A + a + \cdots + a^{n-1}.$$

Démonstration

(i) $\exists n \geq 2$ tel que $a^n = 0_A$, soit $p = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a^n = 0_A\}$.

Alors $a \star a^{p-1} = a^{p-1} \star a = 0_A$.

(ii) Si a est nilpotent,

$$(1_A - a)(1_A + a + \cdots + a^{n-1}) = (1_A + a + \cdots + a^{n-1})(1_A - a) = 1_A.$$

La conclusion est immédiate. $\square$

7.5. Théorème et définition

L'ensemble $\mathcal{U}(A)$ des éléments inversibles de l'anneau $(A, +, \star)$ est stable par la loi $\star$. Muni de la loi induite, c'est un groupe appelé **groupe des unités** de A .

Démonstration

$\mathcal{U}(A) \neq \emptyset$ car $1_A \in \mathcal{U}(A)$ puisque $1_A \star 1_A = I_A$.

$\mathcal{U}(A)$ est stable par la loi $\star$ car, si $(a, b) \in (\mathcal{U}(A))^2$, $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1} \in \mathcal{U}(A)$.

Si $a \in \mathcal{U}(A)$, $a^{-1} \in \mathcal{U}(A)$ car $(a^{-1})^{-1} = a$.

La loi $\star$ est associative dans A donc dans $\mathcal{U}(A)$. $\square$

Exemples

- $\mathcal{U}(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$; $\mathcal{U}(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un corps.
- $\mathcal{U}(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})) = \text{GL}_n(\mathbb{K})$.
- $\mathcal{U}(\mathbb{K}[X]) = \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

2. Idéaux d'un anneau commutatif

1. Définition

On appelle **idéal** d'un anneau commutatif $(A, +, \cdot)$ tout sous-groupe I de $(A, +)$ tel que $a \cdot x \in I$ quel que soit $(a, x) \in A \times I$.

2. Théorème et définition

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif et $a \in A$. La partie notée (a) ou $aA = \{ax \mid x \in A\}$ est un idéal de $(A, +, \cdot)$. On l'appelle l'**idéal engendré par a** .

Démonstration

Si 1_A est l'élément neutre pour la multiplication, alors $(a) \neq \emptyset$ car $a = a 1_A \in (a)$.

Si $(x, y) \in (aA)^2$, il existe $(x', y') \in A^2$ tel que $x = ax'$ et $y = ay'$.

$x - y = a(x' - y') \in aA = (a)$ car $(A, +, \cdot)$ est un anneau.

Pour tout $z \in A$, on a $xz = a(x'z) \in (a)$. $\square$

Exemples

- A et $\{0_A\}$ sont des idéaux de $(A, +, \cdot)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la partie $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
- Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, la partie $(P) = P\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$.
- Soit $x_1, \dots, x_n$ une famille d'éléments de l'anneau commutatif $(A, +, \cdot)$. L'ensemble des éléments de la forme $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ où les λ_i décrivent A est un idéal de $(A, +, \cdot)$. En effet, la somme de deux éléments de ce type est du même type et si l'on multiplie par un élément de l'anneau, on obtient un élément du même type.

Remarque : $(a) = A$ si, et seulement si, a est inversible.

En effet : $(a) = A \iff (1_A \in (a)) \iff (\exists y \in A, ay = 1_A) \iff a \in \mathcal{U}(A)$, car l'anneau $(A, +, \cdot)$ est commutatif.

3. Divisibilité dans un anneau intègre

3.1. Définition

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau intègre. On dit que x divise y (dans A), et l'on note $x|y$, s'il existe un élément q de A tel que $y = qx$.

3.2. Théorème

Avec les notations de la définition précédente, $x|y \iff (y) \subset (x)$.

Démonstration

Si $x|y$, pour tout $a \in A$, $ya = (qa)x \Rightarrow (y) \subset (x)$.

Réciproquement, $(y) \subset (x) \Rightarrow y \in (x) \Rightarrow x|y$. $\square$

4. Morphisme d'anneaux

4.1. Définition

Soient $(A, +, \cdot)$ et $(A', +, \cdot)$ deux anneaux. Une application φ de A dans A' est un morphisme d'anneaux si $\varphi(1_A) = 1_{A'}$ et si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ et } \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

4.2. Théorème

Soient $(A, +, \cdot)$ et $(A', +, \cdot)$ deux anneaux dont le premier est commutatif et φ un morphisme d'anneaux. Le noyau de φ est un idéal de $(A, +, \cdot)$.

Démonstration

En tant que morphisme de groupes additifs, $\text{Ker}(\varphi)$ est un sous-groupe de $(A, +)$.

D'autre part, si $x \in \text{Ker}(\varphi)$ et $a \in A$, $\varphi(a \cdot x) = \varphi(a) \cdot \varphi(x) = \varphi(a) \cdot 0_{A'} = 0_{A'}$. $\square$

4.3. Théorème

Soient $(A, +, \cdot)$ et $(A', +, \cdot)$ deux anneaux commutatifs et f un morphisme d'anneaux.

(i) Si I est un idéal de $(A, +, \cdot)$, alors $f(I)$ est un idéal de $(f(A), +, \cdot)$.

(ii) Si I' est un idéal de $(A', +, \cdot)$, alors $f^{-1}(I')$ est un idéal de $(A, +, \cdot)$.

Démonstration

(i) $0_{A'} = f(0_A) \in f(I)$.

$\forall (x', y') \in (f(I))^2, \exists (x, y) \in I^2, x' = f(x) \text{ et } y' = f(y).$

$x' - y' = f(x) - f(y) = f(x - y)$ car f est un morphisme d'anneaux.

$\forall a' \in f(A), \exists a \in A, a' = f(a) \Rightarrow a'x' = f(ax) \in f(I)$ car I est un idéal de A et f est un morphisme d'anneaux.

Il s'ensuit que $f(I)$ est un idéal de $f(A)$.

(ii) $0_A \in f^{-1}(I')$ car $0_{A'} = f(0_A) \in I'$.

Soient $x, y \in f^{-1}(I')$. On a $f(x - y) = f(x) - f(y) \in I'$ car I' est un idéal de A' , donc $x - y \in f^{-1}(I')$.

Si $a \in A$, alors $f(ax) = f(a)f(x) \in I'$ car I' est un idéal de A' . Donc $ax \in f^{-1}(I')$.

On peut conclure que $f^{-1}(I')$ est un idéal de A . $\square$

3. Idéaux de $\mathbb{Z}$; anneaux $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$

1. Théorème

I est un idéal de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ si, et seulement si, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $I = n\mathbb{Z}$.

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n) = n\mathbb{Z}$ est un idéal de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Réciproquement, si I est un idéal de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, alors I est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ d'où le résultat d'après A.5. $\square$

Par une démonstration analogue à celle de C.2.2. on montre

2. Théorème et définition

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. On définit sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ une multiplication en posant :

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy}.$$

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif.

L'application $\pi_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, x \mapsto \bar{x}$ est un morphisme surjectif d'anneaux.

Exemples

Tables d'addition et de multiplication pour $n \in \{3, 4\}$

Addition dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Multiplication dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Addition dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Multiplication dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

On remarque que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un corps commutatif, alors que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas intègre.

3. Théorème chinois

Si m et n sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, les anneaux $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Démonstration

Définissons f de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en posant pour tout $y \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, $f(y) = (\pi_m(x), \pi_n(x))$ avec $y = \pi_{mn}(x)$.

f est bien une application car si $y = \pi_{mn}(x_1) = \pi_{mn}(x_2)$, alors $(x_1 - x_2) \in mn\mathbb{Z}$. D'où $(x_1 - x_2) \in m\mathbb{Z}$ et $(x_1 - x_2) \in n\mathbb{Z}$. D'où $\pi_m(x_1) = \pi_m(x_2)$ et $\pi_n(x_1) = \pi_n(x_2)$. On vérifie que f est morphisme d'anneaux.

f est injective. En effet, si $f(y) = (0, 0)$ alors $y = \pi_{mn}(x)$ avec $\pi_m(x) = 0$ et $\pi_n(x) = 0$. D'où $x \in m\mathbb{Z}$ et $x \in n\mathbb{Z}$. Or m et n sont premiers entre eux. Donc $x \in mn\mathbb{Z}$ ie. $\pi_{mn}(x) = 0 = y$.

Comme les ensembles $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ont même cardinal, f est bijective et le théorème est prouvé. $\square$

4. Corollaire

Le système (1) $\begin{cases} x \equiv x_1 \pmod{n} \\ x \equiv x_2 \pmod{m} \end{cases}$ où $m \wedge n = 1$, a des solutions dans $\mathbb{Z}$.

Démonstration

Avec les notations de la démonstration précédente,

$$(1) \iff (\pi_m(x), \pi_n(x)) = (\pi_m(x_2), \pi_n(x_1)).$$

(1) $\iff f(y) = (\pi_m(x_2), \pi_n(x_1))$ avec les notations de la preuve précédente. f étant bijective, la réponse à la question est positive.

D'après le théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $un + vm = 1$.

Les $nux_2 + mvx_1 + kmn$ où k parcourt $\mathbb{Z}$, sont solutions du système. $\square$

5. Fonction indicatrice d'Euler

5.1. Théorème et définition

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Alors $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{\bar{x} \mid x \wedge n = 1\}$. Son cardinal est $\varphi(n)$ où φ est la **fonction indicatrice d'Euler**. Pour tout $\bar{a} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $\bar{a}^{\varphi(n)} = \bar{1}$.

Démonstration

$\bar{x}$ est inversible si, et seulement si, il existe $\bar{y}$ tel que $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{1}$. $(\star)$

$(\star) \iff xy \equiv 1 \pmod{n} \iff (\exists q \in \mathbb{Z}, xy - qn = 1) \iff (x \wedge n = 1)$ d'après le théorème de Bézout.

La fin du théorème est une conséquence du théorème de Lagrange. $\square$

5.2. Propriétés

- (i) Si $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, et si $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ est « sa décomposition en facteurs premiers », $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, alors $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.
- (ii) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Alors $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Démonstration

i) • (u, v) est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si, et seulement si, il existe (u', v') dans l'anneau tel que $(uu', vv') = (1, 1)$, c'est-à-dire $uu' = 1$ et $vv' = 1$ ie. u (resp. v) est inversible dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). Compte tenu de l'isomorphisme défini par le théorème chinois, on a : $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si $m \wedge n = 1$.

• Si p est premier, $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right)$. En effet, les nombres compris entre 1 et p^α et non premiers avec p sont $p, 2p, \dots, p^{\alpha-1}p$.

• Si $p_1, \dots, p_k$ sont des nombres premiers deux à deux distincts, alors $p_k^{\alpha_k}$ est premier avec le produit $p_1^{\alpha_1} \dots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}$. On déduit le théorème d'une récurrence et des deux résultats précédents.

ii) Si d est un diviseur de n , on note $C_d = \left\{ k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \text{pgcd}(k, n) = \frac{n}{d} \right\}$. Lorsque d décrit les diviseurs de n , les ensembles C_d forment une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$. D'où $n = \sum_{d|n} \text{Card}[C_d]$. Or, si $k \in C_d$ alors $k = \frac{n}{d}q$ où $q \in \mathbb{N}$ et $q \wedge n = 1$. Donc

$q \wedge d = 1$ et $q \in \llbracket 1, d \rrbracket$. D'où $\text{Card}[C_d] = \varphi(d)$. $\square$

6. Théorème

$|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un corps si, et seulement si, p est premier.

Démonstration

$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un corps si, et seulement si, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{\bar{0}\} = \mathcal{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, ce qui équivaut d'après le théorème précédent à $1, 2, \dots, (p-1)$ sont premiers avec p ie. p est premier. $\square$

Remarque

On peut déduire de ce qui précède une autre preuve du « petit théorème de Fermat » si p est premier et $a \in \mathbb{Z}$, $a^p \equiv a \pmod{p}$.

En effet, $\bar{a}^{\varphi(p)} = \bar{1}$ dans $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Si p est premier, $\varphi(p) = p-1$. Donc $(\bar{a})^{p-1} = \bar{1}$, d'où $(\bar{a})^p = \bar{a}$ et le résultat.

V. Anneaux de polynômes à une indéterminée

Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

En première année, on a démontré le théorème suivant :

1. Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec B non nul. Il existe un unique couple (Q, R) d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

On en déduit le théorème de caractérisation des idéaux de $\mathbb{K}[X]$.

2. Théorème

Si $\mathcal{I}$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$, alors $\mathcal{I} = \{0\}$ ou il existe un unique polynôme unitaire M tel que $\mathcal{I} = (M) = M \cdot \mathbb{K}[X]$.

Démonstration

Supposons $\mathcal{I} \neq \{0\}$. La partie de $\mathbb{N}$ définie par $\mathcal{P} = \{\deg(P) \mid P \in \mathcal{I} \setminus \{0\}\}$ étant non vide, il existe $P_0 \in \mathcal{I}$ tel que $\deg(P_0) = \min(\mathcal{P})$. Si $P_0 = a_p X^p + \dots + a_0$, notons $P_0 = a_p M$. On a $M \in \mathcal{I}$ et $(M) \subset \mathcal{I}$ car $\mathcal{I}$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$.

De plus, quel que soit $P \in \mathcal{I}$, par division euclidienne, on a $P = MQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(M)$. D'où $R = P - MQ \in \mathcal{I}$ car $\mathcal{I}$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$. Comme $\deg(R) < \deg(M) = \min(\mathcal{P})$, on a $R = 0$ d'où $\mathcal{I} \subset (M)$.

Donc $\mathcal{I} = (M)$. Montrons l'unicité du générateur de l'idéal $\mathcal{I}$ (si $\mathcal{I} \neq \{0\}$).

S'il existe deux polynômes unitaires M et N tels que $\mathcal{I} = (M) = (N)$, d'après III.A.3.2. on a $M|N$ et $N|M$. Il existe $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $M = NQ_1$ et $N = MQ_2$. Donc $M = MQ_1Q_2$ i.e. $Q_1Q_2 = 1$ car $M \neq 0$. D'où Q_1 est inversible dans l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ i.e. $Q_1 = \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Donc $\lambda = 1$ car M et N sont unitaires. $\square$

On en déduit aisément le :

3. Théorème et définition

Soient $P_1, \dots, P_n$ des polynômes non tous nuls de $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble $\mathcal{I}$ des polynômes $P_1Q_1 + \dots + P_nQ_n$ où les Q_i sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$, est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Son unique générateur unitaire est appelé $\text{pgcd}(P_1, \dots, P_n)$. C'est le diviseur unitaire de plus haut degré divisant tous les P_i .

4. Définition

Les polynômes $P_1, \dots, P_n$ de $\mathbb{K}[X]$ sont dits premiers entre eux dans leur ensemble, si $\text{pgcd}(P_1, \dots, P_n) = 1$.

5. Théorème de Bézout

Les polynômes $P_1, \dots, P_n$ de $\mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si, et seulement si, il existe $(U_1, \dots, U_n) \in (\mathbb{K}[X])^n$ tel que

$$U_1P_1 + \dots + U_nP_n = 1.$$

Il s'ensuit que, comme dans $\mathbb{Z}$, on prouve le théorème suivant :

6. Théorème de Gauss

Si A, B, C sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On suppose que A divise BC et que A est premier avec B , alors A divise C .

Démonstration

En effet, il existe U, V dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$. Donc $ACU + BCV = C$. Comme A divise AC et BC , on peut conclure que A divise C . $\square$

7. Définition

Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit **irréductible** dans $\mathbb{K}[X]$, s'il est non constant et si ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont les constantes et les polynômes λP où $\lambda \in \mathbb{K}^\star$.

En première année, on rencontre les théorèmes de Gauss et d'Alembert-Gauss qui peuvent s'écrire sous la forme :

8. Théorème

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors P se décompose de manière unique à l'ordre près sous la forme $P = \lambda P_1^{\alpha_1} \dots P_k^{\alpha_k}$ où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et où les $\alpha_i \in \mathbb{N}^\star$ et les polynômes P_i sont irréductibles distincts et unitaires.

En effet, les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont de la forme $(X - a)$ où $a \in \mathbb{C}$ et les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont de la forme $(X - a)$ où $a \in \mathbb{R}$ et ceux de la forme $X^2 + pX + q$ où p et q sont réels tels que $p^2 - 4q < 0$.

VI. Algèbres

Si E, F, G sont trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels on rappelle qu'une application f de $E \times F$ dans G est bilinéaire si les applications $x \mapsto f(x, \cdot)$ et $y \mapsto f(\cdot, y)$ sont linéaires.

1. Définition

Un ensemble $\mathcal{A}$ muni de deux lois de composition internes $+$ et $\star$ et d'une loi de composition externe $\cdot$ a une structure de $\mathbb{K}$ -algèbre si $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace-vectoriel, si l'application $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, (x, y) \mapsto x \star y$ est bilinéaire et si $\mathcal{A}$ possède un élément neutre $1_{\mathcal{A}}$ pour la loi associative $\star$.

Remarque

$(\mathcal{A}, +, \star)$ est alors muni d'une structure d'anneau.

2. Définition

$\mathcal{A}'$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{A}'$ est une partie de $\mathcal{A}$ contenant $1_{\mathcal{A}}$ stable par les lois sur $\mathcal{A}$ et si, muni des lois induites, $\mathcal{A}'$ a une structure d'algèbre.

Des caractérisations de sous-espaces vectoriels et de sous-anneaux on déduit :

3. Théorème de caractérisation

$\mathcal{A}'$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}$ si $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}'$ et si :

$$\forall (x, y, \lambda) \in \mathcal{A}' \times \mathcal{A}' \times \mathbb{K}, \lambda x + y \in \mathcal{A}' \text{ et } x \star y \in \mathcal{A}'.$$

Exemples

- $\mathbb{K}, \mathbb{K}[X]$ sont des $\mathbb{K}$ -algèbres.
- Si E est un $\mathbb{K}$ -espace-vectoriel, $(\mathcal{F}(E, \mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ et $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ sont des $\mathbb{K}$ -algèbres.
- $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre.
- Pour tout $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ on note $f_{i_1, \dots, i_n}$ l'élément de $\mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ défini par $f_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_n) = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$. L'ensemble $\text{Vect}(f_{i_1, \dots, i_n}, (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ que l'on appelle l'**algèbre des fonctions polynomiales**.

EXERCICES

1. (MP*) Soit G un sous-groupe non réduit à $\{0\}$ de $\mathbb{Z}^n$. Montrer qu'il existe $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que G soit isomorphe à $\mathbb{Z}^r$. Considérer $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_n$.

2. Résoudre dans $\mathbb{N}^4$ le système $\begin{cases} x^2 + 6y^2 = z^2 \\ 6x^2 + y^2 = t^2. \end{cases}$

3. Dans tout l'exercice, on considère un entier d positif qui n'est le carré d'aucun entier. On s'intéresse à l'équation $|x^2 - dy^2| = 1$, où l'inconnue (x, y) est dans $\mathbb{Z}^2$. On pose $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

a. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ peut être muni d'une structure d'anneau.

b. Soit $u \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Montrer qu'il existe un unique $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u = a + b\sqrt{d}$.

c. Déterminer les automorphismes de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}], +, \cdot)$.

d. On définit l'application $N : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \rightarrow \mathbb{Z}, x + y\sqrt{d} \mapsto x^2 - dy^2$.

Vérifier que pour $(u, u') \in (\mathbb{Z}[\sqrt{d}])^2$, $N(u.u') = N(u).N(u')$.

On pose $G = \{u \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \mid \exists v \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}], u.v = 1\}$ et $G^+ = G \cap \mathbb{R}_+^*$.

e. (i) Montrer que G et G^+ sont des sous-groupes de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

(ii) Montrer que $G = \{u \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \mid |N(u)| = 1\}$.

f. (i) Soit $u = a + b\sqrt{d} \in G$ où $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Établir l'équivalence : $u \geq 1 \iff (a \geq 1 \text{ et } b \geq 0)$.

On pourra, si $u = a + b\sqrt{d} \geq 1$, examiner l'ensemble $\{\pm u, \pm u^{-1}\}$.

(ii) Soit $M \geq 1$. Montrer que $G \cap [1, M]$ est fini.

(iii) En déduire que la groupe $(G^+, \cdot)$ est monogène.

4. a. Soit $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que si $n \neq m$ alors $F_n \wedge F_m = 1$.

b. Montrer que F_n divise $2^{F_n} - 2$.

5. **Radical d'un idéal.** Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif. À toute partie B non vide de A on associe $\mathcal{R}(B) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in B\}$. Si I et J sont deux idéaux de $(A, +, \cdot)$, on note $I + J = \{x + y \mid (x, y) \in I \times J\}$ et $IJ = \{xy \mid (x, y) \in I \times J\}$.

a. Montrer que $B \subset \mathcal{R}(B)$ et que $B \subset C \Rightarrow \mathcal{R}(B) \subset \mathcal{R}(C)$.

b. Montrer que $\mathcal{R}(I)$ est un idéal de $(A, +, \cdot)$.

- c. Montrer que $\mathcal{R}(\mathcal{R}(I)) = \mathcal{R}(I)$.
 d. Montrer que $\mathcal{R}(I) \cap \mathcal{R}(J) = \mathcal{R}(I \cap J) = \mathcal{R}(IJ)$.
 e. Montrer que $\mathcal{R}(\mathcal{R}(I) + \mathcal{R}(J)) = \mathcal{R}(I + J)$.
 f. Déterminer $\mathcal{R}(n\mathbb{Z})$ si $n \in \mathbb{N}$.
On pourra décomposer n en facteurs premiers si $n \geq 2$.

6. Soit $A = \{a10^{-n} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des nombres décimaux. Montrer que A peut être muni d'une structure d'anneau commutatif et que tout idéal de A est principal *ie.* engendré par un élément de A .

7. Théorème de Wilson.

- a. Soit p un nombre premier. Montrer que $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. *On pourra chercher les x de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui sont leur propre inverse.*
 b. Montrer que si $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ est tel que $(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ alors n est premier.
 c. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2, n \geq 5$ et $2 \leq p \leq n$. Montrer que $\left\lfloor \frac{(n-1)!}{p} \right\rfloor \equiv 0 \pmod{p-1}$.
On pourra distinguer les cas $p < n$ et $p = n$.

8. Théorème de Liouville.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ algébrique *ie.* racine d'un polynôme de degré n à coefficients entiers.

- a. Montrer qu'il existe $f \in \mathbb{Z}[X]$, irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, tel que $f(\alpha) = 0$ et $\deg(f) = r \leq n$. On admet le résultat suivant que nous démontrerons dans le travail dirigé « Polynômes cyclotomiques » : un polynôme à coefficients entiers, non constant et irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ l'est dans $\mathbb{Q}[X]$.
 b. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{n+\varepsilon}}$ n'admet qu'un nombre fini de solutions (p, q) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
 c. Montrer que $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$ est transcendant *ie.* n'est pas algébrique.

- 9.** a. Montrer que si p est premier alors p divise $\binom{p}{k}$ pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.
 b. Montrer que si p est premier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(a, b) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^2$,

$$(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}.$$

 c. Retrouver le résultat suivant si p est premier : $\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \pmod{p}$.

10. Montrer que si p est premier, $p > 5$, alors 240 divise $p^4 - 1$.

11. a. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, montrer que $(p^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est périodique à partir d'un certain rang dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si $p \wedge n = 1$, que peut-on dire de plus ?

- b. Reste de la division euclidienne de $S = 10^{10} + 10^{10^2} + \dots + 10^{10^{10}}$ par 7.
 c. Déterminer la classe de 2601^{187} dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

12. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{Z}^2$ et $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k$ si $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(\overline{u_k})$ est périodique dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

13. Montrer que $x \in \mathbb{Q}$ si, et seulement si, le développement décimal de x est périodique à partir d'un certain rang.

14. Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini commutatif.

- a. Montrer que si $g \in G$ est d'ordre $p \cdot q$, alors g^p est d'ordre q .
 b. Montrer que si g et h sont d'ordres respectifs p et q avec $p \wedge q = 1$, il existe un élément d'ordre $p \cdot q$.
 c. Soit n le ppcm des ordres des éléments de G . Montrer que G admet un élément d'ordre n .

SOLUTIONS DES EXERCICES

1. Procédons à une récurrence. Le résultat est dans le cours pour $n = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le démontré pour $(n - 1)$. La projection f étant un morphisme de groupes, $f(G)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(G) = m\mathbb{Z}$.

• Si $m = 0$, $G \subset \text{Ker}(f)$ qui est isomorphe à $\mathbb{Z}^{n-1}$; on conclut avec l'hypothèse de récurrence.

• Si $m \neq 0$, $G \cap \text{Ker}(f)$ est un sous-groupe de $\text{Ker}(f)$ qui lui, est isomorphe à $\mathbb{Z}^{n-1}$. Donc $G \cap \text{Ker}(f)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^s$, $s \leq n - 1$, par hypothèse de récurrence. Soit g un tel isomorphisme et $a \in G$ tel que $f(a) = m$.

Pour tout $x \in G$, $x - \frac{f(x)}{m}a \in \text{Ker}(f)$. L'application $h : G \rightarrow (\text{Ker}(f) \cap G) \times \mathbb{Z}$ définie par $h(x) = \left(x - \frac{f(x)}{m}a, \frac{f(x)}{m}\right)$ est un morphisme de groupes et même un isomorphisme puisque h^{-1} est définie par $(y, \lambda) \mapsto y + \lambda a$. Donc G est isomorphe à $\mathbb{Z}^r$, $r = s + 1 \leq n$. D'où la conclusion avec le théorème de récurrence.

Remarque : on montre l'unicité de r .

2. Notons que $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ est solution.

• Si $x = 0$ et $y \neq 0$, alors $6y^2 = z^2$. Dans la décomposition en facteurs premiers de y , on a $y = 2^\alpha y'$ où y' est impair et $\alpha \in \mathbb{N}$. Donc $z^2 = 2^{\alpha+1} 3 \cdot y'^2$. Ceci est impossible car $2\alpha + 1$ étant impair, le second membre de l'égalité précédente ne peut être un carré d'entier. De même, on ne peut avoir $x \neq 0$ et $y = 0$.

• S'il existe une solution telle que $x \cdot y \neq 0$, soit $\delta = x \wedge y$. Alors $\delta^2 | z^2$ et $\delta^2 | t^2$; d'où $\delta | z$ et $\delta | t$ avec $\delta \neq 0$. En notant $x = \delta x'$, $y = \delta y'$, $z = \delta z'$ et $t = \delta t'$, Le système est équivalent à : $\begin{cases} x'^2 + 6y'^2 = z'^2, \\ 6x'^2 + y'^2 = t'^2. \end{cases}$ Si $\delta' = x' \wedge z'$ alors $\delta'^2 | 6y'^2$. Donc $\delta' | y'$. D'où $\delta' = 1$ car δ' divise x' et y' premiers entre eux. Par un raisonnement analogue, on a : $x' \wedge z' = x' \wedge t' = y' \wedge t' = 1$.

Si x' est pair, $2 | z'$, ce qui est absurde puisque $x' \wedge z' = 1$.

Si x' est impair, z' est impair, $z'^2 - x'^2 = (z' - x')(z' + x')$ est divisible par 4; donc $4 | 6y'^2$. Donc $2 | y'$. D'où t'^2 et par suite t' est pair : absurde car $y' \wedge t' = 1$.

En conclusion $(0, 0, 0, 0)$ est la seule solution du système dans $\mathbb{N}^4$.

3. a. $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \subset \mathbb{R}$; $1 = 1 + 0\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Si $(a, b, a', b') \in \mathbb{Z}^4$, posons $x = a + b\sqrt{d}$ et $y = a' + b'\sqrt{d}$.

$x - y = (a - a') + (b - b')\sqrt{d}$ et $xy = (aa' + bb'd) + (ab' + a'b)\sqrt{d}$. Donc $x - y$ et xy sont éléments de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Donc $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est un sous anneau de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

b. L'existence étant immédiate par définition de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, comme $a + b\sqrt{d} = a' + b'\sqrt{d}$ étant équivalent à $(a - a') + (b - b')\sqrt{d} = 0$, il suffit de supposer $a + b\sqrt{d} = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Donc $a^2 = db^2$. Si $a \neq 0$, alors $b \neq 0$. Soit p un diviseur premier de d dont l'exposant dans la décomposition de d est impair. L'exposant de p dans a^2 est pair et impair dans db^2 . C'est absurde. Donc $a = b = 0$.

c. Soit φ un automorphisme de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}], +, \cdot)$. On a $\varphi(1) = 1$. Comme φ est un morphisme additif, $\varphi(-1) = -1$ et $\varphi(m) = m\varphi(1) = m$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ moyennant un raisonnement par récurrence. Comme $(\varphi(\sqrt{d}))^2 = \varphi(d) = d$, on a $\varphi(\sqrt{d}) = \pm\sqrt{d}$.

Donc $\varphi = Id$ ou $\varphi = \gamma : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{d}], a + b\sqrt{d} \mapsto a - b\sqrt{d}$. On vérifie que ce sont des automorphismes de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}], +, \cdot)$. Donc les automorphismes de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}], +, \cdot)$ sont Id et γ .

d. Comme $N(u) = u\gamma(u)$ et γ est un morphisme de $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}], \cdot)$, on a : $N(uu') = N(u)N(u')$.

e. (i) En tant que groupe des unités de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}], +, \cdot)$, $(G, \cdot)$ est un groupe, sous-groupe de $(\mathbb{R}^\star, \cdot)$. Comme intersection de sous-groupes de $(\mathbb{R}^\star, \cdot)$, G_+ est sous-groupe de $(\mathbb{R}^\star, \cdot)$.

(ii) $u \in G \Rightarrow 1 = N(1) = N(u)N(u^{-1}) \Rightarrow N(u) = \pm 1$ car $(N(u), N(u^{-1})) \in \mathbb{Z}^2$.

Inversement, soit $u \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ tel que $|N(u)| = 1$. L'élément $v = \frac{u}{N(u)}$ est dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ et $uv = 1$. Donc $u \in G$. Ainsi $G = \{u \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \mid |N(u)| = 1\}$.

f. (i) Si $u = a + b\sqrt{d}$, $a \geq 1$ et $b \geq 0$, alors $u \geq 1$.

Inversement, soit $u = a + b\sqrt{d} \in G$ et $u \geq 1$. On a $\frac{1}{u} = \frac{a - b\sqrt{d}}{N(u)}$. Puisque

$$N(u) = \pm 1, \text{ on a } \left\{u, -u, \frac{1}{u}, -\frac{1}{u}\right\} = \{a + b\sqrt{d}, -a + b\sqrt{d}, a - b\sqrt{d}, -a - b\sqrt{d}\}.$$

Le maximum de cet ensemble est $|a| + |b|\sqrt{d}$. C'est aussi u car $-u, \frac{1}{u}, -\frac{1}{u}$ sont tous $\leq 1 \leq u$. Donc $a = |a|$ et $b = |b|$. Ainsi, $a \geq 0$ et $b \geq 0$. Si $\frac{1}{u} = 0$, alors $u = b\sqrt{d}$, donc $N(u) = b^2d \neq 1$ ce qui est absurde. Donc $a \geq 1$.

(ii) Soit $u = a + b\sqrt{d} \in G^+ \cap [1, M]$. Comme $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on a : $a \leq M$ et $b \leq \frac{M}{\sqrt{d}}$.

Donc $(a, b) \in [0, \lfloor M \rfloor] \times [0, \lfloor M/\sqrt{d} \rfloor]$. Donc $G^+ \cap [1, M]$ est fini.

(iii) Si $G^+ = \{1\}$ il est monogène. Supposons $G^+ \neq \{1\}$.

Soit $u \in G^+ \setminus \{1\}$. Soit $v = \max\left(u, \frac{1}{u}\right) \in G^+$. Alors $1 < v$. L'ensemble $G^+ \cap]1, v]$ est fini non vide. Il possède donc un plus petit élément ω et l'on a $\omega = \min(G^+ \cap]1, +\infty[)$.

Montrons que ω engendre G^+ . Soit $x \in G^+$. La suite $(\omega^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ croît de 0 à $+\infty$. Donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que : $\omega^n \leq x < \omega^{n+1}$. On a $1 \leq x\omega^{-n} < \omega$. Si $x\omega^{-n} \neq 1$, alors $x\omega^{-n} \in G^+ \cap]1, +\infty[$ et $x\omega^{-n} < \omega$: absurde. Donc $x\omega^{-n} = 1$ i.e. $x = \omega^n$.

4. a. Il suffit de noter que pour $m < n$, $F_n - 1 = (F_m - 1)^{2^{n-m}}$. Comme 2^{n-m} est un entier pair, par le binôme de Newton on a : $F_n - 1 = 1 + \lambda F_m$ où $\lambda \in \mathbb{Z}$. Si δ divise F_n et F_m dans $\mathbb{Z}$, alors $\delta | 2$ i.e. $|\delta| \in \{1, 2\}$. Comme F_n et F_m sont impairs, $|\delta| = 1$ i.e. $F_n \wedge F_m = 1$.

$$b. 2^{2^n} \equiv -1 \pmod{F_n} \Rightarrow (2^{2^n})^2 \equiv 1 \pmod{F_n}$$

Comme $2^{F_n} = 2 \cdot 2^{2^{2^n}} = 2 \cdot (2^n)^{2^{(2^n-n)}}$ et $2^n - n \geq 1 \Rightarrow 2^{(2^n-n)} \in 2\mathbb{N}$, on a :

$$2^{F_n} \equiv 2(-1)^{2^{(2^n-n)}} \pmod{F_n} \text{ i.e. } 2^{F_n} \equiv 2 \pmod{F_n}.$$

5. a. Vérification immédiate.

b. $I \neq \emptyset$ et $I \subset \mathcal{R}(I)$ impliquent $\mathcal{R}(I) \neq \emptyset$.

Soit $(x, y) \in (\mathcal{R}(I))^2$. Il existe $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $x^n \in I$ et $y^m \in I$. L'anneau $(A, +, \cdot)$ étant commutatif, par le binôme de Newton, on a :

$$(x - y)^{n+m-1} = ax^n + by^m \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux éléments de } A \text{ définis par :}$$

$$a = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+m-1}{k} (-1)^k y^k x^{m-1-k} \text{ et}$$

$$b = \sum_{k=m}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} (-1)^k y^{k-m} x^{n+m-1-k}.$$

Comme $(a, b) \in A^2$ et $(x^n, y^m) \in I^2$, on a : $(x - y)^{n+m-1} \in I$ et $(x - y) \in \mathcal{R}(I)$.

Enfin, si $(a, x) \in A \times \mathcal{R}(I)$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in I$.

Comme $(ax)^n = a^n x^n \in I$, donc $ax \in \mathcal{R}(I)$.

$\mathcal{R}(I)$ est bien un idéal de l'anneau $(A, +, \cdot)$.

c. D'après a. $\mathcal{R}(I) \subset \mathcal{R}(\mathcal{R}(I))$. Soit $x \in \mathcal{R}(\mathcal{R}(I))$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in \mathcal{R}(I)$; donc il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x^n)^m = x^{nm} \in I$. Donc $x \in \mathcal{R}(I)$. D'où l'inclusion inverse et l'égalité des deux ensembles.

d. Notons $X = \mathcal{R}(I) \cap \mathcal{R}(J)$, $Y = \mathcal{R}(I \cap J)$ et $Z = \mathcal{R}(IJ)$. Il suffit de prouver que $X \subset Y$, $Y \subset Z$ et $Z \subset X$.

• Montrons que $X \subset Y$. Soit $x \in X$. Il existe $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $x^n \in I$, $x^m \in J$. $(x^m, x^n) \in A \times I \Rightarrow x^{n+m} = x^m x^n \in I$; $(x^n, x^m) \in A \times J \Rightarrow x^{n+m} = x^m x^n \in J$. Donc $x^{n+m} \in I \cap J$ i.e. $x \in Y$.

• Montrons que $Y \subset Z$. Soit $y \in Y$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y^n \in I$ et $y^n \in J$. Donc $y^{2n} \in IJ$ et $y \in Z$.

• Montrons $Z \subset X$. Soit $x \in Z$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = yz$ où $(y, z) \in I \times J$. $(z, y) \in A \times I \Rightarrow x^n \in I$; $(y, z) \in A \times J \Rightarrow x^n \in J$.

Donc $x \in \mathcal{R}(I)$ et $x \in \mathcal{R}(J)$ D'où $x \in X$.

e. D'après a. on a $\mathcal{R}(I + J) \subset \mathcal{R}(\mathcal{R}(I) + \mathcal{R}(J))$. Soit $x \in \mathcal{R}(\mathcal{R}(I) + \mathcal{R}(J))$. Il existe $(n, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $x^n = y + z$, où $y^p \in I$ et $z^q \in J$. D'après le binôme de Newton on a $(y + z)^{p+q} = \lambda y^p + \mu z^q$ où $(\lambda, \mu) \in A^2$.

Comme $\lambda y^p \in I$ et $\mu z^q \in J$, on a : $(y + z)^{p+q} \in I + J$.

D'où $x^{n(p+q)} \in I + J$ et $x \in \mathcal{R}(I + J)$. On conclut alors aisément.

f. Étude du cas où $I = n\mathbb{Z}$ est un idéal de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Si $n = 0$, $\mathcal{R}(I) = \{0\}$; si $n = 1$, $\mathcal{R}(I) = \mathbb{Z}$; si $n \geq 2$, la décomposition de n en facteurs premiers s'écrit : $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$.

• $\mathcal{R}(I) \subset p_1 \dots p_k \mathbb{Z}$, car, si $x \in \mathcal{R}(I)$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^p \in n\mathbb{Z}$. Donc $n|x^p$; donc pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $p_i | x^p$; d'où $p_i | x$. Comme les p_i sont deux à deux premiers entre eux car premiers et distincts, on a $p_1 \dots p_k$ qui divise x .

• $p_1 \dots p_k \mathbb{Z} \subset \mathcal{R}(I)$. Soit $x \in p_1 \dots p_k \mathbb{Z}$. Alors $x = p_1 \dots p_k q$ où $q \in \mathbb{Z}$. Si $m = \max_{1 \leq i \leq k} (\alpha_i)$, alors $n|x^m$. Donc $x^m \in I$ i.e. $x \in \mathcal{R}(I)$.

En conclusion, $\mathcal{R}(I) = p_1 \dots p_k \mathbb{Z}$.

6. On vérifie aisément que A est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Soit $I \neq \{0\}$ un idéal de $(A, +, \cdot)$. Considérons $J = \{10^n x \mid x \in I, n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{Z}$. C'est une partie de $\mathbb{Z}$ distincte de $\{0\}$. Montrons que J est un idéal de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

• Si $(\alpha, \beta) \in J^2$, alors $\alpha = 10^m x$, $\beta = 10^n y$ avec $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $(x, y) \in I^2$.

Supposons $m \geq n$. On a : $\alpha + \beta = 10^n (10^{m-n} x + y) \in \mathbb{Z}$. Comme I est un idéal de $(A, +, \cdot)$, on a $(10^{m-n} x + y) \in I$ et donc $\alpha + \beta \in J$.

• Si $k \in \mathbb{Z}$, $k\alpha = (kx)10^m \in J$ car $x \in I \Rightarrow kx \in I$ puisque I est idéal de $(A, +, \cdot)$.

Par conséquent, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $J = q\mathbb{Z}$. Pour tout $x \in I$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n x \in J$. Donc $10^n x = qb$ où $b \in \mathbb{Z}$. D'où $x = qb10^{-n}$ avec $b10^{-n} \in A$ i.e. $I = qA = (q)$.

7. a. Si $p \in \{2, 3\}$ le résultat est immédiat. Si $p \geq 5$, p étant premier, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un corps : $x = x^{-1} \iff x^2 = \bar{1} \iff (x - \bar{1})(x + \bar{1}) = \bar{0} \iff x \in \{\bar{1}, (p-1)\}$. Dans l'ensemble $\{\bar{2}, \dots, \overline{p-2}\}$ chaque élément est l'inverse d'un autre élément du même ensemble, donc $\bar{2} \dots \overline{p-2} = \bar{1}$.

D'où : $\bar{1} \cdot (\bar{2} \dots \overline{p-2}) \cdot \overline{(p-1)} = \overline{(p-1)!} = -\bar{1}$ i.e. $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

b. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\overline{1}\overline{2}\dots\overline{(n-1)} = -\overline{1}$. Donc $\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{(n-1)}$ sont inversibles dans l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ i.e. $1, 2, \dots, (n-1)$ sont premiers avec n . Donc n est premier.

c. Si $p < n$, alors $p(p-1)$ divise $(n-1)!$. Donc $\frac{(n-1)!}{p}$ est un entier divisible par $(p-1)$, d'où le résultat. Si $p = n$, distinguons trois cas.

• Si n est premier, on déduit de a. que $\frac{(n-1)!}{n} + \frac{1}{n} = \alpha \in \mathbb{N}$.

Donc $\left\lfloor \frac{(n-1)!}{n} \right\rfloor = \alpha - 1 = \frac{(n-1)!}{n} + \frac{1}{n} - 1 = \frac{(n-1)! + (n-1)}{n}$ est un entier divisible par $(n-1)$ car $n \wedge (n-1) = 1$.

• Si $n = m^2$ et m premier, $n \geq 5 \Rightarrow m \geq 3$. Donc $1 < m < 2m < m^2 - 1 = n - 1$. D'où $(n-1)!$ est divisible par $m(2m)(n-1) = 2n(n-1)$. On conclut comme dans le cas $p < n$.

• Sinon $n = st$ où $1 < s < t < n$. Comme $n \wedge (n-1) = 1$, on a $t < (n-1)$. Donc $st(n-1) = n(n-1)$ divise $(n-1)!$ et l'on conclut comme dans le cas $p < n$.

8. a. On choisit f de degré minimal parmi l'ensemble, non vide par hypothèse, des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ annulant α . On a clairement $1 \leq \deg(f) \leq n$; Si f n'est pas irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, il ne l'est pas non plus dans $\mathbb{Z}[X]$. On peut écrire $f = P_1 P_2$ où $(P_1, P_2) \in (\mathbb{Z}[X])^2$, $1 \leq \deg[P_i] < n$, et l'on a $P_1(\alpha) = 0$ ou $P_2(\alpha) = 0$: absurde.

b. On choisit f comme en a. Comme $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\deg(f) \geq 1$. Les solutions $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ de l'inégalité $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{n+\varepsilon}}$ sont toutes, puisque $q \geq 1$, telles que $\frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$. Soit M le maximum de la fonction continue $|f'|$ sur ce segment.

D'après l'inégalité des accroissements finis, $\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq M \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$. $f \in \mathbb{Z}[X]$ et $\deg(f) = r$, donc $q^r f\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$. De plus, f irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$. Donc $\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq \frac{1}{q^r}$. D'où $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{Mq^r} \geq \frac{1}{Mq^n}$.

Si $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{n+\varepsilon}}$ alors $\frac{1}{Mq^n} \leq \frac{1}{q^{n+\varepsilon}}$, d'où $1 \leq q \leq M^{\frac{1}{\varepsilon}}$.

Comme $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq 1$ implique $|p| \leq q(1 + |\alpha|) \leq M^{\frac{1}{\varepsilon}}(1 + |\alpha|)$, il n'y a qu'un nombre fini de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $q \leq M^{\frac{1}{\varepsilon}}$ et $|p| \leq M^{\frac{1}{\varepsilon}}(1 + |\alpha|)$.

c. Soient les deux entiers $q_k = 10^{k!}$ et $p_k = \sum_{m=1}^k 10^{k!-m!}$. Comme nous le montrons à un autre exercice, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ car son développement décimal n'est pas périodique.

$$0 < x - \frac{p_k}{q_k} = \sum_{m=k+1}^{\infty} 10^{-m!} < 10^{-(k+1)!} \sum_{m=0}^{\infty} 10^{-m} = \frac{10}{9} 10^{-(k+1)!} < 2 \frac{1}{q_k^{k+1}} < \frac{1}{q_k^k}.$$

Comme, pour $n \geq 2$ fixé, et tout $\varepsilon \in]0, 1[$, les couples (p_k, q_k) , $k \geq n+1$ constituent une infinité de solutions de l'inégalité $\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{n+\varepsilon}}$, x est transcendant.

9. a. Pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$. Donc p divise $k \binom{p}{k}$. Comme p

est premier avec k pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on déduit du théorème de Gauss dans $\mathbb{Z}$ que p divise $\binom{p}{k}$.

b. Procédons à une récurrence sur n . Si $n = 1$, par le binôme de Newton, le corps étant commutatif, on a : $(a+b)^p = a^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k b^{p-k} + b^p = a^p + b^p$ d'après la question a.

Soit $n \geq 1$. Supposons le résultat vrai pour $(n-1)$. Alors :

$$(a+b)^{p^n} = \left[(a+b)^{p^{n-1}} \right]^p = (a^{p^{n-1}} + b^{p^{n-1}})^p = a^{p^n} + b^{p^n}.$$

La première égalité étant une conséquence de l'hypothèse de récurrence et la seconde du cas $n = 1$. On conclut par le théorème de récurrence.

c. On montre par récurrence que si $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ alors :

$$(a_1 + \dots + a_n)^p = a_1^p + \dots + a_n^p.$$

Posons $a_1 = \dots = a_n = \bar{1}$. On a : $\overline{n^p} = \bar{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{Z}, n^p \equiv n \pmod{p}$.

10. Notons $E_n = \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ si $n \geq 2$. On sait que E_n est un groupe multiplicatif d'ordre $\varphi(n)$ et que si $a \wedge n = 1$ alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, p est premier et $p > 5$.

- $p \wedge 3 = 1$ et $\varphi(3) = 2$ donc $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$, d'où $p^4 \equiv 1 \pmod{3}$.
 - $p \wedge 5 = 1$ et $\varphi(5) = 4$ donc $p^4 \equiv 1 \pmod{5}$.
 - $p \wedge 16 = 1 \Rightarrow p \in \{4k \pm 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{8}$, d'où $p^4 \equiv 1 \pmod{16}$.
- $p^4 - 1$ est divisible par 3, 5 et 16 qui sont deux à deux premiers entre eux.

Donc 240 divise $p^4 - 1$.

11. a. L'application $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, k \mapsto \bar{p}^k$ n'est pas injective, compte tenu des cardinaux de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathbb{N}^*$ tels que $F(k_0 + T) = F(k_0)$.

La suite $(\bar{p}^k)_{k \geq k_0}$ est T -périodique car, $F(k + T) = F(k)$ pour tout $k \geq k_0$.

En effet, $F(k + T) = \bar{p}^{(k+T)} = \bar{p}^{(k_0+T)} \bar{p}^{(k-k_0)} = \bar{p}^{k_0} \bar{p}^{(k-k_0)} = \bar{p}^k = F(k)$.

Si $p \wedge n = 1$ alors $\bar{p} \in E_n = \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ qui est un groupe multiplicatif d'ordre $\varphi(n)$.

La suite $(\bar{p}^k)_{k \geq k_0}$ est T -périodique où T est l'ordre de $\bar{p}$, lequel divise $\varphi(n)$.

b. $10 \equiv 3 \pmod{7}$ et $\bar{3}$ est d'ordre 6 = $\varphi(7)$ dans $(E_7, \cdot)$. Donc $10^k \equiv 10^\ell \pmod{7}$ si, et seulement si, $k \equiv \ell \pmod{6}$.

Examinons la suite $(\widetilde{10}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ où $\widetilde{10}$ est la classe de 10 dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

$\widetilde{10} \notin E_6$ car 10 n'est pas premier avec 6. Comme $\widetilde{10} = \widetilde{4} = \widetilde{4}^2$, la suite $(\widetilde{10}^k)_{k \geq 1}$ est constante et égale à $\widetilde{4}$. Donc $\bar{S} = 10 \cdot \bar{3}^4 = \bar{3}^5 = \bar{3}^{-1}$ car $\bar{3}^6 = \bar{1}$.

Or $3 \cdot 5 = 15 \equiv 1 \pmod{7}$, donc $\bar{3}^{-1} = \bar{5}$ et $S \equiv 5 \pmod{7}$.

c. Dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, $\bar{10} = -\bar{1}$ est d'ordre 2. Si $a_n a_{n-1} \dots a_0$ est l'écriture décimale de

$$x, \text{ alors : } x = \sum_{k=0}^n a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \pmod{11}.$$

Ici $x \equiv 5 \pmod{11}$ et $5 \wedge 11 = 1 \Rightarrow (\bar{5}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est T -périodique où $T \mid \varphi(11) = 10$.

Or $\bar{5}^2 = \bar{3} \Rightarrow \bar{5}^4 = \bar{9} \Rightarrow \bar{5}^5 = \bar{1}$. Donc $T = 5$.

Comme $187 \equiv 2 \pmod{5}$. Donc $x \equiv 5^2 \pmod{11}$ i.e. $\bar{x} = \bar{3}$.

12. L'application $f : \mathbb{N} \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2, k \mapsto (\overline{u_k}, \overline{u_{k+1}})$ n'est pas injective compte tenu des cardinaux de $\mathbb{N}$ et de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$. La partie non vide de $\mathbb{N}$ définie par $K = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N}^*, f(k) = f(k+p)\}$ admet un minimum k_0 . Montrons que $k_0 = 0$. Soit $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(k_0) = f(k_0 + p_0)$ et supposons $k_0 \geq 1$. On a : $\overline{u_{k_0}} = \overline{u_{k_0+p_0}}$ et $\overline{u_{k_0+1}} = \overline{u_{k_0+p_0+1}}$. Par soustraction, d'après la définition de (u_k) , on a : $\overline{u_{k_0-1}} = \overline{u_{k_0-1+p_0}}$. Donc $f(k_0 - 1) = f(k_0 + p_0 - 1)$, ce qui contredit la définition de k_0 . Donc $k_0 = 0$. Par une récurrence immédiate, on a : $\forall p \in \mathbb{N}, f(p + p_0) = f(p)$. D'où la suite $(\overline{u_k})$ est périodique.

13. Si $x = a_r \dots a_0, b_1 \dots b_p c_1 \dots c_s c_1 \dots c_s \dots$ on considère

$$y = 10^p [x - a_r \dots a_0, b_1 \dots b_p] = 0, c_1 \dots c_s c_1 \dots c_s \dots = \sum_{k=1}^{\infty} c_1 \dots c_s 10^{-ks} = \frac{c_1 \dots c_s}{10^s - 1}.$$

D'où $x = a_r \dots a_0, b_1 \dots b_p + 10^{-p}y \in \mathbb{Q}$.

Réciproque : on remplace x par $x - \lfloor x \rfloor$ ce qui ne change rien à la périodicité du développement décimal. On a : $x = \frac{a}{b} = 0, a_1 \dots a_n \dots$ où $b \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq a < b$.

Rappelons une méthode de calcul des $a_n, n \geq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, q_n = \left\lfloor \frac{10^n a}{b} \right\rfloor, 10^n a = bq_n + r_n$ où $r_n \in [0, b[$.

$10^n a = a_1 \dots a_n, a_{n+1} \dots$ et donc $q_n = a_1 \dots a_n$.

D'où $a_1 = q_1$ et pour $n \geq 2, a_n = q_n - 10q_{n-1} = r_n - 10r_{n-1}$.

L'application $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}, n \mapsto \overline{r_n}$ ne peut être injective.

Si $K = \{k \in \mathbb{N}^* \mid \exists T \geq 1, \Phi(k) = \Phi(k+T)\}$.

Soit $k_0 = \min(K)$ et $T_0 = \min\{T \in \mathbb{N}^* \mid \Phi(k_0) = \Phi(k_0+T)\}$. On a $\overline{r_{k_0+T}} = \overline{r_{k_0}}$ i.e. $10^{k_0+T}a \equiv 10^{k_0}a \pmod{b}$.

Si $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq k_0$, on a, en multipliant par $10^{k-k_0} : 10^{k+T} \equiv 10^k a \pmod{b}$.

Donc $(r_k)_{k \geq k_0}$ est T -périodique, $(a_k)_{k \geq k_0+1}$ est T -périodique, autrement dit, $(a_k)_{k \geq 1}$ est T -périodique à partir du rang $k_0 + 1$.

14. a. $(g^p)^k = e \iff g^{kp} = e \iff pk \in (pq)\mathbb{Z} \iff k \in q\mathbb{Z}$.

b. Considérons $x = gh$. Alors $x^{pq} = (g^p)^q (h^q)^p = e$. Donc r l'ordre de x divise pq .

D'autre part, $x^{rp} = e \Rightarrow (g^p)^r h^{pr} = h^{pr} = e \Rightarrow q \mid (pr)$. Comme $p \wedge q = 1$, on a $q \mid r$ d'après le théorème de Gauss. De même, $p \mid r$. Finalement, $r = pq$.

c. Soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ où les p_i sont deux à deux distincts, la décomposition de n en facteurs premiers.

Si $i \in [1, r]$, G admet un élément d'ordre $p_i^{\alpha_i} \cdot q_i$ où $p_i \wedge q_i = 1$ par définition du ppccm des ordres. Notons g_i un tel élément. D'après a. $g_i^{q_i}$ est d'ordre $p_i^{\alpha_i}$, d'après

la question b. et une récurrence, $\prod_{i=1}^r g_i^{q_i}$ est d'ordre n .

TRAVAUX DIRIGÉS

• Dévissage du groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (MP*)

Il résulte du théorème chinois que si $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ s'écrit $n = m_1 \dots m_r$ où $m_i = p_i^{\alpha_i}$ avec les p_i premiers distincts et les α_i dans $\mathbb{N}^*$, les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z}$ sont isomorphes. Il s'ensuit l'isomorphisme entre les groupes multiplicatifs E_n et $E_{m_1} \times \dots \times E_{m_r}$ où $E_k = \mathcal{U}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$. Nous allons étudier la structure de E_{p^α} pour p entier naturel premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

1. Cas où $\alpha = 1$.

- Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est cyclique.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout diviseur d de n , il existe un unique sous-groupe C_d de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ de cardinal d ; C_d est engendré par $\pi_n\left(\frac{n}{d}\right)$.
- Soit $(G, \cdot)$ un groupe d'ordre n vérifiant : si $d|n$ alors le cardinal de $\{x \in G \mid x^d = 1_G\}$ est inférieur ou égal à d . Montrer que G est cyclique. On pourra considérer l'ensemble H_d des x de G d'ordre égal à d .
- Déduire de 1.b) et 1.c) que si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un corps fini de cardinal n , alors $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ est un groupe cyclique isomorphe à $(\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}, +)$.
- Que dire de E_p si p est un nombre premier ?

2. Cas où p est premier et impair.

- Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, (1+p)^{p^k} \equiv 1 + p^{k+1} \pmod{p^{k+2}}$.
- Déterminer l'ordre de $(1+p)$ dans E_{p^α} où $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
- Soient a et b deux éléments d'ordre p et q d'un groupe $(G, \cdot)$. Si $a.b = b.a$ et si $p \wedge q = 1$, montrer que $a.b$ est d'ordre pq .
- Montrer que $(E_{p^\alpha}, \cdot)$ est un groupe cyclique.

3. Cas où $p = 2$.

- Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, 5^{2^k} \equiv 1 + 2^{k+2} \pmod{2^{k+3}}$.
- Quel est l'ordre de 5 dans E_{2^α} où α est entier et $\alpha \geq 3$?
- Montrer que $(E_{2^\alpha}, \cdot)$ n'est pas cyclique pour $\alpha \geq 3$.

- Soient $(H, \cdot)$ et $(K, \cdot)$ deux groupes finis $h \in H, k \in K$. Montrer que l'ordre de (h, k) dans le groupe $(H \times K, \cdot)$ est le ppcm des ordres de h et k .
 - Montrer que le groupe produit de deux groupes cycliques H et K est cyclique si, et seulement si, leurs ordres sont premiers entre eux.
 - Déterminer $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ tel que $(E_n, \cdot)$ soit cyclique.

Solution

1. a. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Rappelons que π_n est la surjection canonique : $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, x \mapsto \bar{x}$. L'image réciproque de H par π_n étant un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\pi_n^{-1}(H) = p\mathbb{Z} = (p)$.

Donc $\pi_n(\pi_n^{-1}(h)) = (\bar{p}) = \bar{p}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Par définition $\pi_n(\pi_n^{-1}(H)) \subset H$. Comme π_n est surjective, $H = \pi_n(\pi_n^{-1}(H))$. Donc $H = (\bar{p})$ i.e. le résultat.

b. Si C_d existe, il est cyclique d'après 1.a. Posons $n = pd$. Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que $C_d = (\bar{x})$. Comme $\text{Card}[C_d] = d$, on a $\overline{dx} = \bar{0}$ i.e. $n \mid dx$; d'où $p \mid x$ i.e. $C_d \subset (\bar{p})$. D'autre part $\bar{p}$ est clairement d'ordre d . Donc $\text{Card}[(\bar{p})] = d = \text{Card}[C_d]$; d'où $C_d = (\bar{p})$. Réciproquement, $C_d = (\bar{p})$ est bien solution.

c. Soit d un diviseur de n ; s'il existe $x \in G$ d'ordre d , alors $(x) = \{y \in G \mid y^d = 1_G\}$ car (x) est de cardinal d et $(x) \subset \{y \in G \mid y^d = 1_G\}$. Donc si $d \mid n$, le cardinal de H_d est égal à 0 ou $\varphi(d)$. Comme $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$, le cardinal de H_d est systématiquement

égal à $\varphi(d)$ car G est réunion disjointe des H_d pour d divisant n . En particulier $\text{Card}(H_n) = \varphi(n) \geq 1$ et G est cyclique.

d. Quel que soit d un diviseur de $(n-1)$, l'ensemble des x de $\mathbb{K}^*$ tels que $x^d = 1_{\mathbb{K}}$ admet au plus d solutions; d'après 1.c) le groupe $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ est cyclique donc isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}, +)$ puisque $\mathbb{K}^*$ est de cardinal $(n-1)$.

e. Si p est premier, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un corps de cardinal p . Donc le groupe $(E_p, \cdot)$ est cyclique et isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}, +)$.

2. a. Faisons un raisonnement par récurrence.

Posons $\mathcal{HR}_k : (1+p)^{p^k} \equiv 1 + p^{k+1} \pmod{p^{k+2}}$.

$\mathcal{HR}_0$ est vérifiée. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{HR}_k$. Avec le binôme de Newton on a : $(1+p)^{p^{k+1}} = [(1+p)^{p^k}]^p = [1 + p^{k+1} + \lambda p^{k+2}]^p = [1 + p^{k+1}(1 + \lambda p)]^p$ où $\lambda \in \mathbb{N}$.

$$(1+p)^{p^{k+1}} = 1 + p \cdot p^{k+1}(1 + \lambda p) + \sum_{m=2}^p \binom{p}{m} [p^{k+1}(1 + \lambda p)]^m.$$

$$\mathcal{HR}_k \Rightarrow (1+p)^{p^{k+1}} \equiv 1 + p^{k+2} \pmod{p^{k+3}}.$$

D'où $\mathcal{HR}_{k+1}$ et le résultat par théorème de récurrence.

b. Comme $(1+p)^{p^{\alpha-1}} \equiv 1 + p^{\alpha} \pmod{p^{\alpha+1}}$, l'ordre de $(1+p)$ dans $E_{p^{\alpha}}$ est un diviseur de $p^{\alpha-1}$ et donc de la forme p^k où $k \in \llbracket 1, \alpha-1 \rrbracket$. Comme $(1+p)^{p^{\alpha-2}} \equiv 1 + p^{\alpha-1} \pmod{p^{\alpha}}$, n'est pas congru à 1 modulo p^{α} , l'ordre de $(1+p)$ dans $E_{p^{\alpha}}$ est $p^{\alpha-1}$.

c. $a.b = b.a \Rightarrow (a.b)^{pq} = a^{pq}.b^{pq} = 1$ car $a^p = 1 = b^q$. Donc l'ordre d de $a.b$ divise pq . Inversement, si $(a.b)^n = 1 = a^n.b^n$ alors $1 = a^{nq}.b^{nq}$; donc $a^{nq} = 1$; d'où $p \mid nq$. Comme $p \wedge q = 1$, on a $pq \mid n$. D'où la conclusion.

d. $(E_{p^{\alpha}}, \cdot)$ est un groupe de cardinal $\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha-1}(p-1)$ et possède un élément d'ordre $p^{\alpha-1}$. Soit $a \in \mathbb{Z}$ dont la classe modulo p i.e. $\pi_p(a)$ est un générateur de E_p . Si k est l'ordre de $\bar{a}$ dans $E_{p^{\alpha}}$, alors $a^k \equiv 1 \pmod{p^{\alpha}}$; donc $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ i.e. $\pi_p(a^k) = \pi_p(1) = \pi_p(a^{p-1})$ d'après la définition de a et car E_p a $(p-1)$ éléments. Donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $k = m(p-1)$. Soit $b = a^m$; l'ordre de b dans $E_{p^{\alpha}}$ est $(p-1)$. Comme p^{α} et $(p-1)$ sont premiers entre eux, d'après 2.c), l'ordre de $(1+p)b$ dans $E_{p^{\alpha}}$ est $(p-1)p^{\alpha-1} = \varphi(p^{\alpha})$. Donc le groupe $(E_{p^{\alpha}}, \cdot)$ est cyclique et l'un de ses générateurs est $(1+p)b$.

3. a. Procédons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ comme en 2.a.

Soit $\mathcal{HR}_k : 5^{2^k} \equiv 1 + 2^{k+2} \pmod{2^{k+3}}$.

$\mathcal{HR}_0$ est vérifiée.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{HR}_k$. Alors il existe $\mu \in \mathbb{Z}$ tel que $5^{2^k} = 1 + 2^{k+2}(1 + 2\mu)$.
 $5^{2^{k+1}} = (5^{2^k})^2 = 1 + 2^{k+3}(1 + 2\mu) + 2^{2k+4}(1 + 2\mu)^2$.

Donc $5^{2^{k+1}} \equiv 1 + 2^{k+3} \pmod{2^{k+4}}$ ie. $\mathcal{HR}_{k+1}$.

D'où la conclusion par théorème de récurrence.

b. Pour $k \geq 3$, $5^{2^{\alpha-3}} \equiv 1 + 2^{\alpha-1} \pmod{2^\alpha}$. Donc $5^{2^{\alpha-3}}$ n'est pas congru à 1 modulo 2^α . D'où l'ordre de $\bar{5}$ dans E_{2^α} est $2^{\alpha-2}$ et celui de $\bar{-1}$ est égal à 2.

c. Notons que $\bar{-1} \notin \langle \bar{5} \rangle$. En effet, si c'était le cas, il existerait $j \in \mathbb{N}$ tel que $5^j \equiv -1 \pmod{2^\alpha}$. On aurait alors $1 \equiv -1 \pmod{4}$. Soit G le sous-groupe de E_{2^α} engendré par $\bar{-1}$ et $\bar{5}$. On a $\langle \bar{5} \rangle$ strictement contenu dans G et $G \subset E_{2^\alpha}$. Or $\text{Card}[\langle \bar{5} \rangle] = 2^{\alpha-2}$ et $\text{Card}[E_{2^\alpha}] = 2^{\alpha-1}$. Donc $2^{\alpha-2} < \text{Card}[G] \leq 2^{\alpha-1}$. Comme $\text{Card}[G]$ divise $\text{Card}[E_{2^\alpha}]$, on a $G = E_{2^\alpha}$ et n'est pas cyclique puisqu'il existe x de G tel que $x^{2^{\alpha-1}} \neq \bar{1}$.

4. a. Soit n, r, s les ordres respectifs de (h, k) , h et k .

$(1_H, 1_K) = (h, k)^n = (h^n, k^n) \Rightarrow [h^n = 1_H \text{ et } k^n = 1_K]$.

Donc $r|n$ et $s|n$. D'où $\text{ppcm}(r, s) = t$ divise n .

Comme $t = rr' = ss'$, on a $: (h, k)^t = ((h^r)^{r'}, (k^s)^{s'}) = (1_H, 1_K)$.

Donc t est l'ordre de (h, k) dans $H \times K$.

b. Notons $\text{Card}[H] = r$ et $\text{Card}[K] = s$. Le groupe produit $H \times K$ est cyclique si, et seulement si, il existe $(h, k) \in H \times K$ d'ordre rs . Notons $o(x)$ l'ordre d'un élément x . On a $rs = o((h, k)) \iff rs = \text{ppcm}(o(h), o(k))$ (*)

Or $r = r'o(h)$ et $s = s'o(k)$. Donc (*) $\iff r's'o(h)o(k) = o(h)o(k)$. Donc (*) $\iff r' = s' = 1$ ie. ($r = o(h)$ et $s = o(k)$) ie. $rs = \text{ppcm}(r, s)$ ce qui équivaut à $\text{pgcd}(r, s) = 1$.

c. On vérifie aisément que $E_2 = \{\bar{1}\}$ et $E_4 = \{\bar{1}, \bar{4}\}$ sont cycliques.

Si $\alpha \geq 3$, E_{2^α} n'est pas cyclique d'après 3.

Si p est premier et $p \geq 3$, E_{p^α} est cyclique d'après 2.d.

Si p est premier et $p \geq 3$, E_{2p^α} est cyclique d'après 4.b).

En utilisant les notations du début du problème, E_n est cyclique si, et seulement si, les E_{m_i} le sont puisque les m_i sont deux à deux premiers entre eux et compte tenu de 4b). Ceci impose que n admet au plus un diviseur premier impair puisque $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$ est pair si $p \geq 3$. Si de plus n admet 2 diviseurs premiers, l'un d'eux doit être égal à 2 et d'exposant 1 dans la décomposition de n en facteurs premiers car $\varphi(2^\beta) = 2^{\beta-1}$, $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$ et $(p-1) \wedge 2^{\beta-1} = 1$.

En conclusion, E_n est cyclique si, et seulement si, $n \in \{2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha\}$ où p est un nombre premier impair.

• Polynômes cyclotomiques

Soit $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{\omega^k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$.

On note $\mathcal{P}_n = \{\omega^k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et } k \wedge n = 1\}$ l'ensemble des racines primitives n -ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. On rappelle que $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des générateurs du groupe $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ et que $\text{Card}[\mathcal{P}_n] = \varphi(n)$ où φ est la fonction indicatrice d'Euler.

I. Questions préliminaires

1. Polynômes et arithmétique. Si $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{Q}[X]$, on définit son « contenu » c_P de la façon suivante : on réduit toutes les fractions a_j au même dénominateur d , on met en facteur le pgcd δ des numérateurs de ces fractions ainsi réduites. Alors $c_P = \frac{\delta}{d}$.

a. Montrer que $c_P = \pm \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{\alpha_p(a_j) \mid 0 \leq j \leq n\}}$ où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des

nombre premiers et où $\alpha_p(a_j)$ est l'exposant (positif, négatif ou nul) de p dans la décomposition de a_j en facteurs premiers.

b. Prouver que $c_{PQ} = c_P c_Q$.

c. En déduire que si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

d. Critère d'irréductibilité d'Eisenstein.

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que s'il existe un nombre premier p vérifiant les trois conditions :

(i) $p \nmid a_n$, (ii) $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, p \mid a_i$, (iii) $p^2 \nmid a_0$,

alors P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

2. Fonction de Möbius. Soient f et g deux applications de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(f \star g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$.

a. Montrer que $\star$ est associative.

b. Soit $\mu : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ si n contient un facteur carré ; $\mu(n) = (-1)^r$ si $n = p_1 \dots p_r$ où les p_i , $1 \leq i \leq r$ sont des nombres premiers distincts. On note $f_0 : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto 1$. Calculer $f_0 \star \mu$.

c. En déduire la « formule d'inversion de Möbius » :

$$g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \Rightarrow f(n) = \sum_{d \mid n} g(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

d. Montrer que $\varphi(n) = \sum_{d \mid n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II. Polynômes cyclotomiques

On pose $\Phi_n(X) = \prod_{\xi \in \mathcal{P}_n} (X - \xi) \in \mathbb{C}[X]$ le n -ième polynôme cyclotomique.

On a $\deg(\Phi_n) = \varphi(n)$ et $\Phi_1(X) = X - 1$.

1. Montrer que $X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(X)$.

2. En utilisant I.1. et une récurrence, montrer que $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

3. Montrer que $\Phi_n(X) = \prod_{d|n} (X^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$. On pourra utiliser la fonction $\ln$

4. Calcul des polynômes Φ_n . On note p un nombre premier.

a. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\Phi_{p^\alpha}(X) = \sum_{k=0}^{p-1} X^{kp^{\alpha-1}}$

b. Si de plus p est impair, $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\Phi_{2^\alpha p^\beta}(X) = \frac{X^{2^{\alpha-1} p^\beta} + 1}{X^{2^{\alpha-1} p^{\beta-1}} + 1} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k X^{k 2^{\alpha-1} p^{\beta-1}}.$$

c. Si $p \nmid n$, montrer que $\Phi_{np}(X) = \frac{\Phi_n(X^p)}{\Phi_n(X)}$.

d. Calculer Φ_{12} , Φ_{60} et Φ_{72} .

5. Si p est premier, montrer que Φ_p est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et dans $\mathbb{Q}[X]$.
On examinera $\Phi_p(X+1)$.

Solution

Partie I

1. a. Notons $P = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^p \alpha_k X^k$ où $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}^*$. Alors : $P = \frac{\delta}{m} \sum_{k=0}^p \alpha'_k X^k$ où

$\delta = \text{pgcd}(\alpha_i)$ et les α'_i sont premiers entre eux dans leur ensemble. D'où $c_P = \frac{\delta}{m}$ et le résultat par décomposition de δ et m en facteurs premiers.

b. $P(X) = c_P P_1(X)$ où $P_1 \in \mathbb{Z}[X]$ et est à coefficients premiers entre eux dans leur ensemble. $Q(X) = c_Q Q_1(X)$ où $Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ et est à coefficients premiers entre eux dans leur ensemble. Donc $PQ = c_P c_Q P_1 Q_1$. Pour conclure, il suffit de montrer que le polynôme $P_1 Q_1$ de $\mathbb{Z}[X]$ est à coefficients premiers entre eux dans leur ensemble.

$$P_1(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i X^i \text{ et } Q_1(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i X^i \text{ où } \beta_i = 0 \text{ si } i > p_1 \text{ et } \gamma_i = 0 \text{ si } i > q_1.$$

Soit d un nombre premier, il existe au moins un élément de $(\beta_0, \dots, \beta_{p_1})$ non divisible par d . Soit $j = \min\{i \in \llbracket 0, p_1 \rrbracket \mid d \nmid \beta_i\}$. Soit $k = \min\{i \in \llbracket 0, q_1 \rrbracket \mid d \nmid \gamma_i\}$. Le coefficient de X^{j+k} dans $P_1 Q_1$ s'écrit :

$$\alpha_j \beta_k + [\alpha_{j-1} \beta_{j+1} + \dots + \alpha_0 \beta_{j+k}] + [\alpha_{j+1} \beta_{k-1} + \dots + \alpha_{j+k} \beta_0].$$

Les deux termes entre crochets sont divisibles par d et pas $\alpha_j \beta_k$. Donc d ne divise pas le coefficient de X^{j+k} . Ceci est vrai quel que soit le nombre premier d , les coefficients de $P_1 Q_1$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

c. Si $P = RT \in \mathbb{Z}[X]$ où R et T sont éléments de $\mathbb{Q}[X]$. Avec les notations de b), on a $P = c_P P_1$, $R = c_R R_1$ et $T = c_T T_1$ avec $c_P = c_R c_T$. Donc $P = c_P R_1 T_1$ où $(R_1, T_1) \in (\mathbb{Z}[X])^2$. Comme $P \in \mathbb{Z}[X]$, on a $c_P \in \mathbb{Z}$. Si P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, R_1 ou T_1 est un polynôme constant. Donc P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

d. Si $P = AB$ où $A = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_r X^r$ et $B = \beta_0 + \beta_1 X + \dots + \beta_s X^s$, $s \geq 1$, $(A, B) \in (\mathbb{Z}[X])^2$. Comme $a_0 = \alpha_0 \beta_0$. D'après (ii) $p \mid a_0$. Donc $p \mid \alpha_0$ (par exemple). De même, $p \mid \alpha_1, \dots$; il existe k tel que $p \mid \alpha_{k-1}$ et $p \nmid \alpha_k$. En effet, p ne peut diviser tous les α_i , sinon il diviserait $a_n = \alpha_r \beta_s$. Donc :

$$a_k = \alpha_0 \beta_k + \alpha_1 \beta_{k-1} + \cdots + \alpha_{k-1} \beta_1 + \alpha_k \beta_0 \equiv \alpha_k \beta_0 \pmod{p}.$$

Comme $k \leq r < n$, on a $a_k \neq a_n$. Donc $p|a_k$ *a fortiori* $p|\alpha_k \beta_0$. Or p est premier et $p \nmid \alpha_k$, donc $p|\beta_0$. Par suite, $p^2|a_0$ ce qui contredit (iii).

$$2. \text{ a. } (f \star g)(n) = \sum_{dd'=n} f(d)g(d') \Rightarrow [(f \star g) \star h](n) = \sum_{dd'=n} (f \star g)(d)h(d').$$

$$[(f \star g) \star h](n) = \sum_{dd'=n} \sum_{st=d} f(s)g(t)h(d') = \sum_{std'=n} f(s)g(t)h(d').$$

$$[(f \star g) \star h](n) = \sum_{sd''=n} f(s) \sum_{td'=d''} g(t)h(d') = \sum_{sd''=n} f(s)(g \star h)(d'').$$

D'où $[(f \star g) \star h](n) = [f \star (g \star h)](n)$ et $\star$ est associative.

$$\text{b. } (f_0 \star \mu)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f_0\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \text{ par définition de } f_0.$$

Décomposé en facteurs premiers, n s'écrit : $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ où les p_i sont deux à deux distincts. Dans la somme précédente, seuls les d s'écrivant $d = p_{\beta_1} \dots p_{\beta_k}$ où les β_i sont éléments distincts de $\llbracket 1, s \rrbracket$ seront pris en compte puisque si l'un des α_i est supérieur ou égal à 2, alors $\mu(d) = 0$.

$$(f_0 \star \mu)(n) = \sum_{d=p_{\beta_1} \dots p_{\beta_k}} \mu(d) = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{s}{k} (-1)^k = (1-1)^s = 0 \text{ car } s \geq 1.$$

En effet, $\mu(p_{\beta_1} \dots p_{\beta_k}) = (-1)^k$ et il y a $\binom{s}{k}$ façons de choisir k éléments distincts dans $\{p_1, \dots, p_s\}$. Donc $(f_0 \star \mu)(n) = 1$ si $n = 1$ et 0 si $n > 1$.

$$\text{c. } g(n) = \sum_{d|n} f(d) = (f \star f_0)(n). \text{ Donc } g \star \mu = (f \star f_0) \star \mu = f \star (f_0 \star \mu).$$

$$\text{Donc } (g \star \mu)(n) = \sum_{dd'=n} f(d)(f_0 \star \mu)(d') = f(n) \text{ d'après I.2.b.}$$

$$\text{Or } (g \star \mu)(n) = \sum_{d|n} g(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right), \text{ d'où le résultat.}$$

d. Comme $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, le résultat précédent avec $g(x) = x$ et $f = \varphi$ permet de conclure.

Partie II

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $(\mathcal{P}_d)_{d|n}$ forme une partition de $\mathbb{U}_n$, on a :

$$\prod_{d|n} \Phi_d(X) = \prod_{d|n} \prod_{\xi \in \mathcal{P}_d} (X - \xi) = \prod_{\xi \in \mathbb{U}_n} (X - \xi) = X^n - 1.$$

2. $\Phi_1(X) = X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Supposons pour tout $k < n$, $\Phi_k \in \mathbb{Z}[X]$ et est unitaire.

Alors $Q(X) = \prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} \Phi_k(X) \in \mathbb{Z}[X]$ et $\Phi_n(X)Q(X) = X^n - 1$ d'après II.1.

$Q(X)$ divise $X^n - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$ donc $\Phi_n \in \mathbb{Q}[X]$. Avec les notations de I.1.

$c_{X^n-1} = 1 = c_{\Phi_n} c_Q$. Or $c_Q = 1$ puisque $Q \in \mathbb{Z}[X]$ et a pour coefficient dominant 1. Donc $c_{\Phi_n} = 1$ et $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ et est unitaire. Le résultat demandé est prouvé par récurrence.

3. $\Phi_d(X)$ est unitaire, donc : $\exists A \in]1, +\infty[, \forall x \in]A, +\infty[, \forall d|n, \Phi_n(x) > 0$.

Pour x fixé dans $]A, +\infty[$, posons $f(n) = \ln(x^n - 1)$ et $g(n) = \ln[\Phi_n(x)]$.

D'après II.1. on a : $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$. On déduit de I.2. que :

$\ln [\Phi_n(x)] = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \ln(x^d - 1)$. Donc $\Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$.

Ceci étant vrai quel que soit x élément de $]A, +\infty[$ qui est une partie infinie de $\mathbb{R}$, comme Φ_n et $\prod_{d|n} (X^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$ sont des polynômes, le résultat est prouvé.

4. a. Comme p est premier, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_{p^\alpha} \setminus \mathbb{U}_{p^{\alpha-1}} = \mathcal{P}_{p^\alpha}$.

$$\text{Donc } \Phi_{p^\alpha}(X) = \frac{X^{p^\alpha} - 1}{X^{p^{\alpha-1}} - 1} = \sum_{k=0}^{p-1} X^{kp^{\alpha-1}}.$$

$$\text{b. On déduit de II.3. } \Phi_{2^\alpha p^\beta}(X) = \frac{X^{2^\alpha p^\beta} - 1}{X^{2^{\alpha-1} p^\beta} - 1} \cdot \frac{X^{2^{\alpha-1} p^{\beta-1}} - 1}{X^{2^\alpha p^{\beta-1}} - 1}.$$

Comme $X^{2^\alpha p^{\beta-1}} - 1 = (X^{2^{\alpha-1} p^{\beta-1}} - 1)(X^{2^\alpha p^{\beta-1}} + 1)$,

et $X^{2^\alpha p^\beta} - 1 = (X^{2^{\alpha-1} p^\beta} - 1)(X^{2^{\alpha-1} p^\beta} + 1)$, on a le résultat car p est impair.

c. Les résultats demandés, conséquences de II.3. peuvent se prouver directement.

$P(X) = \frac{\Phi_n(X^p)}{\Phi_n(X)} \in \mathbb{Q}[X]$. En effet Φ_n n'a que des racines simples. Si ξ est l'une d'elles, ξ^p en est une autre car $p \wedge n = 1$ et ξ est une racine primitive n -ième de l'unité dans $\mathbb{C}$. Donc $\Phi_n(\xi^p) = 0$. P est unitaire car Φ_n et $\Phi_n(X^p)$ le sont. $\deg(P) = p\varphi(n) - \varphi(n) = (p-1)\varphi(n) = \varphi(p)\varphi(n) = \varphi(np)$ car $n \wedge p = 1$. Donc P et Φ_{np} ont même degré. Or $\Phi_{np}(x) = 0$ implique que x est racine np -ième de l'unité. Donc x n'est pas racine n -ième de l'unité. Donc $\Phi_n(x) \neq 0$ et l'ordre de x^p est $\frac{np}{p \wedge np} = n$. Donc $\Phi_n(x^p) = 0$ et $P(x) = 0$.

d. $12 = 2^2 \cdot 3$. D'où, d'après 4.b), $\Phi_{12}(X) = 1 - X^2 + X^4$.

De même, $72 = 2^3 \cdot 3^2$. D'où : $\Phi_{72}(X) = 1 - X^{12} + X^{24}$.

$60 = 12 \cdot 5$. D'où, d'après 4.c), $\Phi_{60}(X) = \frac{\Phi_{12}(X^5)}{\Phi_{12}(X)} = \frac{X^{20} - X^{10} + 1}{X^4 - X^2 + 1}$ et après division euclidienne, $\Phi_{60}(X) = X^{16} + X^{14} - X^{10} - X^8 - X^6 + X^2 + 1$.

Remarque : il faut calculer Φ_{105} pour trouver un coefficient d'un polynôme Φ_n distinct de ± 1 en l'occurrence égal à -2 .

$$5. \Phi_p(X) = \sum_{k=0}^{p-1} X^k = \frac{X^p - 1}{X - 1}. \text{ Donc}$$

$$\Phi_p(X+1) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} = X^{p-1} + \binom{p}{1} X^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-2} X + \binom{p}{p-1}.$$

Nous avons vu dans l'exercice 9. que $p \mid \binom{p}{k}$ si $1 \leq k \leq p-1$ car p est premier.

D'après la question I.1.d) le polynôme Φ_p est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ donc Φ_p est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ d'après la question I.1.c).

• Corps des quaternions ; théorème des quatre carrés

Partie I

Soit $e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ et l'on note H le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel engendré par ces matrices. On vérifie : $e_0 e_k = e_k e_0 = e_k$ si $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$; $e_k^2 = -e_0$ si $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$; $e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3$; $e_3 e_1 = -e_1 e_3 = e_2$; $e_2 e_3 = -e_3 e_2 = e_1$.

1. Déterminer $\dim_{\mathbb{R}}(H)$. Un élément de H est appelé un **quaternion**.

2. Si $X = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ et $Y = y_0 e_0 + y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$, exprimer XY dans la base $(e_k)_{0 \leq k \leq 3}$ de H . Structure de H ?

3. On pose $\bar{X} = x_0 e_0 - x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3$. Comparer $\overline{XY}$ et $\bar{Y} \bar{X}$.

4. Prouver que $N : H \rightarrow \mathbb{R}_+$, $X \mapsto \sqrt{\alpha}$ où $X \bar{X} = \alpha e_0$ est une norme et que l'on a : $N(XY) = N(X)N(Y)$.

5. Prouver que tout élément non nul de H est inversible dans $(H, \cdot)$.

Partie II : application au théorème des quatre carrés

On se propose de prouver le résultat suivant : tout entier naturel est somme de quatre carrés d'entiers (certains pouvant être nuls).

1. Dédurre de I.3. que si m et n sont sommes de quatre carrés d'entiers, il en est de même de mn . Montrer qu'il suffit de prouver le résultat pour p premier et traiter le cas $p = 2$. On suppose dorénavant p premier impair.

2. a. Soit $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$ et soit $\mathcal{E}$ l'image par $f \circ \pi_p$ de $\llbracket 0, \frac{p-1}{2} \rrbracket$. Quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$?

b. Soit $g : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $x \mapsto -(\bar{1} + x^2)$ et soit $\mathcal{F}$ l'image par $g \circ \pi_p$ de $\llbracket 0, \frac{p-1}{2} \rrbracket$. Quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$?

c. Dédurre de 2.a. et b. que : $\exists (x, y) \in \llbracket 0, \frac{p-1}{2} \rrbracket^2$, $\pi_p(x^2 + y^2 + 1) = \bar{0}$.

3. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des $m \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tels que mp soit somme de quatre carrés d'entiers. Montrer que $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Soit $m_0 \in \mathcal{M}$. Notons $m_0 p = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

4. Prouver que si m_0 est pair, à une permutation des indices près, x_0 et x_1 sont de même parité ainsi que x_2 et x_3 . En déduire que $\frac{m_0}{2} \in \mathcal{M}$.

5. Supposons m_0 impair et $m_0 > 1$.

a. Prouver l'existence d'un entier u_i tel que $\left| \frac{x_i}{m_0} - u_i \right| < \frac{1}{2}$. On pose $y_i = x_i - m_0 u_i$. Prouver que $m_0 p \equiv y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \pmod{m_0}$ et qu'il existe $m' \in \llbracket 1, m_0 \rrbracket$ tel que $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = m_0 m'$.

b. Reprenant les notations de I.2. les x_i et y_i étant ceux II.5. a., on dira que deux éléments T_1 et T_2 de H , à coefficients entiers sont congrus modulo m si leurs composantes sur (e_0, e_1, e_2, e_3) le sont ; et l'on notera $T_1 \equiv T_2 \pmod{m}$. Montrer que $X \equiv Y \pmod{m_0}$ et $X \bar{Y} \equiv X \bar{X} \equiv 0 \pmod{m_0}$. En déduire l'existence d'un quaternion T à coefficients entiers tel que $X \bar{Y} = m_0 T$. Calculer $N^2(X \bar{Y})$ en fonction de m_0, m', p puis $N^2(T)$ en fonction de m', p .

6. Conclure.

Solution**Partie I**

1. Il suffit de montrer que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ est libre pour conclure. En effet, par définition de H , $\mathcal{B}$ étant génératrice, sera base de H et l'on aura $\dim_{\mathbb{R}}(H) = 4$.

Soit $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$. On a $x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}$

Donc $x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = 0 \iff x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$ par égalité de deux matrices et car les x_k sont réels. D'où $\mathcal{B}$ est libre et la conclusion.

2. Compte tenu des résultats donnés par l'énoncé, on obtient :

$$XY = (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3)e_0 + (x_1y_0 + x_0y_1 - x_3y_2 + x_2y_3)e_1 \\ + (x_2y_0 + x_3y_1 + x_0y_2 - x_1y_3)e_2 + (x_3y_0 - x_2y_1 + x_1y_2 + x_0y_3)e_3.$$

H est une sous $\mathbb{R}$ -algèbre de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. En effet, H est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$, stable par la multiplication et $e_0 = I_2 \in H$.

Notons que la multiplication n'est pas commutative dans H puisque $e_1e_2 \neq e_2e_1$.

$$\mathbf{3.} \quad \overline{XY} = (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3)e_0 - (x_1y_0 + x_0y_1 - x_3y_2 + x_2y_3)e_1 \\ - (x_2y_0 + x_3y_1 + x_0y_2 - x_1y_3)e_2 - (x_3y_0 - x_2y_1 + x_1y_2 + x_0y_3)e_3.$$

On vérifie que $\overline{XY} = \overline{Y} \overline{X}$.

4. On déduit de 3. que $X\overline{X} = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)e_0$. Donc N est bien définie.

• $N(X) = 0 \iff x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$ car les x_k sont réels. D'où $X = 0$.

N est une norme car l'application $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^4$.

$$N^2(XY)e_0 = XY\overline{XY} = XY\overline{Y}\overline{X} \text{ d'après 3.}$$

$$N^2(XY)e_0 = XN^2(Y)e_0\overline{X} = N^2(Y)X\overline{X} = N^2(Y)N^2(X)e_0.$$

Comme N est à valeurs positives, $N(XY) = N(Y)N(X) = N(X)N(Y)$ car la multiplication est commutative dans $\mathbb{R}$.

5. Si $X \neq 0$ alors $N(X) \neq 0$. Soit $X' = \frac{\overline{X}}{N(X)}$. On a $XX' = X'X = e_0$.

D'où le résultat.

Partie II

1. Notons qu'une somme de quatre carrés d'entiers est le carré de la norme d'un quaternion à coefficients réels entiers. Il existe donc X et Y éléments de H tels que $n = N^2(X)$ et $m = N^2(Y)$. Donc $mn = [N(X)N(Y)]^2 = N^2(XY) = N^2(Z)$ où $Z = XY \in H$. On est ramené à prouver le théorème pour chaque facteur intervenant dans la décomposition de $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ en facteur premier, donc dans le cas où p est premier. Si $p = 2$, on a $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$.

2. a. Montrons que $f \circ \pi_p$ est injective. On en déduira $\text{Card}(\mathcal{E}) = \frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p+1}{2}$.

$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ étant un corps commutatif, $x^2 = y^2$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si, et seulement si, $(x - y)(x + y) = \overline{0}$ i.e. si, et seulement si, $x = y$ ou $x = -y$.

Si $(m, n) \in \llbracket 0, p \rrbracket^2$, $\pi_p(m) = \pi_p(n) \iff m = n$ car π_p est injective sur $\llbracket 0, p \rrbracket$.

Or $\pi_p(m) = -\pi_p(n) \Rightarrow \pi_p(m) = \pi_p(n_1)$ où $n_1 \in \llbracket \frac{p+1}{2}, p \rrbracket$ si $n \in \llbracket 0, \frac{p-1}{2} \rrbracket$. Donc $\pi_p(m) = \pi_p(n_1)$ implique $m = n_1$ ce qui est impossible.

Donc $f \circ \pi_p(m) = f \circ \pi_p(n) \Rightarrow n = m$ i.e. $f \circ \pi_p$ est injective.

b. De même $g \circ \pi_p$ est injective, car $g \circ \pi_p(m) = g \circ \pi_p(n) \iff f \circ \pi_p(m) = f \circ \pi_p(n)$.

Donc $\text{Card}[\mathcal{F}] = \text{Card}[\mathcal{E}]$.

c. Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ étaient disjoints, $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ aurait $\frac{p+1}{2} + \frac{p+1}{2} = p+1$ éléments, ce qui est impossible puisque $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ a p éléments. Donc il existe $a \in \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$. D'où il existe $(x, y) \in \llbracket 0, \frac{p-1}{2} \rrbracket^2$ tel que $a = f \circ \pi_p(x) = g \circ \pi_p(y)$.

Or $f \circ \pi_p(x) = (\pi_p(x))^2 = \pi_p(x^2)$ et $g \circ \pi_p(y) = -(\bar{1} + \pi_p(y^2)) = \pi_p(-1 - y^2)$.

D'où $\pi_p(x^2) = \pi_p(-1 - y^2)$ i.e. $\pi_p(x^2 + y^2 + 1) = \bar{0}$.

3. D'après 2.b) il existe $(x, y) \in \llbracket 0, \frac{p-1}{2} \rrbracket^2$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $x^2 + y^2 + 1 = mp$.

Montrons que $m < p$. On a $x^2 + y^2 + 1 \leq 2 \frac{(p-1)^2}{4} + 1$.

Or $\frac{(p-1)^2}{2} + 1 < p^2 \iff p^2 + 2p - 3 > 0 \iff (p-1)(p+3) > 0$; ce qui est vrai si $p > 2$. Donc $mp < p^2$ i.e. $m < p$. Donc $m \in \mathcal{M}$.

4. Si m_0 est pair, 2 divise $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

• Si trois des quatre x_i sont pairs, 2 divise la somme de leurs carrés; donc le carré du quatrième qui est pair.

• Si trois des quatre x_i sont impairs, la somme de leurs carrés est impaire.

Comme 2 divise la somme des quatre carrés, le carré du quatrième est impair.

Les seuls cas possibles sont pour les x_i , deux pairs et deux impairs ou tous de même parité. On peut donc supposer x_0 et x_1 , x_2 et x_3 de même parité. Il s'en suit que $\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{x_0 - x_1}{2}, \frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{x_2 - x_3}{2}$ sont entiers et $\frac{m_0}{2} \in \mathcal{M}$ car :

$$\left[\frac{x_0 + x_1}{2} \right]^2 + \left[\frac{x_0 - x_1}{2} \right]^2 + \left[\frac{x_2 + x_3}{2} \right]^2 + \left[\frac{x_2 - x_3}{2} \right]^2 = \frac{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2} = p \frac{m_0}{2}.$$

5. a. Soit $r \in \mathbb{R}$. Il existe $p = \lfloor r \rfloor \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq r < p+1$.

Sauf si $r = \frac{2p+1}{2}$, on a soit $r - p < \frac{1}{2}$ soit $p+1 - r < \frac{1}{2}$.

S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{x_i}{m_0} = \frac{2k+1}{2}$ alors $2x_i = (2k+1)m_0$ et m_0 est pair, ce

qui est impossible. Donc il existe un entier u_i tel que $\left| \frac{x_i}{m_0} - u_i \right| < \frac{1}{2}$.

$$\sum_{i=0}^3 x_i^2 = m_0 p = \sum_{i=0}^3 (y_i + m_0 u_i)^2 \equiv \sum_{i=0}^3 y_i^2 \pmod{m_0}. \text{ Donc } \sum_{i=0}^3 y_i^2 \equiv 0 \pmod{m_0}.$$

Il existe $m' > 0$ tel que $m_0 m' = \sum_{i=0}^3 y_i^2$. Comme m' est entier, $m' \geq 1$.

$$\left| \frac{x_i}{m_0} - u_i \right| < \frac{1}{2} \Rightarrow |y_i| = |m_0| \left| \frac{x_i}{m_0} - u_i \right| < \frac{m_0}{2} \Rightarrow y_i^2 < \frac{m_0^2}{4} \Rightarrow \sum_{i=0}^3 y_i^2 < m_0^2.$$

Donc $1 \leq m' < m_0$.

b. $x_i \equiv y_i \pmod{m_0} \iff X \equiv Y \pmod{m_0}$.

Notons que si $(T_1, T_2, T_3) \in H^3$, alors, d'après le calcul fait en I.2., on a :

$$T_1 \equiv T_2 \pmod{m_0} \Rightarrow (T_1 T_3 \equiv T_2 T_3 \pmod{m_0} \text{ et } T_3 T_1 \equiv T_3 T_2 \pmod{m_0}).$$

D'autre part, $T_1 \equiv T_2 \pmod{m_0} \iff \overline{T_1} \equiv \overline{T_2} \pmod{m_0}$.

Donc $X \equiv Y \pmod{m_0} \Rightarrow \overline{Y} \equiv \overline{X} \pmod{m_0}$.

Donc $X\bar{Y} \equiv Y\bar{Y} \equiv Y\bar{X} \equiv X\bar{X} \pmod{m_0}$.

Comme $X\bar{X} = N^2(X)e_0 = m_0pe_0 \equiv 0 \pmod{m_0}$, $X\bar{X} \equiv X\bar{Y} \equiv 0 \pmod{m_0}$.

$X\bar{Y} \equiv 0 \pmod{m_0} \Rightarrow \exists T \in H, X\bar{Y} = m_0T$.

$N^2(X\bar{Y}) = m_0^2N^2(T) = N^2(X)N^2(\bar{Y}) = (m_0p)(m_0m')$ par définition de m' .

Donc $N^2(T) = m'p$ où $1 \leq m' < m_0$. D'où $m'p$ est somme de quatre carrés d'entiers, *ie.* $m' \in \mathcal{M}$.

6. D'après 4. et 5. si $m_0 > 1$ est dans $\mathcal{M}$, il existe $m' \in \mathcal{M}$ strictement inférieur à m_0 . Le plus petit élément de $\mathcal{M}$ est donc 1. D'où $mp = 1p = p$ est somme de quatre carrés d'entiers.

2. Réduction des endomorphismes

$\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u un élément de $\mathcal{L}(E)$.

I. Sommes directes

q est un élément de $\mathbb{N}$, $q \geq 2$, $E_1, \dots, E_q$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

A. Somme

Définition

On note $\sum_{i=1}^q E_i$ l'ensemble $\left\{ \sum_{i=1}^q x_i \mid (x_1, \dots, x_q) \in E_1 \times \dots \times E_q \right\}$.

Remarques

1. $E_1 \times \dots \times E_q$ est muni naturellement d'une structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, l'application Ψ de $E_1 \times \dots \times E_q$ dans E définie par $\Psi(x_1, \dots, x_q) = \sum_{i=1}^q x_i$ est linéaire, son image est $\sum_{i=1}^q E_i$, donc un sous-espace vectoriel de E .

2. Si l'on note Φ l'application de $E_1 \times \dots \times E_q$ dans $\sum_{i=1}^q E_i$ définie par : $\Phi(x_1, \dots, x_q) = \Psi(x_1, \dots, x_q)$, alors Φ est linéaire surjective.

3. $\sum_{i=1}^q E_i$ est le sous-espace vectoriel $\text{Vect} \left(\bigcup_{i=1}^q E_i \right)$ engendré par $\bigcup_{i=1}^q E_i$ car c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant cette partie.

Exemple

Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_0[X] \subset \mathbb{K}_1[X] \subset \dots \subset \mathbb{K}_n[X]$ d'où $\sum_{i=0}^n \mathbb{K}_i[X] = \mathbb{K}_n[X]$.

B. Définition et premières propriétés

1. Définition

On dit que $\sum_{i=1}^q E_i$ est une somme directe, et on la note alors $\bigoplus_{i=1}^q E_i$, si l'application $\Phi : E_1 \times \dots \times E_q \rightarrow \sum_{i=1}^q E_i$, $(x_1, \dots, x_q) \mapsto \sum_{i=1}^q x_i$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

2. Théorème

Il y a équivalence entre :

- (i) $\sum_{i=1}^q E_i$ est directe ;
- (ii) La seule décomposition de 0_E dans $\sum_{i=1}^q E_i$ est $0_E = \sum_{i=1}^q 0_{E_i}$;
- (iii) $\forall x \in \sum_{i=1}^q E_i, \exists ! (x_1, \dots, x_q) \in E_1 \times \dots \times E_q, x = \sum_{i=1}^q x_i$;
- (iv) $\forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket, \left(\sum_{i=1}^k E_i \right) \cap E_{k+1} = \{0_E\}$.

Démonstration

• Comme Φ est linéaire surjective et comme la condition (ii) exprime son injectivité on a immédiatement l'équivalence entre (i) et (ii).

• De même (iii) signifie que Φ est bijective, d'où (i) $\iff$ (iii).

• Supposons (i), choisissons k dans $\llbracket 1, q \rrbracket$ puis x dans $\left(\sum_{i=1}^k E_i \right) \cap E_{k+1}$, écrivons

$$x = \sum_{i=1}^k x_i \text{ où } (x_1, \dots, x_k) \in E_1 \times \dots \times E_k.$$

On a $x = \Phi(x_1, \dots, x_k, 0_{E_{k+1}}, \dots, 0_{E_q}) = \Phi(0_{E_1}, \dots, 0_{E_k}, x, 0_{E_{k+2}}, \dots, 0_{E_q})$, d'où $x = 0_{E_{k+1}} = 0_E$ par injectivité de Φ .

• Supposons (iv) et $(x_1, \dots, x_q)$ dans $\text{Ker}(\Phi) \setminus \{0_E\}$.

Avec $k' = \max \{i \in \llbracket 1, q \rrbracket \mid x_i \neq 0_E\}$ on a $k' > 1$ et, en posant $k = k' - 1$, $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et

aussi $x_{k+1} = \sum_{i=1}^k (-x_i) \in \left(\sum_{i=1}^k E_i \right) \cap E_{k+1} = \{0_E\}$: absurde. Donc Φ est injective et (iv) $\Rightarrow$ (i). $\square$

3. Supplémentaires

Définition

| Les sous-espaces vectoriels V et W de E sont supplémentaires si $E = V \oplus W$.

Remarque

V et W sont supplémentaires si, et seulement si, tout x de E s'écrit de façon unique $x = v + w$ où $(v, w) \in V \times W$ ou encore si, et seulement si, l'application $\Phi : V \times W \rightarrow E, (v, w) \mapsto v + w$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, c'est-à-dire si, et seulement si, $V \cap W = \{0_E\}$ et $E = V + W$.

Exemples

• Soit P élément de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n + 1$ où $n \in \mathbb{N}$ et (P) l'idéal engendré par P , $(P) = \{AP \mid A \in \mathbb{K}[X]\}$, alors $\mathbb{K}_n[X]$ et (P) sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}[X]$.

En effet, ce sont facilement deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ et le théorème de division euclidienne montre que tout élément A de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit de façon unique $A = S + R$ où $S \in (P)$ et $R \in \mathbb{K}_n[X]$.

• $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ où $\mathcal{P} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ paire}\}$ et $\mathcal{I} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ impaire}\}$, en particulier ch et sh sont définies comme partie paire et impaire de exp.

4. Une condition nécessaire et suffisante en dimension finie

4.1. Théorème

Si E est de dimension finie alors $\sum_{i=1}^q E_i$ est directe si, et seulement si,

$$\dim \left(\sum_{i=1}^q E_i \right) = \sum_{i=1}^q \dim(E_i).$$

Démonstration

$\Phi : E_1 \times \dots \times E_q \rightarrow \sum_{i=1}^q E_i$, $(x_1, \dots, x_q) \mapsto \sum_{i=1}^q x_i$ est linéaire surjective. La somme est directe si, et seulement si, Φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels ie. si, et seulement si, $E_1 \times \dots \times E_q$ et $\sum_{i=1}^q E_i$ sont de même dimension, d'où le résultat. $\square$

4.2. Corollaire

Si E est de dimension n , deux sous-espaces vectoriels V et W de dimensions respectives p et $n-p$ sont supplémentaires si, et seulement si, $V \cap W = \{0_E\}$.

Démonstration

En effet la condition est nécessaire et, si elle est remplie, alors $V \oplus W$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $p + (n-p)$ et donc $E = V \oplus W$. $\square$

C. Décomposition de E en somme directe

1. Applications linéaires

Théorème

Si $E = \bigoplus_{i=1}^q E_i$ et si, pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$, alors il existe un unique élément u de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que $u|_{E_i} = u_i$ pour tout i de $\llbracket 1, q \rrbracket$, $u|_{E_i}$ désignant la restriction de u à E_i .

Démonstration

• Si un tel u existe alors, pour x dans E , $x = \sum_{i=1}^q x_i$ où $(x_1, \dots, x_q) \in E_1 \times \dots \times E_q$,

par linéarité on a $u(x) = \sum_{i=1}^q u(x_i) = \sum_{i=1}^q u_i(x_i)$ ce qui prouve l'unicité de u .

• Si $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^q x_i$, posons $u(x) = \sum_{i=1}^q u_i(x_i)$, l'unicité de la décomposition de chaque x prouve que l'on a ainsi défini une application.

Si $x \in E_i$, la définition de $u(x)$ donne $u(x) = u_i(x)$ d'où $u|_{E_i} = u_i$.

Si $(x, y) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = \sum_{i=1}^q x_i$ et $y = \sum_{i=1}^q y_i$ où $(x_1, \dots, x_q)$ et $(y_1, \dots, y_q)$ dans

$E_1 \times \dots \times E_q$, on a $\lambda x + y = \sum_{i=1}^q (\lambda x_i + y_i)$ et $(\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_q + y_q) \in E_1 \times \dots \times E_q$,

d'où, par définition, $u(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^q u_i(\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i=1}^q u_i(x_i) + \sum_{i=1}^q u_i(y_i)$ soit encore $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$ ce qui termine la démonstration. $\square$

Remarque

On vient en fait de montrer que l'application Θ de l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ dans l'espace $\mathcal{L}(E_1, F) \times \dots \times \mathcal{L}(E_q, F)$ définie par $\Theta(u) = \left(u|_{E_i} \right)_{1 \leq i \leq q}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Exemple : projecteurs associés à une décomposition

- Fixons i dans $\llbracket 1, q \rrbracket$, soit p_i l'unique élément de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $p_i(x) = \delta_{i,j} x$ si $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et $x \in E_j$. Pour tout j dans $\llbracket 1, q \rrbracket$ on a $p_i^2|_{E_j} = p_i|_{E_j}$ d'où, par unicité, $p_i^2 = p_i$, p_i est un projecteur, on a immédiatement $E_i \subset \text{Im}(p_i)$ et, si $x \in \text{Im}(p_i)$, alors $p_i(x) = x$ car p_i est un projecteur. En décomposant x on a immédiatement $x \in E_i$ d'où $\text{Im}(p_i) = E_i$. De même $\text{Ker}(p_i) = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q E_j$.
- Si $(i, j, k) \in \llbracket 1, q \rrbracket^3$ et $i \neq j$ on a $(p_i \circ p_j)|_{E_k} = 0$ d'où $p_i \circ p_j = 0$.
- Pour tout j dans $\llbracket 1, q \rrbracket$, $\forall x \in E_j$, $\left(\sum_{i=1}^q p_i \right)|_{E_j}(x) = x$ d'où $\sum_{i=1}^q p_i = I_E$.

2. Cas de la dimension finie

Théorème et définitions

E est de dimension $n \geq 1$ et on suppose $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_q$.

- Si, pour tout i de $\llbracket 1, q \rrbracket$, $\mathcal{E}_i$ désigne une **base** de E_i , alors la famille $\mathcal{E}$ obtenue en réunissant les $\mathcal{E}_i$ est une base de E , elle est dite **adaptée** à la décomposition $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_q$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E , une base est dite adaptée à F si ses premiers éléments constituent une base de F .

Démonstration

$\mathcal{E}$ étant de cardinal $n = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_q)$, il suffit de montrer qu'elle est génératrice de E . Si $x \in E$, $x = x_1 + \dots + x_q$ où $(x_1, \dots, x_q) \in E_1 \times \dots \times E_q$, on a, pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $x_i \in E_i = \text{Vect}(\mathcal{E}_i)$ et donc, par sommation, $x \in \text{Vect}(\mathcal{E})$, ce qui termine la preuve. $\square$

II. Sous-espaces vectoriels stables

1. Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

1. F est dit **stable** par u si $u(F) \subset F$ i.e. si, pour tout x dans F , $u(x) \in F$.
2. Dans ce cas on appelle **endomorphisme induit** par u sur F l'endomorphisme de F qui à tout x associe $u(x)$.

Remarques

- Ne pas confondre l'endomorphisme induit qui est élément de $\mathcal{L}(F)$ et la restriction $u|_F$ qui est élément de $\mathcal{L}(F, E)$.

- Si $\tilde{u}$ est l'endomorphisme induit par u sur F alors $\text{Ker}(\tilde{u}) = \text{Ker}(u) \cap F$ et $\text{Im}(\tilde{u}) = u(F)$.

Exemple

Pour $E = \mathbb{K}[X]$ et $\Delta : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$ appartient à $\mathcal{L}(E)$.

Si $P \in \text{Ker}(\Delta)$, $P(X) - P(0)$ s'annule sur $\mathbb{Z}$ infini donc $P(X) = P(0) \in \mathbb{K}_0[X]$, la réciproque est immédiate d'où $\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{K}_0[X]$.

Si $n \in \mathbb{N}$ on a $\Delta(\mathbb{K}_{n+1}[X]) \subset \mathbb{K}_n[X]$ et, en considérant la restriction de Δ à $\mathbb{K}_{n+1}[X]$, $\dim[\Delta(\mathbb{K}_{n+1}[X])] = \dim(\mathbb{K}_{n+1}[X]) - \dim(\mathbb{K}_0[X]) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ d'où $\Delta(\mathbb{K}_{n+1}[X]) = \mathbb{K}_n[X]$. Δ induit un endomorphisme Δ_n de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$ avec $\text{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{K}_0[X]$ et $\text{Im}(\Delta_n) = \mathbb{K}_n[X]$. De plus Δ_n est nilpotent.

2. Théorème

| Si $v \in \mathcal{L}(E)$ et commute avec u alors $\text{Im}(v)$ et $\text{Ker}(v)$ sont stables par u .

En effet, si $y \in \text{Im}(v)$, $y = v(x)$ où $x \in E$, alors on a $u(y) = v[u(x)] \in \text{Im}(v)$ et, si $z \in \text{Ker}(v)$, $v[u(z)] = u[v(z)] = 0$ donc $u(z) \in \text{Ker}(v)$. $\square$

Rappelons un théorème vu en MPSI

3. Théorème

| Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors

- (i) un sous-espace vectoriel V de E est stable par u si, et seulement si, pour toute base $\mathcal{B}$ de E adaptée à V , $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$,
- (ii) si E est somme directe de sous-espaces vectoriels stables par u alors, si $\mathcal{B}$ est une base adaptée, $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par blocs.

III. Polynômes d'endomorphisme

A. Généralités

1. Fonctions polynomiales

1.1. Théorème et définitions

| Si $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre d'élément unité e . Pour tout $a \in \mathcal{A}$, il existe un unique morphisme de $\mathbb{K}$ -algèbres $\varphi_a : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{A}$ tel que $\varphi_a(X) = a$.

Si $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_n X^n$ alors $\varphi_a(P) = \alpha_0 e + \alpha_1 a + \dots + \alpha_n a^n = P(a)$.

1. φ_a est appelé **morphisme de substitution** défini par $a \in \mathcal{A}$.

2. $\text{Ker}(\varphi_a) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(a) = 0\}$ est l'**idéal annulateur** de a .

3. $\text{Im}(\varphi_a) = \{P(a) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} = \mathbb{K}[a]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{A}$.

Démonstration

Une application f de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{A}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$ -algèbres si, et seulement si, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X], \mathcal{A})$, $f(X^0) = e$ et $f(AB) = f(A)f(B)$ pour $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

Si φ_a est un morphisme de $\mathbb{K}$ -algèbres vérifiant $\varphi_a(X) = a$, on a par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_a(X^n) = a^n$. Une application linéaire étant déterminée par l'image d'une base et $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une base de $\mathbb{K}[X]$, on peut dire qu'il

existe une unique application linéaire φ_a de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{A}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_a(X^n) = a^n$.

Comme l'application $(A, B) \mapsto \varphi_a(A B)$ est bilinéaire, il suffit de vérifier l'égalité $\varphi_a(X^p X^q) = \varphi_a(X^p) \varphi_a(X^q)$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, (ce qui est immédiat) pour conclure que φ_a est un morphisme d'algèbres et achever la preuve. $\square$

1.2. Cas particuliers importants

a) Si $\mathcal{A} = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $E \neq \{0\}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$\varphi_u : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E), P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \mapsto a_0 I_E + a_1 u + \cdots + a_n u^n = P(u) \in \mathbb{K}[u].$$

Si $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$, $(P + Q)(u) = P(u) + Q(u)$ et $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

b) Si $\mathcal{A} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\varphi_A : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \mapsto a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p = P(A) \in \mathbb{K}[A].$$

Si $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$, $(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$ et $(PQ)(A) = P(A) Q(A)$.

2. Polynôme minimal

$\text{Ker}(\varphi_a)$ étant un idéal de $\mathbb{K}[X]$, on déduit du chapitre 1.

2.1. Théorème et définition

Si $\text{Ker}(\varphi_a) \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$, il existe un unique polynôme unitaire Π_a appelé **polynôme minimal** de a , tel que $\text{Ker}(\varphi_a) = (\Pi_a)$.

2.2. Théorème

$\text{Ker}(\varphi_a) \neq \{0\}$ si, et seulement si, $\mathbb{K}[a]$ est de dimension finie.
Si c'est le cas, $\dim(\mathbb{K}[a]) = r = \deg(\Pi_a)$. Plus précisément, $(a^n)_{0 \leq n < r}$ est une base de $\mathbb{K}[a]$.

Démonstration

• Si $\text{Ker}(\varphi_a) = \{0\}$, φ_a est injective. Donc φ_a établit un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ sur $\text{Im}(\varphi_a) = \mathbb{K}[a]$. Donc $\mathbb{K}[a]$ n'est pas de dimension finie.

• Si $\text{Ker}(\varphi_a) \neq \{0\}$, comme $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{r-1}[X] \oplus (\Pi_a)$ (cf. théorème de division euclidienne), l'application de $\mathbb{K}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{K}[a] = \text{Im}(\varphi_a)$ qui à P associe $P(a)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Comme l'image d'une base par un isomorphisme est une base, $(a^n)_{0 \leq n < r}$ est une base de $\mathbb{K}[a]$. $\square$

Remarque : une autre démonstration consiste, puisque E est de dimension $n \geq 1$, à observer que $(f^k)_{0 \leq k \leq n^2}$ est liée dans $\mathcal{L}(E)$ qui est de dimension n^2 .

Exemples

- Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{L}(E)$ est de dimension finie ; d'où $\text{Ker}(\varphi_u) \neq \{0\}$.
- Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$, alors $\mathbb{K}[A] \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et donc $\text{Ker}(\varphi_A) \neq \{0\}$.

3. Applications

3.1. Calcul des puissances

On suppose connu P polynôme annulateur non nul de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Si $k \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de X^k par P s'écrit $X^k = PQ_k + R_k$ où $\deg(R_k) < \deg(P)$.

Alors, par le morphisme d'algèbres, $A^k = R_k(A)$.

Cette méthode n'a d'intérêt que si P est de degré *raisonnable* et si $k \geq \deg(P)$.

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $P(A) = 0$ où $P = (X-1)(X-2)(X+4)$.

D'ici quelques paragraphes de ce chapitre vous saurez déterminer un polynôme annulateur d'une matrice.

Pour $k \in \mathbb{N}$, $X^k = PQ_k + R_k$ avec $R_k = a_k L_1 + b_k L_2 + c_k L_3$ où

$L_1 = (X-1)(X-2)$, $L_2 = (X-1)(X+4)$ et $L_3 = (X-2)(X+4)$.

En effet, (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Le lecteur attentif aura reconnu des polynômes d'interpolation de Lagrange.

En substituant 1, 2 et -4 à X on obtient immédiatement a_k, b_k et c_k . D'où

$$A^k = \frac{(-4)^k}{30} L_1(A) + \frac{2^k}{6} L_2(A) - \frac{1}{5} L_3(A) \quad (\star).$$

De plus $P(A) = 0$ montre l'existence de $B \in \mathbb{R}[A]$ telle que $AB = I_3$. Donc A est une matrice inversible à droite (donc inversible) et l'on a $A^{-1} = B$ la même méthode utilisant un polynôme annulateur de A^{-1} ou une récurrence facile prouverait que l'expression donnée de A^k est valable pour $k \in \mathbb{Z}$.

3.2. Théorème

Si M est triangulaire supérieure par blocs, $M = \begin{pmatrix} A & \star \\ 0 & B \end{pmatrix}$, alors, pour tout polynôme P on a $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & \star \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$.

Démonstration

Par linéarité de $P \mapsto P(M) - \begin{pmatrix} P(A) & \star \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$, il suffit de le montrer quand $P = X^k$ où k décrit $\mathbb{N}$. On l'obtient alors très facilement par récurrence à l'aide des produits par blocs et les résultats classiques sur les produits de matrices triangulaires supérieures. $\square$

Si l'on note Π_A le polynôme minimal de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ on a le

3.3. Corollaire

Si $M = \text{Diag}(A, B)$, alors $\Pi_M = \text{ppcm}(\Pi_A, \Pi_B)$.

Démonstration

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(M) = \text{Diag}(P(A), P(B))$.

Donc : $\Pi_M(A) = 0$ et $\Pi_M(B) = 0$. D'où Π_A et Π_B divisent Π_M .

Si P est un multiple commun de Π_A et Π_B , $P(A) = 0$ et $P(B) = 0$ puisque $\Pi_A(A) = 0$ et $\Pi_B(B) = 0$. Donc $P(M) = 0$ ie. $\Pi_M \mid P$. De la définition du ppcm, on déduit le résultat. $\square$

B. Théorème de décomposition des noyaux

1. Lemme

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.
Pour P et Q premiers entre eux, $\text{Ker}[(PQ)(u)] = \text{Ker}[P(u)] \oplus \text{Ker}[Q(u)]$.

Démonstration

- Si $x \in \text{Ker}[P(u)]$ alors $(PQ)(u)(x) = ([Q(u)] \circ [P(u)])(x) = 0$ donc on a $\text{Ker}[P(u)] \subset \text{Ker}[(PQ)(u)]$, de même $\text{Ker}[Q(u)] \subset \text{Ker}[(PQ)(u)]$ et donc $\text{Ker}[P(u)] + \text{Ker}[Q(u)] \subset \text{Ker}[(PQ)(u)]$.
- Si $x \in \text{Ker}[P(u)] \cap \text{Ker}[Q(u)]$, en écrivant, d'après le théorème de Bézout, $PU + QV = 1$, on a $P(u) \circ U(u) + Q(u) \circ V(u) = U(u) \circ P(u) + V(u) \circ Q(u) = I_E$ et, en x , cela donne $x = 0_E$, $\text{Ker}[P(u)] + \text{Ker}[Q(u)]$ est donc directe.
- Si $x \in \text{Ker}[(PQ)(u)]$, avec les notations précédentes, $x = y + z$ où l'on a posé $y = [V(u) \circ Q(u)](x)$ et $z = [U(u) \circ P(u)](x)$. Or $P(u)(y) = [V(u)] \circ [(PQ)(u)](x) = 0$ et, de même, $Q(u)(z) = 0$, d'où $x \in \text{Ker}[P(u)] \oplus \text{Ker}[Q(u)]$ ce qui termine la démonstration. $\square$

2. Théorème

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Si $P_1, \dots, P_p$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux, $\text{Ker} \left[\prod_{i=1}^p P_i \right] (u) = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}[P_i(u)]$.

Démonstration

On procède par récurrence sur p , les cas $p = 1$, $p = 2$ étant déjà traités. Si cela a déjà été prouvé pour p polynômes et si P_{p+1} est premier avec $P_1, \dots, P_p$, alors, en posant $P = P_1 \dots P_p$ et $Q = P_{p+1}$ on a P et Q premiers entre eux et donc $\text{Ker}[(PQ)(u)] = \text{Ker}[P(u)] \oplus \text{Ker}[Q(u)]$ ou encore $\text{Ker}[(P_1 \dots P_{p+1})(u)] = \text{Ker}[(P_1 \dots P_p)(u)] \oplus \text{Ker}[P_{p+1}(u)]$ et, avec l'hypothèse de récurrence, $\text{Ker}[(P_1 \dots P_{p+1})(u)] = \bigoplus_{i=1}^{p+1} \text{Ker}[P_i(u)]$. $\square$

3. Corollaire

Si de plus $P_1 \dots P_p$ est annulateur de u alors $E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}[P_i(u)]$ et la matrice de u relativement à toute base adaptée à cette décomposition est diagonale par blocs.

Démonstration

On applique le corollaire précédent en remarquant de plus que chacun des $\text{Ker}[P_i(u)]$ est stable par u . $\square$

Exemples

1. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u^2 = u$ on retrouve le fait que u est projecteur sur $\text{Im}(u)$ parallèlement à $\text{Ker}(u)$ car u annule $X(X-1)$ et donc $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u - I_E)$ i.e. $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.
2. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u \circ u = I_E$. Comme u annule le polynôme $(X-1)(X+1)$, on a $E = \text{Ker}(u - I_E) \oplus \text{Ker}(u + I_E)$ i.e. u est la symétrie de E par rapport à $\text{Ker}(u - I_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(u + I_E)$.

IV. Éléments propres

A. Cas d'un endomorphisme

1. Définitions

1. Un scalaire λ est dit **valeur propre** de u si $u - \lambda I_E$ n'est pas injectif, **tout élément non nul** de $\text{Ker}(u - \lambda I_E)$ est **vecteur propre** associé à λ .
2. Si λ est valeur propre de u on appelle **sous-espace propre** associé à λ et l'on note $E_\lambda(u)$ le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(u - \lambda I_E)$.
3. On appelle **spectre** de u et on note $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u .

Remarques

1. En dimension finie, $\lambda \in \text{Sp}(u) \iff (u - \lambda I_E) \notin \text{GL}(E)$.
2. Toujours en dimension finie, u est élément de $\text{GL}(E)$ si, et seulement si, 0 n'est pas valeur propre de u .

Exemples

1. $u = \lambda I_E$ si, et seulement si, $\text{Sp}(u) = \{\lambda\}$ et $E_\lambda(u) = E$.
2. Si p est un projecteur non nul et distinct de I_E alors : $\text{Sp}(p) = \{0, 1\}$, $E_0(p) = \text{Ker}(p)$ et $E_1(p) = \text{Im}(p)$.
3. Dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, avec $D : f \mapsto f'$, on a $\text{Sp}(D) = \mathbb{C}$ et chaque sous-espace propre est une droite car, pour tout λ complexe, l'équation $f' = \lambda f$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 admettant pour ensemble de solutions $\text{Vect}(x \mapsto e^{\lambda x})$ droite de E .
4. Si u est un endomorphisme nilpotent, *ie.* s'il existe p dans $\mathbb{N}^*$ tel que u^p soit nul, alors $\text{Sp}(u) = \{0\}$. En effet u n'est pas injectif sinon u^p le serait et, si x est vecteur propre de u associé à λ , on a $0_E = u^p(x) = \lambda^p x$ d'où $\lambda^p = 0_{\mathbb{K}}$ puis $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$. $\text{Sp}(u + \alpha I_E) = \{\alpha\}$ d'après la dernière des remarques précédentes.
5. Soit $u : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X], P \mapsto XP(X)$. En raisonnant sur les degrés, on montre facilement que $\text{Sp}(u) = \emptyset$.

2. Propriétés des sous-espaces propres

2.1. Théorème

Si v est un élément de $\mathcal{L}(E)$ qui commute avec u , alors tout sous-espace propre de u est stable par v .

Démonstration

Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $u - \lambda I_E$ et v commutent donc $\text{Ker}(u - \lambda I_E) = E_\lambda(u)$ est stable par v d'après l'exemple I.2. $\square$

2.2. Théorème

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u alors $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$ est directe.

Démonstration

Soit $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$. Comme $i \neq j \Rightarrow (X - \lambda_i) \wedge (X - \lambda_j) = 1$, ce théorème est une conséquence du théorème de décomposition des noyaux. $\square$

On en déduit le

2.3. Corollaire

Si $x_1, \dots, x_p$ sont des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes alors $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Exemple

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on considère l'élément de l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ défini par $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}$. L'endomorphisme de dérivation D de E vérifie $D(f_\alpha) = \alpha f_\alpha$. Comme toute sous-famille finie est libre on en déduit que $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{C}}$ est libre.

De même, avec D^2 on montre aisément que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $g_n : x \mapsto \cos(nx)$ est libre.

3. Polynômes d'endomorphisme

3.1. Théorème

Si x est vecteur propre de u associé à λ et si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors x est vecteur propre de $P(u)$ associé à $P(\lambda)$.

Démonstration

λ est zéro de $P - P(\lambda)$ d'où $P - P(\lambda) = (X - \lambda)Q$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$ et donc $P(u) - P(\lambda)I_E = Q(u) \circ (u - \lambda I_E)$, d'où $\text{Ker}(u - \lambda I_E) \subset \text{Ker}[P(u) - P(\lambda)I_E]$. $\square$

3.2. Corollaire

Si P est un polynôme annulateur de u alors tout élément de $\text{Sp}(u)$ est zéro de P . La réciproque est généralement fausse.

Si le polynôme minimal Π_u de u existe, $\text{Sp}(u)$ est inclus dans l'ensemble des zéros de Π_u .

Démonstration

- Soit λ valeur propre de u , le théorème prouve que $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$. Comme $P(u) = 0$, nécessairement $P(\lambda) = 0$.
- Si u est nul sa seule valeur propre est 0 et $P = X(X - 1)$ est un annulateur dont 0 n'est pas le seul zéro. C'est un contre-exemple de la réciproque. $\square$

B. Cas d'une matrice

On se donne un élément M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Définitions

1. Un élément non nul X de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est dit **vecteur propre** de M s'il existe un scalaire λ tel que $MX = \lambda X$.

Ce scalaire λ est unique et est appelé valeur propre associée à X .

2. Un scalaire λ est dit **valeur propre** de M si $M - \lambda I_n \notin \text{GL}_n(\mathbb{K})$, tout élément non nul de $\text{Ker}(M - \lambda I_n)$ est dit vecteur propre associé à λ .

3. Si λ est valeur propre de M on appelle **sous-espace propre** associé à λ et l'on note $E_\lambda(M)$ le sous-espace vectoriel $E_\lambda(M) = \text{Ker}(M - \lambda I_n)$.

4. On appelle **spectre** de M et l'on note $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)$ ou $\text{Sp}(M)$ si le corps n'est pas ambigu, l'ensemble des valeurs propres de M , $\{\lambda \in \mathbb{K} \mid M - \lambda I_n \notin \text{GL}_n(\mathbb{K})\}$.

Remarque

$$0 \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M) \iff M \notin \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \text{rg}(M) < n \iff \det(M) = 0.$$

2. Lien avec les endomorphismes

Théorème

Soit $\mathcal{E}$ base de E relativement à laquelle M est matrice de u , alors u et M ont même spectre et x est vecteur propre de u associé à λ si, et seulement si, sa matrice X relativement à $\mathcal{E}$ est vecteur propre de M associé à λ .

Démonstration

Si x est de matrice X relativement à $\mathcal{E}$ alors $u(x)$ est de matrice MX relativement à $\mathcal{E}$. Donc $u(x) = \lambda x \iff MX = \lambda X$ et x, X sont simultanément nuls ou non. $\square$

3. Changement de corps

On remarque que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et donc que tout élément de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est aussi élément de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, il faudra donc se garder de confondre $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ mais on a le

Théorème

Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, mais l'inclusion réciproque est en général fausse. Plus précisément, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \mathbb{R} \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Démonstration

• Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ on choisit X vecteur propre associé, alors $AX = \lambda X$ et X est un élément non nul de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

• Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ pour la structure euclidienne orientée canonique de $\mathbb{R}^2$, aucune droite n'est stable donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ alors que $i \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ car $A - iI_2 = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \notin \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. $\square$

C. Polynôme caractéristique

1. Définitions

1.1. Définition

On appelle polynôme caractéristique de $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, et l'on note χ_M , le déterminant de la matrice $(XI_n - M)$.

On a immédiatement $\chi_M = \chi_{t_M}$.

1.2. Théorème et définition

Si M et N sont semblables alors $\chi_M = \chi_N$, si u est un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie n , on appelle polynôme caractéristique de u , et l'on note χ_u , le polynôme caractéristique d'une matrice quelconque de u , étant entendu que cela ne dépend pas du choix de la matrice.

Démonstration

Si $N = PMP^{-1}$ où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $XI_n - N = P(XI_n - M)P^{-1}$ et, comme le déterminant est invariant par similitude, $\chi_M = \chi_N$. $\square$

Remarque

Le lien entre matrices et endomorphismes nous permet, pour la suite et sauf exception, de ne donner que les résultats relatifs aux matrices, le lecteur les traduira en termes d'endomorphismes.

2. Premières propriétés

L'utilité essentielle du polynôme caractéristique vient du

2.1. Théorème

| Le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est l'ensemble des zéros de χ_M dans $\mathbb{K}$.

Démonstration

Immédiate car $\lambda \in \text{Sp}(M) \iff \lambda I_n - M \notin \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(\lambda I_n - M) = 0. \square$

2.2. Théorème

| $\chi_M = X^n - \text{tr}(M)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(M)$.

Démonstration

• Tout d'abord $\chi_M(0) = (-1)^n \det(M)$ par définition de χ_M , d'où le coefficient constant. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ posons $b_i^\sigma = X - m_{i,i}$ si $\sigma(i) = i$ et $-m_{i,\sigma(i)}$ sinon,

puis $P_\sigma = \prod_{i=1}^n b_i^\sigma$, alors $\chi_M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) P_\sigma$ et $0 \leq \deg(P_\sigma) \leq n$.

• $\deg(P_\sigma) \geq n - 1$ signifie que $\sigma(i) \neq i$ pour au plus un i soit encore $\sigma = e$ identité, les coefficients de X^{n-1} et X^n de χ_M sont donc ceux de P_e , à savoir respectivement $-\text{tr}(M)$ et 1 facilement, d'où l'expression de χ_M . $\square$

2.3. Corollaire

- (i) $\text{Card}[\text{Sp}(M)] \leq n$.
- (ii) Si χ_M est scindé, avec $\chi_M = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$, alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de M , $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et $\det(M) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.
- (ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $\text{Sp}(M) \neq \emptyset$.
- (ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$ alors n est un entier pair.

Démonstration

1. découle directement du théorème de d'Alembert.

2. Si n est impair alors χ_M est de degré impair, $\chi_M(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x^n$ et le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un zéro réel, donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \neq \emptyset. \square$

Remarques

Le théorème précédent permet un calcul facile de χ_M dans le cas où $n = 2$:

$$\chi_M = X^2 - X \text{tr}(M) + \det(M).$$

2.4. Théorème

| Si M est triangulaire supérieure par blocs, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$, alors $\chi_M = \chi_A \chi_C$.

| Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par l'endomorphisme u et si v est l'endomorphisme induit par u sur F , alors χ_v divise χ_u .

Démonstration

$XI_n - M = \begin{pmatrix} XI_p - A & -B \\ 0 & XI_{n-p} - C \end{pmatrix}$ et le calcul d'un déterminant triangulaire supérieur par blocs termine la démonstration.

Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E adaptée à F où $\mathcal{B}_1$ est une base de F , la matrice $M = M_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire par blocs et $A = M_{\mathcal{B}_1}(v)$. Donc $\chi_u = \chi_v \chi_C$ et le théorème est prouvé puisque χ_C est un polynôme. $\square$

3. Ordre de multiplicité**3.1. Définition**

| Si $\lambda \in \text{Sp}(M)$ on appelle ordre de multiplicité de λ , et on note $\omega(\lambda)$ dans le cours, son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_M .

Remarque

Si χ_M est scindé et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres (deux à deux distinctes)

de M , alors $\chi_M = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\omega(\lambda_i)}$ ou encore $\chi_M = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (X - \lambda)^{\omega(\lambda)}$.

3.2. Théorème

| Si $\lambda \in \text{Sp}(M)$, alors $1 \leq \dim [E_{\lambda}(M)] \leq \omega(\lambda)$.

Démonstration

On écrit M comme matrice de u endomorphisme de $E = \mathbb{K}^n$ puis $E = E_{\lambda}(u) \oplus V$ et on note p la dimension de $E_{\lambda}(u)$, $p \geq 1$ car comme $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $E_{\lambda}(u) \neq \{0\}$.

$E_{\lambda}(u)$ étant un sous-espace vectoriel de E stable par u , notons v l'endomorphisme induit par u sur $E_{\lambda}(u)$. D'après le théorème IV.C.2.4, on a : χ_v divise χ_u .

Comme v est l'homothétie de rapport λ et comme $E_{\lambda}(u)$ est de dimension p , $\chi_v = (\lambda - X)^p$. D'où $p \leq \omega(\lambda)$ et la conclusion. $\square$

4. Théorème de Cayley-Hamilton**4.1. Théorème**

| Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E , alors χ_u est un polynôme annulateur de u .

Démonstration (non exigible mais vivement recommandée)

Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Il existe $p = \max\{r \in \mathbb{N}^* \mid (x, u(x), \dots, u^{r-1}(x)) \text{ libre}\}$. Donc $\exists (a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$, $u^p(x) = a_0x + a_1u(x) + \dots + a_{p-1}u^{p-1}(x)$. (★)

$F = \text{Vect}\{x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\}$ est un sous-espace vectoriel de E , de dimension p et stable par u . Si v est l'endomorphisme de E induit par u sur F , il suffit de prouver que $\chi_v(u) = 0$ puisque $\chi_v \mid \chi_u$.

Notons $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ et A la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ de F .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}. \text{ Donc : } \chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & -a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & X & -a_{p-2} \\ (0) & & -1 & X - a_{p-1} \end{vmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + \cdots + X^{p-1}L_p \text{ montre que } \chi_A(X) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & Q(X) \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & -1 & a_{p-1} - X \end{vmatrix}.$$

D'où en développant par rapport à la première ligne, $\chi_A = (-1)^{p+1}(-1)^{p-1}Q(X)$ où $Q(X) = -a_0 - a_1X + \cdots + (X - a_{p-1})X^{p-1}$.

Or $Q(u)(x) = 0$ d'après $(\star)$, Donc $\chi_v(u)(x) = 0$. Si $x = 0$, on a $\chi_v(u)(x) = 0$.

Donc, pour tout $x \in E$, $\chi_v(u)(x) = 0$ ie. $\chi_v(u) = 0$ et la conclusion. $\square$

4.2. Applications

a) Calcul de A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$. cf. III.A.3.1.

b) $\text{Sp}(u)$ est l'ensemble des racines du polynôme minimal Π_u de u .

En effet, χ_u étant annulateur de u , le polynôme Π_u divise χ_u et l'ensemble des racines de Π_u est inclus dans l'ensemble des racines de χ_u ie. $\text{Sp}(u)$.

D'autre part, si $\lambda \in \text{Sp}(u)$, alors λ est racine de tout polynôme annulateur de u ; donc λ est racine de Π_u . D'où la conclusion.

c) Si $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $\det(M) \neq 0$ et le théorème de Cayley-Hamilton donne $MP(M) = I_n$ où P est un polynôme, d'où $M^{-1} = P(M) \in \mathbb{K}[M]$.

d) u est un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$ si, et seulement si, $u^n = 0$ si, et seulement si, $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(u) = \{0\}$.

En effet, $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(u) = \{0\}$ si, et seulement si, $\chi_u(X) = X^n$.

e) Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\omega_k}$ avec $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. On déduit du théorème de décomposition des noyaux et du théorème de Cayley-Hamilton :

$E = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(M - \lambda_k I_n)^{\omega_k}$. Les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(u - \lambda_k I_E)^{\omega_k}$ sont des sous-espaces stables par u et $\text{Ker}(u - \lambda_k I_E) \subset \text{Ker}(u - \lambda_k I_E)^{\omega_k}$. Si $v \in \mathcal{L}(E)$ et $v \circ u = u \circ v$, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de v est diagonale par blocs.

4.3. Exemple

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer χ_C et π_C .

C est la matrice de la permutation circulaire $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & (n-1) & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$, le calcul des C^k est facile et montre que $(I_n, C, \dots, C^{n-1})$ est libre alors que $C^n = I_n$. $X^n - 1$ est de degré minimal parmi les polynômes annulateurs non nuls de C , donc $\pi_C(X) = X^n - 1$ et $\pi_C | \chi_C$. La comparaison des degrés et coefficients dominants montre alors que χ_C est égal à $(X^n - 1)$ et donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(C) = \mathbb{U}_n$ ensemble des racines n -ièmes de 1 alors que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(C) = \mathbb{U}_n \cap \mathbb{R}$.

4.4. Proposition

| Tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie laisse soit une droite soit un plan stable.

Démonstration

Si $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$ c'est immédiat.

Sinon alors $\chi_u = \prod_{i=1}^k (X^2 + a_i X + b_i)$ où, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $a_i^2 - 4b_i < 0$. Le

théorème de Cayley-Hamilton montre que $\prod_{i=1}^k (u^2 + a_i u + b_i I_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et donc l'un au moins des $\varphi_i = u^2 + a_i u + b_i I_E$ est non bijectif. On suppose par exemple φ_1 non bijectif et alors, si $x \in \text{Ker}(\varphi_1) \setminus \{0_E\}$ le plan $\text{Vect}(x, u(x))$ fait l'affaire. $\square$

D. Sous-espaces caractéristiques

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Théorème et définition

On suppose que $\chi_u = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et l'on note $F_i = \text{Ker}(u - \lambda_i I_E)^{\alpha_i}$.

Les F_i sont appelés les **sous-espaces caractéristiques** de u .

(i) F_i est stable par u et $u_i = u|_{F_i}$ est nilpotent.

(ii) $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k$.

(iii) $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \dim(F_i) = \alpha_i$.

Démonstration

(i) et (iii) $u \circ (u - \lambda_i I_E) = (u - \lambda_i I_E) \circ u$ car $(u - \lambda_i I_E) \in \mathbb{K}[u]$: algèbre commutative, donc F_i est stable par u . Comme $u_i \in \mathcal{L}(F_i)$, on a $(u_i - \lambda_i I_{F_i})^{\alpha_i} = 0$. Donc $(u_i - \lambda_i I_{F_i})$ est nilpotent. D'où $\chi_{u_i} = (X - \lambda_i)^{\dim(F_i)}$.

Or $\chi_{u_i} | \chi_u$, donc $\dim(F_i) \leq \alpha_i$. Comme $\sum_{i=1}^k \dim(F_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i$, on a $\dim(F_i) = \alpha_i$.

(ii) Conséquence du théorème de Cayley-Hamilton et du théorème de décomposition des noyaux. $\square$

2. Théorème et définition

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. $\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid \text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^{k+1})\} \neq \emptyset$. On note désormais p le minimum de cet ensemble. On l'appelle l'indice de f . On a : $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq p \Rightarrow N_k = N_p$.

Démonstration

• Notons $N_k = \text{Ker}(f^k)$. On déduit de $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v \circ u)$ que $N_k \subset N_{k+1}$.

• Si cet ensemble est vide alors $(n_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une suite strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $n_n > n$: absurde.

• Si $k \geq p$ on a toujours $N_k \subset N_{k+1}$.

Si $x \in N_{k+1}$ alors $f^{k+1}(x) = 0$ i.e. $f^{p+1}(f^{k-p}(x)) = 0$ d'où $f^{k-p}(x) \in N_{p+1} = N_p$ et donc $f^k(x) = f^p(f^{k-p}(x)) = 0$ i.e. $x \in N_k$. On vient de montrer que $(N_k)_{k \geq p}$ est constante. $\square$

3. Théorème

Avec les notations du théorème 1,

(i) $\Pi_u = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{r_i}$ où $1 \leq r_i \leq \alpha_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

(ii) r_i est l'indice de $(u - \lambda_i I_E)$ et $F_i = \text{Ker}(u - \lambda_i I_E)^{r_i}$.

Démonstration

(i) se déduit de la définition du polynôme minimal et de χ_u du théorème 1.

(ii) Faisons la démonstration pour $i = 1$. $\Pi_u = (X - \lambda_1)^{r_1} Q$ où $Q \wedge (X - \lambda_1)^{r_1}$. On déduit du théorème des noyaux : $E = \text{Ker}(u - \lambda_1)^{r_1} \oplus \text{Ker}(Q(u))$.

D'où $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u - \lambda_1)^{r_1}) + \dim(\text{Ker}(Q(u)))$ (1).

Pour $p \in \mathbb{N}$, posons $P = (X - \lambda_1)^p Q(X)$. On déduit du théorème des noyaux que $\text{Ker}(P(u)) = \text{Ker}(u - \lambda_1)^{r_1} \oplus \text{Ker}(Q(u))$.

Donc $\dim(\text{Ker}(u - \lambda_1)^{r_1}) + \dim(\text{Ker}(Q(u))) = \dim(\text{Ker}(P(u)))$ (2).

• $q \geq r_1 \Rightarrow \Pi_u | P \Rightarrow \text{Ker}(P(u)) = E$. il découle de (1) et (2) que :

$\dim(\text{Ker}(u - \lambda_1)^{r_1}) = \dim(\text{Ker}(u - \lambda_1)^p)$.

• $p < r_1 \Rightarrow \Pi_u \nmid P \Rightarrow P(u) \neq 0 \Rightarrow \text{Ker}(P(u)) \neq E$

On déduit de (1) et (2) : $\dim(\text{Ker}(u - \lambda_1)^{r_1}) > \dim(\text{Ker}(u - \lambda_1)^p)$.

On déduit du théorème 2. que r_1 est l'indice de $(u - \lambda_1 I_E)$. $\square$

V. Réduction en dimension finie

On suppose ici E de dimension finie n avec toujours $n \geq 1$.

A. Diagonalisation**1. Endomorphisme diagonalisable****1.1. Définition**

On dit que u est diagonalisable si, et seulement si, E est somme directe des sous-espaces propres de u .

Exemples

Homothéties, projecteurs et symétries sont des endomorphismes diagonalisables.

1.2. Théorème

Il y a équivalence entre les assertions :

- (i) u est diagonalisable ;
- (ii) E admet une base formée de vecteurs propres de u ;
- (iii) $n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim [E_\lambda(u)]$;
- (iv) u admet pour matrice une matrice diagonale ;
- (v) χ_u est scindé et, si $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $\omega(\lambda) = \dim [E_\lambda(u)]$.

Démonstration

• Si (i) alors toute base adaptée à $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ prouve (ii). Si (ii) alors $E \subset \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ et (i) en découle immédiatement. Donc (i) $\iff$ (ii).

• Comme u induit une homothétie sur chaque $E_\lambda(u)$ on a (i) $\implies$ (iii). Si (iii), en utilisant une base adaptée à la décomposition de E on a (ii) et donc (i), d'où (i) $\iff$ (iii).

• Comme la somme des sous-espaces propres est directe on a immédiatement (i) $\iff$ (iv).

- (ii) $\iff$ (v) est claire.
- Si (i) alors, dans une base adaptée à la décomposition la matrice de u est diagonale par blocs, $M = \text{Diag}(\lambda_i I_{\omega(\lambda_i)})_{1 \leq i \leq p}$ d'où $\chi_u = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - X)^{\omega(\lambda_i)}$ scindé et, pour tout i , $\omega(\lambda_i) = \dim [E_{\lambda_i}(u)]$. Donc (i) $\Rightarrow$ (vi).
Comme $n = \deg(\chi_u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \omega(\lambda)$ si χ_u est scindé, on a (vi) $\Rightarrow$ (iv) et donc (i) $\iff$ (vi). $\square$

Remarque

Si $\text{Sp}(u) = \{\lambda\}$ alors u est diagonalisable si, et seulement si, $u = \lambda I_E$. En effet, si u est diagonalisable, λI_n est une de ses matrices d'où $u = \lambda I_E$. Réciproque facile. En particulier, u diagonalisable et nilpotente si, et seulement si, $u = 0$.

1.3. Corollaire

Si u est diagonalisable et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(u)$ est diagonalisable et toute base de vecteurs propres de u est base de vecteurs propres de $P(u)$.

Démonstration

Si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est base de vecteurs propres de u associée à $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ on a, si $1 \leq i \leq n$, $[P(u)](e_i) = P(\lambda_i)e_i$ d'où le résultat. $\square$

- **Exemple :** si u est diagonalisable, $\Pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

1.4. Corollaire

Si $\text{Sp}(u)$ est de cardinal n alors u est diagonalisable et tout sous-espace propre est une droite.

Démonstration

Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$ alors $1 \leq \dim [E_\lambda(u)] \leq \omega(\lambda) = 1$, chaque sous-espace propre est une droite et $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim [E_\lambda(u)] = \text{Card} [\text{Sp}(u)]$ prouve que u est diagonalisable. $\square$

2. Matrices diagonalisables

2.1. Définition

Un élément M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dit diagonalisable si c'est la matrice d'un endomorphisme diagonalisable.

2.2. Théorème

Si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il y a équivalence entre :

- (i) M est diagonalisable sur $\mathbb{K}$;
- (ii) M est semblable à une matrice diagonale ie. $A = PDP^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la base de $\mathbb{K}^n$ constituée des vecteurs propres de M ;
- (iii) $n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} \dim [E_\lambda(M)]$;
- (iv) χ_M scindé sur $\mathbb{K}$ et, pour tout λ dans $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)$, $\omega(\lambda) = \dim [E_\lambda(M)]$.

Exemples

(i) Si $n > 1$, $E_{1,n}$ est non diagonalisable car nilpotente non nulle.

(ii) On s'intéresse à $J \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient générique 1.

a) Première méthode

J est de rang 1 donc 0 est valeur propre et $\dim[E_0(J)] = \dim(\mathbb{R}^n) - \text{rg}(J) = n - 1$; donc $\omega(0) \geq n - 1$. Si on note $0, 0, \dots, 0, \lambda$ les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur ordre de multiplicité, alors $\text{tr}(J) = n = \lambda$ qui est valeur propre d'ordre 1, donc $\dim[E_n(J)] = 1$ car $1 \leq \dim[E_n(J)] \leq \omega(n) = 1$.

Comme $n \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(J)} \dim[E_\lambda(J)] \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(J)} \omega(\lambda) = n$ on a nécessairement

$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(J) = \{0, n\}$, $\omega(0) = n - 1$, J est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{C}$.

- Base de $E_0(J)$. Comme toutes les colonnes de J sont égales, en notant $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $(E_i - E_1)_{2 \leq i \leq n}$ est libre dans $E_0(J)$ donc est une base.

- Base de $E_n(J)$. En notant U une colonne de J on a $U \neq 0$ et $JU = nU$, donc $E_n(J) = \text{Vect}(U)$.

- Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ 1 & (0) & & 1 \end{pmatrix}$, on a $J = P \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & n \end{pmatrix} P^{-1}$ et aussi

$$\chi_J = (-X)^{n-1}(n - X).$$

Notons $E'_1 = U = \sum_{i=1}^n E_i$ et $E'_i = E_i - E_1$ si $2 \leq i \leq n$, alors

$$E_1 = \frac{1}{n} \left(E'_1 - \sum_{i=2}^n E'_i \right) \text{ et pour } i \geq 2, E_i = \frac{1}{n} \left(E'_1 - \sum_{j \neq i} E'_j + (n-1)E'_i \right). \text{ D'où } P^{-1}.$$

b) Deuxième méthode

$$(\Sigma) \quad JX = \lambda X \iff \sum_{i=1}^n x_i = \lambda x_1 = \cdots = \lambda x_n.$$

- Si $\lambda \neq 0$, alors $x_1 = \cdots = x_n$ d'où $X \in \text{Vect}(U)$ droite et, comme $JU = nU$, on a $\lambda = n$.

- Si $\lambda = 0$ alors on obtient l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

$\mathbb{K}^n$ est somme directe de sous-espaces vectoriels sur lesquels J induit des homothéties, donc J est diagonalisable et, à cause des dimensions des sous-espaces propres, $\text{Sp}(J) = \{0, n\}$, $E_n(J) = \text{Vect}(U)$ et $E_0(J)$ est l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

c) **Troisième méthode.** $\frac{J}{n}$ est un projecteur de rang 1, image et noyau déjà vus.

d) **Quatrième méthode.** On verra, dans un prochain chapitre, que J est diagonalisable car symétrique réelle.

3. Caractérisation par les polynômes annulateurs

3.1. Théorème

$\left| \begin{array}{l} u \text{ est diagonalisable si, et seulement si, il annule un polynôme scindé à} \\ \text{racines simples ie. si, et seulement si, } \Pi_u \text{ est scindé à racines simples.} \end{array} \right.$

Démonstration

• *Sens direct.* Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u , posons $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i) = \Pi_u$.

• *Réciproque.* Soit $P = \alpha \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ polynôme scindé à racines simples annulateur de u . Les corollaires du théorème de décomposition des noyaux montrent alors que E est somme directe de sous-espaces vectoriels sur chacun desquels u induit une homothétie, u est donc diagonalisable. $\square$

3.2. Corollaire

Si u est diagonalisable alors il induit sur tout sous-espace vectoriel stable un endomorphisme diagonalisable.

Démonstration

Soit V un tel sous-espace vectoriel et P un annulateur de u scindé à racines simples. Notons v l'endomorphisme induit par u sur V . Comme V est stable par u , il l'est par $P(u)$ et l'endomorphisme induit est $P(v)$, v annule P donc est diagonalisable. $\square$

3.3. Corollaire

Si M est diagonale par blocs, soit $M = \text{Diag}(M_i)_{1 \leq i \leq p}$, alors M est diagonalisable si, et seulement si, chaque M_i est diagonalisable.

Démonstration

• Le corollaire précédent montre le sens direct.

• Si chaque M_i est diagonalisable, $M_i = P_i D_i P_i^{-1}$ où D_i est diagonale et P_i inversible, on considère $P = \text{Diag}(P_i)_{1 \leq i \leq p}$, P est inversible d'inverse $\text{Diag}(P_i^{-1})_{1 \leq i \leq p}$ et on a $P^{-1} M P = \text{Diag}(P_i^{-1} M_i P_i)_{1 \leq i \leq p} = \text{Diag}(D_i)_{1 \leq i \leq p}$ diagonale, donc M est diagonalisable. $\square$

Exemples

• La matrice J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, car $P(J) = 0$ où $P = X(X - n)$.

• $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 est diagonalisable si, et seulement si, $\text{tr}(A) \neq 0$.

En effet, Si A est de rang 1, il existe $C \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ tels que $A = CL$. Il s'ensuit que $A^2 = \text{tr}(A)A$. Le polynôme $P = X(X - \text{tr}(A))$ annule la matrice A . Si $\text{tr}(A) \neq 0$, le polynôme P étant scindé à racines simples, A est diagonalisable.

Sinon, $P(A) = 0 \iff A^2 = 0$. La matrice A est nilpotente. Elle est diagonalisable si, et seulement si, elle est nulle, ce qui n'a pas lieu car elle est de rang 1.

• Si $(G, \cdot)$ est un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ de cardinal p , tout élément de G est diagonalisable. En effet, pour tout $M \in G$, $M^p = I_n$.

En particulier, toute matrice de permutation est diagonalisable.

• $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ car $\Pi_C(X) = X^n - 1$ est scindé à racines simples. Donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(C) = \mathbb{U}_n$ et chacun de ses sous-espaces propres

est une droite. Posons $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ et, si $0 \leq k < n$, désignons par X_k l'élément de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de coefficient générique $\bar{\omega}^{k\ell}$. On a facilement $CX_k = \omega^k X_k$ donc $E_{\omega^k}(C) = \text{Vect}(X_k)$.

Si $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ posons $M(a_0, \dots, a_{n-1}) = P(C)$ où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, on a

$$M(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \text{ dite } \mathbf{matrice\ circulante}.$$

On a vu que $(X_0, \dots, X_{n-1})$ est base de vecteurs propres de $P(C)$ et que $P(C)$ est semblable à la matrice diagonale $\text{Diag}(P(\omega^\ell))_{0 \leq \ell < n}$, le polynôme caractéristique

de $P(C)$ est $\prod_{\ell=0}^{n-1} [X - P(\omega^\ell)]$ et, en particulier, $\det[P(C)] = \prod_{\ell=0}^{n-1} P(\omega^\ell)$.

En particulier pour $n = 3$, on obtient :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj).$$

Remarque

C est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$ en général, il est donc essentiel de préciser sur quel corps on diagonalise une matrice à coefficients réels.

Exercice (incontournable)

Montrer que si u et v sont deux endomorphismes diagonalisables d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$ et s'ils commutent, il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à u et à v .

Donc $P(u, v)$ est diagonalisable si P est une fonction polynomiale de deux variables.

Solution

Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$. Le sous-espace vectoriel $E_\lambda(u)$ est stable par v car $u \circ v = v \circ u$. D'après le corollaire 5.2. l'application $\tilde{v}$ induite par v sur $E_\lambda(u)$ est diagonalisable. Donc $E_\lambda(u)$ a une base constituée de vecteurs propres communs à u et à v . Comme E est somme directe des sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ où λ parcourt $\text{Sp}(u)$, par concaténation des bases, E admet une base constituée de vecteurs propres communs à u et à v .

B. Trigonalisation

1. Définition

1. u est dit *trigonalisable* s'il existe une base relativement à laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.
2. $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *trigonalisable* si elle est matrice d'un endomorphisme trigonalisable ie. si elle est semblable à une matrice trigonale supérieure.

2. Théorème

- u est trigonalisable si, et seulement si, χ_u est scindé ou encore si, et seulement si, u annule un polynôme scindé.

Démonstration

- Si u est trigonalisable, relativement à une base sa matrice est triangulaire supérieure et χ_u est donc scindé.
- Si χ_u est scindé, le théorème de Cayley-Hamilton prouve que u annule un polynôme scindé.

• On montre par récurrence sur n que si u annule un polynôme scindé alors u est trigonalisable, l'initialisation pour $n = 1$ étant immédiate.

Si cela a été prouvé à un rang n et si u est un endomorphisme de E de dimension $n + 1$ annihilant P scindé alors π_u divise P donc est scindé. Comme π_u et χ_u ont même ensemble de zéros, χ_u admet au moins une racine (dans $\mathbb{K}$).

Soit donc λ valeur propre de u et e_1 vecteur propre associé, complétons en $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_{n+1})$ base de E . Relativement à $\mathcal{E}$ la matrice de u est

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ où } N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}). \text{ On a } 0 = P(M) = \begin{pmatrix} P(\lambda) & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & P(N) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

donc, par hypothèse de récurrence, N est trigonalisable, soit $Q N Q^{-1} = T$ où Q inversible et T triangulaire supérieure.

$$\text{Posons } R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \text{ alors } R \text{ est inversible d'inverse } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$\text{et, par blocs, } R M R^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q N Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ triangulaire}$$

supérieure et la fin de la récurrence. $\square$

Comme, sur $\mathbb{C}$, tout polynôme non constant est scindé, on a le

3. Corollaire

Tout élément de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout

$k \in \mathbb{N}$, $\text{tr}(M^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$ et le valeurs propres de $P(M)$ sont les $P(\lambda_i)$,

$1 \leq i \leq n$ pour $P \in \mathbb{C}[X]$.

C'est bien sûr faux sur $\mathbb{R}$ car, par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a un spectre réel vide.

4. Corollaire

Un endomorphisme est nilpotent si, et seulement si, il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

Démonstration

Si u est nilpotent, $u^n = 0$; le polynôme X^n scindé sur $\mathbb{K}$ annule u . D'après B.2. u est trigonalisable. On a déjà prouvé que $\text{Sp}(u) = \{0\}$.

Réciproquement, si u est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure stricte. Il s'ensuit que $\chi_u = X^n$ et l'on conclut avec le théorème de Cayley-Hamilton. $\square$

5. Cas de la dimension 2

On suppose $u \in \mathcal{L}(E)$, non diagonalisable mais trigonalisable et $\dim(E) = 2$. Alors $\text{Sp}(u) = \{\lambda\}$. On choisit e_1 un vecteur propre de u et on complète en $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base de E . On a alors $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$ car $\chi_u = (\lambda - X)^2$ et u est non diagonalisable. Dans la base $(\alpha e_1, e_2)$ de E la matrice de u est $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

EXERCICES

1. Soit $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ défini par : $P \mapsto (3X + 8)P - (5X - X^2)P' + (X^2 - X^3)P''$. U est-il injectif ? surjectif ? Déterminer les éléments propres de U .

2. $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in (\mathbb{C}_n[X])^2$, $\deg(A) = n$, et A scindé à racines simples. $U : P \mapsto R$ reste de la division euclidienne de PB par A . Montrer que U est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$. Déterminer son noyau, son image et ses éléments propres. *On pourra penser à des polynômes d'interpolation de Lagrange.*

3. $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $U : f \mapsto g$ telle que $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f(0)$.

Montrer que U est un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.

4. E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0, 0\}$, $\exists (U, V) \in (\mathcal{L}(E))^2$, $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $f^k = \lambda^k U + \mu^k V$. Montrer que U et V sont des projecteurs, que f est diagonalisable et que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \lambda^k U + \mu^k V$.

5. Diagonaliser les matrices suivantes dans le cas où elles sont diagonalisables.

- a. $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$; b. $B = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{C})$;
c. $C = \begin{pmatrix} a_i \\ a_j \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ où pour tout i , $a_i \neq 0$.

6. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'endomorphismes commutant deux à deux.

a. On suppose que $\mathcal{F}$ est constituée d'endomorphismes diagonalisables.

(i) Montrer qu'il existe un vecteur propre commun à tout élément de $\mathcal{F}$.
(On pourra raisonner par récurrence sur n).

(ii) Montrer l'existence d'une base de E constituée de vecteurs propres communs à tous les éléments de $\mathcal{F}$ (raisonner par récurrence sur la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $\mathcal{F}$).

b. Si $\mathcal{F}$ est constituée d'endomorphismes trigonalisables, montrer l'existence d'une base de E dans laquelle les éléments de $\mathcal{F}$ ont tous une matrice triangulaire supérieure.

7. a. Si f et g sont deux formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$ telles que $f \neq 0$, montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g) \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, g = \lambda f$.

b. Appliquer a. à la détermination des hyperplans stables par $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$.

c. Déterminer les sous-espaces stables par $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

8. Soit $M = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\alpha_{i,i} = a_i$, $\alpha_{i,i+1} = b_i = \alpha_{i+1,i}$ et $\alpha_{i,j} = 0$ sinon.

On pose $b_0 = b_n = 0$ et l'on suppose que : $a_i > |b_i| + |b_{i-1}|$, $1 \leq i \leq n$.

a. Montrer que si λ est valeur propre réelle de M , alors $0 < \lambda < 2 \max_{1 \leq i \leq n} (a_i)$.

b. Déterminer deux matrices A et B triangulaires supérieures (*resp.* inférieures) telles que : $M = AB$, les termes diagonaux de A valant 1.

9. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $A = (\alpha_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 3$ telle que $\alpha_{i,n} = \alpha_{n,i} = a_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\alpha_{i,j} = 0$ sinon.

10. Soit $(b, c) \in (\mathbb{C}^*)^2$. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \dots & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ est

diagonalisable, et en calculer une base de vecteurs propres. On pourra montrer que l'on peut se ramener au cas où $b = c = 1$.

11. $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \exists \lim_{+\infty} f \in \mathbb{R}\}$. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme de E défini par $\varphi : f \mapsto g$ telle que $g(x) = f(x+1)$.

12. Si $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

On définit $A \otimes B \in \mathfrak{M}_{n^2}(\mathbb{C})$ par : $A \otimes B = (a_{i,j} B)$.

a. Montrer que si $(A, A', B, B') \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))^4$, $(A \otimes B) \cdot (A' \otimes B') = (A \cdot A') \otimes (B \cdot B')$. En déduire que $A \otimes B$ est inversible si, et seulement si, A et B le sont.

b. Déterminer $\text{Sp}(A \otimes B)$. En déduire le polynôme caractéristique, la trace et le déterminant de $A \otimes B$.

c. Si X est un vecteur propre de A et Y un vecteur propre de B , déterminer un vecteur propre Z de $A \otimes B$. Montrer que si A et B sont diagonalisables, il en est de même de $A \otimes B$.

13. Montrer que si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si, et seulement si, $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$ et l'application induite par u sur $\text{Im}(u)$ est diagonalisable.

14. Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix}$, donner les éléments propres de B en fonction de ceux de A . Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable et inversible.

15. Si A est un élément diagonalisable de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, donner la dimension du commutant $\mathcal{C}_A = \{B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \mid AB = BA\}$ de A en fonction des ordres de multiplicité des valeurs propres de A .

16. Montrer que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ laisse stable une droite vectorielle ou un plan vectoriel.

17. Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est nilpotent si, et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{tr}(u^k) = 0$.

18. Si n est un entier impair, montrer qu'un élément A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 et dont les valeurs propres complexes sont de module 1 admet nécessairement 1 pour valeur propre.

19. a. Résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$.

b. Résoudre $X^p = A$ si A est un élément diagonalisable de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $p \geq 2$.

20. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $u \circ v - v \circ u = \alpha u + \beta v$.

a. On suppose $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $u^k \circ v - v \circ u^k$ en fonction de k, u, α . En déduire que u est nilpotent.

b. Dans le cas général montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

c. En déduire qu'il existe une base de E qui les trigonalise simultanément.

21. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}_+)$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

a. Montrer que $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et que, si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $|\lambda| \leq 1$.

b. Montrer que si, de plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,i} \neq 0$, la seule valeur propre de module 1 est 1.

c. Montrer que, si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{U}$, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda^p = 1$.

22. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $x \in E$ on pose $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$.

a. Montrer que, pour tout $x \in E$, I_x est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$; on note μ_x son générateur unitaire.

b. Montrer que $\pi_u = \text{ppcm}(\mu_x, x \in E)$ et que, si μ_x et μ_y sont premiers entre eux, alors $\mu_{x+y} = \mu_x \mu_y$.

- c. En déduire l'existence d'un élément x de E tel que $\pi_u = \mu_x$.
- d. Montrer qu'il existe un élément x de E tel que $E = \{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ si, et seulement si, $\pi_u = \chi_u$.

23. Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si $P_1, \dots, P_k$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux tels que $\Pi = \prod_{i=1}^k P_i$ est annulateur de u . On pose $f(X) = \frac{1}{\Pi} = \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{P_i}$ où, pour tout i , $A_i \wedge P_i = 1$ puis $Q_i = A_i \prod_{j \neq i} P_j$ et $q_i = Q_i(u)$.

- a. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, q_i est un projecteur de noyau $\bigoplus_{j \neq i} \text{Im}(q_j)$.
- b. Qu'en déduit-on si u est diagonalisable ?

24. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 2 \\ -1 & -6 & 5 & -2 \\ -1 & -10 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

25. Une localisation des valeurs propres

a. On dit que $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice à diagonale strictement dominante si $|a_{i,i}| > \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que A est inversible.

b. Montrer le **théorème de Hadamard**.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}$ i.e.

$\text{Sp}(A)$ est contenu dans la réunion des disques fermés de centres les $a_{i,i}$ et de rayons les $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

26. Projecteurs spectraux. Si u est diagonalisable et, pour tout λ dans $\text{Sp}(u)$, on note p_λ la projection sur $E_\lambda(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{\mu \in \text{Sp}(u) \setminus \{\lambda\}} E_\mu(u)$. Les p_λ sont

appelés projecteurs spectraux de u . Alors, si $(\lambda, \mu) \in [\text{Sp}(u)]^2$, $p_\lambda \circ p_\mu = \delta_{\lambda, \mu} p_\lambda$ et $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} p_\lambda = I_E$. En effet les p_λ sont les projecteurs associés à la décomposition

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u).$$

Si u est diagonalisable, montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda^k p_\lambda$ et $p_\lambda \in \mathbb{K}[u]$.

27. Soit $(A, B) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $AB = BA$ et A nilpotente.

Montrer que $\det(A+B) = \det(B)$. (On examinera, d'abord le cas où $B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.)

28. Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

29. Montrer que deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, sont semblables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra poser $A = PBP^{-1}$ où $P = Q + iR$,

$Q, R \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q + \lambda R \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

30. a. Montrer que si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors

$X^p \chi_{AB}(X) = X^n \chi_{BA}(X)$. On pourra écrire $A = Q^{-1} J_r P$ si A est de rang $r > 0$.

b. Si $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2$, montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ en considérant d'abord le cas où A est inversible.

SOLUTIONS DES EXERCICES

1. $\forall k \in \mathbb{N}, U(X^k) = (k+1)(3-k)X^{k+1} + (k-2)(k-4)X^k \quad (\star).$

Donc si $\deg(P) = k \in \mathbb{N}$, alors $\deg(U(P)) = k+1$ si $k \neq 3$ et k sinon. Le polynôme X^4 n'a donc pas d'antécédent par U . D'où U n'est pas surjective.

Si $\deg(P) > 3$, alors $\deg(U(P)) > 4$. Seuls $\mathbb{R}_3[X]$ et $\{0\}$ sont stables par U . On est ramené à la recherche des éléments propres de l'endomorphisme $\tilde{U}$ induit par U sur $\mathbb{R}_3[X] = E$. Soit A la matrice de U dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de E .

D'après $(\star)$, on a : $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. D'où $\text{Sp}(A) = \{0, -1, 3, 8\}$ et A est

diagonalisable. On recherche les valeurs propres associées en résolvant les systèmes linéaires homogènes $(A - \lambda I_4)Y = 0$ où $Y \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On obtient facilement les droites vectorielles $E_0(U)$, $E_{-1}(U)$, $E_3(U)$ et $E_8(U)$ engendrées respectivement par $(X^2 + 3X^3)$, X^3 , $(3X + 4X^2 + 3X^3)$ et $(10 + 6X + 3X^2 + X^3)$.

On note que U est non injective.

2. Du théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{C}_n[X]$ on déduit que U est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ et même, U est une projection.

Notons $A(X) = \alpha \prod_{i=1}^n (X - a_i)$ et $L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$ où $i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$ et $\alpha \neq 0$.

$\{L_1, \dots, L_n\}$ est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ constituée des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $a_1, \dots, a_n$. D'où $R = \sum_{i=1}^n R(a_i) L_i(X) = \sum_{i=1}^n P(a_i) B(a_i) L_i(X)$ car $PB = AQ + R$. D'autre part, la famille $\mathcal{B} = \{L_1, \dots, L_n, A\}$ est libre.

En effet, si $P = \alpha_0 A + \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i(X)$ et si $\alpha_0 \neq 0$, alors $\deg(P) = \deg(\alpha_0 A) = n$.

Donc $P = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$ puis $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ car $\{L_1, \dots, L_n\}$ est libre.

Comme $\text{Card}[\mathcal{B}] = n+1 = \dim[\mathbb{C}_n[X]]$, la famille $\mathcal{B}$ constitue une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Donc : $P = \sum_{i=1}^n x_i L_i + x_0 A \quad (\star).$

Notons $\beta_i = B(a_i)$, alors $U(P) = R = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i L_i \quad (\star\star)$.

De $(\star)$ et $(\star\star)$ on déduit que $M_B(U) = \text{Diag}(\beta_1 \cdots \beta_n 0)$. D'où U est diagonalisable. $\text{rg}(U) = \text{rg}(M_B(U))$ est égal au nombre des β_i non nuls.

Supposons $\beta_1 \cdots \beta_r \neq 0$ et $\beta_{r+1} = \cdots = \beta_n = 0$. On a $\text{Im}(U) = \text{Vect}(L_1, \dots, L_r)$, $\text{Ker}(U) = \text{Vect}(L_{r+1}, \dots, L_n, A)$ et $\mathbb{C}_n[X] = \text{Im}(U) \oplus \text{Ker}(U)$.

3. f étant continue sur $[0, 1]$, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$

et $F' = f$. Comme, pour tout $x \in]0, 1]$, $g(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$ on a

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = F'(0) = f(0) = g(0)$, la fonction g est continue en 0. Comme, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$, on peut conclure que $g \in E$. Comme l'intégration est linéaire, U est un endomorphisme de E .

$$U(f) = \lambda f \iff \left(\forall x \in [0, 1], \int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x) \text{ et } f(0) = \lambda f(0) \right).$$

Donc : $\forall x \in]0, 1], \lambda \frac{d}{dx}(x f(x)) = f(x)$.

f est solution sur $]0, 1]$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients fonctions continues : $y' + \frac{(\lambda - 1)}{x\lambda} y = 0$ car si $\lambda = 0$, alors $f = 0$ ce qui est impossible car f est un vecteur propre. Donc : $\forall x \in]0, 1], y(x) = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.

Comme $f \in E$, on a $\lim_0 f = f(0) \in \mathbb{R}$. Donc $\frac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$ i.e. $\lambda \in]0, 1]$.

Si $\lambda \in]0, 1]$, alors $y \in E$ et l'on vérifie que $U(f) = \lambda f$.

Donc $\text{Sp}(U) =]0, 1]$ et pour tout $\lambda \in]0, 1]$, $E_\lambda(U)$ est la droite vectorielle $\text{Vect}(f_\lambda)$ où $f_\lambda(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ si $x \in]0, 1]$ et 1 si $x = 0$.

4. De $f = \lambda U + \mu V$ et $f^2 = \lambda U^2 + \mu V^2$, on déduit $f^2 - \lambda f = \mu(\mu - \lambda)V$.

De $f^3 = \lambda U^3 + \mu V^3$ et $f^2 = \lambda U^2 + \mu V^2$, on déduit $f^3 - \lambda f^2 = \mu^2(\mu - \lambda)V$.

Donc $f^3 - \lambda f^2 - \mu(f^2 - \lambda f) = 0$ i.e. $f \circ (f^2 - (\lambda + \mu)f + \lambda \mu I_E) = 0$.

Donc le polynôme $P = X(X - \lambda)(X - \mu)$ est annulateur de f .

• Si $\lambda\mu(\lambda - \mu) \neq 0$, P étant scindé et à racines simples, f est diagonalisable.

On a $V = \frac{f \circ (f - \lambda I_E)}{\mu(\mu - \lambda)}$ et $U = \frac{f \circ (f - \mu I_E)}{\lambda(\lambda - \mu)}$. On vérifie que $U^2 = U$, $V^2 = V$ et $V \circ U = U \circ V = 0$ car $P(f) = 0$. Donc U et V sont des projecteurs de E .

• Si $\lambda = 0$, $f = \mu V$, $f^2 = \mu^2 V = \mu^2 V^2$. Donc $V^2 = V$ car $\mu \neq 0$. D'où V est un projecteur, donc est diagonalisable. $E_\mu(f) = \text{Im}(V)$ et $E_0(f) = \text{Ker}(V)$.

• Si $\mu = 0$ ou $\lambda = \mu$ un raisonnement analogue permet de conclure.

Comme $f^3 = (\lambda + \mu)f^2 - \lambda \mu f$, pour tout $k \geq 1$, $f^{k+2} = (\lambda + \mu)f^{k+1} - \lambda \mu f^k$. Il suffit de faire une récurrence forte en supposant $f^p = \lambda^p U + \mu^p V$ pour $p \leq k + 1$ pour obtenir $f^{k+2} = (\lambda + \mu)(\lambda^{k+1} U + \mu^{k+1} V) - \lambda \mu (\lambda^k U + \mu^k V) = \lambda^{k+2} U + \mu^{k+2} V$.

5. a. $A^2 = 2I_3 + A$. Donc $P = X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$ est annulateur de A , scindé et à racines simples. La matrice A est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Comme A n'est pas scalaire, $P = \Pi_A$ est le polynôme minimal de A et $\text{Sp}(A) = \{-1, 2\}$.

Recherche de $E_{-1}(A) : (A + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + ay + a^2z = 0$.

Donc $E_{-1}(A)$ est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont une équation est $x + ay + a^2z = 0$. $E_{-1}(A) = \text{Vect}(e'_1, e'_2)$ où $e'_1 = ae_1 - e_2$, $e'_2 = a^2e_1 - e_3$ et où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a facilement $E_2(A) = \text{Vect}(e'_3)$ où $e'_3 = a^2e_1 + ae_2 + e_3$. Donc $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de A . la

matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^2 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On détermine P^{-1} par des

opérations élémentaires, la résolution d'un système linéaire, ou avec une boîte à outils telle que TI, HP, Maple, Mathematica, ... $P^{-1} = \frac{1}{3a^2} \begin{pmatrix} 1 & -2a^2 & a^3 \\ 1 & a & -2a^2 \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$.

On a : $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{Diag}(-1, -1, 2)$.

b. $B^2 = -I_{2n}$. Le polynôme $T^2 + 1$ étant scindé, à racines simples sur $\mathbb{C}$ et annulateur de B , la matrice B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et pas sur $\mathbb{R}$. Comme $B \neq iI_{2n}$ et $B \neq -iI_{2n}$, le polynôme minimal de B est $\pi_B(T) = T^2 + 1$. Donc $\text{Sp}(B) = \{i, -i\}$. Recherchons les sous-espaces propres $E_i(B)$ et $E_{-i}(B)$ en notant $X = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ où Y et Z sont éléments de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Notons $\varepsilon \in \{-1, +1\}$.

$$BX = \varepsilon iX \iff \begin{cases} -Z = \varepsilon iY \\ Y = \varepsilon iZ \end{cases} \iff Y = \varepsilon iZ \quad (\star).$$

Si ${}^tY = (x_1, \dots, x_n)$ et ${}^tZ = (x_{n+1}, \dots, x_{2n})$, alors :

($\star$) $\iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = \varepsilon i x_{n+k}$. Notons $(e_1, \dots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$. on a $E_{\varepsilon i}(B) = \text{Vect}(\varepsilon i e_k + e_{n+k})_{1 \leq k \leq n}$. D'où $B = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} iI_n & -iI_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ -I_n & iI_n \end{pmatrix}.$$

c. $\text{rg}(C) = 1$. D'après un résultat du chapitre précédent, $C^2 = \text{tr}(C)C$ ie. $C^2 = nC$. Le polynôme $X(X - n)$ est scindé à racines simples, annulateur de C , donc C est diagonalisable. Comme $C \neq 0$ et $C \neq nI_n$, on a $\pi_C = X(X - n)$ et $\text{Sp}(C) = \{0, n\}$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

$E_0(C) = \text{Ker}(C)$ est l'hyperplan de $\mathbb{C}^n$ d'équation : $\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 0$ dont une base est $(e'_1, \dots, e'_{n-1})$ où $e'_k = -a_k e_k + a_n e_n$. D'où la matrice P .

$E_n(C) = \text{Vect}(e'_n)$ où $e'_n = (a_1, \dots, a_n)$. Déterminons P^{-1} par la méthode des systèmes linéaires ie. $PX = Y \iff X = P^{-1}Y$.

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \iff (1) \begin{cases} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, -a_k x_k + a_n x_n = y_k, \\ a_n x_1 + \dots + a_n x_n = y_n. \end{cases}$$

$$(1) \iff \begin{cases} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, -x_k + x_n = \frac{y_k}{a_k}, \\ x_1 + \dots + x_n = \frac{y_n}{a_n}. \end{cases}$$

En sommant les n inégalités précédentes, on a : $x_n = \frac{1}{n} \left[\frac{y_1}{a_1} + \dots + \frac{y_n}{a_n} \right]$.

En reportant la valeur de x_n dans les $n - 1$ premières équations, on obtient :

$$x_k = \frac{1}{n} \left[(1-n) \frac{y_k}{a_k} + \sum_{i \neq k} \frac{y_i}{a_i} \right] \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket. \text{ D'où } P^{-1}.$$

Autre méthode : on peut remarquer que $E = \Delta J \Delta^{-1}$ où $\Delta = \text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ et J la matrice carrée vue en cours, qui a tous ses éléments égaux à 1 et qui est diagonalisable.

6. a. (i) Si $\mathcal{F} \subset \text{Vect}(I_E)$ le résultat est clair, sinon on raisonne par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant immédiat.

Supposons la propriété établie à un rang n et E de dimension $n + 1$. Soit $u \in \mathcal{F} \setminus \text{Vect}(I_E)$ et $\lambda \in \text{Sp}(u)$, alors $1 \leq \dim [E_\lambda(u)] \leq n$ et $E_\lambda(u)$ est stable par tout élément de $\mathcal{F}$. Par hypothèse de récurrence $E_\lambda(u)$ contient un vecteur propre commun à tous les endomorphismes induits par les éléments de $\mathcal{F}$, ce vecteur convient.

(ii) On va raisonner par récurrence sur $p = \dim [\text{Vect}(\mathcal{F})]$. Si $p = 0$ ou 1 c'est immédiat. Supposons le résultat établi jusqu'à un rang p et $\text{Vect}(\mathcal{F})$ de dimension $p + 1$. Choisissons $(u_1, \dots, u_{p+1})$ libre maximale dans $\mathcal{F}$ donc base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ et

$$\text{écrivons } E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(u_{p+1}).$$

Si $1 \leq i \leq k$, $u_1, \dots, u_p$ induisent des endomorphismes diagonalisables $u_1^i, \dots, u_p^i$ de $E_{\lambda_i}(u_{p+1})$, ces endomorphismes commutent deux à deux et on peut donc trouver, par hypothèse de récurrence, une base $\mathcal{E}^i$ de $E_{\lambda_i}(u_{p+1})$ formée de vecteurs propres communs à $u_1^i, \dots, u_p^i$. La réunion des $\mathcal{E}^i$ constitue une base de E formée de vecteurs propres communs à tous les u_k , $1 \leq k \leq p + 1$. Si $u \in \mathcal{F}$, en écrivant u comme combinaison linéaire des u_k on constate que $\mathcal{E}$ est formée de vecteurs propres de u .

b. L'existence d'un vecteur propre commun se fait comme au a. en utilisant le fait que si u est trigonalisable, alors $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$.

Pour l'existence d'une base commune de trigonalisation on va raisonner par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant immédiat. Supposons donc la propriété établie à un rang n et E de dimension $n + 1$.

Soit e_1 vecteur propre commun à tous les éléments de $\mathcal{F}$ et complétons en $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_{n+1})$ base de E . Relativement à $\mathcal{E}$ la matrice $M(u)$ d'un élément

$$u \text{ de } \mathcal{F} \text{ est } \begin{pmatrix} \lambda(u) & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & A(u) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ d'où } \chi_u = [\lambda(u) - X] \chi_{A(u)}, \text{ le polynôme}$$

caractéristique de $A(u)$ est scindé sur $\mathbb{K}$, $A(u)$ est trigonalisable.

Si u et v sont dans $\mathcal{F}$ on a $u \circ v = v \circ u$ d'où, par blocs, $A(u)A(v) = A(v)A(u)$, l'hypothèse de récurrence s'applique donc à $\{A(u) \mid u \in \mathcal{F}\}$.

Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout u dans $\mathcal{F}$, $PA(u)P^{-1} = T(u)$ triangulaire supérieure. On pose $Q = \text{Diag}(1, P)$, alors, comme d'habitude, $Q \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ et

$$Q^{-1} = \text{Diag}(1, P^{-1}) \text{ et } QM(u)Q^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda(u) & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & T(u) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ triangulaire}$$

supérieure pour tout u de $\mathcal{F}$.

7. a. Si $g = \lambda f$, il est clair que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

Réciproquement, si $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$, comme $\text{Ker}(f)$ est un hyperplan de E , il existe $a \in E \setminus \text{Ker}(f)$ tel que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Vect}(a)$.

Donc $\forall x \in E, \exists ! (y, \alpha) \in \text{Ker}(f) \times \mathbb{K}, x = y + \alpha a$.

$f(x) = \alpha f(a)$ et $g(x) = \alpha g(a)$ car $y \in \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

Il s'ensuit que $g = \lambda f$ où $\lambda = g(a)/f(a) \in \mathbb{K}$.

b. Si $\mathcal{B}$ est une base de E , $H = \left\{ x \in E \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \right\}$ est un hyperplan de E .

Notons $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(u)$, ${}^tL = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et ${}^tX = (x_1, \dots, x_n)$.

On a : $X \in H \iff {}^tLX = 0$.

$u(H) \subset H \iff (\forall X \in H, {}^tLAX = 0) \iff ({}^tLX = 0 \Rightarrow {}^tLAX = 0) \quad (\star)$.

Les deux formes linéaires $\varphi : X \mapsto {}^tLX$ et $\psi : X \mapsto {}^tLAX$ sont telles que $\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Ker}(\psi)$. Donc $(\star) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{K}, \psi = \lambda \varphi) \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, {}^tLA = \lambda {}^tL$.

Donc $(\star) \iff {}^tAL = \lambda L$ i.e. L est un vecteur propre de tA .

c. $\{0\}$ et $\mathbb{C}^3$ sont stables par A .

• Recherche des droites vectorielles stables par A . Pour ce, étudions les sous-espaces propres de A . La matrice A est de rang 1. En effet, si $C_k(A)$ est la k -ième colonne de A , on a : $C_2(A) = jC_1(A)$ et $C_3(A) = j^2C_1(A)$. D'après le théorème du rang, $\dim[\text{Ker}(A)] = \dim[E_0(A)] = 2$. Zéro est valeur propre de A de multiplicité au moins égale à 2. Comme $\text{tr}(A) = 0$, c'est la seule valeur propre de A . Donc $\chi_A(T) = T^3$.

Le sous-espace propre $E_0(A)$ est le plan $\mathcal{P}$ dont une équation est : $x + jy + j^2z = 0$. Toute droite vectorielle contenue dans $\mathcal{P}$ est stable et $\mathcal{P}$ est stable par A .

• Recherche des plans vectoriels stables par A . D'après a. cela revient à rechercher les sous-espaces propres de tA . Comme, $\chi_t = \chi_A$ la seule valeur propre de tA est 0. $P : ax + by + cz = 0$ est stable par A si, et seulement si, $a + bj + cj^2 = 0$ cf. b). Donc les plans stables par A sont les plans d'équations : $b(y - jx) + c(z - j^2x) = 0$ où $(b, c) \in \mathbb{C}^2$.

8. a. Nous verrons au chapitre 9 que M étant symétrique réelle, ses valeurs propres sont réelles et elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$, il existe $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. Notons ${}^tX = (x_1 \dots x_n)$.

$MX = \lambda X \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, b_{i-1}x_{i-1} + a_i x_i + b_{i+1}x_{i+1} = \lambda x_i. \quad (1)$

Comme $X \neq 0$, soit $|x_k| = \max_{0 \leq i \leq n} |x_i|$. On déduit de (1) :

$|a_k - \lambda| |x_k| \leq (|b_{k-1}| + |b_{k+1}|) |x_k|$. Donc : $|a_k - \lambda| \leq |b_{k-1}| + |b_{k+1}| < a_k$ par hypothèse. D'où $0 < \lambda < 2a_k \leq 2 \max_{1 \leq i \leq n} (a_i)$.

b. Cherchons A et B de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \beta_{n-1} & \gamma_n \end{pmatrix}.$$

$AB = M \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \beta_{i-1} = b_{i-1}, \gamma_i + \alpha_i \beta_i = a_i \text{ et } \alpha_i \gamma_{i+1} = b_i.$

On pose $\alpha_n = 0$. D'où $\gamma_n = a_n$ et $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \beta_i = b_i, \gamma_i = a_i - \frac{b_i^2}{\gamma_{i+1}}, \alpha_i = \frac{b_i}{\gamma_{i+1}}$ par une récurrence descendante.

Il reste à s'assurer que l'on définit ainsi tous les γ_i .

Montrons par récurrence que $\gamma_{i+1} > |b_i|$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a $\gamma_n = a_n > |b_{n-1}|$.

$\gamma_i = a_i - \frac{b_i^2}{\gamma_{i+1}} > a_i - |b_i| > |b_{i-1}|$ par hypothèse. Donc : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \gamma_i > 0$.

9. Si $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, on a $\chi_A(T) = T^{n-1}(T - a_n)$ car A est diagonale.

Si les $a_i, 1 \leq i \leq n-1$ sont non tous nuls, $\text{rg}(A) = 2$. Donc, d'après le théorème du rang, $\dim [E_0(A)] = n-2$ et la multiplicité de la valeur propre 0 est $\omega(0) \geq n-2$.

D'où $\chi_A(T) = T^{n-2}(T^2 - \alpha T + \beta)$.

D'après un théorème du cours, $\chi_A(T) = T^n - \text{tr}(A)T^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$, donc $\alpha = \text{tr}(A) = a_n$.

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i x_n = \lambda x_i, & (1) \\ a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \lambda x_n. & (2) \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 0, x_i = \frac{a_i}{\lambda} x_n$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ d'après (1).

d'où (3) $\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i^2}{\lambda} + a_n \right) x_n = \lambda x_n$ d'après (2).

Si $x_n = 0$, alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0$ et $X = 0$ ce qui est impossible si X

est un vecteur propre. Donc $x_n \neq 0$ et (3) $\iff \lambda^2 - a_n \lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$ (*)

Donc si λ est une valeur propre non nulle de A , elle est racine d'un polynôme de degré 2 cf. (*). Donc : $\chi_A(T) = T^n \left(T^2 - a_n T - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \right)$.

Autre méthode : $\chi_A(X) = X^{n-2}(X^2 - a_n X + b)$ car $\text{tr}(A) = a_n$.

$\chi_A(-1) = \det(A + I_n) = 1 + a_n + b$. L'opération élémentaire $L_n \leftarrow L_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i L_i$

dans le calcul de $\det(A + I_n)$ donne un déterminant d'une matrice triangulaire

supérieure. Donc : $\det(A + I_n) = a_n + 1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = a_n + 1 + b$. D'où b .

10. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A . On cherche $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ telle que :

$e'_k = \alpha_k e_k$ et $u(e'_k) = \mu(e'_{k-1} + e'_{k+1})$.

$e'_k = \alpha_k e_k \Rightarrow u(e'_k) = \alpha_k (b e_{k-1} + e_{k+1})$. Donc $b \alpha_k = \mu \alpha_{k-1}$ et $c \alpha_k = \mu \alpha_{k+1}$.

Si $\nu = \frac{\mu}{b} = \frac{c}{\mu}$, alors $\alpha_{k+1} = \nu \alpha_k$. Donc : $\alpha_k = \nu^k$ convient.

D'où $\mu = b\nu = \frac{c}{\nu}$ ie. $\nu^2 = \frac{c}{b}$. Il existe un $\nu \in \mathbb{C}$ car tout élément de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a deux racines carrées. Par suite $M = \mu A$ où l'on a remplacé b et c par 1 dans M pour obtenir A .

Nous verrons dans un autre chapitre que A étant symétrique réelle, ses valeurs propres sont réelles et elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Mais, pour l'instant cela nous est inutile.

$\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \iff \exists X \neq 0, AX = \lambda X$. Notons ${}^tX = (x_1 \dots x_n)$. On a :

$$AX = \lambda X \iff (1) \begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 = 0 \\ \forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, x_{k-1} - \lambda x_k + x_{k+1} = 0 \\ x_{n-1} - \lambda x_n = 0 \end{cases}$$

$$(1) \iff \begin{cases} x_0 = x_{n+1} = 0 \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_{k-1} - \lambda x_k + x_{k+1} = 0. \end{cases}$$

La suite $(x_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ est une suite récurrence linéaire finie dont l'équation caractéristique est : $r^2 - \lambda r + 1 = 0$. Cette dernière a deux racines r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$ qui vérifient $r_1 + r_2 = \lambda$ et $r_1 r_2 = 1$.

Si $r_1 \neq r_2$: $\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket, x_k = ar_1^k + br_1^{-k}$.

$x_0 = 0 \Rightarrow b = -a$; $x_{n+1} = 0 \Rightarrow a(r_1^{n+1} - r_1^{-n-1}) = 0$.

$a \neq 0$ sinon $X = 0$. Donc $r_1^{2(n+1)} = 1$ ie. $r_1 = \exp\left(i \frac{2p\pi}{2(n+1)}\right), 0 \leq p \leq 2n$.

Donc $\lambda = r_1 + r_1^{-1} = 2 \cos\left(\frac{p\pi}{(n+1)}\right) = \alpha_p, 0 \leq p \leq 2n$.

$\{\alpha_p \mid p \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ est un ensemble de cardinal n car $0 < \frac{p\pi}{n+1} < \pi$ si $1 \leq p \leq n$ et $\cos$ est strictement décroissant sur $[0, \pi]$. Donc A possède au moins n valeurs propres réelles distinctes. Or $\deg(\chi_A) = n$, donc $\text{Sp}(A) = \{\alpha_p \mid p \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$. Le sous-espace propre $E_{\alpha_p}(A)$ est la droite vectorielle engendrée par $v_p = \sin\left(\frac{kp\pi}{(n+1)}\right)_{1 \leq k \leq n}$.

11. E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et l'on vérifie que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

$\lambda \in \text{Sp}(\varphi) \iff \exists f \in E \setminus \{0\}, \forall x \in [0, +\infty[, f(x+1) = \lambda f(x). \quad (\star)$

Par récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x+n) = \lambda^n f(x). \quad (1)$

f étant non nulle, il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Donc $\frac{f(x_0+n)}{f(x_0)} = \lambda^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la limite de la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe dans $\mathbb{R}$. D'où $\text{Sp}(\varphi) \subset]-1, 1]$.

Réciproquement, soit $\lambda \in]-1, 1]$. Examinons deux cas.

• Si $\lambda = 1$ ($\star$) équivaut à f est 1-périodique et $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}, f(x+n) = f(x)$. Par passage à la limite, x fixé, n tendant vers ∞ , on a f constante.

• Si $-1 < \lambda < 1$, il existe $f_0 \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $f_0(1) = \lambda f_0(0)$.

Posons $f|_{[0, 1]} = f_0$, si $x \in]1, 2], f(x) = \lambda f(x-1)$, d'où f est continue sur $]1, 2]$.

$\lim_{1+} f = f(1) = \lambda f(0)$. Donc : $f|_{[1, 2]} \in \mathcal{C}([1, 2], \mathbb{R})$ et $f|_{[0, 2]} \in \mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$.

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]n, n+1], f(x) = \lambda^n f(x-n)$ et $f|_{[0, n]} \in \mathcal{C}([0, n], \mathbb{R})$.

D'où l'existence de $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tel que $\varphi(f) = \lambda f$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \lambda^{E(x)} f(x - E(x))$. D'où $\lim_{+\infty} f = 0$.

En conclusion, $\text{Sp}(\varphi) =]-1, 1]$ et l'on a déterminé les vecteurs propres.

12. a. Si $A \otimes B = (a_{i,j}B)$ et $A' \otimes B' = (a'_{i,j}B')$, alors $(A \otimes B).(A' \otimes B') = (C_{i,j})$

où, en faisant le produit par blocs, $C_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} B a'_{k,j} B' = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} a'_{k,j} \right) B B'$

terme générique de $(AA') \otimes (BB')$. D'où le résultat.

Si A et B sont inversibles, $(A \otimes B).(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I_n \otimes I_n = I_{n^2}$.

Donc $A \otimes B$ est inversible et son inverse est $A^{-1} \otimes B^{-1}$.

Si $A \otimes B$ est inversible et A non inversible, il existe $A' \neq 0$ telle que $AA' = 0$. On peut prendre pour matrice A' la projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\text{Ker}(A)$ (ou ${}^t\text{Com}(A)$ dans le cas où $\text{rg}(A) = n - 1$). On a : $(A \otimes B).(A' \otimes I_n) = (AA') \otimes B = 0$: absurde.

b. En tant qu'éléments de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, A et B sont trigonalisables. Il existe P et Q éléments de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que $A = PTP^{-1}$ et $B = QT'Q^{-1}$ où T et T' sont trigonales supérieures, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (*resp.* $(\mu_1, \dots, \mu_n)$) sont les valeurs propres de A (*resp.* B) et les éléments diagonaux de T (*resp.* T').

D'après a. $A \otimes B = (P \otimes Q).(T \otimes T').(P \otimes Q)^{-1}$. Donc les matrices $A \otimes B$ et $T \otimes T'$ sont semblables. Donc $\text{Sp}(A \otimes B) = \text{Sp}(T \otimes T')$.

Les valeurs propres de $A \otimes B$ sont les éléments de $\{\lambda_i \mu_j \mid (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$.

Donc $\chi_{A \otimes B}(T) = \prod_{1 \leq i, j \leq n} (T - \lambda_i \mu_j)$ et $\text{tr}(A \otimes B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j = \text{tr}(A) \text{tr}(B)$.

$\det(A \otimes B) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (\lambda_i \mu_j) = [\det(T)]^n [\det(T')]^n = [\det(A)]^n [\det(B)]^n$.

c. Si $AX = \lambda X$ et $BY = \mu Y$ avec ${}^tX = (x_1 \dots x_n)$ et ${}^tY = (y_1 \dots y_n)$ posons Z , l'élément de $\mathfrak{M}_{n^2, 1}(\mathbb{C})$ tel que ${}^tZ = (x_1 Y \dots x_n Y)$. On a :

$$(A \otimes B).Z = \begin{pmatrix} x'_1 BY \\ \vdots \\ x'_n BY \end{pmatrix} \text{ où } AX = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}. \text{ Donc } (A \otimes B).Z = \lambda \mu Z.$$

Donc Z est un vecteur propre de $A \otimes B$ associé à la valeur propre $\lambda \mu$.

Notons $Z = [X, Y]$. Supposons A et B diagonalisables. Il existe $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$ deux bases de $\mathbb{C}^n$ constituées de vecteurs propres de A et B . Il suffit de montrer que $([X_i, Y_j])_{1 \leq i, j \leq n}$ est libre pour conclure que $A \otimes B$ est diagonalisable.

Soit $(\alpha_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n^2}$ tel que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} [X_i, Y_j] = 0$. Notons ${}^tX_i = (x_{i,1} \dots x_{i,n})$.

Alors ${}^t[X_i, Y_j] = (x_{i,1} Y_j \dots x_{i,n} Y_j)$. Donc : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} x_{i,k} Y_j = 0$.

Comme $(Y_p)_{1 \leq p \leq n}$ est libre, $\sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} x_{i,k} = 0$ pour tout $(j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

Donc : $\sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} X_i = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme $(X_p)_{1 \leq p \leq n}$ est libre, $\alpha_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. D'où la liberté de $([X_i, Y_j])_{1 \leq i, j \leq n}$ et la conclusion.

13. Si $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$ et si l'application induite par u sur $\text{Im}(u)$ est diagonalisable, alors $\text{Im}(u)$ a une base constituée de vecteurs propres de u et $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$. Donc u est diagonalisable.

Réciproquement : si u est diagonalisable, et x un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$, alors $x = \frac{1}{\lambda} u(x) \in \text{Im}(u)$. Donc $E' = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \text{Sp}(u) \\ \lambda \neq 0}} E_\lambda(u) \subset \text{Im}(u)$.

Si $\text{Ker}(u) \neq \{0\}$, alors $\text{Ker}(u) = E_0(u)$. Donc $E = \text{Ker}(u) \oplus E'$.

Du théorème du rang, on déduit que $\text{Im}(u)$ et E' ont même dimension. Donc $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$. L'application induite par u sur $\text{Im}(u)$ est diagonalisable car u est diagonalisable et $\text{Im}(u)$ est stable par u .

14. Si $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ où $(X_1, X_2) \in (\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^2$, on a $BX = \begin{pmatrix} X_2 \\ AX_1 \end{pmatrix}$ et donc :

$$BX = \lambda X \iff \begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ AX_1 = \lambda^2 X_1 \end{cases}$$

Par suite X est vecteur propre de B associé à λ si, et seulement si, X_1 est vecteur propre de A associé à λ^2 et $X_2 = \lambda X_1$.

Cela prouve que $\lambda \in \text{Sp}(B)$ si, et seulement si, $\lambda^2 \in \text{Sp}(A)$ et que, dans ce cas, $E_\lambda(B)$ et $E_{\lambda^2}(A)$ sont des espaces vectoriels isomorphes.

Par suite $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(B) \setminus \{0\}} \dim [E_\lambda(B)] = 2 \sum_{\mu \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}} \dim [E_\mu(A)]$ et $\dim [E_0(B)] = \dim [E_0(A)]$.

Comme B est diagonalisable si, et seulement si, $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(B)} \dim [E_\lambda(B)] = 2n$ et A est diagonalisable si, et seulement si, $\sum_{\mu \in \text{Sp}(A)} \dim [E_\mu(A)] = n$, on a l'équivalence demandée.

15. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = D = \text{Diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_k I_{n_k})$ où les λ_i sont deux à deux distincts et les n_i dans $\mathbb{N}^*$.

$B \in \mathcal{C}_A$ si, et seulement si, $P^{-1}BP \in \mathcal{C}_D$ et donc $X \mapsto P^{-1}XP$ induit un isomorphisme de $\mathcal{C}_A$ sur $\mathcal{C}_D$.

De plus, si $C \in \mathcal{C}_D$ alors tout sous-espace propre de D est stable par C ie. $C = \text{Diag}(C_1, \dots, C_k)$ où, pour tout i , $C_i \in \mathfrak{M}_{n_i}(\mathbb{K})$. La réciproque découle du produit par blocs et donc $\mathcal{C}_D = \{ \text{Diag}(C_1, \dots, C_k) \mid \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, C_i \in \mathfrak{M}_{n_i}(\mathbb{K}) \}$.

Par conséquent $\dim(\mathcal{C}_A) = \sum_{i=1}^k n_i^2$.

16. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$ alors il existe une droite vectorielle stable par u par définition des vecteurs propres.

Sinon il n'existe aucune droite vectorielle stable par u et donc chaque facteur irréductible de π_u est un trinôme à discriminant strictement négatif.

Soit $T = X^2 + aX + b$ un tel facteur et $x \in \text{Ker}(u^2 + au + bI_E) \setminus \{0\}$.

Alors $\text{Vect}(x, u(x))$ est un plan vectoriel stable par u , on peut même remarquer que le polynôme minimal de l'endomorphisme induit est T .

17. Si u est nilpotent alors, en trigonalisant, $\text{tr}(u) = 0$ et donc, comme pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, u^k est nilpotent, $\text{tr}(u^k) = 0$.

Réciproquement si l'on suppose que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{tr}(u^k) = 0$, en posant $\Pi_u = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0$, on a $u^p + a_{p-1}u^{p-1} + \dots + a_0I_E = 0$ et, par linéarité de la trace, $na_0 = 0$. Par suite X divise π_u . On va terminer en raisonnant par l'absurde de deux façons différentes.

• *Première méthode* : on pose $\Pi_u = X^h Q$ où $h \geq 1$ et Q est un polynôme non constant premier avec X . La lemme de décomposition des noyaux prouve que

$E = \text{Ker}(u^h) \oplus \text{Ker}[Q(u)]$ et, dans une base adaptée, u a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ où $N^h = 0$ et $Q(A) = 0$.

Comme, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 = \text{tr}(u^k) = \text{tr} \begin{pmatrix} N^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix} = \text{tr}(A^k)$ car N est nilpotente, le polynôme X divise Π_A et donc Q , ce qui est absurde.

• *Deuxième méthode* : on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres complexes non nulles d'une matrice de u et $\omega_1, \dots, \omega_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

En trigonalisant sur $\mathbb{C}$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 = \text{tr}(u^k) = \sum_{i=1}^p \omega_i \lambda_i^k$ et donc

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^p & \cdots & \lambda_p^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ car } p \leq n, \text{ c'est absurde car } (\omega_1 \cdots \omega_p)$$

est non nul et $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^p & \cdots & \lambda_p^p \end{vmatrix} = \lambda_1 \dots \lambda_p \prod_{1 \leq i < j \leq p} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$ (cf. Vandermonde).

18. Supposons que 1 ne soit pas valeur propre de A . Comme χ_A est à coefficients réels et de degré impair, A a au moins une valeur propre réelle et donc $-1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Notons $-1, \lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_k, \bar{\lambda}_k$ les éléments de $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\omega, \omega_1, \omega_1, \dots, \omega_k, \omega_k$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

En trigonalisant on a $1 = \det(A) = (-1)^{\omega} |\lambda_1|^{2\omega_1} \dots |\lambda_k|^{2\omega_k} = (-1)^{\omega}$ et donc ω est pair, ce qui contredit $n = \omega + 2 \sum_{i=1}^k \omega_i$.

19. a. Si X est solution alors X^2 , et donc X , est nilpotente, par suite Π_X divise X^n . Or $X^{2(n-1)} \neq 0$ alors que $2(n-1) \geq n$ car $n \geq 2$, c'est absurde. L'équation n'a donc pas de solution.

b. Quitte à remplacer X par une matrice semblable cela revient à résoudre $X^p = D$ où $D = \text{Diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_k I_{n_k})$, les λ_i scalaires deux à deux distincts et les n_i dans $\mathbb{N}^*$. Si X est solution alors X et D commutent, tout sous-espace propre de D est stable par A et donc $X = \text{Diag}(X_1, \dots, X_k)$ où, pour tout i , $X_i^p = \lambda_i I_{n_i}$. Notons, pour tout i , μ_i un nombre complexe tel que $\mu_i^p = \lambda_i$, alors X_i annule le polynôme

scindé à racines simples $\prod_{r=0}^{p-1} (X - \omega_p^r \mu_i)$ où $\omega_p = e^{\frac{2i\pi}{p}}$ car, comme D est inversible,

$\lambda_i \neq 0$. Donc il existe $P_i \in \text{GL}_{n_i}(\mathbb{K})$ et des entiers naturels $\ell_{i,1}, \dots, \ell_{i,p}$ dont la somme est n_i tels que $X_i = P_i \Delta_i P_i^{-1}$ où $\Delta_i = \text{Diag}(\mu_i \omega^r I_{\ell_{i,r}})_{1 \leq r \leq p}$.

Réciproquement si ces conditions sont remplies alors, pour tout i , $X_i^p = \lambda_i I_{n_i}$ et donc X est solution.

20. a. Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k = k \alpha u^k$.

L'égalité est vraie si $k = 0$, supposons la établie à un rang k .

$u^{k+1} \circ v = u \circ (k \alpha u^k + v \circ u^k) = k \alpha u^{k+1} + (\alpha u + v \circ u) \circ u^k = (k+1) \alpha u^{k+1} + v \circ u^{k+1}$, d'où l'égalité au rang $k+1$. On conclut par le théorème de récurrence simple

L'application $\Phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $X \mapsto X \circ v - v \circ X$ est linéaire et vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \Phi(u^k) = k\alpha u^k,$$

Comme $\alpha \neq 0$ et $\text{Sp}(\Phi)$ est fini, à partir d'un certain rang $k\alpha$ n'est pas élément de $\text{Sp}(\Phi)$ et donc u^k est nul, ce qui prouve que u est nilpotent.

b. Si $\alpha = \beta = 0$ alors u et v commutent. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$, le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par v et tout vecteur propre de l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$ est un vecteur propre commun à u et v .

Si, par exemple $\beta \neq 0$, $\text{Sp}(u)$ étant fini, il n'est pas stable par la translation $\lambda \mapsto \lambda + \beta$. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ tel que $\lambda + \beta \notin \text{Sp}(u)$ et x un vecteur propre associé.

$$\text{On a : } u \circ (\alpha u + \beta v) = \alpha u^2 + \beta(v \circ u + \alpha u + \beta v) = (\alpha u + \beta v) \circ (u + \beta I_E).$$

Par suite $u[(\alpha u + \beta v)(x)] = (\lambda + \beta)(\alpha u + \beta v)(x)$ et donc $(\alpha u + \beta v)(x) = 0$ ie.

$v(x) = -\frac{\lambda}{\beta}x$, ce qui prouve que x est vecteur propre commun à u et v .

c. Procédons par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant immédiat. Supposons la propriété établie à un rang $n - 1$ où $n \geq 2$.

On choisit un vecteur propre e_1 commun à u et v et on considère une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Les matrices de u et v relativement à $\mathcal{E}$ sont de la

$$\text{forme } U = \begin{pmatrix} \lambda & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} \mu & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \text{ De plus la condition}$$

$u \circ v - v \circ u = \alpha u + \beta v$ impose $AB - BA = \alpha A + \beta B$ et l'hypothèse de récurrence prouve l'existence de $P \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que PAP^{-1} et PBP^{-1} sont triangulaires supérieures. Alors, si $Q = \text{Diag}(1, P)$, on a $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, QUQ^{-1} et QVQ^{-1}

$$\text{triangulaires supérieures car, par exemple, } QUQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & PAP^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \text{ ce}$$

qui termine la récurrence.

21. a. Si $X = \begin{pmatrix} t & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ alors $AX = X$ et donc $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Si $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ et $AX = \lambda X$ on a, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j|$

car les $a_{i,j}$ sont positifs. Si $|x_p| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ alors $|x_p| > 0$ et

$$|\lambda| |x_p| \leq \sum_{j=1}^n a_{p,j} |x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{p,j} |x_p| = |x_p| \sum_{j=1}^n a_{p,j} = |x_p|.$$

Par conséquent tout élément λ de $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ vérifie : $|\lambda| \leq 1$.

b. Soit λ une valeur propre de module 1 et X un vecteur propre unitaire associé.

Par exemple $|x_1| = 1$ et on a $\lambda x_1 = \sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j$ puis, en passant aux modules :

$$|\lambda x_1| = 1 \leq \sum_{j=1}^n a_{1,j} |x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{1,j} = 1$$

Comme ce sont des égalités et comme $a_{1,1} \neq 0$, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit $a_{1,j} = 0$, soit $x_j = x_1$. Si l'on note $J = \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid a_{1,j} \neq 0\}$, on a $\lambda x_1 = x_1 \sum_{j \in J} a_{1,j} = x_1$

et donc $\lambda = 1$.

c. On reprend ce qui vient d'être fait en perdant l'information $a_{1,1} \neq 0$ mais en conservant $J \neq \emptyset$ car $\sum_{j \in J} a_{1,j} = 1$. L'application $j \mapsto x_j$ est constante sur J et donc

$$\lambda x_1 = \sum_{j \in J} a_{1,j} x_j = x_{j_0} \text{ où } j_0 \in J.$$

L'application $x \mapsto \lambda x$ induit donc une permutation σ de l'ensemble fini des composantes de X de module 1. Si on note p l'ordre de σ on a $\lambda^p = 1$.

22. a. Si $x \in E$, le sous-espace vectoriel $V_x = \text{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$ de E est stable par u et I_x est l'idéal annulateur de l'endomorphisme induit par u sur V_x .

b. Le polynôme $P = \text{ppcm}(\mu_x, x \in E)$ est annulateur de u .

Si $x \in E$ alors $\pi_u \in I_x$ et donc μ_x divise π_u , par suite $P = \pi_u$.

$\mu_x \mu_y \in I_{x+y}$ est immédiat et donc μ_{x+y} divise $\mu_x \mu_y$.

Comme $\mu_x \wedge \mu_y = 1$, la somme $\text{Ker}[\mu_x(u)] + \text{Ker}[\mu_y(u)]$ est directe et chacun des deux sous-espaces vectoriels est stable par $\mu_{x+y}(u)$.

Or $\mu_{x+y}(u)(x) = -\mu_{x+y}(u)(y) \in \text{Ker}[\mu_x(u)] \cap \text{Ker}[\mu_y(u)] = \{0\}$ et donc $\mu_{x+y} \in I_x \cap I_y$, ce qui prouve que $\mu_x \mu_y$ divise μ_{x+y} car $\mu_x \wedge \mu_y = 1$.

En définitive $\mu_{x+y} = \mu_x \mu_y$.

c. Décomposons π_u en produit de facteurs irréductibles, $\pi_u = \prod_{i=1}^k P_i^{\alpha_i}$ et posons,

pour tout i , $E_i = \text{Ker}[P_i^{\alpha_i}(u)]$. Alors $E = \bigoplus_{i=1}^k E_i$ et u induit sur chaque E_i un endomorphisme que l'on note u_i .

Par minimalité de π_u on a, pour tout i , $\pi_{u_i} = P_i^{\alpha_i}$ et la question b) permet de se ramener à l'existence d'un élément x de E_i tel que $P_i^{\alpha_i} = \mu_x$.

Soit $x \in \text{Ker}[P_i^{\alpha_i}(u)] \setminus \text{Ker}[P_i^{\alpha_i-1}(u)]$, et un tel x existe. Le polynôme μ_x divise $P_i^{\alpha_i}$ et $P_i^{\alpha_i-1}(u)(x) \neq 0$, d'où $P_i^{\alpha_i} = \mu_x$.

d. Si $x \in E$, en notant p le degré de μ_x , l'application $\Phi : \mathbb{K}[X] \rightarrow E$, $P \mapsto P(u)(x)$ induit un isomorphisme entre le supplémentaire $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ de $\text{Ker}(\Phi)$ et $\text{Im}(\Phi)$.

• S'il existe $x \in E$ tel que $E = \text{Im}(\Phi)$ alors $p = n$ et, comme $\pi_u \in I_x$, on a $n \leq \deg(\pi_u) \leq n$, d'où $\pi_u = \chi_u$.

• Si $\pi_u = \chi_u$, en choisissant $x \in E$ tel que $\pi_u = \mu_x$, le sous-espace vectoriel $\text{Im}(\Phi)$ de E est de dimension n donc $\text{Im}(\Phi) = E$.

23. a. Par définition des polynômes Q_j on a :

$$(\star) \quad 1 = \sum_{j=1}^k Q_j \text{ et donc, pour tout } i \in \llbracket 1, k \rrbracket, (\star\star) \quad Q_i = \sum_{j=1}^k Q_i Q_j$$

Si $i \neq j$ le polynôme Π divise $Q_i Q_j$ et donc $q_i \circ q_j = 0$, par suite $(\star\star)$ montre que

$$q_i = \sum_{j=1}^n q_i \circ q_j = q_i^2 \text{ ie. } q_i \text{ est un projecteur (et donc } \text{tr}(q_i) = \text{rg}(q_i)).$$

$(\star)$ montre que $I_E = \sum_{j=1}^k q_j$ d'où $E = \sum_{j=1}^k \text{Im}(q_j)$ et, par linéarité de la trace,

$$\dim(E) = \sum_{j=1}^k \operatorname{rg}(q_j) = \sum_{j=1}^k \dim [\operatorname{Im}(q_j)], \text{ donc } E = \bigoplus_{j=1}^k \operatorname{Im}(q_j).$$

$q_i \circ q_j = 0$ montre que $\operatorname{Im}(q_j) \subset \operatorname{Ker}(q_i)$ et donc $\bigoplus_{j \neq i} \operatorname{Im}(q_j) \subset \operatorname{Ker}(q_i)$.

De plus $\dim \left(\bigoplus_{j \neq i} \operatorname{Im}(q_j) \right) = \dim(E) - \dim [\operatorname{Im}(q_i)] = \dim [\operatorname{Ker}(q_i)]$ d'après le théorème du rang, d'où $\operatorname{Ker}(q_i) = \bigoplus_{j \neq i} \operatorname{Im}(q_j)$.

b. Si l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de u et, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $P_i = X - \lambda_i$, alors la question a. s'applique.

$$f(X) = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{X - \lambda_i} \text{ où, pour tout } i, a_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)}, \text{ d'où } Q_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = L_i$$

i -ème polynôme d'interpolation de Lagrange en $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$.

Le i -ème projecteur spectral (voir l'exercice 26) associé à u est donc $q_i = L_i(u)$ et,

$$\text{pour tout } p \in \mathbb{N}, u^p = \sum_{i=1}^k \lambda_i^p q_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i^p L_i(u).$$

24. Supposons que A est semblable à B et notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A . On note $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ une base de $\mathbb{R}^4$ relativement à laquelle B est matrice de u . Alors $\chi_u = \chi_A = (1 - X)^3(2 - X)$ et donc, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux, $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} [(u - I)^3] \oplus \operatorname{Ker} [u - 2I]$. Le calcul de B^2 et B^3 montre que $\varepsilon_3 \in \operatorname{Ker} [(u - I)^3] \setminus \operatorname{Ker} [(u - I)^2]$.

Le calcul de $(A - I_4)^3$ et $(A - I_4)^2$ montre que $\varepsilon_3 = 5e_1 - e_2 - e_3 - 2e_4$ est un élément de $\operatorname{Ker} [(u - I)^3] \setminus \operatorname{Ker} [(u - I)^2]$ si on note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Il reste alors à calculer $\varepsilon_2 = (u - I)(\varepsilon_3) = 5e_1 + e_2 + 4e_3 + 3e_4$ et enfin $\varepsilon_1 = (u - I)(\varepsilon_2) = 2e_1 + 2e_2 + 4e_3 + 2e_4$. Le calcul de $A - 2I_4$ montre que $\varepsilon_4 = 3e_1 + e_3 + e_4$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre 2.

Comme la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ ainsi calculée se révèle être libre, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ on a } B = P^{-1}AP.$$

25. a. Montrons que 0 n'est pas valeur propre de A . D'où A sera inversible.

Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Notons ${}^tX = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ et $|x_p| = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$.

$$AX = 0 \Rightarrow |a_{p,p}x_p| = \left| \sum_{j \neq p} a_{p,j}x_j \right| \leq \sum_{j \neq p} |a_{p,j}| |x_j| \leq |x_p| \sum_{j \neq p} |a_{p,j}|.$$

Donc $|x_p| \left(|a_{p,p}| - \sum_{j \neq p} |a_{p,j}| \right) \leq 0$. D'où $|x_p| \leq 0$ compte tenu des hypothèses faites

sur la matrice A . Donc $x_p = 0$. Par suite, $X = 0$. D'où $0 \notin \operatorname{Sp}(A)$ et $A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$.

Noter qu'il existe des matrices inversibles qui ne sont pas à diagonale strictement dominante. Par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Notons Δ cette réunion de disques fermés. Si $\lambda \notin \Delta$, alors $|a_{i,i} - \lambda| > \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donc $A - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ d'après a. Autrement dit, si $\lambda \notin \Delta$, alors $\lambda \notin \text{Sp}(A)$. D'où l'inclusion par contraposition.

26. Notons $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, alors $\Pi_u(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$.

Par théorème de division euclidienne : $\forall k \in \mathbb{N}, X^k = Q \Pi_u(X) + R$ où $R \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$.

Comme $R = \sum_{i=1}^p r_i L_i$ où $L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \left(\frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right)$, $r_i = R(\lambda_i) = \lambda_i^k$ et $u^k = R(u)$,

on a l'égalité demandée. Pour $k = 0$, elle donne : $I_E = \sum_{i=1}^p L_i(u) \quad (\star)$.

$\Pi_u | L_i L_j$ si $i \neq j$, on a $L_i(u) \circ L_j(u) = 0$ si $i \neq j$. D'après $(\star)$, on a $L_i^2(u) = L_i(u)$.

D'après le théorème des noyaux, $\text{Ker}[L_i(u)] = \bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(u)$. Comme $\Pi_u(u) = 0$, ce

même théorème implique $E = E_{\lambda_i}(u) \oplus \text{Ker}[L_i(u)]$. Donc $E_{\lambda_i}(u)$ et $\text{Im}[L_i(u)]$ sont isomorphes d'après le théorème fondamental.

$\Pi_u(u) = 0 \Rightarrow (u - \lambda_i I_E) \circ L_i(u) = 0 \Rightarrow \text{Im}[L_i(u)] \subset E_{\lambda_i}(u)$.

Donc $\text{Im}[L_i(u)] = E_{\lambda_i}(u)$. Donc $L_i(u) = p_{\lambda_i}$.

27. • Si B est inversible, comme A et B commutent, il en est de même de A et B^{-1} . De plus, en vertu de cette propriété, AB^{-1} est nilpotente, donc semblable à une matrice triangulaire supérieure T avec des zéros dans la diagonale.

$\det(A + B) = \det(AB^{-1} + I_n) \det(B) = \det(T + I_n) \det(B) = \det(B)$.

• si B est non inversible, si $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(B)$, $B - zI_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et commute avec A . On lui applique les conclusions du premier cas :

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(B), \det(A + B - zI_n) = \det(B - zI_n)$.

Les deux membres de l'égalité précédente sont des fonctions polynomiales qui coïncident sur une partie infinie de $\mathbb{C}$ (car $\text{Sp}(B)$ est fini). Elles sont donc partout égales, en particulier en $z = 0$. D'où l'égalité cherchée.

28. $\chi_A(X) = (X - 3)(X + 1)^2$. On obtient aisément :

$E_{-1}(A) = \text{Vect}(1, 2, 1)$ et $E_3(A) = \text{Vect}(1, 2, 2)$.

On pose ${}^t\varepsilon_1 = (1 \ 2 \ 1)$ et ${}^t\varepsilon_3 = (1 \ 2 \ 2)$. On cherche ε_2 tel que $A\varepsilon_2 = -\varepsilon_2 + \varepsilon_1$.

En effet, $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - 3I) \oplus \text{Ker}(A + I)^2$ d'après le théorème des noyaux et $\varepsilon_2 \in \text{Ker}(A + I)^2$.

On trouve que ${}^t\varepsilon_2 = (-1 \ -1 \ 0)$ convient. On s'assure que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base

de $\mathbb{R}^3$ et l'on a $A = PTP^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On aurait pu poser $\varepsilon_2 = e_2$, s'assurer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, déterminer $A\varepsilon_2$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2)$.

29. On a $A = PBP^{-1}$ où $P = Q + iR \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $Q, R \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Donc

$$AP = PB \iff \begin{cases} AQ = QB \\ AR = RB \end{cases} \text{ car } (1, i) \text{ est une base du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } \mathbb{C}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(Q + xR) = (Q + xR)B$. Notons $f(X) = \det(Q + XR)$. C'est un élément de $\mathbb{R}[X]$. Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ alors f est le polynôme nul, ce qui est impossible puisque $f(i) = \det(P) \neq 0$. Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\lambda) \neq 0$ i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(Q + \lambda R) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour un tel λ , on déduit de $A(Q + \lambda R) = (Q + \lambda R)B$ que A et B sont semblables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

30. a. Notons r le rang de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Si $r = 0$, alors $A = 0$ et la preuve est faite.

Si $r \neq 0$, il existe $(P, Q) \in \text{GL}_p(\mathbb{K}) \times \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = Q^{-1}J_rP$ où J_r est la matrice qui s'écrit par blocs : $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notons $B = P^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} Q$ par

blocs. On a alors : $AB = Q^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ et $BA = P^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix} P$.

Deux matrices semblables ayant même polynôme caractéristique,

D'où $\chi_{AB}(X) = X^{n-r}\chi_{B_1}(X)$ et $\chi_{BA}(X) = X^{p-r}\chi_{B_1}(X)$. D'où le résultat.

b. En particulier, si $p = n$, on trouve $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Mais l'énoncé suggère une autre méthode.

Si A est inversible, $AB = A(BA)A^{-1}$. Les matrices AB et BA sont semblables, elles ont même polynôme caractéristique.

Si A n'est pas inversible, pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \text{Sp}(A)$, $(A - \lambda I_n) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

On déduit de a. que $\forall x \in \mathbb{K}, \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \text{Sp}(A), P(x, \lambda) = 0$

où $P(x, \lambda) = \det((A - \lambda I_n)B - xI_n) - \det(B(A - \lambda I_n) - xI_n)$.

Pour tout $x \in \mathbb{K}, \lambda \mapsto P(x, \lambda)$ est nulle sur une partie infinie de $\mathbb{K}$, puisque $\text{Sp}(A)$ est fini. Comme on a affaire à une fonction polynomiale, elle est nulle sur $\mathbb{K}$, en particulier en 0, et donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

TRAVAUX DIRIGÉS

• Matrices cycliques

Notations

Pour $E \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathfrak{M}_n(E)$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans E . Une matrice A de $\mathfrak{M}_n(E)$ est dite **cyclique** si, et seulement si, il existe p dans $\mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_n$; le plus petit des tels entiers p est appelé **ordre de la matrice cyclique** et noté $h(A)$.

L'ensemble des matrices cycliques de $\mathfrak{M}_n(E)$ est noté $\mathcal{C}_n(E)$ et on appellera **groupe de $\mathcal{C}_n(E)$** toute partie de $\mathcal{C}_n(E)$ munie d'une structure de groupe pour le produit matriciel.

Première partie

A désigne un élément de $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ et l'on note p son ordre, $p = h(A)$. Les nombres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ désignent les valeurs propres de A comptées avec leur ordre de multiplicité.

1. Montrer que A est diagonalisable et que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{U}_p$ ensemble des racines p -ièmes de 1 dans $\mathbb{C}$. Réciproquement un élément B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et à spectre inclus dans un $\mathbb{U}_p$ est-il élément de $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$?

2. Montrer que $|\det(A)| = 1$ et $|\text{tr}(A)| \leq n$.

3. Montrer que, si $\text{tr}(A) = n$, alors $A = I_n$. Que dire de A si $|\text{tr}(A)| = n$?

4. On note, pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, p_i le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $\lambda_i^k = 1$, ainsi $\lambda_i^k = 1$ si, et seulement si, k est multiple de p_i . Montrer que $h(A)$ est le plus petit commun multiple des entiers $p_1, \dots, p_n$.

Deuxième partie

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et λ_1 et λ_2 les deux racines de χ_A comptées avec leur ordre de multiplicité.

1. Prouver que $\det(A) = \pm 1$ et que $\text{tr}(A) \in \llbracket -2, 2 \rrbracket$.

2. On pose $\varepsilon = \pm 1$.

a. On suppose que $\text{tr}(A) = 2\varepsilon$. Prouver que $A = \varepsilon I_2$ et que $h(A) = \frac{1}{2}(3 - \varepsilon)$.

b. On suppose que λ_1 et λ_2 sont réelles et distinctes.

Prouver que, à la permutation près, $\lambda_1 = -\lambda_2 = \varepsilon$ et que $h(A) = 2$.

Expliciter un ensemble infini de matrices A satisfaisant à cette condition.

c. On suppose λ_1 et λ_2 non réelles. Montrer que $\det(A) = 1$. Déterminer $\text{Sp}(A)$ puis $h(A)$ dans les cas suivants : $\text{tr}(A) = -1$, $\text{tr}(A) = 0$, $\text{tr}(A) = 1$.

Dans chacun des cas, expliciter un ensemble infini de matrices A satisfaisant aux conditions imposées.

- 3. a.** Montrer l'existence de $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z}), A^{N_2} = I_2$.
b. Cette propriété est-elle encore vraie dans $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$?
4. a. Prouver que A^{-1} est aussi élément de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$. Déterminer $h(A^{-1})$.
b. Prouver que $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ n'est pas un groupe pour le produit matriciel.

Troisième partie

- 1.** Soit G un groupe de $\mathcal{C}_n(\mathbb{Z})$.
a. Montrer que $\text{Vect}(G)$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie ; on la note k .
b. Soit $(X_i)_{i \in [1, k]}$ une base de $\text{Vect}(G)$ formée d'éléments de G . Notons T l'application de G dans $\mathbb{C}^k$ qui à tout A associe $(\text{tr}(AX_i))_{i \in [1, k]}$.
 Si A et B sont deux éléments de G vérifiant $T(A) = T(B)$, prouver que, pour tout X dans G , on a $\text{tr}[(AB^{-1} - I_n)X] = 0$.
c. Montrer, en utilisant la question 3. de la première partie, que T est injective et en déduire que G est un groupe fini.
2. a. Montrer que l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients entiers dont les racines complexes sont de module 1 est fini.
b. En déduire l'existence d'un élément N_n de $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall A \in \mathcal{C}_n(\mathbb{Z}), A^{N_n} = I_n.$$

Solution

Première partie

1. A annule $X^p - 1 = \prod_{z \in \mathbb{U}_p} (X - z)$ polynôme scindé à racines simples, donc A est diagonalisable et $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{U}_p$.

Si $\mu_1, \dots, \mu_n$ sont les valeurs propres comptées avec ordre de multiplicité de B , alors B est semblable à $\text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, B^p à $\text{Diag}(\mu_1^p, \dots, \mu_n^p) = I_n$ donc $B^p = I_n$ puis $B \in \mathcal{C}_n(\mathbb{C})$.

2. On a $\det^p(A) = \det(A^p) = 1$ donc $\det(A) \in \mathbb{U}_p \subset \mathbb{U}$ puis $|\det(A)| = 1$.

D'autre part $|\text{tr}(A)| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = n$ car, pour tout i , $|\lambda_i| = 1$, d'où $|\text{tr}(A)| \leq n$.

3. • Si $\text{tr}(A) = n$ alors, pour tout i , $\lambda_i = 1$ et A est semblable à I_n ie. $A = I_n$.

• Si $|\text{tr}(A)| = n$, notons θ un argument de $\text{tr}(A)$, $\text{tr}(A) = n e^{i\theta}$.

On a $n = \sum_{j=1}^n \lambda_j e^{-i\theta}$ et, pour tout j , $|\lambda_j e^{-i\theta}| = 1$ d'où $\lambda_j e^{-i\theta} = 1$ ie. $\lambda_j = e^{i\theta}$.

Donc A est semblable à $e^{i\theta} I_n$ ou encore $A = e^{i\theta} I_n$ où $e^{i\theta} \in \mathbb{U}_p$.

4. A est semblable à $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ donc, pour tout k dans $\mathbb{N}$, A^k est semblable à $\text{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.

$A^k = I_n \iff \text{Diag}(\lambda_i^k)_{1 \leq i \leq n} = I_n \iff \forall i \in [1, n], \lambda_i^k = 1 \iff \forall i \in [1, n], k \in p_i \mathbb{N}^*$.

p est un multiple du ppcm q des p_i d'où $q \leq p$, d'autre part $A^q = I_n$ d'où $p \leq q$.

En définitive $p = \text{ppcm}(p_1, \dots, p_n)$.

Deuxième partie

1. La question I.2. montre que $|\det(A)| = 1$ et $|\operatorname{tr}(A)| \leq 2$, comme ce sont des entiers, on a : $\det(A) = \pm 1$ et $\operatorname{tr}(A) \in \llbracket -2, 2 \rrbracket$.

2. a. La question I.3. montre que $A \in \operatorname{Vect}(I_2)$ et, comme A est à coefficients entiers, $A = \pm I_2$. La considération de la trace donne $A = \varepsilon I_2$.

- Si $\varepsilon = +1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, avec les notations de I.4., $p_1 = p_2 = 1$ et $h(A) = \operatorname{ppcm}(1, 1) = 1 = \frac{1}{2}(3 - 1)$.

- Si $\varepsilon = -1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $p_1 = p_2 = 2$ d'où $h(A) = 2 = \frac{1}{2}(3 + 1)$.

Dans tous les cas $h(A) = \frac{1}{2}(3 - \varepsilon)$.

b. $\lambda_i \in \mathbb{U} \cap \mathbb{R} = \{-1, +1\}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ donc, quitte à permuter, $\lambda_1 = -\lambda_2 = \varepsilon$.

On a $p_1 = 1$ et $p_2 = 2$ ou inversement et donc $h(A) = 2$.

Si $a \in \mathbb{Z}$ posons $A_a = \begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$, $A_a \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$, $\operatorname{Sp}(A) = \{-1, +1\} = \mathbb{U}_2$ et A est diagonalisable car son spectre est de cardinal 2. La question I.1. montre alors que $A_a \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et donc $\{A_a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ est un ensemble infini de solutions.

c. Comme $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ on a $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ et $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 = |\lambda_1|^2 = 1$.

- Si $\operatorname{tr}(A) = -1$ alors $\chi_A = X^2 + X + 1$, $\operatorname{Sp}(A) = \{j, \bar{j}\}$, $p_1 = p_2 = 3$ et donc $h(A) = 3$.

Pour $a \in \mathbb{Z}$ si $B_a = \begin{pmatrix} a & -1 \\ a^2 + a + 1 & -1 - a \end{pmatrix}$, $B_a \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$, $\operatorname{tr}(B_a) = -1$ et $\det(B_a) = 1$ d'où $\chi_{B_a} = X^2 + X + 1$, ce qui montre que B_a est diagonalisable avec pour spectre $\{j, \bar{j}\}$ inclus dans $\mathbb{U}_3$, donc $B_a \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et $\{B_a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ est un ensemble infini de solutions.

- Si $\operatorname{tr}(A) = 0$ alors $\chi_A = X^2 + 1$, $\operatorname{Sp}(A) = \{-i, +i\}$, $h(A) = 4$.

Si $a \in \mathbb{Z}$ et $C_a = \begin{pmatrix} a & -1 \\ a^2 + 1 & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$, $\chi_{C_a} = X^2 + 1$, $\operatorname{Sp}(C_a) = \{-i, +i\} \subset \mathbb{U}_4$ et donc $\{C_a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ est un ensemble infini de solutions.

- Si $\operatorname{tr}(A) = +1$ alors $\chi_A = X^2 - X + 1$, $\operatorname{Sp}(A) = \{-j, -\bar{j}\}$, $h(A) = 6$.

Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $D_a = \begin{pmatrix} a & -1 \\ a^2 - a + 1 & 1 - a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$, $\chi_{D_a} = X^2 - X + 1$, on a $\operatorname{Sp}(D_a) = \{-j, -\bar{j}\} \subset \mathbb{U}_6$ et $\{D_a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ est un ensemble infini de solutions.

3. a. La question 2. ayant épuisé tous les cas possibles, on a montré que, si $A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, alors $h(A) \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ et donc $N_2 = 12$ convient.

b. Si $p \in \mathbb{N}^*$ et $\theta_p = \frac{2\pi}{p}$, $R_p = \begin{pmatrix} \cos(\theta_p) & -\sin(\theta_p) \\ \sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R})$ avec $h(R_p) = p$ car R_p est matrice d'une rotation plane d'angle θ_p , h n'est donc pas majorée sur $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$.

4. a. $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{Com}(A)$ or ${}^t \text{Com}(A) \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ et $\det(A) = \pm 1$, d'où $A^{-1} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$. Posons $p = h(A)$.

$A^p = I_2 \Rightarrow (A^{-1})^p = I_2$ d'où $A^{-1} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et $h(A^{-1}) \leq h(A)$.

Comme $A = (A^{-1})^{-1}$ on a $h(A) \leq h(A^{-1})$.

En définitive $A^{-1} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et $h(A^{-1}) = h(A)$.

b. Utilisons les notations définies dans 2. $B_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont éléments de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ alors que $B_{-1}D_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ car sa trace n'est pas dans $\llbracket -2, +2 \rrbracket$ et donc $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ n'est pas un groupe.

Troisième partie

1. a. $\text{Vect}(G)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel de dimension finie.

b. Si $X \in G$ posons $Y = B^{-1}X$, alors $Y \in G$ groupe et $X = BY$ d'où l'égalité $\text{tr}[(AB^{-1} - I_n)X] = \text{tr}(AY - BY)$. Décomposons Y dans la base $(X_i)_{1 \leq i \leq k}$ de $\text{Vect}(G)$, $Y = \sum_{i=1}^k \lambda_i X_i$ et utilisons la linéarité de tr :

$$\text{tr}[(AB^{-1} - I_n)X] = \sum_{i=1}^k \lambda_i [\text{tr}(AX_i) - \text{tr}(BX_i)] = 0 \text{ car } T(A) = T(B).$$

c. Pour $X = I_n \in G$ il vient $\text{tr}(AB^{-1}) = \text{tr}(I_n) = n$ et I.3. montre alors que $AB^{-1} = I_n$ i.e. $A = B$ et T est injective.

Si $A \in G$, pour tout i dans $\llbracket 1, k \rrbracket$, $AX_i \in G$ d'où $\text{tr}(AX_i) \in [-n, +n] \cap \mathbb{Z}$ et donc $T(G) \subset \llbracket -n, +n \rrbracket^k$ ensemble fini. Comme T est injective, G est un groupe fini.

2. a. Soit P un polynôme solution, $P = \prod_{i=1}^n (X - z_i) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n$

où les z_i sont dans $\mathbb{U}$ et, pour tout k , $\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k}$, alors

$$|\sigma_k| \leq \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k}| = \binom{n}{k} \text{ donc } \sigma_k \in \left[-\binom{n}{k}, +\binom{n}{k} \right] \text{ ensemble de}$$

cardinal $n_k = 2 \binom{n}{k} + 1$. Il y a donc au plus $\prod_{k=1}^n n_k$ solutions.

b. Si $A \in \mathcal{C}_n(\mathbb{Z})$, χ_A est un des polynômes $P_1, \dots, P_\ell$ précédents, soit P_k .

Si $p = h(A)$ et $P_k = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ alors chaque λ_i est dans $\mathbb{U}_p$ et p est le plus petit des entiers naturels non nuls r tels que, pour tout i , $\lambda_i^r = 1$ i.e. $\lambda_i \in \mathbb{U}_r$.

Sur $\mathcal{C}_n(\mathbb{Z})$, h ne prend donc qu'au plus ℓ valeurs.

Si l'on note $p_1, \dots, p_s$ les valeurs distinctes prises par h sur $\mathcal{C}_n(\mathbb{Z})$ alors l'entier $N_n = \text{ppcm}(p_1, \dots, p_s)$ convient.

• Sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$ de codimension 1

E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

I désignera l'application identique de E , si $(f, g) \in E$ on pose $fg = f \circ g$.

On appelle ici $\mathbb{K}$ -algèbre $\mathcal{A}$ tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une loi interne notée $\cdot$, associative, distributive par rapport à l'addition et telle que : $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times \mathcal{A}^2$, $\lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y)$, (la loi interne $\cdot$ ne possède pas nécessairement d'unité).

$\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ désigne la sous-algèbre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ constituée des matrices triangulaires supérieures.

Première partie

$\mathcal{A}$ désigne une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $n^2 - 1$. On se propose de montrer par l'absurde que $I \in \mathcal{A}$, pour cela on suppose $I \notin \mathcal{A}$.

1. Montrer $\mathcal{L}(E) = \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}I$, en déduire : $f \in \mathcal{L}(E)$ et $f^2 \in \mathcal{A} \Rightarrow f \in \mathcal{A}$.

2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E , pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on note $u^{i,j}$ l'unique endomorphisme de E vérifiant : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u^{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u^{i,i} \in \mathcal{A}$ puis conclure.

On suppose désormais $\dim(E) = 2$.

Deuxième partie

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 3.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E) \setminus \mathbb{K}I$. Montrer que $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \cdot g = g \cdot f\}$ est la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ égale à $\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(I, f)$ et donner sa dimension.

2. a. Montrer que $\mathcal{A}$ admet une base de la forme (I, Φ, Ψ) avec $\Phi \cdot \Psi \neq \Psi \cdot \Phi$.

b. Montrer alors l'existence de $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3$ tel que $\Phi \cdot \Psi = \lambda \Phi + \mu \Psi + \nu I$ puis, en raisonnant par l'absurde, que $(\Phi - \mu I) \cdot (\Psi - \lambda I) = 0$.

c. Montrer que $\mathcal{A}$ admet une base (I, Φ_1, Ψ_1) avec $\Phi_1 \cdot \Psi_1 = 0$.

Si (I, Φ_1, Ψ_1) est une telle base, montrer que Φ_1 et Ψ_1 sont de rang 1 et ont un vecteur propre commun.

Troisième partie

1. Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

- (i) $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 3,
- (ii) Il existe une droite $\mathfrak{D}$ de E telle que $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}\}$,
- (iii) Il existe une base (e_1, e_2) de E telle que, si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \in \mathcal{A}$ si, et seulement si, $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{T}_2(\mathbb{K})$.

2. On suppose dans cette question $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et l'on considère un sous-groupe fini G de $\text{GL}(E)$ tel que $\dim[\text{Vect}(G)] = 3$.

Montrer que $V = \text{Vect}(G)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Montrer $f^2 = I$ pour tout élément f de G . En déduire que G est commutatif. Que conclure ?

3. Soit (f, g) une famille libre de $\mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = g^2 = 0$. Montrer que la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par f et g est $\mathcal{L}(E)$.

4. On étudie le sous-espace vectoriel $\mathcal{X}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ constitué des éléments Δ tels que : $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \Delta(fg) = \Delta(f)g + f\Delta(g)$.

À tout élément f_0 de $\mathcal{L}(E)$ on associe l'élément $\Phi(f_0)$ de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ défini par : $\Phi(f_0)(f) = f_0f - ff_0$. Montrer que Φ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$, déterminer $\text{Ker}(\Phi)$, vérifier $\text{Im}(\Phi) \subset \mathcal{X}$.

5. a. Soit $\Delta \in \mathcal{X}$; montrer qu'il existe trois scalaires x, y et z tels que, dans (e_1, e_2) , les matrices de $\Delta(u_{1,2})$ et $\Delta(u_{2,1})$ soient $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & -z \end{pmatrix}$.

b. A l'aide de $F : \begin{pmatrix} \mathcal{X} & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \\ \Delta & \mapsto & (\Delta(u^{1,2}), \Delta(u^{2,1})) \end{pmatrix}$ montrer que $\dim(\mathcal{X}) = 3$.
En déduire $\text{Im}(\Phi) = \mathcal{X}$.

Solution

Première partie

1. $\mathcal{A}$ est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$ dont I n'est pas élément donc $\mathcal{L}(E) = \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}I$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, écrivons $f = a + \lambda I$ où $(a, \lambda) \in \mathcal{A} \times \mathbb{K}$. On a $f^2 = (a^2 + 2\lambda a) + \lambda^2 I$ et donc, si $f^2 \in \mathcal{A}$, $\lambda^2 = 0$ i.e. $\lambda = 0$ ou encore $f \in \mathcal{A}$.

2. Si $i \neq j$ on a $(u^{i,j})^2 = 0 \in \mathcal{A}$ et donc $u^{i,j} \in \mathcal{A}$. Or $u^{i,i} = u^{i,j}u^{j,i}$ d'où $u^{i,i} \in \mathcal{A}$.
 $I = u^{1,1} + \dots + u^{n,n} \in \mathcal{A}$, ce qui contredit l'hypothèse $I \notin \mathcal{A}$.

Deuxième partie

1. $\text{Vect}(I, f) \subset \mathcal{C}(f)$ est immédiat. Comme $f \notin \mathbb{K}I$ on a $\deg(\Pi_f) = 2$ et donc $\text{Vect}(I, f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 2.

Soient $g \in \mathcal{C}(f)$, A et B des matrices de f et g relativement à une base de E .

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on a : $AB = BA \Rightarrow \begin{cases} b\gamma = c\beta \\ (a-d)\beta = b(\alpha-\delta) \\ (a-d)\gamma = c(\alpha-\delta) \end{cases}$

• Si $(b, c) \neq (0, 0)$, par exemple $b \neq 0$, avec $\lambda = \frac{\beta}{b}$ on a $\beta = \lambda b, \gamma = \beta c$ et aussi $\lambda(a-d) = \alpha - \delta$ d'où $B = (\alpha - \lambda a)I_2 + \lambda A$.

• Si $b = c = 0$ nécessairement $a \neq d$ car $A \notin \mathbb{K}I_2$ d'où $\beta = \gamma = 0$ puis $B = \frac{a\delta - d\alpha}{a-d} I_2 + \frac{\alpha - \delta}{a-d} A$. Dans tous les cas $g \in \text{Vect}(I, f)$, d'où $\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(I, f)$.

2. a. Si $\Phi \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{K}I$ alors $\mathcal{C}(\Phi)$ est une sous-algèbre de dimension 2 de $\mathcal{A}$ et on peut donc choisir un élément Ψ dans $\mathcal{A} \setminus \mathcal{C}(\Phi)$. Alors (I, Φ, Ψ) est une famille libre dans $\mathcal{A}$ de dimension 3 avec $\Phi\Psi \neq \Psi\Phi$, cette famille répond à la question.

b. Comme $\Phi\Psi \in \mathcal{A}$ on a l'existence de (λ, μ, ν) .

$(\Phi - \mu I)(\Psi - \lambda I) = (\lambda\mu + \nu)I$ et, si $\lambda\mu + \nu \neq 0$, alors $\Phi - \mu I \in \text{GL}(E)$ et son inverse est liée à $\Psi - \lambda I$, donc Φ et Ψ commutent, ce qui est absurde.

Par conséquent $(\Phi - \mu I)(\Psi - \lambda I) = 0$.

c. Les familles (I, Φ, Ψ) et $(I, \Phi - \mu I, \Psi - \lambda I)$ ont même rang et donc choisir $(\Phi_1, \Psi_1) = (\Phi - \mu I, \Psi - \lambda I)$ convient.

Φ_1 et Ψ_1 sont à la fois non inversibles et non nulles donc de rang 1. Si e est un vecteur générateur de $\text{Im}(\Psi_1)$ alors, comme $\Psi_1(e) \in \text{Im}(\Psi) = \mathbb{K}e$, le vecteur e est un vecteur propre de Ψ_1 et il est d'autre part dans $\text{Ker}(\Phi)$, il s'agit donc d'un vecteur propre commun à Φ_1 et Ψ_1 .

Troisième partie

1. On utilise les résultats et les notations de la deuxième partie.

• Supposons (i) et choisissons e_1 un vecteur directeur de $\text{Im}(\Psi_1)$, c'est un vecteur propre de I, Φ_1 et Ψ_1 et donc de tout élément de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de E alors, pour tout $f \in \mathcal{A}$, $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{T}_2(\mathbb{K})$ et, comme $\{f \in \mathcal{L}(E) \mid \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{T}_2(\mathbb{K})\}$ est de dimension 3, il vient $\{f \in \mathcal{L}(E) \mid \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{T}_2(\mathbb{K})\} = \mathcal{A}$ et donc (i) $\Rightarrow$ (iii).

• (iii) $\iff$ (ii) est immédiat ainsi que (iii) $\Rightarrow$ (i).

2. $\text{Vect}(G)$ est stable par produit car G l'est et donc $\text{Vect}(G)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Si l'on note p le cardinal de G alors, pour tout $f \in G$, $f^p = I$ et donc f annule le polynôme $X^p - 1$. D'autre part la propriété (iii) prouve que χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$ et donc $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{U} \cap \mathbb{R} = \{-1, +1\}$. Une matrice A de f est $\mathbb{C}$ -diagonalisable et donc A^2 est $\mathbb{C}$ -semblable à I_2 ie. égale à I_2 , d'où $f^2 = I$.

Tout élément de G est son propre inverse et donc, si f et g sont des éléments de G , on a $fg = (fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1} = gf$ ie. G est commutatif.

L'algèbre $\text{Vect}(G)$ serait commutative, ce qui est en contradiction avec la question II.1. Un tel groupe G n'existe donc pas.

3. f est nilpotent et donc (I, f) est libre. Si $g = \lambda I + \mu f$ on a $0 = g^2 = \lambda^2 I + 2\lambda\mu f$ d'où $\lambda^2 = \lambda\mu = 0$ par liberté de (f, g) . Par suite $\lambda = 0$ et $g \in \mathbb{K}f$, ce qui est exclu, donc (I, f, g) est libre. Si l'algèbre engendrée par cette famille n'est pas $\mathcal{L}(E)$ sa dimension est 3 et on peut simultanément trigonaliser f et g . Comme $\{A \in \mathcal{T}_2(\mathbb{K}) \mid A^2 = 0\}$ est de dimension 1, la famille (f, g) est liée, ce qui est absurde.

4. La linéarité de Φ est immédiate et $\text{Ker}(\Phi)$ est exactement le centre de $\mathcal{L}(E)$ ie. le sous-espace vectoriel $\mathbb{K}I$.

Soit $\varphi \in \text{Im}(\Phi)$, $\varphi = \Phi(f_0)$ où $f_0 \in \mathcal{L}(E)$. Si $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ on a :

$\varphi(fg) = f_0fg - fgf_0 = (f_0f - ff_0)g + f(f_0g - gf_0) = \varphi(f)g + f\varphi(g)$ et donc $\varphi \in \mathcal{X}$.

5. a. Si $A = \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}$ est la matrice de $u^{1,2}$ relativement à (e_1, e_2) , alors comme $(u^{1,2})^2 = 0$, on a $0 = \Delta(u^{1,2})u^{1,2} + u^{1,2}\Delta(u^{1,2})$ ie. $AE^{1,2} + E^{1,2}A = 0$ soit $x + y' = x' = 0$ d'où $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$.

De même, relativement à cette base la matrice de $u^{2,1}$ est de la forme $\begin{pmatrix} z & 0 \\ t & -z \end{pmatrix}$.

$u^{1,2}u^{2,1}u^{1,2} = u^{1,2}$ donne $\Delta(u^{1,2})u^{2,2} + u^{1,2}\Delta(u^{2,1})u^{1,2} + u^{1,1}\Delta(u^{1,2}) = \Delta(u^{1,2})$ soit encore $AE^{2,2} + E^{1,2}AE^{1,2} + E^{1,1}A = A$ d'où $t = -y$ et le résultat demandé.

b. L'application F est linéaire injective.

En effet si $\Delta \in \text{Ker}(F)$ on a $\Delta(u^{1,1}) = \Delta(u^{1,2}u^{2,1}) = \Delta(u^{1,2})u^{2,1} + u^{1,2}\Delta(u^{2,1}) = 0$ et, de même, $\Delta(u^{2,2}) = 0$. Δ s'annule sur une base de $\mathcal{L}(E)$ et donc est nulle.

la question a. a montré que $\text{rg}(F) \leq 3$ et donc $\dim(\mathcal{X}) \leq 3$.

Le théorème du rang appliqué à Φ montre que $\text{rg}(\Phi) = 3$ et, comme $\text{Im}(\Phi) \subset \mathcal{X}$, on en déduit $\text{rg}(\Phi) = \dim(\mathcal{X}) = 3$ puis $\text{Im}(\Phi) = \mathcal{X}$.

• Matrice de Vandermonde

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $A = \left(\omega^{(p-1)(q-1)} \right)_{1 \leq p, q \leq n}$ et $\tau = \text{tr}(A)$.

Première partie

1. Si $r \in \mathbb{Z}$, calculer $S_r = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kr}$.
2. Calculer A^2 et B^2 si $B = \frac{1}{n} A^2$. En déduire $|\det(A)|$.
3. Montrer que B est diagonalisable et préciser son spectre.
Déterminer les sous-espaces propres en distinguant selon la parité de n .
4. Montrer que A est diagonalisable et que son spectre est inclus dans l'ensemble $\{\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}\}$.
5. Calculer $C = \sum_{1 \leq p < q \leq n} (p + q)$.
6. Montrer qu'un argument de $\det(A)$ est $\frac{\pi}{4}(n-1)(3n-2)$.
7. Si $r \in \mathbb{Z}$ soit $\tau_r = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(r+k)^2}$. Montrer : $\forall r \in \mathbb{Z}, \tau_r = \tau$.

En déduire $|\tau|^2 = \sum_{0 \leq r, s \leq n-1} \omega^{(r+s)^2 - r^2}$ puis $|\tau| = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } n = 2p + 1, \\ \sqrt{2n} & \text{si } n = 4p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Deuxième partie

Soient a, b, c, d les ordres de multiplicité des valeurs propres éventuelles $\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}$ de A .

1. Exprimer τ en fonction de a, b, c, d ; en déduire $(a-b)^2 + (c-d)^2$.
2. Calculer $a+b$ et $c+d$ en distinguant suivant la parité de n .
3. a. Ici $n = 2p + 1$. En distinguant suivant la parité de p et à l'aide d'un argument de $\det(A)$ calculer (a, b, c, d) .
b. Procéder de même si $n = 2p$.

Solution

Première partie

1. Tout d'abord $\omega^r = 1$ si, et seulement si, $r \in n\mathbb{Z}$. Dans ce cas $S_r = n$. Sinon $S_r = \frac{1 - \omega^{nr}}{1 - \omega^r} = 0$ car $\omega^n = 1$.

2. Posons $Z = A^2$, alors $z_{p,q} = \sum_{k=1}^n \omega^{(k-1)(p-1)} \omega^{(k-1)(q-1)} = S_{p+q-2}$.

Comme $1 \leq p, q \leq n$, on a $0 \leq p+q-2 \leq 2(n-1)$ et donc $p+q-2 \in n\mathbb{Z}$ a lieu si,

et seulement si, $p = q = 1$ ou $p+q = n+2$. Par suite $A^2 = n \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 1 & & (0) \end{pmatrix}$

et $B^2 = \frac{1}{n^2} A^4 = I_n$. On a $|\det(A)|^4 = n^{2n} |\det(B)|^2 = n^{2n}$ d'où $|\det(A)| = n^{n/2}$.

3. Notons $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

B annule $(X-1)(X+1)$ et n'est pas dans $\mathbb{R}I_n$ donc B est diagonalisable avec $\text{Sp}(B) = \{-1, +1\}$. De plus $\text{tr}(B) = 1$ si n est impair et 2 sinon.

• Si $n = 2p+1$ la trace montre que 1 et -1 sont valeurs propres d'ordre $p+1$ et p . $(E_1, E_2 + E_{2p+1}, E_3 + E_{2p}, \dots, E_p + E_{p+1})$ est une famille libre de $p+1$ éléments de $\text{Ker}(B - I_{2p+1})$ donc une base de ce sous-espace propre.

De même $(E_2 - E_{2p+1}, E_3 - E_{2p}, \dots, E_p - E_{p+1})$ est une base de $\text{Ker}(B + I_{2p+1})$.

• Si $n = 2p$ la trace montre que 1 et -1 sont valeurs propres d'ordre $p+1$ et $p-1$. $(E_1, E_2 + E_{2p}, E_3 + E_{2p-1}, \dots, E_{p-1} + E_{p+1}, E_p)$ est une base de $\text{Ker}(B - I_{2p})$, $(E_2 - E_{2p}, E_3 - E_{2p-1}, \dots, E_{p-1} - E_{p+1})$ est une base de $\text{Ker}(B + I_{2p})$.

4. A annule le polynôme $X^4 - n^2 = (X - \sqrt{n})(X + \sqrt{n})(X - i\sqrt{n})(X + i\sqrt{n})$ d'où le résultat.

$$5. \quad 2C = \sum_{\substack{1 \leq p < q \leq n \\ p \neq q}} (p+q) = \sum_{1 \leq p, q \leq n} (p+q) - \sum_{p=1}^n (2p) = 2 \sum_{1 \leq p, q \leq n} p - 2 \sum_{p=1}^n p \text{ soit}$$

$$2C = n(n+1)(n-1) \text{ puis } C = \frac{n(n^2-1)}{2}.$$

6. A étant une matrice de Vandermonde on a $\det(A) = \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\omega^{q-1} - \omega^{p-1})$.

Or $\omega^{q-1} - \omega^{p-1} = 2i \sin\left(\frac{q-p}{n} \pi\right) \exp\left(i \frac{p+q-2}{n} \pi\right)$ et $\sin\left(\frac{q-p}{n} \pi\right) > 0$ car $0 < \frac{q-p}{n} \pi < \frac{n-1}{n} \pi < \pi$.

$$\text{Par suite } \arg[\det(A)] \equiv \sum_{1 \leq p < q \leq n} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{p+q-2}{n} \pi \right] \quad [2\pi],$$

$$\arg[\det(A)] \equiv \pi \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{n} \right] \times \text{Card}\left(\{(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid 1 \leq p < q \leq n\}\right) + \frac{\pi}{n} C \quad [2\pi],$$

$$\text{soit } \arg[\det(A)] \equiv \frac{\pi}{4} (n-1)(3n-2) \quad [2\pi] \text{ car } \{(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid 1 \leq p < q \leq n\} \\ \text{a pour cardinal } \frac{n^2-n}{2}.$$

7. On a déjà $\tau_0 = \tau$, reste donc à montrer que la suite $(\tau_r)_r$ est constante.

$$\tau_{r+1} - \tau_r = \sum_{k=0}^{n-1} [\omega^{(r+1+k)^2} - \omega^{(r+k)^2}] = \omega^{(r+n)^2} - \omega^{r^2} = \omega^{r^2} [\omega^{(r+n)^2-r^2} - 1] = 0 \\ \text{car } (r+n)^2 - r^2 \in n\mathbb{Z} \text{ et } \omega^n = 1, \text{ d'où le résultat.}$$

$$\text{Alors } |\tau|^2 = \tau \sum_{r=0}^{n-1} \omega^{-r^2} = \sum_{0 \leq r, s \leq n-1} \omega^{(r+s)^2} \omega^{-r^2} \text{ car } \tau = \tau_r = \tau_s \text{ si } (r, s) \in \mathbb{Z}^2.$$

$$\text{D'où } |\tau|^2 = \sum_{0 \leq r, s \leq n-1} \omega^{s^2} \omega^{2rs} = \sum_{s=0}^{n-1} \omega^{s^2} S_{2s}.$$

Distinguons alors trois cas suivant que $\frac{n}{2}$ est ou non un entier et suivant sa parité :

- Si $n = 2p+1$, $|\tau|^2 = \omega^0 S_0 = n$ d'où $|\tau| = \sqrt{n}$.
- Si $n = 4p$, $|\tau|^2 = \omega^0 S_0 + \omega^{(2p)^2} S_n = n(1 + e^{2ip\pi}) = n(1+1) = 2n$ d'où $|\tau| = \sqrt{2n}$.
- Si $n = 4p+2$, $|\tau|^2 = \omega^0 S_0 + \omega^{(2p+1)^2} S_n = n(1 + e^{i(2p+1)\pi}) = 0$ d'où $|\tau| = 0$.

Deuxième partie

1. A est semblable à $\sqrt{n} \operatorname{Diag}(I_a, -I_b, iI_c, -iI_d)$ et donc $\tau = \sqrt{n} [(a-b) + i(c-d)]$. On en déduit $|\tau|^2 = n[(a-b)^2 + (c-d)^2]$ et, en utilisant le résultat de II.7. on a : $(a-b)^2 + (c-d)^2 = 1$ si n est impair, 2 si $n \equiv 0 \pmod{4}$ et 0 sinon.

2. B_n est semblable à $\operatorname{Diag}(I_{a+b}, -I_{c+d})$ d'où :

$$(a+b, c+d) = \begin{cases} (p+1, p-1) & \text{si } n = 2p, \\ (p+1, p) & \text{si } n = 2p+1. \end{cases}$$

3. a. On a : $a+b = p+1$, $c+d = p$ et $(a-b)^2 + (c-d)^2 = 1$.

• Si $p = 2k$ alors $c-d$ est pair donc nul, $c = d = k$, $a = b \pm 1$.

La question I.6. donne $\arg [\det(A)] \equiv k\pi \pmod{2\pi}$ et l'on a, en utilisant la réduite diagonale, $\det(A) = (\sqrt{n})^a (-\sqrt{n})^b (i\sqrt{n})^c (-i\sqrt{n})^d$ d'où $\arg [\det(A)] \equiv b\pi \pmod{2\pi}$, la seule solution est donc $(a, b, c, d) = (k+1, k, k, k)$.

• Si $p = 2k+1$ on obtient de même $(a, b, c, d) = (k+1, k+1, k, k+1)$.

b. On distingue deux cas :

• Si $n = 4k$, les conditions sont $a+b = 2k+1$, $c+d = 2k-1$, $(a-b)^2 + (c-d)^2 = 2$, $\arg [\det(A)] \equiv \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \pmod{2\pi}$ d'où $(a, b, c, d) = (k+1, k, k, k-1)$ ou encore $(k, k+1, k-1, k)$.

• Si $n = 4k+2$, $(a, b, c, d) = (k+1, k+1, k, k)$.

• Décomposition de Dunford ; applications

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie égale à $N \geq 1$. Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$. On note $\chi_u = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$ et l'on appelle $N_i = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i I_E)^{\alpha_i}$ le **sous-espace caractéristique** associé à la valeur propre λ_i .

I. Questions préliminaires

1. a. Montrer que N_i est stable par u et que $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$.

b. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\dim(N_i) = \alpha_i$.

2. Montrer que la suite $(\operatorname{Ker}(u^k))_{k \geq 0}$ est stationnaire. On note r le minimum de l'ensemble des entiers k tels que $\operatorname{Ker}(u^k) = \operatorname{Ker}(u^{k+1})$. Montrer que si $k \geq r$, $\operatorname{Ker}(u^k) = \operatorname{Ker}(u^{k+1})$. On appelle r l'**indice** de u .

3. Montrer que $\pi_u = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{r_i}$ où $1 \leq r_i \leq \alpha_i$ et où r_i est l'indice de $(u - \lambda_i I_E)$. On pourra poser $P = (X - \lambda_1)^q Q$ où Q est le polynôme premier avec $(X - \lambda_1)^{r_1}$ tel que $\pi_u(X) = (X - \lambda_1)^{r_1} Q$ et examiner les deux cas $q \geq r_1$ et $q < r_1$.

4. Montrer que si v et v' sont deux endomorphismes nilpotents de E , il en est de même de $v - v'$ si v et v' commutent.

II. Le théorème

On conserve les notations de la partie I. Le but de cette partie est de prouver qu'il existe un couple unique (d, v) d'endomorphismes de E tel que $u = d + v$, $d \circ v = v \circ d$ avec d diagonalisable et v nilpotent.

1. Montrer que si l'on pose $d(x) = \lambda_i x$ et $v(x) = u(x) - \lambda_i x$ pour tout $x \in N_i$, le couple (d, v) ainsi déterminé convient.

2. Soit $(d', v') \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $u = d' + v'$, $d' \circ v' = v' \circ d'$ avec d' diagonalisable et v' nilpotent.

a. Montrer que les sous-espaces vectoriels N_i sont stables par d' .

b. Montrer que $d - d'$ est diagonalisable. Conclure.

III. Applications

On note $\Delta_u = R_u - L_u$ où R_u et L_u sont les deux endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ définis par $R_u(w) = u \circ w$ et $L_u(w) = w \circ u$.

1. Comparer les polynômes π_{L_u} et π_u ainsi que χ_{L_u} et χ_u .

2. Prouver que $\Delta_u = \Delta_d + \Delta_v$, que Δ_v est nilpotent, Δ_d diagonalisable et que Δ_v et Δ_d commutent.

3. Montrer que si Δ_u est diagonalisable, u est diagonalisable.

Solution

Partie I

1. 2 et 3. sont des questions de cours, traitées précédemment.

4. S'il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ est tel que $v^p = v'^q = 0$, montrons que $(v - v')^{p+q} = 0$.

D'après le binôme de Newton, puisque $v \circ v' = v' \circ v$, on a :

$$(v + v')^{p+q} = \sum_{k+k'=p+q} \binom{p+q}{k} v^k (-1)^{k'} v'^{k'}. \text{ Dans chaque terme de la somme, on}$$

a : $k \geq p$ ou $k' \geq q$. Donc : $v - v'$ est nilpotente.

Partie II

1. Posons $d(x) = \lambda_i x$ et $v(x) = u(x) - \lambda_i x$ pour tout $x \in N_i$. Chaque N_i est stable par d et par v puisque N_i est stable par u . Donc, il existe $(d_i, v_i) \in (\mathcal{L}(N_i))^2$ endomorphismes induits par d et v sur N_i . Ainsi défini, d est diagonalisable.

$v_i^{\alpha_i} = 0$ puis que : $\forall x \in N_i, (u - \lambda_i I_E)^{\alpha_i}(x) = 0$.

Soit $\alpha = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (\alpha_i)$. Alors $n^\alpha = 0$ sur chaque N_i donc sur E ; donc $n^\alpha = 0$.

Comme, $d_i = \lambda_i I_{N_i}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $d_i \circ v_i = v_i \circ d_i$. Donc $d \circ v = v \circ d$. D'où l'existence d'un couple (d, v) solution.

2. a. Comme $d' \circ u = u \circ d'$, les sous-espaces vectoriels N_i sont stables par d' . En effet si d' commute avec u , il commute avec tout élément de $\mathbb{K}[u]$ donc avec $(u - \lambda_i I_E)^{\alpha_i}$, d'où $N_i = \text{Ker}(u - \lambda_i I_E)^{\alpha_i}$ est stable par d' .

b. Comme $d_i = \lambda_i I_{N_i}$, on a $d \circ d' = d' \circ d$ sur chaque N_i , d'où $d \circ d' = d' \circ d$. Comme d et d' sont diagonalisables, on peut trouver une base de E constituée de vecteurs propres communs à d et d' . Donc $d - d'$ est diagonalisable.

$u = d + v = d' + v'$. Donc $d - d' = v' - v$ est un endomorphisme de E à la fois diagonalisable et nilpotent d'après I.4. Donc $d = d'$ et $v = v'$. D'où l'unicité du couple solution.

De II.1. et II.2. on déduit le théorème de Dunford.

Partie III

1. Par une récurrence immédiate, on prouve que :

$\forall k \in \mathbb{N}, R_u^k(w) = u^k \circ w$ et $L_u^k(w) = w \circ u^k$.

Donc $P(R_u)(w) = P(u) \circ w$ et $P(L_u)(w) = w \circ P(u)$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

Pour tout $w \in \mathcal{L}(E)$, $\pi_u(R)(w) = \pi_u(u) \circ w = 0$. Donc $\pi_R | \pi_u$.

Pour tout $w \in \mathcal{L}(E)$, $\pi_{R_u}(R)(w) = \pi_{R_u}(u) \circ w = 0$.

En particulier : $\pi_{R_u}(u) \circ I_E = \pi_{R_u}(u) = 0$. Donc $\pi_u | \pi_{R_u}$. Finalement, $\pi_{R_u} = \pi_u$.

De même, $\pi_{L_u} = \pi_u$.

2. On vérifie que $\Delta_u = \Delta_d + \Delta_v$.

Comme d est diagonalisable, il en est de même de L_d et R_d d'après III.3.a. et la caractérisation des endomorphismes diagonalisables par les polynômes annulateurs. Comme R_d et L_d commutent, puisque $(R_d \circ L_d)(w) = (L_d \circ R_d)(w) = w \circ d \circ w$, l'endomorphisme $\Delta_d = R_d - L_d$ est diagonalisable.

Comme v est nilpotent, il en est de même de L_v et R_v d'après III.3.a. Comme R_v et L_v commutent, puisque $(R_v \circ L_v)(w) = (L_v \circ R_v)(w) = w \circ v \circ w$, l'endomorphisme $\Delta_v = R_v - L_v$ est nilpotent d'après I.4.

3. Si Δ_u est diagonalisable, alors $\Delta_v = 0$ d'après l'unicité dans le théorème de Dunford et III.3.b). Comme le centre de $\mathcal{L}(E)$ (cf. exercice classique de MPSI) est réduit aux homothéties, $v = \lambda I_E$. D'où $v = 0$ car v est nilpotent. Donc $u = d$ est diagonalisable.

• Suites récurrentes linéaires

$p \in \mathbb{N}^*$ donné, $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$, on note $P(X) = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^{n+k}$.

On définit E_P comme l'ensemble des applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n+p) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f(n+k)$$

et l'on note T l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ défini par $T(f)(n) = f(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. En utilisant P et T , montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

2. Soit $\varphi : \mathbb{K}^p \rightarrow E_P, (\beta_0, \dots, \beta_{p-1}) \mapsto f$ telle que, pour tout élément $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $f(i) = \beta_i$. Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Préciser la dimension de E_P .

3. Montrer que E_P est stable par T . On note τ l'endomorphisme induit par T sur E_P . Donner la matrice de τ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E , image de la base canonique de $\mathbb{K}^p$ par φ . Quel est le polynôme caractéristique de τ ?

4. On pose $\Delta = \tau - I_E$. Préciser pour $q \in \mathbb{N}^*$, le noyau de Δ^q .

5. On suppose P scindé sur $\mathbb{K}$ et $P(0) \neq 0$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les racines distinctes de P sur $\mathbb{K}$, on note $P(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Montrer

$$(i) \quad E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(\tau - \lambda_i I_E)^{\alpha_i},$$

$$(ii) \quad f \in E \iff \left(\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^n Q_i(n) \right)$$

où $Q_i \in \mathbb{K}_{\alpha_i-1}[X]$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

On pourra poser $e_\lambda(n) = \lambda^n$ et calculer $(\tau - \lambda I_E)(e_\lambda.g)$ pour $g \in E_P$.

Solution

1. Par une récurrence immédiate, on montre que $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, T^k(f)(n) = f(n+k)$.

$$\text{Donc } f \in E_P \iff \forall n \in \mathbb{N}, T^p(f)(n) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k T^k(f)(n) \iff P(T)(f) = 0.$$

Donc $E_P = \text{Ker}[P(T)]$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

2. φ est bien une application car $f \in E_P$ est déterminée par la donnée de $f(0), \dots, f(p-1)$. En effet, si $f(0) = \beta_0, \dots, f(p-1) = \beta_{p-1}, f(p) = \sum_{j=0}^{p-1} a_j f(j)$

est déterminé de façon unique. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $f(k)$ connu pour tout $k \leq n+p-1$, alors $f(n+p) = \sum_{j=0}^{p-1} a_j f(n+j)$ permet de déterminer $f(n+p)$ de

façon unique. Donc, par théorème de récurrence, il existe une unique suite $f \in E_P$. φ est clairement linéaire et pour tout $f \in E_P$, il existe un unique $(\beta_0, \dots, \beta_{p-1})$ de $\mathbb{K}^p$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, f(i) = \beta_i$. Par suite φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Donc $\dim(E_P) = \dim(\mathbb{K}^p) = p$.

3. Comme $E_P = \text{Ker}[P(T)]$ où $P \in \mathbb{K}[X]$ et $T \circ P(T) = P(T) \circ T$, le sous-espace vectoriel E_P de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est stable par T . Soit $(e_0, \dots, e_{p-1})$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. La famille $(f_0, \dots, f_{p-1}) = \mathcal{B}$ d'éléments de E_P tels que $\varphi(e_i) = f_i$ est une base de E_P car φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\text{On cherche } (\alpha_{k,i}) \in \mathbb{K}^{p^2} \text{ telle que } \tau(f_i) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k,i} f_k.$$

Comme φ est bijective, on a : $\tau(f_i) = g \iff (\forall n \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \tau(f_i)(n) = g(n))$.

$$\tau(f_i)(n) = f_i(n+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n+1 \text{ et } 0 \leq n+1 \leq p-1, \\ 1 & \text{si } i = n+1. \end{cases}$$

$$f_i(n+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i-1, (i \geq 1), \\ 0 & \text{si } n \neq i-1 \text{ et } 0 \leq n \leq p-2. \end{cases}$$

$$f_i(p) = -a_{p-1}f_i(p-1) - \cdots - a_i f_i(i) - \cdots - a_0 f_i(0).$$

Donc : $f_0(p) = -a_0, f_1(p) = -a_1, \dots, f_{p-1}(p) = -a_{p-1}$.

$$\text{D'où : } M_{\mathcal{B}}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & (0) \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{p-2} & -a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

En procédant comme dans la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton on conclut que $\chi_\tau = P$.

4. Soit $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré strictement inférieur à q . Comme $\deg[\Delta(Q)] \leq \deg(Q) - 1$ pour tout $Q \in \mathcal{P}$, par récurrence,

on a : $\mathcal{P} \subset \text{Ker}(\Delta^q)$. Comme $\Delta^q = (\tau - I_E)^q = Q(\tau)$ où $Q = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} X^k$

est un polynôme de degré q , d'après le binôme de Newton car $\tau \circ I_E = I_E \circ \tau$.

Des questions 1. et 2. on déduit que $\dim(\Delta^q) = \dim(E_Q) = q$. Comme $\dim(\mathcal{P}) = q$, donc $\mathcal{P} = \text{Ker}(\Delta^q)$.

5. (i) est une application du théorème des noyaux.

(ii) Comme $P(0) \neq 0$, $\text{Sp}(\tau)$ ne contient pas 0.

• Si $\lambda \neq 0$, $\text{Ker}(\tau - \lambda I_E)$ est la droite vectorielle engendrée par $e_\lambda : n \mapsto \lambda^n$. En effet, $\tau(f) = \lambda f \iff (\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) = \lambda f(n)) \iff \forall n \in \mathbb{N}, f(n) = \lambda^n f(0)$.

• Si $q > 1$, cherchons $\text{Ker}(\tau - \lambda I_E)^q$.

Si $g \in E_P, \forall n \in \mathbb{N}, (\tau - \lambda I_E)(e_\lambda \cdot g)(n) = (e_\lambda \cdot g)(n+1) - \lambda(e_\lambda \cdot g)(n)$.

$(\tau - \lambda I_E)(e_\lambda \cdot g)(n) = \lambda^{n+1}[g(n+1) - g(n)] = \lambda e_\lambda(n)(\Delta g)(n)$.

D'où $(\tau - \lambda I_E)(e_\lambda \cdot g) = \lambda e_\lambda \Delta g$.

Par récurrence sur q , on a : $\forall q > 1, (\tau - \lambda I_E)^q(e_\lambda \cdot g) = \lambda^q e_\lambda \Delta^q g$. (★)

Si $f \in E$, on peut écrire $f = e_\lambda \cdot g$ où $g \in E$.

Donc (★) $\Rightarrow [f \in \text{Ker}(\tau - \lambda I_E)^q \iff g \in \text{Ker}(\Delta^q)]$.

De la question 4. on déduit que $f \in \text{Ker}(\tau - \lambda I_E)^q \iff g \in \mathcal{P}$. D'où le résultat.

3. Espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Normes et distances

A. Définitions

1. Définition d'une norme

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, une norme sur E est une application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

- | | |
|--|-------------------------------|
| (i) $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ | Séparation |
| (ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = \lambda N(x)$ | Homogénéité |
| (iii) $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ | Inégalité triangulaire |

2. Le couple (E, N) est alors appelé espace vectoriel normé.

Exemple

La valeur absolue (le module) est une norme sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{C}$).

Remarque

Tout $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ; une $\mathbb{C}$ -norme est donc une $\mathbb{R}$ -norme ; la réciproque est fausse.

1.1. Propriétés

- | |
|---|
| 1. Si N est une norme sur E alors : $\forall (x, y) \in E^2, N(x) - N(y) \leq N(x - y)$. |
| 2. De plus : $\forall q \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_q) \in E^q, N\left(\sum_{k=1}^q x_k\right) \leq \sum_{k=1}^q N(x_k)$. |

Démonstration

1. On a $N(x) = N((x - y) + y) \leq N(x - y) + N(y)$ d'où $N(x) - N(y) \leq N(x - y)$, par suite $N(y) - N(x) \leq N(y - x)$ et donc $\max\{N(x) - N(y), N(y) - N(x)\} \leq N(x - y)$, ce qui est le résultat annoncé.

2. Se montre par récurrence immédiate à partir de l'inégalité triangulaire. $\square$

En première année, on a prouvé le théorème suivant :

1.2. Théorème

Si $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace préhilbertien réel, l'application définie par :
 $x \mapsto \|x\|_2 = (x|x)^{1/2}$ est une norme sur E .

2. Distance associée à une norme

2.1. Définition

On appelle alors distance associée à N l'application d de E^2 dans $\mathbb{R}_+$ définie par : $\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = N(x - y)$.

Des propriétés de N on déduit

2.2. Propriétés de d

- | | |
|--|-------------------------------|
| (i) $\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$ | |
| (ii) $\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = d(y, x)$ | Symétrie |
| (iii) $\forall (x, y, z) \in E^3$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ | Inégalité triangulaire |

3. Boules

3.1. Définitions

Soient (E, N) un espace vectoriel normé, a un élément de E et r un réel strictement positif, on définit les parties
 $B(a, r) = \{x \in E \mid N(x - a) < r\}$ **boule ouverte** de centre a et de rayon r ,
 $B_f(a, r) = \{x \in E \mid N(x - a) \leq r\}$ **boule fermée** de centre a et de rayon r ,
 $S(a, r) = \{x \in E \mid N(x - a) = r\}$ **sphère** de centre a et de rayon r .

Remarque

Toute boule est convexe, par exemple si x et y sont éléments de $B(a, r)$ et si $t \in [0, 1]$, $N(tx + (1 - t)y - a) = N(t(x - a) + (1 - t)(y - a))$ d'où
 $N(tx + (1 - t)y - a) \leq tN(x - a) + (1 - t)N(y - a) < tr + (1 - t)r = r$ et donc
 $tx + (1 - t)y \in B(a, r)$.

3.2. Définition

Si (E, N) est un espace vectoriel normé, une partie A de E est dite bornée si elle est contenue dans une boule.

3.3. Propriété

Avec les mêmes notations A est bornée si, et seulement si, il existe un réel positif Δ tel que, pour tout $(x, y) \in A^2$, $N(x - y) \leq \Delta$ ou encore si, et seulement si, il existe un réel positif M tel que, pour tout $x \in A$, $N(x) \leq M$.

Démonstration

Éliminons le cas immédiat où A est vide.

- Supposons A bornée, $A \subset B_f(a, r)$ par exemple, alors, par inégalité triangulaire, si $(x, y) \in A^2$, $N(x - y) \leq N(x - a) + N(a - y) \leq 2r$ et $\Delta = 2r$ convient.
- Si Δ majore $\{N(x - y) \mid (x, y) \in A^2\}$, en fixant a dans A on a, pour tout $x \in A$, $N(x) \leq N(x - a) + N(a) \leq \Delta + N(a)$ et $M = \Delta + N(a)$ convient
- Si M majore $\{N(x) \mid x \in A\}$ alors $A \subset B_f(0_E, M + 1)$, d'où A est bornée. $\square$

3.4. Définition

Si X est un ensemble, une application f entre X et l'espace vectoriel normé E est dite bornée si la partie $f(X)$ de E est bornée. On note $\mathcal{B}(X, E)$ l'ensemble des applications bornées de X dans E .

4. Définition (distance d'un point à une partie)

Soient (E, N) un espace vectoriel normé et d la distance associée. Si A est une partie non vide de E et x un élément de E , l'ensemble $\{N(x-a) \mid a \in A\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, on appelle distance de x à A , et l'on note $d(x, A)$, le nombre réel $\inf_{a \in A} N(x-a) = \inf_{a \in A} d(x, a)$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}$ muni de la norme usuelle $x \mapsto |x|$, on a $d\left(-\frac{4}{3}, \mathbb{N}\right) = \frac{4}{3}$ et $d\left(-\frac{4}{3}, \mathbb{Z}\right) = \frac{1}{3}$.

5. Définition

Si (E, N) est un espace vectoriel normé, on appelle **vecteur unitaire** tout élément v de E tel que $N(v) = 1$.

Remarque

Si (E, N) est un espace vectoriel normé et si $u \in E \setminus \{0\}$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, le vecteur $v = \lambda \frac{u}{N(u)}$ est unitaire si, et seulement si, $|\lambda| = 1$.

6. Définitions

Soient (E, N) un espace vectoriel normé et d la distance associée.

1. Si F est un sous-espace vectoriel de E , la restriction de N à F est une norme sur F , appelée **norme induite** par N sur F , on la note encore N .
2. Si A est une partie de E , la restriction de d à $A \times A$ est appelée **distance induite** sur A et vérifie les mêmes propriétés que d .

7. Produit fini d'espaces vectoriels normés

Théorème et définition

$n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, (E_i, N_i) est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé, $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est l'espace vectoriel produit.
L'application $N : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} N_i(x_i)$ est une norme sur E , appelée **norme produit** et (E, N) est appelé **espace vectoriel normé produit**.

Démonstration

N est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et, si $(x_1, \dots, x_n) \in E$ avec $N(x_1, \dots, x_n) = 0$, alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 \leq N_i(x_i) \leq N(x_1, \dots, x_n) = 0$, d'où $x_i = 0_{E_i}$ puis $(x_1, \dots, x_n) = 0_E$.

Si $(x_1, \dots, x_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $N_i(\lambda x_i) = |\lambda| N_i(x_i) \leq |\lambda| N(x_1, \dots, x_n)$ indépendant de i d'où $N(\lambda(x_1, \dots, x_n)) \leq |\lambda| N(x_1, \dots, x_n)$.

Par suite $N(x_1, \dots, x_n) = N\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\right) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda(x_1, \dots, x_n))$ et donc

$N(\lambda(x_1, \dots, x_n)) = |\lambda| N(x_1, \dots, x_n)$, le cas $\lambda = 0$ est immédiat.

Si, de plus, $(y_1, \dots, y_n) \in E$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$N_i(x_i + y_i) \leq N_i(x_i) + N_i(y_i) \leq N(x_1, \dots, x_n) + N(y_1, \dots, y_n)$ indépendant de i , d'où $N((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) \leq N(x_1, \dots, x_n) + N(y_1, \dots, y_n)$. $\square$

B. Exemples fondamentaux

1. Normes sur $\mathbb{K}^n$

1.1. Théorème (norme N_∞)

$| N_\infty : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \|x\|_\infty$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

Comme $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{K}$, le théorème relatif au produit d'espaces vectoriels normés montre que N_∞ est une norme sur $\mathbb{K}^n$. $\square$

1.2. Théorème (norme N_1)

$| N_1 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto |x_1| + \dots + |x_n| = \|x\|_1$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

(i) Si $N_1(x_1, \dots, x_n) = 0$ alors $\forall k \in [1, n], |x_k| \leq N_1(x_1, \dots, x_n) = 0$ d'où $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$.

(ii) $N_1(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \sum_{k=1}^n |\lambda x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^n |x_k| = |\lambda| N_1(x_1, \dots, x_n)$.

(iii) $\forall k \in [1, n], |x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ d'où, par sommation : $N_1((x+y)_1, (x+y)_2, \dots, (x+y)_n) \leq N_1(x_1, \dots, x_n) + N_1(y_1, \dots, y_n)$. $\square$

1.3. Théorème (norme N_2)

$| N_2 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \|x\|_2$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

La considération du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ montre le théorème dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

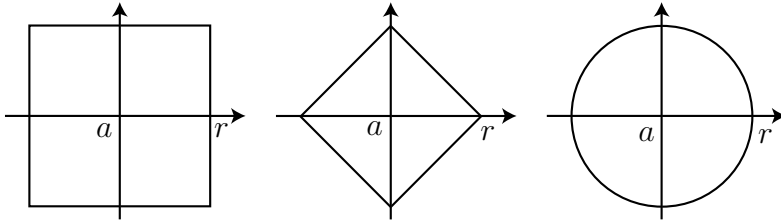
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la séparation et l'homogénéité se vérifient aisément.

$$\|x+y\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|)^2} \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \text{ car } |x_k| \text{ et } |y_k| \in \mathbb{R}$$

et le théorème est vrai pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. $\square$

1.4. Forme des boules dans $\mathbb{R}^2$

Si $X = (x, y)$ et $r > 0$ on a : $N_\infty(X) \leq r \iff |x| \leq r \text{ et } |y| \leq r$,
 $N_1(X) \leq r \iff |x| + |y| \leq r$, $N_2(X) \leq r \iff x^2 + y^2 \leq r^2$ d'où la forme des boules dans $\mathbb{R}^2$ muni respectivement des normes N_∞, N_1 et N_2 .



Remarque

On peut observer que chaque boule d'une espèce contient une boule de même centre pour une autre des trois normes. On verra plus tard une signification topologique de cette remarque.

2. Cas de la dimension infinie

2.1. Norme de la convergence uniforme

Théorème

Si X est un ensemble non vide et (E, N) un espace vectoriel normé, $\mathcal{B}(X, E)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $N_\infty^X : f \mapsto \sup_{x \in X} N(f(x)) = \|f\|_\infty^X$ est une norme sur cet espace vectoriel, on l'appelle **norme de la convergence uniforme**.

Démonstration

Montrons que $\mathcal{B}(X, E)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications de X dans E : la fonction nulle est bornée, si f et g sont dans $\mathcal{B}(X, E)$ et λ dans $\mathbb{K}$, soient r et r' dans $]0, +\infty[$ tels que $f(X) \subset B(0, r)$ et $g(X) \subset B(0, r')$, alors $(\lambda f + g)(X) \subset B(0, |\lambda|r + r')$ et donc $\lambda f + g \in \mathcal{B}(X, E)$ ce qui donne la structure d'espace vectoriel.

L'application N_∞^X est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et, si $N_\infty^X(f) = 0$, alors pour tout $x \in X$, $N(f(x)) \leq N_\infty^X(f) = 0$ ie. f est nulle.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{B}(X, E)$, on a : $\forall x \in X, N(\lambda f(x)) = |\lambda|N(f(x)) \leq |\lambda|N_\infty^X(f)$.

Donc : $N_\infty^X(\lambda f) = \sup_X N(\lambda f(x)) \leq |\lambda|N_\infty^X(f)$.

Si $\lambda \neq 0$, $N_\infty^X\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda f)\right) = N_\infty^X(f) \leq \frac{1}{|\lambda|}N_\infty^X(\lambda f) \Rightarrow N_\infty^X(\lambda f) \geq |\lambda|N_\infty^X(f)$.

Donc, pour $\lambda \neq 0$, on a $N_\infty^X(\lambda f) = |\lambda|N_\infty^X(f)$, égalité encore vraie si $\lambda = 0$.

Enfin, si f et g sont dans $\mathcal{B}(X, E)$, $\forall x \in X$, $N((f+g)(x)) \leq N(f(x)) + N(g(x))$ d'où $N((f+g)(x)) \leq N_\infty^X(f) + N_\infty^X(g)$ puis $N_\infty^X(f) + N_\infty^X(g)$ majore l'ensemble $\{N((f+g)(x)) \mid x \in X\}$ d'où $N_\infty^X(f+g) \leq N_\infty^X(f) + N_\infty^X(g)$. $\square$

Remarque

$N_\infty^X(f+g)$ n'est pas nécessairement élément de l'ensemble précédent, il ne faut surtout pas confondre les notions de max et de sup.

2.2. Normes N_1, N_2 et $N_\infty^{[a,b]}$ sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

a) Norme N_∞ : le cours de première année a prouvé que l'ensemble $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$, la restriction de $N_\infty^{[a,b]}$ définit alors une norme sur cet espace vectoriel et même, on a : $\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}), N_\infty^{[a,b]}(f) = \max_{x \in [a,b]} N(f(x))$.

b) Norme N_1 :

Théorème et définition

$N_1 : f \mapsto \int_{[a,b]} |f|$ définit sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ une norme, on l'appelle **norme de la convergence en moyenne**.

Démonstration

- (i) Si $N_1(f) = 0$ alors, comme $|f|$ est continue positive, elle est nulle.
- (ii) $N_1(\lambda f) = |\lambda|N_1(f)$ par linéarité de $f \mapsto \int_{[a,b]} f$.

(iii) $|f + g| \leq |f| + |g|$ et, par croissance et linéarité de $f \mapsto \int_{[a,b]} f$, il vient $\int_{[a,b]} |f + g| \leq \int_{[a,b]} |f| + \int_{[a,b]} |g|$ ou encore $N_1(f + g) \leq N_1(f) + N_1(g)$. $\square$

c) **Norme N_2** : on montrera ultérieurement le

Théorème

$N_2 : f \mapsto \left(\int_{[a,b]} |f|^2 \right)^{1/2}$ définit sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ une norme, on l'appelle **norme de la convergence en moyenne quadratique**.

2.3. Norme N_∞ sur $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$

Théorème

L'ensemble $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ des suites bornées de nombre complexes est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel sur lequel l'application $N_\infty : (x_n)_n \mapsto \sup_n |x_n|$ définit une norme.

Démonstration

$\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et cet exemple a déjà été traité. $\square$

Nous prouverons plus loin le théorème suivant.

2.4. Norme N_1 sur $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$

Théorème

$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \{x = (x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| \text{ converge}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sur lequel l'application $N_1 : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ définit une norme.

Vérification laissée au lecteur qui utilisera la norme sur $\mathbb{C}^n$ et les propriétés des séries à termes positifs.

C. Applications lipschitziennes

1. Définition

Si (E, N) et (F, P) sont deux espaces vectoriels normés et A une partie de E , une application f de A dans F est dite **lipschitzienne** s'il existe un réel positif k tel que, pour tout $(x, y) \in A^2$, $P[f(x) - f(y)] \leq kN(x - y)$, on dit alors que f est lipschitzienne de rapport k ou encore k -lipschitzienne.

Remarque

si f est k -lipschitzienne et si $k' \geq k$, alors f est k' -lipschitzienne.

2. Exemples

a) Si (E, N) est un espace vectoriel normé alors N est 1-lipschitzienne de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ car, pour tout $(x, y) \in E^2$, $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$.

b) Si (E, N) est un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E alors $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

En effet, si $(x, y, a) \in E^2 \times A$, $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ d'où l'on tire $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$. Le réel $d(x, A) - d(x, y)$ minore $\{d(y, a) \mid a \in A\}$

et donc $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$. On en déduit $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ et aussi $d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y)$ par raison de symétrie, donc $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

c) Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E relativement à laquelle les applications coordonnées sont notées $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, alors l'application $N_\infty : x \mapsto \max_{1 \leq k \leq n} |\varphi_k(x)|$ est une norme sur E et chaque φ_k est 1-lipschitzienne de (E, N_∞) dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$. En effet, si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $(x, y) \in E^2$, $|\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| = |\varphi_k(x - y)| \leq N_\infty(x - y)$.

3. Composition

Si (E, N) , (F, P) et (G, Q) sont des espaces vectoriels normés, A une partie de E , f une application k -lipschitzienne de A dans F et g une application ℓ -lipschitzienne de $f(A)$ dans G , alors $g \circ f$ est $k\ell$ -lipschitzienne sur A .

Démonstration

Si $(x, y) \in A^2$, $Q[g \circ f(x) - g \circ f(y)] = Q(g[f(x)] - g[f(y)]) \leq \ell P[f(x) - f(y)]$ et $P[f(x) - f(y)] \leq kN(x - y)$ d'où $Q[g \circ f(x) - g \circ f(y)] \leq k\ell N(x - y)$. $\square$

II. Suites

A. Nature d'une suite

1. Convergence

1.1. Définition

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E **converge** pour N si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) il existe ℓ dans E tel que la suite réelle $(N(x_n - \ell))$ converge vers 0
- (ii) $\exists \ell \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow N(x_n - \ell) < \varepsilon$
- (iii) $\exists \ell \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(\ell, \varepsilon)$

On dit alors que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ ou que ℓ est limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

1.2. Théorème et définition

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors elle admet une unique limite, cette limite est notée $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ou $\lim x_n$ ou $\lim(x_n)$.

Démonstration

Si ℓ et ℓ' sont deux limites de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq N(\ell - \ell') = N((\ell - x_n) + (x_n - \ell')) \leq N(\ell - x_n) + N(x_n - \ell')$, et donc, par encadrement, la suite réelle constante égale à $N(\ell - \ell')$ converge vers 0 d'où $N(\ell - \ell') = 0$ puis $\ell = \ell'$. $\square$

1.3. Théorème

Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_k, N_k)$ des espaces vectoriels normés, l'espace produit $E = E_1 \times \dots \times E_k$ est muni de la norme produit notée N , soient une suite à valeurs dans E de terme général $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,k})$ et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_k) \in E$. (x_n) converge vers ℓ dans E si, et seulement si, pour tout i dans $\llbracket 1, k \rrbracket$, $(x_{n,i})$ converge vers ℓ_i dans E_i .

Démonstration

- Si (x_n) converge vers ℓ alors, pour tout $(i, n) \in \llbracket 1, k \rrbracket \times \mathbb{N}$, $N_i(x_{n,i} - \ell_i) \leq N(x_n - \ell)$ et donc $(x_{n,i})$ converge vers ℓ_i si $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.
- Réciproquement si, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $(x_{n,i})$ converge vers ℓ_i , alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(x_n - \ell) \leq \sum_{i=1}^k N_i(x_{n,i} - \ell_i)$, terme général d'une suite réelle convergeant vers 0, donc (x_n) converge vers ℓ . $\square$

2. Opérations algébriques

On a vu que, si (E, N) est un espace vectoriel normé, $N_\infty : u \mapsto \sup_n N(u_n)$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ des suites bornées d'éléments de E .

2.1. Théorème

L'ensemble des suites convergentes à valeurs dans E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ et l'application qui à tout élément $(x_n)_n$ associe $\lim_n x_n$ est linéaire, autrement dit si $x = (x_n)_n$ converge vers ℓ , $x' = (x'_n)_n$ converge vers ℓ' et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda x + x'$ converge vers $\lambda\ell + \ell'$. Cette application est de plus 1-lipschitzienne.

Démonstration

Montrons qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$.

Si (x_n) est une suite convergente à valeurs dans E alors il existe un rang n_0 à partir duquel $N(x_n - \ell) \leq 1$ où l'on a posé $\ell = \lim_n x_n$. Avec $r = 1 + \max_{0 \leq n < n_0} N(x_n - \ell)$

on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in B_f(\ell, r)$ et donc $(x_n) \in \ell^\infty(E)$.

La suite nulle converge et si $(x_n)_n$ converge vers ℓ , $(x'_n)_n$ vers ℓ' et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq N((\lambda x_n + x'_n) - (\lambda\ell + \ell')) = N(\lambda(x_n - \ell) + (x'_n - \ell')),$$

par inégalité triangulaire $0 \leq N((\lambda x_n + x'_n) - (\lambda\ell + \ell')) \leq |\lambda|N(x_n - \ell) + N(x'_n - \ell')$.

Par encadrement la suite réelle de terme général $N((\lambda x_n + x'_n) - (\lambda\ell + \ell'))$ converge vers 0 ce qui termine la preuve de la structure de sous-espace vectoriel.

Pour ce qui est du rapport de Lipschitz, si $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} N(\ell - \ell') &\leq N(\ell - x_n) + N(x_n - x'_n) + N(x'_n - \ell') \\ &\leq N(\ell - x_n) + N_\infty(x - x') + N(x'_n - \ell') \end{aligned}$$

et, quand $n \rightarrow \infty$, $N(\ell - \ell') \leq N_\infty(x - x')$. $\square$

2.2. Théorème

*Soit (x_n) une suite de vecteurs de E et (λ_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.
Si (x_n) est bornée et (λ_n) converge vers $0_{\mathbb{K}}$, alors $(\lambda_n x_n)$ converge vers 0_E ,
si (λ_n) est bornée et (x_n) converge vers 0_E , alors $(\lambda_n x_n)$ converge vers 0_E ,
si (λ_n) et (x_n) convergent vers λ et ℓ , alors $(\lambda_n x_n)$ converge vers $\lambda\ell$.*

Démonstration

$(\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, N(x_n) \leq M) \Rightarrow N(\lambda_n x_n) \leq M|\lambda_n|$. D'où le résultat par théorème d'encadrement. Le deuxième résultat se prouve de même.

Enfin $\lambda_n x_n - \lambda\ell = \lambda_n(x_n - \ell) + (\lambda_n - \lambda)\ell$, (λ_n) est bornée, $(x_n - \ell)$ converge vers 0_E , $(\lambda_n - \lambda)$ converge vers $0_{\mathbb{K}}$, on procède par combinaison linéaire en utilisant les deux premiers résultats. $\square$

Remarque

Si $(x_n)_n$ converge vers ℓ l'inégalité triangulaire prouve que $(N(x_n))_n$ converge vers $N(\ell)$, la réciproque est fautive sauf si, bien sûr, $\ell = 0_E$, ainsi que le prouve le contre-exemple $x_n = (-1)^n$ dans $\mathbb{R}$.

B. Comparaison des normes

1. Généralités

1.1. Théorème

Si l'espace vectoriel E est muni simultanément des normes N et N' alors : toute suite convergeant pour N vers 0_E converge aussi pour N' vers 0_E si, et seulement si, il existe α dans $]0, +\infty[$ tel que $N' \leq \alpha N$.

Démonstration

- Si, pour un $\alpha > 0$ on a $N' \leq \alpha N$ et si (x_n) converge vers 0_E pour N alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq N'(x_n) \leq \alpha N(x_n)$ et donc, par encadrement, la suite réelle $(N'(x_n))$ converge vers 0 ie. (x_n) converge vers 0_E pour N' .
- Dans le cas contraire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nN ne majore pas N' , choisissons donc z_n dans E tel que $N'(z_n) > nN(z_n)$. Aucun des z_n n'est nul et, si l'on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{z_n}{\sqrt{n} N(z_n)}$ alors $N(x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $N'(x_n) > nN(x_n) = \sqrt{n}$ donc (x_n) converge vers 0_E pour N alors que $N'(x_n) \rightarrow +\infty$. $\square$

Remarques

1. Dans ce cas, si (x_n) converge vers ℓ pour N alors elle converge aussi vers ℓ pour N' car la convergence vers ℓ équivaut à la convergence vers 0_E de $(x_n - \ell)$.
2. Cette condition équivaut encore à N' est lipschitzienne en tant qu'application entre les espaces vectoriels normés (E, N) et $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, en effet :
 - Si $N' \leq \alpha N$ et si $(x, y) \in E^2$, $|N'(x) - N'(y)| \leq N'(x - y) \leq \alpha N(x - y)$.
 - Si N' est α -lipschitzienne et $x \in E$ alors $N'(x) = |N'(x) - N'(0_E)| \leq \alpha N(x - 0_E)$.

1.2. Définition

*On dit que les normes (sur E) N et N' sont **équivalentes** si, et seulement si, toute suite qui converge vers 0_E pour l'une converge aussi vers 0_E pour l'autre ie. si, et seulement si, il existe α et β dans $]0, +\infty[$ tels que $\alpha N \leq N' \leq \beta N$.*

Remarque et question

- Il s'agit immédiatement d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes définies sur E .
- La condition « vers 0_E » de la définition précédente est-elle indispensable ? Ce sera l'objet d'un des exercices.

2. Exemples

2.1. Cas de la dimension finie

Théorème

Sur $\mathbb{K}^n$ les normes N_1, N_2 et N_∞ sont équivalentes, plus précisément :

$$N_\infty \leq N_1 \leq \sqrt{n} N_2 \leq n N_\infty.$$

Démonstration

Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ on a $N_\infty(x) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = N_1(x)$ et aussi, par Cauchy-Schwarz, $\sum_{k=1}^n |x_k| \leq N_2((|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)) N_2(1, \dots, 1) = \sqrt{n} N_2(x)$. Enfin $N_2^2(x) = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n N_\infty^2(x) = n N_\infty^2(x)$ d'où $N_2(x) \leq \sqrt{n} N_\infty(x)$. $\square$

2.2. Cas de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.**Théorème**

Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, N_1, N_2 et $N_\infty^{[a, b]}$ ne sont pas équivalentes mais on a les inégalités : $N_1 \leq \sqrt{b-a} N_2 \leq (b-a) N_\infty$.

Démonstration

Si $f \in \mathcal{C}([a, b])$ on a, par Cauchy-Schwarz, $N_1(f) \leq N_2(|f|) N_2(1) = \sqrt{b-a} N_2(f)$ et aussi $N_2^2(f) = \int_a^b |f|^2 \leq \int_a^b (N_\infty^{[a, b]})^2(f) = (b-a) (N_\infty^{[a, b]})^2(f)$ d'où les inégalités.

Si $n \in \mathbb{N}$ considérons $f_n : x \mapsto \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n$, alors $f_n \in \mathcal{C}([a, b])$ et $N_1(f_n) = \frac{b-a}{n+1}$,

$N_2(f_n) = \sqrt{\frac{b-a}{2n+1}}$, $N_\infty^{[a, b]}(f_n) = 1$, on a donc $(n^{3/4} f_n)_n$ qui converge en moyenne

vers 0 mais pas en moyenne quadratique car $N_2(n^{3/4} f_n) \sim n^{1/4} \sqrt{\frac{b-a}{2}}$.

De même $(f_n)_n$ converge en moyenne quadratique vers 0 mais pas uniformément, la troisième comparaison découle de celles-ci. $\square$

C. Suites extraites. Valeurs d'adhérence

On se place dans un espace vectoriel normé (E, N) .

1. Définition

Si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ on appelle **suite extraite** de (x_n) toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Remarques

- Si φ est une telle application, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.
- Toute suite extraite d'une suite extraite est elle même extraite car la composée d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissantes est elle même strictement croissante.

2. Propriété

Si une suite (x_n) à valeurs dans E converge vers ℓ il en est de même de toute suite extraite.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$, choisissons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow N(x_n - \ell) < \varepsilon$.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante, si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, alors $\varphi(n) \geq n \geq n_0$ et donc $N(x_{\varphi(n)} - \ell) < \varepsilon$, ie. $(x_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ . $\square$

Remarque

On obtient ainsi une condition suffisante de divergence. Si l'on peut extraire de (x_n) deux suites qui convergent vers des limites distinctes, alors (x_n) diverge. Par exemple la suite réelle de terme général $(-1)^n$ diverge.

3. Théorème

Une suite (x_n) de vecteurs de E converge vers ℓ si, et seulement si, (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers ℓ .

Démonstration

- Le sens direct découle de la proposition précédente.
- Si (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers ℓ , soit $\varepsilon > 0$, choisissons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow N(x_{2n} - \ell) < \varepsilon$ et $N(x_{2n+1} - \ell) < \varepsilon$.

Si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2n_0$, envisageons deux cas :

- si $n \in 2\mathbb{N}$, $n = 2p$ et $p \geq n_0$ d'où $N(x_n - \ell) = N(x_{2p} - \ell) < \varepsilon$,
- sinon $n = 2p + 1$ et $p \geq n_0$ et $N(x_n - \ell) = N(x_{2p+1} - \ell) < \varepsilon$.

En résumé $N(x_n - \ell) < \varepsilon$ et donc (x_n) converge vers ℓ . $\square$

4. Définition

On appelle **valeur d'adhérence** d'une suite (x_n) à valeurs dans E toute limite d'une suite extraite de (x_n) .

Remarques

- Une suite convergente a une et une seule valeur d'adhérence, sa limite.
- La réciproque est fausse comme le prouve l'exemple de la suite réelle de terme général $x_n = \begin{cases} p & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ qui diverge mais a 0 pour seule valeur d'adhérence.

III. Topologie d'un espace vectoriel normé

(E, N) désigne un espace vectoriel normé.

A. Voisinages, ouverts, fermés

1. Voisinages

1.1. Définition

Si a un élément de E , on appelle **voisinage** de a (dans E pour la norme N) toute partie V de E contenant une boule centrée en a .
L'ensemble des voisinages de a dans E pour N se note $\mathcal{V}_{E,N}(a)$ ou $\mathcal{V}_E(a)$.

Remarques

- Pour une partie V de E on a : $V \in \mathcal{V}_E(a) \iff \exists r \in]0, +\infty[, B(a, r) \subset V$.
- Si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$, alors (x_n) converge vers ℓ si, et seulement si, pour tout $V \in \mathcal{V}_E(a)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V$.

1.2. Propriétés

1. $\forall a \in E, \forall V \in \mathcal{V}_E(a), a \in V$.
2. $\forall a \in E, \forall r \in]0, +\infty[, B(a, r) \in \mathcal{V}_E(a)$ et $B_f(a, r) \in \mathcal{V}_E(a)$.
3. Si $V \subset V' \subset E$ et $V \in \mathcal{V}_E(a)$, alors $V' \in \mathcal{V}_E(a)$.
4. Si $p \in \mathbb{N}^*$, l'intersection de p voisinages de a est un voisinage de a .
5. Une réunion quelconque de voisinages de a est un voisinage de a .
6. Deux éléments distincts de E ont des voisinages disjoints.

Démonstration

- Les propriétés 1. à 3. et 5. sont immédiates.
- 4. Si, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $B(a, r_i) \subset V_i$ avec $r_i > 0$, alors $r = \min(r_1, \dots, r_p) > 0$ et $B(a, r) \subset \bigcap_{i=1}^p V_i$, ce qui prouve que $\bigcap_{i=1}^p V_i \in \mathcal{V}(a)$.
- 6. Si $(a, b) \in E^2$ et $a \neq b$, pour $r = \frac{N(b-a)}{2}$, $r > 0$ et $B(a, r) \cap B(b, r) = \emptyset$. $\square$

Remarque

Une intersection quelconque de voisinages de a n'est pas toujours un voisinage de a comme le prouve, dans $\mathbb{R}$, l'exemple : $\bigcap_{n \geq 1} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\} \notin \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$.

1.3. Définition

Si A est une partie de E , a un élément de A , une partie V de A est appelée *voisinage de a dans A* s'il existe V_1 voisinage de a dans E tel que $V = V_1 \cap A$ ou encore s'il existe $r \in]0, +\infty[$ tel que $B(a, r) \cap A \subset V$.

1.4. Définition

Une propriété $\mathcal{P}$ est dite *vraie au voisinage de a* s'il existe $V \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que tout élément de V vérifie $\mathcal{P}$.

Exemple

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et vérifie $f(0) = 1$ alors f est strictement positive au voisinage de 0.

2. Parties ouvertes

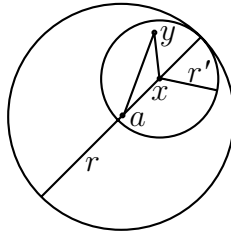
2.1. Définition

Une partie Ω de E est dite **ouverte** (dans E pour N) si Ω est voisinage de chacun de ses points ou encore : $\forall x \in \Omega$, $\Omega \in \mathcal{V}_{E,N}(x)$.

Cette définition est équivalente à : $\forall x \in \Omega$, $\exists r \in]0, +\infty[$, $B(x, r) \subset \Omega$.

Exemple

Toute boule ouverte est une partie ouverte.



En effet, soient $(a, r) \in E \times]0, +\infty[$ et $x \in B(a, r)$, posons $r' = r - N(x - a)$, alors $r' > 0$. Pour tout y dans $B(x, r')$, $N(a - y) < N(a - x) + N(x - y) \leq N(a - x) + r' = r$ et donc $y \in B(a, r)$, ce qui prouve $B(x, r') \subset B(a, r)$. Par suite $B(a, r) \in \mathcal{V}(a)$, ce qui termine la preuve. $\square$

2.2. Propriétés

1. $\emptyset$ et E sont des parties ouvertes.
2. Une réunion quelconque de parties ouvertes est une partie ouverte.
3. Une intersection finie de parties ouvertes est une partie ouverte.

Démonstration

1. découle de la définition d'une partie ouverte.
2. 3. et 4. découlent des propriétés des voisinages. $\square$

2.3. Proposition

Si (E, N) est l'espace vectoriel normé produit de $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ et si, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, Ω_k est une partie ouverte de E_k pour N_k , alors $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_p$ est une partie ouverte de E pour N .

Démonstration

Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in \Omega$, alors, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_k \in \Omega_k$, on choisit $r_k > 0$ tel que $B_k(x_k, r_k) \subset \Omega_k$. Posons $r = \min_{1 \leq k \leq p} r_k$, alors $r > 0$.

Si $y = (y_1, \dots, y_p) \in B(x, r)$, alors, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on a :

$N_k(y_k - x_k) \leq N(y - x) < r \leq r_k$ d'où $y_k \in B_k(x_k, r_k) \subset \Omega_k$ et donc $y \in \Omega$.

Ω contient une boule de centre x , d'où Ω est une partie ouverte de E pour N . $\square$

Remarque

Les parties ouvertes d'un espace vectoriel normé produit ne sont pas toutes de cette forme, en effet, par réunion, $] - 1, 0[\cup] 0, 1[$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et n'est pas de la forme $\Omega_1 \times \Omega_2$ comme le montre immédiatement un dessin.

2.4. Définition

Si A est une partie de E , on appelle **ouvert relatif** de A toute partie U de A de la forme $U = \Omega \cap A$ où Ω est une partie ouverte de E .

Exemple

$]0, 1[$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}_+$ car c'est $] - \infty, 1[\cap \mathbb{R}_+$ par exemple.

3. Parties fermées

En notant $\mathbf{C}_E(A)$ le complémentaire dans E de la partie A , on rappelle les égalités

$$\mathbf{C}_E(\emptyset) = E \text{ et } \mathbf{C}_E(E) = \emptyset,$$

$$\mathbf{C}_E(A \cup B) = \left(\mathbf{C}_E(A) \right) \cap \left(\mathbf{C}_E(B) \right) \text{ et } \mathbf{C}_E(A \cap B) = \left(\mathbf{C}_E(A) \right) \cup \left(\mathbf{C}_E(B) \right).$$

3.1. Définition

Une partie F de E est **fermée** si son complémentaire est une partie ouverte.

3.2. Propriétés

1. $\emptyset$ et E sont des parties fermées de E .
2. Toute intersection de parties fermées est une partie fermée.
3. Une réunion finie de parties fermées est une partie fermée.

3.3. Théorème (caractérisation séquentielle des parties fermées)

Une partie F de E est fermée si, et seulement si, toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F .

Démonstration

- Si F est une partie fermée et (x_n) une suite convergente à valeurs dans F , on va montrer par l'absurde que sa limite, ℓ est dans F .

Sinon $\ell \in \Omega = \bigcup_E (F)$ partie ouverte de E . Soit $r > 0$ tel que $B(\ell, r) \subset \Omega$. À partir d'un certain rang n_0 on a $x_n \in B(\ell, r) \cap F = \emptyset$, ce qui est absurde.

• Supposons que F n'est pas une partie fermée, alors $\Omega = \bigcup_E (F)$ n'est pas une partie ouverte. Soit ℓ dans Ω tel que toute boule de centre ℓ rencontre $F = \bigcup_E (\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on choisit x_n dans $B(\ell, 2^{-n}) \cap F$, alors (x_n) est une suite convergente d'éléments de F dont la limite n'est pas dans F . $\square$

Conséquences

1. Toute boule fermée est une partie fermée car, si (x_n) est une suite convergente d'éléments de $B_f(a, r)$, de limite notée ℓ , alors $N(x_n - a)$ est le terme général d'une suite réelle convergeant vers $N(\ell - a)$ et majorée par r .

Par suite $N(\ell - a) \leq r$ et $\ell \in B_f(a, r)$.

2. Toute sphère est une partie fermée car $S(a, r) = B_f(a, r) \cap \bigcup_E (B(a, r))$.

3. Si $x \in E$, $\bigcap_{n \geq 0} B_f(x, 2^{-n}) = \{x\}$ est une partie fermée. Comme réunion finie, toute partie finie est fermée.

4. $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$ car toute suite convergente d'entiers stationne.

Remarques

1. Il existe des parties à la fois ouvertes et fermées et aussi des parties ni ouvertes ni fermées dans E .

2. Si $x \in E$, alors une union quelconque de parties fermées n'est pas toujours une partie fermée comme le montre l'exemple $E = \mathbb{R}$ et $\bigcup_{x \in]0, 1[} \{x\} =]0, 1[$.

3.4. Proposition

| Un produit de parties fermées est une partie fermée de l'espace produit.

Démonstration

Si $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ et $N : (x_1, \dots, x_p) \mapsto \max_{1 \leq k \leq p} N_k(x_k)$, on considère une suite convergente d'éléments du produit F des fermés $F_1, \dots, F_p$ de terme général noté $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,p})$. Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la suite $(x_{n,k})_n$ est à valeurs dans F_k et converge, sa limite est donc un élément ℓ_k de F_k , (x_n) converge vers $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in F$, ce qui prouve que F est une partie fermée de E . $\square$

3.5. Définition

| Si A est une partie de E , on appelle **fermé relatif** de A toute partie $G = F \cap A$ où F est une partie fermée de E

B. Adhérence, intérieur, frontière

1. Définitions

A désigne une partie de E .

1. On appelle **intérieur** de A et on note $\overset{\circ}{A}$, la réunion des parties ouvertes contenues dans A . C'est aussi la plus grande partie ouverte de E contenue dans A . Les éléments de $\overset{\circ}{A}$ sont dits **intérieurs** à A .

2. On appelle **adhérence** de A , et on note $\overline{A}$, l'intersection des parties fermées de E contenant A , c'est aussi la plus petite partie fermée contenant A . Tout élément de $\overline{A}$ est dit **adhérent** à A .

2. Définition

On appelle **frontière** de A , et on note $\text{Fr}(A)$, l'intersection des adhérences de A et de $\mathbf{C}_E(A)$.

3. Propriétés

1. Si $A \subset B$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. A est une partie fermée si, et seulement si, $A = \overline{A}$.
3. $\text{Fr}(A)$ est une partie fermée de E .

4. Théorème

Si A est une partie de E et $x \in E$, il y a équivalence entre les assertions :

- (i) $x \in \overline{A}$,
- (ii) $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$,
- (iii) $d(x, A) = 0$,
- (iv) Il existe une suite (a_n) d'éléments de A convergeant vers x .

Démonstration

- Supposons (i). Soit $V \in \mathcal{V}(x)$, V contient une boule $B(x, r)$. Si on avait $B(x, r) \cap A = \emptyset$ alors $A \subset \overline{A} \setminus B(x, r)$, partie fermée strictement contenue dans $\overline{A}$, ce qui est impossible. Donc $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ et a fortiori $V \cap A \neq \emptyset$.
- Supposons (ii). Pour tout $r > 0$, on peut choisir a_r dans $A \cap B(x, r)$ et donc $0 \leq d(x, A) \leq d(x, a_r) < r$, d'où $d(x, A) = 0$.
- Supposons (iii). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x, A) \leq 2^{-n}$ et donc il existe a_n dans A tel que $N(x - a_n) \leq 2^{-n}$. Une telle suite (a_n) est à valeurs dans A et converge vers x .
- Supposons enfin (iv). Une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x est aussi à valeurs dans $\overline{A}$ fermée. Sa limite x est donc élément de $\overline{A}$. $\square$

5. Définition d'une partie dense

Une partie A de E est dite **dense** si $\overline{A} = E$ ou encore si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A .

Exemples

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. En effet, si $x \in \mathbb{R}$ on a $x = \lim_n u_n = \lim_n v_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor \in \mathbb{Q}$ et $v_n = u_n \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{10^n}\right) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

IV. Limites, continuité

A. Limites

1. Définitions

Si (E, N) et (F, N') sont deux espaces vectoriels normés, A une partie de E , a un point adhérent à A et f une application de A dans F , on dit que f admet une limite en a si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

- (1) $(\exists b \in F), (\forall \varepsilon > 0), (\exists \eta > 0), (\forall x \in A), (N(x - a) < \eta \Rightarrow N'(f(x) - b) < \varepsilon)$,
 - (2) $(\exists b \in F), (\forall V \in \mathcal{V}_F(b)), (\exists W \in \mathcal{V}_E(a)), (\forall x \in A), (x \in W \Rightarrow f(x) \in V)$.
- Un tel b sera appelé limite de f au point a .

Remarques

Comme a est adhérent à A , $A \cap W$ est non vide.

L'équivalence de (1) et (2) se vérifie aisément, compte tenu de la définition des voisinages.

2. Théorème et définition

Si f admet une limite ℓ en a alors cette limite est unique, on la note $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\ell = \lim_a f$ ou $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$. On note aussi $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Démonstration

Si b et c sont limites de f en a avec $b \neq c$, choisissons V et V' , voisinages disjoints de b et c . Il existe alors deux voisinages W, W' de a dans E tels que, pour tout $x \in A$, $(x \in W \Rightarrow f(x) \in V)$ et $(x \in W' \Rightarrow f(x) \in V')$.

$W \cap W' \in \mathcal{V}_E(a)$ et a est adhérent à A , donc $W \cap W' \cap A \neq \emptyset$ et l'on a, pour tout x de $W \cap W' \cap A$, $f(x) \in V \cap V' = \emptyset$: absurde. $\square$

3. Théorème (caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite)

f admet une limite en a adhérent à A si, et seulement si, l'image par f de toute suite d'éléments de A convergeant vers a est une suite convergente.

Démonstration

• Si f admet pour limite b en a et si $(x_n)_n$ est une suite à valeurs dans A de limite a , pour $\varepsilon > 0$, choisissons $\eta > 0$ tel que pour tout x de A , si $N(x - a) < \eta$ alors $N'(f(x) - b) < \varepsilon$. Choisissons alors n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $N(x_n - a) < \eta$.

Si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $n \geq n_0$ on a $N'(f(x_n) - b) < \varepsilon$ et donc $(f(x_n))_n$ converge vers b .

• Réciproquement, on va procéder par l'absurde en deux temps :

α) Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ à valeurs dans A de limite a , posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{2n} = x_n$ et $z_{2n+1} = y_n$, alors $(z_n)_n$ est à valeurs dans A et converge vers a , par suite $(f(z_n))_n$ converge et $\lim f(x_n) = \lim f(z_{2n}) = \lim f(z_{2n+1}) = \lim f(y_n)$. La limite commune à toutes ces suites est notée b , dès que $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ et converge vers a , on a : $\lim f(x_n) = b$.

β) Si f n'a pas b pour limite en a , soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe x dans A tel que $N(x - a) < \eta$ et $N'(f(x) - b) \geq \varepsilon_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ choisissons x_n dans A tel que $N(x_n - a) < \frac{1}{n+1}$ et $N'(f(x_n) - b) \geq \varepsilon_0$, $(x_n)_n$ converge vers a , est à valeurs dans A mais $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers b : absurde. $\square$

4. Théorème (cas des fonctions à valeurs dans un espace produit)

Soient $(E, N), (F_1, N'_1), \dots, (F_p, N'_p)$ des espaces vectoriels normés, A une partie de E , a un point adhérent à A et f une application de A dans l'espace vectoriel produit $F_1 \times \dots \times F_p$ muni de la norme produit notée N' . On note, pour tout $x \in A$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$.

$\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$ si, et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\ell_k = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f_k(x)$.

Démonstration

Compte tenu de la définition de N' , le résultat découle de l'équivalence suivante :

$$N'(f(x) - \ell) < \varepsilon \iff \left(\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, N'_k(f_k(x) - \ell_k) < \varepsilon \right) \square$$

5. Théorème

1. L'ensemble des applications de A dans F ayant une limite en a adhérent à A est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \mapsto \lim_a f$ est linéaire.
2. L'ensemble des applications de A dans $\mathbb{K}$ ayant une limite en a adhérent à A est une $\mathbb{K}$ -algèbre.
3. Si $A \subset E$, $B \subset F$, a point adhérent à A , f application de A dans B ayant b pour limite en a , alors b est adhérent à B et, si g , application de B dans G , a pour limite c en b , $g \circ f$ a pour limite c en a .

Démonstration

Démontrons à titre d'exemple la troisième partie du théorème. Soit $(x_n)_n$ suite d'éléments de A de limite a (et il en existe), alors $(f(x_n))_n$ est une suite d'éléments de B de limite b , celui-ci est donc adhérent à B . Puis $((g \circ f)(x_n))_n$ converge vers c en tant qu'image par g d'une suite à valeurs dans B de limite b . Cela prouve que c est limite de $g \circ f$ en a . $\square$

6. Théorème

Soit (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé, A une partie de E , a un point adhérent à A et f une application de A dans $\mathbb{K}$. Si f admet $b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ pour limite en a , alors f ne s'annule pas au voisinage de a et $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \in P]{x \rightarrow a} \frac{1}{b}$.

Démonstration

Comme $b \neq 0$ et comme deux éléments distincts ont des voisinages disjoints, il existe $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(b)$ tel que $0 \notin V$. Comme $\lim_a f = b$, il existe $W \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que, pour tout $x \in W \cap A$, $f(x) \in V$. La fin se prouve aisément en utilisant la caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite et les résultats sur les suites réelles ou complexes. $\square$

7. Théorème

Soient (E, N) et (F, N') deux espaces vectoriels normés, A une partie de E , a un point adhérent à A et f une application de A dans F . Si f admet une limite en a , elle est bornée au voisinage de a .

Démonstration

Avec les notations de la définition IV.A.1. en posant $\varepsilon = 1$, il existe $W \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que : $\forall x \in W \cap A, N'(f(x)) \leq N'(f(x) - b) + N'(b) \leq 1 + N'(b)$. $\square$

8. Définitions (extensions)

1. Si a est adhérent à A et f à valeurs réelles, on dit que f admet pour limite $+\infty$ en a , et l'on écrit $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} +\infty$ si :
 $(\forall M \in \mathbb{R}_+, (\exists \eta > 0), (\forall x \in A), (N(x - a) < \eta \Rightarrow f(x) > M))$.
2. Si f est une application d'une partie non majorée A de $\mathbb{R}$ dans F , on dit que f admet $b \in F$ pour limite en $+\infty$, et l'on écrit $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} b$, si :
 $(\forall \varepsilon > 0), (\exists M \in \mathbb{R}), (\forall x \in I), (x > M \Rightarrow N'(f(x) - b) < \varepsilon)$

9. Définitions (extensions)

3. Si A est une partie non bornée de E et f une application de A dans F , et $b \in F$, on dit que $f(x) \xrightarrow{N(x) \rightarrow +\infty} b$ si :

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists R > 0), (\forall x \in A), (N(x) > R \Rightarrow N'(f(x) - b) < \varepsilon).$$

4. Si A est une partie non bornée de E et f une application de A dans $\mathbb{R}$, on dit que $f(x) \xrightarrow{N(x) \rightarrow +\infty} +\infty$ si :

$$(\forall M > 0), (\exists R > 0), (\forall x \in A), (N(x) > R \Rightarrow f(x) > M).$$

Remarque

On définirait de même : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} b$, $f(x) \xrightarrow{N(x) \rightarrow +\infty} -\infty$, ces extensions de la notion de limite peuvent aussi être caractérisées de façon séquentielle.

Exemples

a) Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 + x^2y$, alors $f(x, y) \xrightarrow{N_\infty(x, y) \rightarrow +\infty} +\infty$.

En effet, en notant $r = \max(|x|, |y|) = N_\infty(x, y)$, on a $f(x, y) \geq r^4 - r^3$.

b) Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2)^2 + xy$, alors f n'a pas de limite lorsque $N_\infty(x, y) \rightarrow +\infty$. En effet, $f(x, 0) = x^4$ et $f(x, -x) = -x^2$.

On déduit de la caractérisation séquentielle de l'existence de limites de fonctions et du théorème de prolongement des inégalités dans les suites réelles les théorèmes suivants :

10. Théorème de prolongement des inégalités

Si (E, N) est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé, A une partie de E , a un point adhérent à A ($a \in \overline{\mathbb{R}}$ si $E = \mathbb{R}$), f et g deux applications de A dans $\mathbb{R}$. Si f et g admettent une limite en a et si au voisinage de a , $f(x) \leq g(x)$, alors $\lim_a f \leq \lim_a g$.

11. Théorème d'encadrement

Si (E, N) est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé, A une partie de E , a un point adhérent à A ($a \in \overline{\mathbb{R}}$ si $E = \mathbb{R}$), f, g et h trois applications de A dans $\mathbb{R}$. Si f et h admettent b pour limite en a et si au voisinage de a , $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, alors g admet b pour limite en a .

B. Continuité

1. Définitions

1.1. Définition

Soit f une application d'une partie A de E dans F , (E, N) et (F, N') étant des espaces vectoriels normés. Si $a \in A$, on dit que f est continue en a si f admet une limite en a .

Remarques

1. Si f est continue en a alors $\lim_a f = f(a)$.

2. Si $F = F_1 \times \dots \times F_q$, $f = (f_1, \dots, f_q)$ alors f est continue en a si, et seulement si, toutes les f_k sont continues en a .

3. f est continue en a si, et seulement si, l'image par f de toute suite convergente vers a d'éléments de A est une suite convergente.

4. Une fonction lipschitzienne sur A est continue en tout point de A .

1.2. Définitions

1. Si $B \subset A$, on dit que f est continue sur B si elle est continue en tout point de B .
2. On dit que f est continue si elle est continue sur A . On note $\mathcal{C}(A, F)$ l'ensemble des telles applications.

2. Propriétés

2.1. Restriction et prolongement

Si f est continue et si $B \subset A$ alors la restriction de f à B est clairement continue, la réciproque est fautive comme le prouve l'exemple de la restriction de $\chi_{\mathbb{Q}}$ à $\mathbb{Q}$.

Si f est continue et a adhérent à A sans être dans A alors f admet un prolongement $\tilde{f}$ continu à $A \cup \{a\}$ si, et seulement si, f admet une limite en a par définition de la continuité. Si c'est le cas il y a unicité du prolongement $\tilde{f}$, car $\tilde{f}(a) = \lim_a f$.

2.2. Opérations

On déduit de IV.A.5. et A.6. le théorème suivant :

Théorème

1. $\mathcal{C}(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.
2. $\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.
3. Si $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ et si f ne s'annule pas sur A , alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}(A, \mathbb{K})$.

Conséquences

a) Si l'on note $(x_1, \dots, x_p)$ les coordonnées de $x \in E$, $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, relativement à une base, **une fonction polynôme de p variables** dans $\mathbb{K}$ est associée à une famille $(a_h)_{h \in H}$ de coefficients dans $\mathbb{K}$ indexée par H , partie finie de $\mathbb{N}^p$ ($h \in H$ s'écrit $h = (h_1, \dots, h_p)$) par la relation :

$$P(x_1, \dots, x_p) = \sum_{h \in H} a_h x^{h_1} \dots x^{h_p}.$$

Comme les applications $(x_1, \dots, x_p) \mapsto x_j$ sont 1-lipschitziennes de $\mathbb{K}^p$ muni de N_∞ dans $\mathbb{K}$, donc continues, on déduit du théorème précédent la continuité de P .

D'où la continuité de l'application $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $A = (a_{i,j}) \mapsto \det(A)$ où

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}.$$

b) On appelle **fonction rationnelle de p variables**, le quotient de deux fonctions polynômes de p variables. Une telle fonction est continue sur son ensemble de définition.

2.3. Composition

On déduit aisément de IV.A.5.

Théorème

- Si $f \in \mathcal{C}(A, F)$, $f(A) \subset B \subset F$ et $g \in \mathcal{C}(B, G)$ où (G, N'') est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé, alors $g \circ f \in \mathcal{C}(A, G)$.

3. Une caractérisation des applications continues

3.1. Théorème

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue.
- (ii) L'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A .
- (iii) L'image réciproque de tout fermé de F est un fermé relatif de A .

Démonstration

(ii) $\iff$ (iii) car $f^{-1}(F \setminus \Omega) = E \setminus f^{-1}(\Omega)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si Ω est un ouvert de F et si $a \in f^{-1}(\Omega)$, alors $f(a) \in \Omega$. Donc $\Omega \in \mathcal{V}_F(f(a))$. f étant continue en a , il existe $W \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que, pour tout $x \in W \cap A$, $f(x) \in \Omega$; autrement dit $W \cap A \subset f^{-1}(\Omega)$. Donc $f^{-1}(\Omega)$ est donc un voisinage de a dans A . D'où $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert relatif de A car voisinage de chacun de ses points.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $a \in A$. Pour tout voisinage V' de $f(a)$ dans F , il existe $\Omega \subset F$ tel que $f(a) \in \Omega \subset V'$. Comme, par hypothèse, $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de A et comme $a \in f^{-1}(\Omega)$, $f^{-1}(\Omega)$ est un voisinage de a dans A . D'où l'existence de $V \in \mathcal{V}_E(a)$ tel que $f^{-1}(\Omega) = A \cap V$. Donc : $\forall x \in A \cap V$, $f(x) \in \Omega \subset V'$. D'où la continuité de f en a . Comme a est quelconque, f est continue sur A . $\square$

3.2. Corollaire

Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors
 $\{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$, $\{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\}$ sont fermées, $\{x \in E \mid f(x) < \alpha\}$
 est une partie ouverte de E .

Démonstration

Aapplication du théorème aux parties fermées $\{\alpha\}$, $] - \infty, \alpha]$ et à la partie ouverte $] - \infty, \alpha[$. $\square$

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^2$, si $F(x, y) = 1$, où $F : (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$, est l'équation d'une ellipse ($\mathcal{E}$), alors ($\mathcal{E}$) est une partie fermée, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) < 1\}$ est une partie ouverte, appelée intérieur de l'ellipse, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) > 1\}$ est aussi une partie ouverte, l'extérieur de l'ellipse.
2. $\mathcal{O}(n)$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, en effet, si $f : M \mapsto {}^tMM$ alors f est continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ car toutes ses coordonnées sont polynomiales en les $m_{i,j}$ et $\mathcal{O}(n) = f^{-1}(\{I_n\})$.
3. $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie ouverte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ car c'est $\det^{-1}(\mathbb{K}^\star)$, $\det$ est continue car polynomiale, $\mathbb{K}^\star$ est une partie ouverte car de complémentaire fini.
4. Toute boule ouverte (*resp.* fermée) d'un espace vectoriel normé (E, N) est une partie ouverte (*resp.* fermée) de E . Il suffit, pour s'en convaincre de prendre pour f la fonction $x \mapsto N(x - a) = d(x, a)$ qui est continue car lipschitzienne.

3.3. Corollaire

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et A une partie dense dans E . Deux applications continues sur E à valeurs dans F sont égales si, et seulement si, elles le sont sur A .

Démonstration

Si $f = g$, alors $f|_A = g|_A$.

Réciproquement, d'après le théorème précédent, $X = \{x \in E \mid (f - g)(x) = 0_F\}$ est une partie fermée de E contenant A . Donc $\overline{A} \subset X \subset E = \overline{A}$. D'où $X = E$. $\square$

Application

Déterminer les applications f de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ sont solutions. Réciproquement, si une telle f existe, soit $x \in E$. Après avoir prouvé par récurrence, que $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que f est impaire, on a : $f(nx) = nf(x)$ pour $n \in \mathbb{Z}$. De la remarque suivante :

$\forall q \in \mathbb{N}^*, f(x) = f\left(\frac{q}{q}x\right) = qf\left(\frac{1}{q}x\right)$ on déduit que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}, t \mapsto f(tx)$ et $t \mapsto tf(x)$ étant continues sur $\mathbb{R}$, égales sur $\mathbb{Q}$, partie dense dans $\mathbb{R}$, sont égales.

C. Continuité uniforme

1. Définition

Soient (E, N) et (F, N') deux espaces vectoriels normés et A une partie de E . Si f est une application de A dans F , f est uniformément continue si :
 $(\forall \varepsilon > 0), (\exists \eta > 0), (\forall (x, y) \in A^2), (N(x - y) < \eta \Rightarrow N'(f(x) - f(y)) < \varepsilon)$.

2. Théorème

1. Une application lipschitzienne est uniformément continue.

2. Une application uniformément continue est continue.

Les réciproques sont fausses.

Démonstration

1. Si f est lipschitzienne de rapport $k > 0$, pour $\varepsilon > 0$ en posant $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ on a, pour tout $(x, y) \in A^2, N(x - y) < \eta \Rightarrow N'(f(x) - f(y)) \leq kN(x - y) < k\eta = \varepsilon$.

Voici un exemple d'application uniformément continue non lipschitzienne.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$. Si f est lipschitzienne de rapport k alors pour tout $x \in]0, 1], |f(x) - f(0)| \leq k|x - 0|$ d'où $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq k$ et donc $\frac{1}{\sqrt{x}} \underset{0}{\rightarrow} O(1)$, ce qui n'est

pas le cas car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. Montrons que f est uniformément continue. ie.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \varepsilon^2, \forall (x, y) \in [0, 1]^2, 0 \leq x - y \leq \varepsilon^2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \varepsilon$.

Comme : $x \geq y \geq 0 \Rightarrow \sqrt{y} \leq \sqrt{x} \Rightarrow y \leq \sqrt{xy}$, on a :

$0 \leq x - y \leq \varepsilon^2 \Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - y + 2y - 2\sqrt{xy} \leq \varepsilon^2$, d'où la conclusion.

2. Si dans la définition précédente, on fixe $y = a \in A$, on a la continuité de f en a .

L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ par composition, mais non uniformément continue. On peut s'en convaincre en considérant les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = \sqrt{n+1}$, on a $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ puisque

$v_n - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ alors que $|f(u_n) - f(v_n)| = 1$. $\square$

V. Applications linéaires continues

1. Théorème

Si (E, N) et (F, N') sont des espaces vectoriels normés et u élément de $\mathcal{L}(E, F)$, alors u est continue si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in E, N'(u(x)) \leq k N(x) \quad (\star)$$

On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications continues de $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration

• On déduit de $(\star)$ que u est k -lipschitzienne donc continue. En effet, u étant linéaire, on a : $\forall (x, y) \in E^2, N'(u(x) - u(y)) = N'(u(x - y)) \leq k N(x - y)$.

• Réciproquement, si u est continue, elle l'est en 0_E . Donc :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, N(x - 0_E) \leq \alpha \Rightarrow N'(u(x) - u(0_E)) \leq 1 \quad (1)$$

Si $x \neq 0_E$, le vecteur $y = \alpha \frac{x}{N(x)}$ est tel que $N(y) = \alpha$. On déduit de (1) que :

$$N'(u(y)) \leq 1. \text{ D'où } N'(u(x)) \leq \frac{1}{\alpha} N(x).$$

Si $x = 0_E$, l'inégalité $(\star)$ est vérifiée. D'où la conclusion quel que soit $x \in E$.

$\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F) \cap \mathcal{C}(E, F)$ prouve que $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$. $\square$

Remarques

• Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, u est continue si, et seulement si, u est uniformément continue si, et seulement si, u est continue en 0 si, et seulement si, u est lipschitzienne.

• Ce théorème étant important, nous proposons une autre preuve de la réciproque utilisant des suites et qui est formatrice.

Si $(\star)$ n'est pas vérifiée, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans $E \setminus \{0\}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}, N'(u(x_n)) \geq 2^n N(x_n)$. Si $y_n = \frac{1}{2^n N(x_n)} x_n$ on a $N'(u(y_n)) \geq 1$ avec $N(y_n) = 2^{-n}$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, ce qui contredit la continuité de u . $\square$

2. Une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$

2.1. Théorème et définition

Soient (E, N) et (F, N') deux espaces vectoriels normés. L'application de $\mathcal{L}_c(E, F)$ dans $\mathbb{R}_+$: $u \mapsto \sup_{N(x) \leq 1} N'(u(x))$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ dite **norme subordonnée** à N et N' . On note $\|u\| = \sup_{N(x) \leq 1} N'(u(x))$.

Démonstration

• Si $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $\{N'(u(x)) \mid x \in E, N(x) \leq 1\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}_+$ d'après le théorème de caractérisation des applications linéaires continues. Donc $\|u\|$ existe et appartient à $\mathbb{R}_+$.

• $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ est une conséquence des propriétés de la norme de la convergence uniforme avec $f = N' \circ u, g = N' \circ v$ et $X = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$.

• De même, si $(\lambda, u) \in \mathbb{K} \times \mathcal{L}_c(E, F)$. Alors $\|\lambda.u\| = |\lambda|. \|u\|$.

• Si $\|u\| = 0$, alors, pour tout $x \in E$ tel que $N(x) \leq 1, 0 \leq N'(u(x)) \leq \|u\| = 0$.

Comme N' est une norme, pour tout $x \in E$ tel que $N(x) \leq 1, u(x) = 0_F$.

Si $y \in E \setminus \{0_E\}$, $x = \frac{y}{N(y)}$ est unitaire. D'où $u(x) = 0_F = \frac{u(y)}{N(y)}$. i.e. $u(y) = 0_F$.

Comme $u(0_E) = 0_F$, on a : $\forall y \in E$, $u(y) = 0_F$ et l'on peut conclure que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$. $\square$

2.2. Conséquences

- (i) $\forall x \in E, N'(u(x)) \leq \|u\|N(x)$.
- (ii) Si (E, N) , (F, N') et (G, N'') sont des espaces vectoriels normés, $u \in \mathcal{L}_c(F, G)$ et $v \in \mathcal{L}_c(E, F)$ montrer que, pour les normes subordonnées on a : $\|u \circ v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

Démonstration

(i) est immédiate puisque le vecteur $\frac{x}{N(x)}$ est unitaire si $x \neq 0$ et u linéaire.

(ii) Si $N(x) \leq 1$ alors $N''(u(v(x))) \leq \|u\| \cdot N'(v(x))$ puis $N''(u(v(x))) \leq \|u\| \cdot \|v\|$ et l'inégalité découle du théorème précédent. $\square$

VI. Compacité

1. Définition

Une partie A d'un espace vectoriel normé (E, N) est dite compacte si toute suite de points de A a au moins une valeur d'adhérence dans A i.e. si, de toute suite de points de A on peut extraire une suite qui converge dans A .

2. Théorème

| Toute partie compacte d'un espace vectoriel normé est fermée et bornée.

Démonstration

Soit A une partie compacte de l'espace vectoriel normé (E, N) .

• Si (x_n) est une suite de points de A convergeant vers $\ell \in E$, comme A est compacte, elle admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $b \in A$. En tant que suite extraite de (x_n) , elle converge vers ℓ . On déduit de l'unicité de la limite que $\ell = b \in A$. Donc A est une partie fermée de E .

• A est bornée si, et seulement si, $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, N(x) \leq M$.

Si A est non bornée, pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe x_n dans A tel que $N(x_n) > n$. Pour tout application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: $N(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $N(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

S'il existait φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $\ell \in E$, alors $(N(x_{\varphi(n)}))$ convergerait, par continuité de la norme, vers $N(\ell) \in \mathbb{R}_+$, d'où une contradiction. $\square$

Conséquence : $\mathbb{R}$ n'est compacte dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

3. Théorème

| Toute partie fermée contenue dans un compact d'un espace vectoriel normé est compacte.

Démonstration

Soit (x_n) une suite de la partie A fermée contenue dans le compact B . En tant que suite de B , elle admet une suite extraite qui converge vers $\ell \in B$. Comme A est fermée, $\ell \in A$ et donc A est une partie compacte de E . $\square$

4. Théorème

Si A est une partie compacte de l'espace vectoriel normé (E, N) . Si $(u_n)_n$ à valeurs dans A n'a qu'une valeur d'adhérence ℓ , elle converge vers ℓ .

Démonstration

Supposons que (u_n) ne converge pas vers ℓ .

$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$ et $N(u_k - \ell) \geq \varepsilon$. Fixons un tel ε .

On construit alors par récurrence $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(u_{\varphi(n)} - \ell) \geq \varepsilon$.

Il existe $k = \varphi(0) \geq n_0 = 0$ tel que $N(u_k - \ell) \geq \varepsilon$ et, si $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ sont définis, il existe $k = \varphi(n+1) \geq n_0 = \varphi(n) + 1$ tel que $N(u_k - \ell) \geq \varepsilon$.

$(u_{\varphi(n)})$ est une suite à valeurs dans A compact, donc il existe $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $c \in A$ tels que $u_{\varphi \circ \psi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$. Comme $(u_{\varphi \circ \psi(n)})$ est une suite extraite de (u_n) , on a $c = \ell$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(u_{\varphi \circ \psi(n)} - \ell) \geq \varepsilon$: absurde. Donc (u_n) converge vers ℓ . $\square$

5. Théorème

Si A est une partie compacte de l'espace vectoriel normé (E, N) et B est une partie compacte de l'espace vectoriel normé (F, N') , alors $A \times B$ est une partie compacte de l'espace vectoriel normé produit.

Démonstration

Soit (x_n, y_n) une suite de $A \times B$. Il existe $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) et convergeant vers $a \in A$. En tant que suite de points de la partie compacte B , $(y_{\varphi(n)})$ a une suite extraite $(y_{\varphi \circ \psi(n)})$ convergeant vers $b \in B$. La suite $(x_{\varphi \circ \psi(n)})$ étant extraite de la suite convergente $(x_{\varphi(n)})$, converge vers $a \in A$. Donc la suite $(x_{\varphi \circ \psi(n)}, y_{\varphi \circ \psi(n)})$ extraite de (x_n, y_n) converge vers $(a, b) \in A \times B$. $\square$

Remarque

On montre par récurrence qu'un produit fini de parties compactes est compact.

6. Théorème de Heine

Si (E, N) et (F, N') sont deux espaces vectoriels normés, A une partie compacte de E et $f \in \mathcal{C}(A, F)$, alors f est uniformément continue.

Démonstration

Si f n'est pas uniformément continue, on peut écrire :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists (x_n, y_n) \in A^2, N(x_n - y_n) \leq \frac{1}{n+1} \text{ et } N'(f(x_n) - f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

A étant compacte, A^2 l'est d'après le théorème précédent. Il existe $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n, y_n) qui converge vers $(a, b) \in A^2$. Comme N est continue et

$$N(x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}) \leq \frac{1}{\varphi(n)+1} \leq \frac{1}{n+1}, \text{ par passage à la limite, } N(a - b) = 0 \text{ i.e.}$$

$a = b$. f et N' étant continues, $N'(f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ce qui contredit

notre hypothèse : la suite $(N'(f(x_n) - f(y_n)))$ est minorée par $\varepsilon > 0$. $\square$

7. Théorème (image continue d'un compact)

Si (E, N) et (F, N') sont deux espaces vectoriels normés, A une partie compacte de E et $f \in \mathcal{C}(A, F)$, alors $f(A)$ est une partie compacte de F .

Démonstration

Soit (y_n) une suite de points de $f(A)$. Il existe une suite (x_n) de points de A telle que $y_n = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. A étant compact, il existe $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) convergeant vers $a \in A$. $y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$ car f est continue sur A . La suite $(y_{\varphi(n)})$ étant extraite de (y_n) et $f(a)$ étant élément de $f(A)$, la partie $f(A)$ est compacte dans F . $\square$

Remarque

L'image réciproque d'une partie compacte n'est en général pas compacte.

Il suffit pour s'en convaincre de considérer $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $x \mapsto \sin(x)$.

8. Théorème (cas des fonctions à valeurs réelles)

Soient (E, N) un espace vectoriel normé, A une partie compacte non vide de E et $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$. Alors f est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, $\sup_{x \in A} f(x)$ et $\inf_{x \in A} f(x)$ existent dans $\mathbb{R}$ et sont égaux respectivement à $\max_{x \in A} f(x)$ et $\min_{x \in A} f(x)$.

Démonstration

D'après le théorème précédent, $f(A)$ est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$. Donc $f(A)$ est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. D'où l'existence de $\sup_{x \in A} f(x)$ et

$\inf_{x \in A} f(x)$. De plus $f(A)$ étant une partie compacte, est fermée dans $\mathbb{R}$. On achève la démonstration à l'aide de la remarque qui suit. $\square$

Remarque

Si X est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée, $M = \sup_{\mathbb{R}} X$ est adhérent à X .

En effet, par définition de M , on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in X, M - \varepsilon < y \leq M < M + \varepsilon$.

Donc toute boule ouverte $B(M, \varepsilon)$ rencontre X . D'où, tout voisinage de M dans $\mathbb{R}$ rencontre X . Autrement dit M est adhérent à X .

9. Théorème

Les parties compactes de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, N_\infty)$, $(\mathbb{C}^n, N_\infty)$, $n \geq 1$ sont les parties fermées et bornées de ces espaces vectoriels normés.

Démonstration

Une partie compacte d'un espace vectoriel normé étant fermée et bornée, il suffit de prouver que si P est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$, elle est compacte. En effet, pour $\mathbb{R}^n$, le résultat découle du théorème VI.5. et, pour $\mathbb{C}^n$, du fait que $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ sont isométriques.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass vu en première année, P étant une partie bornée de $\mathbb{R}$, toute suite de points de P a au moins une valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$. P étant fermée, cette valeur d'adhérence est élément de P . $\square$

VII. Espace vectoriel normé de dimension finie

1. Lemme

| Sur $\mathbb{K}^p$, deux normes quelconques sont équivalentes.

Démonstration

- Comparons une norme quelconque N à N_1 sur $\mathbb{K}^p$.

Si $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq p}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$, tout vecteur x de $\mathbb{K}^p$ s'écrit de façon unique : $x = \sum_{i=1}^p x_i \varepsilon_i$, $x_i \in \mathbb{K}$. Donc $N(x) \leq \sum_{i=1}^p |x_i| N(\varepsilon_i) \leq \max_{1 \leq i \leq p} (N(\varepsilon_i)) \sum_{i=1}^p |x_i|$.

$\mathcal{B}$ étant une base de $\mathbb{K}^p$, les ε_i sont tous non nuls ainsi que les $N(\varepsilon_i)$. Posons $\alpha = \max_{1 \leq i \leq p} (N(\varepsilon_i))$, il vient alors $N \leq \alpha N_1$ avec $\alpha > 0$.

- L'application $N : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{K}^p, N_1)$ dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ car lipschitzienne. En effet :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq \alpha N_1(x - y).$$

La sphère unité S de $(\mathbb{K}^p, N_1)$ est fermée et bornée, donc compacte dans $\mathbb{K}^p$. En effet, les normes N_1 et N_∞ sont équivalentes sur $\mathbb{K}^p$. $N|_S$ atteint sa borne inférieure. Comme $0_E \notin S$ pour tout x de S , $0 < \beta \leq N(x)$.

Si $y \in \mathbb{K}^p \setminus \{0\}$, $x = \frac{y}{N_1(y)} \in S$. Donc : $\beta N_1(y) \leq N(y)$. Cette inégalité est vraie si $y = 0$. Donc : $\forall x \in \mathbb{K}^p, \beta N_1(x) \leq N(x) \leq \alpha N_1(x)$. $\square$

2. Théorème fondamental

| Sur un espace vectoriel de dimension finie les normes sont équivalentes.

Démonstration

Soit $\mathcal{B}' = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base d'un espace vectoriel de dimension finie E .

L'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}^p, x = \sum_{i=1}^p x_i e_i \rightarrow (x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^p x_i \varepsilon_i$ est un iso-

morphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. À une norme N sur E on associe N' sur $\mathbb{K}^p$, définie par : $\forall y \in \mathbb{K}^p, N'(y) = N[\varphi^{-1}(y)]$.

D'où φ est une isométrie de (E, N) sur $(\mathbb{K}^p, N')$ ie. $N(x - y) = N'(\varphi(x) - \varphi(y))$ pour $(x, y) \in E^2$; donc une bijection telle que φ et φ^{-1} soient continues. On conclut avec le lemme précédent. $\square$

Du fait que φ^{-1} est une isométrie, on déduit :

3. Corollaire

| Dans un espace vectoriel de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.

4. Corollaire

| Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé E est une partie fermée de E .

Démonstration

Soit A un sous-espace vectoriel de dimension finie p d'un espace vectoriel normé (E, N) . Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de A , et $y \in A$, de coordonnées $(y_1, \dots, y_p)$

dans la base $\mathcal{B}$ notons $N_\infty(y) = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$ une norme sur A . Comme toutes les normes y sont équivalentes, il existe c et $d \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $dN \leq N_\infty \leq cN$. Donc $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, |y_i| \leq N_\infty(y) \leq cN(y)$ $(\star)$.

Soit $(x_n)_n$ suite à valeurs dans A qui converge vers ℓ dans (E, N) . Alors la suite réelle $(N(x_n))$ est convergente, majorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons $(x_{n,1}, \dots, x_{n,p})$ les coordonnées de x_n dans la base $\mathcal{B}$. On déduit de $(\star)$ que $(x_{n,1})_n$ est une suite numérique bornée, on en extrait $(x_{j_1(n),1})_n$ convergente.

$(x_{j_1(n),2})_n$ est également bornée et on en extrait $(x_{j_1 \circ j_2(n),2})_n$ convergente, alors $(x_{j_1 \circ j_2(n),1})_n$ et $(x_{j_1 \circ j_2(n),2})_n$ convergent.

En itérant ce procédé on arrive à $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (x_{j_1 \circ \dots \circ j_p(n),k})_n$ convergente et donc $(x_{j_1 \circ \dots \circ j_p(n)})_n$ converge vers $\alpha \in A$ pour N_∞ *a fortiori* pour N . Du théorème sur les sous-suites des suites convergentes, on déduit que $\ell = \alpha \in A$. $\square$

5. Corollaire

Soient A une partie d'un espace vectoriel normé (E, N) , a un point adhérent à A , F un espace vectoriel de dimension finie et f un application de A dans F . Si $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ désigne une base de F , on note pour tout $x \in A$, $f(x) = \sum_{k=1}^q f_k(x) \varepsilon_k$. f admet une limite en a si, et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$, f_k admet une limite en a ; si tel est le cas on a $\lim_a f = \sum_{k=1}^q \left(\lim_a f_k \right) \varepsilon_k$.

Démonstration

On utilise l'isomorphisme entre F et $\mathbb{K}^p$. Le théorème découle de IV.A.4. $\square$

6. Théorème

Toute application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E dans un espace vectoriel normé (F, N') est continue.

Démonstration

Les normes sur E étant équivalentes, adoptons N_1 .

Si $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de E , tout vecteur x de E s'écrit de façon unique :

$$\sum_{i=1}^p x_i \varepsilon_i, x_i \in \mathbb{K}. \text{ Donc } N'(u(x)) \leq \sum_{i=1}^p |x_i| N'(u(\varepsilon_i)) \leq \max_{1 \leq i \leq p} (N'(u(\varepsilon_i))) \sum_{i=1}^p |x_i|.$$

Donc : $\forall x \in E, N'(u(x)) \leq k N_1(x)$ où $k = \max_{1 \leq i \leq p} (N'(u(\varepsilon_i))) \in \mathbb{R}_+$.

On déduit du théorème V.A.1. la continuité de l'application linéaire u . $\square$

7. Théorème

Soient $(E_1, \dots, E_n)$ des espaces vectoriels normés de dimension finie et (F, N') un espace vectoriel normé. Toute application n -linéaire u de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F est continue.

Démonstration

Nous ne traiterons que le cas où $n = 2$. Notons $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E_1 et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de E_2 . L'application u étant bilinéaire sur $E_1 \times E_2$, on a

$$u(x, y) = u\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^p \beta_j e'_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \alpha_i \beta_j u(e_i, e'_j). \text{ La continuité de } u \text{ découle}$$

de celle des fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}^2$. $\square$

VIII. Convexité

1. Barycentres

• Soient $a_1, \dots, a_n$, n points d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E et $(\alpha_i)_{i \in [1, n]} \in \mathbb{R}^n$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$. On appelle **barycentre** du système de vecteurs pondérés $(a_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ le vecteur $g = \frac{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}$.

2. Définition

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace-vectoriel.

- Si $(a, b) \in E^2$, le **segment** $[ab]$ est l'ensemble : $\{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}\}$.
- Une partie $\mathcal{C}$ de E est dite **convexe** si : $\forall (a, b) \in \mathcal{C}^2, [ab] \subset \mathcal{C}$.

3. Enveloppe convexe

3.1. Définition

On appelle *enveloppe convexe* d'une partie $H \neq \emptyset$ d'un espace vectoriel E , l'intersection des parties convexes de E contenant H . C'est aussi le plus petit (au sens de l'inclusion) convexe de E contenant H .

3.2. Théorème

L'enveloppe convexe (notée $\text{conv}(H)$) d'une partie H de E est l'ensemble

$$\left\{ x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \mid p \in \mathbb{N}^*, \forall i, \lambda_i \geq 0, x_i \in H, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \right\}.$$

Démonstration

Notons $\mathcal{C} = \left\{ x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \mid p \in \mathbb{N}^*, \forall i, \lambda_i \geq 0, x_i \in H, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \right\}$.

• Montrons que $\mathcal{C}$ est une partie convexe de E contenant H . Comme $\text{conv}(H)$ est le plus petit convexe de E contenant H , on aura $\text{conv}(H) \subset \mathcal{C}$.

Pour $x \in H$, comme $x = 1.x$, on peut conclure que $H \subset \mathcal{C}$.

Pour tout $(x, y) \in \mathcal{C}^2$, $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ où $\lambda_i \geq 0, x_i \in H, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$,

$y = \sum_{i=1}^p \mu_i x_i$ où $\mu_i \geq 0, x_i \in H, \sum_{i=1}^p \mu_i = 1$,

$\forall t \in [0, 1], (1-t)x + ty = \sum_{i=1}^p \nu_i x_i$ où $\nu_i = (1-t)\lambda_i + t\mu_i \geq 0$ et

$\sum_{i=1}^p \nu_i = (1-t) \sum_{i=1}^p \lambda_i + t \sum_{i=1}^p \mu_i = (1-t) + t = 1$. Donc $\mathcal{C}$ est convexe.

• Montrons que $\mathcal{C} \subset \text{conv}(H)$ en raisonnant par récurrence sur p .

Si $p = 1$ $x_1 \in H \subset \text{conv}(H)$.

Si $p = 2, (x_1, x_2) \in H^2, \lambda_1 \in \mathbb{R}_+, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)x_2 \in \text{conv}(H)$ car $\text{conv}(H)$ est convexe.

Supposons $p \geq 2, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p, \forall (x_1, \dots, x_p) \in H^p, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$,

alors $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \in \text{conv}(H)$.

Soient $(x_1, \dots, x_{p+1}) \in H^{p+1}$, $(\nu_1, \dots, \nu_{p+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{p+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{p+1} \nu_i = 1$.

Supposons $\alpha = \sum_{i=1}^p \nu_i \neq 0$ sinon le résultat est obtenu.

$$x = \sum_{i=1}^{p+1} \nu_i x_i = \alpha y + \nu_{p+1} x_{p+1} \text{ où } y = \sum_{i=1}^p \frac{\nu_i}{\alpha} x_i, \sum_{i=1}^p \frac{\nu_i}{\alpha} = 1 \text{ et } \frac{\nu_i}{\alpha} \geq 0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $y \in \text{conv}(H)$.

Comme $\alpha \geq 0$, $\nu_{p+1} \geq 0$ et $\alpha + \nu_{p+1} = 1$, on a $x \in \text{conv}(H)$.

En conclusion, $\mathcal{C} = \text{conv}(H)$. $\square$

IX. Connexité par arcs

1. Définition

Une partie A non vide d'un espace vectoriel normé (E, N) est dite connexe par arcs si, et seulement si, pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe $f \in \mathcal{C}([0, 1], E)$ telle que : $f(0) = a$, $f(1) = b$ et $f([0, 1]) \subset A$. f s'appelle un chemin de a à b .

Exemple

Toute partie convexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs. En particulier les boules ouvertes, les boules fermées, les sous-espaces vectoriels sont connexes par arcs. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes par arcs.

Démonstration

(i) Si A est convexe, on a : $\forall t \in [0, 1], \forall (a, b) \in A^2, (1-t)a + tb \in A$.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow E, t \mapsto (1-t)a + tb$. Alors $f(0) = a, f(1) = b, f([0, 1]) \subset A$ et f est continue d'après les opérations sur les fonctions continues. D'où A est connexe par arcs.

(ii) Une boule ouverte est convexe, d'après I.A.3. de ce chapitre.

Remarque

Il existe des parties de E connexes par arcs mais non convexes si E contient plus de deux vecteurs x et y linéairement indépendants, car alors on peut considérer la partie $A = \{\varphi(t) = tx + t^2y \mid t \in [0, 1]\}$ et vérifier qu'elle est connexe par arcs mais

non convexe. En effet $\frac{\varphi(0) + \varphi(1)}{2} = \frac{x + y}{2} \notin A$ implique la non convexité de A .

Pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2$, tel que $a = \varphi(t_1)$ et $b = \varphi(t_2)$. On peut construire $f \in \mathcal{C}([0, 1], E)$ en posant $f(\theta) = \varphi((1-\theta)t_1 + \theta t_2)$. f vérifie bien $f(0) = a, f(1) = b$ et $f([0, 1]) \subset A$.

Par contre, en dimension 1, les deux notions coïncident, car :

2. Théorème

Une partie non vide de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs si, et seulement si, elle est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Démonstration

- Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est convexe donc connexe par arcs.
- Soit A une partie de $\mathbb{R}$ connexe par arcs. Supposons que A ne soit pas un intervalle. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a < c < b$ avec $a \in A$, $c \notin A$ et $b \in A$. Par hypothèse, il existe $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = a$, $f(1) = b$ et $f([0, 1]) \subset A$. f étant continue, $F = f^{-1}(]-\infty, c])$ est une partie fermée de $[0, 1]$, donc de $\mathbb{R}$. La borne supérieure γ de F dans $\mathbb{R}$ existe et est élément de F . Donc $\gamma \in [0, 1]$ et $f(\gamma) \leq c$. Comme $c \notin A$, $f(\gamma) < c$. Puisque $b > c$, on a $1 > \gamma$. f étant continue en γ , il existe $\eta \in]0, 1 - \gamma[$, tel que, pour tout $\theta \in [0, 1]$, si $|\theta - \gamma| \leq \eta$ alors $|f(\theta) - f(\gamma)| \leq c - f(\gamma)$. Donc $\gamma + \eta \in [0, 1]$, $\gamma + \eta > \gamma$ et $f(\gamma + \eta) \leq c$. Ceci contredit : γ est la borne supérieure de F . Donc A est un intervalle de $\mathbb{R}$. $\square$

Remarque

Une intersection de parties connexes par arcs n'en est en général pas une, comme le prouve l'étude de l'intersection d'un cercle et d'une droite qui le coupe en deux points. Pour une réunion, voir l'exercice 20.

3. Théorème (image continue d'une partie connexe par arcs)

Si (E, N) et (F, N') sont deux espaces vectoriels normés, A une partie connexe par arcs de E , et f une application continue de A dans F , alors $f(A)$ est une partie connexe par arcs de F .

Démonstration

Soit $(a', b') \in (f(A))^2$, il existe $(a, b) \in A^2$ tel que $b' = f(b)$ et $a' = f(a)$. Comme A est connexe par arcs, il existe $g \in \mathcal{C}([0, 1], F)$ telle que $g(0) = a$, $g(1) = b$ et $g([0, 1]) \subset A$. L'application $f \circ g$ est un élément de $\mathcal{C}([0, 1], F)$ par composition, et vérifie $f \circ g(0) = a'$, $f \circ g(1) = b'$ et $f \circ g([0, 1]) \subset f(A)$. $\square$

4. Corollaire (théorème des valeurs intermédiaires)

Si (E, N) est un espace vectoriel normé, A une partie connexe par arcs de E , et $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$, alors $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

5. Corollaire (image d'un segment de $\mathbb{R}$ par une application continue)

Si I est un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, alors $f(I)$ est un segment de $\mathbb{R}$.

Démonstration

Du corollaire précédent on déduit que $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. I étant un compact de $\mathbb{R}$, et f continue, $f(I)$ est un compact de $\mathbb{R}$. Donc $f(I)$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$ ie. $f(I) = [m, M]$. $\square$

EXERCICES

1. On définit cinq applications de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{R}_+$ de la façon suivante :

$$\text{si } P = \sum_{k=0}^n a_k X^k, \quad N_0(P) = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|, \quad N_1(P) = \sum_{k=0}^n |a_k|, \quad N_2(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|,$$

$$N_3(P) = \sup \{|P(z)| \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}, \quad N_4(P) = \int_0^1 |P(t)| dt.$$

Montrer que ce sont des normes sur $\mathbb{C}[X]$ et que N_0, N_1, N_2, N_4 sont deux à deux non équivalentes, ainsi que N_0, N_2, N_3, N_4 .

2. Soit A une partie bornée de l'espace vectoriel normé (E, N) , $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel des applications lipschitziennes de A dans E . En tant que sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(A, E)$, $\mathcal{L}$ est muni de la norme induite par N_∞ . Soit $a \in A$.

a. Pour $f \in \mathcal{L}$, soit $K_f = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall (x, y) \in A^2, N(f(x) - f(y)) \leq kN(x - y)\}$. On note $c(f) = \inf(K_f)$. Montrer que $N : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_+, f \mapsto c(f) + N(f(a))$ est une norme sur $\mathcal{L}$.

b. Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et $A = [0, 1]$, montrer que N_∞ et N ne sont pas des normes équivalentes sur $\mathcal{L}$.

3. a. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$ et a la borne inférieure de $G \cap \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $a > 0$, $G = a\mathbb{Z}$ et que si $a = 0$, G est dense dans $\mathbb{R}$.

b. En utilisant par exemple le fait que la fonction $\cos$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et la question précédente, prouver que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Q}$, $\{\cos(n\alpha) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

4. Soient (E, N) un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé, $\lambda \in \mathbb{K}$, A et B deux parties non vides de E . On note $A+B = \{a+b \mid (a, b) \in A \times B\}$ et $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$. Montrer que :

- si A est fermé (*resp.* ouvert, compact), il en est de même de λA .
- si A et B sont 2 ouverts (*resp.* compact), il en est de même de $A+B$.
- si A est compact et B fermé, $A+B$ est fermé. Examiner $A+B$ si $E = \mathbb{R}$, $A = a\mathbb{Z}$, $B = b\mathbb{Z}$ et conclure. On pourra utiliser l'exercice 3.
- si A est un sous-espace vectoriel fermé et B un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , alors $A+B$ est fermé dans E .

5. Soient (E, N) et (F, N') deux espaces vectoriels normés. On a montré en V.2. que l'application de $\mathcal{L}_c(E, F)$ dans $\mathbb{R}_+ : u \mapsto \sup_{N(x) \leq 1} N'(u(x))$ est une norme sur

$\mathcal{L}_c(E, F)$ dite **norme subordonnée** à N et N' . On note $\|u\| = \sup_{N(x) \leq 1} N'(u(x))$.

Soient (E, N) et (F, N') deux espaces vectoriels normés, $(E \neq \{0_E\})$.

Montrer que $\|u\| = \sup_{N(x)=1} N'(u(x)) = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{N'(u(x))}{N(x)}$,

et que $\|u\| = \min\{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in E, N'(u(x)) \leq kN(x)\}$.

Montrer que, en particulier : $\forall x \in E, N'(u(x)) \leq \|u\|N(x)$.

6. Montrer que les normes N et P définies sur un espace vectoriel E sont équivalentes si, et seulement si, toute suite convergeant pour l'une converge aussi pour l'autre.

7. Soit $A = \{\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$ où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x .

Déterminer $\bar{A}, \overline{A}, \text{Fr}(A)$.

8. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathcal{N}$ est une partie fermée non vide de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Est-elle compacte ? Montrer que $\mathcal{N}$ est connexe par arcs.

9. Si A est une partie bornée d'un espace vectoriel normé (E, N) , montrer que : $\text{diam}(\bar{A}) = \text{diam}(A)$ où $\text{diam}(A) = \sup\{N(x - y) \mid (x, y) \in A^2\}$.

10. Soit A une partie compacte non vide de (E, N) espace vectoriel normé et f une application de A dans A .

a. Montrer que si, pour tout $(x, y) \in A^2$, $N[f(x) - f(y)] = N(x - y)$, alors f est bijective, continue et que f^{-1} est continue.

b. Montrer que si, pour tout $(x, y) \in A^2$, $N[f(x) - f(y)] \geq N(x - y)$, alors f est dans le cas du a.

On utilisera (x_n) et (y_n) telles que $x_0 = x$, $y_0 = y$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $y_{n+1} = f(y_n)$ et $\alpha_n = N(x_n - y_n)$.

c. Montrer que, si : $\forall (x, y) \in A^2$, $x \neq y \Rightarrow N[f(x) - f(y)] < N(x - y)$, alors f admet un unique point fixe x_0 et que, pour tout a dans A , la suite (a_n) définie par $a_0 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$ converge vers x_0 .

11. Soient (E, N) et (F, N') deux espaces vectoriels normés et f une application de E dans F .

a. Montrer que si f est linéaire et transforme une suite convergeant vers 0_E en une suite bornée, alors f est continue.

b. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si f est compatible avec l'addition ie. $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et bornée sur $B_f(0_E, 1)$, alors f est linéaire continue.

12. Si (E, N) est un espace vectoriel normé non réduit à 0_E , montrer que deux endomorphismes continus u et v ne peuvent vérifier $u \circ v - v \circ u = \alpha I_E$ où $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

On pourra utiliser les résultats de l'exercice 5.

13. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On note E' l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E et $\|\cdot\|$ la norme sur E' subordonnée à N et $|\cdot|$ (définie en V.2.).

a. Montrer que φ forme linéaire sur E est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

Indication : si $\text{Ker}(\varphi)$ est fermé, distinct de E , on utilisera la constante $d(a, \text{Ker}(\varphi))$ avec $a \in E \setminus \text{Ker}(\varphi)$ pour obtenir une majoration de $|\varphi|$ sur $B_f(0_E, 1)$.

b. Soit φ dans $E' \setminus \{0_{E'}\}$. Montrer que : $\forall x \in E \setminus \text{Ker}(\varphi), \|\varphi\| = \frac{|\varphi(x)|}{d(x, \text{Ker}(\varphi))}$.

14. Distance à une partie en dimension finie

(E, N) désigne un espace vectoriel normé de dimension finie.

a. Si A est une partie non vide de E et $x \in E$, montrer l'existence d'un élément a de $\overline{A}$ tel que $d(x, A) = N(x - a)$.

b. En déduire que l'application qui à A associe $d_A = d(\cdot, A)$ est injective sur l'ensemble des parties fermées non vides de E .

c. Si A et B sont des parties fermées non vides de E on note $d(A, B)$ la borne inférieure de l'ensemble $\{N(a - b) \mid (a, b) \in A \times B\}$.

Montrer que, si A est compacte cette borne inférieure est un minimum, en donner un contre-exemple dans le cas contraire.

15. Soient (E, N) espace vectoriel normé de dimension finie, u un élément de $\mathcal{L}(E)$ et φ un élément de $\text{GL}(E)$. Montrer que $\{c \in \mathbb{R}_+ \mid N \circ u \leq c(N \circ \varphi)\}$ admet un minimum et le déterminer. On pourra utiliser les résultats de l'exercice 5.

16. Soit (E, N) . Montrer que l'endomorphisme φ de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(\mathbb{N}, E), N_\infty)$ défini par $\varphi(x) = (x_{n+1} - x_n)$ si $x = (x_n)$ est continu et expliciter sa norme subordonnée.

17. Théorème de Riesz (MP[★])

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

a. Montrer que $B_f(0_E, 1)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie. *Indication : dans E non de dimension finie on fabriquera une suite (a_n) à valeurs*

dans $S(0_E, 1)$ telle que $d(a_n, \text{Vect}(a_k)_{k < n}) \geq \frac{1}{2}$.

b. En déduire que, si E n'est pas de dimension finie, tout compact de E est d'intérieur vide.

18. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes de degré n , scindés sur $\mathbb{R}$ à racines simples, est une partie ouverte.

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré n , normalisés et scindés (sur $\mathbb{R}$). On se propose de montrer que $\mathcal{E}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}_n[X]$ par deux méthodes différentes.

a. Soit P un élément de $\mathbb{C}_n[X]$ de degré n et normalisé. Montrer que, si z_1 est un zéro de module minimal de P , on a $|z_1| \leq |P(0)|^{1/n}$. En déduire le résultat.

b. Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ et si $P(z) = 0$, montrer : $|z| \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

En déduire le résultat.

20. (MP[★]) a. Soit $(\mathcal{P}_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé (E, N) . S'il existe une partie $\mathcal{P}_j$ qui rencontre toute partie de la

famille, montrer que $\bigcup_{i \in I} \mathcal{P}_i$ est connexe par arcs.

b. Si A_i est une partie connexe par arcs de l'espace vectoriel normé (E_i, N_i) pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, montrer que $A_1 \times \cdots \times A_p$ est une partie connexe par arcs de l'espace vectoriel normé produit $E_1 \times \cdots \times E_p$.

21. a. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de l'espace vectoriel normé $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

b. Si A et B sont deux éléments de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

22. Montrer que tout élément de l'espace vectoriel normé $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables à spectre de cardinal n . Montrer que ceci est faux dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

23. Deux applications de la connexité par arcs

a. Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est injective et continue sur I , elle est strictement monotone.

b. **Théorème de Darboux.** Montrer qu'une fonction f dérivable sur un intervalle I et à valeurs réelles, a la propriété des valeurs intermédiaires.

24. Théorème de Carathéodory et compacité.

Si H est une partie non vide d'un espace vectoriel E de dimension n , on souhaite montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n + 1$ éléments de H .

Soit $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ avec $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in H^p$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ et $p \geq n + 2$. On dira que x est combinaison convexe des x_i .

a. Montrer qu'il existe p réels non tous nuls $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^p \mu_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p \mu_i = 0.$$

On pourra considérer la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_p - x_1)$.

b. En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p - 1$ éléments de H et conclure que $\text{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n + 1$ éléments de H .

On pourra considérer une suite de coefficients de la forme $\lambda_i - \theta \mu_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ pour un réel θ bien choisi.

c. Si H est une partie compacte de B , montrer que $\text{conv}(H)$ est compacte.

On pourra introduire l'ensemble compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par :

$$\Lambda = \left\{ (t_1, \dots, t_{n+1}) \text{ avec } t_i \geq 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n+1\} \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \right\}.$$

SOLUTIONS DES EXERCICES

1. On rappelle qu'une norme sur E est une application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant (i), (ii) et (iii).

Le fait que N_0 et N_1 sont des normes sur E se montre sans difficulté.

Pour N_2, N_3 et N_4 , on prouve la propriété (i) en signalant qu'un polynôme est nul si, et seulement si, il possède une infinité de racines ; pour N_4 on utilise le théorème vu en première année : une fonction continue positive d'intégrale nulle sur $[0, 1]$ est nulle sur $[0, 1]$. Les propriétés (ii) et (iii) se démontrent par des arguments analogues à ceux utilisés pour N_∞ et N_1 sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

• $N_k(X^n) = 1$ si $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ et $N_4(X^n) = \frac{1}{n+1}$. La partie $\left\{ \frac{N_k(X^n)}{N_4(X^n)} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ n'est pas bornée si $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$. Donc N_4 n'est équivalente à aucune des normes $N_k, 0 \leq k \leq 3$.

• Pour $P_n = 1 + X + \dots + X^n$ on obtient $N_0(P_n) = 1, N_k(P_n) = n+1, 1 \leq k \leq 3$. $N_4(P_n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. Donc N_0 n'est équivalente à aucune des normes $N_k, 1 \leq k \leq 4$.

• Pour $Q_n = X^n - X^{n+1}$, $N_1(Q_n) = 2 = N_3(Q_n)$ et $N_2(Q_n) = \frac{1}{n+1} \exp \left[n \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Donc N_2 n'est équivalente ni à N_1 ni à N_3 (d'après les résultats précédents ni à N_0 ni à N_4 .)

Remarque : N_2 et N_3 ne sont pas équivalentes. Ce résultat est plus difficile à établir en ce début d'année.

2. a. Soit $f \in \mathcal{L}$. Montrons d'abord que $c(f) \in K_f$.

Si $x = y$, on a : $0 = N(f(x) - f(y)) \leq c(f)N(x - y)$.

Si $x \neq y, \forall k \in K_f, \frac{N(f(x) - f(y))}{N(x - y)} \leq k$. Le réel $\frac{N(f(x) - f(y))}{N(x - y)}$ minore K_f . Donc

$c(f)$ existe et est minoré par $\frac{N(f(x) - f(y))}{N(x - y)}$. D'où $c(f) \in K_f$. On peut conclure que K_f est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Plus précisément : $K_f = [c(f), +\infty[$.

Si $\mathcal{N}(f) = 0$, alors $c(f) = 0$ et $f(a) = 0_E$. D'où f est constante d'après la remarque précédente. Donc $f = 0$.

Soit $f \in \mathcal{L}$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \forall (x, y) \in A^2, N((\lambda.f)(x) - (\lambda.f)(y)) \leq |\lambda|c(f)N(x - y)$.

Donc : $c(\lambda.f) \leq |\lambda|c(f)$. De même, $c(f) \leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| c(\lambda.f)$. Donc : $c(\lambda.f) = |\lambda|c(f)$.

D'où $\mathcal{N}(\lambda.f) = |\lambda|\mathcal{N}(f)$.

Soit $(f, g) \in \mathcal{L}^2$. Pour tout $(x, y) \in A^2, N((f + g)(x) - (f + g)(y)) = z$.

$z \leq N(f(x) - f(y)) + N(g(x) - g(y)) \leq (c(f) + c(g))N(x - y)$.

D'où : $c(f + g) \leq c(f) + c(g)$ et $\mathcal{N}(f + g) \leq \mathcal{N}(f) + \mathcal{N}(g)$.

$\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathcal{L}$.

b. Si $E = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$ et $a = 0$, l'application $f_n : x \mapsto \sin(nx)$ est n -lipschitzienne car $|f'_n(x)| \leq n$ pour tout $x \in A$. Donc $c(f_n) \leq n$. On a aussi, pour tout $x \in]0, 1]$, $c(f_n) \geq \left| \frac{f_n(x)}{x} \right|$. Par passage à la limite dans l'inégalité précédente lorsque x tend vers 0, on a : $c(f_n) \geq n$. D'où $c(f_n) = n$ et $\mathcal{N}(f_n) = n$. Comme $N_\infty(f_n) = 1$, les deux normes N_∞ et $\mathcal{N}$ ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{L}$.

Notons cependant, que si $f \in \mathcal{L}$, pour tout $x \in]0, 1]$:

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq \frac{|f(x) - f(0)|}{x} + |f(0)| \leq c(f) + |f(0)|.$$

Donc : $\forall f \in \mathcal{L}, N_\infty(f) \leq \mathcal{N}(f)$.

3. a. Supposons $H \neq \{0\}$, H étant un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, il est non vide. Donc il existe $x \in H \setminus \{0\}$. Comme H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, $-x \in H$. Donc $H' = H \cap \mathbb{R}_+^*$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Il existe $a = \inf_{\mathbb{R}} H'$.

• Si $a > 0$ et $a \notin H'$, il existe par critère de borne inférieure, un élément h_1 de H' tel que $a \leq h_1 < a + a$. Donc, vu l'hypothèse, $a < h_1 < 2a$.

De même il existe $h_2 \in H'$ tel que $a \leq h_2 < h_1$. Donc $a < h_2 < h_1 < 2a$.

Donc $h_1 - h_2 \in H$ (cf. H sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$) et $0 < h_1 - h_2 < a = \inf_{\mathbb{R}} H'$.

Absurde. Donc si $a > 0$, $a \in H$, donc $a \in H'$: c'est le minimum de H' .

Dans ce cas, $a \in H$, donc H étant un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, $a\mathbb{Z} \subset H$.

Si $x \in H$, soit m la partie entière de $\frac{x}{a}$. Alors $ma \leq x < (m+1)a$ et $x - ma \in H$.

Donc : $0 \leq x - ma < a = \inf_{\mathbb{R}} H'$. Comme $x - ma \geq 0$ et n'appartient pas à H' , il est nul, donc $x = ma$. D'où $H = a\mathbb{Z}$ par double inclusion.

• Si $a = 0$ utilisons le critère de la borne inférieure dans $\mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y$ $\exists \eta \in H', a = 0 \leq \eta < y - x$. Comme $\eta \in H'$, il est strictement positif, et l'on peut noter p la partie entière de $\frac{x}{\eta}$. Alors $p\eta \leq x < (p+1)\eta \leq x + \eta < y$ et $(p+1)\eta \in H$, puisque H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. D'où H est dense dans $\mathbb{R}$.

b. $\Gamma = \{\cos(m\alpha) \mid m \in \mathbb{N}\} = \{\cos(m\alpha) \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{\cos(m\alpha + 2k\pi) \mid (m, k) \in \mathbb{Z}^2\}$. $H = \{m\alpha + 2k\pi \mid (m, k) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. S'il était de la forme $a\mathbb{Z}$, avec $a > 0$, on aurait : $\alpha = pa$ et $2\pi = qa$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

D'où : $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{2p}{q} \in \mathbb{Q}$, ce qui est exclu par hypothèse. Donc H est dense dans $\mathbb{R}$.

Tout x de $[-1, 1]$ peut s'écrire $x = \cos(\theta)$ où $\theta = \arccos(x) \in [0, \pi]$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $h \in H$ tel que $|h - \theta| \leq \varepsilon$ car $\overline{H} = \mathbb{R}$. On déduit le résultat du caractère 1-lipschitzien de la fonction $\cos$, puisque $|x - \cos(h)| \leq |\theta - h| \leq \varepsilon$.

4. a. Pour $\lambda \neq 0$, l'application $x \mapsto \lambda x$ est une bijection continue de réciproque continue de E sur E . Comme λA est l'image de A par cette application, les résultats sont immédiats.

b. La translation $t_a : x \mapsto x + a$ est aussi une bijection continue de réciproque continue de E sur E . pour tout $a \in A$, $t_a(B) = a + B$ est comme B une partie ouverte ou compacte de E .

- Si B est ouverte, $A + B = \bigcup_{a \in A} t_a(B)$ est une partie ouverte de E . L'hypothèse

« A ouvert » est inutile.

- Si A et B sont compacts, il en est de même de $A \times B$ d'après un théorème du cours. La continuité de $u : (x, y) \mapsto x + y$ assure la compacité de $u(A \times B) = A + B$.

c. Soit $c \in \overline{A + B}$. Alors $c = \lim(a_n + b_n)$ où $a_n \in A$ et $b_n \in B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il existe une suite extraite $(a_{\varphi(n)})$ qui converge vers $a \in A$. D'après les propriétés des suites extraites, $(a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)})$ converge vers c . Compte tenu de la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des suites convergentes, la suite $(b_{\varphi(n)})$ converge vers $b = c - a \in B$ car B est fermé. D'où $c = a + b \in A + B$ i.e. $A + B$ est fermé.

Mais A et B peuvent être tous deux fermés sans que $A + B$ le soit. En effet, $\sqrt{3}\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ sont deux fermés de $\mathbb{R}$ (leurs complémentaires sont réunions d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$). Comme $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $A + B$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc non fermé, puisque $\mathbb{R} \neq A + B$. En effet, $\sqrt{2} \notin A + B$.

- d. Il suffit de faire le raisonnement dans le cas où B est de dimension 1 et de faire une récurrence.

Soit $c \in \overline{A + B}$. Alors $c = \lim(a_n + b_n)$ où $a_n \in A$ et $b_n \in B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons $\{x\}$ une base de B et supposons que $x \notin A$. On a : $b_n = \beta_n x$, $\beta_n \in \mathbb{K}$.

Notons que $\delta = d(x, A) > 0$ car $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A} = A$ puisque A est fermé.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n \neq 0 \Rightarrow \delta \leq N\left(x + \frac{a_n}{\beta_n}\right)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\beta_n| \leq \frac{1}{\alpha} N(a_n + b_n)$.

Comme $(a_n + b_n)$ converge, elle est bornée, et donc (β_n) aussi. Il existe une suite extraite $(\beta_{\varphi(n)})$ qui converge vers β dans $\mathbb{K}$. D'où $(b_{\varphi(n)})$ converge vers $\beta x \in B$. On termine la démonstration comme à la question c.

-
5. • Si $N(x) = 1$, alors $N(x) \leq 1$, donc $N'(u(x)) \leq \|u\|$.

D'où $s = \sup_{N(x)=1} N'(u(x)) \leq \|u\|$.

- Si $N(x) \leq 1$, soit $x = 0_E$ alors $u(x) = 0_F$ et $N'(u(x)) \leq s$; soit $x \neq 0_E$, alors $y = \frac{x}{N(x)}$ est unitaire et l'on a : $N'(u(x)) = N'(u(N(x)y)) = N(x)N'(u(y)) \leq 1.s$.

D'où $\|u\| \leq s$ et finalement $\|u\| = s$.

- $\|u\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{N'(u(x))}{N(x)}$ découle de l'égalité suivante :

$$\{N'(u(x)) \mid N(x) = 1\} = \left\{ \frac{N'(u(x))}{N(x)} \mid x \in E \setminus \{0_E\} \right\}.$$

- Soit $\mathcal{K} = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in E, N'(u(x)) \leq kN(x)\}$. $\|u\| \in \mathcal{K}$ d'après l'étape précédente. Si $k \in \mathcal{K}$, alors tout vecteur unitaire x de E vérifie $N'(u(x)) \leq k.1$. Donc k majore $\{N'(u(x)) \mid N(x) = 1\}$ i.e. $\|u\| \leq k$. D'où la conclusion.

-
6. Si N et P sont équivalentes et si (x_n) converge vers ℓ pour N alors $(x_n - \ell)$ converge vers 0_E pour N . On a montré dans le cours que $(x_n - \ell)$ converge vers 0_E pour P i.e. que (x_n) converge vers ℓ pour P .

Réciproquement, si (x_n) converge vers 0_E pour N , l'hypothèse dit que (x_n) converge pour P ; notons ℓ sa limite. On définit (y_n) par $y_{2n} = x_n$ et $y_{2n+1} = 0_E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La considération des deux suites extraites (y_{2n}) et (y_{2n+1}) montre que (y_n) converge vers 0_E pour N . Alors l'hypothèse permet d'affirmer que (y_n)

converge pour P et, comme ℓ et 0_E sont valeurs d'adhérence pour P , on en déduit que $\ell = 0_E$, ce qui prouve que N et P sont équivalentes.

7. • Montrons que $\overline{\dot{A}} = \emptyset$ en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe $a \in \dot{A}$. Alors il existe $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[\setminus \{0\} \subset A$.

Soit $r' = \min(a, r) > 0$. Alors $]a - r', a + r'[\subset A$, ce qui est absurde, car le seul rationnel élément de A est 0 (si n n'est pas carré parfait, dans $\mathbb{N}$, alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$).

Donc $\dot{A} = \emptyset$.

• $A \subset [0, 1]$. Donc $\overline{A} \subset [0, 1]$. Montrons que $\overline{A} = [0, 1]$.

Considérons $p \in \mathbb{N}^*$; il y a $2p$ entiers consécutifs strictement compris entre p^2 et $(p+1)^2$ soit $n_1 < n_2 < \dots < n_{2p}$.

Pour $k \in [1, 2p]$, $\sqrt{n_k} - [n_k] = \sqrt{n_k} - p = a_k \in A$. En posant : $a_0 = 0, a_{2p+1} = 1$,

on a : $a_{k+1} - a_k = \frac{1}{\sqrt{n_{k+1}} + \sqrt{n_k}} \leq \frac{1}{2p}$.

Soit $x \in [0, 1]$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2p} < \varepsilon$. Alors, il existe $k \in [0, 2p]$

tel que $a_k \leq x \leq a_{k+1} : |x - a_k| < \varepsilon$. Donc $\overline{A}$ contient $[0, 1]$.

En conclusion : $\overline{A} = [0, 1]$ et $\text{Fr}(A) = [0, 1]$.

8. D'après le chapitre 2, on peut écrire que $\mathcal{N} = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \mid M^n = 0_n\}$.

La matrice nulle étant élément de $\mathcal{N}$, cet ensemble est non vide.

L'application $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) : M \mapsto M^n$ étant continue car ses applications coordonnées sont polynomiales, en tant qu'image réciproque du fermé $\{0_n\}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ par une application continue, $\mathcal{N}$ est un fermé de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda M \in \mathcal{N}$ si $M \in \mathcal{N}$. Donc $\mathcal{N}$ n'est pas bornée et donc pas compacte dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

$\forall t \in [0, 1], t0_n + (1-t)M \in \mathcal{N}$ si $M \in \mathcal{N}$. Donc, si $M \in \mathcal{N}$, le segment $[0_n, M]$ est contenu dans $\mathcal{N}$. Donc, si $(M, N) \in \mathcal{N}^2$, avec les deux segments $[N, 0_n]$ et $[0_n, M]$, on a un chemin continu entre M et N contenu dans $\mathcal{N}$. Il s'ensuit que $\mathcal{N}$ est connexe par arcs.

9. Notons $\delta = \text{diam}(A)$. Comme $A \subset \overline{A}$, on a : $\delta \leq \text{diam}(\overline{A})$.

Soit $(x, y) \in \overline{A}$. Il existe deux suites (x_n) et (y_n) de vecteurs de A convergeant vers x et y respectivement. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, N(x_n - y_n) \leq \delta$.

Par passage à la limite, compte tenu de la continuité de la norme, on a : $N(x - y) \leq \delta$. D'où : $\text{diam}(\overline{A}) \leq \delta$. D'où la conclusion.

10. a. f est continue car 1-lipschitzienne et évidemment injective.

Reste à montrer $f(A) = A$.

Soit $x \in A$, on définit (u_n) par $u_0 = x$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

De (u_n) on peut extraire $(u_{\varphi(n)})$ convergente puisque A est compact.

Soit ε dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow N(u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}) \leq \varepsilon$.

Prenons $n \geq n_0$ et posons $p = \varphi(n+1) - \varphi(n) \in \mathbb{N}^*$, on a :

$N(u_{\varphi(n)+p} - u_{\varphi(n)}) = N(u_{\varphi(n)+p-1} - u_{\varphi(n)-1}) = \dots = N(u_p - u_0)$ car φ est une isométrie, et donc $N(x - u_p) \leq \varepsilon$ avec $u_p \in f(A)$. x est adhérent à $f(A)$ compact comme image continue d'un compact, donc x appartient à $f(A)$ et $f(A) = A$.

f est une bijection continue de réciproque continue de A sur lui-même.

b. Soit x, y éléments de A et les suites de A définies par :

$$x_0 = x, y_0 = y, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n) \text{ et } y_{n+1} = f(y_n).$$

$((x_n), (y_n))$ est une suite de $A \times A$ compact de $E \times E$ muni de la norme $\mathcal{N} : (a, b) \mapsto \max[N(a), N(b)]$ donc il existe $(a, b) \in A \times A$ et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tels que $((x_{\varphi(n)}, (y_{\varphi(n)}))$ converge vers (a, b) .

Pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$, comme dans a. il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\mathcal{N}[(a, b) - (x_p, y_p)] \leq \varepsilon \text{ i.e. } N(a - x_p) \leq \varepsilon \text{ et } N(b - y_p) \leq \varepsilon, \text{ d'où } N(x_p - y_p) \leq 2\varepsilon.$$

Si $\alpha_n = N(x_n - y_n)$, (α_n) croît. On obtient : $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_p \leq \alpha_0 + 2\varepsilon$ d'où $\alpha_0 = \alpha_1$ car ε est arbitraire dans $\mathbb{R}_+^*$.

$$N[f(x) - f(y)] = N(x - y) \text{ et on est ramené au a.}$$

c. On considère $g : A \rightarrow A$, $x \mapsto N[f(x) - x]$, alors g est continue sur A compact non vide à valeurs réelles donc admet un minimum $\mu = g(x_0)$ avec $x_0 \in A$.

Si $\mu \neq 0$ alors $f(x_0) \neq x_0$ et donc $N(f[f(x_0)] - f(x_0)) < N[f(x_0) - x_0]$, ce qui contredit le caractère minimal de μ . Donc $\mu = 0$ et $f(x_0) = x_0$.

Si c est un point fixe de f distinct de x_0 , $N(c - x_0) = N[f(c) - f(x_0)] < N(c - x_0)$, ce qui est absurde. Donc f admet un et un seul point fixe.

$(N(x_0 - a_n))$ est une suite décroissante dans $\mathbb{R}_+$ donc a une limite ℓ dans $\mathbb{R}_+$.

Supposons $\ell > 0$ et extrayons de (a_n) une suite $(a_{\varphi(n)})$ convergeant vers $x \in A$, nécessairement $x \neq x_0$ car $\ell > 0$. On a $N[f(x) - x_0] < N(x - x_0) = \ell$ alors que $(N(a_{\varphi(n)+1} - x_0))$ converge, par continuité de f en x , vers $N[f(x) - x_0]$ qui est dans $[\ell, +\infty[$, c'est absurde.

Donc $\ell = 0$ et (a_n) converge vers x_0 .

11. a. Soit (x_n) une suite de E convergeant vers 0_E .

$$\text{On définit } (u_n) \text{ par } u_n = \begin{cases} \frac{x_n}{\sqrt{N(x_n)}} & \text{si } x_n \neq 0_E \\ 0_E & \text{si } x_n = 0_E \end{cases}, N(u_n) = \sqrt{N(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ et}$$

donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0_E$; par hypothèse $(f(u_n))$ est bornée.

$$\text{Comme } f \text{ est linéaire et que } x_n = \sqrt{N(x_n)} u_n, f(x_n) = \sqrt{N(x_n)} f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0_F.$$

f est donc continue en 0, étant linéaire elle est continue car $f(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$.

b. f étant un morphisme entre les groupes $(E, +)$ et $(F, +)$, si $x \in E$ et $m \in \mathbb{Q}$, $f(mx) = mf(x)$ comme on l'a vu en cours.

Toujours d'après cette application, il suffit de montrer que f est continue en 0_E pour pouvoir conclure.

$$\text{Soit } M = \sup_{B_f(0_E, 1)} N(f). \text{ Pour } \varepsilon \text{ fixé dans } \mathbb{R}_+^*, \text{ soit } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{M}{n_0} < \varepsilon.$$

Si $N(x) < \frac{1}{n_0}$, alors $N(n_0 x) < 1$ donc $N'[f(n_0 x)] \leq M$ et $n_0 N'[f(x)] < M$ puis $N'[f(x)] < \varepsilon$, ce qui prouve la continuité de f en 0_E .

12. Supposons l'existence d'un couple solution (u, v) .

$$\text{Montrons par récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*, R_n \quad u^n \circ v - v \circ u^n = n\alpha u^{n-1}.$$

Pour $n = 1$, c'est l'hypothèse et, si on a montré la formule au rang n , alors

$$u^{n+1} \circ v = u \circ (u^n \circ v) = u \circ (n\alpha u^{n-1} + v \circ u^n)$$

$$= n\alpha u^n + (v \circ u + \alpha I_E) \circ u^n = (n+1)\alpha u^n + v \circ u^{n+1},$$

d'où la formule au rang $n + 1$. On note $\|\cdot\|$ la norme subordonnée à N .

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n|\alpha| \|u^{n-1}\| \leq \|u^{n-1} \circ (u \circ v)\| + \|(v \circ u) \circ u^{n-1}\| \leq \|u^{n-1}\| (\|u \circ v\| + \|v \circ u\|)$
d'où $n|\alpha| \|u^{n-1}\| \leq 2\|u\| \|v\| \|u^{n-1}\|$.

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u^{n-1}\| \neq 0$ et alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n|\alpha| \leq 2\|u\| \|v\|$: absurde car $\mathbb{N}$ n'est pas bornée.

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|u^{n_0-1}\| = 0$. Une récurrence descendante donne (par R_n) pour tout $k \in \llbracket 0, n_0 - 1 \rrbracket$, $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et donc I_E est nulle : absurde.

Remarque : en dimension finie, l'utilisation de la trace donne immédiatement le résultat.

13. a. Si φ est continue alors $\text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Considérons maintenant une forme linéaire φ de noyau H fermé.

Ou φ est nulle, donc continue, ou φ n'est pas nulle.

$E \setminus H$ n'est pas vide ; soit a un point de $E \setminus H$. Comme H est fermé $\delta = d(a, H) > 0$.

Soit $v \in B_f(0_E, 1)$. Si $v \in H$, $\varphi(v) = 0$, sinon $a - \frac{\varphi(a)}{\varphi(v)} v \in H$ donc, comme

$$\delta = d(a, H) \leq N\left(\frac{\varphi(a)}{\varphi(v)} v\right), |\varphi(v)| \leq \frac{|\varphi(a)|}{\delta} N(v) \leq \frac{|\varphi(a)|}{\delta} \text{ d'où :}$$

$$|\varphi(v)| \leq \frac{|\varphi(a)|}{\delta} N(v) \leq \frac{|\varphi(a)|}{\delta}.$$

φ est linéaire et bornée sur $B_f(0_E, 1)$ donc continue.

b. Soit x dans $E \setminus \text{Ker}(\varphi)$.

Le calcul fait en a. prouve que, si $v \in B_f(0_E, 1)$, $|\varphi(v)| \leq \frac{|\varphi(x)|}{\delta}$ où l'on a posé

$$\delta = d(x, \text{Ker}(\varphi)) > 0. \text{ Donc } \|\varphi\| = \sup \{|\varphi(v)| \mid v \in B_f(0_E, 1)\} \leq \frac{|\varphi(x)|}{\delta}.$$

D'autre part $\delta = \inf \{N(x - y) \mid y \in \text{Ker}(\varphi)\}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe y dans $\text{Ker}(\varphi)$ tel que $0 < \delta \leq N(x - y) \leq \delta + \varepsilon$, alors

$$\left| \varphi\left(\frac{x - y}{N(x - y)} g\right) \right| \leq \|\varphi\| \text{ soit } \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{N(x - y)} \leq \|\varphi\| \text{ d'où } \frac{1}{\delta + \varepsilon} |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|.$$

Donc pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\delta \|\varphi\| \leq |\varphi(x)| \leq (\delta + \varepsilon) \|\varphi\|$, ce qui donne $\delta \|\varphi\| = |\varphi(x)|$

$$\text{et donc } |\varphi(x)| = \frac{\|\varphi\|}{d(x, \text{Ker}(\varphi))}.$$

14. a. $\delta = d(x, A)$ est adhérent à $\{N(x - a) \mid a \in A\}$, soit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que la suite de terme général $N(x - a_n)$ converge vers δ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(a_n) \leq N(x - a_n) + N(x)$ et donc (a_n) est bornée. On en extrait une suite convergente $(a_{\varphi(n)})$ dont la limite, notée ℓ est élément de $\bar{A}$. Alors la suite de terme général $N(x - a_{\varphi(n)})$ converge vers δ et aussi vers $N(x - \ell)$ par continuité de $a \mapsto N(x - a)$, donc $d(x, A) = \delta = N(x - \ell)$.

b. Si A et B sont des parties fermées non vides de E telles que $d_A = d_B$ alors, pour tout $b \in B$, on a $0 = d_B(b) = d_A(b) = 0$ et la question a. prouve que $b \in \bar{A}$, d'où $B \subset \bar{A} = A$. Par raison de symétrie $A \subset B$ et donc $A = B$.

c. Soient $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in B^{\mathbb{N}}$ telles que la suite de terme général $N(a_n - b_n)$ converge vers $d(A, B)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(b_n) \leq N(a_n - b_n) + N(a_n)$ et donc (b_n) est bornée car (a_n) est à valeurs dans A compacte.

La suite $((a_n), (b_n))$ est bornée dans l'espace vectoriel normé produit E^2 de dimension finie, on peut donc en extraire une suite convergente $((a_{\varphi(n)}), (b_{\varphi(n)}))$ dont la limite, notée (a, b) , est élément de la partie fermée $A \times B$ de E^2 . Par continuité de $(a, b) \mapsto N(a - b)$ on en déduit que $(N(a_n - b_n))$ converge à la fois vers $d(A, B)$ et vers $N(a - b)$, d'où le résultat.

On va fournir un contre-exemple dans $E = \mathbb{R}^2$. On note A le sous-espace vectoriel (donc fermé) d'équation $y = 0$ et B l'hyperbole d'équation $xy = 1$. Comme $f : (x, y) \mapsto xy$ est continue et comme $B = f^{-1}(\{1\})$, la partie B est fermée.

De plus $A \cap B = \emptyset$ et $d(A, B) = 0$ car $N\left((n, 0) - \left(n, \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

15. Comme φ est un automorphisme : $N \circ u \leq c(N \circ \varphi) \iff N \circ u \circ \varphi^{-1} \leq cN$. Cela prouve que le minimum existe et vaut $\|u \circ \varphi^{-1}\|$.

16. Si $x = (x_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(x_{n+1} - x_n) \leq 2N_\infty(x)$ par inégalité triangulaire, donc φ est continu avec $\|\varphi\| \leq 2$.

Soit e un vecteur unitaire de E et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (-1)^n e$. Alors $N_\infty(x) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(x_{n+1} - x_n) = 2$, donc $\|\varphi\| = 2$.

17. a. Le cas de la dimension finie a été traité en cours.

Supposons que E n'est pas de dimension finie et notons $S = \{x \in E \mid N(x) = 1\}$. On choisit $a_0 \in S$, on remarque que $\mathbb{K}a_0 \neq E$ et que $\mathbb{K}a_0$, de dimension finie, donc fermé dans E .

Soit $x_0 \in E \setminus \mathbb{K}a_0$ et $\delta_0 = d(x_0, \mathbb{K}a_0) > 0$ car $\mathbb{K}a_0$ est fermé.

Il existe y_0 dans $\mathbb{K}a_0$ tel que $\delta_0 \leq N(y_0 - x_0) \leq 2\delta_0$, soit $a_1 = \frac{x_0 - y_0}{N(x_0 - y_0)} \in S$.

$\forall y \in \mathbb{K}a_0$, $N(y - a_1) = \frac{1}{N(x_0 - y_0)} N[N(y_0 - x_0)y + y_0 - x_0] \leq \frac{\delta_0}{N(y_0 - x_0)}$

car $N(y_0 - x_0)y + y_0 \in \mathbb{K}a_0$, d'où $N(a_1 - y) \geq \frac{1}{2} \frac{N(x_0 - y_0)}{N(x_0 - y_0)} \geq \frac{1}{2}$ et donc

$d(a_1, \mathbb{K}a_0) \geq \frac{1}{2}$.

Supposons choisis $a_0, \dots, a_n$ dans S tels que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si on pose $F_k = \text{Vect}(a_0, \dots, a_{k-1})$, alors $d(a_k, F_k) \geq \frac{1}{2}$.

$F_{n+1} = \text{Vect}(a_0, \dots, a_n)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, donc fermé dans E . D'autre part $F_{n+1} \neq E$. Soit $x_n \in E \setminus F_{n+1}$ et $\delta_n = d(x_n, F_{n+1}) > 0$.

Il existe y_n dans F_n tel que $\delta_n \leq N(y_n - x_n) \leq 2\delta_n$, on pose $a_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{N(x_n - y_n)}$.

$\forall y \in F_{n+1}$, $N(y - a_{n+1}) = \frac{1}{N(x_n - y_n)} N[N(y_n - x_n)y + y_n - x_n] \leq \frac{\delta_n}{N(y_n - x_n)}$

car $N(y_n - x_n)y + y_n \in F_{n+1}$ et, comme $\frac{\delta_n}{N(y_n - x_n)} \geq \frac{1}{2}$, $d(a_{n+1}, F_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$.

On a ainsi prouvé par récurrence l'existence d'une suite (a_n) à valeurs dans S telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d(a_n, \text{Vect}(a_0, \dots, a_{n-1})) \geq \frac{1}{2}$.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, si $(p, k) \in \mathbb{N}^2$ et $n = \varphi(p + k)$, alors $a_{\varphi(k)} \in \text{Vect}(a_0, \dots, a_{n-1})$ et donc $N(a_{\varphi(k)} - a_{\varphi(k+p)}) \geq \frac{1}{2}$. La suite $(a_{\varphi(k)})$ diverge

donc. La suite (a_n) n'a aucune valeur d'adhérence et est à valeurs dans $B_f(0_E, 1)$, cette boule n'est donc pas compacte.

b. Si un compact K de E n'était pas d'intérieur vide, il existerait $a \in K$, $r \in \mathbb{R}_+^\star$ tels que $B_f(a, r) \subset K$, donc $B_f(a, r)$, fermée dans K compact, serait compacte ; or $B_f(0_E, 1)$ est l'image de $B_f(a, r)$ par la composée f d'une homothétie et d'une translation ; f étant continue, $B_f(0_E, 1)$ serait compacte : absurde.

Remarque : E contient aussi des fermés bornés d'intérieur vide non compacts, par exemple S .

18. Notons Ω l'ensemble en question et choisissons P_0 dans Ω . Notons $(x_1, \dots, x_n)$ la suite ordonnée croissante de ses zéros et choisissons $y_1, \dots, y_{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ tels que $y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \dots < y_n < x_n < y_{n+1}$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $\varphi_k : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto P(y_k)P_0(y_k)$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$, donc continue.

Par suite $V = \bigcap_{k=1}^{n+1} \varphi_k^{-1}(\mathbb{R}_+^\star)$ est un voisinage ouvert de P_0 car, pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on a $\varphi_k(P_0) = P_0^2(y_k) > 0$.

Si $P \in V$, alors P a le même signe (au sens strict) que P_0 en chacun des y_k et donc a un zéro dans chaque $]y_k, y_{k+1}[$ pour $1 \leq k \leq n$, soit au moins n zéros réels. La condition $\varphi_1(P) > 0$ impose $P(y_1) \neq 0$, P n'est pas nul et donc $P \in \Omega$.

Ω est voisinage de chacun de ses points, c'est une partie ouverte de $\mathbb{R}_n[X]$.

19. a. Écrivons $P = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$ où $|z_1| \leq \dots \leq |z_n|$, alors $|P(0)| = \prod_{k=1}^n |z_k| \geq |z_1|^n$ et donc $|z_1| \leq |P(0)|^{1/n}$.

Si (P_p) est à valeurs dans $\mathcal{E}$ et converge vers P , alors la considération de la norme $N : \sum_{k=0}^n a_k X^k \mapsto \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$ montre que P est de degré n et normalisé car la suite des coefficients dominants des P_k est constante égale à 1.

Supposons que z soit zéro de P dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, posons $Q(X) = P(X + z)$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Q_p(X) = P_p(X + z)$. Alors (Q_p) est une suite de polynômes normalisés et de degré n qui converge vers Q et donc $|Q_p(0)|^{1/n} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} |Q(0)|^{1/n} = 0$.

Soit $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|Q_{p_0}(0)|^{1/n} < |z|$, Q_{p_0} admet un zéro dans $B(0, |z|)$ et donc P_{p_0} en admet un dans $B(z, |z|) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: absurde.

P est donc scindé sur $\mathbb{R}$, normalisé et de degré n , $\mathcal{E}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Si $|z| \leq 1$, l'inégalité est claire. Sinon,

$$z^n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \text{ d'où } |z| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^{k-n-1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \text{ et l'inégalité est prouvée.}$$

On considère une suite (P_p) d'éléments de $\mathcal{E}$ qui converge vers P .

On écrit, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P_p = \prod_{k=1}^n (X - z_{k,p})$. L'inégalité que l'on vient de montrer prouve que $(Z_p) = ((z_{1,p}, \dots, z_{n,p}))_p$ est une suite bornée de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$, donc admet une valeur d'adhérence $Z = (z_1, \dots, z_n)$.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(Z_{\varphi(p)})$ converge vers Z , les relations entre coefficients et racines montrent que $(P_{\varphi(p)})$ converge vers

$$\prod_{k=1}^n (X - z_k) \text{ et, par extraction, } P = \prod_{k=1}^n (X - z_k) \text{ est scindé sur } \mathbb{R}.$$

20. a. $\forall (x, y) \in \mathcal{P}^2, \exists (p, q) \in I^2, x \in \mathcal{P}_p \text{ et } y \in \mathcal{P}_q.$

Comme $\mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}_p$ et $\mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}_q$ sont non vides, soit $(a, b) \in (\mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}_p) \times (\mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}_q)$. Il existe donc trois chemins continus reliant x et a , a et b , b et y .

$$f_1 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}_p, f_1(0) = x \text{ et } f_1(1) = a,$$

$$f_2 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}_j, f_2(0) = a \text{ et } f_2(1) = b,$$

$$f_3 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}_q, f_3(0) = b \text{ et } f_3(1) = y.$$

D'où un chemin continu reliant x et y . $F : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}_p \cup \mathcal{P}_j \cup \mathcal{P}_q$ défini par :

$$F(t) = f_1(3t) \text{ si } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right], F(t) = f_2(3t - 1) \text{ si } t \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right],$$

$$F(t) = f_3(3t - 2) \text{ si } t \in \left]\frac{2}{3}, 1\right].$$

b. Soient $a = (a_1, \dots, a_p)$ et $b = (b_1, \dots, b_p)$ dans $A_1 \times \dots \times A_p$. Comme A_i est connexe par arcs, il existe $f_i \in \mathcal{C}([0, 1], E_i)$ telle que $f_i(0) = a_i, f_i(1) = b_i$ et $f_i([0, 1]) \subset A_i$. L'application $f : [0, 1] \rightarrow E_1 \times \dots \times E_p, t \mapsto (f_1(t), \dots, f_p(t))$ est continue puisque ses composantes le sont, et vérifie $f(0) = a, f(1) = b$ et $f([0, 1]) \subset A_1 \times \dots \times A_p$.

21. a. Si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Sp}(M)$ est fini. Donc les matrices $M_k = M - \frac{1}{k} I_n$ sont inversibles pour k assez grand. De $M_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} M$ on déduit la densité de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. « $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de l'espace vectoriel normé $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ » est un résultat déjà prouvé dans le cours.

b. • Si A est inversible, $AB = A(BA)A^{-1}$. Les matrices AB et BA étant semblables, elles ont même polynôme caractéristique.

• L'application $\varphi : M \mapsto \chi_{BM}(X) - \chi_{MB}(X)$ est polynomiale en les coefficients de M , donc continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Comme φ est nulle sur $\text{GL}_n(\mathbb{K})$, elle l'est sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ d'après le cours.

Il est à noter que c'est la troisième preuve de $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ donnée dans ce livre.

22. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, par le corollaire de IV.B. du chapitre 1, on écrit $M = PTP^{-1}$

$$\text{où } P \text{ inversible et } T \text{ triangulaire supérieure, } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Si $p \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_p = T + \text{Diag} \left(\frac{i}{p} \right)_{1 \leq i \leq n}$. Pour $1 \leq i < j \leq n$, l'égalité

$$\lambda_i + \frac{i}{p} = \lambda_j + \frac{j}{p} \text{ n'a lieu que si, et seulement si, } p = \frac{i-j}{\lambda_j - \lambda_i}, \text{ ce qui ne se}$$

produit que pour au plus un p dans $\mathbb{N}^*$. Donc $\left\{ p \in \mathbb{N}^* \mid \text{Card}[\text{Sp}(T_p)] < n \right\}$ est un ensemble fini et, à partir d'un certain rang $p_0 \geq 1$, T_p est diagonalisable à spectre de cardinal n . $T_p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} T$ est immédiat.

Comme $X \mapsto PXP^{-1}$ est linéaire, elle est continue sur l'espace vectoriel normé de dimension finie $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et donc $(PT_pP^{-1})_{p \geq p_0}$ converge vers M et est une suite

de matrices diagonalisables à spectre de cardinal n .

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, supposons l'existence d'une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ à spectre de cardinal 2. telle que $A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$.

Si $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, notons $\varphi(M) = (\operatorname{tr}(M))^2 - 4 \det(M)$ ie. $\varphi(M)$ est le discriminant de $X^2 - \operatorname{tr}(M)X + \det(M) = \chi_M$. La fonction φ est continue car polynomiale sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Donc $\varphi(A_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi(A)$. Comme les A_k ont deux valeurs propres distinctes, $\varphi(A_k) > 0$, d'où $\varphi(A) \geq 0$: absurde car $\varphi(A) = -1$. Le résultat est donc faux dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

23. a. La partie $T = \{(x, y) \in I^2 \mid x < y\}$ de $\mathbb{R}^2$ est convexe donc connexe par arcs. Soit $F : T \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(y) - f(x)$. F est continue donc $F(T)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$ ie. un intervalle de $\mathbb{R}$. Comme f est injective, $F(T) \subset \mathbb{R}^*$. D'où $F(T) \subset \mathbb{R}_+^*$ ie. f est strictement croissante, ou $F(T) \subset \mathbb{R}_-^*$ ie. f est strictement décroissante.

b. On considère $F : (x, y) \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ sur $T = \{(x, y) \in I^2 \mid x < y\}$. L'application F étant continue sur la partie convexe, donc connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$, la partie $F(T)$ est connexe par arcs dans $\mathbb{R}$ ie. un intervalle de $\mathbb{R}$.

D'après le théorème des accroissements finis, on a $F(T) \subset f'(I)$.

D'autre part, f étant dérivable sur I , on a $f'(I) \subset \overline{F(T)}$.

$F(T)$ étant un intervalle de $\mathbb{R}$, la double inclusion $F(T) \subset f'(I) \subset \overline{F(T)}$ montre que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

24. a. Supposons $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ avec $x_i \in H$ et $p \geq n + 2$.

$(x_2 - x_1, \dots, x_p - x_1)$ est constitué de $(p - 1)$ vecteurs liés puisque $p - 1 \geq n + 1$ et E est de dimension n . Il existe donc $(\mu_2, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^{p-1}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=2}^p \mu_i (x_i - x_1) = 0. \text{ Notons } \mu_1 = -\sum_{i=2}^p \mu_i, \text{ alors } \sum_{i=1}^p \mu_i x_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^p \mu_i = 0.$$

b. Un des μ_i au moins est > 0 . Soit $\theta = \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\mu_i} \mid 1 \leq i \leq p \text{ et } \mu_i > 0 \right\}$.

Posons $\lambda'_i = \lambda_i - \theta \mu_i$. Alors, pour tout i , $\lambda'_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^p \lambda'_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$.

Il existe i tel que $\lambda'_i = 0$ et $x = \sum_{i=1}^p \lambda'_i x_i$.

Il s'ensuit que $\operatorname{conv}(H)$ est constitué d'au plus $(n + 1)$ éléments de H .

c. Soit $\Phi : \Lambda \times H^{n+1} \rightarrow \operatorname{conv}(H), (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$.

Si H est compact, comme Λ est compacte, le produit $\Lambda \times H^{n+1}$ est compact. L'application Φ étant continue et surjective, $\operatorname{conv}(H)$ est compact.

TRAVAUX DIRIGÉS

• Des normes sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ où $n \geq 2$.

1. Montrer que la norme subordonnée à N_1 (voir V.2.) est $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) \text{ si } A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

2. Montrer que la norme subordonnée à N_∞ est $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \text{ si } A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

3. Montrer que $N : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \sqrt{\text{tr}(^t A A)}$ est une norme non subordonnée et que :

$$\forall (A, B) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))^2, N(AB) \leq N(A)N(B).$$

Solution

Notons $^t X = (x_1 \dots x_n)$, $^t Y = (y_1 \dots y_n)$, $Y = AX \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$

$$1. \quad N_1(AX) = \sum_{i=1}^n |y_i| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j} x_j| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$$

$$N_1(AX) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) N_1(X) \quad (1)$$

Soit j_0 tel que $\max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}|$. Posons $^t Z = (z_1 \dots z_n)$ où $z_j = 1$ si

$j = j_0$ et $z_j = 0$ sinon. Alors $N_1(Z) = 1$ et $N_1(AZ) = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} z_j \right| = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}|$.

Compte tenu de (1) et de la définition de la norme subordonnée, on conclut.

$$2. \quad N_\infty(AX) = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) N_\infty(X) \quad (2)$$

Soit i_0 tel que $1 \leq i_0 \leq n$ et $\max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$. Soit $^t Z = (z_1 \dots z_n)$ où

$z_j = 1$ si $a_{i_0,j} = 0$ et $z_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|}$ sinon. Alors $N_\infty(Z) = 1$ et

$$N_\infty(AZ) \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} z_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \quad (3)$$

De (2), (3) et de la définition de la norme subordonnée, on déduit le résultat.

3. $N(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j})^2}$. $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ étant identifié à $\mathbb{R}^{n^2}$, N n'est autre que la

norme euclidienne notée N_2 dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^{n^2}$.

Pour démontrer l'inégalité demandée, rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \beta_k^2 \right).$$

$$AB = (c_{i,j}) \text{ où } c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}. \text{ Donc } c_{i,j}^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right). \text{ D'où}$$

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n c_{i,j}^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) = N(A)^2 \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right). \text{ Donc :}$$

$$N(AB)^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{i,j}^2 \leq N(A)^2 \cdot N(B)^2. \text{ D'où l'inégalité car } N(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})) \subset \mathbb{R}_+.$$

$N(I_n) = n \neq 1$ donc N n'est pas subordonnée.

• Valeurs d'adhérence d'une suite ; applications

On note $\mathcal{A}(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel normé (E, N) .

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) a est valeur d'adhérence de u .
- (ii) Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid N(u_n - a) \leq \varepsilon\}$ est infini.
- (iii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > p$ et $N(u_n - a) \leq \varepsilon$.

2. Si $E = \mathbb{R}$ et $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$, montrer que $\mathcal{A}(u) \neq \emptyset$.

3. Montrer que $\mathcal{A}(u) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n}$ où $U_n = \{u_k \mid k \geq n\}$. En déduire que $\mathcal{A}(u)$ est fermé dans (E, N) .

4. Montrer que si la suite u est bornée, l'ensemble $\mathcal{A}(u)$ est vide ou borné et que $\text{diam}(\mathcal{A}(u)) \leq \text{diam}(U_0)$. Voir l'exercice 9.

Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et u est bornée, que dire de plus de $\mathcal{A}(u)$?

5. Si $E = \mathbb{R}$ et $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, montrer que $\mathcal{A}(u)$ est vide ou un intervalle.

6. Soit (F, N') un espace vectoriel normé, C une partie compacte de F .

a. Montrer que si (u_n) suite à valeurs dans C n'a qu'une valeur d'adhérence ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ .

b. On considère une application f d'une partie A de E dans F .

(i) Montrer que, si f est continue, $\Gamma = \{(x, y) \in A \times F \mid y = f(x)\}$ (graphe de f) est un fermé relatif de $A \times F$ partie de l'espace vectoriel normé $E \times F$.

(ii) Montrer en utilisant a. que, si $f(A) \subset C$ et Γ est fermé dans $A \times F$, alors f est continue.

7. Si A est un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et si $f \in \mathcal{C}(A, A)$, on définit une suite u en prenant u_0 dans A et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, la suite u converge.

8. On suppose (E, N) de dimension finie et l'on considère $f \in \mathcal{L}_c(E)$ et non nilpotente. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \|f^n\|^{1/n}$.

a. On note u la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Montrer que $\mathcal{A}(u)$ est non vide.

b. Soient $q \geq 1, r \geq 0, m \geq 0, n \geq 1$ des entiers naturels tels que $n = mq + r$.

Montrer que : $\left(\frac{u_n}{u_q}\right)^n \leq \left(\frac{\|f\|}{u_q}\right)^r$. $(\star)$

c. Soit $a \in \mathcal{A}(u)$. Montrer que : $\forall q \in \mathbb{N}^*, a \leq u_q$.

d. En déduire que la suite u est convergente.

Solution

1. (i) $\Rightarrow$ (ii). S'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers a , alors : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow N(u_{\varphi(n)} - a) \leq \varepsilon$.

L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid N(u_n - a) \leq \varepsilon\}$ contient $\{\varphi(n) \mid n > n_0\}$ qui est infini puisque φ est injective.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq p\}$ est fini alors que $\{n \in \mathbb{N} \mid N(u_n - a) \leq \varepsilon\}$ est infini, donc il existe $n > p$ tel que $N(u_n - a) \leq \varepsilon$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Soit $\mathcal{P}(\varepsilon, p) : \forall (\varepsilon, p) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > p$ et $N(u_n - a) \leq \varepsilon$.

Construisons, par récurrence, $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que la suite de terme général $u_{\varphi(n)}$ converge vers a .

La propriété $\mathcal{P}(1, 0)$ donne : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 > 0$ et $N(u_{n_0} - a) \leq 1$.

La propriété $\mathcal{P}\left(\frac{1}{2}, n_0\right)$ donne : $\exists n_1 \in \mathbb{N}, n_1 > n_0$ et $N(u_{n_1} - a) \leq \frac{1}{2}$.

Si $n_0, \dots, n_k$ sont définis par $n_k > \dots > n_0$ et $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, N(u_{n_i} - a) \leq \frac{1}{i+1}$,

$\mathcal{P}\left(\frac{1}{k+2}, n_k\right)$ donne : $\exists n_{k+1} \in \mathbb{N}, n_{k+1} > n_k$ et $N(u_{n_{k+1}} - a) \leq \frac{1}{k+2}$.

Du théorème de récurrence, on déduit que $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, k \mapsto n_k$ est strictement croissante et vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq N(u_{\varphi(k)} - a) \leq \frac{1}{k+1}$.

Par encadrement, $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .

2. Le lecteur étudiant ne tombera pas dans le piège qui consiste à dire que la suite (u_n) est bornée.

$(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$ s'écrit : $\exists A > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p, |u_n| \leq A$.

Comme à la question 1. on construit, par récurrence $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que : $\forall p \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(p)}| \leq A$.

La suite $(u_{\varphi(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ étant réelle et bornée, admet une valeur d'adhérence a qui est aussi valeur d'adhérence de (u_n) .

3. Soit n fixé dans $\mathbb{N}$. un élément $a \in \mathcal{A}(u)$ est limite d'une suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ de u , donc limite de $(u_{\varphi(n+k)})_{k \in \mathbb{N}}$ suite à valeurs dans U_n , puisque $\varphi(n+k) \geq n+k \geq n$. D'où $a \in \overline{U_n}$. On a donc $\mathcal{A}(u) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n}$.

Réciproquement, si $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} : \forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists k \in \mathbb{N}, k \geq n$ et $N(u_k - a) < \varepsilon$.

Donc a est valeur d'adhérence de u . D'où : $\mathcal{A}(u) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n}$ est fermé, en tant que intersection de fermés.

4. Si u est bornée, U_0 , donc $\overline{U_0}$ est borné et $\text{diam}(U_0) = \text{diam}(\overline{U_0})$ d'après l'exercice 10. Supposons $\mathcal{A}(u) \neq \emptyset$. Comme $\mathcal{A}(u) \subset \overline{U_0}$, la partie $\mathcal{A}(u)$ est bornée et $\text{diam}(\mathcal{A}(u)) \leq \text{diam}(U_0)$.

Si $E = \mathbb{R}$ et u est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on a : $\mathcal{A}(u) \neq \emptyset$.

5. On suppose dans cette question $E = \mathbb{R}, u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $\mathcal{A}(u) \neq \emptyset$.

Si $\mathcal{A}(u)$ n'est pas un intervalle, il existe $(a, a') \in (\mathcal{A}(u))^2, b \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{A}(u)$ tels que : $a < b < a'$. Le réel b n'étant pas valeur d'adhérence, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq n_0, |u_n - b| \geq \varepsilon$. Par prolongement des inégalités, on a pour tout $\alpha \in \mathcal{A}(u), |\alpha - b| \geq \varepsilon$. En particulier, $a \leq b - \varepsilon$ et $a' \geq b + \varepsilon$.

Par hypothèse, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_1, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $a \in \mathcal{A}(u)$, il existe $n_2 \geq \max(n_0, n_1)$ dans $\mathbb{N}$ tel que $|a - u_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $u_{n_2} \leq b - \frac{\varepsilon}{2} < b - \varepsilon$. Si, pour $n \geq n_2, u_n \leq b - \varepsilon$, alors :

$u_{n+1} - u_n + u_n - b \leq \frac{\varepsilon}{2} + (-\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{2}$ ie. $u_{n+1} < b - \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $u_{n+1} \leq b - \varepsilon$.

Par récurrence, on obtient : $\forall n \geq n_2, u_n \leq b - \varepsilon$, donc $|u_n - a'| \geq 2\varepsilon$ ce qui contredit : $a' \in \mathcal{A}(u)$. Donc avec ces hypothèses, $\mathcal{A}(u)$ est un intervalle.

6. a. Voir le théorème VI.4 du chapitre.

b. (i) $g : A \times F \rightarrow F, (x, y) \mapsto y - f(x)$ est continue par addition car $(x, y) \mapsto y$ est 1-lipschitzienne et $(x, y) \mapsto f(x)$ est continue par composition.

Comme $\Gamma = g^{-1}(\{0_F\})$, Γ est fermée dans $A \times F$.

(ii) Soit (a_n) une suite d'éléments de A convergente dans A et a sa limite. La suite $u = (f(a_n))$ est à valeurs dans C compact et donc l'ensemble $\mathcal{A}(u)$ de ses valeurs d'adhérence est non vide.

Soient $\ell \in \mathcal{A}(u)$ et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $f(a_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$.

$(a_{\varphi(n)})$, suite extraite, converge vers a , donc $((a_{\varphi(n)}), f(a_{\varphi(n)}))$ converge dans $E \times F$ vers (a, ℓ) . Comme Γ est fermé dans $A \times F$, il existe Γ' fermé de $E \times F$ tel que $\Gamma = \Gamma' \cap A$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, ((a_{\varphi(n)}), f(a_{\varphi(n)})) \in \Gamma \subset \Gamma'$ fermé, donc (a, ℓ) appartient à Γ' et même à $\Gamma' \cap (A \times F)$, d'où $\ell = f(a)$ et $\mathcal{A}(u) = f(a)$.

La question a. appliquée à u suite de C compact montre que u converge vers $f(a)$, c'est caractéristique de la continuité. Donc f est continue.

7. Montrons d'abord que $\mathcal{A}(u)$ est contenu dans l'ensemble des points fixes de f . En effet, si $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$, par continuité de f , $u_{\varphi(n)+1} = f(u_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\ell)$. Or $N(u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ par hypothèse, donc $f(\ell) = \ell$.

$\mathcal{A}(u) \neq \emptyset$ car A est compact. Donc $\mathcal{A}(u)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'après 5. Si a_1 et a_2 sont deux valeurs d'adhérence de u , $a_1 < a_2$, alors $[a_1, a_2] \subset \mathcal{A}(u)$. Comme $\frac{a_1 + a_2}{2} \in \mathcal{A}(u)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [a_1, a_2]$. Mais alors u_{n_0} est un point fixe de f . Donc la suite est stationnaire et ne peut avoir qu'une unique valeur d'adhérence ; d'où la conclusion, avec la question 6.

8. a. Comme on l'a vu dans V.2., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f^n\| \leq \|f\|^n$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \|f\|$. La suite réelle u étant bornée, $\mathcal{A}(u) \neq \emptyset$.

b. $\|f^n\| = \|f^{mq+r}\| \leq \|f^q\|^m \|f\|^r \Rightarrow (u_n)^n \leq (u_q)^{qm} \|f\|^r = (u_q)^{n-r} \|f\|^r$.

D'où l'inégalité demandée.

c. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par division euclidienne, on déduit l'existence de $(m, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = mq + r$ où $0 \leq r < q$. Soit $M = \max \left\{ \left(\frac{\|f\|}{u_q} \right)^r \mid 0 \leq r \leq q \right\}$.

D'après (*), on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq u_q M^{1/n}$.

Si a est valeur d'adhérence de u et si $(u_{\varphi(n)})$ est une suite extraite de u qui converge vers a , l'inégalité précédente donne : $\forall n \geq 1, u_{\varphi(n)} \leq u_q M^{1/\varphi(n)}$.

D'où $a \leq u_q$ par passage à la limite.

d. Supposons que la suite u possède deux valeurs d'adhérence a et a' distinctes, avec $a < a'$. Comme $a' \in \mathcal{A}(u)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|a' - u_{n_0}| < a' - a$.

D'où $a < u_{n_0}$ ce qui contredit 8.c). Donc $\mathcal{A}(u) = \{a\}$. D'après 6. la suite u étant à valeurs dans $[0, \|f\|]$ qui est une partie compacte de $\mathbb{R}$, elle converge vers a .

• Morphismes continus entre les groupes multiplicatifs $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^\star$.

On suppose donné un entier $n \geq 2$ et l'on se propose de déterminer l'ensemble noté $\mathcal{G}$ des morphismes continus entre les groupes multiplicatifs $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^\star$. On suppose donné un élément φ de $\mathcal{G}$.

On rappelle que, si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}^\star$, alors $\det(A) = \alpha$ si, et seulement si, il existe des matrices de transvections $T_1, \dots, T_N$ telles que :

$$T_1 \dots T_N A = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1, \alpha)$$

1. Montrer que toute matrice de transvection T s'écrit $T = A^{-1}B^{-1}AB$ où A et B sont des matrices de transvection si $n \geq 3$, où A est diagonale et B matrice de transvection si $n = 2$.

2. Déterminer $\varphi(T)$ si T est une matrice de transvection.

3. Soit f un morphisme continu entre les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{C}^\star, \times)$. Montrer l'existence d'un nombre complexe α tel que f soit solution de l'équation différentielle $y' = \alpha y$ et expliciter f en fonction de α .

4. a. Déterminer les applications $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\star$, $t \mapsto \varphi(\mathrm{Diag}(1, \dots, 1, e^t))$ et $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\star$, $\theta \mapsto \varphi(\mathrm{Diag}(1, \dots, 1, e^{i\theta}))$.

b. En déduire l'ensemble $\mathcal{G}$.

Solution

1. Supposons tout d'abord $n \geq 3$. Si $T = I_n + \lambda E^{i,j}$ on choisit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}$ et l'on pose $A = I_n - E^{k,j}$, $B = I_n + \lambda E^{i,k}$.

$$\begin{aligned} A^{-1}B^{-1}AB &= (I_n + E^{k,j})(I_n - \lambda E^{i,k})(I_n - E^{k,j})(I_n + \lambda E^{i,k}) \\ &= (I_n + E^{k,j} - \lambda E^{i,k})(I_n - E^{k,j} + \lambda E^{i,k}) \\ &= I_n - E^{k,j} + \lambda E^{i,k} + E^{k,j} - \lambda E^{i,k} + \lambda E^{i,j} = T. \end{aligned}$$

Si $n = 2$ on a $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc, toute matrice de transvection s'écrit $A^{-1}B^{-1}AB$.

2. En écrivant $T = A^{-1}B^{-1}AB$, on a $\varphi(T) = \varphi(A)^{-1}\varphi(B)^{-1}\varphi(A)\varphi(B) = 1$ car $(\mathbb{C}^\star, \times)$ est un groupe commutatif.

3. Soit $F : x \mapsto \int_0^x f$ primitive de f nulle en 0, on a $F'(0) = f(0) = 1$ et donc il existe $x_0 \in]0, +\infty[$ tel que $F(x_0) \neq 0$.

Pour un tel x_0 , si $y \in \mathbb{R}$ on a $\int_0^{x_0} f(t+y) dt = f(y) \int_0^{x_0} f(t) dt = f(y)F(x_0)$.

Le changement de variable $u = t + y$ prouve que $\int_0^{x_0} f(t+y) dt = \int_y^{y+x_0} f(u) du$

et donc $f(y) = \frac{1}{F(x_0)} \int_y^{y+x_0} f(u) du$, ce qui prouve que f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$f'(y) = \frac{f(y+x_0) - f(y)}{F(x_0)} = \frac{f(x_0) - 1}{F(x_0)} f(y) \text{ et } \alpha = \frac{f(x_0) - 1}{F(x_0)} \text{ convient.}$$

Comme $f(0) = 1$ on en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\alpha t}$.

4. a. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $t \mapsto \text{Diag}(1, \dots, 1, e^{\lambda t})$ est un morphisme continu entre les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\text{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$ donc, par composition, f_1 et f_2 sont des morphismes continus entre les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{C}^\star, \times)$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $(t, \theta) \in \mathbb{R}^2$, $f_1(t) = e^{\alpha t}$ et $f_2(t) = e^{\beta \theta}$.

Comme f_2 est 2π -périodique on a $1 = f_2(2\pi) = e^{2\beta\pi}$ et donc $\beta \in i\mathbb{Z}$; posons $\beta = ik$, alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f_2(\theta) = e^{ik\theta}$.

b. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, écrivons $T_1 \dots T_N A = \text{Diag}(1, \dots, 1, \alpha)$ où $T_1, \dots, T_N$ sont des matrices de transvections et $\alpha = \det(A) = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in]0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

On a $\varphi(A) = \varphi(T_1) \dots \varphi(T_N) \varphi(\text{Diag}(1, \dots, 1, \rho e^{i\theta})) = f_1[\ln(\rho)] f_2(\theta)$ d'après la question 2.

Par suite $\varphi(A) = e^{\alpha \ln(\rho)} e^{ik\theta} = \rho^\alpha e^{ik\theta} = \rho^{\alpha-k} (\rho e^{i\theta})^k = |\det(A)|^\gamma \times [\det(A)]^k$ où l'on a posé $\gamma = \alpha - k$.

Réciproquement, si $(\gamma, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{Z}$, comme le déterminant est un élément de $\mathcal{G}$, l'application $A \mapsto |\det(A)|^\gamma \times [\det(A)]^k$ est un élément de $\mathcal{G}$.

Donc $\varphi \in \mathcal{G}$ si, et seulement si, il existe γ dans $\mathbb{C}$ et k dans $\mathbb{Z}$ tels que, pour tout $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(A) = |\det(A)|^\gamma \times [\det(A)]^k$.

4. Séries

Dans tout le chapitre, on suppose que (E, N) est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Toutes les normes sur E sont équivalentes et la plupart des propriétés énoncées seront indépendantes de la norme choisie.

I. Généralités

A. Séries vectorielles

1. Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments de E . On appelle suite des sommes partielles la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On appelle série de terme général u_n le couple $((u_n), (S_n))$. On dit que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, la suite $(S_n)_n$ converge, sinon elle est dite divergente. En cas de convergence, le vecteur $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ est appelé somme de la série et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le reste de rang n , $R_n = S - S_n$.

Notations : $\sum u_n$ désigne la série de terme général u_n , $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sa somme en cas de convergence.

Remarques

1. On ne modifie pas la nature (convergence ou divergence) de $\sum u_n$ en modifiant un nombre fini de ses termes car on ajoute une constante à S_n à partir d'un certain rang, la convergence de la série associée à $(u_n)_{n \geq 0}$ équivaut donc à celle de la série associée à $(u_n)_{n \geq n_0}$ si n_0 est un entier fixé. C'est pourquoi, dans tout ce chapitre, on ne traitera que le cas d'une suite $(u_n)_n$ définie à partir du rang 0, le cas général s'y ramenant. Par contre les exemples pourront utiliser une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$. On notera alors la série $\left(\sum u_n \right)_{n \geq n_0}$.

2. Si $\sum u_n$ converge alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

3. Toujours en cas de convergence, comme $u_n = S_n - S_{n-1} = R_{n-1} - R_n$ pour $n \geq 1$, il y a convergence vers 0 de $(u_n)_n$.

2. Définition

| On dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement si $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0.

Remarque

La grossière divergence est une condition suffisante de divergence.

3. Théorème (transformation suite/série)

| Une suite $(a_n)_n$ converge si, et seulement si, $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge.

Démonstration

Le résultat est immédiat puisque $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_0$ par télescopage. $\square$

B. Structure d'espace vectoriel**1. Théorème**

L'ensemble des séries convergentes d'éléments de E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et l'application $\sum u_n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est linéaire, autrement dit si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\sum (\lambda u_n + v_n)$ converge et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

La démonstration de ce théorème est une conséquence de la structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de l'ensemble des suites convergentes d'éléments de E .

Remarques

1. Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ alors $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature.
2. Si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ et $\sum (u_n + v_n)$ sont de même nature,

$$\begin{cases} \sum u_n \text{ convergente} \\ \sum v_n \text{ divergente} \end{cases} \Rightarrow \sum (u_n + v_n) \text{ divergente.}$$
3. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes on ne peut rien affirmer *a priori* quant à la nature de $\sum (u_n + v_n)$ comme le prouvent les exemples où $v_n = -u_n$ d'une part et $v_n = u_n$ d'autre part.

2. Théorème (séries composantes)

Soit E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie p et $(e_k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ une base de E . Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E et $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les suites composantes (définies par $u_n = u_{n,1} e_1 + \cdots + u_{n,p} e_p$), la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, les p séries composantes convergent.

$$\text{De plus : } \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^p u_{n,k} e_k \right) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,k} \right) e_k.$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer à la suite (S_n) un théorème de convergence des suites à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. $\square$

Cas particulier des séries à termes complexes

$\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum \Im(u_n)$ et $\sum \Re(u_n)$ convergent.

De plus, en cas de convergence, $\sum_{n=0}^{\infty} \Re(u_n) + i \sum_{n=0}^{\infty} \Im(u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Compte tenu des propriétés ci-dessus, étudier une série à termes dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p revient à l'étude simultanée de p séries à termes dans $\mathbb{K}$.

3. Convergence absolue

3.1. Définition

| On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente si $\sum N(u_n)$ est convergente.

3.2. Théorème

| Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors $\sum u_n$ converge et l'on a l'inégalité $N\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} N(u_n)$. La réciproque est fausse.

Démonstration

Soit E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie p et $(e_k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ une base de E . Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E et $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les suites composantes (définies par $u_n = u_{n,1}e_1 + \dots + u_{n,p}e_p$), avec la norme N_∞ , on a $N_\infty(u_n) = \max_{1 \leq i \leq p} |u_{n,i}|$, on a $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, |u_{n,i}| \leq N_\infty(u_n)$.

Si $\sum u_n$ est absolument convergente, on déduit de l'inégalité précédente que les p séries $\sum |u_{n,i}|$ convergent. D'après le cours de MPSI, la convergence absolue dans $\mathbb{K}$ implique la convergence, d'où la convergence des p séries $\sum u_{n,i}$. On conclut avec le théorème B.2.

Comme contre-exemple de la réciproque on dispose de la série alternée

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ qui converge alors que } \sum \frac{1}{n+1} \text{ diverge. } \square$$

C. Compléments sur les séries numériques

1. Sommation de relations de comparaison

1.1. Théorème

| $\sum v_n$ désigne une série à termes positifs, $\sum u_n$ une série à termes complexes vérifiant $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$.

(i) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right)$.

(ii) Si $\sum v_n$ diverge alors $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.

(iii) Résultats analogues si l'on remplace l'hypothèse « $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$ » par « $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$ », « $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ ».

Démonstration

(i) $\sum u_n$ est absolument convergente. Puisque $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$ il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout n , $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq M|v_n|$.

Alors, si $n \geq n_0$, $\left| \sum_{k=n}^{\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |u_k| \leq M \sum_{k=n}^{\infty} v_k$ d'où le résultat.

(ii) Avec les mêmes M et n_0 , si $n \geq n_0$ on a :

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| + M \sum_{k=n_0}^n v_k = C + M \sum_{k=0}^n v_k \text{ où } C \text{ est un réel.}$$

Comme $\sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, on a $C \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.

À partir d'un rang $n_1 \geq n_0$, $C \leq M \sum_{k=0}^n v_k$ puis $\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq 2M \sum_{k=0}^n v_k$, ce qui est le résultat annoncé.

(iii) Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$, en remplaçant M par ε on obtient les mêmes conclusions que dans (i) et (ii) en remplaçant O par o .

Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ alors $u_n - v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$ et l'on peut donc remplacer O par $\sim$ dans les conclusions de (i) et (ii). $\square$

1.2. Application au théorème de Cesàro

Si $\sum \alpha_n$ est une série à termes positifs divergente et $(\beta_n)_n$ est une suite complexe convergeant vers β , alors la suite de terme général $\frac{\sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k}{\sum_{k=0}^n \alpha_k}$ (définie à partir d'un certain rang) converge vers β .

Démonstration

On a $\beta_n - \beta \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(1)$ d'où $\alpha_n(\beta_n - \beta) \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(\alpha_n)$, les hypothèses du théorème sont vérifiées avec $(u_n, v_n) = (\alpha_n(\beta_n - \beta), \alpha_n)$, d'où : $\sum_{k=0}^n \alpha_k(\beta_k - \beta) \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^n \alpha_k\right)$

soit $\sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k - \beta \sum_{k=0}^n \alpha_k = o\left(\sum_{k=0}^n \alpha_k\right)$ puis $\frac{\sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k}{\sum_{k=0}^n \alpha_k} = \beta + o(1)$. $\square$

1.3. Application aux séries de Riemann

Si $\alpha > 1$, $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ et si $\alpha \leq 1$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}$.

Démonstration

Si l'on pose $v_n(\alpha) = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha}$ pour $n \geq 1$, la série $\sum v_n(\alpha)$ est à termes positifs.

$v_n(1) = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Si $\alpha \neq 1$, $v_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} \left[\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right] = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} \right]$.

Donc $v_n(\alpha) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$. L'application du théorème précédent permet de conclure. $\square$

II. Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

1. Théorème et définition

Soit E est un espace vectoriel de dimension finie. Pour tout u élément de $\mathcal{L}(E)$, la série de terme général $\frac{u^n}{n!}$ converge dans $\mathcal{L}(E)$. Sa somme est appelée l'exponentielle de u notée $\exp(u)$ ou e^u .

Démonstration

Le cas $u = 0$ étant évident, supposons $u \neq 0$.

Les normes étant équivalentes sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{L}(E)$, utilisons la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{L}(E)$ définie en V.2 du chapitre précédent. Par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \left\| \frac{u^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|u\|^n}{n!} = \alpha_n$. La série $\sum \alpha_n$ converge d'après la règle de d'Alembert. Par comparaison, $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge absolument donc converge car $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie. $\square$

2. Théorème

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si u et v sont deux éléments permutables de $\mathcal{L}(E)$, alors $\exp(u) \circ \exp(v) = \exp(u + v)$.

Démonstration (non exigible)

Notons $U_n = \sum_{p=0}^n \frac{u^p}{p!}$, $V_n = \sum_{q=0}^n \frac{v^q}{q!}$, $W_n = \sum_{r=0}^n w_r$ où $w_r = \sum_{p+q=r} \frac{u^p}{p!} \circ \frac{v^q}{q!} = \frac{(u+v)^r}{r!}$

d'après le binôme de Newton. Notons encore $U'_n = \sum_{p=0}^n \frac{\|u\|^p}{p!}$, $V'_n = \sum_{q=0}^n \frac{\|v\|^q}{q!}$ et

$W'_n = \frac{(\|u\| + \|v\|)^n}{n!}$, enfin $I_n = [1, n]^2$ et $J_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q \leq n\}$.

$\|U_n \circ V_n - W_n\| \leq \left\| \sum_{(p,q) \in I_n \setminus J_n} \frac{u^p}{p!} \circ \frac{v^q}{q!} \right\| \leq \sum_{(p,q) \in I_n \setminus J_n} \frac{\|u\|^p}{p!} \cdot \frac{\|v\|^q}{q!} = U'_n \cdot V'_n - W'_n$.

Comme $\|u\|, \|v\|, \|u+v\|$ sont des réels, on déduit des propriétés de l'exponentielle réelle, que : $U'_n \cdot V'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(\|u\|) \cdot \exp(\|v\|)$ et $W'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(\|u\| + \|v\|)$.

Donc $U'_n \cdot V'_n - W'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Il s'ensuit que $U_n \circ V_n - W_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ par encadrement. Comme les suites (U_n) , (V_n) et (W_n) convergent respectivement vers $\exp(u)$, $\exp(v)$ et $\exp(u+v)$ et comme l'application $(u, v) \mapsto u \circ v$ est bilinéaire continue, le théorème est prouvé. $\square$

L'application de ce théorème au couple $(u, -u)$ donne :

3. Corollaire

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\exp(u)$ est inversible et a pour inverse $\exp(-u)$.

4. Exponentielle d'une matrice

4.1. Théorème et définition

*Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ où $n \geq 1$. La série de terme général $\frac{A^k}{k!}$ converge dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Sa somme est appelée **l'exponentielle de A** notée $\exp(A)$ ou e^A .*

Démonstration

Il suffit de prouver l'existence sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme N telle que, pour tout $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $N(AB) \leq N(A)N(B)$ pour n'avoir qu'à reproduire la démonstration de 5.1. Or la norme $N' : A = (a_{i,j}) \mapsto \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$ ie. la norme N_∞ sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ rapporté à sa base canonique vérifiant $N'(AB) \leq nN'(A) \cdot N'(B)$, la norme $N = nN'$ convient. $\square$

En procédant de même à partir du théorème 2 on prouve le théorème suivant :

4.2. Théorème

Si A et B sont deux éléments de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.
 e^A est inversible et a pour inverse e^{-A} .

Contre-exemple : $U = M_{1,2}, V = M_{2,1} \Rightarrow U + V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (U + V)^2 = I_2$.

Donc $(U + V)^{2p} = I_2$ et $(U + V)^{2p+1} = U + V$. D'où $e^{U+V} = \begin{pmatrix} \text{ch}(1) & \text{sh}(1) \\ \text{sh}(1) & \text{ch}(1) \end{pmatrix}$

alors que $e^U \cdot e^V = (I_2 + U)(I_2 + V) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nous avons noté :

$$\text{ch}(1) = \frac{e^1 + e^{-1}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \text{ et } \text{sh}(1) = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Ces notations seront justifiées dans le chapitre « Séries entières ».

EXERCICES

1. Montrer que (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \exp\left(\frac{1}{n+k}\right) - n$, converge vers $\ln(2)$.

On pourra utiliser, après l'avoir prouvée, l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^x. \text{ Nature de la série } \sum (u_n - \ln(2)).$$

$$\text{On notera que : } \ln(2) - u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (u_k - u_{k-1}).$$

2. a. Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

b. Montrer que si une fonction f définie sur $[0, a[$, $a > 0$ est telle que :

$f(x) = x - ax^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1})$, où $a \neq 0$, alors il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(f(x))^\gamma - x^\gamma \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ell \in \mathbb{R}^*.$$

c. Application : prouver que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n)$. On pourra poser $x_n = e^{-u_n}$.

d. On pose $y_n = \frac{1}{x_n} - n$. En considérant $y_{n+1} - y_n$, trouver un développement asymptotique de u_n à deux termes.

e. Poser de même $z_n = \dots$ pour aller plus loin. On pourra utiliser :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^2}.$$

3. a. Étudier (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ et $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que (v_n) définie par $v_n = 2^{-n} \ln(u_n)$ converge. Soit a sa limite, montrer que $a > 0$ et $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \exp(2^n a)$.

c. Montrer que $v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2^{n+1}u_n}$. En déduire $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \exp(2^n a) - \frac{1}{2} + o(1)$.

4. Soit, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{pq}{p+q}$. Montrer que $S_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{3}(1 - \ln(2))n^3$.

On pourra examiner $S_n - S_{n-1}$.

5. Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, montrer $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{12n(n+1)} + O(n^{-4})$.

En déduire un développement asymptotique de $n!$ en utilisant le théorème de Stirling.

6. Donner un équivalent de $\sum_{k=2}^n e^{-\sqrt{\ln(k)}}$ quand $n \rightarrow \infty$.

7. Si $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifie $u_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(u_n)$, montrer que $\sum u_n$ est absolument convergente et que $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_n$.

En déduire la nature de la série de terme général $n! \left[\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) - 1 \right]$

SOLUTIONS DES EXERCICES

1. Soit $x > 0$. L'application du théorème de Taylor-Laplace à la fonction $t \mapsto e^t$ sur $[0, x]$ donne : $e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t dt$.

Comme, pour $t \in [0, x]$, $0 \leq (x-t)e^t \leq (x-t)e^x$ et $\int_0^x (x-t)dt = \frac{x^2}{2}$, on déduit de l'inégalité de la moyenne : $0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2}e^x$.

Donc : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 \leq \exp\left(\frac{1}{n+k}\right) - 1 - \frac{1}{n+k} \leq \frac{e^{\frac{1}{n+k}}}{2(n+k)^2} \leq \frac{e}{2n^2}$.

D'où, si $n \geq 1$, $0 \leq u_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \frac{e}{2n}$. Posons $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

Comme $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln(2)$ (cf. sommes de Riemann), on déduit du théorème d'encadrement que la suite (u_n) converge vers $\ln(2)$.

$u_n - u_{n-1} = \exp\left(\frac{1}{2n-1}\right) + \exp\left(\frac{1}{2n}\right) - \exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1$.

Or $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$. Donc :

$u_n - u_{n-1} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{3}{4n^2} \right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$
 $\frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-1} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et $\frac{1}{(2n-1)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$
 Donc : $u_n - u_{n-1} \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{n^3}\right).$ Du théorème IV.D.1. et de son application aux séries de Riemann, on déduit que $\sum_{k=n+1}^{\infty} (u_k - u_{k-1}) \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$

Par télescopage des termes on a : $\forall N > n, \sum_{k=n+1}^{N+1} (u_k - u_{k-1}) = u_{N+1} - u_n.$

Comme $\lim(u_n) = \ln(2)$, on a : $\ln(2) - u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$ D'où la convergence absolue et donc la convergence de la série de terme général $(\ln(2) - u_n).$

2. a. L'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + e^{-x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donc la suite $(x_n)_n$ est définie, à valeurs réelles, et si elle converge, alors, $\ell = \varphi(\ell)$, ce qui équivaut à $e^{-\ell} = 0$ et est impossible. Donc $(x_n)_n$ diverge. Comme elle est croissante, sa limite est $+\infty$.

b. Si $x > 0$, $(f(x))^\gamma - x^\gamma = x^\gamma \left[\left(\frac{f(x)}{x} \right)^\gamma - 1 \right] \underset{x \rightarrow 0}{=} x^\gamma [(1 - \gamma a x^\alpha + o(x^\alpha)) - 1].$ Donc $(f(x))^\gamma - x^\gamma \underset{x \rightarrow 0}{=} -\gamma a x^{\gamma+\alpha} + o(x^{\gamma+\alpha}).$ D'où $(f(x))^\gamma - x^\gamma \xrightarrow{x \rightarrow 0} a\alpha \neq 0$ si $\gamma = -\alpha.$

c. Si l'on pose $x_n = e^{-u_n}$, alors $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $f(x) = x e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + o(x^2).$ L'application de b) avec $a = 1 = \alpha$, donne : $x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$

Or $x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1$ et la série à termes positifs égaux à 1 diverge on déduit de IV.D.1. que $x_n^{-1} - x_0^{-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n.$ Comme $x_0^{-1} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(n)$, on a $x_n^{-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n.$ Or $u_n = -\ln(x_n)$, donc : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n)$ (cas particulier de la fonction $\ln$).

d. $y_{n+1} - y_n = x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1} - 1 = (f(x_n))^{-1} - x_n^{-1} - 1 = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} - 1.$

Comme $\frac{e^x - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$, on a : $y_{n+1} - y_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x_n}{2}.$

D'après c), on a : $y_{n+1} - y_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n} > 0.$ La série $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \right)$ étant divergente, On déduit de IV.D.1. et de son application aux séries de Riemann : $y_n - y_1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln(n).$

Comme $y_1 \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(\ln(n))$, on obtient : $y_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln(n).$ Autrement dit,

$\frac{1}{x_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} n + \frac{1}{2} \ln(n) + o(\ln(n)).$ Donc $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{n} \left[1 + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right]^{-1}.$

D'où : $u_n = -\ln(x_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln(n) + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$

e. Si $z_n = y_n - \frac{1}{2} \ln(n)$, alors $z_{n+1} - z_n = y_{n+1} - y_n - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$

$z_{n+1} - z_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{x_n}{2} + \frac{x_n^2}{6} + o\left(\frac{x_n^2}{6}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ cf. un calcul de d).

Or $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$ et $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} \Rightarrow x_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right).$

Donc $z_{n+1} - z_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{4n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$. Donc $z_{n+1} - z_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4}(g(n+1) - g(n))$ où $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. En effet, le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction g dérivable sur $]0, +\infty[$ justifie l'existence de $c \in]n, n+1[$ tel que :

$$g(n+1) - g(n) = (n+1 - n)g'(c). \text{ Comme } g'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x^2}, \text{ on déduit du cas}$$

particulier de la fonction $\ln$, que : $g(n+1) - g(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^2}$.

$g(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \sum (g(n+1) - g(n))$ converge. Donc $\sum (z_{n+1} - z_n)$ converge et par le critère suite/série, la suite $(z_n)_n$ converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$. On déduit de IV.D.1.

$$\lambda - z_n = \sum_{k=n}^{\infty} (z_{k+1} - z_k) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} +\frac{1}{4} \sum_{k=n}^{\infty} (g(k+1) - g(k)) = -\frac{g(n)}{4}.$$

Donc $z_n = \frac{1}{x_n} - n - \frac{\ln(n)}{2n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda + \frac{\ln(n)}{4n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

$$u_n = -\ln(x_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n) + \ln\left[1 + \frac{\ln(n)}{2n} + \frac{\lambda}{n} + \frac{\ln(n)}{4n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)\right].$$

D'où : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n) + \frac{\ln(n)}{2n} + \frac{\lambda}{n} - \frac{\ln^2(n)}{8n^2} + \frac{\ln(n)}{4n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$.

3. a. Posons $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + x^2$. Comme $f(]0, +\infty[) \subset]0, +\infty[$, la suite $(u_n)_n$ est bien définie et à termes strictement positifs. Elle est strictement croissante, puisque $u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0$. Si elle convergeait vers ℓ , f étant continue, on aurait $\ell = f(\ell)$ i.e. $\ell = 0$, ce qui est impossible puisque $0 < u_0 < \ell$ ((u_n) étant strictement croissante). La suite (u_n) étant croissante et divergente, on a : $\lim_n(u_n) = +\infty$.

b. $v_n = 2^{-n} \ln(u_n)$ est défini car, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

$$v_{n+1} = 2^{-n-1} \ln\left[u_n^2\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right] = v_n + 2^{-n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right). \quad (*)$$

$\ln$ étant strictement croissante et concave, on a : $\forall x \in]0, +\infty[, 0 < \ln(1+x) < x$.

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}u_n} \leq \frac{1}{2^{n+1}u_0} \quad (**)$$

car (u_n) est croissante. Par comparaison à une série géométrique convergente $\sum 2^{-n}$, la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge et d'après le critère suite/série, la suite $(v_n)_n$ converge vers $a \in \mathbb{R}$. Notons que $a > 0$. En effet, de $(**)$ on déduit que $(v_n)_n$ est croissante, d'où $v_n \leq a$ pour tout n et de $\lim(u_n) = +\infty$, on déduit qu'à partir d'un certain rang p , $u_n > 1$, donc $v_n > 0$ pour $n \geq p$.

Montrons que $2^n(a - v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, pour prouver que : $\exp(2^n a) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \exp(2^n u_n)$.

Rappelons au lecteur étudiant que $e^{x_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{y_n} \iff \lim(x_n - y_n) = 0$ et que l'assertion $(x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} y_n \Rightarrow e^{x_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{y_n})$ est une erreur grave.

$$(**) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, 0 < v_{k+1} - v_k < \frac{1}{2^{k+1}u_k}.$$

La suite (u_n) étant croissante, on a : $\forall k \geq n, 0 < v_{k+1} - v_k < \frac{1}{2^{k+1}u_n}$.

Les deux séries $\sum (v_{k+1} - v_k)$ et $\sum 2^{-k-1}$ convergent, donc :

$$0 < a - v_n = \sum_{k=n}^{\infty} (v_{k+1} - v_k) \leq \frac{1}{u_n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n u_n}. \quad (***)$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < 2^n a - 2^n v_n < \frac{1}{u_n}$. D'où $2^n(a - v_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et le résultat.

c. D'après $(\star)$, $v_{n+1} - v_n \widetilde{\sim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+1}u_n}$.

Or $a - v_n = \sum_{k=n}^{\infty} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_n + R_n$ où $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (v_{k+1} - v_k)$.

D'après $(\star\star)$, $0 \leq R_n \leq \frac{1}{2^{n+1}u_{n+1}} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{2^{n+1}u_n}\right)$ car

$u_{n+1} \widetilde{\sim}_{n \rightarrow \infty} u_n^2 \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Donc : $a - v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{2^{n+1}u_n} + o\left(\frac{1}{2^{n+1}u_n}\right)$.

D'où : $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} 2^n a - \frac{1}{2u_n} (1 + o(1))$.

$\exp(2^n a) \cdot \exp\left[-\frac{1+o(1)}{2u_n}\right] \underset{n \rightarrow \infty}{=} \exp(2^n a) \left[1 - \frac{1+o(1)}{2u_n}\right]$.

Donc $u_n - \exp(2^n a) \underset{n \rightarrow \infty}{=} -\frac{\exp(2^n a)}{2u_n} (1 + o(1)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\frac{1}{2}$ d'après le début de c.

D'où le résultat.

4. $S_n - S_{n-1} = \frac{n}{2} + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{pn}{p+n} + \sum_{q=1}^{n-1} \frac{qn}{q+n}$. En effet les trois termes correspondent aux éléments tels que $p = q$, puis ceux tels que $q = n$ et $p \in \{1, \dots, n-1\}$, enfin ceux tels que $p = n$ et $q \in \{1, \dots, n-1\}$.

$$S_n - S_{n-1} = \frac{n}{2} + 2n \sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{p+n} = \frac{n}{2} + 2n \sum_{p=1}^{n-1} \left(1 - \frac{n}{p+n}\right).$$

$$S_n - S_{n-1} = \frac{n}{2} + 2n(n-1) - 2n^2 \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+n}.$$

Or $\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+n} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{p}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln(2)$ cf. sommes de Riemann. Donc

$S_n - S_{n-1} \underset{n \rightarrow \infty}{=} 2n(n-1) + \frac{n}{2} - 2n^2 \ln(2) + o(n^2)$ ie. $S_n - S_{n-1} \widetilde{\sim}_{n \rightarrow \infty} 2n^2(1 - \ln(2))$.

$\sum n^2$ est une série à termes positifs divergente. On déduit de C.1. que :

$S_n - S_{n-1} \widetilde{\sim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k^2$. Ceux qui savent que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pourront

utiliser ce résultat pour conclure. On peut aussi montrer, en utilisant la fonction croissante $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, t \mapsto t^2$ et la remarque 2. de II.C.1. que

$\sum_{k=1}^n k^2 \widetilde{\sim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^2 dt$ et conclure.

5. $\ln(u_n) = \ln(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n)$ d'où $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$,

$\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right] \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Comme $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} \left[1 + \frac{1}{n}\right]^{-1} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$, on a montré que $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{12n(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Comme $\sum \frac{1}{n^4}$ est une série à termes positifs convergente, par théorème :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \ln\left(\frac{u_k}{u_{k+1}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} + O\left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^4}\right).$$

On sait, d'après le théorème de Stirling que $\sum_{k=n}^{\infty} \ln\left(\frac{u_k}{u_{k+1}}\right) = \ln(u_n) - \ln(\sqrt{2\pi})$,

que $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n}$ et que $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^4} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{3n^3}$, d'où

$\ln(u_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln(\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ puis $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \sqrt{2\pi} \exp\left[\frac{1}{12n} + O(n^{-3})\right]$

soit encore $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \sqrt{2\pi} \left[1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$ et enfin :

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left[1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right].$$

6. On a : $\frac{1}{n} = e^{-\ln(n)} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(e^{-\sqrt{\ln(n)}}\right)$ donc $\sum_{k=2}^n e^{-\sqrt{\ln(k)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ car la série

à termes positifs $\sum e^{-\sqrt{\ln(n)}}$ diverge.

Si $x_n = ne^{-\sqrt{\ln(n)}}$ alors $x_{n+1} - x_n = ne^{-\sqrt{\ln(n)}} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)e^{-z_n} - 1\right]$ où l'on a posé

$$z_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)} = \sqrt{\ln(n)} \left[\frac{\sqrt{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}}{\ln(n)} - 1\right] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\ln(n)} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2\ln(n)}$$

et donc $z_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Par suite $x_{n+1} - x_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} ne^{-\sqrt{\ln(n)}} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)e^{o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\sqrt{\ln(n)}}$, et par le théorème de sommation des relations de comparaison, on a :

$$\sum_{k=2}^n e^{-\sqrt{\ln(k)}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=2}^n (x_{k+1} - x_k) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} x_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} ne^{-\sqrt{\ln(n)}}.$$

7. La relation $u_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(u_n)$ montre, cf. cours que, pour tout $q \in]0, 1[$, $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(q^n)$ et donc, en particulier, $\sum u_n$ est absolument convergente.

Ponons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = |u_n| - |u_{n+1}|$, alors $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} |u_n|$ et, par I.C.4.1.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k = |u_{n+1}| \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(u_n).$$

$$\text{Donc } \sum_{k=n}^{\infty} u_k = u_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \underset{n \rightarrow \infty}{=} u_n + o(u_n) \text{ car } \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k|.$$

En définitive $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_n$.

En particulier $\frac{1}{(k+1)!} \underset{k \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{k!}\right)$ montre à la fois que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}$ et que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Par suite :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \times \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \left[e - \frac{1}{(n+1)!} + o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right) \right] \left[\frac{1}{e} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right) \right]$$

ou encore $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \times \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 - \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{1}{e} + (-1)^{n+1} e \right] + o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)$.

Alors $\alpha_n = n! \left[\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) - 1 \right] \underset{n \rightarrow \infty}{=} -\frac{1}{n+1} \left[\frac{1}{e} + (-1)^{n+1} e \right] + o\left(\frac{1}{n}\right)$

d'où $\alpha_n - \frac{(-1)^n e}{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{e n}$ qui est le terme général d'une série à termes négatifs divergente alors que $\frac{(-1)^n e}{n+1}$ est celui d'une série convergente, donc $\sum \alpha_n$ diverge.

TRAVAUX DIRIGÉS

• Règle de Raabe-Duhamel

1. Soit u_n le terme général d'une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + v_n$ où $\sum |v_n|$ converge.

Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{K}{n^\alpha}$.

On pourra étudier la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ où $a_n = \ln(n^\alpha u_n)$.

2. Application à l'étude des séries $\sum u_n$ où $a > 0$:

a. $u_n = \frac{2.4 \dots 2n}{3.5 \dots (2n+1)},$

b. $u_n = \frac{n n!}{(a+1) \dots (a+n)},$

c. $u_n = n^{-n} n! e^n.$

3. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{\alpha}{n}\right).$

a. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

b. Examiner les cas où $u_n = \frac{1}{n \ln(n)}$ et où $u_n = \frac{1}{n^2 \ln(n)}.$

Conclure.

Solution

1. Si nous montrons que la série de terme général $(a_{n+1} - a_n)$ converge, il en sera de même de la suite (a_n) vers $L \in \mathbb{R}$, et, de la continuité de la fonction exponentielle nous déduirons l'existence de $K = \lim(n^\alpha u_n) = \exp(L) > 0$.

$$a_{n+1} - a_n = \alpha \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \alpha \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \left(1 - \frac{\alpha}{n} + v_n\right).$$

$$\text{Or } \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} O(1) \text{ et } \ln \left(1 - \frac{\alpha}{n} + v_n\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} -\frac{\alpha}{n} + v_n + \left(-\frac{\alpha}{n} + v_n\right)^2 O(1).$$

$$\text{Donc : } a_{n+1} - a_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} v_n + \frac{1}{n^2} O(1) + \frac{v_n}{n} O(1) + (v_n)^2 O(1).$$

Pour $n \geq 1$, $\frac{|v_n|}{n} \leq |v_n|$ et $\sum |v_n|$ converge ; donc $\sum \frac{|v_n|}{n}$ converge.

Comme $\sum |v_n|$ converge, $|v_n| \rightarrow 0$, donc $(v_n)^2 \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$; donc $\sum (v_n)^2$ converge.

En tant que somme de séries absolument convergentes, $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge absolument donc converge. D'où le résultat.

2. Il suffit d'effectuer des développements limités en $\frac{1}{n}$ de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

a. On trouve $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'où $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}$ et $\sum u_n$ diverge.

b. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 - \frac{a-1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'où $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{K}{n^{a-1}}$ et $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a > 2$.

c. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'où $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} K\sqrt{n}$ et $\sum u_n$ diverge.

Notons qu'avec le théorème de Stirling, on prouve que $K = \sqrt{2\pi}$.

3. a. Posons $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. On a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (*)$$

• Si $\alpha > 1$, choisissons $\beta \in]1, \alpha[$. D'après (*), pour n assez grand $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Du critère de comparaison logarithmique on déduit la convergence de $\sum u_n$ puisque la série de Riemann $\sum v_n$ converge.

• Si $\alpha < 1$, choisissons $\beta = 1$. D'après (*), pour n assez grand $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Du critère de comparaison logarithmique on déduit la divergence de $\sum u_n$ puisque la série de Riemann $\sum v_n$ diverge.

b. On vérifie que dans les deux cas $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors que les séries de Bertrand $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ et $\sum \frac{1}{n^2 \ln(n)}$ sont respectivement divergentes et convergentes.

En conclusion si $\alpha = 1$, on ne peut rien dire.

• Développement asymptotique du reste d'une série de Riemann

On se propose de donner un développement asymptotique de $R_N = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^k}$

où k est un entier, $k \geq 2$, on notera p un entier naturel.

1. Si $\alpha > 0$ donner un développement asymptotique de $\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$

jusqu'à l'ordre $O\left(\frac{1}{n^{\alpha+4}}\right)$.

2. Pour tout r dans $\llbracket 0, p+1 \rrbracket$ on pose $P_r = (X+1)^{k+p}X^r - X^{k+p}(X+1)^r$. Montrer que $(X^0, X^1, \dots, X^{k+p-2}, P_0, P_1, \dots, P_{p+1})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{k+2p}[X]$.

En déduire l'existence et l'unicité d'une décomposition :

$$(X+1)^{k+p}X^p = \sum_{i=0}^{p+1} \lambda_i P_i + \sum_{j=0}^{k+p-2} \mu_j X^j \text{ où les } \lambda_i \text{ et les } \mu_j \text{ sont des réels.}$$

3. Montrer l'existence d'un développement :

$$\frac{1}{n^k} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \sum_{i=-1}^p \nu_i \left[\frac{1}{n^{k+i}} - \frac{1}{(n+1)^{k+i}} \right] + O\left(\frac{1}{n^{k+p+2}}\right).$$

4. Montrer alors $R_N \underset{N \rightarrow \infty}{=} \frac{\nu_{-1}}{N^{k-1}} + \frac{\nu_0}{N^k} + \dots + \frac{\nu_p}{N^{k+p}} + O\left(\frac{1}{N^{k+p+1}}\right)$.

5. Donner le développement de R_N jusqu'à l'ordre $O\left(\frac{1}{N^4}\right)$ si $k = 2$.

Solution

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} &= \frac{1}{n^\alpha} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \right] \\ &= \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^{\alpha+2}} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{6n^{\alpha+3}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+4}}\right). \end{aligned}$$

2. P_r est de degré $k+p+r-1$, la famille étant échelonnée en degrés et de cardinal $k+2p+1$, elle est libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{k+2p}[X]$ de dimension $k+2p+1$, donc base.

Comme $(X+1)^{k+p}X^p \in \mathbb{R}_{k+2p}[X]$, l'existence et l'unicité de la décomposition sont immédiates.

3. Écrivons $(n+1)^{k+p}n^p = \sum_{i=0}^{p+1} \lambda_i P_i(n) + \sum_{j=0}^{k+p-2} \mu_j n^j$ et multiplions cette égalité

par $(n+1)^{-(k+p)}n^{-(k+p)}$, on obtient :

$$\frac{1}{n^k} = \sum_{i=0}^{p+1} \lambda_i \left[\frac{1}{n^{k+p-i}} - \frac{1}{(n+1)^{k+p-i}} \right] + \sum_{j=0}^{k+p-2} \frac{\mu_j}{(n+1)^{k+p}n^{k+p-j}}.$$

En remplaçant $p-i$ par i dans la première somme et en remarquant que tous les termes de la deuxième somme sont des $O\left(\frac{1}{n^{k+p+2}}\right)$, il vient :

$$\frac{1}{n^k} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \sum_{i=-1}^p \lambda_{p-i} \left[\frac{1}{n^{k+i}} - \frac{1}{(n+1)^{k+i}} \right] + O\left(\frac{1}{n^{k+p+2}}\right).$$

4. Par sommation on en déduit que $R_N \underset{N \rightarrow \infty}{=} \sum_{i=-1}^p \frac{\nu_i}{N^{k+i}} + O\left(\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^{p+k+2}}\right)$ soit

$$\text{encore } R_N \underset{N \rightarrow \infty}{=} \sum_{i=-1}^p \frac{\nu_i}{N^{k+i}} + O\left(\frac{1}{n^{k+p+1}}\right).$$

5. Écrivons $\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \alpha \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] + \beta \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + \gamma \left[\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}\right] + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$ et utilisons la première question :

$$\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \alpha \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}\right] + \beta \left[\frac{2}{n^3} - \frac{3}{n^4}\right] + \frac{3\gamma}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \text{ d'où :}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha - 3\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{2}{5} \\ \gamma = \frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \underset{N \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} + \frac{5}{6N^3} + O\left(\frac{1}{N^4}\right).$$

• Théorème du point fixe et applications

1. Théorème

Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé de dimension finie (E, N) et f une application de F dans F contractante i.e. lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$.

Si $a \in F$ on considère la suite (x_n) définie par $x_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que cette suite converge et que sa limite est l'unique point fixe de f .

Montrer que l'existence et l'unicité d'un point fixe de f subsistent si on suppose seulement qu'une itérée de f est contractante.

2. Application à l'algèbre linéaire

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on munit l'espace vectoriel $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ d'une norme N et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme subordonnée $\|\cdot\|$, on considère un élément A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\|A\| < 1$ et un élément B de E . Montrer que le système linéaire $(\Sigma) \quad X = AX + B$ est de Cramer et que sa solution Y est la limite de toute suite (X_n) définie par $X_0 \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$. Montrer de plus que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $N(X_n - Y) \leq \frac{N(X_{n+1} - X_n)}{1 - \|A\|} \leq \frac{\|A\|^n}{1 - \|A\|} N(X_1 - X_0)$.

3. Application à la géométrie

Déduire du théorème de point fixe que deux droites affines d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3 ont une perpendiculaire commune et une seule si, et seulement si, elles ne sont pas parallèles.

Solution

1. La série de terme général $u_n = x_{n+1} - x_n$ vérifie, par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(u_{n+1}) \leq kN(u_n)$ où $k \in [0, 1[$, et donc $N(u_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(k^n)$. Cela prouve que $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente car dans un espace vectoriel de dimension finie, la convergence absolue implique la convergence.

Par suite (x_n) converge et, comme f est continue, sa limite ω vérifie $f(\omega) = \omega$. Si ω' est un point fixe de f , alors $N(\omega - \omega') = N[f(\omega) - f(\omega')] \leq kN(\omega - \omega')$ d'où $N(\omega - \omega') \leq 0$ i.e. $\omega = \omega'$.

Si f^p est contractante alors elle admet un unique point fixe que l'on note encore ω . Comme f et f^p commutent on a $f^p[f(\omega)] = f[f^p(\omega)] = f(\omega)$ et, par unicité du point fixe de f^p , on a $f(\omega) = \omega$. Tout point fixe de f étant aussi point fixe de f^p , f admet un unique point fixe.

2. L'application $f : X \mapsto AX + B$ est définie sur E à valeurs dans E et vérifie, pour tout $(X, Y) \in E^2$, $N[f(X) - f(Y)] = N[A(X - Y)] \leq \|A\| \times N(X - Y)$, donc f est contractante sur E espace vectoriel de dimension finie. Cela prouve que (Σ) admet une et une seule solution, donc est de Cramer, et que sa solution s'obtient comme indiqué.

Si $n \in \mathbb{N}$, $N(X_n - Y) \leq N(X_n - X_{n+1}) + N(X_{n+1} - Y)$ par inégalité triangulaire, or $N(X_{n+1} - Y) = N[f(X_n) - f(Y)] \leq \|A\| \times N(X_n - Y)$, d'où les inégalités $(1 - \|A\|)N(X_n - Y) \leq N(X_n - X_{n+1}) \leq \|A\|^n N(X_1 - X_0)$ car, si $k \geq 1$, $N(X_{k+1} - X_k) = N[f(X_k) - f(X_{k-1})] \leq \|A\| \times N(X_k - X_{k-1})$, et, en divisant par $1 - \|A\| > 0$, $N(X_n - Y) \leq \frac{N(X_{n+1} - X_n)}{1 - \|A\|} \leq \frac{\|A\|^n}{1 - \|A\|} N(X_1 - X_0)$.

3. Notons θ l'angle entre les deux droites D et D' , $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

pour tout $M \in D$ notons M' sa projection orthogonale sur D' et $f(M)$ la projection orthogonale de M' sur D qui est une partie fermée de l'espace. f est lipschitzienne de rapport $\cos^2(\theta)$ car, pour tout $(M, N) \in D^2$, $\|\vec{f(M)f(N)}\| = \cos^2(\theta) \|\vec{MN}\|$. D et D' ont une unique perpendiculaire commune si, et seulement si, f a un unique point fixe.

Si $\theta = 0$ les droites sont parallèles et il y a une infinité de perpendiculaires communes car pour tout M dans D , $f(M) = M$.

Sinon f est contractante et il y a donc une et une seule perpendiculaire commune.

• Groupement par paquets

1. Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Si (u_n) est une suite à valeurs dans E espace vectoriel de dimension finie muni d'une

norme N , on lui associe la série de terme général $v_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$.

a. Montrer que, si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge et $\sum_{n=\varphi(0)}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

b. On suppose que $\sum v_n$ converge, montrer que $\sum u_n$ converge dès que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

(i) la suite de terme général $\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} N(u_k)$ converge vers 0,

(ii) (u_n) est à valeurs réelles et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\varphi(n), \varphi(n+1)[$, $(-1)^n u_k \geq 0$.

2. Donner la nature de la série de terme général u_n si :

a. $u_n = \frac{j^n}{n}$, b. $u_n = \frac{(-1)^{\alpha_n}}{n}$ où $\alpha_n = \binom{n}{3}$

3. Si $\alpha \in]0, 1]$, étudier la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^\alpha}$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .

Solution

1. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n v_k = \sum_{n=\varphi(0)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$, d'où le résultat.

b. (i) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \varphi(0)$. Comme $(\lfloor \varphi(k), \varphi(k+1) \rfloor)_{k \geq 0}$ est une partition de $[\varphi(0), +\infty[\cap \mathbb{N}$, il existe un unique entier p_n tel que $\varphi(p_n) \leq n < \varphi(p_n + 1)$. Comme φ est croissante, $n \mapsto p_n$ l'est et, si elle était majorée par q , on aurait $[\varphi(0), +\infty[\cap \mathbb{N} \subset \llbracket 0, \varphi(q+1) \rrbracket$, ce qui est absurde. Donc $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

On a $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{p_n-1} v_k + \sum_{k=\varphi(p_n)}^n u_k$ avec, si $p_n = 0$, $\sum_{k=0}^{p_n-1} v_k = 0$ par convention.

$$N\left(\sum_{k=\varphi(p_n)}^n u_k\right) \leq \sum_{k=\varphi(p_n)}^n N(u_k) \leq \sum_{k=\varphi(p_n)}^{\varphi(p_n+1)-1} N(u_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \sum u_n \text{ converge.}$$

$$(ii) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} |u_k| = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} (-1)^n u_k = (-1)^n v_n = |v_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

on est ramené au (i).

2. a. On utilise $\varphi : n \mapsto 3n$ et alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}$, soit encore $v_n = \frac{1}{3n} + \frac{j}{3n+1} + \frac{\bar{j}}{3n+2} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{9n^2(1+j+\bar{j}) + O(n)}{3n(3n+1)(3n+2)} \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ce qui prouve l'absolue convergence, et donc la convergence, de $\sum v_n$.

De plus $|u_{3n}| + |u_{3n+1}| + |u_{3n+2}| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, (i) montre que $\sum u_n$ converge.

b. $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ est impair si, et seulement si, $n-1 \equiv 2 \pmod{4}$ ou encore si, et seulement si, $n \equiv 3 \pmod{4}$.

On utilise $\varphi : n \mapsto 4n$ et alors $v_n = \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, $\sum v_n$ diverge et 1. a. montre la divergence de $\sum u_n$.

3. $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = n \iff n^2 \leq k < (n+1)^2$. L'application $\varphi : n \mapsto n^2$ satisfait à la condition (ii).

Si $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-1)^n \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k^\alpha}$ or, si $k \geq 1$, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}$ d'où

$$\int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{dt}{t^\alpha} \leq |v_n| \leq \int_{n^2-1}^{(n+1)^2-1} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ et on va distinguer plusieurs cas.}$$

• Si $\alpha = 1$ il vient $2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq |v_n| \leq \ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2-1}\right)$ et on a

$2 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ainsi que $\ln \left(\frac{n^2+2n}{n^2-1}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln \left(1 + \frac{2}{n} + O(n^{-2})\right)$
d'où, par encadrement, $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{2(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum v_n$ converge.

• Sinon $\frac{1}{1-\alpha} \left[(n+1)^{2(1-\alpha)} - n^{2(1-\alpha)}\right] \leq |v_n| \leq \frac{1}{1-\alpha} \left[(n^2+2n)^{1-\alpha} - (n^2-1)^{1-\alpha}\right]$,
or $(n+1)^{2(1-\alpha)} - n^{2(1-\alpha)} = n^{2(1-\alpha)} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2(1-\alpha)} - 1\right] \underset{n \rightarrow \infty}{=} 2(1-\alpha)n^{1-2\alpha} + O(n^{-2\alpha})$

et le majorant a le même développement. Par suite $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{2(-1)^n}{n^{2\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

Si $\alpha \leq \frac{1}{2}$ alors $\sum v_n$ diverge grossièrement, sinon elle converge. $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étant de même nature, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.

• Espaces ℓ^p

1. a. Montrer que si $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.

b. En déduire que pour tout $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q} \quad (\text{Hölder})$$

Poser $\alpha = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}$, $\beta = \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$ et appliquer a. aux $\left(\frac{a_i}{\alpha}, \frac{b_i}{\beta}\right)$.

c. Établir pour tout $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right]^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}$$

On pourra utiliser b) et $(a+b)^p = (a+b)^{p-1}a + (a+b)^{p-1}b$.

2. Si $p \geq 1$, montrer que l'ensemble ℓ^p des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum |u_n|^p$ converge peut être muni d'une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Si $u \in \ell^p$, on pose $N_p(u) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p}$, $1 \leq p < +\infty$.

3. a. Montrer que N_p est une norme sur ℓ^p .

b. Prouver que $\mathcal{C}_0$, le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites de réels nulles à partir d'un certain rang, est dense dans (ℓ^p, N_p) .

c. Soient p_1, p_2 réels tels que $p_1 > p_2 > 1$; prouver que $\ell^{p_2} \subset \ell^{p_1}$ et que l'inclusion est stricte. Montrer que : $N_{p_1} \leq N_{p_2}$ sur ℓ^{p_2} . Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

4. Soient p réel fixé, $p > 1$ et q le réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On note $E_p = \mathcal{LC}(\ell^p, \mathbb{R})$ muni de la norme subordonnée à N_p .

a. On fixe $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q$. Montrer que pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente et que si l'on pose $\tilde{v}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ alors on définit un élément $\tilde{v} \in E_p$.

b. (MP *) Montrer que l'application $v \mapsto \tilde{v}$ est une bijection $\mathbb{R}$ -linéaire et isométrique de (ℓ^q, N_q) sur $(E_p, \|\cdot\|)$.

Pour montrer la surjectivité, on prendra pour $k \in \mathbb{N}, e_k \in \mathcal{C}_0$ la suite $(\delta_{k,\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ telle que $\delta_{k,k} = 1$ et $\delta_{k,\ell} = 0$ si $\ell \neq k$, on posera $v_k = \varphi(e_k)$; on prouvera que $v = (v_k) \in \ell^q$ et que $\tilde{v} = \varphi$.

Solution

1. Question traitée en exercice dans le chapitre «Espaces vectoriels normés».

2. • ℓ^p est non vide car ℓ^p contient $\mathcal{C}_0$.

• Si $u \in \ell^p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u \in \ell^p$.

• Si $(u, v) \in (\ell^p)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n + v_n|^p \leq (2 \max(|u_n|, |v_n|))^p \leq 2^p(|u_n|^p + |v_n|^p)$.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, on déduit que la série $\sum |u_n + v_n|^p$ converge; d'où $u + v \in \ell^p$ et ℓ^p est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3. a. Montrons que N_p est une norme sur ℓ^p . Les propriétés (i) et (ii) étant immédiates, il suffit de montrer l'inégalité triangulaire.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left[\sum_{i=1}^n |u_i + v_i|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^n |u_i| + |v_i|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right]^{1/p}$$

d'après 1.c). Cette inégalité étant vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si u et v sont éléments de ℓ^p , $u + v$ aussi et l'on a par prolongement des inégalités :

$N_p(u + v) \leq N_p(u) + N_p(v)$ et N_p est une norme sur ℓ^p .

b. Soit $u = (u_n)_n \in \ell^p$. $\sum |u_n|^p$ converge, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \sum_{i=n_0+1}^{\infty} |u_i|^p \leq \varepsilon^p$.

Soit $v = (v_n)_n \in \mathcal{C}_0$ définie par : $v_n = u_n$ si $n \leq n_0$ et $v_n = 0$ si $n \geq n_0 + 1$.

Par construction $v \in \mathcal{C}_0$ et $N_p(v - u) \leq \varepsilon$.

c. • $u = (u_n) \in \ell^{p^2} \Rightarrow (u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \leq n_0, |u_n| \leq 1)$.

Donc : $\forall n \geq n_0, |u_n|^{p^1} \leq |u_n|^{p^2}$.

Par comparaison des séries à termes positifs, la convergence de $\sum |u_n|^{p^2}$ implique celle de $\sum |u_n|^{p^1}$. D'où $u = (u_n) \in \ell^{p^1}$.

• L'inclusion est stricte car u définie par $u_n = (n+1)^{-1/p^2}$ si $n \geq 0$ est élément de $\ell^{p^1} \setminus \ell^{p^2}$ d'après les résultats sur les séries de Riemann.

• Soit $u = (u_n)_n \in \ell^{p^2} \setminus \{0\}$. Posons $C = N_{p^1}(u)$. On a : $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{u_n}{C} \right|^{p^1} = 1$. Or, pour

tout n , $\left| \frac{u_n}{C} \right| \leq 1$. Comme $p_2 < 1$, on a : $1 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{u_n}{C} \right|^{p^2}$. Or $\frac{1}{p_2} > \frac{1}{p_1}$, on a :

$1 \leq \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{u_n}{C} \right|^{p^2} \right]^{1/p_1} \leq \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{u_n}{C} \right|^{p^2} \right]^{1/p_2} = \frac{1}{C} N_{p_2}(u)$. Donc $N_{p_1}(u) \leq N_{p_2}(u)$ si $u \neq 0$ et même si $u = 0$. Donc : $\forall u \in \ell^{p^2}, N_{p_1}(u) \leq N_{p_2}(u)$.

• Soit $u^{(k)} \in \ell^{p^2}$ définie par : $u_n^{(k)} = (n+1)^{-1/p^2}$ si $n \leq k$ et à 0 si $n > k$.

$N_{p_2}(u^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$. Or $N_{p_1}(u^{(k)}) \leq \zeta\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$ pour tout k . ($\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ si $x > 1$)

La suite $(u^{(k)})_k$ étant bornée pour N_{p_1} et pas pour N_{p_2} , les deux normes ne sont pas équivalentes.

$$4. \text{ a. (H)} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n |u_k v_k| \leq \left(\sum_{k=0}^n |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^n |v_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq N_p(u) N_q(v).$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum |u_n v_n|$ étant majorées par $N_p(u) N_q(v) \in \mathbb{R}$, cette série converge *ie.* la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente, ainsi $\tilde{v}$ est bien définie. $\tilde{v}$ est clairement une forme linéaire sur ℓ^p . Par passage à la limite, dans l'inégalité précédente, on obtient :

$|\tilde{v}(u)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_n v_n| \leq N_p(u) N_q(v)$, ce qui montre que $\tilde{v}$ est continue sur l'espace vectoriel normé (ℓ^p, N_p) et que $\|\tilde{v}\| \leq N_q(v)$. Donc $\tilde{v} \in E_p$.

b. L'application $f : \ell^p \rightarrow E_p, v \mapsto \tilde{v}$ est $\mathbb{R}$ -linéaire. Soit sgn l'application de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par $\text{sgn}(0) = 0$, $\text{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$ et $\text{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$.

Considérons $u^{(k)} = (u_n^{(k)})_n \in \ell^p$ telle que $u_n^{(k)} = \text{sgn}(v_n) |v_n|^{q-1}$ si $n \leq k$ et $u_n^{(k)} = 0$

si $n > k$ pour v fixé dans $\ell^p \setminus \{0\}$. Alors : $\tilde{v}(u^{(k)}) = \sum_{n=0}^k |v_n|^q \leq N_q(v) N_p(u^{(k)})$.

$$\text{Or } N_q(v) N_p(u^{(k)}) = N_q(v) \left[\sum_{n=0}^k |v_n|^{p(q-1)} \right]^{1/p} = N_q(v) \left[\sum_{n=0}^k |v_n|^q \right]^{1-\frac{1}{q}}.$$

$$\text{Donc } \tilde{v}(u^{(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (N_q(v))^q \text{ et } N_q(v) N_p(u^{(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (N_q(v))^q.$$

$$\text{Donc, puisque } N_q(v) > 0, \frac{\tilde{v}(u^{(k)})}{N_p(u^{(k)})} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} N_q(v).$$

Comme d'après 4. a. $\|\tilde{v}\| \leq N_q(v)$, il vient : $\|\tilde{v}\| = N_q(v)$. Donc f est isométrique, d'où injective. Montrons qu'elle est surjective.

Soit $\varphi \in E_p \setminus \{0\}$. Avec les notations de l'énoncé, soit $v_k = \varphi(e_k)$. On pose $B = \|\varphi\|$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $u^{(k)}$ l'élément de ℓ^p tel que $u_n^{(k)} = \text{sgn}(v_n) |v_n|^{q-1}$ si $n \leq k$ et $u_n^{(k)} = 0$ si $n > k$. Alors $\varphi(u^{(k)}) \leq B N_p(u^{(k)})$ soit :

$$\sum_{n=0}^k |v_n|^q \leq B \left[\sum_{n=0}^k |v_n|^{p(q-1)} \right]^{1/p} = B \left[\sum_{n=0}^k |v_n|^q \right]^{1-\frac{1}{q}}. \quad (\star)$$

$$\text{Pour } k \text{ assez grand, } \sum_{n=0}^k |v_n|^q > 0 \text{ donc } (\star) \Rightarrow \left[\sum_{n=0}^k |v_n|^q \right]^{\frac{1}{q}} \leq B.$$

Ceci étant vrai quel que soit k assez grand, la série $\sum |v_n|^q$ converge *ie.* $v \in \ell^p$.

Comme $\varphi(e_k) = v_k = \tilde{v}(e_k)$ pour tout k , on voit que φ et $\tilde{v}$ coïncident sur l'espace vectoriel engendré par les e_k *ie.* $\mathcal{C}_0$. Comme φ et $\tilde{v}$ sont continues, on déduit de 3.b. que $\varphi = \tilde{v}$. D'où la surjectivité de f .

• Transformation d'Abel ; premières applications

1. Soit $u_n = a_n b_n$ où $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et tend vers 0 et si la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, montrer que la série $\sum u_n$ converge.

On pourra écrire, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$.

2. Application de la question précédente à l'étude des séries $\sum u_n$ suivantes.

(i) $u_n = \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ où $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$;

(ii) $u_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \cos(n)}$;

(iii) $u_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)}$.

3. Soient $\sum v_n$ une série à termes complexes convergente et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs, de limite $+\infty$.

a. Montrer que $\sum \frac{v_n}{\alpha_n}$ converge.

b. Montrer que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{v_k}{\alpha_k} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)$.

Solution

1. $\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$.

$|a_n B_n| \leq M |a_n|$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ impliquent $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n B_n = 0$.

$|(a_k - a_{k+1}) B_k| \leq M |a_k - a_{k+1}| = M(a_k - a_{k+1})$ et le critère suite/série impliquent la convergence de $\sum (a_k - a_{k+1}) B_k$. D'où la convergence de $(S_n)_{n \geq 0}$ ie. celle de $\sum u_n$.

2. (i) On pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $v_n = e^{in\theta}$. Comme $|a_n| = \frac{1}{n^\alpha}$, $\sum a_n$ converge absolument si $\alpha > 1$ et diverge grossièrement si $\alpha \leq 0$. Si $\alpha > 0$, la suite $(a_n)_n$ réelle est décroissante de limite nulle. Il suffit de montrer que $(V_{p,q})_{p \geq q}$ est bornée.

Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{i\theta} \neq 1$. $\forall q \geq p$, $V_{p,q} = \sum_{n=p}^q (e^{i\theta})^n = e^{ip\theta} \frac{1 - e^{i(q-p+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$.

$|V_{p,q}| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|\sin(\frac{\theta}{2})|} \text{ car } 1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$.

(ii) $a_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

car $\frac{1}{1+h} \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - h + O(h^2)$ et $\cos \underset{0}{=} O(1)$. Donc :

$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} - \frac{\sin(2n)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. On déduit de (i) la convergence de

$\sum \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{\sin(2n)}{2n}$. Comme $\frac{3}{2} > 1$, on déduit d'un théorème de comparaison du cours, que $\sum O(n^{-3/2})$ converge absolument. Donc $\sum a_n$ converge en tant que combinaison linéaire des séries convergentes.

(iii) De même, $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} - \frac{\sin^2(n)}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Or $\sin^2(n) = \frac{1 - \cos(2n)}{2}$, donc $a_n = \frac{-1}{2n} + b_n$ où $\sum b_n$ converge (raisonnement analogue à celui de (i)).

Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de $\sum a_n$.

3. a. est une conséquence immédiate de 2.

b. Comme $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$, on a : $v_n = R_{n-1} - R_n$. Par la transformation d'Abel ie. le calcul de la question 1. on a :

$$\forall N > n, \sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{v_k}{\alpha_k} = \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{\alpha_{k+1}} - \frac{1}{\alpha_k} \right) R_k + \frac{R_n}{\alpha_{n+1}} - \frac{R_{N+1}}{\alpha_{N+1}}. \quad (2)$$

Comme $\left(\frac{1}{\alpha_n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, la série à termes positifs $\sum \left(\frac{1}{\alpha_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_n} \right)$ converge.

Comme $R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_n} \right) R_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_n} \right)$ et d'après le théorème de sommation des relations de comparaison, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k+1}} - \frac{1}{\alpha_k} \right) R_k \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k+1}} - \frac{1}{\alpha_k} \right) \right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}} \right).$$

$$(2) \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{v_k}{\alpha_k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_{k+1}} - \frac{1}{\alpha_k} \right) R_k + \frac{R_n}{\alpha_{n+1}}.$$

Comme $\frac{R_n}{\alpha_{n+1}} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}} \right)$, on peut conclure que : $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{v_k}{\alpha_k} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}} \right)$.

5. Suites et séries de fonctions

Dans tout ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé (E, P) et à valeurs dans (F, N) , $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, la plupart des propriétés sont indépendantes de la norme choisie dans F (car toutes les normes sont équivalentes).

On note respectivement $\mathcal{F}(A, F)$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des fonctions définies sur A à valeurs dans F , $\mathcal{B}(A, F)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$ formé des fonctions bornées sur A . Il est supposé muni de la norme $N_\infty^A : f \mapsto N_\infty^A(f) = \sup_{x \in A} N(f(x))$.

I. Divers types de convergence de suites de fonctions

Si l'on cherche à définir une notion de convergence pour une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A dans F , deux voies sont possibles :

- Conserver un point de vue fonctionnel et étudier dans F les suites $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ (pour x fixé). C'est la notion de **convergence simple**.
- Considérer les f_n comme éléments d'un espace vectoriel normé. Cela suppose la définition d'une norme sur certains sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(A, F)$ et amène aux notions de **convergence uniforme**, de **convergence en moyenne**, de **convergence en moyenne quadratique**.

1. Convergence simple

1.1. Définition

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur A à valeurs dans F **converge simplement** sur A si pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans F .

Si c'est le cas, on pose, pour $x \in A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

$f : A \rightarrow F$ s'appelle la **limite simple** de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A si, et seulement si,

$\forall x \in A, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n \geq n_0(\varepsilon, x) \Rightarrow N(f_n(x) - f(x)) \leq \varepsilon]$.

1.2. Propriétés

1. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications de $\mathcal{L}(E, F)$ qui converge simplement sur E vers f , alors $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes, définies sur $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et convergeant simplement sur A vers f , alors f est croissante.
3. Soit (f_n) une suite de fonctions convexes, définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement sur I vers f , alors f est convexe.
4. Soit (f_n) une suite de fonctions positives, définies sur $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et convergeant simplement sur A vers f , alors f est positive.
5. Soit (f_n) une suite de fonctions périodiques, définies sur $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et convergeant simplement sur A vers f , alors f est périodique.

Démonstration

1. Soit $(x, y) \in E^2$, $\ell \in \mathbb{K}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(\ell x + y) = \ell f_n(x) + f_n(y)$. Par linéarité de la convergence dans (F, N) : $f(\ell x + y) = \ell f(x) + f(y)$.

2. Soit $(x, y) \in A^2$ tel que $x < y$. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leq f_n(y)$, les deux suites étant convergentes, par passage à la limite : $f(x) \leq f(y)$.

3. $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, f_n[(1-t)x + ty] \leq (1-t)f_n(x) + tf_n(y)$. Toutes les suites étant convergentes, on peut prolonger l'inégalité et l'on obtient $f[(1-t)x + ty] \leq (1-t)f(x) + f(y)$.

4. et 5. sont laissées au lecteur. $\square$

1.3. Exemples

a. Soit $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^n$. Si $|z| < 1$, $z^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et si $z = 1$, $z^n = 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.

Si $|z| = 1$ avec $z \neq 1$ ou $|z| > 1$, $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge car $|z^{n+1} - z^n| = |z - 1|$ qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers ∞ . $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ ou } z = 1\}$ vers f définie par $f(z) = 0$ si $|z| < 1$ et $f(1) = 1$.

b. $I = \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = n^2 x$ si $|x| \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = \frac{1}{x}$ si $|x| > \frac{1}{n}$.

Pour tout $x \neq 0$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'une valeur de n , et a pour limite $\frac{1}{x}$, alors que $f_n(0) = 0$ pour tout n . $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$.

c. $I = \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$. Montrons que (f_n) converge simplement sur I vers f définie par $f(x) = 1$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ en utilisant $\varepsilon, n_0 \dots$

ε étant donné, cherchons n_0 tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.

Si $x = 0$, $|f(x) - f_n(x)| = 0$; donc n_0 est quelconque.

Si $x > 0$, $|f(x) - f_n(x)| = \frac{1}{1+nx} < \varepsilon$ si, et seulement si, $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x}$.

Si $\varepsilon > 1$, $n_0(\varepsilon, x)$ est arbitraire.

Si $\varepsilon \in]0, 1[$, $n_0(\varepsilon, x) = \left\lceil \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x} \right\rceil + 1$ est le plus petit entier qui convient.

Noter que $x \mapsto \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x}$ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}_+^*$; il n'existe pas de n_0 valable quel que soit $x > 0$.

1.4. Remarque

Comme nous l'avons vu, certaines propriétés des fonctions f_n se conservent par passage à la limite.

Par contre on peut avoir f_n bornée pour tout n et pas f . (cf exemple b.).

On peut avoir f_n continue pour tout n et pas f (cf exemples a. b. et c.).

2. Convergence uniforme

2.1. Définition

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F , f une fonction de A dans F . On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f si à partir d'un certain rang, $f_n - f \in \mathcal{B}(A, F)$ et si $N_\infty^A(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0_{\mathbb{R}}$.

Traductions

(i) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x \in A} (N(f_n(x) - f(x)) \leq \varepsilon]$.

(ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \forall x \in A, N(f_n(x) - f(x)) \leq \varepsilon]$.

2.2. Remarques

a. La convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque est fausse. En effet, après l'exemple c) du paragraphe I. nous avons noté l'impossibilité de trouver $n_0(\varepsilon, x)$ indépendant de $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b. La convergence uniforme dépend de l'intervalle sur lequel on étudie la suite.

Reprenons l'exemple c. de I.1.3. $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ mais avec $I = [1, +\infty[$.

$\forall x \in [1, +\infty[, |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n} < \varepsilon < 1$ si $n > n_0(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$.

(f_n) converge uniformément vers f sur $[1, +\infty[$ et pas sur $[0, +\infty[$ ni sur $]0, +\infty[$.

c. De la définition précédente on déduit une méthode pratique pour montrer la convergence uniforme.

Soit par exemple $f_n(x) = x\sqrt{n} \exp(-nx)$, $x \in \mathbb{R}_+$. (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$. f_n étant dérivable sur $\mathbb{R}_+$, on a $f'_n(x) = \sqrt{n}(1-nx)e^{-nx}$.

Par suite f_n croît sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, décroît sur $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$ et $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e\sqrt{n}}$. D'où (f_n)

converge uniformément vers f sur $[0, +\infty[$ car $\sup_{x \in I} (|f(x) - f_n(x)|) = \frac{1}{e\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

2.3. Interprétation géométrique dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

La convergence uniforme de (f_n) vers f signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$, la représentation graphique de f_n est contenue dans la « bande » du plan xOy définie par $x \in I$, $y \in [|f(x)| - \varepsilon, |f(x)| + \varepsilon]$.

2.4. Théorème

Pour que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur A il suffit qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de A , telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tende pas vers 0.

Démonstration

Il suffit de remarquer que $N(f_n(x_n) - f(x_n)) \leq N_\infty^A(f_n - f)$. D'où par contraposition une condition suffisante de « non convergence uniforme ». □

Exemples

a. $f_n(x) = x^n$ si $x \in [0, 1]$. $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$.

Soit $c \in]0, 1]$, $x_n = 1 - \frac{c}{n}$. $f_n(x_n) - f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-c} \neq 0$.

b. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + (nx)^2}$. f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

$$f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{1 + \pi^2/4} \text{ si } x_n = \frac{\pi}{2n}.$$

Dans ces deux cas, on n'a pas convergence uniforme.

On déduit d'un théorème sur les suites dans un espace vectoriel de dimension finie

3. Théorème

Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie égale à $p \geq 1$. $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F .

$$f \in \mathcal{F}(A, F), \forall x \in A, f(x) = \sum_{i=1}^p f_{(i)}(x) e_i \text{ où } f_{(i)} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K}).$$

$$f_n \in \mathcal{F}(A, F), \forall x \in A, f_n(x) = \sum_{i=1}^p f_{n,i}(x) e_i \text{ où } f_{n,i} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K}).$$

(f_n) converge simplement (resp. uniformément) vers f sur A si, et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(f_{n,i})_n$ converge simplement (resp. uniformément) vers $f_{(i)}$ sur A .

II. Continuité et limites uniformes**1. L'espace vectoriel normé $\mathcal{B}(A, F)$**

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur A et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur A , alors f l'est aussi.

Démonstration

$(f_n - f), f_n \in \mathcal{B}(A, F)$. Comme $\mathcal{B}(A, F)$ est un espace vectoriel, $f \in \mathcal{B}(A, F)$. $\square$

2. Continuité et convergence uniforme**2.1. Théorème**

Si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de A dans F , continues en $a \in A$, converge uniformément sur A vers f , alors f est continue en a .

Démonstration

$$\forall x \in A, N(f(x) - f(a)) \leq N(f(x) - f_n(x)) + N(f_n(x) - f_n(a)) + N(f_n(a) - f(a)) \quad (1).$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in A, N(f_n(x) - f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3})$.

Fixons $n = n_0$. La fonction f_{n_0} est continue en a . On peut donc écrire :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, (P(x - a) \leq \alpha \Rightarrow N(f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)) \leq \frac{\varepsilon}{3}).$$

On déduit alors de (1) : $\forall x \in A, P(x - a) \leq \alpha \Rightarrow N(f(x) - f(a)) \leq \varepsilon$. $\square$

Une conséquence immédiate du théorème est :

2.2. Corollaire

Si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}(A, F)$ converge uniformément vers f sur A , alors $f \in \mathcal{C}(A, F)$.

2.4. Théorème

Si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}(A, F)$ converge uniformément vers f sur tout compact inclus dans A , alors $f \in \mathcal{C}(A, F)$.

Démonstration

Soit $a \in A$ et (x_n) une suite de points de A de limite a . Soit $K = \{a\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. K est compacte dans E et $K \subset A$. Comme $f|_K$ est continue d'après II.2.2. $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(a)$. Ceci étant vrai pour toute suite de points de A de limite a , on en déduit que f est continue en a (choisi quelconque dans A). $\square$

Remarque

En pratique les théorèmes sur la continuité servent :

- à démontrer la continuité de la limite ;
- à montrer que la convergence n'est pas uniforme si la limite est discontinue.

Soit la suite de fonctions (f_n) . $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = nx e^{-nx^2}$.

(f_n) converge simplement vers la fonction nulle qui est, bien sûr, continue.

Une simple étude de la fonction $g_n = f_n - f$ montre que :

$$N_\infty^A(f_n - f) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{\frac{n}{2e}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

Pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$, et pourtant, f_n et f sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

3. Théorème de la double limite

Il s'agit de l'extension au cas où $a \in \bar{A}$ (ou, lorsque $E = \mathbb{R}$ aux cas où $a = +\infty$ ou $a = -\infty$) et où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite en a .

Théorème

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F , a un point adhérent à A (si $E = \mathbb{R}$, on peut prendre $a = +\infty$ ou $a = -\infty$). Si (f_n) converge uniformément vers f sur A et si $f_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors (ℓ_n) converge dans (F, N) . Si ℓ est sa limite, $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$.
Autrement dit : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)$.

Démonstration

(f_n) converge uniformément vers f sur V voisinage pointé de a et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n dans F en a .

Soient $\varepsilon > 0$ puis $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq n_0 \Rightarrow N_\infty^A(f_n - f) \leq \varepsilon$.

• Si $n \geq n_0$ et $x \in V$, $N(f_n(x) - f_{n_0}(x)) \leq 2\varepsilon$ par inégalité triangulaire et donc, quand $x \rightarrow a$, $N(\ell_n - \ell_{n_0}) \leq 2\varepsilon$ ce qui montre que la suite (ℓ_n) est bornée.

• Soit α une valeur d'adhérence de (ℓ_n) ; soit $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_{\varphi(n)}$.

Supposons que $\{n \in \mathbb{N} \mid N(\ell_n - \alpha) > \varepsilon\}$ n'est pas fini, on choisit une suite extraite convergente $(\ell_{\psi(n)})$ de (ℓ_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(\ell_{\psi(n)} - \alpha) > \varepsilon$ et l'on note β sa limite.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p \Rightarrow N_\infty^A(f_n - f) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, alors si $n \geq p$, $N_\infty^A(f_{\varphi(n)} - f_{\psi(n)}) \leq \frac{2\varepsilon}{3}$

doù $N(\ell_{\varphi(n)} - \ell_{\psi(n)}) \leq \frac{2\varepsilon}{3}$ puis, lorsque $n \rightarrow \infty$, $\varepsilon \leq N(\alpha - \beta) \leq \frac{2\varepsilon}{3}$, ce qui est absurde.

• Soient $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_1 \Rightarrow N(\ell - \alpha) \leq \varepsilon$ et $n_2 = \max(n_0, n_1)$.

Soit W un voisinage pointé de a sur lequel $N(f_{n_2}(x) - \ell_{n_2}) \leq \varepsilon$.

$x \in W \Rightarrow N(f(x) - \alpha) \leq N(f(x) - f_{n_2}(x)) + N(f_{n_2}(x) - \ell_{n_2}) + N(\ell_{n_2} - \alpha) \leq 3\varepsilon$
et le théorème de double limite est prouvé. $\square$

III. Approximations de fonctions

Dans tout ce paragraphe, les applications considérées sont définies sur un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel F de dimension finie.

1. Subdivisions

1.1. Définition 1

On appelle subdivision du segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, toute suite finie strictement croissante $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de points de $[a, b]$ telle que : $a_0 = a, a_n = b$.

1.2. Définition 2

Si $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $\sigma' = (b_i)_{0 \leq i \leq m}$ sont deux subdivisions de $[a, b]$, σ est moins fine que σ' si tout point de σ est un point de σ' : on note $\sigma \subset \sigma'$.

1.3. Définition 3

Soient σ, σ' deux subdivisions de $[a, b]$.

(i) On note $\sigma \cap \sigma'$ la subdivision de $[a, b]$ obtenue en ordonnant dans l'ordre croissant les points communs à σ et σ' .

(ii) On note $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision de $[a, b]$ obtenue en ordonnant dans l'ordre croissant les points appartenant à σ ou σ' .

(iii) On a alors $\sigma \cap \sigma' \subset \sigma \subset \sigma \cup \sigma'$ et $\sigma \cap \sigma' \subset \sigma' \subset \sigma \cup \sigma'$.

Exemples $\left(a, \frac{a+b}{2}, b\right); (a, b); (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ où $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$ sont trois subdivisions du segment $[a, b]$.

2. Fonctions continues par morceaux

2.1. Définition

$f \in \mathcal{F}([a, b], F)$ est dite continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ – on note $f \in \mathcal{CM}([a, b], F)$ – s'il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]a_{k-1}, a_k[$ soit prolongeable par continuité au segment $[a_{k-1}, a_k]$. Une telle subdivision est dite subordonnée à f .

$f \in \mathcal{F}(I, F)$ est dite continue par morceaux sur l'intervalle I si elle l'est sur tout segment inclus dans I . On note $f \in \mathcal{CM}(I, F)$.

2.2. Propriétés

a. Si $f \in \mathcal{CM}([a, b], F)$, une subdivision subordonnée à f contient les points de discontinuité de f . Il y en a un nombre fini.

b. Toute subdivision plus fine que σ de la définition est encore subordonnée à f .

c. $\mathcal{CM}([a, b], F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], F)$.

Démonstration

a. et b. sont immédiates.

c. $\mathcal{CM}([a, b], F) \subset \mathcal{F}([a, b], F)$. $\mathcal{CM}([a, b], F) \neq \emptyset$ car $\omega : x \mapsto 0_F$ est élément de $\mathcal{CM}([a, b], F)$. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{CM}([a, b], F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. σ_1 et σ_2 étant deux subdivisions subordonnées respectivement à f et g , $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ est une subdivision de $[a, b]$ plus fine que σ_1 et σ_2 , donc subordonnée à f et g . Notons $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$; $\lambda f + g$ est continue sur $]a_{k-1}, a_k[$ et prolongeable par continuité à $[a_{k-1}, a_k]$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, d'après les théorèmes sur la continuité et les limites de fonctions de $\mathcal{F}([a, b], F)$. $\square$

2.3. Exemple

La fonction $f : x \mapsto x^2 - \lfloor x^2 \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

3. Fonctions en escalier

3.1. Définitions

1. $f \in \mathcal{F}([a, b], F)$ est dite en escalier – on note $f \in \mathcal{E}([a, b], F)$ – s'il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]a_{k-1}, a_k[$ est constante.
Une telle subdivision est dite subordonnée à f .
2. $f \in \mathcal{F}(I, F)$ est dite en escalier – on note $f \in \mathcal{E}(I, F)$ – s'il existe un segment $[a, b]$ inclus dans I tel que $f|_{[a, b]} \in \mathcal{E}([a, b], F)$ et f est nulle en dehors de $[a, b]$.

3.2. Propriétés

- a. Toute subdivision plus fine que σ de la définition est encore subordonnée à f .
- b. $\mathcal{E}(I, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I, F)$.
- c. $\mathcal{E}(I, \mathbb{K})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ engendré par les fonctions caractéristiques d'intervalles.

Démonstration

a. est immédiate et b. est analogue à 2.2.c. au remplacement de continue par constante.

c. Le résultat découle de : $f = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mathbb{I}_{]a_k, a_{k+1}[} + \sum_{k=0}^n f(a_k) \mathbb{I}_{\{a_k\}}$ si $f(x) = \lambda_k$, pour $x \in]a_k, a_{k+1}[$. $\square$

3.3. Exemple

La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est élément de $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4. Fonctions continues affines par morceaux

4.1. Définition

- $f \in \mathcal{F}([a, b], F)$ est continue affine par morceaux – on note $f \in \mathcal{CAM}([a, b], F)$ – s'il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la restriction de f aux segments $[a_{k-1}, a_k]$ est affine.

4.2. Propriétés

- a. $\mathcal{CAM}([a, b], F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([a, b], F)$.
- b. $\mathcal{CAM}([a, b], \mathbb{R})$ admet pour base $(\varphi_c)_{c \in [a, b]}$ où $\varphi_c(t) = |t - c|$.

Démonstration

a. Analogue à celle faite en 2.2.c) au remplacement de continue par affine.

b. Soit A_σ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{CAM}([a, b], \mathbb{R})$ pour lesquelles la subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq p}$ de $[a, b]$ est une subdivision subordonnée. A_σ est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CAM}([a, b], \mathbb{R})$. Soit $L : A_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^{p+1}, f \mapsto (f(a_0), \dots, f(a_p))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels car une fonction affine est entièrement déterminée par ses « nœuds » autrement dit, les $(a_i, f(a_i)), 0 \leq i \leq p$, puisqu'une fonction affine est déterminée par les images de deux points. Donc $\dim(A_\sigma) = p+1$. Il suffit de montrer que la famille $(\varphi_{a_i})_{0 \leq i \leq p}$ est libre pour en déduire que cette famille est une base de A_σ et conclure. Supposons-la liée. Il existe une famille

$$(\lambda_i)_{0 \leq i \leq p} \text{ de réels non tous nuls tels que } \sum_{i=0}^p \lambda_i \varphi_{a_i} = 0. \quad (\star)$$

S'il existe $j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tel que $\lambda_j \neq 0$, alors $\sum_{i \neq j} \lambda_i \varphi_{a_i} = -\lambda_j \varphi_{a_j}$.

$\lambda_j \varphi_{a_j}$ n'est pas dérivable en a_j alors que la fonction du premier membre de l'égalité précédente l'est. Ceci est impossible. Donc : $\lambda_i = 0$ si $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. On déduit alors de $(\star)$ que $\lambda_0 \varphi_a + \lambda_p \varphi_b = 0$. D'où $\lambda_0 \varphi_a(b) = 0 = \lambda_p \varphi_b(a)$.

Enfin $\lambda_i = 0$ si $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$. D'où la conclusion.

Le lecteur étudiant attentif aura noté la nécessité de supposer que $j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ dans le raisonnement précédent. En effet, $\varphi_a(t) = |t-a| = t-a$ et $\varphi_b(t) = |t-b| = b-t$ si $t \in [a, b]$. Les fonctions φ_a et φ_b sont dérivables sur $[a, b]$. $\square$

5. Théorèmes d'approximation

5.1. Théorème

| Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a, b], F)$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions en escalier.

Démonstration

$f \in \mathcal{C}([a, b], F)$ est uniformément continue sur $[a, b]$, d'après le théorème de Heine. Donc : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| < \alpha \Rightarrow N(f(x) - f(y)) < \varepsilon$.

Il existe $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{m_0(\varepsilon)} < \alpha$. Il suffit de prendre $m_0(\varepsilon) = E\left[\frac{b-a}{\alpha}\right] + 1$.

Soit $n > m_0(\varepsilon)$ et la subdivision $\sigma_n = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ où $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

Soit $\varphi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, F)$ définie par : $\varphi_n(t) = 0$ si $t \notin [a, b]$ et

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall t \in]a_{k-1}, a_k[, \varphi_n(t) = f(a_k)$ et $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi_n(a_k) = f(a_k)$.

$\forall t \in [a, b], \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, t \in [a_{i-1}, a_i], |t - a_i| \leq a_i - a_{i-1} = \frac{b-a}{n} < \alpha$, d'où :

$N(f(t) - f(a_i)) = N(f(t) - \varphi_n(t)) < \varepsilon$. On peut donc conclure que :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > m_0(\varepsilon) \Rightarrow N_\infty^{[a, b]}(f - \varphi_n) < \varepsilon$. $\square$

5.2. Théorème

| Toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a, b], F)$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions en escalier.

Démonstration

$f \in \mathcal{CM}([a, b], F)$. Il existe $\sigma = (b_j)_{0 \leq j \leq p}$ une subdivision de $[a, b]$ subordonnée à f . La restriction de f à $]b_{j-1}, b_j[$ admet g_j pour prolongement par continuité sur $[b_{j-1}, b_j]$. Du théorème précédent, on déduit, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'existence d'une suite $(g_{n,j})_n$ de fonctions en escalier sur $\mathbb{R}$ nulle hors de $[b_{j-1}, b_j]$ à valeurs dans F et de $m_j \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n > m_j, \forall x \in]b_{j-1}, b_j[, N(g_j(x) - g_{n,j}(x)) \leq \varepsilon$. (1)

Soit $\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow F$, définie par : $\varphi_n(t) = 0$ si $t \notin [a, b]$

$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi_n(b_j) = f(b_j)$ et $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall t \in]b_{j-1}, b_j[, \varphi_n(t) = g_{n,j}(t)$

$\varphi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, F)$ et si $m(\varepsilon) = \max(m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n > m(\varepsilon)$, pour tout $t \in [a, b]$, il existe $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $t \in [b_{j-1}, b_j]$.

Si $t = b_j$ alors $N(\varphi_n(t) - f(t)) = 0 < \varepsilon$.

Si $t \in]b_{j-1}, b_j[$, alors $N(\varphi_n(t) - f(t)) = N(g_{n,j}(t) - g_j(t)) \leq \varepsilon$ d'après (1). $\square$

5.3. Théorème

Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a, b], F)$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions continues affines par morceaux sur $[a, b]$.

Démonstration

Utilisation du début de la démonstration du théorème 5.1. Soit ψ_n définie par :

$$\forall t \in [a_{k-1}, a_k], \psi_n(t) = \frac{1}{a_k - a_{k-1}} \left[(a_k - t)f(a_{k-1}) + (t - a_{k-1})f(a_k) \right]$$

On note que : $f(t) = \frac{1}{a_k - a_{k-1}} \left[(a_k - t)f(t) + (t - a_{k-1})f(t) \right]$. Donc :

$$N(f(t) - \psi_n(t)) \leq \frac{1}{a_k - a_{k-1}} \left[(a_k - t)N(f(a_{k-1}) - f(t)) + (t - a_{k-1})N(f(a_k) - f(t)) \right]$$

$$\text{Donc : } \forall t \in [a_{k-1}, a_k], N(f(t) - \psi_n(t)) \leq \frac{1}{a_k - a_{k-1}} \left[(a_k - t)\varepsilon + (t - a_{k-1})\varepsilon \right] = \varepsilon.$$

D'où la conclusion car tout $t \in [a, b]$ est dans un $[a_{k-1}, a_k]$. $\square$

5.4. Théorème (d'approximation de Weierstrass)

Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynômes.

Démonstration (non exigible)

Notons qu'il suffit de faire la démonstration pour les fonctions à valeurs réelles. En effet, $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}) \iff (\Re(f), \Im(f)) \in (\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}))^2$. S'il existe des suites de fonctions polynômes $(\lambda_n), (\mu_n)$ convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers $\Re(f)$ et $\Im(f)$, alors la suite de fonctions polynômes (ν_n) définie par $\nu_n = \lambda_n + i\mu_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$, d'après I.3.

• Montrons qu'il existe une suite de fonctions convergeant uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $[-1, +1]$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_0(x) = 0$ et $\forall x \in [-1, 1], f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - f_n^2(x))$.

On montre, par une récurrence immédiate, que toutes les fonctions f_n sont polynomiales à coefficients réels, et paires. Ce qui ramène à l'étude sur $[0, 1]$.

Soit $x \in [0, 1]$. La fonction F définie par $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t + \frac{1}{2}(x^2 - t^2)$ est dérivable et $F'(t) = 1 - t \geq 0$. Donc F est croissante. D'où $F([0, x]) \subset [0, x]$.

Comme $f_{n+1}(x) = F(f_n(x))$, la suite réelle $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. De la croissance de F , on déduit la monotonie de $(f_n(x))_n$ et donc la convergence vers $\ell(x) \in [0, x]$. F étant continue, $\ell(x) = F(\ell(x))$, d'où $\ell^2(x) = x^2$ et $\ell(x) = x$ car $\ell(x) \geq 0$. La suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $\ell : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Montrons par récurrence $(\mathcal{HR}_n) : \forall x \in [0, 1] 0 \leq x - f_n(x) \leq \frac{2x}{2 + nx}$.

$(\mathcal{HR}_0)$ est aisément vérifiée. On a, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$x - f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(x - f_n(x))(2 - x - f_n(x)). \quad (1)$$

Si $(\mathcal{HR}_n)$ est vraie, on a : $0 \leq 2 - x - f_n(x) \leq 2(1 - x) + \frac{2x}{2 + nx} \leq 2 \frac{2 + (n - 1)x}{2 + nx}$.

Donc, pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq x - f_n(x) \leq \frac{2x}{2 + (n + 1)x} \alpha(x)$,

$$\text{où } \alpha(x) = \frac{(2 + (n + 1)x)(2 + (n - 1)x)}{(2 + nx)^2} = \frac{(2 + nx)^2 - x^2}{(2 + nx)^2} \in [0, 1].$$

D'où $(\mathcal{HR}_{n+1})$ et $(\mathcal{HR}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par théorème de récurrence.

Pour tout $x \in]0, 1]$, $\frac{2x}{2 + nx} = \frac{2}{\frac{2}{x} + n} \leq \frac{2}{n + 2}$. Donc $N_{\infty}^{[0, 1]}(\ell - f_n) \leq \frac{2}{n + 2}$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers ℓ sur $[0, 1]$ et donc, par parité, elle converge uniformément vers $\varphi_0 : x \mapsto |x|$ sur $[-1, +1]$.

• Montrons qu'il existe une suite de fonctions convergeant uniformément vers $\varphi_c : t \mapsto |t - c|$ sur $[a, b]$ avec $c \in [a, b]$.

Soit $r = \max(c - a, b - c)$, $r > 0$. Alors $[a, b] \subset [c - r, c + r]$.

$u : x \mapsto c + rx$ est une bijection affine de $[-1, +1]$ sur $[c - r, c + r]$. La bijection réciproque s'écrit $t \mapsto \frac{t - c}{r}$.

Il existe une suite $(P_n)_n$ de fonctions polynomiales à coefficients réels telle que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1(\varepsilon), \forall x \in [-1, +1], |P_n(x) - |x|| \leq \frac{\varepsilon}{r}$$

d'après la première étape. Alors : $\forall x \in [c - r, c + r], \left| P_n\left(\frac{t - c}{r}\right) - \left|\frac{t - c}{r}\right| \right| \leq \frac{\varepsilon}{r}$.

En posant $Q_n(t) = r P_n\left(\frac{t - c}{r}\right)$, $(Q_n)_n$ est une suite de fonctions polynomiales à coefficients réels convergeant uniformément vers $\varphi_c : t \mapsto |t - c|$ sur $[a, b]$.

• Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

D'après III.5.3. il existe $g \in \mathcal{CAM}([a, b], \mathbb{R})$ tel que $N_{\infty}^{[a, b]}(g - f) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'après III.4.2.b), il existe $p \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq p} \in \mathbb{R}^{p+1}$ tels que $g = \sum_{i=0}^p \lambda_i \varphi_{c_i}$.

D'après la seconde étape, il existe une suite $(Q_{n,i})_n$ de fonctions polynomiales à coefficients réels qui converge uniformément vers φ_{c_i} sur $[a, b]$. Si $\Lambda = \max_{0 \leq i \leq p} |\lambda_i| + 1$,

$$\exists m(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket, \forall n \geq m(\varepsilon), N_{\infty}^{[a, b]}(Q_{n,i} - \varphi_{c_i}) < \frac{\varepsilon}{2(p + 1)\Lambda}.$$

$R_n = \sum_{i=0}^p \lambda_i Q_{n,i}$ est une fonction polynomiale et : $\forall n \geq m(\varepsilon), N_{\infty}^{[a, b]}(R_n - g) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'où : $N_{\infty}^{[a, b]}(R_n - f) \leq \varepsilon$ si $n \geq m(\varepsilon)$ et la conclusion du théorème. $\square$

IV. Séries de fonctions

A. Divers modes de convergence

1. Définitions

1.1. Définition

On appelle *série de fonctions*, une série de $\mathcal{F}(A, F)$ — on la note $\sum u_n$ — où $u_n : A \rightarrow F, x \mapsto u_n(x)$. On note $S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$. À la série $\sum u_n$ est associée la suite de fonctions (S_n) .

Exemples

- a. $u_n(x) = \frac{\exp(-nx^2)}{n^2}, x \in \mathbb{R}, n \geq 1,$ b. $u_n(x) = \frac{1}{n^x}, x \in \mathbb{R}, n \geq 1,$
 c. $u_n = \frac{1}{n+1} \chi_{[n, n+1[}, x \in A = \mathbb{R}_+,$ d. $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}, x \in \mathbb{R}.$

1.2. Définition (convergence simple)

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur A si la série $\sum u_n(x)$ de vecteurs de F converge pour tout $x \in A$. On appelle alors *somme de la série de fonctions*, l'application $S \in \mathcal{F}(A, F)$ telle que pour tout $x \in A, S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$. On note alors $R_n(x) = (S - S_n)(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$.

Exemples

- a. $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}, 0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$.
 b. $\sum u_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ cf. séries de Riemann.

La somme de cette série est la **fonction Zêta de Riemann**. On note

$$\forall x \in]1, +\infty[, \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

- c. $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ car : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists p \in \mathbb{N}, p = \lfloor x \rfloor$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, n > p \Rightarrow S_n(x) = u_p(x)$.

- d. $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$. En effet $u_n(x)$ est défini si $x + n \neq 0$, donc si $x \notin \mathbb{Z}^-$. Inversement si $x \notin \mathbb{Z}^-, u_n(x)$ est le terme général d'une série alternée qui converge avec le théorème spécial si $n \geq N = \lfloor -x \rfloor + 1$.

1.3. Définition

La série de fonctions $\sum u_n$ **converge uniformément** sur une partie B de A si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) La suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur B vers S .
- (ii) La suite de fonctions $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe et converge uniformément sur B vers la fonction nulle sur B .

1.4. Définition

La série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement** sur $B \subset A$ si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) La série à termes réels positifs $\sum N_\infty^B(u_n)$ converge,
- (ii) Il existe une série $\sum \alpha_n$ à termes réels positifs (et indépendants de x), convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in B, N(u_n(x)) \leq \alpha_n$.

2. Comparaison des modes de convergence

2.1. Théorème

- 1. Une série normalement convergente sur A est uniformément convergente sur A . La réciproque est fausse.
- 2. Une série uniformément convergente sur A , est uniformément convergente sur tout compact inclus dans A . La réciproque est fausse.
- 3. Une série uniformément convergente sur A , convergente simplement sur A . La réciproque est fausse.

Démonstration

1. Si $\sum u_n$ converge normalement sur A , il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq p, \forall x \in A, N(u_n(x)) \leq N_\infty(u_n)$. D'où l'existence de $R_n(x)$ pour $x \in A$. Donc, pour tout $n \geq p$ et tout $x \in A, N(R_n(x)) \leq r_n$, où r_n est le reste de la série réelle convergente de terme général $N_\infty(u_n)$. Comme r_n est indépendant de x et $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur A .

2. et 3. sont conséquences de théorèmes analogues sur les suites de fonctions.

Les exercices suivants constitueront des contre-exemples pour les réciproques. $\square$

2.2. Exemples

Étude des exemples qui suivent la définition IV.A.1.1.

a. $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément, donc simplement sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $\alpha > 1$. $\forall x \in [\alpha, +\infty[, 0 < u_n(x) \leq \frac{1}{n^\alpha}$. $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[\alpha, +\infty[$, donc uniformément sur tout segment de $]1, +\infty[$ mais

pas sur $]1, +\infty[$. En effet : $\forall x > 1, \forall n \geq 1, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^x} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^x} > \frac{n}{(2n)^x}$.

Donc : $\forall x > 1, \forall n \geq 1, R_n(x) > \varphi(x) = 2^{-x}n^{1-x}$.

φ étant décroissante sur $]1, +\infty[$, $\sup_{x \in]1, +\infty[} \varphi(x) = \frac{1}{2}$. Donc $\sup_{x \in]1, +\infty[} R_n(x) \geq \frac{1}{2}$.

c. $N_\infty^A(u_n) = \frac{1}{n+1}$. Donc $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur A , mais converge normalement sur tout segment de A car $R_n(x) = 0$ à partir d'un certain rang indépendant de x . Elle converge uniformément sur A car $0 \leq R_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$.

d. $N_\infty^A(u_n) = \sup_{x \in A} \frac{1}{|n+x|}$. Donc $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur A ici $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$. $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$, car, en tant que série alternée convergeant avec le théorème spécial, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$. Donc (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrons que $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$.

Première méthode : si $p \in \mathbb{Z}_-^*$, $x \in]-p, -p+1[\Rightarrow \forall n > p, |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1-p}$.

Deuxième méthode : soit $[a, b]$ un segment inclus dans A . Fixons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $[a + n_0, b + n_0] \subset \mathbb{R}_+$. Si $x \in [a, b]$, $\left(\frac{1}{x+n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers 0 en décroissant.

Du théorème spécial des séries alternées on déduit la convergence de la série réelle $\sum u_n(x)$ et pour tout $n \geq n_0$, $\left|\sum_{k=n}^{\infty} u_k(x)\right| \leq |u_n(x)| \leq \frac{1}{n+a}$ qui est indépendant de x et tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, donc $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

B. Propriétés de la somme

1. Continuité

1.1. Théorème

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{C}(A, F)$ qui converge uniformément sur A (resp. sur tout compact inclus dans A). Sa somme est continue sur A .

Démonstration

On applique à (S_n) le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions. $\square$

1.2. Exemple

La fonction ζ est continue sur $]1, +\infty[$, d'après l'exemple IV.A.2.2.b).

2. Limite en un point

Théorème de la double limite

Soient $\sum u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{F}(A, F)$ qui converge uniformément sur A et a un point adhérent à A (si $E = \mathbb{R}$, a peut être $+\infty$ ou $-\infty$).

S'il existe $v_n \in F$ tel que $v_n = \lim_{x \rightarrow a} u_n(x)$, alors $\sum v_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right).$$

Démonstration

C'est le théorème de la double limite appliqué à la suite de fonctions (S_n) . $\square$

Applications

• $\lim_{+\infty} \zeta = 1$. En effet, pour $n \geq 1$, $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$. Donc $v_n = 0$ si $n \geq 2$ et $v_1 = 1$. Or la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[2, +\infty[$, d'où le résultat.

• Prouvons une seconde fois que $\sum f_n$ où $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$. Si c'était le cas, comme $\frac{1}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{n}$, la série $\sum \frac{1}{n}$ serait convergente.

EXERCICES

1. Étudier la convergence uniforme sur $[0, \pi]$ puis sur $]0, \pi]$ de la suite de fonctions (f_n) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{\sin(x)}{x(1+nx)}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 1$.

2. Étudier la convergence simple (*resp.* uniforme) des suites de fonctions définies par $f_n(x), x \in I$:

a. $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$ si $x \in]0, +\infty[$ et $f_n(0) = 0$.

b. $f_n(x) = \frac{1}{\sin^2(x) + (1+x^2)^n}$ et $I = \mathbb{R}$ ou $(I =]a, b[$ tel que $0 \notin I$).

c. $f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$ et $I = [0, 1]$.

3. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1}$.

4. Montrer que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

5. Étudier les séries de fonctions suivantes : (convergence simple, uniforme, normale sur...)

a. $u_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{n + n^2 x^2}, n \geq 1$. Déterminer un équivalent de sa somme en 0 et en $+\infty$.

b. $u_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right), n \geq 1$. Limite de la somme en $+\infty$.

c. $u_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$.

6. a. Montrer à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange que la série de fonctions $\sum f_n$, où f_n est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ et a pour somme exp.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{X^k}{k!}$ admet un et un seul zéro dans $\mathbb{R}_+^*$; on le note α_n . Montrer que $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

7. Soient K une partie compacte de l'espace vectoriel normé (E, N) et A une partie fermée de l'espace vectoriel normé (F, P) . Montrer que l'ensemble noté $W = \{f \in \mathcal{C}(K, F) \mid f(K) \cap A \neq \emptyset\}$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}(K, F), N_\infty)$.

8. Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}([a, b], E)$ toutes k -lipschitziennes qui converge simplement vers f sur $[a, b]$. Montrer que f est k -lipschitzienne et que la convergence est uniforme. On pourra utiliser une subdivision de $[a, b]$.

9. a. Étudier la série de fonctions $\sum u_n$ où $u_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k}$.

Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

b. Montrer que sa somme S est définie, continue et monotone sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner la relation liant $S(x)$ et $S(x+1)$.

c. Déterminer un équivalent en 0 et en $+\infty$ de S .

d. Montrer que : $\forall x > 0, S(x) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)n!}$.

10. Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. On pose, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$, $u_n(z) = \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}$. Étudier la continuité de la somme de la série de fonctions $\sum u_n$ et donner une expression simple de cette somme.

11. Théorème de Mertens.

Montrer que si $\sum u_n$ est absolument convergente et $\sum v_n$ convergente, leur produit de Cauchy est convergent et de somme $W = UV$

On pourra noter $U_n = \sum_{k=0}^n u_k, V_n = \sum_{k=0}^n v_k$ et $W_n = \sum_{k=0}^n w_k$ où $w_k = \sum_{p=0}^k u_p v_{k-p}$.

$$W_n = u_0 V_n + u_1 V_{n-1} + \cdots + u_n V_0 = \sum_{k=0}^n u_k V_{n-k}.$$

SOLUTIONS DES EXERCICES

1. Tout d'abord $f_n(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{1+nx}$ et donc f_n est continue en 0.

Si $x \in]0, \pi]$, $f_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sin(x)}{nx^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ce qui montre que (f_n) converge simplement sur $[0, \pi]$ vers $\chi_{\{0\}}$.

- Si (f_n) converge uniformément sur $[0, \pi]$ alors $\chi_{\{0\}}$ est continue en 0 : absurde.
- Si (f_n) converge uniformément sur $]0, \pi]$ alors le théorème de double limite appliqué à la suite des restrictions des f_n à $]0, \pi]$ montre que la fonction nulle admet 1 pour limite en 0 : absurde.

2. a. Si $x \in \left]0, \frac{1}{n}\right]$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ car, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \leq |u|$.

Si $x \in \left]\frac{1}{n}, +\infty\right[$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ car, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \leq 1$.

Donc : $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. D'où la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < f_n(x) \leq (1+x^2)^{-n}$. Si $x \neq 0$, on a $(1+x^2) > 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Les f_n étant toutes continues sur $\mathbb{R}$ et pas f , la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ d'après la remarque qui suit I.2.4.

Les f_n étant paires, soit $I \subset]0, +\infty[$. Si $I \subset]a, b[$ et $0 < a < b \leq +\infty$ alors

$\forall x \in I$, $0 < f_n(x) \leq \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+a^2)^n} = \alpha_n$. Comme α_n est indépendant de x et de limite nulle, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur I .

Si $I =]0, b]$ ou $I =]0, b[$, alors, comme $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} \neq 0$, la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur I d'après I.2.5.

c. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur I .

Pour étudier la convergence uniforme, posons $t = x^{2^n}$. Alors $f_n(x) = g_n(t)$ où $g_n(t) = 4^n(t - t^2)$. Pour étudier les variations de la fonction g_n , on peut dériver (méthode classique) ou noter que : $t - t^2 = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2$. D'où $\sup_{x \in I} |f_n(x)| = 4^{n-1}$

qui ne tend pas vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc (f_n) ne converge pas uniformément pas sur I .

3. Soit $u_k(n) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n\alpha}$ si $k \leq n$ et 0 si $k > n$.

Pour k fixé, $u_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-k\alpha}$. D'autre part, on déduit de la convexité de $\exp$:

$$1 + t \leq e^t \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \text{ Donc : } \forall k \leq n, 0 \leq 1 - \frac{k}{n} \leq \exp\left(-\frac{k}{n}\right).$$

D'où : $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq u_k(n) \leq e^{-k\alpha}$.

$e^{-k\alpha}$ étant indépendant de n et la série géométrique $\sum e^{-k\alpha}$ étant convergente car $e^{-\alpha} \in]0, 1[$, la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement *a fortiori* uniformément sur $\mathbb{N}$. On déduit du théorème de la double limite que :

$$\sum_{k=0}^n u_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\alpha} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha} - 1}.$$

4. $\varphi : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^{-x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$, donc

$$\forall (x, n) \in [1, +\infty[\times \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}.$$

$$\text{Donc : } \forall x \in]1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \quad (*).$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta(x); \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta(x) - 1 \text{ et } \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1}.$$

Par passage à la limite dans (*), on a : $\zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x)$ pour $x > 1$.

Donc : $\forall x \in]1, +\infty[, 1 \leq (x-1)\zeta(x) \leq x$.

Du théorème d'encadrement on déduit : $(x-1)\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 1$.

5. a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n : x \mapsto \frac{1}{n+x^2n^2}$ est définie continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Notons que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$ puisque :

$$\sup_{x \in]0, +\infty[} |u_n(x)| \geq u_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \text{ qui est le terme général d'une série divergente.}$$

Soit $a > 0$. Pour tout $(x, n) \in [a, +\infty[\times \mathbb{N}^*, 0 < u_n(x) \leq \frac{1}{n^2a^2}$, d'où la convergence normale de $\sum u_n$ sur $[a, +\infty[$ *a fortiori* la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ et donc la convergence uniforme sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{t+x^2t^2}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Comme $u_n(x) = f(n)$, on a, pour $x \in]0, +\infty[$ et $n \geq 2$:

$$\int_n^{n+1} f \leq u_n(x) \leq \int_{n-1}^n f. \text{ En procédant comme dans le cours, pour } \zeta \text{ on obtient :}$$

$$\int_2^{+\infty} f \leq \sum_{n=2}^{\infty} u_n(x) \leq \int_1^{+\infty} f. \text{ Comme } \frac{1}{X+x^2X^2} = \frac{1}{X} - \frac{x^2}{1+x^2X}, \text{ cette}$$

$$\text{inégalité donne : } \forall x > 0, \frac{1}{1+x^2} + \ln\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) \leq S(x) \leq \frac{1}{1+x^2} + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Du cas particulier de la fonction $\ln$, on déduit que : $S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x^2)$.

Pour $n \geq 1$, on a : $u_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2n^2}$ et $\frac{1}{x^2n^2} - u_n(x) = \frac{1}{n^2x^2(1+nx^2)}$ si $x > 0$.

Donc, pour $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$, $0 < \frac{1}{x^2 n^2} - u_n(x) \leq \frac{1}{n^3 x^4}$. Par sommation, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < \frac{\zeta(2)}{x^2} - S(x) \leq \frac{\zeta(3)}{x^4}$. D'où $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\zeta(2)}{x^2}$.

b. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sum u_n(t)$ est une série alternée qui converge avec le théorème spécial. Autrement dit $(|u_n(t)|)$ décroît et tend vers 0. Du théorème spécial, avec des notations classiques on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |R_n(t)| \leq |u_{n+1}(t)| = \ln \left(1 + \frac{t^2}{(n+1)(1+t^2)} \right) \leq \ln \left(1 + \frac{1}{(n+1)} \right)$$

car $0 \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$. Donc la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ ie. la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Or, pour n fixé, $u_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$, le théorème de la double limite nous permet de conclure que la série de terme général $(-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ converge

$$\text{et que } S(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ell. \text{ Posons } s_{2p} = \sum_{n=1}^{2p} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$\text{Alors } s_{2p} = \ln \left[\frac{3^2 5^2 \dots (2p-1)^2 (2p+1)}{2^2 4^2 \dots (2p-2)^2 (2p)^2} \right] \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \ln \left(\frac{2}{\pi} \right) \text{ cf. formule de Stirling.}$$

Donc $\ell = \ln \left(\frac{2}{\pi} \right)$ car une suite convergente a même limite que ses suites extraites.

c. Défini si $x > \frac{1}{n}$, $u_n(x)$ tend vers 0 et est du signe de $(-1)^n$ si $n \geq n_1(x)$. Abandonnons l'espoir d'utiliser directement le théorème spécial des séries alternées.

Comme $\frac{1}{1+u} = 1 - \frac{u}{1+u}$ pour $u \neq -1$, et $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx} \left(1 + \frac{(-1)^n}{nx} \right)^{-1}$, on a

$$\forall n \geq 1, u_n = v_n - w_n \text{ où } v_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx} \text{ et } w_n(x) = \frac{1}{nx(nx + (-1)^n)} \text{ si } x > 0.$$

$$\text{Soit } a > 0 \text{ et } n_0 = E \left[\frac{1}{a} \right] + 1. \forall (x, n) \in [a, +\infty[\times [n_0, \infty[, |w_n(x)| \leq \frac{1}{na(na-1)}.$$

Donc $\sum w_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

La série réelle $\sum v_n(x)$ converge avec le théorème spécial des séries alternées. On a

$$\text{donc : } \left| \sum_{k=n}^{\infty} v_k(x) \right| \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{na} \text{ si } x \geq a. \text{ D'où la convergence uniforme de la série}$$

de fonctions $\sum v_n$ sur $[a, +\infty[$. On peut alors conclure que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ *a fortiori* converge uniformément sur tout compact de $]0, +\infty[$ et donc simplement sur $]0, +\infty[$.

6. a. Soit $A > 0$, il suffit de montrer la convergence uniforme sur $[-A, A]$.

exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $N_\infty^{[-A, A]}(\exp^{(n+1)}) = e^A$, l'inégalité de Taylor

$$\text{Lagrange montre que, si } x \in [-A, A], \left| e^x - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| \leq e^A \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^A \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}$$

terme général d'une suite numérique convergeant vers 0, d'où la convergence uniforme sur $[-A, A]$.

b. On raisonne par récurrence sur n , $P_0 = 1 - X$ admet $\alpha_0 = 1$ pour unique zéro dans $\mathbb{R}_+^*$, $P_0(x) > 0$ si $x \in [0, \alpha_0[$, $P_0(x) < 0$ si $x > \alpha_0$.

Supposons l'existence de α_k dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que $P_k(x) > 0$ si $x \in [0, \alpha_k[$, $P_k(x) < 0$ si $x > \alpha_k$. Alors $P_{k+1}'' = P_k$, $P_{k+1}'(\alpha_k) = -P_k(\alpha_k) - \frac{\alpha_k^{2k}}{(2k)!} = -\frac{\alpha_k^{2k}}{(2k)!} < 0$, d'où le

tableau de variations

	0	α_k	$+\infty$
P_k	1	+	0 - $-\infty$
P_{k+1}'	-1	$\nearrow$	- $\searrow$ - $-\infty$

P_{k+1} réalise une bijection continue strictement décroissante entre $\mathbb{R}_+$ et $] -\infty, 1]$ d'où l'existence d'un réel strictement positif α_{k+1} tel que $P_{k+1}(x) > 0$ si $x \in [0, \alpha_{k+1}[$, $P_{k+1}(x) < 0$ si $x > \alpha_{k+1}$, ce qui termine la récurrence.

Si (α_n) admet une sous-suite convergente $(\alpha_{\varphi(n)})$, notons ℓ sa limite.

Comme $(P_{\varphi(n)})$ converge uniformément sur le compact $\{\alpha_{\varphi(n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ vers $x \mapsto e^{-x}$ et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{\varphi(n)}(\alpha_{\varphi(n)}) = 0$, on a $e^{-\ell} = 0$, ce qui est absurde. (α_n) n'admet aucune sous-suite convergente donc aucune sous-suite bornée. Si $A \in \mathbb{R}_+$, $\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha_n \leq A\}$ est fini et donc, à partir d'un certain rang N_0 , $\alpha_n > A$, ce qui montre que $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

7. Soit (f_n) une suite convergente d'éléments de W , notons f sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ choisissons un élément x_n dans K tel que $f(x_n) \in A$. Soit $(x_{\varphi(n)})$ une suite extraite convergente, notons x sa limite. Comme K est fermé, $x \in K$. $(f_{\varphi(n)})$ converge vers f dans $(\mathcal{C}(K, F), N_\infty)$ donc $(f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(x)$ et est à valeurs dans A fermé, donc $f(x) \in A$, ce qui montre que $f \in W$ et que W est une partie fermée de $(\mathcal{C}(K, F), N_\infty)$.

8. Si $(x, y) \in [a, b]^2$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $N(f_n(x) - f_n(y)) \leq k|x - y|$.

Par prolongement des inégalités, compte tenu de la continuité de N , on a :

$N(f(x) - f(y)) \leq k|x - y|$, d'où f est k -lipschitzienne sur $[a, b]$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Soit $p \in \mathbb{N}$, tel que $2k \frac{b-a}{p} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$, posons

$x_i = a + i \frac{b-a}{p}$ et $n_i \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_i$, alors $N(f_n(x_i) - f(x_i)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $x \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$ (un tel i existe).

Supposons $n \geq \max_{0 \leq i \leq p} (n_i)$, alors :

$N(f_n(x) - f(x)) \leq N(f_n(x) - f_n(x_i)) + N(f_n(x_i) - f(x_i)) + N(f(x_i) - f(x))$

D'où : $N(f_n(x) - f(x)) \leq 2k|x - x_i| + \frac{\varepsilon}{2} \leq 2k \frac{b-a}{p} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Ce qui prouve la convergence uniforme et éclaire le choix du pas de la subdivision.

9. a. $\forall x \in]0, +\infty[$, $0 < u_n(x) \leq \frac{1}{x n!}$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $0 < u_n(x) \leq \frac{1}{a n!}$ qui est indépendant de x et le terme général d'une série à termes positifs convergente (de somme $e a^{-1}$).

Donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement *a fortiori* uniformément sur $]a, +\infty[$, uniformément sur tout compact de $]0, +\infty[$ et simplement sur $]0, +\infty[$.

Comme $\frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{(n+1)!} + 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{(n+1)!} + n \right) \leq \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = 1$, on a :

$\sum_{k=n}^{\infty} u_k \left(\frac{1}{(n+1)!} \right) \geq u_n \left(\frac{1}{(n+1)!} \right) \geq 1$. La suite de fonctions $(R_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$. Donc $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

b. Les fonctions u_n étant continues sur $]0, +\infty[$, la somme S de la série de fonctions est élément de $\mathcal{C}(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ d'après II.2.4. et un résultat de a.

Les fonctions u_n étant décroissantes sur $]0, +\infty[$, S est décroissante en tant que limite simple d'une suite de fonctions décroissantes (ici $(S_n)_n$ où $S_n = u_0 + \cdots + u_n$)

$u_n(x+1) = xu_{n+1}(x)$. Donc $S(x+1) = x[S(x) - u_0(x)] = xS(x) - 1$.

c. S étant continue en 1, $S(1) = \lim_{x \rightarrow 0} S(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} = e - 1$.

Pour tout $x > 0$, $xS(x) = S(x+1) + 1$. Donc : $xS(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} e$ i.e. $S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{e}{x}$.

Pour tout $x > 0$, $S(x) \geq u_0(x) = \frac{1}{x}$. D'autre part, de la décroissance de S , on déduit que pour $x > 0$, $xS(x) - 1 = S(x+1) \leq S(x)$. Donc, pour tout $x > 1$, $\frac{1}{x} \leq S(x) \leq \frac{1}{x-1}$. D'où $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

d. La fraction rationnelle $u_n(X) = \frac{1}{X(X+1) \cdots (X+n)}$ ayant tous ses pôles réels

et simples, on a : $u_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{X+k}$ où $a_k = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}$.

Donc, pour tout $x > 0$, $u_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(x+k)} = (v \star w)(n)$ où $w_n = \frac{1}{n!}$ et

$v_n = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$. Les deux séries $\sum |v_n|$ et $\sum |w_n|$ convergent car $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(w_n)$

et $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = e$. Donc leur produit de Cauchy $\sum u_n(x)$ converge et sa somme est :

$$S(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \right) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)n!}.$$

10. Comme $u_n(z^{-1}) = -u_n(z)$, on fera l'étude sur $B(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

Soit $a \in]0, 1[$. $|z| \leq a \Rightarrow |1 - z^{2^{n+1}}| \geq 1 - |z|^{2^{n+1}} \geq 1 - a^{2^{n+1}} \geq 1 - a$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z| \leq a \Rightarrow |u_n(z)| \leq \frac{a^n}{1-a}$.

De la convergence de la série géométrique $\sum a^n$, on déduit que $\sum u_n$ converge normalement sur $B_f(0, a)$ *a fortiori* uniformément sur $B_f(0, a)$. Donc $\sum u_n$ converge uniformément sur tout compact de $B(0, 1)$. Les fonctions u_n étant continues sur $B(0, 1)$, la fonction S est continue sur $B(0, 1)$ d'après II.2.4.

$u_n(z) = \varphi(z^{2^n})$ où $\varphi(t) = \frac{t}{1-t^2} = \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t}$.

$$\text{Donc : } S_n(z) = \sum_{k=0}^n u_k(z) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{1-z^{2^k}} - \frac{1}{1-z^{2^{k+1}}} \right) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z^{2^{n+1}}}.$$

$$\text{Donc : } S(z) = \frac{z}{1-z} \text{ si } |z| < 1.$$

11. Notons $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$ et $W_n = \sum_{k=0}^n w_k$ où $w_k = \sum_{p=0}^k u_p v_{k-p}$.

$$W_n = u_0 V_n + u_1 V_{n-1} + \cdots + u_n V_0 = \sum_{k=0}^n u_k V_{n-k}.$$

Considérons la suite de fonctions $(f_k)_{k \geq 0}$ définie par $f_k(n) = \begin{cases} u_k V_{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$

On a alors $W_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(n)$ et l'on applique le théorème de la double limite.

Comme $\sum v_n$ converge et est de somme V , $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $|V_p| \leq M$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_k(n)| \leq M|u_k|$.

Comme $\sum u_n$ converge absolument, la série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement sur $\mathbb{N}$. Comme, pour k fixé, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_k(n) = u_k V$, on déduit du théorème de la

double limite : $\sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_k(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(n)$ i.e. $UV = W$.

TRAVAUX DIRIGÉS

• Théorèmes de Dini (MP*)

A. Premier théorème

K désigne une partie compacte d'un espace vectoriel normé (E, N) .

1. Soit (f_n) une suite d'applications continues de K dans un espace vectoriel normé (F, P) , convergeant simplement sur K vers une fonction continue et telle que, pour tout $x \in K$, la suite de terme général $P[f_n(x) - f(x)]$ est décroissante. Montrer que la convergence est uniforme sur K :

- en raisonnant par l'absurde à l'aide de la définition de la compacité,
- en montrant que si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de K , alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

2. Variantes

a. Si une suite monotone (f_n) de fonctions continues sur K et à valeurs dans $\mathbb{R}$ converge simplement sur K vers une fonction continue, montrer que la convergence est uniforme.

b. Si $\sum u_n$ est une série de fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ qui converge simplement sur K , montrer que la convergence est uniforme sur K si, et seulement si, la somme est continue.

3. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \chi_{[0, n]}(x) \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}_+.$$

4. Montrer que la suite de fonctions polynomiales définies par $P_0(x) = 0$ et $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2} [x^2 - P_n^2(x)]$ pour $n \geq 0$, converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers $f : x \mapsto |x|$.

B. Deuxième théorème

1. Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes définies sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles bien sûr). Si l'on suppose que (f_n) converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction continue, montrer que la convergence est uniforme.

2. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions convexes sur I qui converge simplement sur I vers f continue. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact.

Solution

A. 1. a. Si la convergence n'est pas uniforme il existe $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $p_n \geq n$ vérifiant : $N_\infty(f_{p_n} - f) \geq \varepsilon_0$.

Choisissons ε_0 et construisons φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_\infty(f_{\varphi(n)} - f) \geq \varepsilon_0$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(f_{\varphi(n)} - f)$ est continue sur K à valeurs réelles, elle admet un minimum et l'on peut choisir x_n dans K tel que $P[f_{\varphi(n)}(x_n) - f(x_n)] \geq \varepsilon_0$.

Extrayons $(x_{\psi(n)})$ convergente et notons x sa limite, $x \in K$ fermé.

Si $p \geq n$ alors $\varphi \circ \psi(p) \geq \varphi \circ \psi(n)$ et donc, par décroissance de la suite de terme général $P[f_k(x_{\psi(p)}) - f(x_{\psi(p)})]$, on a :

$$P[f_{\varphi \circ \psi(n)}(x_{\psi(p)}) - f(x_{\psi(p)})] \geq P[f_{\varphi \circ \psi(p)}(x_{\psi(p)}) - f(x_{\psi(p)})] \geq \varepsilon_0$$

Quand $p \rightarrow \infty$, par continuité de P , $P[f_{\varphi \circ \psi(n)}(x) - f(x)] \geq \varepsilon_0$, puis, quand $n \rightarrow \infty$, toujours par continuité de P , $0 = P[f(x) - f(x)] \geq \varepsilon_0 > 0$, ce qui est absurde.

b. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $F_n = \{x \in K \mid P[f_n(x) - f(x)] \geq \varepsilon\}$, F_n est fermé comme image réciproque par l'application continue $P[f_n - f]$ de la partie $[\varepsilon, +\infty[$ qui est fermée dans $\mathbb{R}$.

La décroissance, pour tout $x \in K$, de la suite de terme général $P[f_n(x) - f(x)]$ prouve que (F_n) est décroissante pour l'inclusion et la convergence simple sur K prouve que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$.

Montrons que, à partir d'un certain rang n_0 on a $F_n = \emptyset$ i.e.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in K$, $P[f_n(x) - f(x)] < \varepsilon$, ce qui établira la convergence uniforme.

$F_n \neq \emptyset$. Donc il existe $x_n \in F_n$; d'où une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$. Comme K est compact, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in K$. On a $\ell \in F_n$ pour tout n . En effet, soit $p \in \mathbb{N}$, pour $n \geq p$, on a $\varphi(n) \geq n \geq p$. Comme la suite de parties (F_n) est décroissante, $x_{\varphi(n)} \in F_p$, ceci pour tout $n \geq p$. Donc $\ell \in \overline{F_p} = F_p$ car F_p est fermé. Donc $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

2. a. En notant f la limite simple de (f_n) et en munissant $\mathbb{R}$ de la norme $|\cdot|$, pour tout x dans K , la suite de terme général $|f_n(x) - f(x)|$ est décroissante car $(f_n(x))$ converge de façon monotone vers $f(x)$, la question 1. s'applique.

b. Le cours montre le sens direct et la question précédente la réciproque car la suite de fonctions continues sur K de terme général $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est croissante.

3. (f_n) est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.

Si $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq x$ on a $\ln[f_n(x)] = n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -x$ et donc, par continuité de $\exp$ on a : $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-x} = \varphi(x)$. On sait que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Montrons la croissance de (f_n) . Soit $x \in \mathbb{R}_+$, envisageons plusieurs cas :

- si $x > n$ alors $f_{n+1}(x) - f_n(x) = f_{n+1}(x) \geq 0$,
- sinon $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est du signe de $g_n(x) = (n+1) \ln\left(1 - \frac{x}{n+1}\right) - n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$,
 g_n est dérivable sur $[0, n]$ avec $g'_n(x) = \frac{x}{(n-x)(n+1-x)} \geq 0$ et $g_n(0) = 0$, donc $g_n \geq 0$ sur $[0, n]$.

Cela prouve la croissance de (f_n) mais on ne peut pas directement utiliser le théorème de Dini car $\mathbb{R}_+$ n'est pas compact dans $\mathbb{R}$.

En revanche, par croissance, pour $x \in \mathbb{R}_+$ de $(f_n(x))$, on a $0 \leq e^{-x} - f_n(x) \leq e^{-x}$. Si $\varepsilon \in]0, 1[$ on pose $A = -\ln(\varepsilon)$ et l'on utilise la convergence uniforme de (f_n) vers φ sur le compact $[0, A]$ en choisissant n_0 à partir duquel $N_\infty^{[0, A]}(\varphi - f_n) \leq \varepsilon$. Comme, si $x \in [0, A]$, $0 \leq \varphi(x) - f_n(x) \leq e^{-x} \leq e^{-A} = \varepsilon$, on a, pour $n \geq n_0$, $N_\infty^{\mathbb{R}_+}(\varphi - f_n) \leq \varepsilon$ d'où la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de (f_n) .

4. La démonstration du théorème de Weierstrass donnée dans le cours montre que (P_n) est une suite croissante qui converge simplement vers f sur $[-1, 1]$. Comme f est continue, le théorème de Dini permet de s'affranchir de la preuve de la convergence uniforme.

B. 1. La croissance étant conservée par limite simple, f est croissante sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, le théorème de Heine assure l'uniforme continuité de f sur $[a, b]$; soit $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $(x, x') \in [a, b]^2$, $(|x - x'| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon)$.

Posons $p = \left\lfloor \frac{b-a}{\eta} \right\rfloor + 1$, pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $x_k = a + k \frac{b-a}{\eta}$ et $x_p = b$.

Enfin soit n_0 un entier tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq n_0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, |f_n(x_k) - f(x_k)| \leq \varepsilon)$.

Si $n \geq n_0$ et $x \in [a, b]$, choisissons k dans $\llbracket 0, p \rrbracket$ tel que $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

Par monotonie on a : $f_n(x_k) - f(x_{k+1}) \leq f_n(x) - f(x) \leq f_n(x_{k+1}) - f(x_k)$.

Or $|f_n(x_k) - f(x_{k+1})| \leq |f_n(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_{k+1})| \leq 2\varepsilon$ car on a à la fois $|x_k - x_{k+1}| \leq \eta$ et $n \geq n_0$. De même $|f_n(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq 2\varepsilon$ d'où, par encadrement, $|f_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ et le résultat.

2. Il suffit de montrer la convergence uniforme sur un compact de la forme $[a, b]$. Fixons α dans $I \cap]-\infty, a[$ et considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction p_n définie sur $[a, b]$ par $p_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(\alpha)}{x - \alpha}$, p_n est croissante par convexité de f_n et (p_n)

converge simplement sur $[a, b]$ vers $p : x \mapsto \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ continue, la convergence est donc uniforme.

Or, si $x \in [a, b]$, $|f_n(x) - f(x)| = |x - \alpha| \times |p_n(x) - p(x)| \leq (b - \alpha) N_\infty^{[a, b]}(p_n - p)$ terme général d'une suite numérique qui converge vers 0, donc (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$.

Remarque : la convexité étant conservée par passage à la limite simple, I étant un intervalle ouvert, l'hypothèse de continuité de f est superflue car toute fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue.

• Un produit infini

Partie I

Soit le polynôme $Q_n(X) = (1 + X)^{2n} - (1 - X)^{2n}$. On note h l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{t}{\operatorname{sh}(t)}$ si $t \neq 0$ et 1 si $t = 0$.

1. Préciser le degré de Q_n et le coefficient dominant. Décomposer Q_n en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$. En déduire la valeur de $\prod_{p=1}^{n-1} \tan^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)$ si $n \geq 2$.

2. Montrer que $h(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{p=1}^{n-1} \left(1 + \frac{t^2}{4n^2 \tan^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}\right)^{-1}$.

3. a. Montrer que la série $\left(\sum \ln\left(1 + \frac{t^2}{(p\pi)^2}\right)\right)_{p \geq 1}$ est convergente.

b. Montrer que $\ln(h(t)) = -\sum_{p=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{t^2}{(p\pi)^2}\right)$.

On posera $u_p(n) = \ln\left(1 + \frac{t^2}{4n^2 \tan^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}\right)$ si $p < n$ et $u_p(n) = 0$ si $p \geq n$.

c. En déduire que $h(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{p=1}^{n-1} \left[1 + \frac{t^2}{(p\pi)^2}\right]^{-1}$.

Partie II

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle :

$R_n(X) = \prod_{p=1}^{n-1} \frac{(p\pi)^2}{X + (p\pi)^2}$. En déduire que : $\sum_{p=1}^{n-1} 2(-1)^{p-1} \frac{\binom{n-1}{p}}{\binom{n-1+p}{p}} = 1$.

2. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n-1}{p}}{\binom{n-1+p}{p}} = 1$ pour $p \in \mathbb{N}$. En déduire que :

$$h(t) = 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{t^2}{t^2 + (p\pi)^2}.$$

Partie III

1. Montrer que : $\forall t \in]-\pi, \pi[, \forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{t^2}{t^2 + (p\pi)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{2n+2}$. On déterminera α_n .

2. Soit, pour $a > 0$, $S_a = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^a}$. Montrer que $|S_a| < 1$. En déduire

pour $|t| < \pi$, $h(t) = 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{S_{2n+2}}{\pi^{2n+2}} t^{2n+2}$.

Solution

1. Le terme de plus haut degré de Q_n est : $4nX^{2n-1}$; d'où $\deg(Q_n) = 2n - 1$.
 $Q_n(x) = 0 \iff (1+x)^{2n} = (1-x)^{2n} \iff 1+x = (1-x)e^{\frac{ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$.
 Donc $Q_n(x) = 0 \iff x(1+e^{\frac{ik\pi}{n}}) = e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1, k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$.
 $e^{\frac{ik\pi}{n}} = -1 \iff k = n$ si $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$. Donc :

$$Q_n(x) = 0 \iff x = i \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = x_k, k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket \setminus \{n\}.$$

Comme $x_{2n-k} = \overline{x_k}$, les racines de Q_n sont $0, x_1, \dots, x_{n-1}, \overline{x_{n-1}}, \dots, \overline{x_1}$.

Comme $(X - x_p)(X - \overline{x_p}) = (X - iy_p)(X + iy_p) = X^2 + y_p^2$ où $y_p \in \mathbb{R}$.

Donc $Q_n(X) = 4nX \prod_{p=1}^{n-1} \left(X^2 + \tan^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right) \right)$. L'examen du coefficient de X dans

$$Q_n \text{ donne : } \prod_{p=1}^{n-1} \tan^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right) = 1. \text{ D'où } Q_n(X) = 4nX \prod_{p=1}^{n-1} \left(1 + \frac{X^2}{\tan^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)} \right).$$

$$\mathbf{2.} \quad \prod_{p=1}^{n-1} \left(1 + \frac{t^2}{4n^2 \tan^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)} \right) = \frac{Q_n\left(\frac{t}{2n}\right)}{4n \cdot \frac{t}{2n}} = \frac{\left(1 + \frac{t}{2n}\right)^{2n} - \left(1 - \frac{t}{2n}\right)^{2n}}{2t} \text{ tend}$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ vers $\frac{e^t - e^{-t}}{2t} = \frac{\text{sh}(t)}{t}$ si $t \neq 0$. Le résultat est immédiat si $t = 0$.

3. a. $\ln\left(1 + \frac{t^2}{(p\pi)^2}\right) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{t^2}{\pi^2 p^2}$. Des règles de Riemann, on déduit que la série à termes positifs donnée converge.

b. De la continuité de $\ln$, on déduit : $\ln(h(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{n-1} u_p(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{\infty} u_p(n)$.

• Pour p fixé, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_p(n) = v_p = \ln\left(1 + \frac{t^2}{p^2 \pi^2}\right) \geq 0$.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_p(n) \leq v_p$ car $\tan(x) \geq x$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

v_p étant indépendant de n et $(\sum v_p)_{p \geq 1}$ convergent d'après 3.a. la série de fonctions de n : $(\sum u_p)_{p \geq 1}$ converge normalement, *a fortiori* uniformément sur

$\mathbb{N}^*$. Du théorème de la double limite, on déduit que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{\infty} u_p(n) = \sum_{p=1}^{\infty} v_p$ et le

résultat est prouvé.

c. est une conséquence de 3.b. et de la continuité de la fonction exp.

Partie II

1. Les pôles de R_n étant tous simples, on a :

$$R_n(X) = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{a_p}{X + (p\pi)^2} \text{ où } a_p = \frac{((n-1)!\pi)^2}{\prod_{\substack{1 \leq q \leq n-1 \\ q \neq p}} (q^2 - p^2)} = \frac{2(-1)^{p-1}(p\pi)^2 \binom{n-1}{p}}{\binom{n+p-1}{p}}.$$

$$\text{D'où : } R_n(0) = 1 = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{a_p}{(p\pi)^2} = 2 \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^{p-1} \frac{\binom{n-1}{p}}{\binom{n-1+p}{p}}.$$

$$2. \frac{\binom{n-1}{p}}{\binom{n-1+p}{p}} = \left(1 - \frac{p}{n}\right) \left(1 - \frac{p}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{p}{n+p-1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ en tant que}$$

produit dont le nombre est indépendant de n , de termes de limite 1.

$h(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t^2)$. En notant $R_n(t^2) = (R_n(t^2) - 1) + 1$, on déduit de la question

$$\text{II.2. que : } R_n(t^2) = 1 + 2 \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p \frac{\binom{n-1}{p}}{\binom{n-1+p}{p}} \cdot \frac{t^2}{t^2 + (p\pi)^2}.$$

$$\text{Procédons comme en I.3.b) en posant } u'_p(n) = 2(-1)^p \frac{\binom{n-1}{p}}{\binom{n-1+p}{p}} \cdot \frac{t^2}{t^2 + (p\pi)^2}$$

si $p < n$ $u'_p(n) = 0$ si $p \geq n$.

$$\bullet u'_p(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2(-1)^p \frac{t^2}{t^2 + (p\pi)^2} \text{ car } \frac{\binom{n-1}{p}}{\binom{n-1+p}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

$$\bullet |u'_p(n)| \leq \frac{2t^2}{t^2 + (p\pi)^2} = v'_p \text{ car } 0 < \frac{\binom{n-1}{p}}{\binom{n-1+p}{p}} < 1.$$

Comme $v'_p \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2t^2}{(p\pi)^2}$, la série réelle $\sum v'_p$ converge d'après les règles de Riemann.

v'_p étant indépendant de n et $(\sum v'_p)_{p \geq 1}$ convergent, la série de fonctions de n : $(\sum u_p)_{p \geq 1}$ converge normalement, *a fortiori* uniformément sur $\mathbb{N}^*$. Du théorème

de la double limite, on déduit que : $\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{t^2}{t^2 + (p\pi)^2}$.

Partie III

1. $\forall t \in]-\pi, \pi[$, $\frac{t^2}{t^2 + (p\pi)^2} = \left(\frac{t}{p\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + (t/p\pi)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{(p\pi)^{2n+2}}$ d'après les résultats sur les séries géométriques (cf. $\left|\frac{t}{p\pi}\right| < 1$.)

$$\text{Donc : } \forall t \in]-\pi, \pi[, h(t) = 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{(p\pi)^{2n+2}}.$$

2. S_a est la somme d'une série alternée qui converge avec le théorème spécial.

$$\text{Donc : } -1 = \frac{(-1)^1}{1^a} < S_a < 0.$$

Notons $\beta_{n,p} = \frac{(-1)^{n+p} t^{2n+2}}{(p\pi)^{2n+2}}$, $p \geq 1, n \geq 0$, pour t fixé dans $] -\pi, \pi[$.

- La série $(\sum |\beta_{n,p}|)_{n \geq 0}$ converge car $|\beta_{n,p}| = \left(\frac{t^2}{(p\pi)^2}\right)^{n+1}$ est le terme général de la série géométrique $\sum (\delta_p)^{n+1}$ où $\delta_p = \frac{t^2}{(p\pi)^2} \in [0, 1[$ puisque $p \geq 1$ et $|t| < \pi$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n,p}| = \lambda_p = \frac{t^2}{(p\pi)^2 - t^2}$. Donc $\lambda_p \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \delta_p$. D'où $(\sum \lambda_p)_{p \geq 1}$ converge.

Du théorème d'interversion des sommations, on déduit que la suite double de complexes $(\beta_{n,p})_{n \geq 0, p \geq 1}$ est sommable et que : $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \beta_{n,p} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n,p}$.

On déduit de III.1. que : $\forall t \in] -\pi, \pi[, h(t) = 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{S_{2n+2}}{\pi^{2n+2}} t^{2n+2}$.

• Une convergence vers la fonction exponentielle

A. Convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$

On considère la suite (f_n) de fonctions définies sur $\mathbb{C}$ par $f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

1. Première méthode

a. Montrer que (f_n) converge simplement vers $\exp$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z - f_n(z)| \leq e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n$.

c. En déduire la convergence uniforme sur toute partie compacte de $\mathbb{C}$ de (f_n) vers $\exp$.

2. Deuxième méthode

On définit la suite de fonctions $(u_p)_{p \geq 1}$ sur $\mathbb{C} \times [1, +\infty[$ par $u_1(z, x) = 1 + z$

$$\text{et, si } p \geq 2, u_p(z, x) = \begin{cases} \frac{x(x-1) \cdots (x-p+1)}{p!} \left(\frac{z}{x}\right)^p & \text{si } x \geq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que, si z est fixé dans $\mathbb{C}$, $\sum u_p(z, \cdot)$ converge normalement sur $[1, +\infty[$. En déduire que (f_n) converge simplement vers $\exp$ sur $\mathbb{C}$.

B. Étude sur $\mathbb{R}_-$

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction g_n sur $\mathbb{R}_-$ par $g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ si $x \geq -n$ et $g_n(x) = 0$ sinon ainsi que $G_n = \exp - g_n$.

a. Montrer que G_n admet un maximum et qu'il est atteint en un unique point α_n de $] -\infty, 0[$.

b. En déduire que (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_-$ vers $\exp$.

Solution

A. 1. a. Si $x \in \mathbb{R}$ $(f_n(x))$ converge vers e^x .

b. En utilisant la formule du binôme et l'égalité $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ on obtient :

$$e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=2}^n \frac{z^k}{k!} \left[1 - \frac{k!}{n^k} \binom{n}{k}\right] + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

or, si $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$, $\frac{k!}{n^k} \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1$,

d'où $\left|e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \sum_{k=2}^n \frac{|z|^k}{k!} \left[1 - \frac{k!}{n^k} \binom{n}{k}\right] + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n$.

c. Soient K un compact de $\mathbb{C}$, on choisit $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $K \subset B_f(0, M)$. Si $z \in K$, en reprenant les inégalités de la question précédente :

$$\left|e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \sum_{k=2}^n \frac{M^k}{k!} \left[1 - \frac{k!}{n^k} \binom{n}{k}\right] + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = e^M - \left(1 + \frac{M}{n}\right)^n \text{ et la}$$

convergence simple sur $\mathbb{R}$ prouve la convergence uniforme sur K .

$$\mathbf{2.} \text{ Si } z \in \mathbb{C} \text{ et } p \geq 2, u_p(z, x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{x}\right) \frac{z^p}{p!} & \text{si } x \geq p, \\ 0 & \text{si } x \in [1, p]. \end{cases}$$

d'où $|u_p(z, x)| \leq \frac{|z|^p}{p!}$ terme général d'une série convergente, ce qui prouve la convergence normale sur $[1, +\infty[$ de $\sum u_p(z, \cdot)$.

De plus $u_p(z, x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{z^p}{p!}$ si $p \geq 2$ et $u_1(z, x) = 1 + z$ pour tout x .

La définition de (u_p) et la formule du binôme montrent que, si $(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$,

$f_n(z) = \sum_{p=1}^{\infty} u_p(z, n)$. Le théorème de la double limite montre que $(f_n(z))$ converge

$$\text{et a pour limite } \sum_{p=1}^{\infty} \lim_n [u_p(z, n)] = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{p!} = e^z.$$

B. a. G_n est continue sur $\mathbb{R}_-$, dérivable sur $] -n, 0]$, $G'_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1}$ qui est du signe de $x - (n-1) \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \varphi_n(x)$ car $\exp$ réalise un homéomorphisme croissant entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$.

φ_n est dérivable sur $] -n, 0]$ avec $\varphi'_n(x) = \frac{x+1}{x+n}$ d'où le tableau de variations

	$-\infty$	$-n$	α_n	-1	0
φ'_n			$-$	$-$	$+$
φ_n		$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$
G_n	0	$\nearrow$	e^{-n}	$\nearrow$	$G_n(\alpha_n)$
			$\searrow$	$\searrow$	0

qui montre l'existence et l'unicité de α_n .

b. α_n est l'unique solution dans $\mathbb{R}_-$ de l'équation $x = (n-1) \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ d'où $e^{\alpha_n} = \left(1 + \frac{\alpha_n}{n}\right)^{n-1}$. Donc $G_n(\alpha_n) = e^{\alpha_n} \left[1 - \left(1 + \frac{\alpha_n}{n}\right)\right] = -\frac{\alpha_n}{n} e^{\alpha_n}$.

$\psi : x \mapsto xe^x$ est continue sur $\mathbb{R}_-$ et admet 0 pour limite en $-\infty$, donc est bornée sur $\mathbb{R}_-$ et $N_{\infty}^{\mathbb{R}_-}(G_n) = G_n(\alpha_n) \leq \frac{N_{\infty}^{\mathbb{R}_-}(\psi)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, d'où la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_-$.

6. Fonctions vectorielles

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, et à valeurs dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé E de dimension finie, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note N une norme sur E .

I. Dérivation

A. Définitions

1. Dérivabilité en un point

1.1. Définition

$f \in \mathcal{F}(I, E)$ est **dérivable** en un point a de I si l'application φ_a de $I \setminus \{a\}$ dans E , $x \mapsto \frac{1}{x-a} [f(x) - f(a)]$ a une limite en a . En cas d'existence de cette limite dans E , celle-ci est appelée **vecteur dérivé** de f en a et notée $f'(a)$ ou $Df(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.

Interprétation géométrique

Avec les notations précédentes, la droite affine réelle de représentation paramétrique $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times E, \lambda \mapsto (a, f(a)) + (\lambda, \lambda f'(a))$ s'appelle la **tangente** en $(a, f(a))$ au graphe de f dans $\mathbb{R} \times E$.

Interprétation cinématique

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^3$; identifions $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ à l'univers de la relativité restreinte, les axes canoniques de $\mathbb{R}^4$ étant ceux d'un référentiel galiléen fixé. Le graphe de f s'interprète comme l'ensemble des positions dans l'univers d'un point mobile qui occupe la position $f(t)$ à la date t . Le vecteur $(1, f'(a))$ est le **vecteur-vitesse** spatio-temporel du mobile en le point $(a, f(a))$.

1.2. Théorème

$f \in \mathcal{F}(I, E)$ est dérivable en $a \in I$ si, et seulement si, il existe $\ell \in E$ et $\varepsilon \in \mathcal{F}(I, E)$ continue en a tels que, pour tout $x \in I$,
 $f(x) = f(a) + (x-a)\ell + (x-a)\varepsilon(x)$. De plus, dans ce cas, $\ell = f'(a)$.

Démonstration

Si f est dérivable en a il suffit de poser $\ell = f'(a)$, $\varepsilon(a) = 0_E$ et, si $x \in I \setminus \{a\}$,

$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell$. Alors, par dérivabilité de f en a , ε est continue en a .

Réciproquement, l'existence de (ℓ, ε) montre que φ_a admet ℓ pour limite en a . $\square$

L'application directe de ce théorème et la considération de $x \mapsto |x|$ prouvent :

1.3. Corollaire

| Si f est dérivable en a , alors elle est continue en a , la réciproque est fausse.

2. Dérivabilité à droite, à gauche

2.1. Définition

$f \in \mathcal{F}(I, E)$ est dérivable à droite (respectivement à gauche) en un point a de I si $I'_a = I \cap [a, +\infty[$ (respectivement $I''_a = I \cap]-\infty, a]$) n'est pas réduit au point a et si la restriction de f à I'_a (respectivement I''_a) est dérivable en a . Si elle existe, une telle dérivée s'appelle dérivée à droite (respectivement à gauche) de f en a ; on la note $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$).

Il découle immédiatement de ces définitions le théorème suivant :

2.2. Théorème

Soient $f \in \mathcal{F}(I, E)$ et a un point intérieur à I , il y a équivalence entre

(i) f est dérivable en a ,

(ii) f est dérivable à droite et à gauche en a avec $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Dans ce cas $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

3. Fonction dérivée

Définitions

1. $f \in \mathcal{F}(I, E)$ est dérivable sur l'intervalle I si elle est dérivable en tout point de I . On définit alors l'**application dérivée** de f , notée $f' : I \rightarrow E, x \mapsto f'(x)$ ou Df ou encore $\frac{df}{dx}$.

2. $f \in \mathcal{F}(I, E)$ est dite **continûment dérivable** ou encore de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et f' est continue.

Notations

On note $\mathcal{D}(I, E)$ respectivement $\mathcal{C}^1(I, E)$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{F}(I, E)$ dérivables, respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

4. Exemple de l'exponentielle

Soient $(\mathcal{A}, +, \cdot, *, \| \cdot \|)$ une $\mathbb{K}$ -algèbre normée de dimension finie, a un élément de

$\mathcal{A}$ et ψ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(t) = \exp(ta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ta)^n}{n!}$.

Comme $b \mapsto a * b - b * a$ est continue sur $\mathcal{A}$ en tant qu'application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie, nulle en $\sum_{k=0}^n \frac{(ta)^k}{k!}$ pour tout $(t, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$,

a et $\exp(ta)$ sont permutables par passage à la limite pour tout t réel.

Théorème

| ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi'(t) = a * \psi(t) = \psi(t) * a$.

Démonstration

- Si $(t, h) \in \mathbb{R}^2$ avec $|h| \leq 1$, ta et ha sont permutables et l'on a :
 $\delta(h) = \exp[(t+h)a] - \exp(ta) - h \exp(ta) * a = \exp(ta) * [\exp(ha) - a - ha]$ d'où
 $\delta(h) = h^2 \exp(ta) * \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-2} a^k}{k!}$ et donc $\|\delta(h)\| \leq h^2 \|\exp(ta)\| \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|a\|^k}{k!} \right)$, ce qui montre que $\delta(h) = O(h^2)$ et donc que ψ est dérivable en t avec $\psi'(t) = \varphi(t) * a$.
- $b \mapsto b * a$ est linéaire donc continue sur $\mathcal{A}$ et ψ continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable, donc, par composition, ψ' est continue et ψ est de classe $\mathcal{C}^1$. $\square$

B. Opérations

1. Linéarité de la dérivation

Théorème

$\mathcal{D}(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, E)$ et l'application D de $\mathcal{D}(I, E)$ dans $\mathcal{F}(I, E)$, $f \mapsto f'$ est linéaire.
 $\mathcal{C}^1(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(I, E)$.

Démonstration

Soient $a \in I$, $(f, g) \in (\mathcal{D}(I, E))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$,

$$\frac{1}{x-a} \left[(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(a) \right] = \lambda \frac{1}{x-a} (f(x) - f(a)) + \frac{1}{x-a} (g(x) - g(a)).$$

Des théorèmes sur les opérations sur les limites, on déduit que $\lambda f + g$ est dérivable en a et que $(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$. D'où la conclusion, ce raisonnement étant valable quel que soit a élément de I et $\mathcal{D}(I, E)$ étant non vide.

Enfin $\mathcal{C}(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$ et $\mathcal{C}^1(I, E) = D^{-1}(\mathcal{C}(I, E))$, d'où la dernière affirmation. $\square$

2. Action d'une application linéaire

2.1. Théorème

Soient $f \in \mathcal{D}(I, E)$ (resp. $\mathcal{C}^1(I, E)$) et u une application linéaire de E dans F , deux espaces vectoriels de dimensions finies ; alors $u \circ f \in \mathcal{D}(I, F)$ (resp. $\mathcal{C}^1(I, F)$) et $(u \circ f)' = u \circ f'$.

Démonstration

Soit $a \in I$; u étant linéaire, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$,

$$\frac{1}{x-a} \left[u(f(x)) - u(f(a)) \right] = u \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) \xrightarrow{x \rightarrow a} u(f'(a)) \text{ car } f \text{ est dérivable en } a \text{ et } u \text{ est continue sur } E \text{ car } E \text{ et } F \text{ sont de dimensions finies et } u \in \mathcal{L}(E, F). \square$$

2.2. Corollaire

Si E est de dimension finie $p \geq 1$ et muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $f \in \mathcal{F}(I, E)$ telle que : $\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x) e_k$.
 $f \in \mathcal{D}(I, E)$ (resp. $\mathcal{C}^1(I, E)$) si, et seulement si, toutes les fonctions f_k sont dans $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$). Dans ce cas : $\forall x \in I, f'(x) = \sum_{k=1}^p f'_k(x) e_k$.

Démonstration

Une première preuve consiste à dire que ceci est une conséquence de la linéarité de l'application $\mathbb{K} \rightarrow E, x \mapsto xv$.

Une deuxième peut consister à y voir une application immédiate d'un théorème sur

les limites de fonctions car si $x \in I \setminus \{a\}$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{k=1}^p \frac{f_k(x) - f_k(a)}{x - a} e_k$. $\square$

2.3. Applications

a. $M : I \rightarrow \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}), x \mapsto (m_{i,j}(x))$ est dérivable sur I si, et seulement si, toutes les $m_{i,j}$ sont dérivables sur I . Dans ce cas, on a : $M'(x) = (m'_{i,j}(x))$.

b. $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$) si, et seulement si, $(\Re(f), \Im(f)) \in (\mathcal{D}(I, \mathbb{R}))^2$ (resp. $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$) et $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$) si, et seulement si, $\bar{f} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$). On a alors : $f' = \Re(f)' + i \Im(f)'$ et $(\bar{f})' = \overline{f'}$.

c. Si $f \in \mathcal{C}(I, E)$ est dérivable sur l'intérieur de I , elle est constante sur I si, et seulement si, f' est nulle sur l'intérieur de I .

En effet le résultat a été démontré en première année dans le cas où $E = \mathbb{R}$.

3. Action d'une application multilinéaire

3.1. Cas bilinéaire

Théorème

Soient E_1, E_2, F trois espaces vectoriels de dimension finie, B une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans $F, f_1 \in \mathcal{D}(I, E_1), f_2 \in \mathcal{D}(I, E_2)$. Alors l'application $g : x \mapsto B(f_1(x), f_2(x))$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, g'(x) = B(f'_1(x), f_2(x)) + B(f_1(x), f'_2(x)).$$

Démonstration

Soit $a \in I, g(x) - g(a) = B(f_1(x) - f_1(a), f_2(a)) + B(f_1(x), f_2(x) - f_2(a))$.

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = B\left(\frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a}, f_2(a)\right) + B\left(f_1(x), \frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a}\right)$$

car B est bilinéaire.

f_1 étant dérivable en a et B continue, $B\left(\frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a}, f_2(a)\right) \xrightarrow{x \rightarrow a} B(f'_1(a), f_2(a))$.

f_1 étant dérivable en a est continue en a ; comme f_2 est dérivable en a et B continue, $B\left(f_1(x), \frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a}\right) \xrightarrow{x \rightarrow a} B(f_1(a), f'_2(a))$. D'où la conclusion. $\square$

Applications

a. Si E est un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{D}(I, E)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$, alors $\varphi f \in \mathcal{D}(I, E)$ et $(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'$.

b. Si E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et si f et g sont éléments de $\mathcal{D}(I, E)$, alors $x \mapsto f(x) \wedge g(x)$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \frac{d}{dx}(f(x) \wedge g(x)) = f'(x) \wedge g(x) + f(x) \wedge g'(x).$$

c. Si E est un espace vectoriel euclidien et si $(f, g) \in (\mathcal{D}(I, E))^2$, alors l'application $x \mapsto (f(x)|g(x))$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \frac{d}{dx}(f(x)|g(x)) = (f'(x)|g(x)) + (f(x)|g'(x)).$$

- d. Si $(A, B) \in \left(\mathcal{D}(I, \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))\right)^2$, alors $AB \in \mathcal{D}(I, \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))$ et $(AB)' = A'B + AB'$.
e. Soit E un espace vectoriel euclidien $f \in \mathcal{D}(I, E)$ tel que $\forall x \in I, \|f(x)\| = 1$, alors $f(x)$ et $f'(x)$ sont orthogonaux.

En effet, $\forall x \in I, 1 = \|f(x)\|^2 = (f(x)|f(x)) \Rightarrow \forall x \in I, 0 = 2(f'(x)|f(x))$ cf. application c. du théorème 3.

Ainsi si $\varphi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{U})$ où $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des complexes de module 1, alors $\varphi\overline{\varphi}' + \overline{\varphi}\varphi'$ est nulle ie. $\varphi\overline{\varphi}'$ est à valeurs imaginaires pures.

3.2. Extension au cas n -linéaire

En procédant comme pour le théorème précédent, on prouve le

Théorème

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés de dimension finie et $M : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ une application n -linéaire. Si, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_i \in \mathcal{D}(I, E_i)$, alors l'application $\Phi : x \mapsto M(f_1(x), \dots, f_n(x))$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, on a :

$$\Phi'(x) = \sum_{k=1}^n M(f_1(x), \dots, f_{k-1}(x), f'_k(x), f_{k+1}(x), \dots, f_n(x)).$$

Applications

- a. Si $\mathcal{A}$ est une algèbre normée de dimension finie, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout $(f_1, \dots, f_n)$ dans $(\mathcal{D}(I, \mathcal{A}))^n$, $(f_1 * \dots * f_n)' = \sum_{k=1}^n (f_1 * \dots * f_{k-1} * f'_k * f_{k+1} * \dots * f_n)$.

Quand $\mathcal{A}$ est commutative cette formule s'écrit $\left(\prod_{k=1}^n f_k\right)' = \sum_{k=1}^n \left(f'_k \prod_{j \neq k} f_j\right)$.

- b. Si E est de dimension n , muni d'une base $\mathcal{E}$, si $(f_1, \dots, f_n) \in (\mathcal{D}(I, E))^n$, alors l'application $\Phi : x \mapsto \det_{\mathcal{E}}(f_1(x), \dots, f_n(x))$ est dérivable sur I avec :

$$\forall x \in I, \Phi'(x) = \sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{E}}(f_1(x), \dots, f_{k-1}(x), f'_k(x), f_{k+1}(x), \dots, f_n(x))$$

Exemple

Soit $\Delta_n : x \mapsto \det(m_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ où $m_{i,j}(x) = \frac{x^{j+1-i}}{(j+1-i)!}$ si $j+1 \geq i$ et 0 sinon. On note $\mathcal{E}$ la base canonique de $F = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et, si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_i(x)$ la i -ème colonne de $(m_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$.

Alors $C_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, F)$ et, comme $\Delta_n = \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_n)$, $\Delta_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec, si $x \in \mathbb{R}$, $\Delta'_n(x) = \det_{\mathcal{E}}(C'_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x))$ car, si $i \geq 2$, on a $C'_i(x) = C_{i-1}(x)$ et donc $\det_{\mathcal{E}}(C_1(x), \dots, C_{i-1}(x), C'_i(x), C_{i+1}(x), \dots, C_n(x)) = 0$.

Par suite, comme $C'_1(x)$ est égal au premier vecteur de $\mathcal{E}$, en développant suivant la première colonne on obtient $\Delta'_n(x) = \Delta_{n-1}(x)$. Par nullité de la première ligne $\Delta_n(0) = 0$ et une récurrence immédiate donne $\Delta_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

4. Quotient

Théorème

Si $(f, g) \in (\mathcal{D}(I, \mathbb{K}))^2$ et si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Démonstration

Compte tenu de l'application a. du théorème 3, il suffit de faire la démonstration pour $\frac{1}{g}$, puis d'écrire $g = \alpha + i\beta$ où $(\alpha, \beta) \in (\mathcal{D}(I, \mathbb{R}))^2$ et enfin d'utiliser le corollaire du théorème 2 et les résultats connus pour les fonctions à valeurs réelles. $\square$

5. Composition

5.1. Théorème

Si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{D}(J, E)$ et si $f(I) \subset J$, alors $g \circ f \in \mathcal{D}(I, E)$ et

$$(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$$

Démonstration

Il suffit d'utiliser le corollaire du théorème 2 et les résultats connus pour les fonctions à valeurs réelles. $\square$

5.2. Applications

a. Si $f \in \mathcal{D}(] - a, a[, E)$ et est paire (respectivement impaire) alors f' est impaire (respectivement paire).

b. Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, E)$ est T -périodique, f' est T -périodique.

c. Si $u \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $0 \notin u(I)$, alors $x \mapsto \ln |u(x)|$ est dérivable sur I et $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$.

C. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

1. Dérivée k -ième

1.1. Définition

Pour $f \in \mathcal{F}(I, E)$ on définit par récurrence les dérivées successives de f : $f^{(0)} = f$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est k fois dérivable sur I si $f^{(k-1)}$

est dérivable sur I et on note $D^k(f) = \frac{d^k f}{dx^k} = f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.

On note $\mathcal{D}^k(I, E)$ l'ensemble des $f \in \mathcal{F}(I, E)$ k fois dérivables sur I .

1.2. Exemples fondamentaux

a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$, $\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x - \alpha} \right) = \frac{(-1)^n n!}{(x - \alpha)^{n+1}}$.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{d^n}{dx^n} (x - \alpha)^k = \begin{cases} \frac{k!}{(k-n)!} (x - \alpha)^{k-n} & \text{si } k > n, \\ k! & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k < n. \end{cases}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n(\cos)(x) = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$ et $D^n(\sin)(x) = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$.

d. Pour trouver la dérivée n -ième d'une fonction rationnelle, il suffit de décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle associée et d'utiliser les exemples a) et b).

e. $\forall n \in \mathbb{N}, D^n(\exp) = \exp ; D^{2n}(\operatorname{ch}) = \operatorname{ch} ; D^{2n+1}(\operatorname{ch}) = \operatorname{sh}$.

1.3. Définition (fonctions de classe $\mathcal{C}^k$)

$f \in \mathcal{F}(I, E)$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si $f \in \mathcal{D}^k(I, E)$ et si $f^{(k)} \in \mathcal{C}(I, E)$.
 f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$.
 Si $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ on note $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des applications de I dans E de classe $\mathcal{C}^k$.

Remarque

Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{C}^\infty(I, E) \subset \mathcal{C}^k(I, E) \subset \mathcal{D}^k(I, E) \subset \mathcal{D}(I, E) \subset \mathcal{C}(I, E)$.

2. Opérations

On démontre par récurrence le théorème suivant :

2.1. Théorème

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}^k(I, E)$ et $\mathcal{C}^k(I, E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}(I, E)$ et pour tout $n \leq k$, $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$.

2.2. Théorème (formule de Leibniz)

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, si $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$, $g \in \mathcal{D}^n(I, F)$ et $B : E \times F \rightarrow G$ est bilinéaire, alors l'application $h = B(f, g)$ est élément de $\mathcal{D}^n(I, G)$ et

$$h^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-k)}).$$

Démonstration

Par récurrence sur n . Le résultat est évident si $n = 0$ et déjà vu si $n = 1$. Supposons

le, vrai pour $0 \leq k \leq n-1$, alors $h^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-1-k)})$.

$$h^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(f^{(k+1)}, g^{(n-1-k)}) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-k)}).$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(f^{(k+1)}, g^{(n-1-k)}) = \sum_{p=1}^n \binom{n-1}{p-1} B(f^{(p)}, g^{(n-p)})$, donc :

$$\begin{aligned} h^{(n)} &= \binom{n-1}{0} B(f^{(0)}, g^{(n)}) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] B(f^{(k)}, g^{(n-k)}) \\ &\quad + \binom{n-1}{n-1} B(f^{(n)}, g^{(0)}). \end{aligned}$$

Comme, pour tout $k \in [1, n-1]$,

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} \text{ et } \binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1} = \binom{n-1}{0} = \binom{n}{0} = 1,$$

la relation est alors vérifiée à l'ordre n , d'où la conclusion par théorème de récurrence. $\square$

Une conséquence immédiate en est le corollaire suivant :

2.3. Corollaire

$\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre. Si $(f, g) \in (\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}))^2$ et si $k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$,

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}.$$

Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ et ne s'annule pas alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

2.4. Corollaire

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre normée de dimension finie, $a \in \mathcal{A}$, alors l'application ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(t) = \exp(ta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\psi^{(n)} = a^n * \psi = \psi * a^n.$$

Démonstration

On procède par récurrence sur n , le cas $n = 1$ ayant déjà été prouvé.

Si ψ est de classe $\mathcal{C}^n$ avec $\psi^{(n)} = \psi * a^n$ alors, comme $\psi' = a * \psi$ et comme $t \mapsto a$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, le théorème montre que ψ' est de classe $\mathcal{C}^n$ avec $(\psi')^{(n)} = a * \psi^{(n)} = a^{n+1} * \psi$, ce qui termine la récurrence car a et ψ sont permutables. $\square$

2.5. Théorème

Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^n(J, E)$ où J est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et $f(I) \subset J$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I, E)$.

Démonstration

Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}(J, E)$ et $f(I) \subset J$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}(I, E)$ (déjà vu). Supposons $n \geq 1$ et pour $f_1 \in \mathcal{C}^{n-1}(I, \mathbb{R})$, $g_1 \in \mathcal{C}^{n-1}(J, E)$ et $f_1(I) \subset J$, $g_1 \circ f_1 \in \mathcal{C}^{n-1}(I, E)$.

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^n(J, E)$ et $f(I) \subset J$, comme $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$, l'application du théorème 2.2. au couple $(g' \circ f, f')$ permet de conclure que $(g \circ f)'$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I ie. $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I, E)$, d'où la conclusion par théorème de récurrence. $\square$

II. Intégrale sur un segment

Dans cette partie I est le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, $a < b$.

1. Théorème et définition

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ sont deux bases de E . Soit $f \in \mathcal{F}(I, E)$ telle que :

$\forall t \in I, f(t) = \sum_{i=1}^p f_i(t) e_i = \sum_{j=1}^p g_j(t) e'_j$. Alors $f \in \mathcal{CM}(I, E)$ si, et seulement

si, toutes les fonctions f_k et g_k sont dans $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$. Dans ce cas :

$$\sum_{i=1}^p \left(\int_I f_i \right) e_i = \sum_{j=1}^p \left(\int_I g_j \right) e'_j.$$

On appelle ce vecteur l'intégrale sur $[a, b]$ de f . On le note $\int_I f$ ou $\int_I f(t) dt$.

Démonstration

Si $P = (\alpha_{i,j}) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a, pour tout $t \in I$,

$$f_i(t) = \sum_{j=1}^p \alpha_{i,j} g_j(t). \text{ D'où } \int_I f_i = \sum_{j=1}^p \alpha_{i,j} \int_I g_j.$$

$$I_{\mathcal{B}}(f) = \sum_{i=1}^p \left(\int_I f_i(t) dt \right) e_i = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^p \alpha_{i,j} \int_I g_j \right) e_i \text{ par linéarité de l'application}$$

$$\mathcal{CM}(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \varphi \mapsto \int_I \varphi. \text{ Donc } I_{\mathcal{B}}(f) = \sum_{j=1}^p \int_I g_j(t) dt \sum_{i=1}^p \alpha_{i,j} e_i = \sum_{j=1}^p \left(\int_I g_j \right) e'_j \square$$

Corollaire

Pour qu'une fonction f soit élément de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$, il faut et il suffit que $\Re(f)$ et $\Im(f)$ soient éléments de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$. Dans ces conditions :

$$\Re\left(\int_I f\right) = \int_I \Re(f), \quad \Im\left(\int_I f\right) = \int_I \Im(f), \quad \int_I \bar{f} = \overline{\int_I f}.$$

2. Propriétés

On considère dans ce paragraphe E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ≥ 1 et I un segment de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b .

Des propriétés de l'application $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, f \mapsto \int_I f$ on déduit les trois théorèmes suivants.

2.1. Théorème (linéarité)

L'application $\mathcal{CM}(I, E) \rightarrow E, f \mapsto \int_I f$ est linéaire. Autrement dit :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{CM}(I, E))^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g.$$

Convention

Si $a > b$, on note $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt = - \int_{[b,a]} f(t) dt$; de plus $\int_a^a f = 0$.

2.2. Théorème (relation de Chasles)

Soient a, b, c trois points d'un intervalle J de $\mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{CM}(J, E)$.

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

2.3. Théorème (sommes de Riemann)

Si $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et si $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision de pas constant de I , alors

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_I f.$$

Exemple

Soit la suite de terme général $u_n = \left(\frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} R_k \right)^2$ où, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix} \text{ avec } \theta_k = \frac{k\pi}{n}.$$

L'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et avec $a_k^{(n)} = \xi_k^{(n)} = k \frac{\pi}{n}$, on a $\frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} = S(f; (s, \xi)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui montre que (u_n) converge vers $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -I_2$.

2.4. Théorème (image de l'intégrale par une application linéaire)

Soit F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $U \in \mathcal{L}(E, F)$, pour tout $f \in \mathcal{CM}(I, E)$, on a $U \circ f \in \mathcal{CM}(I, F)$ et $\int_I U \circ f = U \left(\int_I f \right)$.

Démonstration

Notons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F . Notons $X(t), Y(t), I(f), I(U \circ f)$ les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs $f(t), U \circ f(t), \int_I f$ et $\int_I U \circ f$. On a :

${}^t X(t) = (f_1(t), \dots, f_p(t))$; ${}^t Y(t) = (g_1(t), \dots, g_q(t))$; $Y(t) = AX(t)$ où A est $M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(U)$; ${}^t I(f) = \left(\int_I f_1, \dots, \int_I f_p \right)$; ${}^t I(U \circ f) = \left(\int_I g_1, \dots, \int_I g_q \right)$.

$A = (a_{i,j})$. Donc $g_j(t) = \sum_{i=1}^p a_{i,j} f_i(t) \Rightarrow \int_I g_j = \sum_{i=1}^p a_{i,j} \int_I f_i$. $I(U \circ f) = A \cdot I(f)$.

D'où le résultat. $\square$

2.5. Théorème (inégalité de la moyenne)

Si N est une norme sur E et $f \in \mathcal{CM}(I, E)$ et si $(a, b) \in I^2$,

$$N \left(\int_a^b f \right) \leq \left| \int_a^b N \circ f \right| \leq |b - a| N_\infty^I(f) = |b - a| \sup_{x \in [a, b]} N(f(x)).$$

Démonstration

• Si $f \in \mathcal{C}(I, E)$, $I = [a, b]$, $a < b$ et si $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision de pas constant

de I , d'après le théorème 2.3. on a $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_I f$.

N étant continue sur E , la fonction $N \circ f$ est continue sur I et l'on a :

$R_n(N \circ f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (N \circ f)(a_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_I N \circ f$.

D'après l'inégalité triangulaire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, N(R_n(f)) \leq R_n(N \circ f)$.

La continuité de N sur E implique, par passage à la limite : $N \left(\int_I f \right) \leq \int_I N \circ f$.

• Si $f \in \mathcal{CM}(I, E)$, et si $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq p}$ est une subdivision subordonnée à f , notons f_k le prolongement par continuité de $f|_{[x_k, x_{k+1}[}$ à $[x_k, x_{k+1}]$. On a

$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f$. Donc $\int_I f = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k$.

Comme f_k est continue sur $[x_k, x_{k+1}]$, on a $N\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k\right) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} N \circ f_k$. Donc :

$$N\left(\int_I f\right) \leq \sum_{k=0}^{p-1} N\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k\right) \leq \sum_{k=0}^{p-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} N \circ f_k = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} N \circ f = \int_I N \circ f.$$

La fin de la démonstration découle de l'inégalité de la moyenne pour les fonctions à valeurs réelles (voir le cours de première année). $\square$

III. Dérivation et intégration

A. Primitives de fonctions continues

1. Définition

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$. On appelle *primitive* de f sur I toute fonction $g : I \rightarrow E$ qui est dérivable et telle que $g' = f$.

Remarques

- g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- Deux primitives d'une même application diffèrent d'une constante.

2. Théorème fondamental

Soient $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et $a \in I$. L'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a . Pour toute primitive G de f sur I ,

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a).$$

Démonstration

Ce théorème est une conséquence immédiate de II.1. et du théorème, vu en première année, sur les primitives de fonctions continues sur I à valeurs réelles. $\square$

2.1. Corollaire

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $a \in I$. Alors : $\forall x \in I, f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$.

2.2. Corollaire

Si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est de **signe constant** sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f = 0 \Rightarrow f = 0$.

Démonstration

$F : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F' = f$. Supposons $f \geq 0$;

F est croissante sur $[a, b]$ et $F(a) = F(b) = 0$. Donc $F = 0$. D'où $F' = f = 0$. $\square$

2.3. Corollaire

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et T -périodique.

1. f a une primitive T -périodique si, et seulement si, toutes ses primitives le sont ou encore si, et seulement si, $\int_0^T f = 0$.

2. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b f = \int_{a+T}^{b+T} f$ et $\int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f$.

Démonstration

Soit $H(x) = \int_x^{x+T} f = F(x+T) - F(x)$ où $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f s'annulant en a . Tout comme F , H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $H'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$, donc H est constante.

1. F est T -périodique si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = H(0) = \int_0^T f = 0$.

Si G est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, $G : x \mapsto F(x) + C$ et

$F(x+T) - F(x) = G(x+T) - G(x)$. D'où la fin de la preuve de 1.

2. $H(a) = H(b)$ donne la deuxième égalité. La première s'en déduit par la relation de Chasles. $\square$

2.4. Corollaire

Soient $f \in \mathcal{C}(I, E)$, $a \in I$, $u \in \mathcal{D}(J, \mathbb{R})$ telle que $u(J) \subset I$.

$G : x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t)dt$ est dérivable sur J et $G'(x) = u'(x)f(u(x))$.

Démonstration

Avec les notations précédentes, $G = F \circ u$. Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation des fonctions composées. $\square$

3. Quelques primitives

F désigne une primitive particulière de f sur un intervalle que le lecteur précisera sans peine.

$f(x)$	$F(x)$
$(x-a)^\alpha, a \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x-a}, a \in \mathbb{R}$	$\ln(x-a)$
$\frac{1}{x-\alpha}, \alpha = a+ib, b \neq 0$	$\ln(x-\alpha) + i \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)$
$\frac{1}{a^2+x^2}, a \neq 0$	$\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{1}{a^2-x^2}, a \neq 0$	$\frac{1}{2a} \ln\left(\left \frac{x+a}{x-a}\right \right)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a \neq 0$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+h}}, h \neq 0$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2+h}\right)$

B. Accroissements finis**1. Cas réel : (rappels)****1.1. Théorème de Rolle**

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}, a \neq b$. Si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

1.2. Théorème des accroissements finis

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $a \neq b$. Si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

2. Cas vectoriel

2.1. Théorème (inégalité des accroissements finis)

Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], E)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$. Si : $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall t \in]a, b[, N(f'(t)) \leq \lambda$, alors $N(f(b) - f(a)) \leq \lambda(b - a)$.

Démonstration

$f\left(b - \frac{1}{n}\right) - f\left(a + \frac{1}{n}\right) = \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} f'$ et l'inégalité de la moyenne donnent :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N\left[f\left(b - \frac{1}{n}\right) - f\left(a + \frac{1}{n}\right)\right] \leq \lambda\left(b - a - \frac{2}{n}\right)$. Par passage à la limite, N et f étant continues, on a le résultat. $\square$

Remarque

Il n'y a pas d'égalité des accroissements finis si E est de dimension $p \geq 2$.

En effet, prenons par exemple $E = \mathbb{C}$ et $f(t) = e^{it}$, alors $|f'(t)| = |ie^{it}| = 1$.

Donc : $f(2\pi) - f(0) = 0$ et ne peut être égal à $2\pi f'(c)$.

2.2. Corollaire

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de I . Alors f est lipschitzienne sur I si, et seulement si, f' est bornée sur l'intérieur de I .

Démonstration

Si f' est bornée sur l'intérieur de I , pour $(x, y) \in I^2, x < y$, on a (cf. corollaire 1.) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall t \in]x, y[, N(f'(t)) \leq \lambda) \Rightarrow (N(f(y) - f(x)) \leq \lambda(y - x))$.

Donc f est lipschitzienne sur I .

Réciproquement soit $x_0 \in I$, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \neq x_0, N\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) \leq k$.

Si x_0 est intérieur à I , $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)$. D'où la conclusion par passage à la limite dans les inégalités car N est continue sur E . $\square$

2.3. Théorème

Si $f \in \mathcal{C}([a, b], E)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ et si f' a une limite $\ell \in E$ en a , alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $f'(a) = \ell$.

Démonstration

$(\lim_a f' = \ell) \Rightarrow (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists c \in]a, b[, \forall t \in]a, c[, N(f'(t) - \ell) \leq \varepsilon)$.

L'application $g : [a, c] \rightarrow E, x \mapsto f(x) - x\ell$ est continue sur $[a, c]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, c[$, et vérifie : $N(g'(t)) \leq \varepsilon$ si $t \in]a, c[$, donc on déduit du théorème 2.1. que :

$\forall x \in [a, c], N(g(x) - g(a)) \leq \varepsilon(x - a)$ ie. $N(f(x) - f(a) - (x - a)\ell) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x - a))$.

Donc f est dérivable en a , $f'(a) = \ell$ et $\lim_a f' = f'(a)$.

f' étant continue en a et sur $]a, b[$ l'est sur $[a, b]$. $\square$

Une récurrence immédiate prouve alors le corollaire suivant :

2.4. Corollaire

Si $f \in \mathcal{C}([a, b], E)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a, b]$ et si pour tout $r \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $f^{(r)}$ a une limite $\ell_r \in E$ en a , alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, b]$ et $f^{(r)}(a) = \ell_r$.

Exemple

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $0 \mapsto 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

En effet, par récurrence, on montre qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré $3n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(n)}(x) = 0$; d'où par application du corollaire, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ et $f^{(n)}(0) = 0$. D'où le résultat annoncé car f est paire.

C. Formules de Taylor

1. Théorème de Taylor-Laplace (ou Taylor avec reste intégral)

Soient $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I, E)$ et $a \in I$. Alors $\forall x \in I, f(x) = T_k(x) + R_k(x)$ où

$$T_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \text{ et } R_k(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt \text{ ou bien}$$

$$R_k(x) = (x-a)^{k+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^k}{k!} f^{(k+1)}((1-u)a + ux) du.$$

Démonstration

Elle est une conséquence immédiate de II.1. et du théorème Taylor avec reste intégral déjà prouvé en première année pour les fonctions à valeurs réelles. $\square$

Remarque

L'intérêt de la deuxième expression du reste R_k réside dans le fait que les bornes d'intégration sont fixes. D'où des facilités pour encadrer (par exemple).

Du théorème de Taylor-Laplace et de l'inégalité de la moyenne on déduit :

2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Soient $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I, E)$ et $(a, b) \in I^2$, alors :

$$N\left(f(b) - f(a) - \sum_{p=1}^k \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a)\right) \leq \frac{|b-a|^{k+1}}{(k+1)!} N_{\infty}^{[a,b]}(f^{(k+1)}).$$

3. Théorème de Taylor-Young

$f \in \mathcal{C}^n(I, E)$ a un développement limité d'ordre n en $x_0 \in I$:

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o((x-x_0)^n).$$

Démonstration

Elle est une conséquence immédiate de II.1. et du théorème Taylor-Young déjà prouvé en première année pour les fonctions à valeurs réelles. $\square$

D. Exemple des intégrales de Wallis

Si pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx$, alors $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$ et $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ si $n \geq 2$; pour $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \frac{\pi(2p)!}{2(2^p p!)^2}$ et $I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$. Enfin $I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Démonstration

- Le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ donne la première égalité.
- Intégrons par parties en posant $f(x) = \sin^{n-1}(x)$ et $g(x) = -\cos(x)$. Les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 2$, et $(fg)(0) = (fg)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$$I_n = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \cos^2 = (n-1)(I_{n-2} - I_n). \text{ D'où la deuxième égalité.}$$

Comme $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, on obtient I_{2p} et I_{2p+1} par récurrence.

- Procédons par étapes :

(i) (I_n) est décroissante et à termes strictement positifs.

En effet, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. On a déjà vu que $I_n > 0$.

(ii) $I_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} I_n$. En effet : (i) $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1 \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

D'où la conclusion par théorème d'encadrement.

(iii) la deuxième égalité prouve que la suite (u_n) définie par $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ est constante. D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 = \frac{\pi}{2}$.

(iv) Enfin $nI_n I_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} nI_n^2 \Rightarrow I_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$. Comme $I_n > 0$ on a le résultat. $\square$

IV. Suites et séries de fonctions

Dans tout cette partie les fonctions sont à valeur dans $\mathbb{K}$.

A. Convergence en moyenne

1. Norme de la convergence en moyenne

$[a, b]$ désigne ici un segment fixé de $\mathbb{R}$ avec $a < b$, la norme sur E est notée N .

Théorème

L' application $N_1^{[a,b]} : f \mapsto \int_a^b |f|$ définit une norme sur $\mathcal{C}([a, b], E)$ appelée **norme de la convergence en moyenne**, de plus $N_1^{[a,b]} \leq (b-a)N_\infty^{[a,b]}$.

Démonstration

N_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Soient f et g continues sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si $N_1^{[a,b]}(f) = 0$ alors, comme $|f|$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, f est nulle.

Par linéarité de l'intégration, $N_1^{[a,b]}(\lambda f) = |\lambda| N_1^{[a,b]}(f)$.

$|f+g| \leq |f| + |g|$ d'où, par croissance de $f \mapsto \int_a^b f$, on a :

$$N_1^{[a,b]}(f+g) \leq N_1^{[a,b]}(f) + N_1^{[a,b]}(g).$$

Enfin $N_1^{[a,b]} \leq (b-a)N_\infty^{[a,b]}$ découle de l'inégalité de la moyenne. $\square$

Remarque

On peut prolonger N_1 à l'espace vectoriel $\mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$ mais ce n'est alors plus une norme car, par exemple, si $u \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $f = \mathbb{I}_{\{a\}} u$, on a $N_1(f) = 0$ alors que f n'est pas nulle.

2. Suites de fonctions

On déduit immédiatement de $N_1^{[a,b]} \leq (b-a)N_\infty^{[a,b]}$:

2.1. Corollaire

Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f , alors $\int_a^b f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_a^b f$.

Remarque

Ce corollaire ne donne qu'une condition suffisante pour que $\int_a^b f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_a^b f$. En effet si $f_n : x \mapsto x^n$, alors la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$ car la limite simple, $\mathbb{I}_{\{1\}}$ n'est pas continue et pourtant $\int_0^1 f_n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

2.2. Corollaire

Soient (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle I d'intérieur non vide, a un point fixé de I et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n la primitive de f s'annulant en a . Si (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I , alors (h_n) converge uniformément sur tout segment de I vers la primitive de f nulle en a .

Démonstration

Soit K un segment. On choisit un segment $[\alpha, \beta]$ (et il en existe) inclus dans I qui contienne $\{a\} \cup K$.

Si $x \in [\alpha, \beta]$, $N(h_n(x) - h(x)) = N\left(\int_a^x (f - f_n)\right) \leq \left|\int_a^x N \circ (f - f_n)\right| \leq N_1(f - f_n)$

où N_1 désigne la norme de la convergence en moyenne sur $\mathcal{C}([\alpha, \beta], E)$. La fin de la preuve découle directement du théorème. $\square$

3. Séries de fonctions

Exprimons dans le langage des séries le corollaire 2.1.

Corollaire

Soit $(f_n) \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})^\mathbb{N}$. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors $\sum \int_a^b f_n$ converge et $\sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^\infty f_n$.

B. Dérivation

Le théorème d'approximation de Weierstrass prouve que toute fonction continue sur $[a,b]$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, la dérivabilité n'est donc en général pas conservée par « passage à la limite uniforme », on va donner quelques conditions suffisantes.

1. Suites

1.1. Théorème

Soient a un point fixé de I et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. On suppose que $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction notée g .

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I , sa limite f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Démonstration

Si l'on applique le corollaire IV.A.2.2. à $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $h_n : I \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \int_a^x f'_n$ on montre que $(h_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $h : x \mapsto \int_a^x g$.

Comme $f_n = h_n + f_n(a)$ et $(f_n(a))$ converge vers un élément de E noté ℓ , la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment vers $h + \ell$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et primitive de g . $\square$

L'utilisation de ce théorème et d'une récurrence montre le corollaire suivant :

1.2. Corollaire

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$ telle que :

- (i) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p < k$, il existe a_p dans I tel que $(f_n^{(p)}(a_p))$ converge,
- (ii) $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I ; on note g sa limite simple sur I .

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I , sa limite f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et vérifie $f^{(k)} = g$.

2. Séries

2.1. Corollaire

Soient a un point fixé de I et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. On suppose que $\sum f_n(a)$ converge et que $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de I . Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I , sa somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $S' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$.

2.2. Corollaire

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$.

Si pour tout $p \in \mathbb{N}, p < k$ il existe $a_p \in I$ tel que $\sum f_n^{(p)}(a)$ converge et si $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I , alors :

$\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I , sa somme S est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $p \leq k$, $S^{(p)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(p)}$.

3. Exemple de la fonction zêta

Soient $I =]1, +\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$.

On rappelle que $\sum f_n$ converge simplement sur I et que sa somme est notée ζ .

La continuité de ζ a déjà été prouvée.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et, si $k \geq 1$, $f_n^{(k)} : x \mapsto (-1)^k \frac{\ln^k(n)}{n^x}$.

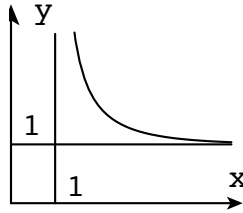
Soit $a \in I$, si $x \geq a$, on a $|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{\ln^k(n)}{n^a} = \alpha_n$, terme général d'une série réelle

convergente car $\alpha_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{n^b}\right)$ où $1 < b < a$, par croissances comparées.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, le corollaire 2.2. s'applique, prouve que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I avec, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout

$x \in I$, $\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^k(n)}{n^x}$. En particulier ζ est décroissante et convexe.

Rappelons que $\lim_{+\infty} \zeta = 1$ et que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$ d'après le chapitre précédent.



V. Arcs paramétrés

E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n élément de $\{2, 3\}$.

1. Définitions

1. On appelle *arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$* un couple (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f un élément de $\mathcal{C}^1(I, E)$.
2. Dans ce cas $f(I)$ est appelée **trajectoire** ou **support** du mouvement.
3. On dit qu'un élément t_0 de I est une **valeur régulière du paramètre** (ou *valeur régulière* pour abréger) si $f'(t_0) \neq \vec{0}$, l'arc est dit *régulier* si toutes les valeurs du paramètre sont régulières.
4. On dit que la droite $M_{t_0} + \mathbb{R}\vec{u}$ est *tangente* à la trajectoire pour la valeur t_0 s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage de 0, à valeur réelles, de limite nulle en 0 telle que $\overrightarrow{M_{t_0}M_{t_0+h}} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon(h)\vec{u}$.

Remarques

t_0 est une valeur régulière du paramètre si, et seulement si, $\frac{d\vec{M}}{dt}_{t_0} \neq \vec{0}$.

2. Théorème

Si t_0 est une valeur régulière alors $\frac{d\vec{M}}{dt}_{t_0}$ est tangent à la trajectoire en M_{t_0} .

Démonstration

On a $M_{t_0+h} = O + f(t_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} M_{t_0} + (t - t_0) \frac{d\vec{M}}{dt}_{t_0} + o(\vec{h})$ d'où le résultat. $\square$

EXERCICES

Sauf mention contraire, (E, N) désigne un espace vectoriel normé de dimension finie.

1. $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} [f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)]$. En déduire les fonctions f telles que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

2. I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$. $\Delta_h g(x) = \frac{1}{h}(g(x+h) - g(x))$ pour $g \in \mathbb{R}^I$ telle que $(x+h, x) \in I^2$ avec $h \neq 0$. Si $x \in I$, montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_h^n f(x) = f^{(n)}(x)$ où $\Delta_h^n = \Delta_h \circ \Delta_h^{n-1} = \Delta_h^{n-1} \circ \Delta_h$ si $n \geq 1$ et $\Delta_h^0 f = f$.

On pourra introduire la fonction $\varphi : t \mapsto (e^t - 1)^n$ et déterminer $\varphi^{(k)}(0)$ si $k \leq n$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\theta : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(x\theta(x)).$$

a. On suppose que $f^{(3)}(0) \neq 0$. Déterminer $\lim_0 \theta$.

b. Même question si : $\forall k \in \llbracket 3, p-1 \rrbracket, f^{(k)}(0) = 0$ et $f^{(p)}(0) \neq 0$.

4. Soit $f \in \mathcal{C}^p(I, I)$, $p \geq 2$. On suppose qu'il existe un unique point fixe ℓ de f dans I . On définit (x_n) par $x_0 \in I$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. On suppose que $\ell = \lim(x_n)$, $f^{(k)}(\ell) = 0$ si $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ et $f^{(p)}(\ell) \neq 0$. Montrer que :

$$\exists(\mu, A) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 1[, |x_n - \ell| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \mu A^{(p^n)}.$$

On pourra étudier la série $\sum \beta_n$ où $\beta_n = \frac{1}{p^{n+1}} \ln \left[\frac{|x_{n+1} - \ell|}{|x_n - \ell|^p} \right]$.

5. Limites des suites définies pour $n \geq 1$, par :

a. $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[n]{a^k}, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; b. $v_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{1/n}$; c. $w_n = \sum_{k=n}^{2n} \sin^2 \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right)$.

6. $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Étudier $(u_n)_{n \geq 1}$ où $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$.

En déduire : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n+1)(2n+3) \dots (4n-1)}{2n(2n+2) \dots (4n-2)} \right)$.

7. a. Montrer que le système d'équations : $\int_0^x P(t) \sin(t) dt = \int_0^x P(t) \cos(t) dt = 0$, d'inconnue x n'a qu'un nombre fini de solutions réelles si $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) \geq 1$.

b. si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si $x < y \leq x + \pi$ et $\int_x^y f(t) e^{it} dt = 0$, montrer que f s'annule au moins une fois dans $]x, y[$.

8. Montrer que la relation $\int_x^{f(x)} e^{t^2} dt = 1$ définit une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est axe de symétrie de la courbe représentative de f . Étudier les branches infinies de la courbe.

9. $h \in \mathbb{R}_+^*$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^{2k+1}([-kh, kh], \mathbb{R})$. on associe à f le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2k$ tel que pour $i \in \llbracket -k, k \rrbracket$, $P(ih) = f(ih)$. On pose $M = \sup_{x \in [-kh, kh]} |f^{(2k+1)}(x)|$. Montrer que $|f'(0) - P'(0)| \leq \frac{Mh^{2k}}{(2k+1) \binom{2k}{k}}$.

Pour $x \in]-h, h[\setminus \{0\}$, on définira A tel que $f(x) - P(x) = Ax \prod_{p=1}^k (x^2 - (pk)^2)$.

10. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n(z) = \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^n}{n!} e^{zt} dt$.

a. Montrer que $I_n(z) = \frac{1}{z^{2n+1}} [e^z A_n(z) - e^{-z} A_n(-z)]$ où $A_n \in \mathbb{Z}[X]$ et $\deg(A) = n$.

b. Donner un développement limité de $e^{2x} - \frac{A_n(-x)}{A_n(x)}$ à l'ordre $(2n+1)$ en 0.

11. Soit E l'ensemble des applications de $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{C})$ telles que $f(0) = 0$. On pose $n(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) + f'(t)|$ et $N(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| + \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$.

Montrer que n et N sont deux normes équivalentes sur E . On pourra utiliser les remarques suivantes : $f(x) = \int_0^x f'(t) dt$ et $\frac{d}{dt}(e^t f(t)) = e^t (f'(t) + f(t))$ si $f \in E$.

12. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ muni de $N_\infty^{[0, 1]}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$u(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$. On pose $u^0 = I_E$, $u^n = u \circ u^{n-1}$ si $n \geq 1$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], u^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$.

b. Montrer que $u \in \mathcal{L}_c(E)$ et déterminer $\|u^n\|$ si $n \geq 1$.

13. a. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$, $a < b$ et si $I(\lambda) = \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} I(\lambda) = 0$.

b. En déduire que ce résultat est encore vrai si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$. On pourra utiliser un théorème d'approximation. On parle alors du **lemme de Riemann-Lebesgue**.

14. Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], E)$ telle que $f(a) = f(b) = 0_E$. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = \int_a^b |t - x| f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

15. Si a et b sont deux réels, soit $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$. Montrer que $F : f \mapsto \int_0^1 f'^2$ admet un minimum m sur $\mathcal{E}$, expliciter m et $F^{-1}(\{m\})$.

16. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], E)$ telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0_E$ et $N[f(1)] = 1$. Montrer l'existence d'un élément x_0 de $[0, 1]$ tel que $N[f''(x_0)] = 4$.

17. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, E)$ dérivable en 0, on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(kx) = kf(x)$. Montrer que f est linéaire.

18. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, E)$ qui admet une limite en $+\infty$ et telle que f' est uniformément continue. Montrer que f' admet 0_E pour limite en $+\infty$.

19. Soient $f \in \mathcal{C}([0, 1],]0, +\infty[)$, $I = \int_0^1 f$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer l'existence d'une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[0, 1]$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \frac{I}{n}$$

b. Si $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, $f' > 0$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, montrer l'existence d'une suite strictement croissante $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{f'(x_i)} = n$.

20. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des réels deux à deux distincts et $P = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$. On se propose de montrer que $z \mapsto |P(z)|$ admet un minimum sur l'ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1 et que ce minimum n'est atteint qu'en ± 1 .

a. Montrer l'existence de ce minimum et traiter le cas $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \cap \{-1, +1\} \neq \emptyset$. On suppose désormais $P(-1) \neq 0 \neq P(1)$.

b. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\theta) = |P(e^{i\theta})|^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$(i) \forall \theta \in \mathbb{R}, \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \sin(\theta)}{\alpha_k^2 - 2\alpha_k \cos(\theta) + 1},$$

$$(ii) \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \frac{f''f - f'^2}{f^2}(\theta) = \cotan(\theta) \frac{f'}{f}(\theta) - 4 \sin^2(\theta) \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k^2}{(\alpha_k^2 - 2\alpha_k \cos(\theta) + 1)^2}.$$

c. Conclure.

21. Seconde formule de la moyenne

Soient f et g des éléments de $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, f étant décroissante et positive et G la primitive (continue) de g nulle en a . On pose $[m, M] = G([a, b])$.

a. On suppose f en escalier, montrer que $mf(a) \leq \int_a^b fg \leq Mf(a)$.

b. Montrer l'existence d'une suite (f_n) de fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est positive décroissante avec $f_n(a) = f(a)$.

c. En déduire l'existence d'un élément ξ de $[a, b]$ tel que $\int_a^b fg = f(a) \int_a^\xi g$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

1. Du théorème de Taylor-Young, on déduit :

$$f(x+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2) \text{ et}$$

$$f(x-h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2). \text{ D'où :}$$

$$\Delta_h(x) = \frac{1}{h^2} [f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)] \underset{h \rightarrow 0}{=} f''(x) + o(1). \text{ Donc : } \Delta_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f''(x).$$

• Si f existe et vérifie : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ (1)
alors $f(0) = f(0)^2$. Donc $f(0) \in \{0, 1\}$. Si $f(0) = 0$, alors (1) pour x quelconque et $y = 0$ implique $f(x) = f(0)f(x) = 0$ i.e. f est la fonction nulle.

Supposons f distincte de la fonction nulle. (1) avec $x = 0$ donne f paire.

Soit x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$, en utilisant (1) avec $x = x_0, y = h$ et le début de l'exercice, on a : $2f(x_0) \left(\frac{f(h) - 1}{h^2} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f''(x_0)$. Donc $\exists a = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h^2} \in \mathbb{R}$.

Si $x \in \mathbb{R}, 2f(x) \left(\frac{f(h) - 1}{h^2} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} af(x)$ et $2f(x) \left(\frac{f(h) - 1}{h^2} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f''(x)$.

De l'unicité de la limite, on déduit que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - ay = 0$.

– si $a = 0, f(x) = \alpha x + \beta$. De $f(0) = 1$ et f paire, on déduit $f(x) = 1$.

– si $a > 0, a = \omega^2$ où $\omega > 0$. $f(x) = \alpha \operatorname{ch}(\omega x) + \beta \operatorname{sh}(\omega x)$. De $f(0) = 1$ et f paire, on déduit $f(x) = \operatorname{ch}(\omega x)$.

– si $a < 0, a = -\omega^2$ où $\omega > 0$. $f(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$. De $f(0) = 1$ et f paire, on déduit $f(x) = \cos(\omega x)$.

• Réciproquement, on montre aisément que les fonctions définies pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par : $\chi_\omega(x) = \operatorname{ch}(\omega x)$, et $\psi_\omega(x) = \cos(\omega x)$ vérifient (1). Notons que $\chi_0(x) = 1$.

• En conclusion, les fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant (1) sont les fonctions définies pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par : $x \mapsto 0, x \mapsto \operatorname{ch}(\omega x)$ et $x \mapsto \cos(\omega x)$ où $\omega \in \mathbb{R}$.

Remarque : on montre que les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient (1) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ en utilisant des techniques classiques, vues en première année, sur les équations fonctionnelles.

2. $\Delta_h = \frac{1}{h}(T_h - I)$ où $T_h : g \mapsto G$ définie par $G(x) = g(x+h)$. Par récurrence, on a $T_h^n = G_n$ où $G_n(x) = g(x+nh)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme T_h et I commutent dans l'algèbre des endomorphismes de $\mathcal{F}(I, E)$, le

binôme de Newton donne : $\Delta_h^n = \frac{1}{h^n}(T_h - I)^n = \frac{1}{h^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^{n-p} T_h^p$.

$$\Delta_h^n(g)(x) = \frac{1}{h^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^{n-p} (-1)^{n-p} g(x+ph).$$

D'après le théorème de Taylor-Young, on a : $f(x+ph) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(ph)^k}{k!} f^{(k)}(x) + o(h^n)$.

$$\text{D'où : } \Delta_h^n(f)(x) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{h^n} \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{p} (-1)^{n-p} \frac{(ph)^k}{k!} f^{(k)}(x) + o(1).$$

$$\Delta_h^n(f)(x) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \left(\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^{n-p} p^k \right) \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + o(1).$$

$$\varphi(t) = (e^t - 1)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^{n-p} e^{pt} \Rightarrow \varphi^{(k)}(0) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^{n-p} p^k.$$

$$e^t - 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t \Rightarrow \varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^n \text{ i.e. } \varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t^n + o(t^n).$$

De l'unicité du développement limité de la fonction φ en 0 et du théorème de Taylor-Young, on déduit que $\varphi^{(k)}(0) = 0$ si $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\varphi^{(n)}(0) = n!$

D'où $\Delta_h^n(f)(x) \underset{h \rightarrow 0}{=} f^{(n)}(x) + o(1)$ et le résultat.

3. a. D'après l'énoncé, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(x\theta(x))$.

Du théorème de Taylor-Young, on déduit que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f^{(3)}(0) + o(x^3).$$

$$\text{Donc : } f''(x\theta(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} f''(0) + \frac{x\theta(x)}{3} f^{(3)}(0) + o(x) \text{ car } \theta(x) \in]0, 1[.$$

$$\text{Or : } f''(x\theta(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} f''(0) + x\theta(x)f^{(3)}(0) + o(x) \text{ car } \theta(x) \in]0, 1[.$$

$$\text{Comme } f^{(3)}(0) \neq 0, \text{ on obtient : } \theta(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

b. En procédant de même, compte tenu des hypothèses, on peut écrire :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + o(x^p). \quad (\star)$$

$$f''(x\theta(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} f''(0) + \frac{(x\theta(x))^{p-2}}{(p-2)!} f^{(p)}(0) + o(x^{p-2}).$$

$$\text{En effet, comme } \theta(x) \in]0, 1[, \text{ on a } o(x\theta(x))^{p-2} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{p-2}).$$

$$\text{Donc : } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^p \theta(x)^{p-2}}{2(p-2)!} f^{(p)}(0) + o(x^p). \quad (\star\star)$$

$$\text{Comme } f^{(p)}(0) \neq 0, \text{ on déduit de } (\star) \text{ et } (\star\star) \text{ que } \frac{(\theta(x))^{p-2}}{2(p-2)!} \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{1}{p!}.$$

$$\text{D'où } \theta(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} \left(\frac{2}{p(p-1)} \right)^{\frac{1}{p-2}}.$$

4. Par Taylor-Young $x_{n+1} - \ell = f(x_n) - f(\ell) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{(x_n - \ell)^p}{p!} f^{(p)}(\ell) + o((x_n - \ell)^p)$
 car $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$. Par conséquent $\frac{|x_{n+1} - \ell|}{|x_n - \ell|^p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha = \left| \frac{f^{(p)}(\ell)}{p!} \right|$.

Par continuité $\ln \left[\frac{|x_{n+1} - \ell|}{|x_n - \ell|} \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln(\alpha)$ et $\beta_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(p^{-n})$, $\sum \beta_n$ converge absolument par comparaison à une série géométrique convergente.

On vient de voir en fait $\beta_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} p^{-n-1} \ln \alpha + o(p^{-n-1})$. D'où, par sommation de relations de comparaison :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \beta_k \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln \alpha \sum_{k=n}^{\infty} p^{-k-1} + o\left(\sum_{k=n}^{\infty} p^{-k-1}\right) = \frac{\ln \alpha}{p-1} p^{-n} + o(p^{-n}).$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \beta_k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \text{ or } \beta_k = p^{-k-1} \ln |x_{k+1} - \ell| - p^{-k} \ln |x_k - \ell|. \text{ (dominos)}$$

D'où $\sum_{k=n}^{\infty} \beta_k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k + \ln |x_0 - \ell| - p^{-n} \ln |x_n - \ell|$. Posons $\lambda = \frac{\ln \alpha}{p-1}$, on a :

$$p^{-n} \ln |x_n - \ell| \underset{n \rightarrow \infty}{=} C - \lambda p^{-n} + o(p^{-n}) \text{ puis } |x_n - \ell| \underset{n \rightarrow \infty}{=} (e^C)^{p^n} e^{-\lambda} e^{o(1)}, \text{ d'où } |x_n - \ell| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \mu A^{(p^n)} \text{ avec } \mu = e^{-\lambda} > 0 \text{ et } A = e^C \in]0, 1[\text{ car } x_n - \ell \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

5. a. La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ est continue sur $[0, 1]$ et $u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

D'après le théorème sur les sommes de Riemann, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 f = \frac{a-1}{\ln(a)}$.

b. $\ln(v_n) = \alpha_n = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{(n+1) \cdots (n+n)}{n^n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$. On déduit du

théorème sur les sommes de Riemann que $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 \ln(1+x) dx = I$.

$$I = \left[(x+1) \ln(x+1) - x \right]_0^1 = \ln(4) - 1. \text{ Comme exp est continue sur } \mathbb{R}, v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{4}{e}.$$

c. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [0, 1], x^2 - \lambda x^4 \leq \sin^2(x) \leq x^2$. ($\star$)

En effet, la fonction φ telle que $\varphi(x) = \frac{\sin^2(x) - x^2}{x^4}$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = -\frac{1}{3}$ est continue sur le segment $[0, 1]$. On déduit de ($\star$), pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k} - \frac{\lambda}{k^2} \leq \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leq \frac{1}{k}. \text{ D'où par sommation : } a_n - \lambda b_n \leq u_n \leq a_n,$$

$$\text{où } a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n \frac{1}{1 + \frac{p}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2) \text{ et } b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \text{ car}$$

$$0 \leq b_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n^2} = \frac{n+1}{n^2}. \text{ Par encadrement, on a : } u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln(2).$$

6. D'après le théorème des accroissements finis, $f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n} f'(c_k)$

$$\text{où } \frac{2k}{2n} = \frac{k}{n} < c_k < \frac{2k+1}{2n} < \frac{2k+2}{2n} = \frac{k+1}{n}.$$

Comme f' est continue, on déduit du théorème sur les sommes de Riemann que :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^1 f' = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

$$\text{Si } v_n = \frac{(2n+1)(2n+3) \dots (4n-1)}{2n(2n+2) \dots (4n-2)}, \text{ alors } \ln(v_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

où $f(t) = \ln(1+t)$. Donc $\ln(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(2)$. D'où $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2}$ par continuité de exp.

7. a. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'une suite strictement croissante (x_n) de solutions réelles. $x \mapsto P(x)e^{ix}$ admet une primitive de la forme $x \mapsto Q(x)e^{ix}$ où $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg(Q) = \deg(P)$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-ix_n} \int_0^{x_n} P(t)e^{it} dt = 0$ i.e. $Q(x_n) = e^{-ix_n} Q(0)$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\overline{Q}Q)(x_n) = (\overline{Q}Q)(0)$ même si $(\overline{Q}Q)(0)$ est nul. Le polynôme $\overline{Q}Q - (\overline{Q}Q)(0)$ possède une infinité de zéros donc est nul alors qu'il est de degré $2\deg(P)$: c'est absurde.

b. Sinon f est continue de signe constant sur $[x, y]$ ainsi que $t \mapsto f(t) \sin(t-x)$. Or $\int_x^y f(t) \sin(t-x) dt = \cos(x) \int_x^y f(t) \sin(t) dt - \sin(x) \int_x^y f(t) \cos(t) dt = 0$, ce qui est absurde.

8. Soit $\Phi : x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$, Φ est impaire de classe $\mathcal{C}^\infty$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et, si $x \geq 1$, on a : $\Phi(x) \geq \int_1^x e^t dt = e^x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Φ réalise un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme croissant entre $\mathbb{R}$ et lui-même.

$\int_x^{f(x)} e^{t^2} dt = 1 \iff \Phi(f(x)) - \Phi(x) = 1 \iff f(x) = \Phi^{-1}(1 + \Phi(x))$ prouve que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Montrer que la droite D d'équation $y = -x$ est axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ revient à montrer que, pour tout réel x , $(y = f(x) \Rightarrow -x = f(-y))$.

Comme $t \mapsto e^{t^2}$ est paire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{f(x)} e^{t^2} dt = \int_{-f(x)}^{-x} e^{t^2} dt$ et donc $-x = f(-f(x))$, ce qui prouve l'invariance de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f par la réflexion d'axe D .

Comme Φ est strictement croissante et $\Phi(f(x)) - \Phi(x) = 1$ on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq x$.

D'autre part, si $x \in \mathbb{R}$, $1 = \int_x^{f(x)} e^{t^2} dt \geq \int_x^{f(x)} e^{x^2} dt = [f(x) - x]e^{x^2}$ d'où $x \leq f(x) \leq x + e^{-x^2}$ et donc $f(x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{=} x + o(1)$ ce qui prouve que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

9. Soit $g : [-hk, hk] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t) - P(t) - At \prod_{p=1}^k (t^2 - p^2 h^2)$.

g a $(2k+2)$ zéros distincts (x et les points ih où $i \in \llbracket -k, k \rrbracket$).

Des applications du théorème de Rolle et un raisonnement par récurrence prouvent qu'il existe $c \in [-hk, hk]$ tel que $g^{(2k+1)}(c) = f^{(2k+1)}(c) - (2k+1)!A = 0$.

Donc : $\forall x \in]-h, h[\setminus \{0\}, \exists c \in [-hk, hk], f(x) - P(x) = \frac{f^{(2k+1)}(c)}{(2k+1)!} x \prod_{p=1}^k (x^2 - p^2 h^2)$.

Donc : $\left| \frac{f(x) - P(x)}{x} \right| \leq \frac{M}{(2k+1)!} \prod_{p=1}^k (x^2 - p^2 h^2)$. Par passage à la limite quand x

tend vers 0, comme $f(0) = P(0)$, on a :

$$|f'(0) - P'(0)| \leq \frac{Mh^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{Mh^{2k}}{(2k+1) \binom{2k}{k}}.$$

10. a. Après deux intégrations par parties, on trouve :

$$I_{n+1}(z) = \left[\frac{(1-t^2)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{e^{tz}}{z} \right]_{-1}^{+1} + \frac{2}{z} \int_{-1}^{+1} \frac{t(1-t^2)^n}{n!} e^{tz} dt.$$

$$I_{n+1}(z) = \frac{2}{z} \left[\frac{t(1-t^2)^{n+1}}{n!} \frac{e^{tz}}{z} \right]_{-1}^{+1} - \frac{2}{z^2} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{(1-t^2)^n}{n!} - \frac{2t^2(1-t^2)^{n-1}}{(n-1)!} \right] e^{tz} dt.$$

$$\text{Donc : } I_{n+1}(z) = -\frac{2}{z^2} I_n(z) + \frac{4}{z^2} (I_{n-1}(z) - n I_n(z)).$$

$$\text{De même, on a : } I_0(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{z} \text{ et } I_1(z) = \frac{1}{z^3} [(z+2)e^z - (-z+2)e^{-z}].$$

$$\text{D'où } A_0(z) = 1 \text{ et } A_1(z) = z + 2.$$

Supposons que jusqu'au rang n , la relation de l'énoncé soit vraie. Alors :

$$I_{n+1}(z) = \frac{1}{z^{n+3}} [-(4n+2)(e^z A_n(z) - e^{-z} A_n(-z)) + 4z^2(e^z A_{n-1}(z) - e^{-z} A_{n-1}(-z))]$$

$$\text{est de la même forme avec } A_{n+1}(z) = -(4n+2)A_n(z) + 4z^2 A_{n-1}(z). \quad (\star)$$

Par un raisonnement par récurrence, on montre en utilisant cette relation, que les polynômes A_p sont à coefficients entiers et de degré p , le coefficient dominant de A_p étant de la forme $(-1)^{p-1} a_p$ où $a_p > 0$.

De $(\star)$ on déduit $A_{n+1}(0) = -(4n+2)A_n(0)$ pour tout $n \geq 1$.

Comme $A_0 = 1$ et $A_1(0) = 2$, on a : $A_n(0) = (-1)^{n-1} 2^n 1.3 \dots (2n-1)$ pour $n \geq 1$.

Du théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, on déduit immédiatement que I_n est continue sur $\mathbb{C}$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} I_n(x) = \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^n}{n!} dt = u_n$.

Par le changement de variable $\theta = \arcsin(t)$ qui établit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $[-1, 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient $u_n = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\theta) d\theta = \frac{2^{n+1}}{1.3 \dots (2n+1)}$, d'après le cours sur les intégrales de Wallis.

$$\text{b. Notons que : } I_n(x) = \frac{e^x A_n(x)}{x^{2n+1}} \left[e^{2x} - \frac{A_n(-x)}{A_n(x)} \right].$$

$$\frac{1}{x^{2n+1}} \left[e^{2x} - \frac{A_n(-x)}{A_n(x)} \right] \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{I_n(0)}{A_n(0)} = \frac{2(-1)^{n-1}}{[1.3 \dots (2n-1)]^2 (2n+1)}.$$

Donc e^{2x} et $\frac{A_n(-x)}{A_n(x)}$ ont même développement limité à l'ordre $2n$. D'où :

$$e^{2x} - \frac{A_n(-x)}{A_n(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{2(-1)^{n-1}}{[1.3 \dots (2n-1)]^2 (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

11. Comme $N_\infty^{[0,1]}(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ définit une norme sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$, on vérifie facilement que N est une norme sur $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{C})$ et donc sur E . Notons $I = [0, 1]$.

Quant à n , on vérifie facilement que pour tout $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$n(\lambda f) = |\lambda|n(f) \text{ et } n(f + g) \leq n(f) + n(g). \text{ En outre}$$

$$n(f) = 0 \Rightarrow \forall t \in [0, 1], f(t) + f'(t) = 0 \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t, f(t) = \lambda e^{-t}) \Rightarrow \forall t, f(t) = 0 \text{ car } f(0) = \lambda = 0.$$

On a $\forall f \in E, n(f) \leq N_\infty^I(f) + N_\infty^I(f') = N(f)$. D'autre part, si $f \in E$,

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt \Rightarrow \forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq \int_0^x |f'(t)|dt \leq xN_\infty(f') \leq N_\infty^I(f').$$

Donc $N_\infty^I(f) \leq N_\infty^I(f')$. Soit pour $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{C}), g : t \mapsto f(t)e^t$, alors $f \in E$ si, et seulement si, $g \in E$.

On a : $g'(t) = (f'(t) + f(t))e^t$ et inversement $f'(t) = (g'(t) - g(t))e^{-t}$. Donc :

$$N_\infty^I(g') \leq e n(f) \text{ et } N_\infty^I(f') \leq N_\infty^I(g) + N_\infty^I(g'). \text{ D'où pour } f \in E$$

$$N(f) = N_\infty^I(f) + N_\infty^I(f') \leq 2N_\infty^I(f') \leq 2(N_\infty^I(g) + N_\infty^I(g')) \leq 4N_\infty^I(g') \leq 4e n(f).$$

La double inégalité : $\forall f \in E, n(f) \leq N(f) \leq 4e n(f)$ traduit l'équivalence des normes.

12. a. Notons $F_n = u^n(f)$. On a : $F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}$ si $n \geq 1$ et $F_0 = f$.

F_1 est la primitive de la fonction f continue sur $[0, 1]$ et qui s'annule en 0. Donc $F_1' = f$ et $F_1(0) = 0$. Par récurrence, on montre que $F_n \in \mathcal{C}^n([0, 1], \mathbb{C})$ et que $F_n' = F_{n-1}$. D'où $F_n^{(k)}(0) = 0$ si $0 \leq k \leq n-1$ et $F_n^{(n)} = f$.

D'après la formule de Taylor-Laplace, on a, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F_n^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} F_n^{(n)}(t)dt. \text{ D'où le résultat.}$$

b. $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall x \in [0, 1], |u(f)(x)| \leq xN_\infty^{[0,1]}(f) \leq N_\infty^{[0,1]}(f)$.

Donc : $N_\infty^{[0,1]}(u(f)) \leq N_\infty^{[0,1]}(f)$. i.e. $u \in \mathcal{L}_c(E)$ et $\|u\| \leq 1$. De même :

$$\forall x \in [0, 1], |u^n(f)(x)| \leq N_\infty^{[0,1]}(f) \cdot \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{x^n}{n!} \leq \frac{1}{n!}. \text{ Donc } \|u^n\| \leq \frac{1}{n!}.$$

Pour $f_0 \in E$ définie par $f_0(t) = 1$, on a $N_\infty^{[0,1]}(u^n(f_0)) = \frac{1}{n!} N_\infty^{[0,1]}(f_0) = \frac{1}{n!}$.

D'où $\|u^n\| = \frac{1}{n!}$ pour tout $n \geq 1$.

13. a. En intégrant par parties, si $\lambda \neq 0$, $I(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} \left[f(t)e^{i\lambda t} \right]_a^b - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b f'(t)e^{i\lambda t} dt$

$$\text{d'où } |I(\lambda)| \leq \frac{2N_\infty^{[a,b]}(f) + N_1^{[a,b]}(f')}{|\lambda|} \text{ et donc } I(\lambda) \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow +\infty} 0.$$

b. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$ (une telle suite existe d'après le théorème d'approximation de Weierstrass)

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n : \lambda \mapsto \int_a^b P_n(t)e^{i\lambda t} dt$.

Pour tout $(\lambda, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $|I(\lambda) - I_n(\lambda)| \leq (b-a)N_\infty^{[a,b]}(f - P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

(I_n) converge uniformément vers I sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n(\lambda) \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow +\infty} 0$, le théorème de la double limite montre que $I(\lambda) \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow +\infty} 0$.

14. Comme on le verra au chapitre suivant, $\varphi : (x, t) \mapsto |t - x|f(t)$ étant continue sur $\mathbb{R} \times [a, b]$ la fonction Φ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant qu'intégrale sur un segment dépendant d'un paramètre, en revanche $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ n'est pas définie sur $\mathbb{R} \times [a, b]$.

$$\text{Si } x \geq b, \Phi(x) = \int_a^b (x - t)f(t) dt = x \int_a^b f(t) dt - \int_a^b tf(t) dt,$$

$$\begin{aligned} \text{si } a \leq x \leq b, \Phi(x) &= \int_a^x (x - t)f(t) dt + \int_x^b (t - x)f(t) dt \\ &= x \int_a^x f(t) dt - \int_a^x tf(t) dt + \int_x^b tf(t) dt - x \int_x^b f(t) dt, \end{aligned}$$

$$\text{si } x \leq a, \Phi(x) = \int_a^b (t - x)f(t) dt = \int_a^b tf(t) dt - x \int_a^b f(t) dt,$$

donc Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\text{si } x > b, \Phi'(x) = \int_a^b f, \quad \text{si } x < a, \Phi(x) = - \int_a^b f,$$

$$\text{si } a < x < b, \Phi'(x) = \int_a^x f + xf(x) - xf(x) - xf(x) + xf(x) - \int_x^b f = \int_a^x f - \int_x^b f.$$

Φ est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\Phi'(a^-) = \Phi'(a^+) = - \int_a^b f$ et

$$\Phi'(b^-) = \Phi'(b^+) = \int_a^b f, \text{ donc } \Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

De plus Φ' est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ avec $\Phi'' = 2f$ sur $]a, b[$ et Φ'' nulle en dehors de $[a, b]$. Comme $\Phi''(a^-) = \Phi''(a^+) = \Phi''(b^-) = \Phi''(b^+) = 0_E$, Φ' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ i.e. Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

15. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que, si $f \in \mathcal{E}$, $\left(\int_0^1 1 \times f' \right)^2 \leq F(f)$

avec égalité si, et seulement si, $(1, f')$ est une famille liée, donc $F(f) \geq (b - a)^2$ avec égalité si, et seulement si, f est affine.

$\mathcal{E}$ contient exactement une fonction affine, $f_0 : x \mapsto a + (b - a)x$, ce qui prouve que, sur $\mathcal{E}$, F admet $(b - a)^2$ pour minimum global strict et qu'il n'est atteint qu'en f_0 .

16. Appliquons deux fois l'inégalité de Taylor-Lagrange à f :

$$N\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) - \frac{1}{2}f'(0)\right) \leq \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 N_{\infty}^{[0,1]}(f''),$$

$$N\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)f'(1)\right) \leq \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 N_{\infty}^{[0,1]}(f'').$$

$$\text{Par suite } \begin{cases} N_{\infty}^{[0,1]}(f'') \geq 8N\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ N_{\infty}^{[0,1]}(f'') \geq 8N\left(f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \geq 8N(f(1)) - N\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \end{cases}$$

et, en sommant, $2N_{\infty}^{[0,1]}(f'') \geq 8$ i.e. $N_{\infty}^{[0,1]}(f'') \geq 4$.

Comme $N \circ f$ est continue sur le compact $[0, 1]$, $N_{\infty}^{[0,1]}(f'')$ est atteinte en un point x_0 de $[0, 1]$ qui répond à la question.

17. Pour tout réel x , $f\left(k \times \frac{x}{k}\right) = kf\left(\frac{x}{k}\right)$ d'où $f\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{1}{k}f(x)$, ce qui permet de supposer $|k| < 1$.

Si $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(kx)}{kx}$ et donc $\frac{f(k^n x)}{k^n x}$ est le terme général d'une suite constante qui converge vers $f'(0)$ car $(k^n x)$ converge vers 0. Cela montre que f et $x \mapsto xf'(0)$ coïncident sur $\mathbb{R}^*$ et donc sur $\mathbb{R}$ car elles sont continues en 0.

18. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, par uniforme continuité de f' on peut choisir $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x, x') \in (\mathbb{R}_+)^2, |x - x'| \leq \eta \Rightarrow N[f'(x) - f'(x')] \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi : t \mapsto f(x+t) - f(x) - tf'(x)$ est dérivable avec pour dérivée $\varphi' : t \mapsto f'(x+t) - f'(x)$ et l'inégalité des accroissements finis prouve que $N[\varphi(\eta) - \varphi(0)] = N[f(x+\eta) - f(x) - \eta f'(x)] \leq \eta \frac{\varepsilon}{2}$.

Par suite $N[f'(x)] \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\eta} N[f(x+\eta) - f(x)] = \psi(x)$ avec $\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon}{2}$ car f admet une limite en $+\infty$. Donc il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que : $x \geq A \Rightarrow N[f'(x)] \leq \varepsilon$ et donc $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0_E$.

19. a. On pose $x_0 = a$. La fonction $F_0 : x \mapsto \int_0^x f$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$

entre $[0, 1]$ et $[0, I]$ donc il existe un unique $x_1 \in]0, 1]$ tel que $F_0(x_1) = \frac{I}{n}$.

Supposons définie, pour un élément k de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, une suite strictement croissante $(x_0, \dots, x_k)$ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \frac{I}{n}$.

$F_{k+1} : x \mapsto \int_{x_k}^x f$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ entre $[x_k, 1]$ et $\left[0, \left(1 - \frac{k}{n}\right)I\right]$.

Comme $\left(1 - \frac{k}{n}\right)I \geq \frac{I}{n}$, il existe un unique $x_{k+1} \in]x_k, 1]$ tel que $F_{k+1}(x_{k+1}) = \frac{I}{n}$

et, de plus $x_n = b$ car $F_{n-1}(b) = \frac{I}{n}$. La subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ ainsi construite est solution.

b. En appliquant a) à f' on obtient une subdivision $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[0, 1]$ telle que,

$$\text{pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \int_{a_{i-1}}^{a_i} f' = \frac{1}{n} \int_0^1 f' = \frac{1}{n} \text{ i.e. } f(a_i) - f(a_{i-1}) = \frac{1}{n}.$$

L'égalité des accroissements finis prouve, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'existence de $x_i \in]a_{i-1}, a_i[$ tel que $f(a_i) - f(a_{i-1}) = (a_i - a_{i-1})f'(x_i)$. Pour un tel x_i on a

$$\frac{1}{f'(x_i)} = n(a_i - a_{i-1}) \text{ et, en sommant, } \sum_{i=1}^n \frac{1}{f'(x_i)} = n.$$

20. a. L'existence du minimum découle immédiatement de la continuité de $|P|$ sur le compact non vide $\mathbb{U}$.

Si, par exemple, $\alpha_1 \in \{-1, 1\}$ alors $|P(\alpha_1)| = 0$ et il s'agit d'un minimum qui ne peut être atteint qu'en un point de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \cap \mathbb{U}$ soit $\{-1, 1\}$ car les α_i sont réels.

b. Pour tout réel θ , $f(\theta) = P(e^{i\theta})\overline{P(e^{-i\theta})}$ et donc, d'après les théorèmes relatifs aux opérations, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = \prod_{k=1}^n (e^{i\theta} - \alpha_k)(e^{-i\theta} - \alpha_k) = \prod_{k=1}^n (\alpha_k^2 - 2\alpha_k \cos(\theta) + 1) \text{ et donc}$$

$$\ln[f(\theta)] = \sum_{k=1}^n \ln[\alpha_k^2 - 2\alpha_k \cos(\theta) + 1] \text{ car, pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket :$$

$$\alpha_k^2 - 2\alpha_k \cos(\theta) + 1 = |e^{i\theta} - \alpha_k|^2 > 0.$$

En dérivant on obtient immédiatement (i). De plus :

$$\begin{aligned} \left(\frac{f'}{f}\right)'(\theta) &= \frac{f''f - f'^2}{f^2}(\theta) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \cos(\theta)}{\alpha_k^2 - 2\alpha_k \cos(\theta) + 1} - 4 \sin^2(\theta) \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k^2}{(\alpha_k^2 - 2\alpha_k \cos(\theta) + 1)^2}, \end{aligned}$$

d'où l'égalité (ii).

c. Si f admet un minimum en $\theta_0 \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ alors $f'(\theta_0) = 0$ et donc, d'après (ii),

$$\frac{f''}{f}(\theta_0) = -4 \sin^2(\theta_0) \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k^2}{(\alpha_k^2 - 2\alpha_k \cos(\theta_0) + 1)^2} < 0 \text{ et donc } f''(\theta_0) < 0, \text{ ce qui}$$

justifie le tableau de variations locales :

	$\theta_0 - \eta$	θ_0	$\theta_0 + \eta$
f''	—	—	
f'	+	$\searrow$ 0 $\searrow$	—
f		$\nearrow$ $\searrow$	

qui prouve que f ne peut pas admettre en θ_0 un minimum. Donc si f admet un minimum en θ_0 alors $\theta_0 \in \pi\mathbb{Z}$ i.e. $e^{i\theta_0} \in \{-1, 1\}$, ce qui termine l'exercice.

21. a. Soit $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision subordonnée à f et, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, λ_i la valeur prise par f sur $]x_i, x_{i+1}[$.

$$\int_a^b fg = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} g = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i [G(x_{i+1}) - G(x_i)] = \sum_{i=1}^n \lambda_{i-1} G(x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i G(x_i)$$

$$\text{car } G(x_0) = G(a) = 0. \text{ Donc } \int_a^b fg = \lambda_{n-1} G(b) + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i-1} - \lambda_i) G(x_i).$$

Comme f est positive décroissante on a $\lambda_{n-1} \geq 0$ et, $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\lambda_{i-1} - \lambda_i \geq 0$. Par suite :

$$m\lambda_0 = m\left(\lambda_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i-1} - \lambda_i)\right) \leq \int_a^b fg \leq M\left(\lambda_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i-1} - \lambda_i)\right) = M\lambda_0.$$

On a $m \leq 0 \leq M$ car $G(a) = 0$ et $\lambda_0 \leq f(a)$ car f décroît, donc $m\lambda_0 \leq mf(a)$ et $M\lambda_0 \leq Mf(a)$, ce qui prouve l'encadrement souhaité.

b. Soit $(x_i)_{0 \leq i \leq N}$ une subdivision de pas au plus $\frac{1}{n}$ et plus fine qu'une subdivision subordonnée à f .

On définit $f_n \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ en posant : $\begin{cases} \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, f_n(x_i) = f(x_i) \\ \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, f_n|_{]x_i, x_{i+1}[} = f(x_i^+) \end{cases}$

Tout comme f , f_n est positive décroissante et (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$ par uniforme continuité de f sur tout intervalle ouvert de continuité. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(a) = f(a)$.

c. En utilisant b), pour tout n , $mf(a) = mf_n(a) \leq \int_a^b f_n g \leq Mf_n(a) = Mf(a)$.

Comme g est bornée, $(f_n g)$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers fg et donc $\int_a^b f_n g \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b fg$, d'où $mf(a) \leq \int_a^b fg \leq Mf(a)$.

Si $f(a) = 0$ alors tout élément ξ de $[a, b]$ convient, sinon, $\frac{1}{f(a)} > 0$ et donc $\frac{1}{f(a)} \int_a^b fg \in [m, M] = G([a, b])$, d'où le résultat car G est continue sur $[a, b]$.

TRAVAUX DIRIGÉS

• Une suite de fonctions périodiques

On note E le sous-espace vectoriel des éléments f de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π -périodiques et tels que $\int_0^{2\pi} f = 0$.

1. Montrer que tout élément f de E admet une et une seule primitive Tf dans E et que l'application T ainsi définie est un endomorphisme de E .

2. Si f_1 est une fonction paire et élément de E , on note $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite d'éléments de E définie par : $\forall n \geq 2$, $f'_n = f_{n-1}$.

a. Montrer que f_n et $n + 1$ ont même parité.

b. On suppose de plus : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x + \pi) = -f_1(x)$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x + \pi) + f_n(x) = 0$. Comparer $f_n(x)$ et $f_n(\pi - x)$.

3. a. Montrer que la fonction f_1 paire, 2π -périodique dont la restriction à $[0, \pi]$ est $x \mapsto x - \frac{\pi}{2}$ est élément de E . $(f_n)_{n \geq 1}$ est définie comme en 2.

b. Montrer que f_n est entièrement déterminée par sa restriction à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c. Prouver que, sur $[0, \pi]$, f_n est une fonction polynomiale P_n de degré n . Calculer P_n pour $n \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$.

d. Montrer que f_n est monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $N_{\infty}^{\mathbb{R}}(f_n) = f_n\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)$.

4. On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)x]}{(2n+1)^2}$.

Montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ des suites (f_{4n+r}) si $r \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ et donner sa limite.

Solution

1. Si $f \in E$, comme f est 2π -périodique continue et que $\int_0^{2\pi} f = 0$, toute primitive de f est 2π -périodique.

Soit $\varphi : x \mapsto \int_0^x f$, alors $(Tf)' = f$ équivaut à $Tf - \varphi$ est une fonction constante.

Si cette condition est réalisée, posons $f = \varphi + K$, alors $\int_0^{2\pi} g = 0$ équivaut à $\int_0^{2\pi} \varphi + 2\pi K = 0$ i.e. $K = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi$, d'où l'existence et l'unicité de Tf .

En intégrant par parties, $\int_0^{2\pi} \varphi(u) du = \left[(u - 2\pi)\varphi(u) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (u - 2\pi)f(u) du$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $Tf(x) = \int_0^x f + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u - 2\pi)f(u) du$, d'où la linéarité de T .

2. a. Raisonnons par récurrence en utilisant la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ définie par $\varphi_1 = f_1$ et,

si $n \geq 1$, $\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n$.

φ_1 et f_1 sont égales et paires.

Si, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(-x) = (-1)^{n+1} \varphi_n(x)$ et $f_n(-x) = (-1)^{n+1} f_n(x)$.

• Si $n = 2p$, f_n est impaire, toutes ses primitives sont paires, ainsi φ_{n+1} et f_{n+1} sont paires.

• Si $n = 2p + 1$, f_n est paire donc φ_{n+1} est la seule primitive impaire de f_n et on a vu dans 1. que $f_{n+1} = \varphi_{n+1} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{n+1}$. Par 2π -périodicité on a

$\int_0^{2\pi} \varphi_{n+1} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{n+1} = 0$ car φ_{n+1} est impaire, d'où $f_{n+1} = \varphi_{n+1}$ est impaire, ce qui termine la récurrence.

b. On procède toujours par récurrence, le cas $n = 1$ étant donné par l'énoncé.

Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto f_n(x + \pi) + f_n(x)$ soit nulle, alors, en tant que primitive, $G : x \mapsto f_{n+1}(x + \pi) + f_{n+1}(x)$ est constante, notons C cette constante.

On a $2\pi C = \int_0^{2\pi} G = \int_0^{2\pi} f_{n+1}(x + \pi) dx + \int_0^{2\pi} f_{n+1}(x) dx = 0$ car f_{n+1} est élément de E . Par suite G est nulle et le théorème de récurrence permet de conclure.

Si $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, $f_n(\pi - x) = (-1)^{n+1} f_n(x - \pi)$ d'après a. d'où, par 2π -périodicité, $f_n(\pi - x) = (-1)^{n+1} f_n(x + \pi) = (-1)^n f_n(x)$ d'après le début de la question.

3. a. Si $x \in [-\pi, \pi]$, $f_1(x) = |x| - \frac{\pi}{2}$ donc f_1 est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et sa restriction à $[-\pi, \pi]$ est continue. Par parité on a $f_1(-\pi) = f_1(\pi)$ et donc f_1 est continue sur $\mathbb{R}$. Par 2π -périodicité et par parité on a :

$\int_0^{2\pi} f_1 = \int_{-\pi}^{\pi} f_1 = 2 \int_0^{\pi} f_1 = 2 \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = \left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right]_0^{\pi} = 0$, ce qui prouve que f_1 est un élément de E .

b. $G : x \mapsto f_1(x + \pi) + f_1(x)$ est 2π -périodique et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $G(-x) = f_1(-x + \pi) + f_1(-x) = f_1(x - \pi) + f_1(x) = f_1(x + \pi) + f_1(x) = G(x)$.

Si $x \in [0, \pi]$, $G(x) = f_1(x) + f_1(x + \pi) = f_1(x) + f_1(\pi - x) = x - \frac{\pi}{2} + (\pi - x) - \frac{\pi}{2} = 0$, ce qui prouve que G est nulle.

La question 2. montre que f_n est 2π -périodique, de la parité de $n + 1$, que $f_n(x + \pi) = -f_n(x)$ et que $f_n(\pi - x) = (-1)^n f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que f_n est entièrement déterminée par sa restriction à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c. Comme, pour $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = f_{n+1}(0) + \int_0^x f_n$ et que la restriction de f_1 à $[0, \pi]$ est polynomiale de degré 1, une récurrence immédiate montre que la restriction de f_n à $[0, \pi]$ est polynomiale de degré n .

En utilisant la relation $f_n = \varphi_n - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n$ qui a été établie à la question 1.

pour $n \geq 2$, on obtient : $P_1 = X - \frac{\pi}{2}$, $P_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{\pi X}{2}$, $P_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{\pi X^2}{4} + \frac{\pi^3}{24}$,
 $P_4 = \frac{X^4}{24} - \frac{\pi X^3}{12} + \frac{\pi^3 X}{24}$ et $P_5 = \frac{X^5}{120} - \frac{\pi X^2}{4} + \frac{\pi^3}{24}$.

d. Comme $f'_{n+1} = f_n$ si $n \geq 1$ on a immédiatement les tableaux :

	0	$\pi/2$			0	$\pi/2$
f_1		$\nearrow$	0		f_{4n+1}	$\nearrow$ 0
f_2	0	$\searrow$			f_{4n+2}	0 $\searrow$
f_3		$\searrow$	0		f_{4n+3}	$\searrow$ 0
f_4	0	$\nearrow$			f_{4n+4}	0 $\nearrow$
f_5		$\nearrow$	0			

En effet, si n est pair f_n est impaire et donc $f_n(0) = 0$ et, si n est impair, $f_n(\pi - x) = -f_n(x)$ d'où $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Comme $|f_n|$ est π -périodique et paire, $N_\infty^\mathbb{R}(f_n) = N_\infty^{[0, \pi/2]}(f_n) = f_n\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ d'après le tableau de variation précédent.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $u_{n,1}$ sur $\mathbb{R}$ par $u_{n,1}(x) = -\frac{4}{\pi} \frac{\cos[(2n+1)x]}{(2n+1)^2}$.

$\sum u_{n,1}$ est une série de fonctions continues, 2π -périodiques, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ car $N_\infty^\mathbb{R}(u_{n,1}) = \frac{4}{\pi(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=0}^\infty u_{n,1} = f_1$ par hypothèse.

Si l'on note, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n,2}$ la primitive de $u_{n,1}$ nulle en 0, alors $\sum u_{n,2}$ converge uniformément sur tout segment et sa somme est la primitive de f_1 nulle en 0, soit encore f_2 par définition.

Plus généralement $u_{n,k+1}$ est la primitive de $u_{n,k}$ nulle en 0 si k est impair, nulle en $\frac{\pi}{2}$ sinon. Alors par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum u_{n,k}$ converge uniformément sur tout segment et sa somme est f_k .

Par récurrence immédiate, si $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_{n,4k}(x) = \frac{4}{\pi} \frac{\sin[(2n+1)x]}{(2n+1)^{4k+1}}$.

$\left|f_{4k}(x) - \frac{4}{\pi} \sin(x)\right| = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{n=1}^\infty u_{n,1}(x) \right| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n+1)^{4k+1}} \leq \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{4k+1}}$ et

donc $\left|f_{4k}(x) - \frac{4}{\pi} \sin(x)\right| \leq \frac{4}{\pi} [\zeta(4k+1) - 1]$ pour tout x réel.

Comme $\lim_{+\infty} \zeta = 1$, on en déduit que (f_{4k}) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\frac{4}{\pi} \sin$.

Montrons que T est continue si on munit E de $N_\infty^\mathbb{R}$.

T est linéaire et, si $f \in E$, Tf est 2π -périodique donc $N_\infty^\mathbb{R}(Tf) = N_\infty^{[0,2\pi]}(Tf)$.

$$\forall x \in [0, 2\pi], |Tf(x)| = \left| \int_0^x f + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u - 2\pi)f(u) du \right| \text{ d'où}$$

$$|Tf(x)| \leq x N_\infty^\mathbb{R}(f) + \frac{N_\infty^\mathbb{R}(f)}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2\pi - u) du \leq 2\pi N_\infty^\mathbb{R}(f) + \frac{N_\infty^\mathbb{R}(f)}{4\pi} \left[(2\pi - u)^2 \right]_{2\pi}^0$$

et enfin $|Tf(x)| \leq 3\pi N_\infty^\mathbb{R}(f)$, donc T est lipschitzienne de rapport 3π .

Par suite (f_{4k+1}) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\frac{4}{\pi} T(\sin)$, soit $-\frac{4}{\pi} \cos$.

De même (f_{4k+2}) et (f_{4k+3}) convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $-\frac{4}{\pi} \sin$ et $\frac{4}{\pi} \cos$ respectivement.

• Majoration d'une fonction dérivée

E désigne un espace vectoriel de dimension finie. Si $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, E)$, on pose $\|f\| = N_\infty^\mathbb{R}(f)$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, E)$ et que f et f'' sont bornées.

1. a. Montrer que, pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + h^2 \int_0^1 (1-u) [f''(x+uh) - f''(x-uh)] du.$$

b. En déduire, pour tout couple $(x, h) \in \mathbb{R}^2$, $h^2 \|f''\| - 2h|f'(x)| + 2\|f\| \geq 0$ puis que f' est bornée avec $\|f'\|^2 \leq 2\|f\| \times \|f''\|$.

2. Pour tout entier $n > 0$, soit g_n la fonction impaire, admettant 2 comme période, définie par : $g_n(x) = 2nx$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $g_n(x) = 1$ si $x \in \left[\frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n}\right]$, $g_n(x) = 2n - 2nx$ si $x \in \left[1 - \frac{1}{2n}, 1\right]$.

On pose $h_n : t \mapsto \int_{\frac{1}{2}}^t g_n(u) du$ et $f_n : x \mapsto \int_0^x h_n(t) dt$.

a. Montrer que h_n est paire et admet 2 pour période.

b. Simplifier $x \mapsto g_n(x) - g_n(1-x)$ puis $x \mapsto h_n(x) + h_n(1-x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que f_n est impaire et admet 2 pour période.

d. Donner les expressions de $h_n(x)$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right]$ et si $x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right]$.

e. Dresser le tableau de variations de f_n'' , f_n' et f_n sur $[0, 1]$.

f. Montrer que f_n, f_n', f_n'' sont bornées et calculer $\|f_n\|, \|f_n'\|, \|f_n''\|$.

g. En déduire que dans la question 1. le coefficient 2 est le plus petit réel α vérifiant : $\|f'\|^2 \leq \alpha\|f\| \times \|f''\|$ pour tout élément f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, E)$ tel que f et f'' soient bornées.

Solution

1. a. Appliquons la formule de Taylor-Laplace sur $[x, x+h]$ et $[x-h, x]$:

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 \int_0^1 (1-u)f''(x+uh) du \\ f(x-h) = f(x) - hf'(x) + h^2 \int_0^1 (1-u)f''(x-uh) du \end{cases}$$

On obtient le résultat par différence.

b. On a, pour tout (x, h) :

$$2h|f'(x)| \leq |2hf'(x)| = \left| f(x+h) - f(x-h) - h^2 \int_0^1 (1-u)[f''(u+xh) - f''(x-uh)] du \right|$$

et, par inégalité triangulaire : $2h|f'(x)| \leq 2\|f\| + 2h^2\|f''\| \int_0^1 (1-u) du$

$$\text{ie. } h^2\|f''\| - 2h|f'(x)| + 2\|f\| \geq 0 \text{ car } \int_0^1 (1-u) du = \frac{1}{2}.$$

Si $\|f''\| = 0$ alors f est affine bornée donc constante et l'inégalité est évidente.

Sinon, pour tout réel x , soit $P_x(h) = h^2\|f''\| - 2h|f'(x)| + 2\|f\|$, P_x est un trinôme et $P_x(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$, son discriminant réduit est donc négatif ie. $|f'(x)|^2 \leq 2\|f\| \times \|f''\|$ et ceci est valable pour tout x réel. Donc f' est bornée avec $\|f'\|^2 \leq 2\|f\| \times \|f''\|$.

2. a. g_n est facilement continue sur $\mathbb{R}$, affine par morceaux.

h_n est paire en tant que primitive de fonction impaire, de plus, par périodicité et imparité de g_n , $\int_0^2 g_n(t) dt = \int_{-1}^1 g_n(t) dt = 0$, ce qui prouve la 2-périodicité de h_n .

b. Soit $\varphi_n : x \mapsto g_n(x) - g_n(1-x)$, on vérifie immédiatement la nullité de φ_n sur $[0,1]$ ainsi que sa 2-périodicité.

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(-x) = -[g_n(x) - g_n(-1-x)] = -\varphi_n(x)$ car g_n est 2-périodique. La nullité de φ_n sur $\mathbb{R}$ en découle.

Soit alors $\psi_n : x \mapsto h_n(x) + h_n(1-x)$, $\varphi_n = \psi'_n$ et ψ_n est constante égale à $\psi_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2h_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, φ_n et ψ_n sont nulles sur $\mathbb{R}$.

c. f_n est la primitive de h_n nulle en 0 donc impaire.

Par parité et 2-périodicité on a : $\int_0^2 h_n(x) dx = 2 \int_0^1 h_n(x) dx$ et, par le change-

ment de variable $u = 1-x$, $\int_0^1 h_n(x) dx = \int_0^1 h_n(1-u) du = - \int_0^1 h_n(u) du$ d'où

$\int_0^2 h_n(x) dx = 0$ et donc f_n est 2-périodique.

d. Si $x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $h_n(x) = \int_{1/2}^{1/2+2n} dt + 2n \int_{1/2}^x t dt = \frac{1}{2n}(1-n) + n\left(x^2 - \frac{1}{4n^2}\right)$

d'où $h_n(x) = nx^2 - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n}\right]$.

Sinon, $h_n(x) = \int_{1/2}^x dt = x - \frac{1}{2}$.

e. On a le tableau :

	0	1	$\frac{1}{2n}$	$1 - \frac{1}{2n}$	1				
f''_n	0	$\nearrow$	1	$\rightarrow$	1	$\searrow$	0		
f'_n	$-a$	$\nearrow$	$-$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+$	$\nearrow$	a
f_n	0	$\searrow$	$-$	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	$-$	$\nearrow$	0

f. Si f est 2-périodique, paire ou impaire et continue sur $\mathbb{R}$ on a $|f|(\mathbb{R}) = |f|([0,1])$ compact donc borné, f_n, f'_n et f''_n sont donc bornées et le tableau précédent permet de calculer leur norme.

$\|f''_n\| = 1$ et $\|f'_n\| = -h_n(0) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n}\right]$.

$\|f_n\| = f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2n} \left(nt^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\right) dt + \int_{1/2n}^{1/2} \left(t - \frac{1}{2}\right) dt$ d'où, après un calcul sans difficulté, $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{3n^2} - 1\right]$.

En résumé : $\|f_n''\| = 1$, $\|f_n'\| = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2n}\right]$ et $\|f_n\| = \frac{1}{8} \left[1 - \frac{1}{3n^2}\right]$.

g. Si α est solution alors, pour tout n , on a $\|f_n'\| \leq \alpha \|f_n\| \times \|f_n''\|$, ce qui revient à $\frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{2n}\right]^2 \leq \frac{\alpha}{8} \left[1 - \frac{1}{3n^2}\right]$, ce sont des termes généraux de suites convergentes et, en passant à la limite, $\frac{1}{4} \leq \frac{\alpha}{8}$ i.e. $\alpha \geq 2$. Cela prouve que 2 est la plus petite solution du problème.

• Théorème de Borel

Le but de ce travail dirigé est de montrer que l'application $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\mathbb{N}$, $f \mapsto (f^{(n)}(0))_{n \in \mathbb{N}}$ est surjective. On note $\mathcal{K}^\infty$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nulles en dehors d'un compact.

1. a. Montrer que $\theta_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\theta_1(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $\theta_1(x) = 0$ sinon est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Que dire de $\theta_2 : x \mapsto \theta_1(x)\theta_1(1-x)$?

c. Soit $\theta_3(x) = \left(\int_0^1 \theta_2\right)^{-1} \int_0^x \theta_2$. Montrer que $\theta_3 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $\theta_3(x) = 1$ si $x \geq 1$ et $\theta_3(x) = 0$ si $x \leq 0$.

d. Déterminer une fonction $\varphi \in \mathcal{K}^\infty$ telle que $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq 1$.

2. Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, on pose $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Pour $f \in \mathcal{K}^\infty$, on note $M_p(f) = \max_{q \leq p} N_\infty(f^{(q)})$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_n(\varphi_\varepsilon(x)x^{n+1}) = 0$.

3. Montrer qu'il existe (ε_n) une suite décroissante d'éléments de $]0, 1[$ telle que : $M_n(\varphi_{\varepsilon_n}(x)x^{n+1}) \leq \min\left(1, \frac{1}{|a_{n+1}|}\right)$.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{\varepsilon_{n-1}}(x) a_n \frac{x^n}{n!}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$.

Solution

1. a. En procédant comme dans l'exemple III.B.2.4. du cours, on montre que θ_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\theta^{(n)}(0) = 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

b. θ_2 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\theta_2(x) = 0$ si $x \notin]0, 1[$.

c. θ_2 étant continue et strictement positive sur $]0, 1[$, on a $\int_0^1 \theta_2 > 0$. Comme primitive d'une fonction classe $\mathcal{C}^\infty$, θ_3 est classe $\mathcal{C}^\infty$. Des propriétés de θ_2 on déduit que $\theta_3(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $\theta_3(x) = 1$ si $x \geq 1$.

d. Soit $\varphi(x) = \theta_3(2x+1)\theta_3(1-2x)$. On vérifie aisément que φ convient.

2. φ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ et nulle hors de $[-1, 1]$, il existe $K_n \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$K_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(n)}(x)| = N_\infty^\mathbb{R}(\varphi^{(n)})$. Comme $\varphi_\varepsilon^{(n)}(x) = \varepsilon^{-n} \varphi^{(n)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, on a :

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_\varepsilon^{(n)}(x)| = \varepsilon^{-n} K_n$. D'autre part, soit $p \in \mathbb{N}$, avec la formule de Leibniz,

$$\frac{d^p}{dx^p} (\varphi_\varepsilon(x) x^n) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n(n-1) \cdots (n-p+k+1) x^{n-p+k} \varphi_\varepsilon^{(k)}(x).$$

Posons $\alpha_{n,k} = \binom{p}{k} n(n-1) \cdots (n-p+k+1)$. Si $x \notin [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varphi_\varepsilon(x) = 0$, donc :

$$\forall p > n, N_\infty^\mathbb{R} \left[\frac{d^p}{dx^p} (\varphi_\varepsilon(x) x^n) \right] \leq \sum_{k=0}^p \alpha_{n,k} \varepsilon^{n-p+k} N_\infty^\mathbb{R} (\varphi_\varepsilon^{(k)}) \leq \left[\sum_{k=0}^p \alpha_{n,k} K_k \right] \varepsilon^{n-p}.$$

Donc : $M_n \left(\varphi_\varepsilon(x) x^{n+1} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

3. La suite (ε_n) existe d'après 2. et l'on a :

$$\forall n > p, M_p \left(\varphi_{\varepsilon_{n-1}}(x) \frac{a_n x^n}{n!} \right) \leq \min \left(1, \frac{1}{|a_n|} \right) \frac{|a_n|}{n!} \leq \frac{1}{n!}.$$

Posons $f_0(x) = a_0$ et $f_n(x) = \varphi_{\varepsilon_{n-1}}(x) \frac{a_n x^n}{n!}$ si $n \geq 1$.

Comme $f \in \mathcal{K}^\infty$, pour tout $p \geq 0$, $M_p(f_n)$ est défini et $\sum M_p(f_n)$ converge. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum N_\infty^\mathbb{R}(f_n^{(k)})$ converge. D'où la convergence uniforme de $\sum f_n^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Du corollaire du théorème de dérivation des séries de fonctions, on déduit que

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et } f^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Posons } f^{(k)} = S_k + R_k \text{ où } S_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n^{(k)}.$$

• Si $|x| < \frac{\varepsilon_k}{2}$, $\varphi_{\varepsilon_j}(x) = 1$ pour $j \leq k$ car (ε_n) est décroissante. Donc :

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^k a_n \frac{x^n}{n!}. \text{ D'où } S_k^{(k)}(0) = a_k.$$

• $R_k^{(k)}(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \sum_{p=0}^k \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-p)!} \frac{a_n}{n!} x^{n-p} \varphi_{\varepsilon_n}^{(k-p)}(x)$ d'après le théorème de

Leibniz. Or dans ces sommes $n-p \geq n-k \geq 1$, donc $R_k^{(k)}(0) = 0$.

D'où le résultat.

• Intégration approchée

n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

1. $g \in \mathcal{C}^{n+1}([0, n], \mathbb{R})$ et, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (X - i)$.

a. Montrer qu'il existe un et un seul élément P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, $g(k) = P(k)$ et que c'est $P = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{\binom{n}{k}}{n!} g(k) P_k$.

b. Soit x un élément de $[0, n] \setminus \llbracket 0, n \rrbracket$, on choisit un réel λ tel que la fonction φ définie sur $[0, n]$ par $\varphi(t) = g(t) - P(t) - \lambda \prod_{k=0}^n (t - k)$ vérifie $\varphi(x) = 0$.

Montrer que $\varphi^{(n+1)}$ possède au moins un zéro dans $]0, n[$.

c. Pour tout $x \in [0, n]$, montrer l'existence d'un élément c_x de $]0, n[$ tel que :

$$g(x) - P(x) = \frac{g^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - k).$$

d. Si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on pose $N_k = (-1)^{n-k} \frac{\binom{n}{k}}{n!} \int_0^n P_k$ et $K = \int_0^n \prod_{k=0}^n |x - k| dx$.

Montrer : $\left| \int_0^n g - \sum_{k=0}^n N_k g(k) \right| \leq \frac{K}{(n+1)!} N_\infty^{[0, n]}(g^{(n+1)})$.

2. a. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et f un élément de $\mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$. Prouver :

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^n N_k f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{K}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+2} N_\infty^{[a, b]}(f^{(n+1)}).$$

b. Si $n = 2$, calculer N_0, N_1, N_2, K ; il s'agit de la **méthode de Simpson**.

3. Amélioration de la majoration dans la méthode de Simpson

Soit $g \in \mathcal{C}^4([-1, 1], \mathbb{R})$ puis Φ définie sur $[-1, 1]$ par :

$$\Phi(t) = \int_{-t}^t g - \frac{t}{3} [g(-t) + 4g(0) + g(t)] - \ell t^5 \text{ où } \ell \text{ est choisi de façon que } \Phi(1) = 0.$$

a. Montrer l'existence d'un élément α de $]0, 1[$ tel que $\Phi'''(\alpha) = 0$.

b. Calculer Φ''' . Montrer l'existence de $\beta \in]-\alpha, \alpha[$ tel que $\ell = -\frac{1}{90} g^{(4)}(\beta)$.

En déduire : $\left| \int_{-1}^1 g - \frac{1}{3} [g(-1) + 4g(0) + g(1)] \right| \leq \frac{N_\infty^{[-1, 1]}(g^{(4)})}{90}$.

c. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et f un élément de $\mathcal{C}^4([a, b], \mathbb{R})$. Prouver :

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{6n} \left[f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a_k) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) + f(b) \right] \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} N_\infty^{[a, b]}(f^{(4)})$$

où l'on a posé $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$ si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\xi_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ si $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Solution

1. a. Soit $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$.

Si $j \neq k$ alors $P_k(j) = 0$ et $P_k(k) = \prod_{i \neq k} (k - i) = (k - n) \cdots (-1)(1) \cdots (k)$ ou

$$\text{encore } P_k(k) = (-1)^{n-k} k! (n - k)! = (-1)^{n-k} \frac{n!}{\binom{n}{k}}.$$

Posons $P = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{\binom{n}{k}}{n!} g(k) P_k$, alors, si $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(j) = g(j)$, ce qui prouve

que P est solution. Si Q est une autre solution alors le polynôme $P - Q$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ qui possède au moins $n + 1$ zéros, les éléments de $\llbracket 0, n \rrbracket$, donc $P - Q$ est nul, ce qui prouve l'unicité de la solution.

b. φ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, n]$ et s'annule en $n + 2$ points, $x, 0, 1, \dots, n$.

Le théorème de Rolle itéré assure l'existence d'un zéro de $\varphi^{(n+1)}$ dans $]0, n[$.

c. Toujours si $x \in [0, n] \setminus \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $P^{(n+1)} = 0$ et $\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[\prod_{k=0}^n (t - k) \right] = (n + 1)!$,

d'où $\varphi^{(n+1)} = g^{(n+1)} - \lambda(n + 1)!$, cela prouve que $\lambda = \frac{g^{(n+1)}(c_x)}{(n + 1)!}$ où $c_x \in]0, n[$ et, en écrivant $\varphi(x) = 0$, on obtient l'égalité demandée.

Si $x \in \llbracket 0, n \rrbracket$, tout point c_x fait l'affaire.

d. Si $x \in [0, n]$ c) montre que $|g(x) - P(x)| \leq \frac{N_{\infty}^{[0, n]}(g^{(n+1)})}{(n + 1)!} \prod_{k=0}^n |x - k|$, d'où, par

$$\text{intégration, } \left| \int_0^n (g - P) \right| \leq \int_0^n |g - P| \leq \frac{K}{(n + 1)!} N_{\infty}^{[0, n]}(g^{(n+1)}).$$

Par linéarité de l'intégrale sur $[0, n]$, on a $\int_0^n P = \sum_{k=0}^n N_k g(k)$, d'où l'inégalité.

2. a. Effectuons le changement de variable $x = a + \frac{b-a}{n} u$ i.e. $u = \frac{n}{b-a} (x - a)$,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \int_0^n f\left(a + \frac{b-a}{n} u\right) du = \frac{b-a}{n} \int_0^n g(u) du \text{ où l'on a posé}$$

$$g : u \mapsto f\left(a + \frac{b-a}{n} u\right).$$

g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, n]$ et $g^{(n+1)} : u \mapsto \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} f^{(n+1)}\left(a + \frac{b-a}{n} u\right)$ d'où

$$N_{\infty}^{[0, n]}(g^{(n+1)}) \leq \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} N_{\infty}^{[a, b]}(f^{(n+1)}) \text{ et } \sum_{k=0}^n N_k g(k) = \sum_{k=0}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

L'inégalité découle alors directement de 1. d.

$$\text{b. } N_0 = \frac{\binom{2}{0}}{2!} \int_0^2 (x-1)(x-2) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (x^2 - 3x + 2) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{8}{3} - 6 + 4 \right] = \frac{1}{3}.$$

$$N_1 = -\frac{\binom{2}{1}}{2!} \int_0^2 x(x-2) dx = -\left[\frac{8}{3} - 4 \right] = \frac{4}{3}, \quad N_2 = \frac{\binom{2}{2}}{2!} \int_0^2 x(x-1) dx = \frac{1}{3},$$

$$K = \int_0^2 x|x-1|(2-x) dx = \int_0^1 x(1-x)(2-x) dx + \int_1^2 x(x-1)(2-x) dx, \text{ le}$$

changement de variable $u = 2 - x$ dans la seconde intégrale montre que :

$$\int_1^2 x(x-1)(2-x) dx = \int_0^1 u(1-u)(2-u) du \text{ d'où } K = 2 \int_0^1 x(1-x)(2-x) dx, \\ K = 2 \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = 2 \left[\frac{1}{4} - 1 + 1 \right] = \frac{1}{2}.$$

3. a. Φ est impaire de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[-1, 1]$.

$$\Phi'(t) = g(t) + g(-t) - \frac{1}{3}[g(-t) + 4g(0) + g(t)] - \frac{t}{3}[g'(t) - g'(-t)] - 5\ell t^4, \Phi'(0) = 0.$$

$\Phi(0) = \Phi(1) = 0$. Appliquons le théorème de Rolle à Φ sur $[0, 1]$: on trouve un x_1 dans $]0, 1[$ tel que $\Phi'(x_1) = 0$. Comme $\Phi'(0) = 0$ on peut de nouveau appliquer ce théorème à Φ' sur $[0, x_1]$: on trouve un x_2 dans $]0, 1[$ tel que $\Phi''(x_2) = 0$.

Or Φ'' est impaire, donc nulle en 0. Une nouvelle application du théorème prouve l'existence d'un point α dans $]0, x_2[$, et donc dans $]0, 1[$, tel que $\Phi'''(\alpha) = 0$.

$$\text{b. } \forall t \in [-1, 1], \quad \Phi''(t) = \frac{1}{3}[g'(t) - g'(-t)] - \frac{t}{3}[g''(t) + g''(-t)] - 20\ell t^3 \text{ puis} \\ \Phi'''(t) = \frac{t}{3}[g'''(-t) - g'''(t)] - 60\ell t^2.$$

$$\Phi'''(\alpha) = 0 \iff \frac{\alpha}{3}[g'''(-\alpha) - g'''(\alpha)] = 60\ell\alpha^2.$$

L'égalité des accroissements finis montre l'existence d'un élément β de $] -\alpha, \alpha[$ tel que $g'''(-\alpha) - g'''(\alpha) = -2\alpha g^{(4)}(\beta)$, d'où $\ell = -\frac{1}{90} g^{(4)}(\beta)$.

$$\Phi(1) = 0 \text{ s'écrit } \int_{-1}^1 g - \frac{1}{3}[g(-1) + 4g(0) + g(1)] = \ell, \text{ et, comme } |\ell| \leq \frac{N_{\infty}^{[-1,1]}(g^{(4)})}{90}, \\ \text{il vient : } \left| \int_{-1}^1 g - \frac{1}{3}[g(-1) + 4g(0) + g(1)] \right| \leq \frac{N_{\infty}^{[-1,1]}(g^{(4)})}{90}.$$

$$\text{c. Si } [\alpha, \beta] \subset [a, b] \text{ effectuons le changement de variable } u = \frac{2}{\beta - \alpha} \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right), \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{\beta - \alpha}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} u\right) du.$$

On utilise alors la fonction $g : u \mapsto f\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} u\right)$ qui est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[-1, 1]$ avec $\forall u \in [-1, 1], g^{(4)}(u) = \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^4 f^{(4)}\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} u\right)$, d'où l'inégalité $N_{\infty}^{[-1,1]}(g^{(4)}) \leq \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^4 N_{\infty}^{[a,b]}(f^{(4)})$. La question b. montre :

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f - \frac{\beta - \alpha}{6} \left[f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f(\beta) \right] \right| \leq \frac{(\beta - \alpha)^5}{2880} N_{\infty}^{[a,b]}(f^{(4)}).$$

En sommant les inégalités obtenues pour $(\alpha, \beta) = (a_k, a_{k+1})$ quand $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on

$$\text{obtient } \left| \int_a^b f - \frac{b-a}{6n} \left[f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a_k) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) + f(b) \right] \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} N_{\infty}^{[a,b]}(f^{(4)}).$$

• Une racine carrée de fonction

Dans tout le problème, f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -1, 1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$. On pose $a = f'(0)$ et $b = \frac{1}{2}f''(0)$.

On suppose que $0 < |a| < 1$ et l'on fixe r tel que : $0 < |a| < r < \sqrt{|a|}$.

1. a. Montrer qu'il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{C}(] -1, 1[, \mathbb{R})$ telle que $\alpha(0) = 0$ et : $\forall t \in] -1, 1[, f(t) = at + bt^2 + t^2\alpha(t)$. $(\star)$

b. Montrer qu'il existe une fonction $\beta \in \mathcal{C}(] -1, 1[, \mathbb{R})$ telle que $\beta(0) = 0$ et : $\forall t \in] -1, 1[, f'(t) = a + 2bt + t\beta(t)$. $(\star\star)$

c. Montrer qu'il existe $M = \max_{t \in [-r, r]} |\alpha(t)| \in \mathbb{R}$ et $M_1 = \max_{t \in [-r, r]} |\beta(t)| \in \mathbb{R}$.

2. a. Montrer qu'il existe $\varepsilon \in]0, 1]$ tel que : $\forall x \in] -\varepsilon, \varepsilon[, |f'(x)| \leq r$.

ε est supposé fixé ainsi dans la suite de cette partie.

b. Montrer que : $\forall x \in] -\varepsilon, \varepsilon[, |f(x)| < \varepsilon$.

On définit alors par récurrence la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$ par : $f_0(x) = x$ et $\forall n \geq 1, f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$, et l'on pose pour $n \geq 0, U_n(x) = a^{-n-1}f_{n+1}(x) - a^{-n}f_n(x)$.

3. a. Montrer que la suite (f_n) est bien définie et que :

$$\forall x \in] -\varepsilon, \varepsilon[, \forall n \in \mathbb{N}, |f'_n(x)| \leq r^n \text{ et } |f_n(x)| \leq r^n |x|$$

b. Montrer que la suite de fonctions (g_n) telle que $g_n(x) = a^{-n}f_n(x)$ converge uniformément sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$.

On pourra montrer que : $\forall x \in] -\varepsilon, \varepsilon[, |U_n(x)| \leq \frac{|b| + M}{|a|} \left(\frac{r^2}{|a|} \right)^n$.

On pose, pour $|x| < \varepsilon, \theta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$.

4. Montrer que θ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$ et que :

$$\theta(0) = 0, \theta'(0) = 1, \forall x \in] -\varepsilon, \varepsilon[, \theta[f(x)] = a.\theta(x).$$

On pourra montrer que : $\forall x \in] -\varepsilon, \varepsilon[, |U'_n(x)| \leq \frac{2|b| + M_1}{|a|} \left(\frac{r^2}{|a|} \right)^n$.

5. Montrer que $U''_n(0)$ existe et calculer sa valeur. Montrer que $\theta''(0)$ existe et exprimer sa valeur en fonction de a et b .

On pourra montrer que : $\forall x \in] -\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}, \left| \frac{U'_n(x)}{x} \right| \leq \frac{2|b| + M_1}{|a|} \left(\frac{r^2}{|a|} \right)^n$.

6. Soit $\tilde{\theta} :] -\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$, telle que : $\tilde{\theta}(0) = 0, \tilde{\theta}'(0) = 1$ et $\tilde{\theta}[f(x)] = a.\tilde{\theta}(x)$ pour $x \in] -\varepsilon, \varepsilon[$. Montrer que : $\forall x \in] -\varepsilon, \varepsilon[, \tilde{\theta}(x) = \theta(x)$.

7. Montrer que pour $t > 0$ fixé, la relation $\theta(z) = t\theta(y)$ définit une fonction $y \mapsto z = \varphi_t(y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[0, y_0]$.

Établir les identités : $\varphi_{tu} = \varphi_t \circ \varphi_u, \quad \varphi_a = f$.

Déduire de ce qui précède l'existence d'une fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $]0, \alpha]$ et satisfaisant à $h \circ h = f$.

Solution**1.**

a. Soit $\alpha :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\alpha(t) = \frac{1}{t^2} (f(t) - at - bt^2)$ si $t \neq 0$ et $\alpha(0) = 0$. Comme $f \in \mathcal{C}^1(]-1, 1[, \mathbb{R})$ α est continue sur $] - 1, 1[\setminus \{0\}$ par théorème sur les opérations sur les fonctions continues. Du théorème de Taylor-Young, on déduit que $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} at + bt^2 + o(t^2)$. D'où la continuité de α en 0 et $(\star)$.

b. Raisonnement analogue avec $\beta(t) = \frac{1}{t} (f'(t) - a - 2bt)$ si $t \neq 0$ et $\beta(0) = 0$. En effet, $f'(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} f'(0) + tf''(0) + o(t)$.

c. Si $[-r, r] \subset]-1, 1[$, le résultat est une conséquence de la continuité des fonctions α et β sur le segment $[-r, r]$.

2. a. $|f'|$ étant continue en 0 : $\exists \varepsilon \in]0, 1[, \forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[, |f'(x)| - |f'(0)| \leq r - |a|$.

D'où $|f'(x)| - |a| \leq r - |a|$ et le résultat.

b. f étant dérivable sur $] - 1, 1[$, le théorème des accroissements finis implique :

$$\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[, |f(x) - f(0)| \leq r|x - 0|.$$

Comme $f(0) = 0$, $|x| < \varepsilon$ et $0 < r < 1$, on a : $\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[, |f(x)| < \varepsilon$.

3. a. Comme $f(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset]-\varepsilon, \varepsilon[$, la suite (f_n) est bien définie. Par une récurrence facile et le théorème de dérivation des fonctions composées, on peut dire que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(]-\varepsilon, \varepsilon[, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| < \varepsilon$ et $f_n(0) = 0$.

Montrons par récurrence que : $\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \forall n \in \mathbb{N}, |f'_n(x)| \leq r^n$.

Le résultat est immédiat si $n = 0$ car $f_0(x) = x$ et vrai si $n = 1$ d'après 2.

Supposons le vrai pour $n \in \mathbb{N}$. Comme $f_{n+1} = f \circ f_n$, on a :

$$\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[, |f'_{n+1}(x)| = |f'(f_n(x))| \cdot |f'_n(x)| \leq r r^n = r^{n+1}.$$

Il est vrai au rang $(n+1)$. D'où le résultat par théorème de récurrence.

L'autre résultat découle de l'application de l'inégalité des accroissements finis comme à la question précédente.

$$b. U_n(x) = g_{n+1}(x) - g_n(x) = a^{-n-1} [f(f_n(x)) - af_n(x)].$$

$$U_n(x) = a^{-n-1} [bf_n^2(x) + f_n^2(x)\alpha(f_n(x))].$$

Comme pour $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et pour $n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq r^n$, on a :

$$\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[, |U_n(x)| \leq |a|^{-n-1} [b|r|^{2n} + Mr^{2n}] = \frac{|b| + M}{|a|} \left(\frac{r^2}{|a|}\right)^n = \lambda_n.$$

Comme $\sum \lambda_n$ converge car $0 < \frac{r^2}{a} < 1$ (cf. série géométrique) et comme λ_n est indépendant de x , la série de fonctions $\sum U_n$ converge normalement *a fortiori* uniformément sur $] - \varepsilon, \varepsilon[$.

Or $g_n(x) - g_0(x) = U_0(x) + \dots + U_{n-1}(x)$. Donc la suite de fonctions (g_n) converge uniformément vers la fonction θ sur $] - \varepsilon, \varepsilon[$.

4. $f_n \in \mathcal{C}^1(]-1, 1[, \mathbb{R})$, donc $g_n \in \mathcal{C}^1(]-1, 1[, \mathbb{R})$. Comme $|f_n(x)| < \varepsilon < 1$, on déduit de $(\star\star)$ et de : $U'_n(x) = a^{-n-1} f'_{n+1}(x) - a^{-n} f'_n(x) = a^{-n-1} f'_n(x) [f'(f_n(x)) - a]$

$$\text{que : } U'_n(x) = a^{-n-1} f'_n(x) [2bf_n(x) + f_n(x)\beta(f_n(x))].$$

Comme : $|f_n(x)| \leq r^n|x| < r^n$ et $|f'_n(x)| \leq r^n$, on a :

$$\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[, |U'_n(x)| \leq |a|^{-n-1} r^n \cdot r^n (2|b| + M_1) = \frac{2|b| + M_1}{|a|} \left(\frac{r^2}{|a|}\right)^n. \quad (\star\star\star)$$

En raisonnant comme à la question 3. on peut conclure que $\sum U'_n$ converge uniformément sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Comme $\sum U_n$ converge uniformément sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, on déduit du théorème de dérivation des séries de fonctions que $\theta \in \mathcal{C}^1(]-\varepsilon, \varepsilon[, \mathbb{R})$.

$$\theta'(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} U'_n(x) \text{ pour tout } x \in]-\varepsilon, \varepsilon[.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = g_n(0) = 0$, donc $\theta(0) = 0$. On montre par récurrence que $f'_n(0) = a^n$. D'où $g'_n(0) = 1$ et $\theta'(0) = 1$. D'autre part, pour tout $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$:

$$\theta(f(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} [a^{-n} f_n(f(x))] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a(a^{-n-1} f_{n+1}(x))] = a\theta(x).$$

5. $U_0(x) = a^{-1}f(x) - x$. Donc $U'_0(0) = 2ba^{-1}$. De 3. on déduit :

$$\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[, U'_n(x) = a^{-n-1} f'_n(x) [2b + \beta(f_n(x))] f_n(x).$$

$$\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}, \frac{U'_n(x) - U'_n(0)}{x} = a^{-n-1} f'_n(x) [2b + \beta(f_n(x))] \frac{f_n(x)}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f_n(x)}{x} \right) = f'_n(0) = a^n \text{ car } f_n(0) = 0.$$

Comme $f \in \mathcal{C}^1(]-1, 1[, \mathbb{R})$, $\lim_{x \rightarrow 0} f'_n(x) = f'_n(0)$. Par composition de fonctions

$$\text{continues, } \lim_{x \rightarrow 0} (\beta \circ f_n)(x) = \beta \circ f_n(0) = 0. \text{ Donc } \frac{U'_n(x) - U'_n(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2ba^{-n-1}.$$

Donc $U''_n(0)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ et vaut $2ba^{n-1}$.

Reprenons les calculs de $(\star\star\star)$ et majorons $|f_n(x)|$ par $r^n|x|$ et non par r^n .

$$\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[, |U'_n(x)| \leq \frac{2|b| + M_1}{|a|} \left(\frac{r^2}{|a|}\right)^n |x|.$$

$$\text{D'où, pour tout } x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}, \left| \frac{U'_n(x)}{x} \right| \leq \frac{2|b| + M_1}{|a|} \left(\frac{r^2}{|a|}\right)^n = \mu_n.$$

μ_n est indépendant de x et $\sum \mu_n$ converge (cf. série géométrique), la série de fonctions $\sum v_n$ où $v_n(x) = \frac{U'_n(x)}{x}$ converge uniformément sur $]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}$.

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, v_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} U''_n(0) = 2ba^{n-1}.$$

On déduit du théorème de la double limite que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\theta'(x) - \theta'(0)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\theta'(x) - 1}{x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0} v_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U''_n(0) = \frac{2b}{a(1-a)}.$$

$$\text{Donc } \theta''(0) \text{ existe et vaut } \frac{2b}{a(1-a)}.$$

6. Pour tout $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\tilde{\theta}(f(x)) = a\tilde{\theta}(x)$. Par une récurrence immédiate on a :

$$\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \tilde{\theta}(f_n(x)) = a^n \tilde{\theta}(x).$$

$$\text{Comme } \tilde{\theta}(x) = x + x\gamma(x) \text{ où } \gamma(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

$$\text{Donc } \tilde{\theta}(x) = a^{-n} \tilde{\theta}(f_n(x)) = a^{-n} f_n(x) [1 + \gamma(f_n(x))] \text{ car } f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ (cf. } |a| < 1).$$

Comme $\theta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} f_n(x))$, par passage à la limite, on a : $\theta = \tilde{\theta}$ sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$.

7. Comme $\theta'(0) = 1$, la fonction θ strictement croissante définit un homéomorphisme de $[0, a]$ sur $[0, \alpha]$; de sorte que θ^{-1} est définie sur $[0, \alpha]$ et θ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.

Si donc $y > 0$ satisfait à $\theta(y) \leq \frac{\alpha}{t}$, il existe un unique $z \in [0, a]$ tel que $\theta(z) = t\theta(y)$, défini par $z = \theta^{-1}[t\theta(y)]$. La fonction $y \mapsto z = \varphi_t(y)$ ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$; sa dérivée est donnée par $\varphi'_t(y) = t \frac{\theta'(y)}{\theta'(z)}$. Donc φ_t est définie sur tout intervalle $[0, y_0]$ tel que $\theta(y_0) \leq \frac{\alpha}{t}$ donc pour $y > 0$ assez petit. Si l'on pose $y = \varphi_u(x)$, on a, si les quantités écrites sont définies : $\theta(z) = t\theta(y) = tu\theta(x)$. De sorte que les fonctions φ_{tu} et $\varphi_t \circ \varphi_u$ coïncident où elles sont définies. En posant $u = \sqrt{a}$, la fonction $h : x \mapsto \varphi_u(x)$ est définie pour x assez petit, et satisfait à $h \circ h = \varphi_a$. Mais la relation $\theta \circ f = a\theta$ implique $\varphi_a = f$, de sorte que l'on a bien $h \circ h = f$, la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $]0, x_0]$ assez petit

• Fonctions à variation bornée

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, on désigne par $\mathcal{S}_{[a,b]}$ l'ensemble des subdivisions $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq p}$ de $[a, b]$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_{[a,b]}$, on note $\mu(\sigma) = \max_{i \in [0, p-1]} (x_{i+1} - x_i)$.

Si $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ et $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq p}$, on note $V_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{p-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$.

On dira que f est à **variation bornée** sur $[a, b]$ si les sommes $V_\sigma(f)$ sont majorées. Dans ces conditions, on appelle **variation totale** de f sur $[a, b]$ l'élément de $[0, +\infty[$ noté : $V_{[a,b]}(f) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}_{[a,b]}} V_\sigma(f)$.

Partie I

1. a. Une fonction lipschitzienne est-elle à variation bornée ?
 b. Une fonction f monotone est-elle à variation bornée ? Si oui préciser $V_{[a,b]}(f)$.
 c. Que dire si $V_{[a,b]}(f) = 0$? Que vaut $V_{[a,b]}(f)$ si f est affine sur $[a, b]$?
 d. Soit φ un homéomorphisme de $[a, b]$ sur $[c, d]$ et g une application à variation bornée de $[c, d]$ dans $\mathbb{R}$, montrer que : $V_{[c,d]}(g) = V_{[a,b]}(g \circ \varphi)$.
 e. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ est-elle à variation bornée ?
 f. Montrer que l'ensemble $\mathcal{VB}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions à variation bornée sur $[a, b]$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel.
2. a. Une restriction d'une fonction à variation bornée à un sous-intervalle de $[a, b]$ est-elle à variation bornée ?
 b. Réciproquement, si l'on se donne $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a < c < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f restreinte à $[a, c]$ et $[c, b]$ soient à variation bornée, montrer que f est à variation bornée et que : $V_{[a,b]}(f) = V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f)$.
3. Soit $f \in \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$. Soit σ_n la subdivision de $[0, 1]$ $\sigma_n = \left(0, \frac{2}{(2n+1)\pi}, \frac{2}{2n\pi}, \frac{2}{(2n-1)\pi}, \dots, \frac{2}{2\pi}, \frac{2}{\pi}, 1\right)$. Calculer $V_{\sigma_n}(f)$. Conclusion ?

4. a. Montrer que la différence de deux fonctions croissantes sur $[a, b]$ est à variation bornée.

b. Montrer que l'application $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - E[x]$ est non continue et à variation bornée

5. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue et à variation bornée. Montrer que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall \sigma \in S_{[a,b]}, \mu(\sigma) < \alpha \Rightarrow |V_{[a,b]}(f) - V_\sigma(f)| \leq \varepsilon.$$

On montrera que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \sigma_\varepsilon = (x_i)_{0 \leq i \leq p} \in S_{[a,b]}, V_{\sigma_\varepsilon}(f) \leq V_{[a,b]}(f) \leq V_{\sigma_\varepsilon}(f) + \varepsilon.$$

On notera $\mu(\sigma_\varepsilon) = \alpha_0$. On montrera que :

$$\exists \alpha_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, x') \in [a, b]^2, |x - x'| \leq \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2(p+1)}.$$

On notera $\alpha = \min(\alpha_0, \alpha_1)$ et l'on montrera que si $\sigma \in S_{[a,b]}$ est telle que $\mu(\sigma) < \alpha$ alors $V_{[a,b]}(f) - V_\sigma(f) \leq 3\varepsilon$.

6. Dédire de la question 5. que si f est continue sur $[a, b]$ et à variation bornée, l'application $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto V_{[a,x]}(f)$ est croissante et continue.

7. a. Montrer que si f est à variation bornée sur $[a, b]$, la fonction

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto V_{[a,x]}(f) - f(x) \text{ est croissante sur } [a, b].$$

b. En déduire que toute fonction à variation bornée est différence de deux fonctions croissantes.

8. Dédire de 5. que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, $V_{[a,b]}(f) = \int_a^b |f'|$.

Partie II

Soit $E_{[a,b]}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, nulles en a et $F_{[a,b]}$ le sous-ensemble de $E_{[a,b]}$ des fonctions à variation bornée sur $[a, b]$.

1. Montrer que $F_{[a,b]}$ est un sous-espace vectoriel de $E_{[a,b]}$ et que l'application $N : F_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $N(f) = V_{[a,b]}(f)$ est une norme sur $F_{[a,b]}$.

2. Pour tout $f \in F_{[a,b]}$, on note $N_\infty(f) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

a. Montrer que : $\forall f \in F_{[a,b]}, N_\infty(f) \leq N(f)$.

b. Montrer que les normes N_∞ et N ne sont pas équivalentes sur $F_{[a,b]}$.

On pourra considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$, où f_n est la restriction à $[a, b]$ de g_n la fonction périodique sur $\mathbb{R}$ de période $\frac{b-a}{2^{n-1}}$, $n \geq 1$ définie

$$\text{par : } g_n(x) = x - a \text{ si } x \in \left[a, a + \frac{b-a}{2^n} \right],$$

$$g_n(x) = \left(a + \frac{b-a}{2^{n-1}} \right) - x \text{ si } x \in \left[a + \frac{b-a}{2^n}, a + \frac{b-a}{2^{n-1}} \right].$$

Solution

Partie I

1. a. La réponse est oui. En effet, si f est k -lipschitzienne on a :

$$\forall \sigma \in S_{[a,b]}, V_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{p-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq k \sum_{i=0}^{p-1} (x_{i+1} - x_i) = k(b-a).$$

b. La réponse est encore oui. En effet, si f est monotone on a :

$$\forall \sigma \in S_{[a,b]}, V_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{p-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \left| \sum_{i=0}^{p-1} f(x_{i+1}) - f(x_i) \right| = |f(b) - f(a)|.$$

Dans ce cas, on a : $V_{[a,b]}(f) = |f(b) - f(a)|$.

c. Si $V_{[a,b]}(f) = 0$, alors $V_\sigma(f) = 0$ quel que soit $\sigma \in S_{[a,b]}$.

Pour $x \in]a, b[$, soit $\sigma_0 = \{a, x, b\}$. On a $V_{\sigma_0}(f) = 0 = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)|$. On peut conclure que : $\forall x \in]a, b[, f(x) = f(a) = f(b)$. *ie.* f est constante.

Si f est affine sur $[a, b]$, elle est monotone et donc $V_{[a,b]}(f) = |f(b) - f(a)|$.

d. φ étant un homéomorphisme de $[a, b]$ sur $[c, d]$ elle est strictement monotone.

• Si φ est strictement croissante. Si $c = y_0 < y_1 < \dots < y_p = d$ définit un élément de $S_{[c,d]}$ la suite $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$ telle que $x_i = \varphi^{-1}(y_i)$ est élément de $S_{[a,b]}$. Comme

$$\sum_{i=0}^{p-1} |g(y_{i+1}) - g(y_i)| = \sum_{i=0}^{p-1} |g(\varphi(x_{i+1})) - g(\varphi(x_i))|, \text{ on a : } V_{[a,b]}(g \circ \varphi) = V_{[c,d]}(g).$$

• Si φ est strictement décroissante, on fait un raisonnement analogue en remplaçant x_i par $t_i = \varphi^{-1}(y_{p-i})$ pour conclure que : $V_{[a,b]}(g \circ \varphi) = V_{[c,d]}(g)$.

e. La réponse est oui, puisque si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, elle est k -lipschitzienne sur $[a, b]$ avec $k = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

f. Soit $(f, g) \in (\mathcal{VB}([a, b], \mathbb{R}))^2$ et $(u, v) \in [a, b]^2$. Posons $h = f + g$.

$$|h(u) - h(v)| \leq |f(u) - f(v)| + |g(u) - g(v)|.$$

$$\text{Donc : } \forall \sigma \in S_{[a,b]}, V_\sigma(h) \leq V_\sigma(f) + V_\sigma(g) \leq V_{[a,b]}(f) + V_{[a,b]}(g).$$

D'où : $V_{[a,b]}(h) \leq V_{[a,b]}(f) + V_{[a,b]}(g)$. *ie.* $(f, g) \in (\mathcal{VB}([a, b], \mathbb{R}))^2 \Rightarrow h \in \mathcal{VB}([a, b], \mathbb{R})$.

Comme : $V_{[a,b]}(\lambda f) = |\lambda| V_{[a,b]}(f)$ pour $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{VB}([a, b], \mathbb{R})$, on peut conclure, puisque $\mathcal{VB}([a, b], \mathbb{R}) \neq \emptyset$: $\mathcal{VB}([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$.

2. a. Supposons f à variation bornée sur $[a, b]$. Si $\sigma \in S_{[a,c]}$, avec $a < c < b$, alors $\sigma' = \sigma \cup \{b\} \in S_{[a,b]}$ et comme $V_\sigma(f) = V_{\sigma'}(f) \leq V_{[a,b]}(f)$, f est à variation bornée sur $[a, c]$ et de même sur $[c, b]$.

b. Soit $\sigma_1 \in S_{[a,c]}$ et $\sigma_2 \in S_{[c,b]}$ alors $\sigma_1 \cup \sigma_2 \in S_{[a,b]}$.

$$\text{Comme } V_{\sigma_1 \cup \sigma_2}(f) = V_{\sigma_1}(f) + V_{\sigma_2}(f), \text{ on a } V_{\sigma_1}(f) + V_{\sigma_2}(f) \leq V_{[a,b]}(f).$$

$V_{[a,b]}(f) - V_{\sigma_2}(f)$ est un majorant de l'ensemble des $V_{\sigma_1}(f)$, σ_1 parcourant $S_{[a,c]}$.

$V_{[a,b]}(f) - V_{[a,c]}(f)$ est un majorant de l'ensemble des $V_{\sigma_2}(f)$, σ_2 parcourant $S_{[c,b]}$.

$$\text{Donc : } V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f) \leq V_{[a,b]}(f) \quad (1)$$

Par définition de la borne supérieure, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\sigma_\varepsilon \in S_{[a,b]}$ tel que $V_{\sigma_\varepsilon}(f) \geq V_{[a,b]}(f) - \varepsilon$. Soit $\Delta_\varepsilon = \sigma_\varepsilon \cup \{c\}$. On a : $V_{\Delta_\varepsilon}(f) \geq V_{\sigma_\varepsilon}(f) \geq V_{[a,b]}(f) - \varepsilon$.

Notons $\Delta_{1,\varepsilon}$ (respectivement $\Delta_{2,\varepsilon}$) la trace sur $[a, c]$ (respectivement sur $[c, b]$) de Δ_ε . On a : $V_{\Delta_\varepsilon}(f) = V_{\Delta_{1,\varepsilon}}(f) + V_{\Delta_{2,\varepsilon}}(f) \leq V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f)$. Donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f) \geq V_{[a,b]}(f) - \varepsilon \quad (2)$$

(2) étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f) \geq V_{[a,b]}(f)$.

Compte tenu de (1), on en déduit : $V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f) = V_{[a,b]}(f)$.

3. $V_{\sigma_n}(f) = \frac{2}{\pi} + \left| \sin(1) - \frac{2}{\pi} \right| + \sum_{k=1}^n \frac{4}{\pi(2k+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ car $\frac{4}{\pi(2k+1)}$ est le terme général d'une série à termes réels positifs divergente.

Comme f est continue sur $]0, 1]$ et $|f(x)| \leq |x|$, f est continue sur $[0, 1]$ et elle n'est pas à variation bornée.

4. f n'est pas continue sur $[0, 1]$ puisque $f(x) = x$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 0$.
 f est cependant à variation bornée d'après I.1.b) et f).

5. Par définition de la borne supérieure, on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \sigma_\varepsilon \in S_{[a,b]}, V_{\sigma_\varepsilon}(f) \leq V_{[a,b]}(f) \leq V_{\sigma_\varepsilon}(f) + \varepsilon.$$

Soit $\sigma_\varepsilon = (x_i)_{0 \leq i \leq p}$ et $\alpha_0 = \mu(\sigma_\varepsilon)$; comme f est continue sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, elle y est uniformément continue. Donc :

$$\exists \alpha_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, x') \in [a, b]^2, |x - x'| \leq \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2(p+1)}.$$

Soit $\alpha = \min(\alpha_0, \alpha_1)$. Si $\sigma = (y_i)_{i \in [0, n]} \in S_{[a,b]}$ et $\mu(\sigma) < \alpha$, considérons la subdivision $\Delta = \sigma \cup \sigma_\varepsilon = (z_i)_{i \in [0, m]} \in S_{[a,b]}$. Comme Δ est plus fine que σ , on a par inégalité triangulaire : $V_\Delta(f) \geq V_\sigma(f)$ et $V_\Delta(f) < V_{\sigma_\varepsilon}(f) + \varepsilon$.

Soient $j_1, \dots, j_{p-1}$ les entiers vérifiant $x_i = z_{j_i}, 1 \leq i \leq p-1$.

Il résulte des définitions que :

$$V_\Delta(f) - V_\sigma(f) \leq |f(z_{j_1-1}) - f(z_{j_1})| + |f(z_{j_1}) - f(z_{j_1+1})| + \dots + |f(z_{j_{p-1}}) - f(z_{j_{p-1}+1})|$$

$$\text{Donc } 0 \leq V_\Delta(f) - V_\sigma(f) \leq \frac{2\varepsilon(p+1)}{2(p+1)} = \varepsilon.$$

$$\text{Comme } 0 \leq V_{[a,b]}(f) - V_\sigma(f) \leq V_{[a,b]}(f) - V_{\sigma_\varepsilon}(f) + V_{\sigma_\varepsilon}(f) - V_\sigma(f),$$

$$\text{et } |V_{\sigma_\varepsilon}(f) - V_\sigma(f)| \leq V_\Delta - V_{\sigma_\varepsilon}(f) + V_\Delta - V_\sigma(f), \text{ on a le résultat.}$$

6. La croissance de l'application $x \mapsto V_{[a,x]}(f)$ résulte de I.2.b) Montrons la continuité. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\begin{cases} \forall \sigma \in S_{[a,b]}, \mu(\sigma) < \alpha \Rightarrow V_{[a,b]}(f) - V_\sigma(f) \leq \varepsilon, \\ \forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Soit $(x, y) \in [a, b]^2$ tel que $0 \leq y - x \leq \alpha$. Il existe $\sigma \in S_{[a,b]}$ contenant x et y mais aucun autre point de $[x, y]$ et telle que $\mu(\sigma) \leq \alpha$.

Soient σ_1 et σ_2 les traces de σ sur $[a, x]$ et $[y, b]$. La relation $V_{[a,b]}(f) \leq V_\sigma(f) + \varepsilon$ s'écrit : $V_{[a,x]}(f) + V_{[x,y]}(f) + V_{[y,b]}(f) \leq V_{\sigma_1}(f) + |f(x) - f(y)| + V_{\sigma_2}(f) + \varepsilon$.

$$\text{Donc : } V_{[a,x]}(f) + V_{[x,y]}(f) + V_{[y,b]}(f) \leq 2\varepsilon + V_{[a,x]}(f) + V_{[y,b]}(f).$$

$$\text{D'où : } V_{[x,y]}(f) \leq 2\varepsilon \text{ si } (x, y) \in [a, b]^2 \text{ et } |x - y| \leq \alpha.$$

La fonction $x \mapsto V_{[a,x]}(f)$ est continue sur $[a, b]$.

7. a. Soit $\sigma' \in S_{[a,x']}$ où $a < x_1 < \dots < x_n < x'$ et σ la subdivision de $[a, x]$ définie par : $a < x_1 < \dots < x_n < x' < x$. On a :

$$f(x) - f(x') \leq |f(x) - f(x')| = V_\sigma(f) - V_{\sigma'}(f) \leq V_{[a,x]}(f) - V_{\sigma'}(f).$$

$$\text{Donc : } \forall \sigma' \in S_{[a,x']}, V_{\sigma'}(f) \leq V_{[a,x]}(f) + f(x') - f(x).$$

$$\text{Par définition de } V_{[a,x']} = \sup_{\sigma' \in S_{[a,x']}} V_{\sigma'}(f), \text{ on a : } V_{[a,x']}(f) \leq V_{[a,x]}(f) + f(x') - f(x).$$

$$\text{Donc : } x' < x \Rightarrow g(x') \leq g(x) \text{ ie. } g \text{ est croissante sur } [a, b].$$

b. Avec les notations de 7. a. $f(x) = V_{[a,x]} - g(x)$, on peut dire que f est la différence de deux fonctions croissantes.

8. Si $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ et si $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq p} \in S_{[a,b]}$, on peut écrire :

$V_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{p-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{p-1} (x_{i+1} - x_i) |f'(\lambda_i)|$ où $\lambda_i \in]x_i, x_{i+1}[$, d'après le théorème des accroissements finis. Or $V_{[a,b]}(f) = \lim_{\mu(\sigma) \rightarrow 0} V_\sigma(f)$ d'après I.5. et

$$\int_a^b |f'| = \lim_{\mu(\sigma) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{p-1} (x_{i+1} - x_i) |f'(\lambda_i)| \text{ d'après le théorème (sommes de Riemann).}$$

On déduit le résultat de l'unicité de la limite.

Partie II

1. $F_{[a,b]} = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{VB}([a,b], \mathbb{R}) \cap \{f \in \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R}) \mid f(a) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $E_{[a,b]}$ d'après I.1.f).

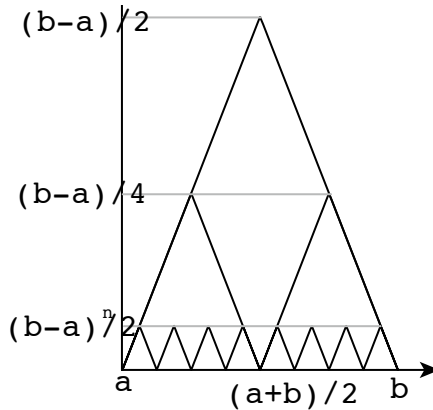
De I.1.c) et f) on déduit que N est une norme sur $F_{[a,b]}$.

2. a. $F_{[a,b]} \subset \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, donc $N_\infty(f) \in \mathbb{R}_+$ si $f \in F_{[a,b]}$.

Il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $N_\infty(f) = |f(x_0)| = |f(x_0) - f(a)| \leq V_{[a,x_0]}(f) \leq V_{[a,b]}(f)$.

Donc : $\forall f \in F_{[a,b]}, N_\infty(f) \leq N(f)$.

b. Commençons par un dessin :



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_\infty(f_n) = \frac{b-a}{2^n}$. Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a,b]$. Comme $V_{[a,b]}(f_n) = b-a$, il n'existe pas de $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $N(f) \leq MN_\infty(f)$ quel que soit f et les deux normes ne sont pas équivalentes sur $F_{[a,b]}$.

7. Intégration sur un intervalle

En MPSI, on a défini l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$. On souhaite généraliser cette définition sur un intervalle quelconque.

I désigne un intervalle d'intérieur non vide et $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Intégrales généralisées

A. Définitions

1. Définition

Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ converge si la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f$ a une limite dans $\mathbb{K}$. Si c'est le cas, on note $\int_a^b f$ cette limite.

Extension facile de cette définition aux fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle I de l'une des formes $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$; $]a, b]$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

On note l'intégrale ainsi obtenue : $\int_a^b f$ ou $\int_I f$ ou $\int_a^b f(t)dt$.

Dans la suite du chapitre nous donnerons les énoncés sur un intervalle I et les démonstrations sur $I = [a, b[$ de la définition précédente.

2. Définition

Une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I est dite **intégrable** sur I si l'intégrale $\int_I |f|$ converge. On dit aussi que l'intégrale $\int_I f$ est **absolument convergente** sur I . On note $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$.

B. Propriétés

1. Théorème

L'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dont l'intégrale converge, est un espace vectoriel. L'application de cet espace vectoriel dans $\mathbb{K} : f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Démonstration

Notons E l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dont l'intégrale converge. Il est contenu dans $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, non vide puis qu'il contient l'application nulle.

Si $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in [a, b[, \int_a^x (\lambda f + g) = \lambda \int_a^x f + \int_a^x g$.

Donc $\int_a^x (\lambda f + g) \xrightarrow{x \rightarrow b^-} \lambda \int_a^b f + \int_a^b g \in \mathbb{K}$. Il s'ensuit que $\int_a^b (\lambda f + g)$ converge, que $\lambda f + g \in E$ et $\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$ ce qui achève la démonstration. $\square$

2. Théorème

Une fonction f continue par morceaux positive sur $I = [a, b[$ est intégrable sur I si, et seulement si, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f$ est majorée sur I si, et seulement si, $\int_a^b f$ converge. Dans ce cas $\int_I f = \lim_b F = \sup_I F$.

Démonstration

Si $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$ alors, par définition, $\int_I f$ majore F et donc $\sup_I F \leq \int_I f$.

Réciproquement, si F est majorée alors, par monotonie, $\lim_b F = \sup_I F \in \mathbb{R}$ ce qui

prouve que f est intégrable sur I avec $\int_I f \leq \lim_b F$.

De plus, on a montré : $\int_I f = \lim_b F = \sup_I F$. $\square$

3. Exemples classiques**3.1. Théorème**

$f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Démonstration

f est continue positive sur $[1, +\infty[$, si $x \geq 1$, $\int_1^x f = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} [x^{1-\alpha} - 1] & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$

qui n'est majoré sur $[1, +\infty[$ que si $\alpha > 1$. $\square$

3.2. Théorème

Si $-\infty < a < b < +\infty$, $f : t \mapsto \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[a, b[$ si, et seulement si, $\alpha < 1$. En particulier la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Démonstration

f est continue positive sur $[a, b[$ et, pour $a \leq x < b$:

$$F(x) = \int_a^x f = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} [(b-x)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}] & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(b-a) - \ln(b-x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

F n'est majorée que si $\alpha < 1$. $\square$

3.3. Exercice

$f : t \mapsto \frac{1}{t |\ln(t)|^\alpha}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ (respectivement $]0, 1/2[$) si, et seulement si, $\alpha > 1$ (respectivement $\alpha < 1$).

Démonstration

Le changement de variable $t \mapsto \ln(t)$ montre, si $x \geq 2$, $\int_2^x f = \int_{\ln 2}^{\ln(x)} \frac{du}{u^\alpha}$ ce qui permet d'utiliser le théorème B.2. pour l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$. Ce changement de variable et le théorème B.2. donnent le résultat sur $]0, 1/2[$. $\square$

4. Corollaire

Soit f une fonction continue par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que $|f| \leq \varphi$, si, et seulement si, f est intégrable sur I .

Démonstration

Si f est intégrable sur I , la fonction $\varphi = |f|$ convient.

Réciproquement, s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que $|f| \leq \varphi$, la fonction $x \mapsto \int_a^x \varphi$ est majorée sur $[a, b[$, d'après le théorème précédent. La fonction $x \mapsto \int_a^x |f|$ est majorée sur $[a, b[$. Donc $|f|$ est intégrable sur $[a, b[$ ie. f est intégrable sur $[a, b[$. $\square$

5. Théorème

Si une fonction f de I dans $\mathbb{K}$ est intégrable sur I , son intégrale $\int_I f$ est convergente. Réciproque fausse.

Démonstration

• Si f est à valeurs réelles, utilisons les notations classiques $f = f^+ - f^-$ avec f^+ et f^- positives, $|f| = f^+ + f^-$. Donc $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$.
 $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) \iff |f| \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$. D'après le corollaire B.4. f^+ et f^- sont intégrables sur I et positives. D'après le théorème B.2. $\int_I f^+$ et $\int_I f^-$ convergent.

Le théorème B.1. permet de conclure que $\int_I f$ converge.

• Si f est à valeurs complexes, notons $f = \Re(f) + i \Im(f)$ et rappelons que $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs réelles. Comme $|\Re(f)| \leq |f|$ et $|\Im(f)| \leq |f|$, on déduit de B.4. que $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont intégrables sur I . La première étape de la démonstration permet de conclure que les fonctions à valeurs réelles $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont d'intégrales sur I , convergentes, et l'on conclut avec B.1. $\square$

Contre exemple : $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$, est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeons-la par continuité en 0 car $\sin t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$.

• Montrons que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{n\pi} |f| = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f| = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t + k\pi} dt \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin$$

d'où $I_n \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et donc $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

- Montrons la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$:

$g : t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et $|g(t)| \leq \frac{1}{t^2}$, comme $t \mapsto \frac{1}{t^2} \in \mathcal{L}^1([1, +\infty[, \mathbb{R})$, g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Si $x \in \mathbb{R}_+$ on a, en intégrant par parties :

$$I(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_0^x - \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{1 - \cos x}{x} - 2 \int_0^x \frac{\sin^2(t/2)}{t^2} dt$$

car $1 - \cos t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$. Le changement de variable linéaire $t \mapsto \frac{t}{2}$ donne alors :

$$I(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x} - \int_0^{x/2} \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 du \text{ car } |1 - \cos| \leq 2.$$

- En résumé $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ existe et est égale à $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 du$.

6. Théorème

Si f et g sont continues par morceaux positives sur I avec $f \leq g$ alors :

1. Si g est intégrable sur I alors f est intégrable sur I et $\int_I f \leq \int_I g$.
2. Si f est non intégrable sur I alors g est non intégrable sur I .

Démonstration

Par contraposition il suffit de montrer la première propriété. Si $x \in [a, b[$ on a, par croissance de $h \mapsto \int_a^x h$, $\int_a^x f \leq \int_a^x g \leq \int_a^b g \in \mathbb{R}_+$ d'où l'intégrabilité de f et l'inégalité. $\square$

7. Corollaire

Si f et g sont continues par morceaux positives sur $I = [a, b[$ avec $f \underset{b}{=} O(g)$ et g intégrable sur I alors $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$.

Démonstration

Sur un intervalle $[c, b[$ on a $0 \leq f \leq \lambda g$ où $\lambda \in]0, +\infty[$ et $c \in [a, b[$, donc, par majoration, f est intégrable sur $[c, d[$ et, comme elle est continue par morceaux sur $[a, c]$, elle est aussi intégrable sur ce segment donc intégrable sur $I = [a, c] \cup [c, b[$ d'après A.2.2. $\square$

8. Corollaire

Si f et g sont continues par morceaux positives sur $I = [a, b[$ avec $f \underset{b}{\sim} g$, alors f est intégrable sur I si, et seulement si, g l'est.

Démonstration

Le corollaire précédent s'applique car $f \underset{b}{=} O(g)$ et $g \underset{b}{=} O(f)$. $\square$

Remarques : supposons $I = [a, +\infty[$ et f continue par morceaux positive sur I .

1. Si f admet ℓ pour limite en $+\infty$ et f intégrable sur I alors $\ell = 0$. En effet la fonction constante égale à ℓ est positive et $O(f)$, donc intégrable sur I ce qui n'est possible que si $\ell = 0$.

2. $\lim_{+\infty} f = 0$ ne suffit pas à assurer l'intégrabilité de f comme le prouve l'exemple de $t \mapsto \frac{1}{t}$.

9. Exemples fondamentaux

9.1. Intégrales de Bertrand

- Étudions l'intégrabilité de $f_{\alpha,\beta} : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}$ sur $I = [2, +\infty[$:

Elle est continue positive sur I et on va distinguer trois cas :

si $\alpha < 1$ alors $\frac{1}{t} = o(f_{\alpha,\beta})$ et $t \mapsto \frac{1}{t} \notin \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$, donc $f_{\alpha,\beta} \notin \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$.

si $\alpha = 1$ on a déjà vu $f_{\alpha,\beta} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}_+) \iff \beta > 1$.

si $\alpha > 1$, avec γ dans $]1, \alpha[$ on a $f_{\alpha,\beta} = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$ d'où $f_{\alpha,\beta} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$ car $t \mapsto \frac{1}{t^\gamma} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$.

En résumé $f_{\alpha,\beta} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}_+) \iff (\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

- Étudions son intégrabilité sur $J =]0, \frac{1}{2}]$:

Si $x \geq 2$ le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$ donne $\int_2^x f_{\alpha,\beta} = \int_{1/x}^{1/2} f_{2-\alpha,\beta}$ et donc $f_{\alpha,\beta} \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{R}_+) \iff (\alpha < 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

9.2 Fonction Gamma

Si $x \in \mathbb{R}$ et $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ alors f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$, en effet f_x est continue positive sur $]0, +\infty[$ et on a les comparaisons :

- $f_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ donc f_x est intégrable sur $]0, 1]$ si, et seulement si, $x > 0$;

- $f_x(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, f_x est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On conclut en rappelant que f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, elle l'est sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$.

Définition

On note Γ l'application définie sur $]0, +\infty[$ par $\Gamma(x) = \int_{]0, +\infty[} t^{x-1}e^{-t} dt$.

Remarques

1. $\Gamma(1) = \int_{]0, +\infty[} e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} dt = 1$.

2. Si $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a, par parties : $\int_{1/n}^n f_{x+1} = \left[t^x e^{-t}\right]_{1/n}^n + x \int_{1/n}^n f_x$ d'où, quand $n \rightarrow \infty$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Par récurrence, si $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$

3. Si $t > 0$, $x \mapsto t^{x-1}$ est convexe sur $]0, +\infty[$. Si x, y dans $]0, +\infty[$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a, pour tout $t > 0$, $t^{\lambda(x-1)+(1-\lambda)(y-1)}e^{-t} \leq \lambda t^{x-1}e^{-t} + (1-\lambda)t^{y-1}e^{-t}$ et, par croissance de l'intégrale, $\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \Gamma(x) + (1-\lambda)\Gamma(y)$, Γ est donc convexe sur $]0, +\infty[$.

Nos lecteurs un peu cultivés déduisent de la convexité de Γ sa continuité.

10. Théorème : fonction d'intégrale nulle

Soit f continue positive et intégrable sur I , $\int_I f = 0 \iff f = 0$.

Démonstration

Si $x \in I = [a, b[, 0 \leq \int_a^x f \leq \int_a^b f = 0$ d'où $\int_a^x f = 0$. Comme f est continue positive sur le segment $[a, x]$, elle est nulle sur $[a, x]$ et, en particulier, $f(x) = 0$. $\square$

11. Théorème d'intégration par parties

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$. Si deux des trois termes $\int_a^b f'g$, $\int_a^b fg'$, $\lim_{x \rightarrow b^-} [fg]_a^x$ existent, $\int_a^b fg' = \lim_{x \rightarrow b^-} [fg]_a^x - \int_a^b f'g$.

Démonstration

Elle se déduit du théorème vu en MPSI sur le segment $[a, x]$ et de théorèmes classiques sur les limites. $\square$

12. Théorème de changement de variable

Si φ est une bijection strictement monotone de classe $\mathcal{C}^1$ entre les intervalles I d'extrémités a et b et J d'extrémités c et d , alors $f \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{K}) \iff (f \circ \varphi)\varphi' \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$.
Si c'est le cas on a $\int_J f = \int_I (f \circ \varphi)|\varphi'|$.

Démonstration

On se limite au cas où $I = [a, b[$ et φ croissante. Pour tout $x \in [a, b[$ on a $\int_a^x |f \circ \varphi| |\varphi'| = \int_c^{\varphi(x)} |f|$ et $\lim_b \varphi = d$, par suite, si $f \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{K})$, alors $(f \circ \varphi)\varphi' \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$. La réciproque découle du sens direct et du fait que φ est une bijection strictement monotone de classe $\mathcal{C}^1$ entre les intervalles. Enfin, si c'est le cas, $\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi' = \int_c^d f$ par la même méthode. $\square$

II. Intégration de relations de comparaison**A. Théorème**

(i) Soient f et g continues par morceaux sur $[a, b[$, f à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et g à valeurs complexes avec $g \underset{b}{=} O(f)$.
a. Si $f \in \mathcal{L}^1([a, b[, \mathbb{R}_+)$ alors $\int_x^b g \underset{x \rightarrow b}{=} O\left(\int_x^b f\right)$.
b. Dans le cas contraire, $\int_a^x g \underset{x \rightarrow b}{=} O\left(\int_a^x f\right)$.
(ii) On a les mêmes propriétés en remplaçant « O » par « o » ou « $\sim$ ».

Démonstration

(i) a. Soient $M > 0$ et $c \in [a, b[$ tels que, sur $[c, b[$, $|g| \leq Mf$.
Si $x \in [c, b[$ on a $\left| \int_x^b g \right| \leq \int_x^b |g| \leq \int_x^b Mf = M \int_x^b f$ d'où le résultat.

b. On utilise les mêmes notations mais, comme $\int_a^x f \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$, tout revient à montrer que $\int_c^x g \underset{x \rightarrow b}{=} O\left(\int_c^x f\right)$. Si $x \geq c$, $\left|\int_c^x g\right| \leq \int_c^x |g| \leq M \int_c^x f$ permet de conclure.

(ii) Si $g(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(f(x))$, il suffit de remplacer dans (i) M par $\varepsilon > 0$ arbitraire.

Dans le cas où $g(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} f(x)$, il suffit d'appliquer le cas précédent puisque : $(g - f)(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(f(x))$. $\square$

B. Applications

a. Montrer que $\int_x^1 \frac{dt}{\ln(1+t)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

b. (i) Montrer que : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, a > 1, \int_a^x (\ln(t))^\alpha dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \ln^\alpha(x)$.

(ii) Montrer que $\int_a^x \frac{dt}{\ln(t)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x}{\ln(x)} + \frac{1!x}{\ln^2(x)} + \cdots + \frac{(k-1)!x}{\ln^k(x)} + o\left(\frac{x}{\ln^k(x)}\right)$.

c. Soient $a \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(a) > 0$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ de limite nulle en $+\infty$. Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y' + ay = f$ a une limite nulle en $+\infty$.

Solution

a. $\frac{1}{\ln(1+t)} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t} > 0$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ non intégrable sur $]0, 1]$ donnent le résultat.

b. *Idée générale* : Intégrer par parties $\int \varphi = [\] - \int \psi$; puis montrer que $\int \varphi \sim [\]$ en comparant $\int \varphi$ et $\int \psi$ à l'aide du théorème.

(i) $\int_a^x \ln^\alpha(t) dt = x \ln^\alpha(x) - a \ln^\alpha(a) - \alpha \int_a^x (\ln(t))^{\alpha-1} dt$.

$(\ln(t))^{\alpha-1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left((\ln(t))^\alpha\right)$ et la fonction $t \mapsto (\ln(t))^\alpha$ n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$, $a > 1$ car $t(\ln(t))^\alpha \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc : $\int_a^x (\ln(t))^{\alpha-1} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_a^x (\ln(t))^\alpha dt\right)$. Or :

$a \ln^\alpha(a) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_a^x (\ln(t))^\alpha dt\right)$, d'où le résultat.

(ii) $\forall p \in \mathbb{N}^*, \int_a^x \frac{dt}{\ln^p(t)} = \left[\frac{t}{\ln^p(t)}\right]_a^x + p \int_a^x \frac{dt}{(\ln(t))^{p+1}}$.

Donc : $\int_a^x \frac{dt}{\ln(t)} = \frac{x}{\ln(x)} + \frac{1!x}{\ln^2(x)} + \cdots + \frac{(k-1)!x}{\ln^k(x)} + A_k + k! \int_a^x \frac{dt}{(\ln(t))^{k+1}}$.

A_k est une constante réelle, donc : $A_k \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{x}{\ln^{k+1}(x)}\right)$.

$\int_a^x \frac{dt}{(\ln(t))^{k+1}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln^{k+1}(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{x}{\ln^k(x)}\right)$. D'où le résultat.

c. Soit φ solution et $\psi : x \mapsto \varphi(x)e^{ax}$, alors, sur $\mathbb{R}_+$, $\psi'(x) = [\varphi'(x) + a\varphi(x)]e^{ax}$ soit $\psi'(x) = f(x)e^{ax} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{x\Re(a)})$.

$x \mapsto e^{x\Re(a)}$ est continue positive non intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le b) du théorème, montre

que $\psi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^{x\Re(a)}}{a}\right)$ d'où $\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ ou encore $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

III. Intégrales et séries

A. Comparaison à une série numérique

1. Théorème

Si f est continue par morceaux positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, alors la série de terme général $w_n = \left(\int_{n-1}^n f \right) - f(n)$ est une série à termes positifs convergente. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \iff \sum f(n)$ converge, sinon $\sum_{k=0}^n f(k) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \int_0^n f$.

Démonstration

• f étant décroissante, pour tout $n \geq 1$, $(\star) f(n) \leq \int_{n-1}^n f \leq f(n-1)$ d'où $0 \leq w_n \leq f(n-1) - f(n)$. $\sum w_n$ est une série à termes positifs et sa somme de rang n est majorée par $\sum_{k=1}^n [f(k-1) - f(k)]$ donc par $f(0)$, ce qui prouve la convergence de $\sum w_n$.

• Comme f est positive, $x \mapsto \int_0^x f$ est croissante, elle est majorée si, et seulement si, $\sum \int_{n-1}^n f$ converge ou encore, d'après $(\star)$, si, et seulement si, $\sum f(n)$ converge. Par conséquent $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \iff \sum f(n)$ converge.

• En cas de divergence, par monotonie, $\int_0^n f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ alors que la suite de terme général $\left(\int_0^n f \right) - \sum_{k=1}^n f(k)$ converge car c'est la somme de rang n de $\sum w_n$.

On a donc $\left(\int_0^n f \right) - \sum_{k=1}^n f(k) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} o \left(\int_0^n f \right)$ i.e. $\sum_{k=0}^n f(k) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \int_0^n f$. $\square$

Remarque : sous les mêmes hypothèses, la série à termes négatifs de terme général $\left(\int_n^{n+1} f \right) - f(n)$ converge.

Exemple

• Si $\alpha \in]0, 1]$ et $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln(t))^\alpha}$ les hypothèses du théorème sont satisfaites sur $[2, +\infty[$ et $f \notin \mathcal{L}^1([2, +\infty[, \mathbb{R}_+)$ d'où les équivalents :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(\ln(n)) \text{ et } \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(\ln(k))^\alpha} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(\ln(n))^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ si } \alpha \neq 1.$$

• Si $\alpha > 1$ alors $f \in \mathcal{L}^1([2, +\infty[, \mathbb{R}_+)$ et, avec les notations du théorème, comme $0 \leq w_n \leq f(n-1) - f(n)$ on obtient en sommant : $0 \leq \int_n^{+\infty} f - \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq f(n)$,

comme $f(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} o \left(\int_n^{+\infty} f \right)$ il vient $\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f$ soit

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^{\alpha}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{(\ln(n))^{\alpha-1}}.$$

2. Théorème

Si f est continue par morceaux positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors la série de terme général $w'_n = \left(\int_n^{n+1} f \right) - f(n)$ est une série à termes positifs convergente si f est majorée.

Si $f(n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} o \left(\int_0^n f \right)$, alors $\sum_{k=0}^n f(k) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \int_0^n f$.

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq w'_n \leq f(n+1) - f(n)$. Donc : $\sum_{k=0}^n w'_n \leq f(n+1) - f(0)$.

$\sum w'_n$ converge si f est majorée. On a aussi $f(0) \leq \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f \leq f(n)$ et

donc, si $f(n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} o \left(\int_0^n f \right)$, il vient $\sum_{k=0}^n f(k) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \int_0^n f$. $\square$

Exemple

Pour $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$ et $f : t \mapsto t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}$ sur $[1, +\infty[$ on a en intégrant par parties :

$$\int_1^n f = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\ln(n))^{\beta} - \frac{\beta}{\alpha+1} \int_1^n t^{\alpha}(\ln(t))^{\beta-1} dt \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\ln(n))^{\beta}.$$

En effet $0 \leq \int_1^n t^{\alpha}(\ln t)^{\beta-1} dt \leq n^{\alpha+1}(\ln(n))^{\beta-1} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o \left(n^{\alpha+1}(\ln(n))^{\beta} \right)$.

Par suite $f(n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} o \left(\int_1^n f \right)$ et donc $\sum_{k=1}^n n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\ln(n))^{\beta}$.

Pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ on obtient ainsi $\ln(n!) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln n$, la formule de Stirling permet aussi de le prouver.

B. Application à l'étude de séries

Nous avons déjà vu une utilisation des intégrales pour l'étude des séries à termes positifs cf. A. Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $w_n = \left(\int_{n-1}^n f \right) - f(n)$.

Une intégration par parties donne : $w_n = - \int_{n-1}^n (t - n + 1) f'(t) dt$.

$\forall t \in [n-1, n]$, $0 \leq (t - n + 1) \leq 1$ et donc, par domination, on a : $|w_n| \leq \int_{n-1}^n |f'|$

Si $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ alors $\sum w_n$ est absolument convergente.

Exercice : Nature de la série $\sum \frac{\sin(\ln(n))}{n}$.

Application des résultats précédents à $f : t \mapsto \frac{\sin(\ln(t))}{t}$ sur $I = [1, +\infty[$.

$f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Pour $t \in I$, $|f'(t)| = \left| \frac{\cos(\ln(t)) - \sin(\ln(t))}{t^2} \right| \leq \frac{2}{t^2}$. Donc $f' \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$.

Si $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, $\sum_{n=2}^N w_n = \int_1^N \frac{\sin(\ln(t))}{t} dt - \sum_{n=2}^N \frac{\sin(\ln(n))}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} K + o(1)$ par absolue convergence de $\sum w_n$. Donc $\sum_{n=2}^N \frac{\sin(\ln(n))}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} -\cos(\ln N) + C + o(1)$ sans limite lorsque $N \rightarrow \infty$, ce qui prouve la divergence de $\sum \frac{\sin(\ln(n))}{n}$.

C. Passage à la limite sous l'intégrale

1. Théorème de convergence dominée (admis)

Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, convergeant simplement sur I vers $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$. S'il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ et positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$, alors $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ et $\int_I f = \lim_n \int_I f_n$.

Remarques

- La condition de domination est essentielle, même s'il y a convergence uniforme sur tout l'intervalle I . La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $g_n = \frac{(-1)^n}{2n} \chi_{[-n, n]}$ donne l'exemple d'une suite convergeant uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, telle que la suite des intégrales sur $\mathbb{R}$ diverge, puisque $\int_{\mathbb{R}} g_n = (-1)^n$.
- Le théorème est encore vrai si $(f_x)_{x \in \mathbb{R}}$ est une famille de fonctions.

Exemples

1. Montrer que : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Une application du théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (f_n) définies par $f_n(t) = \sin^n(t)$ pour $t \in I = [0, \frac{\pi}{2}]$ permet de conclure car $|f_n(t)| \leq 1$, la fonction $I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto 1$ est continue sur I , et la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\mathbb{I}_{\{\pi/2\}}$ sur I .

2. Si $I = \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$, $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

En effet $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto \exp(-x^2)$ avec la majoration, pour tout (n, x) , $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$.

En effet, d'après le binôme de Newton, $\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n = 1 + x^2 + A$ où $A \geq 0$.

$\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et le théorème de convergence dominée s'applique.

Le changement de variable linéaire $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{n}}$ montre que $\int_{\mathbb{R}} f_n = \sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{(1+u^2)^n}$ et, à l'aide du changement de variable $u \mapsto \arctan(u)$ qui établit une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ entre $\mathbb{R}_+$ et $[0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient $\int_{\mathbb{R}} f_n = 2\sqrt{n} I_{2n-2}$ (Wallis). Comme

$I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ on a $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

On notera que le changement de variable $x \mapsto \sqrt{x}$ et la parité de $x \mapsto e^{-x^2}$ montrent également que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Théorème de sommation $\mathcal{L}^1$ (admis)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ convergeant simplement sur I , de somme $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ telle que $\sum \int_I |f_n|$ converge. Alors $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$, la série $\sum \int_I f_n$ converge et $\int_I f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$.

Exemple (théorème de Hardy)

a) $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n t^n}{n!}$ où $\sum c_n$ une série à termes complexes absolument convergente.

Montrer que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

b) Montrer que $t \mapsto f(t)e^{-t}$ est élément de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Solution

Puisque $\sum c_n$ converge, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n| \leq M$.

Soit $a > 0$. Pour tout $t \in [-a, +a]$, $\left| \frac{c_n t^n}{n!} \right| \leq \frac{M a^n}{n!} = \lambda_n$ qui est indépendant de t et terme général de la série convergente de somme $M e^a$. Donc la série de fonctions continues $t \mapsto \frac{c_n t^n}{n!}$ converge normalement, *a fortiori* uniformément, sur tout segment de $\mathbb{R}$. Donc $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à $f_n : t \mapsto \frac{c_n t^n}{n!} e^{-t}$. Les hypothèses se vérifient immédiatement. $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge car $|f_n(t)| \leq |c_n| \frac{t^n}{n!} e^{-t}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \Gamma(n+1) = n!$ et $\sum |c_n|$ converge.

Remarque

Le théorème donne des conditions suffisantes pour l'intervention des deux signes somme. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner l'exemple suivant.

Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1(]0, 1[, \mathbb{C})$, alors $\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n t^n f(t) dt$.

$\forall t \in]0, 1[, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f(t) = \frac{f(t)}{1+t}$ cf. séries géométriques.

Posons $f_n(t) = (-1)^n f(t)$ pour $t \in]0, 1[$ et $n \geq 0$. La série de fonctions intégrables $\sum f_n$ converge simplement sur $I =]0, 1[$ et a pour somme $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t}$ qui est continue par morceaux sur I . On ne peut rien dire en général de la nature de la série réelle $\sum \int_I |f_n|$. (prendre par exemple $f(t) = 1$.)

Les fonctions S_n définies par $S_n(t) = \sum_{k=0}^n f_k(t) = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 - (-t)} f(t)$ sont continues par morceaux sur I et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, 1[$, $|S_n(t)| \leq |f(t)|$ car si $t \in]0, 1[$, $0 \leq |1 - (-t)^{n+1}| \leq 1 + t^{n+1} \leq 1 + t$. De l'intégrabilité de f et du théorème de convergence dominée appliqué à la suite (S_n) , on déduit l'égalité annoncée.

D. Intégrales à paramètre

1. Continuité

1.1. Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, A une partie de $\mathbb{R}^m$ et $f \in \mathcal{F}(A \times I, \mathbb{K})$. Si $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A , si pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I et s'il existe φ dans $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $(x, t) \in A \times I$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ (**hypothèse de domination**), alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

Démonstration

- La fonction g est définie sur A puisque pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I puisque $|f(x, \cdot)| \leq \varphi$.
 - Montrons la continuité de g sur A . Soit a un point de A ; pour montrer que g est continue en a , il suffit de prouver que pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a , la suite $(g(a_n))$ converge vers $g(a)$. Considérons donc une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A et convergeant vers a , et définissons une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications de I dans $\mathbb{K}$ par $h_n : t \mapsto f(a_n, t)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h_n est continue par morceaux sur I , et vérifie la propriété de domination $|h_n| \leq \varphi$. Comme de plus la suite (h_n) converge simplement vers $h : t \mapsto f(a, t)$ qui est elle aussi continue par morceaux nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée qui se traduit par $g(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(a)$. Ainsi nous avons prouvé la continuité de g au point a , donc sur I , puisque a est quelconque dans I . $\square$
- On en déduit facilement le corollaire suivant :

1.2. Corollaire

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, A une partie de $\mathbb{R}^m$ et $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$. Si $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A , si pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I et si, pour tout compact K inclus dans A , il existe φ_K positive et intégrable sur J telle que, sur $K \times I$, $|f(x, t)| \leq \varphi_K(t)$, alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est définie continue sur A .

Exemple : continuité de la fonction Γ

La fonction $f : (x, t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Pour $0 < a < x < b < +\infty$ et $t \in]0, +\infty[$,

$$|f(x, t)| \leq e^{-t} \max\{t^{a-1}, t^{b-1}\} \leq e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1}) = \varphi_{a,b}(t) = f(a, t) + f(b, t).$$

$\varphi_{a,b} \in \mathcal{L}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$, donc le corollaire 1.2. prouve que $\Gamma \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

2. Dérivabilité

Nous supposons que le lecteur étudiant a des notions de calcul différentiel.

2.1. Théorème

Soient I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$. Si pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur J , si la fonction f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant les hypothèses du théorème de continuité, alors $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Démonstration

On a donc 4 hypothèses.

- pour tout $x \in I, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur J ;
- pour tout $t \in J, x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ est continue sur I ;
- pour tout $x \in I, f(x, \cdot)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- il existe une application φ continue par morceaux positive et intégrable sur I telle que $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) \right| \leq \varphi$.

Remarquons d'abord qu'en raison de l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall t \in J, \forall (a, b) \in I^2, a \neq b \Rightarrow \left| \frac{f(b, t) - f(a, t)}{b - a} \right| \leq \varphi(t).$$

Soit $a \in I$, une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $I \setminus \{a\}$ convergeant vers a et définissons la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies sur J par $h_n(t) = \frac{f(a_n, t) - f(a, t)}{a_n - a}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est continue par morceaux sur J , et $|h_n| \leq \varphi$. Comme la suite (h_n) converge simplement vers $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a, t)$ qui est continue par morceaux sur J , le théorème de convergence dominée donne :

$$\frac{g(a_n) - g(a)}{a_n - a} = \int_J \frac{f(a_n, t) - f(a, t)}{a_n - a} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(a, t) dt.$$

Cela étant vrai pour toute suite (a_n) à valeurs dans $I \setminus \{a\}$ convergeant vers a , on en déduit que $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow[x \neq a]{x \rightarrow a} \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(a, t) dt$. D'où la dérivabilité de g sur A et la valeur de g' . La continuité de g' résulte de l'application du théorème 1.1 à g' . $\square$

On déduit sans difficulté du théorème :

2.2. Corollaire

On a la même conclusion si les hypothèses de domination sont vérifiées seulement sur tout segment inclus dans I .

2.3. Corollaire

Si $k \in \mathbb{N}^*$, si f vérifie les hypothèses du théorème de continuité avec domination sur tout segment de I et admet, à tout ordre $i \leq k$, des dérivées partielles $\frac{\partial^i f}{\partial x^i}$ vérifiant les mêmes hypothèses, alors g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I avec, si $i \in \mathbb{N}^*, i \leq k$, $g^{(i)}(x) = \int_J \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) dt$.

Exemple : dérivabilité de la fonction Γ

$f : (x, t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[^2$ avec, pour tout entier $i \geq 1$, $\frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) = \ln^i(t)f(x, t)$. Soit $]a, b[\subset]0, +\infty[$.

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[, \left| \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) \right| \leq \varphi_i(t) = |\ln(t)|^i (f(a, t) + f(b, t)).$$

La fonction φ_i , continue sur $]0, +\infty[$, est d'une part, intégrable sur $[1, +\infty[$, puisque $\varphi_i(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{-2})$, d'autre part intégrable sur $]0, 1]$ puisque $\varphi_i(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o(t^{\frac{\alpha}{2}-1})$.

Par conséquent φ_i est intégrable sur $]0, +\infty[$, le corollaire 2 s'applique et prouve que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ avec : $\forall i \geq 1$, $\Gamma^{(i)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^i t^{x-1} e^{-t} dt$. En particulier $\Gamma'' \geq 0$ (et même $\Gamma'' > 0$), on retrouve ainsi la convexité de Γ .

3. Limite

Lorsque la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur J , les théorèmes du programme permettent d'étudier la continuité et la dérivabilité de $F : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ sur I . Que faire pour connaître la limite de F en une des bornes de l'intervalle I où F n'est pas définie, par exemple ? Les deux exemples suivants fournissent des pistes.

- a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$.
- b. Si $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ est telle que $g_x : t \mapsto \frac{f(t)}{x+t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x > 0$, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{x+t} dt$.

Solutions : a. Comme pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right| \leq e^{-xt}$ la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

Par encadrement, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

b. On peut utiliser la remarque qui suit le théorème de convergence dominée. On note, pour tout $x \geq 1$, $h_x : t \mapsto \frac{f(t)}{x+t}$. Pour tout $x \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}_+$, $|h_x(t)| \leq |g_1(t)|$. Comme $|g_1|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et comme $(h_x)_{x \in \mathbb{R}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction h nulle sur $\mathbb{R}_+$, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{x+t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h = 0.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{x+t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

E. Complément sur la fonction Γ

• Étude des variations :

Rappelons que si $n \in \mathbb{N}$ on a $\Gamma(n+1) = n!$ donc $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, le théorème de Rolle et la stricte monotonie de Γ' montrent qu'il existe un unique x_0 dans $]1, 2[$ tel que $\Gamma' < 0$ sur $]0, x_0[$ et $\Gamma' > 0$ sur $]x_0, +\infty[$, Γ est donc strictement décroissante puis strictement croissante.

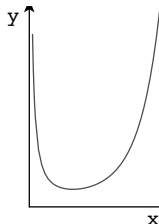
Notons aussi que : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ a été prouvé en III.C.1.

• Comportement aux bornes :

Si $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et, comme la fonction Γ est continue en 1, il vient $x\Gamma(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ ou encore $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$.

Γ croît sur $[2, +\infty[$, si $x \geq 1$, $\Gamma(x+1) \geq \Gamma(E[x+1]) = (E[x])!$, par conséquent $\Gamma(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, et au voisinage de $+\infty$, $\Gamma(x)$ est prépondérant sur toute puissance de x , i.e. pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\Gamma(x))$.

• **Représentation graphique de Γ :**



EXERCICES

1. Intégrabilité de f sur I si :

- a. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x + e^x}$ et $I = \mathbb{R}_+^*$, b. $f(x) = \frac{1}{1 + x^\alpha \sin^2(x)}$, $I = \mathbb{R}_+$ et $\alpha > 0$,
 c. $f(x) = [\ln(x)]^{-\ln(x)}$, $I =]1, +\infty[$, d. $f(x) = \frac{\ln(1+x^p)}{x^q}$, $I = \mathbb{R}_+^*$, $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

2. Existence et calcul de :

- a. $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{(1-x)^{3/2}} dx$, b. $J = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} \ln(t)}{(1+t^2)^\alpha} dt$, $\alpha > 0$, c. $K = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$,
 d. $L = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x + x_k} \right) dx$ si $\sum_{k=1}^n a_k = 0 < x_1 < \dots < x_n$.

3. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^{1/n} dx \right)^n$.

4. Montrer que :

- a. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$,
 b. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} -\ln(x) + \Gamma'(1) + o(1)$.

5. a. Montrer que $\forall x \in [0, n], 0 \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$.

b. On pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{t} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] dt$ et $J_n = \int_1^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{dt}{t}$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (J_n)$.

c. Montrer que $I_n - J_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

d. Montrer que $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt = -\gamma$ (constante d'Euler.)

6. Si $f \in \mathcal{CM}([0, 1], \mathbb{C})$ et est continue en 1, déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nt^n f(t) dt$.

7. Soit $F(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-t|}}{1+t^2} dt$. Étudier F et son comportement en $+\infty$. Montrer que F est l'unique solution de l'équation différentielle : $y'' - y = -\frac{2}{1+x^2}$ de limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$.

8. Montrer que si $\alpha > 0$, $\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2}$.

9. a. Montrer que si $x > 0$, $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x)$.

On pourra introduire la fonction f_n définie par $f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq t < n \\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}$

b. En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} = \Gamma(x)$.

10. Soit, pour $\lambda > 0$, $f(\lambda) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2}\right) e^{-\lambda t} dt$ et

$$g(\lambda) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) e^{-\lambda t} dt.$$

a. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $g' = -f$.

b. En écrivant que $\frac{1}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)t}$ pour tout $t > 0$, prouver que :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\lambda)^2}.$$

11. Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}_+^*)$, $a \geq 0$, telle que : $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)$.

a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)}\right) = \alpha$. Que dire de $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\gamma f(x))$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{-\alpha\}$?

b. Si $\alpha < -1$, montrer que $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$ et que $\int_x^{+\infty} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{xf(x)}{\alpha+1}$.

c. Si $\alpha > -1$, montrer que $f \notin \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$ et que $\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{xf(x)}{\alpha+1}$.

d. Si $\alpha = -1$ que peut-on conclure ?

12. a. Si $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et est dérivable en 0, déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n^3 x f(x) dx}{(1+n^2 x^2)^2}$.

b. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{n^2 x f(x) dx}{(1+n^2 x^2)^2}$.

13. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ avec f et f'' intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f' et f admettent 0 pour limite en $+\infty$ puis que les séries $\sum f'(n)$ et $\sum f(n)$ convergent.

14. Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} dt$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^\star$, solution de l'équation différentielle $y'' - y + \frac{\pi}{2} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ en utilisant $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\pi}{2}$. Expliciter f .

15. Expliciter $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx) - \arctan(t)}{t} dt$ si $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

16. Si $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$, montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^1 e^{kx(t-u)} f(u) du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^t f$ pour tout $t \in [0, 1]$. En déduire que si la suite de terme général $\int_0^1 e^{nt} f(t) dt$ est bornée, alors f est nulle.

17. Si $z \in \mathbb{C}$ et vérifie $|z| < 1$, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{zt} - 1}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(n+1) z^n$.

18. a. Trouver une équation différentielle dont $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ est solution. Déterminer $\lim_0 f$ et $\lim_{+\infty} f$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

b. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t^2 - x^2/t^2} dt$ pour tout réel x .

19. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $t \mapsto \frac{f^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f^2(t)}{t^2} dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f'^2$.

20. Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. Donner $f(0)$, $f(1)$ et $\lim_{+\infty} f$. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(s)}{s^2 - 1} ds$ et de $\zeta(2)$.

21. Convergence et somme éventuelle de $\sum \int_0^1 e^t \left(\frac{2\epsilon t}{1+t^2} \right)^n dt$ si $\epsilon = \pm 1$.
Indication : on pourra calculer $\frac{d}{dt} \left(e^t \frac{t-1}{t+1} \right)$.

22. Soit (λ_n) une suite croissante non majorée de réels strictement positifs. Montrer que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n x} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$.

23. Soient $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ et $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. Trouver $\lim_n \int_0^1 f(t) \varphi(nt) dt$.

Application : $\lim_n \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) \left(\frac{\sin(nt)}{t} \right)^2 dt$.

24. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes et α, β deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$ et, pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

- a. Calculer $\int_{\alpha}^{\beta} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|^2 dx$.
- b. En utilisant le théorème de convergence dominée et un raisonnement par l'absurde en déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0.

25. Lemme de Riemann-Lebesgue

On se propose de montrer que, si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et si g est continue par morceaux T -périodique sur $\mathbb{R}$, alors $\int_I f(t)g(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left(\int_I f \right) \left(\int_0^T g \right)$.

- a. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe φ en escalier sur I telle que $N_1^I(f - \varphi) \leq \varepsilon$.
- b. On suppose $\int_0^T g = 0$, prouver le résultat si f est en escalier puis dans le cas général en utilisant a.
- c. Traiter le cas $\int_0^T g \neq 0$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

1. a. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^{-2})$, donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. f est continue positive sur $\mathbb{R}_+$ sans équivalent intéressant en $+\infty$. On va utiliser : f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $\sum u_n$ converge où $u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f$.

Le changement de variable $u = t - k\pi$ donne $u_k = \int_0^{\pi} \frac{du}{1 + (u + k\pi)^\alpha \sin^2(u)}$ d'où

$$\alpha_{k+1} \leq u_k \leq \alpha_k \text{ où on a posé } \alpha_k = \int_0^{\pi} \frac{du}{1 + (k\pi)^\alpha \sin^2(u)} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 + (k\pi)^\alpha \sin^2(u)}$$

par π -périodicité et parité de $\sin^2$. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, par concavité, $\frac{2}{\pi} u \leq \sin(u) \leq u$

$$\text{d'où : } 2 \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 + (k\pi)^\alpha u^2} \leq \alpha_k \leq 2 \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 + (k\pi)^\alpha \frac{4}{\pi^2} u^2}.$$

$$\text{Or, si } C > 0, 2 \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 + Ck^\alpha u^2} = \frac{2}{k^{\alpha/2} \sqrt{C}} \arctan\left(k^{\alpha/2} \sqrt{C} \frac{\pi}{2}\right) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{k^{\alpha/2} \sqrt{C}}.$$

Donc $\sum \alpha_k$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$ ie. f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $\alpha > 2$.

c. f est continue strictement positive sur I et $\ln[f(x)] = -\ln(x) \ln[\ln(x)]$.

Par croissances comparées, $\ln[f(x)] \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1}$ et f admet un prolongement continu en 1.

$\ln[x^2 f(x)] = \ln(x) \left(2 - \ln[\ln(x)] \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$, donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^{-2})$ et f est intégrable sur I .

d. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{q-p}}$ donc f est intégrable sur $]0, 1]$ si, et seulement si, $q - p < 1$.

- Si $q \leq 1$ alors $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f(x))$ donc f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
- Sinon, avec $r \in]1, q[$, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^{-r})$ et f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

En résumé f est intégrable sur I si, et seulement si, $1 < q < p + 1$.

2. a. $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{(1-x)^{3/2}}$ est continue sur $]0, 1[$ avec $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, donc f est intégrable sur $]0, 1[$.

On va intégrer par parties avec un choix de primitive judicieux sur $[a, b] \subset]0, 1[$.

$$\int_a^b \frac{\ln(x)}{(1-x)^{3/2}} dx = \left[2 \ln(x) \left((1-x)^{-1/2} - 1 \right) \right]_a^b - 2 \int_a^b \frac{1}{x} \left((1-x)^{-1/2} - 1 \right) dx.$$

$$\ln(x) \left((1-x)^{-1/2} - 1 \right) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\sqrt{1-x} \rightarrow 0 \text{ et } 2 \ln(x) \left((1-x)^{-1/2} - 1 \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln(x) \rightarrow 0$$

d'où $I = 2 \int_0^1 \frac{1}{x} \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}} dx = -4 \int_0^1 \frac{1-u}{1-u^2} du$ par le changement de variable $u = \sqrt{1-x}$ qui est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ entre $[0, 1[$ et $]0, 1]$.

$$\text{Par suite } I = -4 \int_0^1 \frac{du}{1+u} = -4 \ln(2).$$

b. $f : t \mapsto \frac{t^{\alpha-1} \ln(t)}{(1+t^2)^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^{1-\alpha}} = o\left(\frac{1}{t^{1-\alpha/2}}\right)$ et $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^{1+\alpha}} = o\left(\frac{1}{t^{1+\alpha/2}}\right)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ entre $\mathbb{R}_+^*$ et lui-même donne immédiatement $J = -J$ d'où $J = 0$.

c. $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^{-2})$, donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le changement de variable $u = \sqrt{e^x-1}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ entre $\mathbb{R}_+^*$ et lui-même avec $du = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}} dx$ ou encore $\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = 2 \frac{du}{1+u^2}$, ce qui montre

$$\text{que } K = 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi.$$

d. $f : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x+x_k}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x^{-2})$ car $\sum_{k=1}^n a_k = 0$, donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Si $X \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\int_0^X f = \sum_{k=1}^n a_k \ln(X+x_k) - \ln\left(\prod_{k=1}^n x_k^{a_k}\right) = \sum_{k=1}^n a_k \ln\left(1 + \frac{x_k}{X}\right) - \ln\left(\prod_{k=1}^n x_k^{a_k}\right)$$

$$\text{car } \sum_{k=1}^n a_k = 0, \text{ donc } L = \int_0^{+\infty} f = \ln \left(\prod_{k=1}^n x_k^{-a_k} \right).$$

3. Par intégration par parties, on a, si $n \geq 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{\frac{1}{n}} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(t) (\sin(t))^{\frac{1}{n}-1} dt. \text{ D'où :}$$

$$\ln(u_n) = n \ln \left(1 - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt \right) \text{ où } f_n(t) = t \cotan(t) (\sin(t))^{\frac{1}{n}} \text{ si } t \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$$

et $f_n(0) = 0$. Soit $f : \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(t) = t \cotan(t)$ si $t \neq 0$.

La suite croissante de fonctions continues donc intégrables sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ converge simplement vers f sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$. Donc $0 \leq f_n \leq f$. Comme f est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, car continue sur ce segment, le théorème de la convergence dominée implique :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f.$$

$$\text{Donc } \ln(u_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} n \ln \left(1 - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f + o(1) \right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f + o(1).$$

De la continuité de $\exp$, on déduit que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp \left(-\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f \right)$.

Par intégration par parties, on a : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = -I$.

Soit $\varphi(x) = \ln(\sin(x))$. $\varphi \in \mathcal{C} \left(\left] 0, \frac{\pi}{2} \right], \mathbb{R} \right)$. $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x)$. Donc $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o(x^{-1/2})$.

Donc φ est intégrable sur $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$. Le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ montre

que $\ln \circ \cos \in \mathcal{L}^1 \left(\left] 0, \frac{\pi}{2} \right], \mathbb{R} \right)$ et $I = J$ où $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \circ \cos$.

$$\text{D'où } I = \frac{I+J}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{\sin(2x)}{2} \right) dx = -\frac{\pi}{4} \ln(2) + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du.$$

Or $\sin(\pi - u) = \sin(u)$, donc :

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du = 2 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u)) du = 2I. \text{ D'où } I = -\frac{\pi}{2} \ln(2) \text{ et } u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

4. a. La fonction $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f_x(t) = \frac{1}{(1+t^2)^x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et

$f_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{-2x}$. Elle est intégrable sur $[0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > \frac{1}{2}$. Soit

$F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f_x(t) dt$. Par le changement de variable qui est une bijection de classe

$\mathcal{C}^1$ de $[0, +\infty[$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ défini par $\theta = \arctan(t)$, on a $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2x-2} d\theta$

si $x > \frac{1}{2}$. D'après les intégrales de Wallis, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = F(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$.

La fonction F est décroissante sur $[1, +\infty[$, comme on le vérifie en examinant $F(x) - F(y)$ si $x > y$. On a $n = E[x] \leq x < E[x] + 1$, où $n \in \mathbb{N}$ si x est assez

grand. D'où $I_{n+1} \leq F(x) \leq I_n$. Donc $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{E[x]}}$ ie. $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

b. Si $x > 0$, la fonction $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{-2})$ par croissances comparées. Donc $f \in \mathcal{L}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

Par intégration par parties, on a : $\int_0^{+\infty} f = -\ln(x) + \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(x+t) dt$ en posant $u(t) = \ln(x+t)$ et $v(t) = e^{-t}$. En effet, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{+\infty}(uv) = 0$. Le changement de variable affine $x+t = u$ dans l'intégrale du

second membre donne : $\int_0^{+\infty} f = -\ln(x) + e^x \int_x^{+\infty} e^{-u} \ln(u) du$.

Comme la fonction $u \mapsto e^{-u} \ln(u)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et comme, d'après le cours, $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} \ln(u) du$, on a $\int_x^{+\infty} e^{-u} \ln(u) du \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \Gamma'(1)$ et le résultat.

5. a. La fonction $\exp$ étant convexe sur $\mathbb{R}$, on a $e^u \geq 1+u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Donc si $x \in [0, n]$, $u = -\frac{x}{n}$, $0 \leq 1 - \frac{x}{n} \leq e^{-x/n} \Rightarrow 0 \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$.

b. Posons $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ si $x \in [0, n[$ et $f_n(x) = 0$ si $x \geq n$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$.

Définissons $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{x}$ si $x \geq 1$. La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \in [1, +\infty[$, $0 \leq g_n(x) \leq g(x)$ et $g \in \mathcal{L}^1([1, +\infty[, \mathbb{R}_+)$ car $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^{-2})$ et g est continue sur $[1, +\infty[$. Du

théorème de convergence dominée, on déduit que $\lim(J_n) = \int_1^{+\infty} g = J$

Soit $h_n(x) = \frac{1 - f_n(x)}{x}$ si $x > 0$ et $h_n(0) = 1$. Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq h_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^k \leq 1. \text{ cf. suites géométriques.}$$

La suite de fonctions (h_n) de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ converge simplement vers $h \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ sur $[0, 1]$; $h(x) = \frac{1 - f(x)}{x}$ si $x > 0$ et $h(0) = 1$. D'autre part, nous avons vu que : $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq h_n(x) \leq 1$. Du théorème de convergence dominée on déduit que $\lim(I_n) = \int_0^1 h = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = I$.

c. Comme $\ln(n) - J_n = \int_1^n h_n(t) dt$, on déduit du théorème de Chasles que :

$$I_n - J_n + \ln(n) = \int_0^n h_n = \int_0^n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^k dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{k+1} \right]_0^n$$

$$I_n - J_n + \ln(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}. \text{ D'où le résultat.}$$

d. Intégrons par parties : $\int_1^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$ en posant $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = \ln(t)$.

$u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$; $\lim_{+\infty}(uv) = 0 = (uv)(1)$ D'où : $\int_1^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt = J$ (cf. b)).

De même en posant $u(t) = 1 - e^{-t}$ et $v(t) = \ln(t)$; $(u, v) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))^2$,

$\lim_{0+}(uv) = 0$, $(uv)(1) = 0$. D'où $\int_0^1 e^{-t} \ln(t) dt = -\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = -I$ (cf. b)).

On déduit de la question c) que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

6. Le changement de variable affine $t = 1 - \frac{x}{n}$ donne :

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n f\left(1 - \frac{x}{n}\right) dx = \int_0^{+\infty} \varphi_n(x) dx \text{ où}$$

$$\varphi_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n f\left(1 - \frac{x}{n}\right) \text{ si } 0 \leq x \leq n \text{ et } \varphi_n(x) = 0 \text{ si } x > n.$$

La suite de fonctions continues par morceaux $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$, $|\varphi_n(x)| \leq N_\infty^{[0,1]}(f) e^{-x}$.
cf. exercice 5.a. On déduit du théorème de convergence dominée que :

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} f(1) dx = f(1).$$

7. Notons $f(x, t) = \frac{e^{-|x-t|}}{1+t^2}$. On a : $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $0 \leq f(x, t) \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$.

La fonction φ est élément de $\mathcal{L}_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Donc, d'après le théorème de continuité des intégrales paramétrées sur un intervalle, F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Si (x_n) est une suite de limite $+\infty$, notons $h_n(t) = f(x_n, t)$. La suite de fonctions (h_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$ et l'on a : $|h_n(t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. On déduit du théorème de convergence dominée que $F(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. De la caractérisation séquentielle de l'existence de limite, on déduit que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Comme $F(x) = F(-x)$, on a aussi $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{1+t^2} dt + e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt.$$

En tant que primitives de fonctions continues, les fonctions $x \mapsto \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{1+t^2} dt$ et

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Le lecteur étudiant écrira $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt = a - \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt$ où $a = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt$ est une constante, pour appliquer le théorème du cours.

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, après simplifications, on a :

$$F'(x) = -e^{-x} \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{1+t^2} dt + e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt. \text{ De même, on prouve que } F \text{ est}$$

$$\text{de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } F''(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{1+t^2} dt + e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt - \frac{2}{1+x^2}.$$

Donc F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y'' - y = -\frac{2}{1+x^2}$.

Si G est solution de cette équation différentielle, alors $F - G$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants : $y'' - y = 0$.

Donc : $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, (F - G)(x) = Ae^x + Be^{-x}$.

$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} G(x) = 0$ implique : $A = B = 0$.

8. La fonction f définie par $f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \in]0, 1[$ et $f(1) = 1$ est continue sur $]0, 1]$. (cf. $\ln(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} (t-1)$).

Pour tout $\forall x \in [0, 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Donc $\forall x \in]0, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ où $f_n(x) = -x^{\alpha+n-1} \ln(x) \geq 0$ si $x \in]0, 1[$.

Par intégrations par parties, on a, pour $a \in]0, 1[$:

$$\int_a^1 f_n = \left[-\frac{x^{\alpha+n} \ln(x)}{\alpha+n} + \frac{x^{\alpha+n}}{(\alpha+n)^2} \right]_a^1 \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\alpha+n)^2}.$$

Donc les fonctions positives f_n sont intégrables sur $]0, 1[$. Du théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle, on déduit, puisque $f_n = |f_n|$ et $\sum \int_0^1 |f_n|$

converge, que $f \in \mathcal{L}^1(]0, 1[, \mathbb{R}_+)$ et $\int_0^1 f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)^2}$.

9. a. f_n est clairement positive et $f_n(t) \leq e^{-t}$ est immédiat si $t > n$. Si $t \in [0, n]$ on a par concavité de la fonction $\ln$ l'inégalité : $n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -t$ d'où, par croissance de $\exp$, $f_n(t) \leq e^{-t}$.

Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_n(t) = f_n(t)t^{x-1}$.

Alors g_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et dominée par $f_x : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ intégrable, la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f_x continue car, si $t > 0$, pour n assez grand $g_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ qui tend vers $f_x(t)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Le théorème de convergence dominée prouve alors que $\int_0^{+\infty} g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_x$, ce qui est le résultat demandé.

b. Le changement de variable $u = \frac{t}{n}$ donne :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = n^x I_{n,x}.$$

En intégrant par parties, tenant compte du fait que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^x = 0$, on obtient la

formule de récurrence $I_{n,x} = \frac{n}{x} I_{n-1,x+1}$ d'où $I_{n,x} = \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)} I_{0,x+n}$

et enfin $I_{n,x} = \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$ ce qui, avec a. donne $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$.

Autre méthode : rappelons le théorème de Taylor-Laplace. Si $F \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{K})$,

alors $F(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} F^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t) dt$.

Application à $F : t \mapsto \frac{t^{x+n}}{x(x+1) \cdots (x+n)}$ avec $a = 0$ et $b = 1$.

$$\int_0^1 (1-t)^n F^{n+1}(t) dt = F(1)n! = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

10. a. La fonction φ définie par $\varphi(t) = \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}$ si $t > 0$ et $\varphi(0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. En effet $\varphi(t) = \frac{N(t)}{D(t)}$, $N(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^2)$ et $D(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 2t^2$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi = \frac{1}{2}$ et $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$, tel que : $\forall t \in \mathbb{R}_+, |\varphi(t)| \leq M$. Notons $F(\lambda, t) = \varphi(t)e^{-\lambda t}$. Soit $a > 0$. Pour $(\lambda, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$, $|F(\lambda, t)| \leq Me^{-at}$. La fonction $\delta_1 : t \mapsto Me^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ à valeurs positives. En effet, elle est continue et $\delta_1(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{-2})$. Comme F est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on déduit du corollaire du théorème de continuité des intégrales paramétrées que $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

$F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et pour $(\lambda, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, t) \right| \leq Mte^{-at} = \delta_2(t)$.

$\delta_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. En effet, elle est continue et $\delta_2(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{-2})$. On déduit d'un corollaire du théorème de dérivabilité des intégrales paramétrées sur un intervalle que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et que $g'(\lambda) = -f(\lambda)$.

b. Pour tout $t > 0$, on a $0 < e^{-t} < 1$, donc $\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)t}$.

$$\left(\frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2} \right) e^{-\lambda t} = \left(\frac{t}{2} - 1 \right) e^{-\lambda t} + \sum_{n=0}^{\infty} te^{-(n+1+\lambda)t}.$$

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. on a $\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = k^2 \int_0^{+\infty} ue^{-uk} du = 1$.

Les fonctions u_n définies par $u_n(t) = te^{-(n+1+\lambda)t}$ si $t \in \mathbb{R}_+$ sont éléments de $\mathcal{L}_c^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et a pour somme la fonction $S :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+, t \mapsto \frac{te^{-t}}{e^t - 1}$. Du théorème d'intégration des séries de

fonctions intégrables sur un intervalle, on déduit, puisque $\sum \int_0^{+\infty} u_n$ converge,

$$\text{que } S \in \mathcal{L}^1([0, +\infty[, \mathbb{R}_+) \text{ et } \int_0^{+\infty} S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda + n + 1)^2}.$$

$$\text{D'où : } \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, f(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda + n)^2}.$$

$$\textbf{11. a.} \text{ On a : } x \frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \alpha + o(1) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\alpha}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Noter que nous n'avons pas écrit $x \frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha$ pour éviter l'étude de deux cas, selon que α est nul ou pas.

Posons $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\alpha}{x}$ et $h(x) = \frac{1}{x}$. Le couple (g, h) vérifie les hypothèses du théorème de sommation de relations de comparaison. On a donc (avec $a' > 0$) :

$$\int_{a'}^x \left(\frac{f'(t)}{f(t)} - \frac{\alpha}{t} \right) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_{a'}^x \frac{dt}{t} \right).$$

Comme $\ln(f(a')) - \alpha \ln(a') \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\ln(x))$, $\ln(f(x)) - \alpha \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\ln(x))$.

D'où : $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \alpha$.

$\forall \gamma \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x^\gamma f(x)) = \ln(f(x)) + \gamma \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} (\alpha + \gamma) \ln(x) + o(\ln(x))$.

Si $\gamma > -\alpha$, $x^\gamma f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Si $\gamma < -\alpha$, $x^\gamma f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

b. Si $\alpha < -1$, il existe $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ tel que $-\alpha > \gamma_0 > 1$. On a donc $x^{\gamma_0} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

D'où $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^{-\gamma_0})$ avec $\gamma_0 > 1$. Comme $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}_+)$, on conclut que f est intégrable sur I . D'autre part, une intégration par parties donne :

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y, \int_x^y f(t) dt = yf(y) - xf(x) - \int_x^y tf'(t) dt. \quad (1)$$

Comme $\alpha < -1$, $\alpha \neq 0$. Donc $tf'(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha f(t)$. Comme $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ et $f \geq 0$, il en est de même de $t \mapsto tf'(t)$ et l'on déduit du théorème de sommation de relations

de comparaison que : $\int_x^{+\infty} tf'(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha \int_x^{+\infty} f(t) dt$.

$yf(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$ car $f(y) \underset{y \rightarrow +\infty}{=} o(y^{-\gamma_0})$ avec $\gamma_0 > 1$.

$$(1) \Rightarrow \int_x^{+\infty} f = -xf(x) - \int_x^{+\infty} tf'(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} -xf(x) - \alpha \int_x^{+\infty} f + o\left(\int_x^{+\infty} f\right).$$

D'où le résultat.

c. Si $\alpha > -1$, il existe $\gamma_0 \in]-\alpha, 1[$. On a donc $x^{\gamma_0} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

D'où $0 < x^{-\gamma_0} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f(x))$ avec $\gamma_0 < 1$. Comme $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}_+)$, on conclut que f n'est pas intégrable sur I . En procédant comme précédemment, on a :

$$\forall x \in]a, +\infty[, \int_a^x f(t) dt = xf(x) - af(a) - \int_a^x tf'(t) dt \quad (2)$$

Comme $tf'(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \alpha f(t) + o(f(t))$ par hypothèse, et comme f n'est pas intégrable sur I et à valeurs dans $]0, +\infty[$, on déduit du théorème de sommation de relations de comparaison que : $\int_a^x (tf'(t) - \alpha f(t)) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_a^x f(t) dt\right)$.

Comme $f \notin \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ et $f > 0$, $\int_a^x f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow af(a) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_a^x f(t) dt\right)$.

$$(2) \Rightarrow \int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{xf(x)}{\alpha + 1} \text{ si } \alpha > -1.$$

d. Soit $a = 2$. Posons $f_1(x) = \frac{1}{x}$ et $f_2(x) = \frac{1}{x \ln^2(x)}$.

f_1 et f_2 sont continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. $f_1 \notin \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$.

$f_2 \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$. En effet $\int_2^x f_2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(2)}$ et $f_2 > 0$. On vérifie que dans ces deux cas, $\alpha = -1$. On ne peut donc rien conclure en général si $\alpha = -1$.

12. a. La fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{n^3 x f(x)}{(1 + n^2 x^2)^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ car : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, |f_n(x)| \leq \frac{n^3 |x|}{(1 + x^2)^2} N_\infty(f) = \theta(x)$ et

$\theta \in \mathcal{L}_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, puisque $\theta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^{-2})$. Le changement de variable affine

$$t = nx \text{ dans } I_n = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \text{ donne } I_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{nt}{(1+t^2)^2} f\left(\frac{t}{n}\right) dt.$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t}$ si $t \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout t , on a $f(t) = f(0) + tg(t)$. Compte tenu de l'imparité de $t \mapsto \frac{nt}{(1+t^2)^2}$, on a : $\int_{\mathbb{R}} \frac{nt}{(1+t^2)^2} dt = 0$. D'où $I_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} g\left(\frac{t}{n}\right) dt$.

Posons $\varphi_n(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)^2} g\left(\frac{t}{n}\right)$. La suite de fonctions (φ_n) converge simplement vers la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{t^2}{(1+t^2)^2} g(0)$ sur $\mathbb{R}$. D'autre part, si $t \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$,

$$|\varphi_n(t)| \leq \frac{t^2}{(1+t^2)^2} N_{\infty}^{\mathbb{R}}(g). \text{ En effet, la fonction } g \text{ est bornée sur } \mathbb{R}, \text{ puisque}$$

- si $|x| \geq 1$, $|g(x)| \leq |f(x) - f(0)| \leq 2N_{\infty}^{\mathbb{R}}(f)$,
- si $|x| \leq 1$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $M = \max_{x \in [-1,1]} |g(x)| = \sup_{x \in [-1,1]} |g(x)|$, la fonction g étant continue sur le compact $[-1, 1]$ de $\mathbb{R}$.

La fonction $\psi : t \mapsto \frac{t^2}{(1+t^2)^2} N_{\infty}^{\mathbb{R}}(g)$ est continue positive et intégrable sur $\mathbb{R}$, car $\psi(t) \underset{|t| \rightarrow +\infty}{=} O(t^{-2})$. On déduit du théorème de convergence dominée que :

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{2} f'(0). \text{ En effet, le changement de variable } t = \frac{1}{u}$$

étant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur lui-même, on a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^2} = J = \frac{I+J}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

b. Posons $g_x(t) = \frac{t^2}{1+x^2t^3}$ si $t \geq 1$ et $x \geq 0$. g_x étant dérivable sur $[1, +\infty[$, on a :

$$g'_x(t) = \frac{2t(1-2x^2t^3)}{(1+t^3x^2)^3}, \text{ d'où } \max_{t \in [1, +\infty[} g_x(t) = g((2x^2)^{-1/3}).$$

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \geq 1, 0 \leq xg_x(n) \leq \frac{\sqrt[3]{16}}{9} x^{-1/3}.$$

$$\text{Posons } f_n(x) = xg_x(n)f(x), \varphi(x) = \frac{\sqrt[3]{16}}{9} x^{-1/3} f(x) \text{ si } x > 0 \text{ et } \varphi(0) = 0.$$

Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$.

Pour $x \geq 1, 0 \leq \varphi \leq |f|$ et $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o(x^{-1/3})$. Donc $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

Comme (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$, on déduit du théorème de convergence dominée que $\int_{\mathbb{R}_+} f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

13. Comme f'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, f' a une limite en $+\infty$ car, si $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''$, notons la ℓ . Si $\ell \neq 0$ alors $f'(x) - \ell \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ d'où, par intégration de la relation o , $f(x) - \ell x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$ et donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ell x$, ce qui contredit l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$. Donc $\ell = 0$.

On a $\int_x^{x+1} f = f(x) + \int_x^{x+1} (x+1-t)f'(t) dt$ en intégrant par parties ou par le théorème de Taylor-Laplace.

Or $\left| \int_x^{x+1} (x+1-t)f'(t) dt \right| \leq \int_x^{x+1} N_\infty^{[x,x+1]}(f') = N_\infty^{[x,x+1]}(f')$ car on a $0 \leq x+1-t \leq 1$ sur $[x, x+1]$, donc $\int_x^{x+1} (x+1-t)f'(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\int_x^{x+1} f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

$\int_n^{n+1} f' = f'(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f''(t) dt$ et $\left| \int_n^{n+1} (n+1-t)f''(t) dt \right| \leq \int_n^{n+1} |f''|$ d'où l'absolue convergence de $\sum \int_n^{n+1} (n+1-t)f''(t) dt$. Comme f admet une limite en $+\infty$, $\sum \int_n^{n+1} f'$ converge et donc $\sum f'(n)$ converge.

De même $\int_n^{n+1} f = f(n) + \frac{1}{2}f'(n) + \frac{1}{2} \int_n^{n+1} (n+1-t)^2 f''(t) dt$, et on a l'inégalité $\left| \int_n^{n+1} (n+1-t)^2 f''(t) dt \right| \leq \int_n^{n+1} |f''|$ d'où l'absolue convergence de $\sum \int_n^{n+1} (n+1-t)^2 f''(t) dt$. Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $\sum \int_n^{n+1} f$ converge et, par combinaison linéaire, $\sum f(n)$ converge.

14. f est impaire et la fonction $\varphi : (x, t) \mapsto \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$, si $|x| \leq A$ et $t > 0$, $|\varphi(x, t)| \leq \frac{|x|}{1+t^2} \leq \frac{A}{1+t^2}$ car $\sin$ est lipschitzienne de rapport 1, $\psi : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{\cos(tx)}{1+t^2} \right| \leq \psi(t)$, le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre prouve que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt$.

La domination de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ présente un sérieux problème, on va donc procéder différemment. Si $x \neq 0$, $\int_0^A \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt = \frac{1}{x} \left[\frac{\sin(tx)}{1+t^2} \right]_0^A + \frac{1}{x} \int_0^A \frac{2t \sin(tx)}{(1+t^2)^2} dt$ et, quand $A \rightarrow +\infty$, on obtient $g(x) = xf'(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(tx)}{(1+t^2)^2} dt$.

Soit $\psi : (x, t) \mapsto \frac{t \sin(tx)}{(1+t^2)^2}$, ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ et $|\psi(x, t)| \leq \frac{t}{(1+t^2)^2}$. $\theta : t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\theta(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{-3}$, donc θ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par suite g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ et $xf''(x) + f'(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 \cos(tx)}{(1+t^2)^2} dt$, donc $xf''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 - 1}{(1+t^2)^2} \cos(tx) dt$.

$\int_0^A \frac{t^2 - 1}{(1 + t^2)^2} \cos(xt) dt = \left[-\frac{t}{1 + t^2} \frac{\cos(xt)}{x} \right]_0^A - \int_0^A \frac{t}{1 + t^2} \sin(xt) dt$, d'où
 $f''(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(tx)}{1 + t^2} dt$ et donc, si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) - f(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} dt$,
 soit $f''(x) - f(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = -\frac{\pi}{2}$ par le changement de variable $u = xt$
 qui est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ entre $\mathbb{R}_+^*$ et lui-même.

On en déduit immédiatement, si $x > 0$, $f(x) = Ae^x + Be^{-x} + \frac{\pi}{2}$ et, comme
 $f(0) = 0$, $f'(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2}$, il vient $A = 0$, $B = -\frac{\pi}{2}$ et donc
 $f(x) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-x})$ si $x > 0$, $f(x) = \frac{\pi}{2}(e^x - 1)$ si $x < 0$.

15. $\varphi : (x, t) \mapsto \frac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

$\forall a > 0, \arctan(a) + \arctan(1/a) = \pi/2 \Rightarrow \varphi(x, t) = \frac{1}{t} \left(\arctan\left(\frac{1}{t}\right) - \arctan\left(\frac{1}{xt}\right) \right)$.
 $\varphi(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(x, t) = x - 1$.

Donc $t \mapsto \varphi(t, x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x > 0$.

Soit $a > 0$. Pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{1 + a^2 t^2} = \lambda_a(t)$ et λ_a
 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme intégrale dépendant d'un paramètre, f est de classe
 $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, si $x > 0$, $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2 x^2} = \frac{1}{x} \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{A}{x}\right) = \frac{\pi}{2x}$.

Comme $f(1) = 0$, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x)$.

16. On suppose ici $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : u \mapsto \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kx(t-u)} f(u)$, f_k est continue
 sur $[0, 1]$ et $N_\infty^{[0,1]}(f_k) \leq \frac{(e^{xt})^k}{k!} N_\infty^{[0,1]}(f)$ terme général d'une série convergente
 indépendante de u , donc $\sum f_k$ converge normalement sur $[0, 1]$ et, par suite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^1 e^{kx(t-u)} f(u) du &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kx(t-u)} f(u) \right) du \\ &= \int_0^1 \left[1 - e^{-e^{x(t-u)}} \right] f(u) du. \end{aligned}$$

Soit $(x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $g_n : u \mapsto \left[1 - e^{-e^{x_n(t-u)}} \right] f(u)$, (g_n) est une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$
 qui converge simplement vers la fonction g définie par $g(u) = f(u)$ si $u < t$,
 $g(u) = 0$ si $u > t$ et $g(t) = \left(1 - \frac{1}{e} \right) f(t)$. g est continue par morceaux sur $[0, 1]$ et
 $|g_n| \leq N_\infty^{[0,1]}(f)$ constante donc intégrable sur $[0, 1]$.

Le théorème de convergence dominée prouve que $\int_0^1 g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 g$, soit encore :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^1 e^{kx(t-u)} f(u) du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^t f.$$

Si $t \in [0, 1[$, le changement de variable $u = 1 - t$ donne :

$$\int_0^1 e^{nt} f(t) dt = \int_0^1 e^{n(1-u)} h(u) du = e^{n(1-t)} \int_0^1 e^{n(t-u)} h(u) du \text{ où } h : u \mapsto f(1-u).$$

Donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| \int_0^1 e^{n(t-u)} h(u) du \right| \leq M e^{n(t-1)}$.

Si $x \in \mathbb{N}^*$ on a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^1 e^{kx(t-u)} h(u) du \right| \leq M \frac{e^{kx(t-1)}}{k!}$

et donc $\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^1 e^{kx(t-u)} h(u) du \right| \leq M [1 - e^{e^x(t-1)}]$. Quand $x \rightarrow +\infty$,

comme $t < 1$, on obtient $\int_0^t h = 0$ d'après le début de l'exercice. Par dérivation, h est nulle sur $[0, 1[$ et donc sur $[0, 1]$ par continuité. Cela prouve que f est nulle.

17. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Soit $f(t) = \frac{e^{zt} - 1}{e^t - 1}$ si $t > 0$ et $f(0) = z$.

Si $t > 0$, $\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt}$ cf. série géométrique ($0 < e^{-t} < 1$.)

Donc la série de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, $f_k : t \mapsto e^{-kt}(e^{zt} - 1)$ converge simplement et a f pour somme sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, |e^{zt} - 1| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|zt|^n}{n!} = e^{t|z|} - 1.$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, |f_k(t)| \leq e^{-kt}(e^{t|z|} - 1)$.

Comme $|z| < 1 \leq n$, on a $|f_k(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{-2})$. D'où $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ pour $k \geq 1$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-kt}(e^{t|z|} - 1) dt = \frac{1}{k - |z|} - \frac{1}{k} = \frac{|z|}{k(k - |z|)} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{|z|}{k^2}.$$

Donc la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_k|$ converge. D'après le théorème d'intégration des séries de fonctions intégrables sur un intervalle, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\int_0^{+\infty} f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k - z} - \frac{1}{k} \right).$$

Comme $0 \leq \frac{|z|}{k} < 1$, on a : $\frac{1}{k - z} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{1 - z/k} - 1 \right) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{k} \right)^n$.

Notons $u_{n,k} = \frac{z^n}{k^{n+1}}$. Comme $0 \leq \frac{|z|}{k} < 1$, la série $(\sum |u_{n,k}|)_{n \geq 1}$ converge et

a pour somme $v_k = \frac{1}{k - |z|} - \frac{1}{k}$. Comme la série $\sum v_k$ converge, on déduit du

théorème, vu en MPSI, de sommation des séries doubles que :

$$\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^n}{k^{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(n+1) z^n.$$

18. a. $\varphi : (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1 + t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+)^2$ avec $|\varphi(x, t)| \leq \frac{1}{1 + t^2} = \psi(t)$

où $\psi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et donc f est définie continue sur $\mathbb{R}_+$.

Si $x \geq a > 0$ et $t \geq 0$, $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at^2} = \theta(t)$, θ est continue sur $\mathbb{R}_+$ avec $\theta(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{-2})$ donc $\theta \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre sur un intervalle montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$, d'où $f'(x) - f(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = -\frac{1}{\sqrt{x}} I$ où $I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ à l'aide du changement de variable $u = t\sqrt{x}$ qui est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ entre $\mathbb{R}_+$ et lui-même.

$$\lim_0 f = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \text{ car } f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}).$$

Soit $(x_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f_n : t \mapsto \varphi(x_n, t)$, alors (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle et est dominée par ψ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ d'après le théorème de convergence dominée. Par caractérisation séquentielle de l'existence de limite, $\lim_{+\infty} f = 0$.

Si $g : x \mapsto e^{-x} f(x)$, alors $g(0) = \frac{\pi}{2}$ et $g'(x) = e^{-x} [f'(x) - f(x)] = -\frac{I e^{-x}}{\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$. Par suite $g(x) = \frac{\pi}{2} - I \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ et, comme on a vu que $\lim_{+\infty} g = 0$, $I \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{\pi}{2}$.

Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif entre $\mathbb{R}_+^*$ et lui-même et montre que $2I^2 = \frac{\pi}{2}$, soit $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ car $I \geq 0$.

b. $\Phi : (x, t) \mapsto e^{-t^2 - x^2/t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $|\Phi(x, t)| \leq e^{-t^2} = \Psi(t)$ avec Ψ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $I : x \mapsto \int_0^{+\infty} \Phi(x, t) dt$ est continue et paire sur $\mathbb{R}$.

Si $0 < a \leq x \leq b < +\infty$, $\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{2x}{t^2} e^{-t^2 - x^2/t^2} \leq 2be^{-t^2} \frac{e^{-a/t^2}}{t^2} = \Theta(t)$.

Θ admet un prolongement continu à $\mathbb{R}_+$ et $\Theta(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{-2})$ donc Θ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec $I'(x) = -2x \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - x^2/t^2} \frac{dt}{t^2}$.

Si $x > 0$, le changement de variable $u = \frac{x}{t}$ qui est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ entre $\mathbb{R}_+^*$ et lui-même montre que $I'(x) = -2I(x)$ d'où $I(x) = I(0)e^{-2x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}$.

Par parité et continuité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|}$.

19. $g : t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ admet un prolongement continu en 0 car $\lim_0 g = f'(0)$.

Si $0 < \varepsilon \leq x$, en intégrant par parties, $\int_\varepsilon^x g^2 = \left[-tg(t) \right]_\varepsilon^x + 2 \int_\varepsilon^x g f'$ et, quand

$$\varepsilon \rightarrow 0, \int_0^x g^2 = -xg(x) + 2 \int_0^x gf' \leq 2 \left(\int_0^x g^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x f'^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si $\int_0^x g^2 > 0$, on obtient $\int_0^x g^2 \leq 4 \int_0^x f'^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} f'^2$, sinon c'est encore vrai.

Comme g^2 est continue positive cela montre qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\int_0^{+\infty} g^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} f'^2$.

20. $\varphi : (x, t) \mapsto \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+)^2$ et $|\varphi(x, t)| \leq \frac{\pi}{2(1+t^2)}$, où $t \mapsto \frac{\pi}{2(1+t^2)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et, si $x \geq a > 0$, $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$ avec $t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. Le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre sur un intervalle montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec : $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)(1+x^2u)}$ par le changement de variable $u = t^2$ qui est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. $f(0) = 0$, $f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{\arctan^2(A)}{2} \right) = \frac{\pi^2}{8}$.

Si $(x_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ et $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \varphi(x_n, \cdot)$, (f_n)

converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $\psi : t \mapsto \frac{\pi}{2(1+t^2)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$ et est dominée

par ψ , donc $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \psi = \frac{\pi^2}{4}$. Par suite $\lim_{+\infty} f = \frac{\pi^2}{4}$.

Si $x \neq 1$, $\frac{1}{(1+u)(1+x^2u)} = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{1}{1+u} - \frac{x^2}{1+x^2u} \right)$ d'où :

$$f'(x) = \frac{1}{2(1-x^2)} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1+A}{1+x^2A} \right) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}.$$

Comme f est continue sur $[0, 1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$, on en déduit que $\int_0^1 \frac{\ln(s)}{s^2-1} ds$ existe et vaut $f(1) - f(0)$, soit $\frac{\pi^2}{8}$.

$f_k : s \mapsto -s^{2k} \ln(s)$ est continue positive intégrable sur $]0, 1]$ car $f_k(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$,

$\sum f_k$ converge simplement sur $]0, 1[$ et sa somme, $s \mapsto \frac{\ln(s)}{s^2-1}$ y est continue.

Si $\varepsilon \in]0, 1[$, $\int_\varepsilon^1 s^{2k} \ln(s) ds = \left[\frac{s^{2k+1}}{2k+1} \ln(s) \right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{2k+1} \int_\varepsilon^1 s^{2k} ds$ et donc, quand

$\varepsilon \rightarrow 0$, $\int_0^1 f_k = \frac{1}{(2k+1)^2}$. D'après le théorème d'intégration des séries de fonctions

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{\ln(s)}{s^2-1} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

D'où $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \zeta(2) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$ ie. $\frac{\pi^2}{8} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \zeta(2)$ d'où $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

21. $f_n : t \mapsto e^t \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n$ est continue positive sur $[0, 1]$.

$\forall t \in [0, 1], 0 \leq \frac{2t}{1+t^2} \leq 1$ avec $\frac{2t}{1+t^2} = 1$ si, et seulement si, $t = 1$, donc $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1[$ et sa somme, $F : t \mapsto e^t \frac{1}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{(1-t)^2} e^t$ est continue mais $F(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{e}{1-t}$ donc $F \notin \mathcal{L}^1([0, 1[, \mathbb{R})$.

Le théorème de convergence dominée montre que $\sum \int_0^1 e^t \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt$ diverge.

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = (-1)^n f_n$ alors $\sum g_n$ converge simplement sur $[0, 1[$ et sa somme, $G : t \mapsto \frac{1+t^2}{(1+t)^2} e^t$ est continue. $\left| \sum_{k=0}^n g_k(t) \right| = e^t \left| \frac{1 + \left(-\frac{2t}{1+t^2} \right)^{n+1}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \right| \leq e$.

Par convergence dominée $\sum \int_0^1 e^t \left(\frac{-2t}{1+t^2} \right)^n dt$ converge et sa somme est $\int_0^1 G$ ou encore $\int_0^1 d\left(e^t \frac{t-1}{t+1}\right)$ i.e. 1.

22. $f_n : x \mapsto (-1)^n e^{-\lambda_n x}$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le théorème des séries alternées avec l'inégalité $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq e^{-\lambda_{n+1} a}$ si $x \geq a > 0$. Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, la somme est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $\left| \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| \leq |f_0(x)| = e^{-\lambda_0 x}$, $f_0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$, le théorème de convergence dominée montre que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est intégrable, que $\sum \int_0^{+\infty} f_n$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n, \text{ soit } \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n x} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}.$$

23. Le changement de variable $u = nt$ montre que $n \int_0^1 f(t) \varphi(nt) dt = \int_{\mathbb{R}_+} f_n$ où

$$\text{l'on a posé } f_n : u \mapsto f\left(\frac{u}{n}\right) \varphi(u) \chi_{[0, n]}(u).$$

(f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ qui converge simplement vers $g = f(0)\varphi$ car f est continue en 0.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq N_{\infty}^{[0, 1]}(f) \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, le théorème de convergence dominée montre que $n \int_0^1 f(t) \varphi(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(0) \int_{\mathbb{R}_+} \varphi$.

La fonction φ définie par $\varphi(u) = \left(\frac{\sin(u)}{u} \right)^2$ admet un prolongement continu à $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{=} o(u^{-2})$, donc $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, le cours a même montré que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \varphi = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ et le travail dirigé relatif à la transformation de Laplace}$$

montre que sa valeur est $\frac{\pi}{2}$. Comme $\frac{1}{n} \int_0^1 f(t) \left(\frac{\sin(nt)}{t} \right)^2 dt = n \int_0^1 f(t) \varphi(nt) dt$,

on en déduit que $\lim_n \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) \left(\frac{\sin(nt)}{t} \right)^2 dt = \frac{\pi}{2} f(0)$.

24. a. Posons $\lambda_n = \int_\alpha^\beta |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|^2 dx$.

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \int_\alpha^\beta [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] [\overline{a_n} \cos(nx) + \overline{b_n} \sin(nx)] dx \\ &= \frac{\beta - \alpha}{2} (|a_n|^2 + |b_n|^2) + \frac{1}{4n} \left([|a_n|^2 - |b_n|^2] [\sin(2n\beta) - \sin(2n\alpha)] \right. \\ &\quad \left. + [a_n \overline{b_n} + \overline{a_n} b_n] [\cos(2n\alpha) - \cos(2n\beta)] \right). \end{aligned}$$

b. Si l'une des deux suites ne converge pas vers 0 alors $|a_n|^2 + |b_n|^2 \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

Soient un élément r de $]0, +\infty[$ et une partie infinie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathcal{P}$, $|a_n|^2 + |b_n|^2 \geq r$.

On déduit de a. que $\lambda_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \left(\frac{\beta - \alpha}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)$, il existe donc une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ dont le complémentaire est fini et telle que, si $n \in \mathcal{C}$:

$$\frac{\lambda_n}{|a_n|^2 + |b_n|^2} \geq \frac{\beta - \alpha}{4} \quad (*)$$

Pour tout n dans $\mathcal{C}$ et tout x dans $[\alpha, \beta]$ on pose $f_n(x) = \frac{|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|^2}{|a_n|^2 + |b_n|^2}$,

la fonction f_n est continue sur $[\alpha, \beta]$ et $0 \leq f_n(x) \leq \frac{(|a_n| + |b_n|)^2}{|a_n|^2 + |b_n|^2} \leq 2$.

Comme, si $n \in \mathcal{C}$, $|a_n|^2 + |b_n|^2 \geq r > 0$, la suite $(f_n)_{n \in \mathcal{C}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[\alpha, \beta]$ et le théorème de convergence dominée prouve que

$\int_\alpha^\beta f_n \xrightarrow[n \in \mathcal{C}]{n \rightarrow \infty} 0$, ce qui contredit (*). Donc (a_n) et (b_n) convergent vers 0.

25. a. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on choisit $[a, b] \subset I$ tel que $N_1^I(f) - \int_a^b |f| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et l'on choisit φ

fonction en escalier nulle en dehors de $[a, b]$ et telle que $N_\infty^{[a, b]}(f - \varphi) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$,

ce qui est possible car toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier nulles en dehors de $[a, b]$.

Alors $N_1^I(f - \varphi) \leq \int_{-\infty}^a |f| + \int_a^b |f - \varphi| + \int_b^{+\infty} |f| \leq \varepsilon$ d'après l'inégalité de la moyenne et le choix de $[a, b]$.

b. Supposons f en escalier. Soit $G : x \mapsto \int_0^x g$, alors G est continue T -périodique

bornée car $\int_0^T g = 0$.

Si $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{I}_{[a_k, b_k]}$ où $|a_k, b_k|$ désigne un des quatre intervalles d'extrémités

a_k et b_k , si $\lambda > 0$, on a $\int_I f(t)g(\lambda t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\lambda} [G(\lambda b_k) - G(\lambda a_k)]$ d'où

$$\left| \int_I f(t)g(\lambda t) dt \right| \leq \frac{2N_\infty(G)}{\lambda} \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

Examinons le cas où $f \in \mathcal{L}^1$. Choisissons une suite (φ_n) de fonctions en escalier telle que $N_1^I(f - \varphi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Définissons $F : \lambda \mapsto \int_I f(t)g(\lambda t) dt$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n : \lambda \mapsto \int_I \varphi_n(t)g(\lambda t) dt$.

$\forall (\lambda, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $|F(\lambda) - F_n(\lambda)| \leq \int_I |f(t) - \varphi_n(t)| |g(\lambda t)| dt \leq N_1^I(f - \varphi_n) N_\infty(g)$, d'où la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de (F_n) vers F . Le début de la question et le théorème de la double limite montrent que F admet 0 pour limite en $+\infty$.

c. Si $h = g - \frac{1}{T} \int_0^T g$ alors h est continue par morceaux T -périodique et $\int_0^T h = 0$, par conséquent $\int_I f(t)h(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$, ce qui revient à dire que :

$$\int_I f(t)g(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left(\int_I f \right) \left(\int_0^T g \right).$$

TRAVAUX DIRIGÉS

• Fonction définie par une intégrale

Si $t \in \mathbb{R}_+^\star$ et $z \in \mathbb{C}$ on pose $t^z = \exp(z \ln(t))$, ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $t \mapsto t^z$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $|t^z| = t^{\Re(z)}$.

1. a. Montrer que $f : z \mapsto \int_0^1 \frac{t^z}{1+t} dt$ est une fonction continue sur l'ensemble $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > -1\}$.

b. Lier $f(z)$ et $f(z+1)$ si $z \in \mathcal{D}$ et en déduire un développement à deux termes de $f(z)$ lorsque $z \rightarrow -1$.

c. Donner un équivalent de $f(z)$ lorsque $\Re(z) \rightarrow +\infty$.

d. Montrer $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+z}$ pour tout $z \in \mathcal{D}$.

2. Établir, pour $|z| < 1$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k z^k$ où l'on a posé $I_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{\ln^k(t)}{1+t} dt$.

Montrer également que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{k+1}}$.

3. Prouver, si $z \in \mathcal{D}$, $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{2^k(z+1) \cdots (z+k)}$.

Indication : utiliser le travail dirigé relatif à la règle de Raabe-Duhamel du chapitre 4.

Solution

1. a. $\varphi : (z, t) \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue sur $\mathcal{D} \times]0, 1]$ et, si $\Re(z) \geq a > -1$, $|\varphi(z, t)| = \left| \frac{e^{z \ln(t)}}{1+t} \right| = \frac{e^{\Re(z) \ln(t)}}{1+t} \leq \frac{t^a}{1+t} = \psi(t)$. La fonction ψ est continue sur $]0, 1]$ et $\psi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{-a}}$ et donc $\psi \in \mathcal{L}^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$ car $-a < 1$, donc f est définie continue sur $\mathcal{D}$.

b. Si $z \in \mathcal{D}$, alors $z+1 \in \mathcal{D}$ et $f(z) + f(z+1) = \int_0^1 t^z dt = \frac{1}{z+1}$.

On en déduit $f(z) \underset{z \rightarrow -1}{=} \frac{1}{z+1} + f(0) + o(1)$ par continuité de f en 0, d'où $f(z) \underset{z \rightarrow -1}{=} \frac{1}{z+1} + \ln(2) + o(1)$.

c. Si $\varepsilon \in]0, 1[$ et $z \in \mathcal{D}$, $\int_{\varepsilon}^1 \frac{t^z}{1+t} dt = \frac{1}{z+1} \left[\frac{t^{z+1}}{1+t} \right]_{\varepsilon}^1 + \frac{1}{z+1} \int_{\varepsilon}^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2} dt$, d'où

$$f(z) = \frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{z+1} \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2} dt.$$

Or $\left| \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2} dt \right| \leq \int_0^1 |t^{z+1}| dt = \int_0^1 t^{\Re(z)+1} dt = \frac{1}{\Re(z)+2} \xrightarrow{\Re(z) \rightarrow +\infty} 0$,

$$\text{donc } f(z) \underset{\Re(z) \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2(z+1)} + o\left(\frac{1}{z+1}\right) \underset{\Re(z) \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2z}.$$

d. On a prouvé en cours, dans III.C.2. en remarque, que, si $g \in \mathcal{L}^1([0, 1[, \mathbb{C})$, alors

$$\int_0^1 \frac{g(t)}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 t^n g(t) dt. \text{ Avec } g : t \mapsto t^z \text{ cela donne immédiatement}$$

$$\text{l'égalité } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+z}.$$

2. Pour $|z| < 1$ on pose $g_k : t \mapsto \frac{z^k \ln^k(t)}{k! (1+t)}$, g_k est continue sur $]0, 1]$ et intégrable

car $g_k(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. La série $\sum g_k$ converge simplement sur $]0, 1]$ et sa somme est encore $\varphi(z, \cdot)$, continue sur $]0, 1]$.

$$\left| \sum_{k=0}^n g_k(t) \right| \leq \sum_{k=0}^n |g_k(t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |g_k(t)| = \frac{t^{-|z|}}{1+t} = \lambda(t), \lambda \text{ est intégrable sur }]0, 1] \text{ car}$$

$$-|z| \in \mathcal{D} \text{ et le théorème de convergence dominée montre que } f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k z^k.$$

Soit k fixé dans $\mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n : t \mapsto (-1)^n t^n \ln^k(t)$, h_n est continue intégrable sur $]0, 1]$, $\sum h_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ et sa somme est

$$\text{continue. De même, } \left| \sum_{p=0}^n h_p(t) \right| \leq |\ln^k(t)| \text{ et } t \mapsto \ln^k(t) \in \mathcal{L}^1([0, 1], \mathbb{R}).$$

$$\text{Toujours par convergence dominée, } I_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k!} \int_0^1 t^n \ln^k(t) dt.$$

Posons $J_{n,k} = \int_0^1 t^n \ln^k(t) dt$, alors, si $k \geq 1$ et $\varepsilon \in]0, 1[$, en intégrant par parties,

$$\int_{\varepsilon}^1 t^n \ln^k(t) dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln^k(t) \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{k}{n+1} \int_{\varepsilon}^1 t^n \ln^{k-1}(t) dt \text{ d'où :}$$

$$J_{n,k} = -\frac{k}{n+1} J_{n,k-1} = (-1)^k \frac{k!}{(n+1)^k} J_{n,0} = (-1)^k \frac{k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

$$\text{Enfin } I_k = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{k+1}}.$$

Remarque : en partant de $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z}{n}\right)^k \right)$

et en montrant que $\left((-1)^{n+k-1} \frac{z^k}{n^{k+1}} \right)_{n,k \geq 1}$ est une série double sommable, on

$$\text{aboutit directement à } f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{k+1}} \right) z^k.$$

3. Si $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in]0, 1[$, en intégrant par parties :

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{t^{z+k}}{(1+t)^{k+1}} dt = \left[\frac{t^{z+k+1}}{z+k+1} \frac{1}{(1+t)^{k+1}} \right]_{\varepsilon}^1 + \frac{k+1}{z+k+1} \int_{\varepsilon}^1 \frac{t^{z+k+1}}{(1+t)^{k+2}} dt \text{ d'où}$$

$\int_0^1 \frac{t^{z+k}}{(1+t)^{k+1}} dt = \frac{2^{-k-1}}{z+k+1} + \frac{k+1}{z+k+1} \int_0^1 \frac{t^{z+k+1}}{(1+t)^{k+2}} dt$ et une récurrence immédiate donne alors :

$$f(z) = \sum_{k=1}^p \frac{(k-1)!}{2^k(z+1) \cdots (z+k)} + \frac{p!}{(z+1) \cdots (z+p)} \int_0^1 \frac{t^{z+p}}{(1+t)^{p+1}} dt.$$

$$\text{On a } \left| \int_0^1 \frac{t^{z+p}}{(1+t)^{p+1}} dt \right| \leq \int_0^1 t^{a+p} dt = \frac{1}{a+p+1} \text{ où } a = \Re(z).$$

$$\text{Par suite } \varepsilon_p = \left| f(z) - \sum_{k=1}^p \frac{(k-1)!}{2^k(z+1) \cdots (z+k)} \right| \leq \frac{p!}{(a+1) \cdots (a+p+1)} = u_p.$$

$$\text{On a } \frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{p+1}{a+p+2} = \left(1 + \frac{a+1}{p+1}\right)^{-1} = 1 - \frac{a+1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

Le travail dirigé du chapitre 4 relatif à la règle de Raabe-Duhamel montre l'existence de $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_p \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{C}{p^{a+1}}$ et donc $u_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$, ce qui donne le développement en série souhaité.

• Convolution et régularisation

A. Unité approchée

On appelle *unité approchée* toute suite (φ_n) d'éléments de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$

vérifiant : (i) $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} \varphi_n = 1$,

$$(ii) \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \int_{\mathbb{R}} \varphi_n - \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Si $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ vérifie $\int_{\mathcal{F}} \varphi = 1$, montrer que la suite de terme général $\varphi_n : t \mapsto n\varphi(nt)$ est une *unité approchée*.

B. Convolution

On note $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{B}} = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on choisit g dans $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$.

1. Montrer que, si $f \in \mathcal{L}^1$, pour tout réel x , la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; on pose $(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt$.

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-t)f(t) dt$, en déduire que $f \mapsto f \star g$ est une application linéaire entre $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ vérifiant $N_{\infty}^{\mathbb{R}}(f \star g) \leq N_1(f) N_{\infty}^{\mathbb{R}}(g)$.

2. On suppose $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, g de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ avec toutes ses dérivées bornées, montrer que $f \star g$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(f \star g)^{(k)} = f \star g^{(k)}$.

3. Soient $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ et (φ_n) une *unité approchée*. Montrer que $(\varphi_n \star f)$ converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Application : déterminer $\lim_n \int_{\mathbb{R}} \frac{nf(t)}{n^2 + t^2} dt$.

C. Convexité. On note I l'intervalle $]a, b[$.

1. On suppose f convexe sur I . En utilisant une unité approchée convenable montrer, pour tout segment $[\alpha, \beta]$ de I , l'existence d'une suite de fonctions convexes et de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui converge uniformément vers f sur $[\alpha, \beta]$.

2. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , montrer que f est convexe si, et seulement si, pour toute fonction ψ positive de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact inclus dans I , on a $\int_I f \psi'' \geq 0$.

3. Étendre au cas où f est seulement continue. On admettra le théorème suivant : si g est une fonction continue sur $[a, b] \times [\alpha, \beta]$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^b g(x, y) dx \right) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^b g(x, y) dy \right) dx.$$

Solution

A. Le changement de variable linéaire $t \mapsto nt$ montre que $\varphi_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $\varphi_N \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n = 1$, d'où (i).

De même, si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n - \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_n = \int_{\mathbb{R}} \varphi - \int_{-n\alpha}^{n\alpha} \varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, d'où (ii).

B. 1. Si $x \in \mathbb{R}$, $f_x : t \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue par morceaux et on a $|f_x(t)| \leq N_{\infty}^{\mathbb{R}}(g) |f(x-t)|$. Le changement de variable $t \mapsto x-t$ qui est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ entre $\mathbb{R}$ et lui-même montre que $t \mapsto |f(x-t)| \in \mathcal{L}^1$ et donc $f_x \in \mathcal{L}^1$. Ainsi $(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t) dt$ est définie.

Par le changement de variable affine $t \mapsto x-t$, on a $f \star g = g \star f$.

$\psi : (x, t) \mapsto g(x-t)f(t)$ est telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \psi(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \psi(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $|(\psi(x, t))| \leq N_{\infty}^{\mathbb{R}}(g)|f(t)|$ avec f intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de continuité des intégrales paramétrées, $x \mapsto (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x, t) dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

L'inégalité de la moyenne montre que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|(f \star g)(x)| \leq N_{\infty}^{\mathbb{R}}(g) N_1(f)$ et donc $f \star g \in \mathcal{C}_B$ et la linéarité de $f \mapsto f \star g$ est immédiate.

2. $\varphi : (x, t) \mapsto g(x-t)f(t)$ admet pour tout $k \in \mathbb{N}$ une dérivée partielle d'ordre k par rapport à x continue sur $\mathbb{R}^2$ avec $\left| \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x, t) \right| = |g^{(k)}(x-t)| |f(t)| \leq N_{\infty}^{\mathbb{R}}(g^{(k)}) |f(t)|$, la fonction de domination étant intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre montre que $f \star g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec, pour tout $(x, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $(f \star g)^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} g^{(k)}(x-t)f(t) dt = (f \star g^{(k)})(x)$.

3. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, exprimons l'uniforme continuité de f sur le compact $[a-1, b+1]$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in]0, 1[$ tel que $\forall (x, x') \in [a-1, b+1]^2, |x-x'| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Posons, pour tout $(x, n) \in [a, b] \times \mathbb{N}$, $\delta_n(x) = |(\varphi_n \star f)(x) - f(x)|$.

Comme $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n = 1$, on a $\delta_n(x) = \left| \int_{\mathbb{R}} [f(x-t) - f(x)] \varphi_n(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \psi \varphi_n$ où

$\psi(t) = |f(x-t) - f(x)|$. Si $t \in [-\eta, \eta]$, $\psi(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, sinon $\psi(t) \leq 2N_{\infty}^{\mathbb{R}}(f)$, d'où :

$$\delta_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n + 2N_{\infty}^{\mathbb{R}}(f) \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_n - \int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2N_{\infty}^{\mathbb{R}}(f) \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_n - \int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n \right)$$

d'après (i). D'autre part la condition (ii) montre l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq n_0$, alors $2N_{\infty}^{\mathbb{R}}(f) \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_n - \int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $\delta_n(x) \leq \varepsilon$, ce qui prouve la convergence uniforme sur $[a, b]$.

Application : la suite de terme général $\varphi_n : t \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 + t^2}$ est une unité approchée et $\int_{\mathbb{R}} \frac{n f(t)}{n^2 + t^2} dt = \pi(\varphi_n \star f)(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi f(0)$.

C. 1. Soit la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(t) = \exp\left(\frac{1}{t^2 - 1}\right)$ si $t \in]-1, 1[$ et $\psi(t) = 0$ sinon, est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et, sur $] -1, 1[$, $\psi^{(k)}$ est de la forme $f\psi$ où $f \in \mathbb{R}(X)$, d'où $\psi^{(k)}(-1^+) = \psi^{(k)}(1^-) = 0$ et donc ψ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ (cf. chapitre 6, paragraphe III.B.2. exemple pour plus de détails).

On pose alors $\varphi = \alpha\psi$ où α est choisi tel que $\int_{-1}^1 \varphi = 1$, la suite (φ_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : t \mapsto n\varphi(nt)$ est une unité approchée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ nulle en dehors de $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ à dérivées bornées.

Soit $[\alpha, \beta] \subset I$, à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}^{\star}$ on a $\left[\alpha - \frac{1}{n}, \beta + \frac{1}{n}\right] \subset I$ et alors, pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $t \mapsto f(x-t)\varphi_n(t)$ est continue nulle en dehors de $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.

$f_n(x) = (\varphi_n \star f)(x) = \int_{x-1/n}^{x+1/n} \varphi_n(x-t)f(t) dt = \int_{-1/n}^{1/n} f(x-t)\varphi_n(t) dt$ définit une fonction sur $[\alpha, \beta]$ qui, comme dans B. est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ et (f_n) converge uniformément vers f sur $[\alpha, \beta]$.

Si $(x, y) \in [\alpha, \beta]^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a, pour tout $t \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ si $n \geq n_0$:

$f(\lambda x + (1-\lambda)y - t) = f(\lambda(x-t) + (1-\lambda)(y-t)) \leq \lambda f(x-t) + (1-\lambda)f(y-t)$ et, comme φ_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, en intégrant :

$f_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_n(x) + (1-\lambda)f_n(y)$, d'où la convexité de f_n .

2. Supposons f convexe, alors $f'' \geq 0$. Soit ψ de classe $\mathcal{C}^2$ positive à support inclus dans $[\alpha, \beta]$ segment de I .

$$\int_I f\psi'' = \int_{\alpha}^{\beta} f\psi'' = \left[f\psi'\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'\psi' = - \int_{\alpha}^{\beta} f'\psi' \text{ car } \psi'(\alpha) = \psi'(\beta) = 0.$$

$$\text{D'où } \int_I f\psi'' = -\left[f'\psi\right]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f''\psi = \int_{\alpha}^{\beta} f''\psi \geq 0.$$

Si f n'est pas convexe il existe $x_0 \in I$ tel que $f''(x_0) < 0$ et, par continuité, x_0 admet un voisinage compact $[\alpha, \beta]$ dans I sur lequel $f'' < 0$. En choisissant, par exemple ψ telle que $\psi(t) = \exp\left(\frac{1}{(t-\alpha)(t-\beta)}\right)$ si $t \in]\alpha, \beta[$ et 0 sinon, ψ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, positive, à support $[\alpha, \beta]$ et $\int_I f\psi'' = \int_{\alpha}^{\beta} f\psi'' = \int_{\alpha}^{\beta} f''\psi < 0$.

3. Supposons f continue et convexe (la convexité suffit). On choisit ψ comme dans l'énoncé à support dans $[\alpha, \beta]$ segment de I et (f_n) comme dans la question

1. Alors la question 2. montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I f_n \psi'' = \int_\alpha^\beta f_n \psi'' \geq 0$. Comme ψ'' est bornée car continue sur $[\alpha, \beta]$, $(f_n \psi'')$ converge uniformément sur ce segment vers $f \psi''$ et donc $\int_\alpha^\beta f_n \psi'' \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta f \psi'' = \int_I f \psi'' \geq 0$.

Réciproquement, soit une fonction ψ positive de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact inclus dans $[\alpha, \beta]$ segment de I . On choisit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left[\alpha - \frac{1}{n_0}, \beta + \frac{1}{n_0}\right] \subset I$ et on reprend la suite de terme général $f_n = \varphi_n \star f$ définie dans 1.

Si $n \geq n_0$, en utilisant le théorème admis :

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f_n(x) \psi''(x) dx &= \int_\alpha^\beta \left(\int_{-1/n}^{1/n} f(x-t) \psi''(x) \varphi_n(t) dt \right) dx \\ &= \int_{-1/n}^{1/n} \left(\int_\alpha^\beta f(x-t) \psi''(x) dx \right) \varphi_n(t) dt. \end{aligned}$$

Par hypothèse, pour tout $t \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, $\int_\alpha^\beta f(x-t) \psi''(x) dx \geq 0$ et donc

$\int_\alpha^\beta f_n \psi'' = \int_I f_n \psi'' \geq 0$, ce qui montre en utilisant la question 2. que f_n est convexe car de classe $\mathcal{C}^2$. Comme f est limite simple de (f_n) sur $[\alpha, \beta]$, sa restriction à ce segment est convexe. Ceci étant vérifiée pour tout segment, f est convexe.

• Transformation de Fourier

L'espace vectoriel $\mathcal{C}_\mathbb{B} = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est muni de $N_\infty = N_\infty^\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est muni de $N_1 : f \mapsto \int_\mathbb{R} |f|$. On définit φ sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$, on rappelle que $\int_0^x \varphi \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.

On utilisera un résultat : $|e^z| = e^{\Re(z)}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

1. Définition et premières propriétés

a. Montrer que la relation $\mathcal{F}(f)(x) = \hat{f}(x) = \int_\mathbb{R} f(t) e^{-2\pi i t x} dt$ définit une application linéaire $\mathcal{F}$ entre les espaces vectoriels $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{C}_\mathbb{B}$ dont la restriction à $\mathcal{L}_\mathbb{C}^1 = \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ muni de N_1 est continue. Préciser sa norme. On pourra utiliser $f_n = \frac{1}{2n} \mathbb{I}_{[-n, n]}$. On appelle $\hat{f}$ la **transformée de Fourier** de f .

b. Si $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}^1$ on pose $\mathcal{F}_n(f) = \mathcal{F}(f \mathbb{I}_{[-n, n]})$, montrer que $(\mathcal{F}_n(f))$ converge uniformément vers $\hat{f}$ sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que $\hat{f}(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$. On pourra utiliser l'exercice 25.

d. Déterminer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

$h_1 : x \mapsto e^{-ax} H(x)$, $h_2 : x \mapsto e^{ax} H(-x)$ et $h_3 : x \mapsto e^{-a|x|}$ où $H = \mathbb{I}_{]0, +\infty[}$ et $a \in \mathbb{C}$, $\Re(a) > 0$. H est appelée **fonction de Heavieside**.

2. Transformation de Fourier et dérivation.

a. Montrer que si, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x \mapsto x^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

b. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}^1$ et si pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f^{(k)} \in \mathcal{L}^1$, alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\widehat{f^{(k)}}(x) = (2i\pi x)^k \widehat{f}(x)$.

c. En déduire $\widehat{h_4}$ si $h_4 : x \mapsto \frac{x^k}{k!} h_1(x)$.

d. En utilisant une équation différentielle vérifiée par $h_5 : x \mapsto e^{-ax^2}$, $a > 0$, déduire de a. et b. l'expression de $\widehat{h_5}$.

3. Montrer que si f et g sont éléments de $\mathcal{L}^1$, alors $f\widehat{g}$ et $\widehat{f}g$ sont éléments de $\mathcal{L}^1$ et $\int_{\mathbb{R}} f\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}g$. On admettra toutes les interversions licites ici.

4. Théorème d'inversion

On veut prouver que si f et g sont éléments de $\mathcal{L}^1$ et si l'on note

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2\pi i t x} dt, \text{ alors } \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}) = f.$$

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x) = \exp\left(-\frac{2\pi}{n}|x|\right)$. Déterminer $\widehat{g_n}$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g_n(x) e^{2i\pi t x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \widehat{g_n}(y - t) dy. \quad (*)$$

b. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g_n(x) e^{2i\pi t x} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})(t)$.

c. Calculer $\int_{\mathbb{R}} \widehat{g_n}$. Déduire de a. que $\int_{\mathbb{R}} f(y) \widehat{g_n}(y - t) dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t)$ et conclure.

5. Applications du théorème d'inversion

a. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et si f, f', f'' sont dans $\mathcal{L}^1$, alors $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$.

b. Déterminer les transformées de Fourier des fonctions : $x \mapsto \frac{1}{(a + 2i\pi x)^{k+1}}$

si $k \in \mathbb{N}^*$ et $\Re(a) > 0$, $x \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{a^2}\right)$ si $a \in \mathbb{R}^+^*$.

Solution

1. a. Soit $F(x, t) = f(t) e^{-2i\pi x t}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto F(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $|F(x, t)| = |f(t)|$ et $f \in \mathcal{L}^1$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de continuité des intégrales paramétrées, $\widehat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\widehat{f}(x)| \leq N_1(f)$. Donc $\widehat{f} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $N_{\infty}(\widehat{f}) \leq N_1(f)$.

Par linéarité de l'intégration, $\mathcal{F}$ est linéaire entre $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$. De l'inégalité précédente, on déduit que $\mathcal{F}$ est continue et $\|\mathcal{F}\| \leq 1$.

$f = \frac{1}{2n} \chi_{[-n, n]} \in \mathcal{L}^1$, $N_1(f) = 1$ et, $\widehat{f}(x) = \frac{1}{2n} \int_{-n}^n e^{-2i\pi t x} dt = \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n x}$ si $x \neq 0$. Par continuité on a $\widehat{f}(0) = 1$ d'où $N_{\infty}(\widehat{f}) \geq 1$ et enfin $\|\mathcal{F}\| = 1$.

b. Si $x \in \mathbb{R}$, $|\mathcal{F}_n(f)(x) - \mathcal{F}(f)(x)| \leq \int_{-\infty}^{-n} |f_x| + \int_n^{+\infty} |f_x| = \int_{-\infty}^{-n} |f| + \int_n^{+\infty} |f|$
 terme général d'une suite numérique qui converge vers 0 car $f \in \mathcal{L}^1$, d'où la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

c. D'après l'exercice 25, le résultat est immédiat.

d. h_1 et h_2 sont continues par morceaux et h_3 est continue sur $\mathbb{R}$.

$h_1(x) = 0$ si $x < 0$ et $h_1(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^{-2})$. Donc $h_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$h_2(x) = 0$ si $x > 0$ et $h_2(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{=} o(x^{-2})$. Donc $h_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Comme $h_3 = h_1 + h_2$ sur $\mathbb{R}^\star$, on a $h_3 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\widehat{h_1}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i x t} e^{-at} dt = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-t(a+2i\pi x)}}{a+2i\pi x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a+2i\pi x}.$$

$$\text{De même, } \widehat{h_2}(x) = \frac{1}{2a-i\pi x}. \text{ D'où } \widehat{h_3} = \widehat{h_1} + \widehat{h_2} : x \mapsto \frac{2a}{a^2 + 4^2 \pi^2 x^2}.$$

2. a. Avec les notations de 1.a. $x \mapsto F(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x, t) = (-2i\pi t)^k F(x, t) \Rightarrow \left| \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x, t) \right| = 2\pi |t^k f(t)|.$$

Les fonctions $t \mapsto t^k f(t)$, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ étant intégrables sur $\mathbb{R}$, on déduit d'un corollaire du théorème de dérivation des intégrales paramétrées que $\widehat{f} \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, \widehat{f^{(k)}}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi t x} (-2it\pi)^k f(t) dt.$$

b. Effectuons une intégration par parties itérée. Rappelons la formule, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ si $(u, v) \in (\mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{C}))^2$.

$$\int_a^b uv^{(k)} = \left[\sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p u^{(p)}(t) v^{(k-p-1)}(t) \right]_a^b + (-1)^k \int_a^b u^{(k)} v \quad (\star).$$

Ici, $v = f$ et $u(t) = e^{-2i\pi x t}$. Donc $u^{(p)}(t) = (-2i\pi x)^p u(t)$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$|u^{(p)}(t) v^{(k-p-1)}(t)| = 2|\pi x|^p |f^{(k-p-1)}(t)| \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{En effet, } \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall a \in \mathbb{R}, f^{(k)}(a) - f^{(k)}(0) = \int_0^a f^{(k+1)}(t) dt.$$

Comme $f^{(k+1)} \in \mathcal{L}^1$, il existe $\ell_k = \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(k)}(x) \in \mathbb{C}$. Comme $f^{(k)} \in \mathcal{L}^1$, on a $\ell_k = 0$. De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{(k)}(x) = 0$. Par passage à la limite dans $(\star)$ lorsque

$$a \rightarrow -\infty \text{ et } b \rightarrow +\infty \text{ on a : } \forall (x, k) \in \mathbb{R} \times \llbracket 1, n \rrbracket, \widehat{f^{(k)}}(x) = (2i\pi x)^k \widehat{f}(x).$$

c. $h_4(x) = \frac{1}{k!(-2i\pi)^k} (-2i\pi x)^k h_1(x)$. De 1.d. et 2.a. on déduit que :

$$\widehat{h_4}(x) = \frac{1}{k!(-2i\pi)^k} (\widehat{h_1})^{(k)}(x) = \frac{1}{(a+2i\pi x)^{k+1}}.$$

d. h_5 est solution de l'équation différentielle : $y' + 2axy = 0$.

Notons $h : x \mapsto h_5'(x) + 2axh_5(x)$. Comme $h = 0 \Rightarrow \widehat{h} = 0$, on déduit de la linéarité de $\mathcal{F}$ que : $\forall x \in \mathbb{R}, 2i\pi x \widehat{h_5}(x) = \frac{a}{i\pi} \widehat{h_5}(x)$.

Donc $\widehat{h_5}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $(\mathcal{E}) \quad y' + \frac{2\pi^2}{a} xy = 0$.

$$(\mathcal{E}) \iff \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx} \left(y(x) e^{\pi^2 x^2 / a} \right) = 0 \iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = C e^{-\pi^2 x^2 / a}.$$

Comme $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, on a $\widehat{h_5}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Donc $\widehat{h_5}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\pi^2 x^2/a}$.

3. Comme $\widehat{g}$ et $\widehat{f}$ sont bornées et f et g dans $\mathcal{L}^1$, $f\widehat{g}$ et $\widehat{f}g$ sont éléments de $\mathcal{L}^1$. Comme les inversions sont permises par l'énoncé,

$$\int_{\mathbb{R}} f\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2i\pi tx} dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} g(x) \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi tx} dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}} g\widehat{f}.$$

4. a. D'après 1.d) avec $a = \frac{2\pi}{n}$ dans h_3 , on a $\widehat{g_n} = \frac{n}{\pi(1+n^2\pi^2)}$. Comme g_n et f sont intégrables sur $\mathbb{R}$, on déduit de 3. appliqué à f et $G_n : x \mapsto g_n(x)e^{2\pi itx}$:

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g_n(x) e^{2i\pi tx} dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \widehat{G_n}(y) dy.$$

$$\widehat{G_n}(y) = \int_{\mathbb{R}} G_n(x) e^{-2i\pi xy} dx = \int_{\mathbb{R}} g_n(x) e^{-2i\pi x(y-t)} dx = \widehat{g_n}(y-t). \text{ D'où } (\star).$$

b. La suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{R} : x \mapsto \widehat{f}(x) g_n(x) e^{2i\pi tx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto \widehat{f}(x) e^{2i\pi tx}$ qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|\widehat{f}(x) g_n(x) e^{2i\pi tx}| \leq |\widehat{f}(x)|$. Comme $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$, d'après le théorème de convergence dominée, $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g_n(x) e^{2i\pi tx} dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) e^{2i\pi tx} dx = \widehat{\mathcal{F}\widehat{f}}(t)$.

c. $\widehat{g_n} \in \mathcal{L}^1$ et $\int_{\mathbb{R}} \widehat{g_n} = \frac{1}{\pi} [\arctan(nx)]_{-\infty}^{+\infty} = 1$.

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) \widehat{g_n}(y-t) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y+t) \widehat{g_n}(y) dy \text{ par changement de variable affine.}$$

$$\text{Donc : } \int_{\mathbb{R}} f(y) \widehat{g_n}(y-t) dy - f(t) = \int_{\mathbb{R}} (f(y+t) - f(t)) \widehat{g_n}(y) dy.$$

Comme $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, soit $\varepsilon > 0$, soit $\alpha > 0$ tel que $|y+t-t| < \alpha \Rightarrow |f(y+t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (f(y+t) - f(t)) \widehat{g_n}(y) dy \right| \leq A_n(t) + B_n(t) \text{ où puisque } \widehat{g_n} \geq 0 :$$

$$A_n(t) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} |f(y+t) - f(t)| \widehat{g_n}(y) dy \text{ et } B_n(t) = \int_{|y| \geq \alpha} |f(y+t) - f(t)| \widehat{g_n}(y) dy.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \widehat{g_n}(y) dy \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g_n}(y) dy = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(t) \leq \int_{|y| \geq \alpha} |f(y+t)| \widehat{g_n}(y) dy + |f(t)| \int_{|y| \geq \alpha} \widehat{g_n}(y) dy.$$

$\widehat{g_n}$ étant paire et décroissante, on a :

$$\int_{|y| \geq \alpha} |f(y+t)| \widehat{g_n}(y) dy \leq \widehat{g_n}(\alpha) \int_{|y| \geq \alpha} |f(y+t)| dy \leq \widehat{g_n}(\alpha) N_1(f).$$

$$\text{D'autre part, } \int_{|y| \geq \alpha} \widehat{g_n}(y) dy = 2 \int_{\alpha}^{+\infty} \widehat{g_n}(y) dy = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{n\alpha}\right) \leq \frac{2}{n\alpha\pi}.$$

$|f(t)| \frac{2}{n\alpha\pi} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et $\widehat{g_n}(\alpha) N_1(f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\forall n \geq n_0, |f(t)| \frac{2}{n\alpha\pi} \leq \frac{\varepsilon}{4} \text{ et } \widehat{g_n}(\alpha) N_1(f) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

$$\text{Donc : } \forall n \geq n_0, \forall t \in \mathbb{R}, B_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \left| \int_{\mathbb{R}} (f(y+t) - f(t)) \widehat{g}_n(y) dy \right| \leq A_n(t) + B_n(t) \leq \varepsilon.$$

De a., b., c., par passage à la limite dans (1) quand $n \rightarrow \infty$ on a prouvé le théorème d'inversion dans $\mathcal{L}_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

5. a. D'après 2.b. $\widehat{f''} = -4\pi^2 x^2 \widehat{f}(x)$.

Comme, d'après 1.c. $\widehat{f''}(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$, on a $\widehat{f}(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} o(x^{-2})$.

La fonction $\widehat{f}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on peut conclure que $\widehat{f} \in \mathcal{L}_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

b. D'après 2.c. $\widehat{h_4}(x) = \frac{1}{(a + 2i\pi x)^{k+1}}$ et $h_4(x) = \frac{x^k}{k!} e^{-ax} H(x)$.

Pour tout $k \geq 1$, h_4 et $\widehat{h_4}$ sont éléments de $\mathcal{L}^1$.

D'après 4. on a : $\mathcal{F}(\widehat{h_4})(x) = \frac{(-x)^k}{k!} e^{ax} H(-x)$.

D'après 2.d. on a h_5 et $\widehat{h_5}$ éléments de $\mathcal{L}^1$. Donc $\mathcal{F}(\widehat{h_5})(x) = e^{-ax^2} = h_5(x)$.

• Transformation de Laplace

On note $\mathcal{C}$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$. Pour tout f dans $\mathcal{C}$ on note $I(f)$ l'ensemble des réels x pour lesquels $t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et,

pour tout $x \in I(f)$, on pose $\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$.

$\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des éléments f de $\mathcal{C}$ pour lesquels $I(f) \neq \emptyset$.

A. Généralités f désigne un élément de $\mathcal{F}$.

1. Montrer que $I(f)$ est un intervalle non majoré. En déduire que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

2. Si $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ et $f : t \mapsto e^{-zt} t^n$, déterminer $I(f)$ et $\mathcal{L}(f)$.

3. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $I(f)$ et que, si α est l'extrémité inférieure de $I(f)$, $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] \alpha, +\infty[$ et expliciter $\mathcal{L}(f)^{(k)}$.

4. On suppose que $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} t^k + O(t^{n+1})$.

a. Montrer, pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{L}(f)(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \int_0^\eta f(t) e^{-xt} dt + O(x^{-n-2})$.

b. En déduire que $\mathcal{L}(f)(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{x^{k+1}} + O(x^{-n-2})$.

B. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Déterminer $I(f)$ et expliciter $\mathcal{L}(f)'(x)$ puis $\mathcal{L}(f)(x)$ pour $x \in I(f)$.

2. Montrer que $x \mapsto \int_0^x f$ admet une limite (dans $\mathbb{R}$) en $+\infty$.

On prolonge alors $\mathcal{L}(f)$ en 0 en posant $\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f$.

3. À l'aide de la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-xt} f(t) dt$

montrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue en 0 et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

C. Injectivité de $\mathcal{L}$

1. Montrer que, si $h \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^n h(x) dx = 0$,

alors $\int_0^1 |h(x)|^2 dx = 0$ (on pourra utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass). En déduire la nullité de h .

2. Soient $f \in \mathcal{F}$, $s \in I(f)$ et $a > 0$. Montrer :

$$F(s+a) = a \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt \text{ où, pour tout } t \geq 0, g(t) = \int_0^t e^{-su} f(u) du.$$

3. Si, sous les mêmes conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F(s+na) = 0$, montrer : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 u^n g\left(-\frac{\ln u}{a}\right) du = 0$, pour tout $t \geq 0$, $g(t) = 0$.

4. Montrer l'injectivité de $\mathcal{L}$.

Solution

A. 1. On notera, pour tout $x \in \mathbb{R}$, f_x la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_x(t) = e^{-xt} f(t)$ et l'on remarque que $f_x \in \mathcal{C}$.

Si $x_0 \in I(f)$ et $x \in [x_0, +\infty[$ alors $|f_x| \leq |f_{x_0}|$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc, par domination, f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ceci prouve que $[x_0, +\infty[\subset I(f)$ et donc $I(f)$ est un intervalle non majoré.

$\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ par définition. La fonction nulle vérifie $I(f) = \mathbb{R} \neq \emptyset$, donc est élément de $\mathcal{F}$. Si f et g sont éléments de $\mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on choisit x_0 dans $I(f)$ et x_1 dans $I(g)$ et on pose $x_2 = \max(x_0, x_1)$, alors $[x_2, +\infty[\subset I(f) \cap I(g) \subset I(\lambda f + g)$ et donc $\lambda f + g \in \mathcal{F}$, ce qui montre que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$.

2. Si $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $|e^{-xt} f(t)| = e^{-(a+x)t} t^n = \varphi(t)$. Si $a + x > 0$ alors $\varphi(t) = o(t^{-2})$, sinon, $\varphi(t) \geq 1$ dès que $t \geq 1$.

Les règles de comparaison montrent que f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $x > -a$, donc $I(f) =]-a, +\infty[$.

Si $X > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > -a$, en intégrant par parties :

$$\int_0^X e^{-(x+z)t} t^n dt = \left[-\frac{1}{x+z} e^{-(x+z)t} t^n \right]_0^X + \frac{n}{x+z} \int_0^X e^{-(x+z)t} t^{n-1} dt, \text{ d'où}$$

$$\text{comme } t^n = o(e^{(x+z)t}), \int_0^{+\infty} e^{-(x+z)t} t^n dt = \frac{n}{x+z} \int_0^{+\infty} e^{-(x+z)t} t^{n-1} dt$$

$$\text{en faisant tendre } X \text{ vers } +\infty. \text{ D'autre part } \int_0^{+\infty} e^{-(x+z)t} dt = \frac{1}{x+z}, \text{ d'où}$$

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+z)t} t^n dt = \frac{n!}{(x+z)^{n+1}} \text{ si } x \in I(f).$$

3. Soit $x_0 \in I(f)$. L'application $\varphi : (x, t) \mapsto e^{-xt} f(t)$ est continue sur $I(f) \times \mathbb{R}_+$ avec, si $x \in [x_0, +\infty[$ et $t \in \mathbb{R}_+$, $|\varphi(x, t)| \leq \psi(t) = e^{-x_0 t} |f(t)|$ et ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème relatif à la continuité d'une intégrale sur un intervalle dépendant d'un paramètre montre que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $I(f)$.

Choisissons x_1 dans $] \alpha, +\infty[$ et remarquons que φ admet des dérivées partielles par rapport à x à tout ordre avec, si $x \geq x_1$ et $t \geq 0$:

$$\left| \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x, t) \right| = e^{-xt} t^k |f(t)| \leq \psi_k(t) = e^{-x_1 t} t^k |f(t)|$$

ψ_k est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, si x_0 dans $] \alpha, x_1[$, on a $\psi_k(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-x_0 t} f(t))$ d'où l'intégrabilité de ψ_k sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème relatif à la dérivation d'une intégrale sur un intervalle dépendant d'un paramètre montre que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] \alpha, +\infty[$ avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(f)^{(k)} : x \mapsto (-1)^k \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^k f(t) dt$.

4. a. Soient $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ et $x_0 \in I(f)$. Si $x > x_0$ on a :

$$\left| \int_\eta^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt \right| \leq \int_\eta^{+\infty} e^{-(x-x_0)t} e^{-x_0 t} |f(t)| dt \leq e^{-(x-x_0)t} \mathcal{L}(|f|)(x_0) \text{ et donc}$$

$$\mathcal{L}(f)(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \int_0^\eta f(t) e^{-xt} dt + O(x^{-n-2}) \text{ d'après la relation de Chasles.}$$

b. Soient $M \in \mathbb{R}_+$ et $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, si $t \in [0, \eta]$, $\left| f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} t^k \right| \leq M t^{n+1}$.

Pour $x > 0$ on a $\left| \int_0^\eta \left[f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} t^k \right] e^{-xt} dt \right| \leq M \int_0^\eta t^{n+1} e^{-xt} dt$ or, avec le changement de variable $u = xt$, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^\eta t^k e^{-xt} dt = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^{\eta x} u^k e^{-u} du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{x^{k+1}} = \frac{k!}{x^{k+1}}, \text{ d'où le développement}$$

$$\int_0^\eta f(t) e^{-xt} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{x^{k+1}} + O(x^{-n-2}) \text{ puis celui de } \mathcal{L}(f) \text{ en utilisant a.}$$

B. 1. $f \in \mathcal{C}$ et, comme $\sin$ est 1-lipschitzienne, $|f| \leq 1$.

Si $x > 0$ alors, sur $\mathbb{R}_+$, $|e^{-xt} f(t)| \leq e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{-2})$ et donc $x \in I(f)$.

I.B.5. du cours montre que $0 \notin I(f)$, donc $I(f) \cap \mathbb{R}_- = \emptyset$, d'où $I(f) = \mathbb{R}_+^*$.

A.3. montre que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\mathcal{L}(f)'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(t) dt$,

soit encore, d'après A.2. $\mathcal{L}(f)'(x) = \Im m \left(\frac{1}{i-x} \right) = - \frac{1}{1+x^2}$ et donc, sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{L}(f)(x) = C - \arctan(x)$ où $C \in \mathbb{R}$.

Comme on a vu dans A.4. que $\mathcal{L}(f)(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ il vient $C = \frac{\pi}{2}$ et donc :

$$\forall x > 0, F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

2. a été traité en cours.

3. $h : (x, t) \mapsto e^{-xt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [n\pi, (n+1)\pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme intégrale sur un segment dépendant d'un paramètre, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $f_n(x) = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+n\pi} e^{-x(u+n\pi)} du$ et donc $(-1)^n f_n(x) \geq 0$.

Pour $u \in [0, \pi]$, $\left(\frac{\sin(u)}{u+n\pi} e^{-x(u+n\pi)} \right)_n$ est décroissante et donc, par intégration, $(|f_n(x)|)_n$ est décroissante.

Enfin $|f_n(x)| \leq \int_0^\pi \frac{du}{n\pi} = \frac{1}{n}$ dès que $n \geq 1$, donc $|f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $\sum f_n(x)$ vérifie le théorème des séries alternées si $x \in \mathbb{R}_+$.

Si $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \geq 0$, $\left| \sum_{k=n}^\infty f_k(x) \right| \leq |f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$, donc $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, ce qui montre que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. En particulier :

$$\mathcal{L}(f)(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right) \text{ ie. } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Variante : Si $x > 0$, les fonctions $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{e^{-xt} - 1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $\lim_0(uv) = \lim_{+\infty}(uv) = 0$ d'où, en intégrant par parties, $\delta(x) = F(x) - F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{(1+xt)e^{-xt} - 1}{t^2} [1 - \cos(t)] dt$ et, comme $1 - (1+xt)e^{-xt} \geq 0$ car, par convexité de $\exp$, $e^u \geq 1 + u$, on a :
 $|\delta(x)| \leq 2 \int_0^{+\infty} \frac{1 - (1+xt)e^{-xt}}{t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{-xt} - 1}{t} \right) dt = 2x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, ce qui prouve la continuité de F en 0.

C. 1. Soit $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers $\bar{h}$ sur $[0, 1]$.

On a $N_\infty^{[0,1]}(P_n h - |h|^2) \leq N_\infty^{[0,1]}(h) \times N_\infty^{[0,1]}(P_n - \bar{h}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et donc $(P_n h)_n$ converge uniformément vers $|h|^2$ sur $[0, 1]$. Par suite $\int_0^1 P_n h \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |h|^2$ et, comme par linéarité $\int_0^1 P_n h = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |h|^2 = 0$.
 $|h|^2$ étant continue positive, elle est nulle ie. h est nulle.

2. g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et admet une limite (finie) en $+\infty$ car $s \in I(f)$, donc g est bornée sur $\mathbb{R}_+$. $u : t \mapsto e^{-at}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, en intégrant par parties pour $X > 0$, $\int_0^X e^{-(s+a)t} f(t) dt = [ug]_0^X + a \int_0^X e^{-at} g(t) dt$.

Comme $\lim_{+\infty}(ug) = 0$, quand $X \rightarrow +\infty$, $F(s+a) = a \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$.

3. $t \mapsto e^{-at}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ entre $\mathbb{R}_+$ et $]0, 1]$ et donc, par changement de variable,

$$F(s+na) = na \int_0^{+\infty} e^{-nat} g(t) dt = n \int_0^1 u^{n-1} g\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right) du = 0 \text{ si } n \in \mathbb{N}^\star.$$

Soit h la fonction définie sur $[0, 1]$ par $h(0) = \lim_{+\infty} g$ et $h(u) = g\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right)$ si $0 < u \leq 1$, alors h est continue sur $[0, 1]$ et vérifie l'hypothèse de la question 1. donc est nulle sur $[0, 1]$ ie. g est nulle sur $\mathbb{R}_+$.

4. Si $(\varphi, \psi) \in \mathcal{C}^2$ et $\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}(\psi)$, alors, par linéarité de l'intégration, $\mathcal{L}(\varphi - \psi) = 0$.

Avec $g : t \mapsto \int_0^t e^{-su} [\varphi(u) - \psi(u)] du$ où $s \in I(\varphi - \psi)$, la question 3. montre que g est nulle sur $\mathbb{R}_+$, sa dérivée également ie. pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $[\varphi(t) - \psi(t)]e^{-st} = 0$, d'où $\varphi = \psi$ et $\mathcal{L}$ est injective.

• **Méthode de Laplace ; application à la formule de Stirling**

L'objectif des questions 1. à 5. est de prouver le théorème suivant :

Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné ou non de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^3(I, \mathbb{R})$.

On suppose

(1) $t \mapsto f(t)e^{x\varphi(t)}$ est intégrable sur I quel que soit $x > 0$,

(2) il existe un unique $t_0 \in I$ tel que $\varphi''(t_0) < 0$,

(3) $f(t_0) \neq 0$.

alors :
$$F(x) = \int_I e^{x\varphi(t)} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{x|\varphi''(t_0)|}} f(t_0) e^{x\varphi(t_0)}.$$

1. Montrer qu'il existe $\psi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, tel que, pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)^2 \psi(t)$$

2. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$\forall t \in J_0 = [t_0 - 2\alpha, t_0 + 2\alpha]$, $\psi(t) < 0$ et $\frac{d}{dt} \left((t - t_0) \sqrt{-\psi(t)} \right) > 0$.

Soit $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ tel que, pour tout $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, $\theta(t) = 1$ et $\theta(t) = 0$ si $t \notin J_0$. Une telle fonction θ existe cf. TD du chapitre précédent : théorème de Borel. On note $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$, où

$$F_1(x) = \int_I e^{x\varphi(t)} \theta(t) f(t) dt \text{ et } F_2(x) = \int_I e^{x\varphi(t)} (1 - \theta(t)) f(t) dt.$$

3. Étude de $F_1(x)$.

a. Montrer que le changement de variable $u = \lambda(t) = (t - t_0) \sqrt{-\psi(t)}$ est licite. On note $u = \lambda(t) \iff t = g(u)$. Donner la nouvelle expression de

$F_1(x)$ sous la forme $F_1(x) = e^{x\varphi(t_0)} \int_{\mathbb{R}} e^{-xu^2} h(u) du$

b. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2} h\left(\frac{v}{\sqrt{x}}\right) dv$.

c. En déduire un équivalent de $F_1(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4. Étude de $F_2(x)$.

a. Montrer que : $\exists m > 0, \forall t \notin [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \varphi(t_0) - \varphi(t) \geq m$.

b. Pour $x > 1$, on note $x\varphi(t) = \varphi(t) + (x - 1)\varphi(t)$.

Montrer que l'on a : $F_2(x) e^{-x\varphi(t_0)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(e^{-mx})$.

5. Conclure.

6. Après avoir fait le changement de variable $t = xu$ dans $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$, déduire de la partie I, un équivalent de $\Gamma(x + 1)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Solution

1. Le résultat est une conséquence immédiate du théorème de Taylor-Laplace.

$\forall t \in I, \varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0) + (t - t_0)^2 \int_0^1 (1 - u)\varphi''(t_0(1 - u) + tu) du$.

La fonction $\psi : t \mapsto \int_0^1 (1 - u)\varphi''(t_0(1 - u) + tu) du$ convient. Elle est en effet de

classe $\mathcal{C}^1$ sur I car $\varphi \in \mathcal{C}^3(I, \mathbb{R})$ et d'après le théorème de dérivation des intégrales paramétrées sur le segment $[0, 1]$.

2. Comme $\psi'(t_0) = \frac{\varphi''(t_0)}{2} < 0$ et ψ est continue, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que $|t - t_0| \leq \alpha_1 \Rightarrow \psi(t) < 0$. D'autre part, la fonction $\lambda : t \mapsto (t - t_0)\sqrt{-\psi(t)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t_0 - \alpha_1, t_0 + \alpha_1]$ et $\lambda'(t) = \sqrt{-\psi(t)} + (t - t_0) \frac{-\psi'(t)}{\sqrt{-\psi(t)}}$. Donc $\lambda'(t_0) = \sqrt{-\psi(t_0)} > 0$. Comme λ est de classe $\mathcal{C}^1$, il existe $2\alpha \in]0, \alpha_1]$ tel que pour $t \in [t_0 - 2\alpha, t_0 + 2\alpha]$, $\psi(t) < 0$ et $\lambda'(t) > 0$.

3. a. Comme θ est nulle hors de $J_0 \subset I$, $F_1(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{x\varphi(t_0) + x(t-t_0)^2\psi(t)} \theta(t) F(t) dt$. Posons, $\lambda(t) = u$. Le changement de variable est licite car, pour $t \in J_0$, $\psi(t) < 0$ et $\lambda'(t) > 0$. D'où le résultat avec $h(u) = \theta(g(u))f(g(u))g'(u)$.

b. Pour une suite (x_n) de $]0, +\infty[$ de limite $+\infty$, notons $k_n(v) = e^{-v^2} h\left(\frac{v}{\sqrt{x_n}}\right)$. Comme $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et est nulle hors de J_0 , les fonctions k_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall v \in \mathbb{R}, |k_n(v)| \leq N_{\infty}^{\mathbb{R}}(h)e^{-v^2} = \mu(v)$. $\mu \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ car μ est négligeable devant $v \mapsto v^{-2}$ en $\pm\infty$. La suite de fonctions (k_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction continue sur $\mathbb{R}, v \mapsto h(0)e^{-v^2}$.

On déduit du théorème de convergence dominée que $\int_{\mathbb{R}} k_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} h(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2} dv$.

De la caractérisation séquentielle de l'existence des limites, on déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-v^2} h\left(\frac{v}{\sqrt{x}}\right) dv \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} h(0)\sqrt{\pi} \text{ puisque } \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}.$$

c. D'après **a.** et avec le changement de variable $v = \sqrt{x}u$ on peut écrire :

$$F_1(x) = \frac{e^{x\varphi(t_0)}}{\sqrt{x}} \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2} h\left(\frac{v}{\sqrt{x}}\right) dv, \text{ d'où } F_1(x)e^{-x\varphi(t_0)}\sqrt{x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} h(0)\sqrt{\pi}.$$

$$\text{Donc : } F_1(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f(t_0) \sqrt{\frac{2\pi}{-x\varphi''(t_0)}} e^{x\varphi(t_0)}.$$

4. a. On déduit de (2) que $\varphi'(t) < 0$ si $t > t_0$ et $\varphi'(t) > 0$ si $t < t_0$.

Si $t < t_0 - \alpha$, $\varphi(t_0) - \varphi(t) = \varphi(t_0) - \varphi(t_0 - \alpha) + \varphi(t_0 - \alpha) - \varphi(t) \geq \varphi(t_0) - \varphi(t_0 - \alpha) > 0$.

De même, si $t > t_0 + \alpha$, $\varphi(t_0) - \varphi(t) \geq \varphi(t_0) - \varphi(t_0 + \alpha) > 0$.

Donc, si $t \notin J_0$, $\varphi(t_0) - \varphi(t) \geq m > 0$.

b. D'où, pour tout $x > 1$, $x\varphi(t) \leq \varphi(t) + (x-1)\varphi(t_0) - m(x-1)$ et l'on a :

$$|F_2(x)| \leq e^{x\varphi(t_0)} e^{-\varphi(t_0) - (x-1)m} \int_{\mathbb{R}} e^{\varphi(t)} |f(t)| dt.$$

On déduit alors de (1) que $F_2(x)e^{-x\varphi(t_0)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(e^{-mx})$.

5. On a donc : $F_2(x)e^{-x\varphi(t_0)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^{-1/2})$. D'où $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} F_1(x)$ et le résultat.

$$\mathbf{6.} \forall x > 0, \Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{-xu} u^x du = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{x(\ln(u)-u)} du.$$

La partie I s'applique avec $f(t) = 1$, $\varphi(t) = \ln(t) - t$.

(1) est vérifié car $\Gamma(x+1)$ existe. (2) aussi, puisque $\varphi'(t) = \frac{1}{t} - 1$ et $\varphi''(1) = -1$.

Donc : $\Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}$.

• Calcul d'une intégrale

Partie I

1. Soit $f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle à coefficients complexes, les polynômes P et Q étant premiers entre eux. On suppose que z_0 est un pôle simple de f , c'est-à-dire que $Q(z_0) = 0$ et $Q'(z_0) \neq 0$. Soit $\frac{A_0}{X - z_0}$ la partie de la décomposition de $f(X)$ en éléments simples relative au pôle z_0 . Montrer que $A_0 = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

2. Soit $(a, h) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $C(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kh)$ et

$$S(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kh).$$

Déterminer des expressions simples de $C(a, h)$ et de $S(a, h)$; vérifier notamment que, lorsque $\sin\left(\frac{h}{2}\right) \neq 0$, $S(a, h) = \frac{\sin\left(\frac{nh}{2}\right) \cdot \sin\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$.

3. Démontrer la formule valable lorsque $\sin\left(\frac{h}{2}\right) \neq 0$,

$$2C(a, h) = \frac{\sin\left(a + (2n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)} + \cos(a) - \sin(a) \cotan\left(\frac{h}{2}\right).$$

4. En déduire que si l'on note $T(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} k \sin(a + kh)$, alors, pour

$$\sin\left(\frac{h}{2}\right) \neq 0 : T(a, h) = -\frac{1}{4} \left[\frac{2n \cos\left(a + (2n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)} + \frac{\sin(a) - \sin(a + nh)}{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)} \right]$$

On appelle n et s deux entiers tels que $n \geq 1$ et $0 \leq s \leq 2n-2$. L'objet de cette partie est de calculer l'intégrale $I(n, s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^s dx}{x^{2n} + 1}$.

5. Vérifier l'existence de $I(n, s)$.

6. Soit $f(z) = \frac{z^s}{z^{2n} + 1}$. Montrer que les pôles de f sont définis par :

$$z_k = \exp\left(\frac{\pi i}{2n} + \frac{k\pi i}{n}\right), -n \leq k \leq n-1.$$

7. On appelle A_k le coefficient de $\frac{1}{z - z_k}$ dans la décomposition en éléments

simples de $f(z)$. Calculer A_k . Montrer que $f(z) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k}{z - z_k} + \frac{\overline{A_k}}{z - \overline{z_k}} \right)$

et que $\sum_{k=0}^{n-1} (A_k + \overline{A_k}) = 0$.

8. a. En déterminant la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$, montrer que :

$$I(n, s) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left((2k+1)(s+1) \frac{\pi}{2n} \right) \left[\pi - (2k+1) \frac{\pi}{2n} \right]$$

b. En déduire que : $I(n, s) = \frac{B(n)}{\sin [\varphi(n, s)]}$ où $B(n) > 0$ et $\varphi(n, s) \in]0, \pi[$.
On les précisera simplement en fonction de n et s .

Partie II

On pose ici, n et s deux entiers tels que : $n \geq 1$ et $0 \leq s \leq 2n-1$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^s}{x^{2n+1}+1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On note $I_1(n, s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^s dx}{x^{2n+1}+1}$.

2. Calculer $I_1(n, s)$ en utilisant la formule de I.4. ainsi qu'un changement de variable très simple.

3. Soit s et m deux entiers tels que $m \geq 2$ et $0 \leq s \leq m-2$.
Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^s}{x^m+1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On note

$J(m, s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^s dx}{x^m+1}$. Donner pour l'expression de $J(m, s)$ une formule valable quelle que soit la parité de m .

4. a. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\lambda+1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si

$\lambda > 1$. On note $K(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda+1}$.

b. Montrer que la fonction K est continue sur $]1, +\infty[$.

c. Déduire des résultats précédents : $\forall \lambda \in]1, +\infty[, K(\lambda) = \frac{\pi}{\lambda \sin(\pi/\lambda)}$.

Partie III

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda > 0, -1 < \mu < \lambda-1$ et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^\mu}{(x^\lambda+1)^n}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On note $M_n(\lambda, \mu) = \int_{]0, +\infty[} \frac{x^\mu dx}{(x^\lambda+1)^n}$.

2. Calculer $M_1(\lambda, \mu)$ à l'aide des résultats de la partie II.

3. Montrer que la suite $(M_n(\lambda, \mu))_{n \geq 1}$ converge et donner sa limite.

4. Former une relation de récurrence liant $M_n(\lambda, \mu)$ et $M_{n-1}(\lambda, \mu)$, en supposant $n \geq 2$. En déduire $M_n(\lambda, \mu)$ sous forme de produit.

5. Montrer que si l'on pose $a_n(\lambda, \mu) = n^{\frac{\mu+1}{\lambda}} M_n(\lambda, \mu)$, la suite $(a_n(\lambda, \mu))_{n \geq 1}$ admet, une limite finie, strictement positive. On ne cherchera pas à calculer explicitement cette limite. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} M_n(\lambda, \mu)$?

Solution**Partie I**

1. Comme $Q(X) = (X - z_0)Q_1(X)$ où $Q_1(z_0) \neq 0$, on sait d'après le cours de première année, que $A_0 = \frac{P(z_0)}{Q_1(z_0)}$. Or $Q'(X) = Q_1(X) + (X - z_0)Q_1'(X)$. Donc $Q_1(z_0) = Q'(z_0)$ et $A_0 = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

2. $C(a, h) + iS(a, h) = z(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kh)} = e^{ia} \frac{1 - e^{inh}}{1 - e^{ih}}$ si $h \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et

$z(a, h) = ne^{ia}$ si $h \in 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left[-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$, on a, pour $h \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $z(a, h) = \exp \left[i \left(a + (n-1)\frac{h}{2} \right) \right] \frac{\sin\left(\frac{nh}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$.

En écrivant que $C(a, h) = \Re(z(a, h))$ et $S(a, h) = \Im(z(a, h))$, on a le résultat.

3. On suppose $h \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $2 \sin(p) \cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$, on a :

$$2C(a, h) = \frac{1}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)} \left[\sin\left(a + (2n-1)\frac{h}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{h}{2}\right) \right].$$

$$2C(a, h) = \frac{1}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)} \left[\sin\left(a + (2n-1)\frac{h}{2}\right) - \sin(a) \cos\left(\frac{h}{2}\right) + \cos(a) \sin\left(\frac{h}{2}\right) \right].$$

D'où le résultat.

4. La fonction $h \mapsto C(a, h)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables. Donc $T(a, h) = -\frac{\partial C}{\partial h}(a, h)$. Donc $T(a, h) = \frac{n(n-1)}{2} \sin(a)$ si $h \in 2\pi\mathbb{Z}$, sinon on obtient le résultat après quelques calculs faciles.

5. La fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^s}{1+x^{2n}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{s-2n}$. Comme $s - 2n \leq -2 < -1$, f est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après le critère d'équivalence et l'intégrale de Riemann. Donc $f \in \mathcal{L}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

6. $z^{2n} + 1 = 0 \iff z^{2n} = e^{i\pi} \iff z = z_k = \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \right], k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$. Comme $z_k = z_{2n-k}$, les pôles de f sont les $z_k, k \in \llbracket -n, n-1 \rrbracket$.

7. D'après la question 1. $A_k = \frac{1}{2n} \frac{z_k^s}{z_k^{2n-1}} = -\frac{1}{2n} z_k^{s+1}$ car $z_k^{2n} = -1$.

$$\text{Or } z_{-(k-1)} = \overline{z_k}, \text{ donc } f(z) = \sum_{k=-n}^{n-1} \frac{A_k}{z - z_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{A_k}{z - z_k} + \frac{\overline{A_k}}{z - \overline{z_k}} \right). \quad (1)$$

Comme $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{s-2n}$ et $s - 2n \leq -2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$. D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(A_k + \overline{A_k} \right) \text{ d'après (1). D'où le résultat cf. unicité de la limite.}$$

8. a. f étant intégrable sur $[0, +\infty[, I(n, s) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$.

D'un résultat de première année, on déduit :

$$\int_0^x \frac{dt}{t - z_k} = \left[\ln |t - z_k| + i \arctan \left(\frac{t - \Re(z_k)}{\Im(z_k)} \right) \right]_0^x.$$

Comme $|t - z_k| = |t - \bar{z}_k|$ si $t \in \mathbb{R}$, $\Im(\bar{z}_k) = -\Im(z_k)$ et $\Re(\bar{z}_k) = \Re(z_k)$,

$$(1) \Rightarrow \int_0^x f = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (A_k + \bar{A}_k) \ln |t - z_k| + i(A_k - \bar{A}_k) \arctan \left(\frac{t - \Re(z_k)}{\Im(z_k)} \right) \right]_0^x.$$

Comme $|z_k| = 1$, $\Re(z_k) = \cos \left[(2k+1) \frac{\pi}{2n} \right]$ et $\Im(z_k) = \sin \left[(2k+1) \frac{\pi}{2n} \right]$,

$$\int_0^x f = A(x) + iB(x) \text{ où } A(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (A_k + \bar{A}_k) \ln |x - z_k| \text{ et}$$

$$B(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[(A_k - \bar{A}_k) \arctan \left(\frac{x - \Re(z_k)}{\Im(z_k)} \right) + \arctan \left(\cotan(2k+1) \frac{\pi}{2n} \right) \right].$$

Comme $\sum_{k=0}^{n-1} (A_k + \bar{A}_k) = 0$, $A(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (A_k + \bar{A}_k) \ln \left| 1 - \frac{z_k}{x} \right| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

$0 \leq k \leq n-1 \Rightarrow \frac{\pi}{2n} \leq (2k+1) \frac{\pi}{2n} \leq (2n-1) \frac{\pi}{2n} < \pi \Rightarrow \Im(z_k) > 0$. D'où

$\arctan \left(\frac{x - \Re(z_k)}{\Im(z_k)} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$. D'autre part, comme $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - (2k+1) \frac{\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}$,

$$\arctan \left[\cotan(2k+1) \frac{\pi}{2n} \right] = \arctan \left[\tan \left(\frac{\pi}{2} - (2k+1) \frac{\pi}{2n} \right) \right] = \frac{\pi}{2} - (2k+1) \frac{\pi}{2n}.$$

Comme $i(A_k - \bar{A}_k) = -\frac{i}{2n} (z_k^{s+1} - \bar{z}_k^{s+1}) = \frac{1}{n} \sin \left((2k+1)(s+1) \frac{\pi}{2n} \right)$, on a le résultat annoncé.

$$\text{b. } I(n, s) = \frac{(2n-1)\pi}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left[(2k+1)(s+1) \frac{\pi}{2n} \right] - \frac{\pi}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \sin \left[(2k+1)(s+1) \frac{\pi}{2n} \right].$$

Avec les notations des questions 2. à 4. on a :

$$I(n, s) = \frac{(2n-1)\pi}{2n^2} S \left((s+1) \frac{\pi}{2n}, (s+1) \frac{\pi}{n} \right) - \frac{\pi}{n^2} T \left((s+1) \frac{\pi}{2n}, (s+1) \frac{\pi}{n} \right).$$

$$S \left((s+1) \frac{\pi}{2n}, (s+1) \frac{\pi}{n} \right) = \frac{\sin^2(s+1) \frac{\pi}{2}}{\sin \left((s+1) \frac{\pi}{2n} \right)} = \frac{1 + \cos(s\pi)}{2 \sin \left((s+1) \frac{\pi}{2n} \right)} = \frac{1 + (-1)^s}{2 \sin \left((s+1) \frac{\pi}{2n} \right)}.$$

$$T \left((s+1) \frac{\pi}{2n}, (s+1) \frac{\pi}{n} \right) = -\frac{1}{4} \left[\frac{2n(-1)^{s+1}}{\sin \left((s+1) \frac{\pi}{2n} \right)} + \frac{1 + (-1)^s}{\sin \left((s+1) \frac{\pi}{2n} \right)} \right].$$

D'où : $I(n, s) = \frac{\pi}{2n \sin \left((s+1) \frac{\pi}{2n} \right)}$. On a $B(n) > 0$ et $\Phi(n, s) = (s+1) \frac{\pi}{2n} \in]0, \pi[$ car $s+1 \in]0, 2n-1]$.

Partie II

1. La fonction $g : x \mapsto \frac{x^s}{1+x^{2n+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{s-2n-1}$.

Comme $s-2n-1 \leq -2 < -1$, g est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après le critère d'équivalence et l'intégrale de Riemann. Donc $g \in \mathcal{L}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

2. Le changement de variable $t = \sqrt{x}$ étant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, on a : $I_1(n, s) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^{2s+1}}{1+t^{2(2n+1)}} dt = \frac{\pi}{(2n+1) \sin \left(\frac{\pi(s+1)}{2n+1} \right)}$.

3. La fonction $h : x \mapsto \frac{x^s}{1+x^m}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $h(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{s-m}$. Comme $s-m \leq -2 < -1$, h est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après le critère d'équivalence et l'intégrale de Riemann. Donc $h \in \mathcal{L}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

De I.8. et II.2. on déduit que $J(m, s) = \frac{\pi}{m \sin\left(\frac{\pi(s+1)}{m}\right)}$.

4. a. La fonction $x \mapsto k(x, \lambda) = \frac{1}{1+x^\lambda}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $k(x, \lambda) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{-\lambda}$. Comme $-\lambda < -1$, la fonction $x \mapsto k(x, \lambda)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après le critère d'équivalence et l'intégrale de Riemann. Donc la fonction $x \mapsto k(x, \lambda)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

b. $k \in \mathcal{C}([1, +\infty[\times [0, +\infty[, \mathbb{R})$. Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$.

$\forall x \in [a, b] \times [0, +\infty[, 0 < k(\lambda, x) \leq \max(k(a, x), k(b, x))$.

Donc : $\forall x \in [a, b] \times [0, +\infty[, 0 < k(\lambda, x) \leq k(a, x) + k(b, x) = \theta(x)$.

$\theta \in \mathcal{L}_c^1([0, +\infty[, [0, +\infty[)$ car $K(a)$ et $K(b)$ existent. Du corollaire du théorème de continuité des intégrales paramétrées sur un intervalle (ici $[0, +\infty[$), on déduit la continuité de la fonction K sur $]1, +\infty[$.

c. La fonction $L :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \lambda \mapsto \frac{\pi}{\lambda \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)}$ est continue d'après les théorèmes

sur les opérations de fonctions continues. Les fonctions K et L sont continues sur $]1, +\infty[$ et égales sur $\mathbb{Q} \cap]1, +\infty[$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $K = L$ sur $]1, +\infty[$.

Partie III

1. La fonction $\psi_n : x \mapsto \frac{x^\mu}{(1+x^\lambda)^n}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et $\psi_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{\mu-n\lambda}$.

Comme $\mu - n\lambda \leq \mu - \lambda < -1$, ψ_n est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après le critère d'équivalence et l'intégrale de Riemann. D'autre part, $\psi_n(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x^\mu$ car $\lambda > 0$. Comme $\mu > -1$, la fonction ψ_n est intégrable sur $]0, 1]$. Donc $\psi_n \in \mathcal{L}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

2. Le changement de variable $x = t^{1+\mu}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur lui-même. D'où $M_1(\lambda, \mu) = \frac{1}{\mu+1} K\left(\frac{\lambda}{1+\mu}\right) = \frac{\pi}{\lambda \sin\left(\frac{\pi(1+\mu)}{\lambda}\right)}$.

3. $(\psi_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions positives continues et intégrables sur $]0, +\infty[$. Elle est décroissante et converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction ψ nulle sur $]0, +\infty[$. ψ étant continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ et comme $0 \leq \psi_n \leq \psi_1$ on déduit du théorème de convergence dominée que $M_n(\lambda, \mu) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

4. Intégrons par parties $M_{n-1}(\lambda, \mu), n \geq 2$.

Posons $u(x) = \frac{1}{(1+x^\lambda)^{n-1}}$ et $v(x) = \frac{x^{1+\mu}}{1+\mu} \cdot u$ et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$u(x)v(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(1+\mu)x^{(n-1)\lambda-1-\mu}} \Rightarrow \lim_{+\infty}(uv) = 0$ car $(n-1)\lambda-1-\mu \geq \lambda-\mu-1 > 0$

Comme $u(0)v(0) = 0$, $M_{n-1}(\lambda, \mu) = \frac{\lambda(n-1)}{1+\mu} \int_0^{+\infty} \frac{x^\lambda x^\mu dx}{(1+x^\lambda)^n}$.

$M_{n-1}(\lambda, \mu) = \frac{\lambda(n-1)}{1+\mu} [M_{n-1}(\lambda, \mu) - M_n(\lambda, \mu)]$.

Donc : $\forall n \geq 2, M_n(\lambda, \mu) = \frac{(n-1)\lambda - \mu - 1}{(n-1)\lambda} M_{n-1}(\lambda, \mu)$.

Par récurrence, on a : $\forall n \geq 2, M_n(\lambda, \mu) = \frac{\pi}{\lambda \sin\left(\frac{\pi(1+\mu)}{\lambda}\right)} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1+\mu}{k\lambda}\right)$.

5. Posons $b_n = \ln(a_n)$ car $a_n > 0$ d'après III.4. On a :

$$b_{n+1} - b_n = \ln\left(\frac{M_{n+1}}{M_n}\right) + \frac{1+\mu}{\lambda} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1+\mu}{n\lambda}\right) + \frac{1+\mu}{\lambda} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Donc : $b_{n+1} - b_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $\ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h + O(h^2)$.

La série $\sum (b_{n+1} - b_n)$ converge absolument sur $\mathbb{R}$ donc converge. Du critère suite/série, on déduit la convergence de (b_n) vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$. Comme $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$, la suite (a_n) converge vers $\ell = e^{\ell_1} > 0$.

Georges Perec dirait : « Je me souviens de Raabe-Duhamel vu au chapitre 4 ».

$M_n(\lambda, \mu) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ell n^{-\frac{1+\mu}{\lambda}}$. Comme $0 < \frac{1+\mu}{\lambda} < 1$, on déduit du critère d'équivalence des séries à termes positifs et des résultats sur les séries de Riemann que la série $\sum M_n(\lambda, \mu)$ diverge. On retrouve cependant le résultat de III. 3.

• Formule des compléments

Soit $\lambda \in]1, +\infty[$ et $\alpha = \frac{1}{\lambda}$. On suppose connu le résultat suivant qui a été prouvé au travail dirigé précédent : $K(\lambda) = \frac{\pi}{\alpha \sin(\alpha)}$.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto g(t, x) = \frac{\exp(-xt^\lambda)}{1+t^\lambda}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si, et seulement si, $x \in [0, +\infty[$. On note $F(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$ pour $x \geq 0$.

2. a. Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

b. Déterminer la limite en $+\infty$ de F .

3. Montrer que F est solution sur $]0, +\infty[$ d'une équation différentielle que l'on précisera.

4. Du calcul de $\frac{d}{dx}(F(x)e^{-x})$ déduire la **formule des compléments** :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sin(\alpha\pi) = \pi$$

Retrouver $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Solution

1. $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$ (1)

Si $x < 0$, on a : $g(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et $t \mapsto g(x, t)$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

Si $x \geq 0$, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $0 < g(x, t) \leq \frac{1}{1+t^\lambda} = \varphi_1(t)$ (2)

$\varphi_1 \in \mathcal{L}_c^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ car $K(\lambda)$ existe. De plus $\varphi_1(t)$ est indépendant de x . Donc F existe et est continue sur $[0, +\infty[$ d'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre sur un intervalle.

2. a. De (1), on déduit que $\frac{\partial g}{\partial x}$ existe et que $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{t^\lambda}{1+t^\lambda} e^{-xt^\lambda}$.

Soit $a > 0$. pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at^\lambda} = \varphi_2(t)$. (3)

$\varphi_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et $\varphi_2(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{-2})$. Donc $\varphi_2 \in \mathcal{L}_c^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

Compte tenu de (1), (2), (3), les hypothèses d'un corollaire du théorème de dérivation sous le signe somme des intégrales dépendant d'un paramètre sur un intervalle sont vérifiées. Donc $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et pour tout $x > 0$, on a :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = - \int_0^{+\infty} \frac{t^\lambda}{1+t^\lambda} e^{-xt^\lambda} dt.$$

b. Soit (x_n) une suite d'éléments de $]0, +\infty[$ de limite $+\infty$. Posons $\theta_n(t) = g(x_n, t)$. La suite de fonctions continues (θ_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction continue par morceaux $\mathbb{I}_{\{1\}}$. D'après (1), $0 \leq \theta_n(t) \leq \varphi_1(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

On déduit du théorème de convergence dominée que $F(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^{+\infty} \mathbb{I}_{\{1\}} = 0$.

De la caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite, on déduit que $F(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$.

$$3. \forall x \in]0, +\infty[, F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-xt^\lambda) dt.$$

Le changement de variable $u = xt^\lambda$ étant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, on a : $\int_0^{+\infty} \exp(-xt^\lambda) dt = \alpha x^{-\alpha} \Gamma(\alpha)$. Par suite, F est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle : $y' - y = -\alpha \Gamma(\alpha) x^{-\alpha}$.

4. $\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -\alpha \Gamma(\alpha) x^{-\alpha} e^{-x}$. Donc, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on peut écrire :

$$e^{-x}F(x) - e^{-y}F(y) = \alpha \Gamma(\alpha) \int_x^y t^{-\alpha} e^{-t} dt \quad (4)$$

D'après 2.b), $e^{-y}F(y) \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{} 0$. De la continuité de F en 0, on déduit que

$$e^{-x}F(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} F(0) = K(\lambda) = \frac{\pi \alpha}{\sin(\alpha \pi)}.$$

Comme $0 < \alpha < 1$, $\Gamma(1 - \alpha)$ existe et donc : $\int_x^y t^{-\alpha} e^{-t} dt \xrightarrow[x \rightarrow 0, y \rightarrow +\infty]{} \Gamma(1 - \alpha)$.

Par passage à la limite dans (4), on obtient la « formule des compléments » .

Avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on retrouve, puisque Γ est à valeurs positives $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

• Développements asymptotiques de fonctions définies par une intégrale

Dans tout le problème, on fixe un réel $x_0 > 0$ et les applications étudiées sont définies sur $[x_0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble $\mathcal{C}([x_0, +\infty[, \mathbb{C})$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble $\mathcal{B}([x_0, +\infty[, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}$.

On dit que $f \in \mathcal{C}$ a un développement asymptotique (en abrégé DAS) en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

On note alors $f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$ même si la série $\sum a_n x^{-n}$ diverge.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}$ admettant un DAS.

I. Opérations sur les DAS

Toutes les applications considérées ici, sont éléments de $\mathcal{C}$.

1. Montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$.

2. Soit $f \in \mathcal{A}$. Montrer l'unicité des a_n tels que $f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$.

3. Donner un exemple d'application f qui ne s'annule pas sur $[x_0, +\infty[$ et qui admet un DAS à coefficients tous nuls.

4. Que dire du DAS de f lorsque $t \mapsto f\left(\frac{1}{t}\right)$ se prolonge sur $\left[0, \frac{1}{x_0}\right]$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$?

5. Soient f et g dans $\mathcal{A}$. Étudier l'existence des DAS de $f + g$, fg , $\frac{1}{f}$.

6. Soit $f \in \mathcal{C}^1([x_0, +\infty[, \mathbb{C})$ telle que $f' \in \mathcal{A}$: $f'(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n}$.

À quelle condition sur les c_n l'application f admet-elle un DAS ? Quels en sont les coefficients ?

II. Étude de fonctions définies par une intégrale

On note $\Omega = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R} \mid (\Re(\alpha) > 0) \text{ ou } (\Re(\alpha) = 0 \text{ et } \beta > 0)\}$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \Omega$. On note $a = \Re(\alpha)$. On pose $f_\beta(x) = e^{\alpha x} x^\beta$,

$$J_\beta(x) = \int_{x_0}^x f_\beta(t) dt \text{ et } Q_\beta(x) = \frac{J_\beta(x)}{f_\beta(x)} = \int_{x_0}^x e^{\alpha(t-x)} \left(\frac{t}{x}\right)^\beta dt.$$

1. Trouver une relation entre $J_\beta(x)$, $J_{\beta-1}(x)$, $f_\beta(x)$ et $f_\beta(x_0)$.

On suppose dans 2. et 3. que $a = \Re(\alpha) > 0$

2. Montrer que $J_\beta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha} f_\beta(x)$.

3. Montrer que $Q_\beta \in \mathcal{A}$ et : $Q_\beta(x) \approx \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta(\beta-1) \cdots (\beta-n+1)}{\alpha^{n+1} x^n}$.

4. Montrer dans le cas où $\Re(\alpha) = 0$ on a : $Q_\beta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \alpha^{-1}$.

Soit à nouveau (α, β) un élément quelconque de Ω . On pose $g_\beta(x) = \frac{1}{f_\beta(x)}$.

5. Montrer la fonction : $x \mapsto I_\beta(x) = \int_x^{+\infty} g_\beta(t)dt$ est définie sur $[x_0, +\infty[$. Trouver une relation entre $I_\beta(x)$, $I_{\beta+1}(x)$ et $g_\beta(x)$.

6. On suppose ici $a = \Re(\alpha) > 0$ et l'on pose $P_\beta(x) = \frac{I_\beta(x)}{g_\beta(x)}$. Montrer que $P_\beta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha}$, puis montrer que l'application P_β est dans $\mathcal{A}$ et expliciter son DAS.

III. Une équation intégrale

On note $\Delta = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 \leq x \leq t\}$. Soit K une application continue bornée de Δ dans $\mathbb{C}$; on pose $A = \sup\{|K(x, t)| \mid (x, t) \in \Delta\}$. Pour tout $g \in \mathcal{B}$, on pose $N(g) = \sup\{|g(t)| \mid t \geq x_0\}$

1. Soit $h \in \mathcal{B}$. Montrer que la fonction $t \mapsto K(x, t)h(t)t^{-2}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$. On note $Th(x) = \int_x^{+\infty} K(x, t)h(t)t^{-2}dt$.

2. Montrer que pour tout $h \in \mathcal{B}$, $T(h) \in \mathcal{B}$ et : $\forall x \geq x_0, |Th(x)| \leq A \frac{N(h)}{x}$.

3. Montrer que $T : h \mapsto Th$ est linéaire continue de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$.

4. Montrer la convergence normale de $(\sum T^n h)_{n \geq 0}$ sur $[x_0, +\infty[$.

5. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} T^n h$ est l'unique $g \in \mathcal{B}$ tel que $g - Tg = h$.

IV. DAS de la solution d'un problème du type précédent

Soit $(\alpha, \beta) \in \Omega$. On pose pour $(x, u) \in \Delta$, $L(x, u) = \int_x^u e^{2\alpha(t-u)} \left(\frac{t}{u}\right)^{2\beta} dt$.

1. Montrer que L est continue sur Δ .

2. Montrer que $(t, u) \mapsto e^{2\alpha(t-u)} \left(\frac{t}{u}\right)^{2\beta}$ est bornée sur Δ .

3. Montrer que L est bornée sur Δ . (On pourra introduire $L_0(u) = L(x_0, u)$ et exprimer L à l'aide de la fonction L_0 .)

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{L(x, u)}{u^{n+2}} du$ admet un DAS si $a > 0$.

Solution

Partie I

1. Si $f \in \mathcal{A}$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a_0 \in \mathbb{C}$. Comme $f \in \mathcal{C}$, on peut conclure que f est bornée. Donc $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Comme $f_0 : [x_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ est élément de $\mathcal{B}$ et n'a pas de limite en $+\infty$, on peut dire que : $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$.

2. L'unicité de la suite (a_n) résulte de l'unicité de la limite :

$$a_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{-k} \right)$$

3. Si $f(x) = e^{-x}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc tous les coefficients du DAS sont nuls.

4. Si g est le prolongement continu de $t \mapsto f\left(\frac{1}{t}\right)$ à $\left[0, \frac{1}{x_0}\right]$, d'après le théorème de Taylor-Young, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + o(t^n)$. D'où f a

un DAS dont les coefficients sont $a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$.

5. Si $(f, g) \in \mathcal{A}^2$, $f + g$, fg sont éléments de $\mathcal{C}$ et si f ne s'annule pas sur $[x_0, +\infty[$ $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}$. On déduit alors des théorèmes sur les développements limités que

si $f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$ et $g(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n}$ alors :

$$f + g \in \mathcal{A} \text{ et } (f + g)(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^{-n};$$

$$fg \in \mathcal{A} \text{ et } (fg)(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n} \text{ où } c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q;$$

$\frac{1}{f} \in \mathcal{A}$ si, et seulement si, $a_0 = \lim_{+\infty} f \neq 0$ et $\frac{1}{f} \approx \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{-n}$ où $d_0 = \frac{1}{a_0}$ et $d_n = -\frac{1}{a_0} (a_n d_0 + a_{n-1} d_1 + \dots + a_1 d_{n-1})$ si $n \geq 1$. (en utilisant $f \cdot \frac{1}{f} = 1$ et l'unicité des DAS.)

6. Supposons que $f' \in \mathcal{A}$ et $f'(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n}$.

Si $c_0 \neq 0$, $\frac{f'(x)}{c_0} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$. Du théorème d'intégration des relations d'équivalence on déduit que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} c_0 x$. D'où $f \notin \mathcal{B}$ et cf. I.1. $f \notin \mathcal{A}$.

Si $c_0 = 0$ et $c_1 \neq 0$, $\frac{f'(x)}{c_1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. Du théorème d'intégration des relations d'équivalence on déduit que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} c_1 \ln(x)$. D'où $f \notin \mathcal{B}$ et cf. I.1. $f \notin \mathcal{A}$.
Donc si $f \in \mathcal{A}$, alors $c_0 = c_1 = 0$.

Réciproquement, si $c_1 = c_0 = 0$, $g_n(x) = f'(x) - \sum_{k=2}^n c_k x^{-k} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} o(x^{-n})$ et $n \geq 2$.

Comme $x \mapsto x^{-n}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et positive, pour $n \geq 2$, d'après le théorème d'intégration des relations de comparaison, $g_n \in \mathcal{L}^1([x_0, +\infty[, \mathbb{C})$,

$$\int_x^{+\infty} g_n(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^n}\right) \text{ i.e. } \int_x^{+\infty} g_n \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

Donc $\int_x^y g_n = \left[f(t) - \frac{c_2}{t} - \dots - \frac{c_n}{(n-1)t^{n-1}}\right]_x^y$ a une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque y tend

vers $+\infty$. Donc il existe $a_0 \in \mathbb{C}$ tel que $a_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$ où

$$a_n = -\frac{c_{n+1}}{n} \text{ si } n \geq 1.$$

Partie II

1. En intégrant par parties, les hypothèses du théorème étant vérifiées, on a :

$$\alpha J_\beta(x) = \int_{x_0}^x \alpha e^{\alpha t} t^\beta dt = \left[e^{\alpha t} t^\beta\right]_{x_0}^x - \beta \int_{x_0}^x e^{\alpha t} t^{\beta-1} dt.$$

D'où : $\alpha J_\beta(x) + \beta J_{\beta-1}(x) = f_\beta(x) - f_\beta(x_0)$.

2. En opérant comme en II.1. on a :

$$a \int_{x_0}^x e^{at} t^\beta dt = e^{ax} x^\beta - e^{ax_0} x_0^\beta - \beta \int_{x_0}^x e^{at} t^{\beta-1} dt.$$

$e^{at} t^{\beta-1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{at} t^\beta)$ et, par croissances comparées, $e^{at} t^{\beta-1} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ car

$a > 0$. La fonction positive $t \mapsto e^{at} t^\beta$ n'est pas intégrable sur $[x_0, +\infty[$. On déduit du théorème d'intégration des relations de comparaison que :

$$\int_{x_0}^x e^{at} t^{\beta-1} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_{x_0}^x e^{at} t^\beta dt\right). \text{ Donc } \int_{x_0}^x e^{at} t^\beta dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a} e^{ax} x^\beta.$$

De même, en transformant β en $\beta - 1$, on a : $\int_{x_0}^x e^{at} t^{\beta-1} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a} e^{ax} x^{\beta-1}$.

Comme $|J_{\beta-1}(x)| \leq \int_{x_0}^x e^{at} t^{\beta-1} dt$, donc $J_{\beta-1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{ax} x^\beta)$ ie.

$J_{\beta-1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f_\beta(x))$. On déduit alors de l'égalité de II.1. que $J_\beta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f_\beta(x)}{\alpha}$.

3. La relation de II.1. implique : $Q_\beta(x) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha x} Q_{\beta-1}(x) + C_0 e^{-\alpha x} x^{-\beta}$ où

$C_0 = -\frac{f_\beta(x_0)}{\alpha}$ est une constante complexe.

De même, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $C_p \in \mathbb{C}$ tel que :

$$Q_{\beta-p}(x) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta-p}{\alpha x} Q_{\beta-p-1}(x) + C_p e^{-\alpha x} x^{p-\beta}$$

Par une récurrence facile, on montre l'existence de $C'_n \in \mathbb{C}$ tel que

$$Q_\beta(x) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{\beta(\beta-1) \cdots (\beta-p+1)}{\alpha^{p+1} x^p} + R_n(x) \text{ où}$$

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{\beta(\beta-1) \cdots (\beta-n+1)}{\alpha^n x^n} Q_{\beta-n}(x) + C'_n e^{-\alpha x} x^{-\beta}.$$

Or $Q_{\beta-n}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha}$ et $e^{-\alpha x} x^{-\beta} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^n}\right)$, donc Q_β a un DAS dont les coefficients sont ceux qui ont été demandés.

4. On a $a = \Re(\alpha) = 0$. Étendons la définition de J_β et de f_β au cas où $\beta \leq 0$.

On a alors : $\alpha J_\beta(x) + \beta J_{\beta-1}(x) = f_\beta(x) - f_\beta(x_0)$. (1)

$$\forall x \geq x_0, |\beta J_{\beta-1}(x)| \leq \int_{x_0}^x \beta t^{\beta-1} dt = x^\beta - x_0^\beta.$$

(1) $\Rightarrow \forall x \geq x_0, \alpha |J_\beta(x)| \leq x^\beta + x_0^\beta + x^\beta - x_0^\beta = 2x^\beta$. Donc $J_\beta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x^\beta)$

En changeant β en $(\beta - 1)$, on a $J_{\beta-1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x^{\beta-1})$. D'où

$J_{\beta-1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f_\beta(x))$ et on déduit de (1) que $J_\beta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha} f_\beta(x)$.

5. Par intégration par parties, on a :

$$\alpha \int_x^y g_\beta = -(g_\beta(y) - g_\beta(x)) - \beta \int_x^y g_{\beta+1} \quad (2)$$

• Si $a > 0, |g_\beta(t)| = t^{-\beta} e^{-at} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{-2})$. Comme $g_\beta \in \mathcal{C}$, $g_\beta \in \mathcal{L}^1([x_0, +\infty[, \mathbb{C})$.

• Si $a = 0, |g_{\beta+1}(t)| = t^{-\beta-1}$. Comme $\beta + 1 > 1$, la fonction $g_{\beta+1}$ est intégrable sur $[x_0, +\infty[$. D'où $\int_x^y g_{\beta+1} \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{} \int_x^{+\infty} g_{\beta+1} \in \mathbb{C}$.

Comme $|g_\beta(y)| = y^{-\beta} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$, $\alpha \int_x^y g_\beta \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} g_\beta(x) - \beta \int_x^{+\infty} g_{\beta+1} \in \mathbb{C}$.

Donc $I_\beta(x)$ existe pour tout $x \geq x_0$.

Par passage à la limite dans (2) quand y tend vers $+\infty$, pour $(\alpha, \beta) \in \Omega$, on a :

$$\alpha I_\beta(x) = g_\beta(x) - \beta I_{\beta+1}(x). \quad (3)$$

6. En intégrant par parties, $a \int_x^{+\infty} e^{-at} t^{-\beta} dt = e^{-ax} x^{-\beta} - \beta \int_x^{+\infty} e^{-at} t^{-\beta-1} dt$.
 $e^{-at} t^{-\beta-1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-at} t^{-\beta})$ et, par croissances comparées, $e^{-at} t^{-\beta} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{-2})$
 car $a > 0$. La fonction positive $t \mapsto e^{-at} t^{-\beta}$ est intégrable sur $[x_0, +\infty[$. On déduit du théorème d'intégration des relations de comparaison que :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} t^{-\beta-1} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^x e^{-at} t^{-\beta} dt\right). \text{ Donc } \int_x^{+\infty} e^{-at} t^{-\beta} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-ax} x^{-\beta}}{a}.$$

De même, en transformant β en $\beta-1$, on a : $\int_x^{+\infty} e^{-at} t^{-\beta-1} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a} e^{-ax} x^{-\beta-1}$.

Comme $|I_{\beta+1}(x)| \leq \int_x^{+\infty} e^{-at} t^{-\beta-1} dt$, donc $I_{\beta+1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-ax} x^\beta)$ ie.

$I_{\beta+1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(g_\beta(x))$. On déduit alors de (3) que $I_\beta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{g_\beta(x)}{\alpha}$.

Pour tout $x \geq x_0$, (3) $\Rightarrow P_\beta(x) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha x} P_{\beta+1}(x)$ car $g_\beta(x) = x g_{\beta+1}(x)$.

Par récurrence, on a :

$$P_\beta(x) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2 x} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-2)}{\alpha^n x^{n-1}} + r_n(x) \text{ où}$$

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{\alpha^n x^n} P_{\beta+n}(x)$$

Or $P_{\beta+n}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\alpha} + o(1)$ donc P_β a un DAS et :

$$P_\beta(x) \approx \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^n} \beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1) x^{-n}$$

Partie III

1. $t \mapsto K(x, t)h(t)t^{-2}$ est continue sur $[x_0, +\infty[$ et $|K(x, t)h(t)t^{-2}| \leq AN(h)t^{-2}$ pour tout $t \geq x_0$. D'où l'intégrabilité de $t \mapsto K(x, t)h(t)t^{-2}$ sur $[x_0, +\infty[$.

$$\mathbf{2.} \forall x \geq x_0, |Th(x)| \leq AN(h) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{AN(h)}{x} \leq \frac{AN(h)}{x_0}.$$

D'où Th est bornée. Montrons que $Th \in \mathcal{C}$.

Soit $\chi_{[x, +\infty[}$ la fonction caractéristique de $[x, +\infty[$.

Posons $\theta_x : t \mapsto K(x, t)h(t)t^{-2}\chi_{[x, +\infty[}(t)$

Considérons une suite (y_n) de $[x_0, +\infty[$ qui converge vers x . Soit $\theta_n(t) = \theta_{y_n}(t)$.
 $\theta_n \in \mathcal{CM}([x_0, +\infty[, \mathbb{C})$ et (θ_n) converge simplement vers θ sur $[x_0, +\infty[$.

$\forall t \in [x_0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, |\theta_n(t)| \leq AN(h)t^{-2}\chi_{[x_0, +\infty[} = \Psi(t)$.

Comme $\Psi \in \mathcal{L}^1([x_0, +\infty[, \mathbb{R}_+)$, on déduit du théorème de convergence dominée,

$$\text{que : } \int_{[x_0, +\infty[} \theta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{[x_0, +\infty[} \theta \text{ ie. } Th(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Th(x).$$

De la caractérisation séquentielle de la continuité, on déduit que $Th \in \mathcal{C}$.

3. La linéarité de T découle de celle de l'intégrale et la continuité de l'inégalité :

$$N(Th) \leq \frac{A}{x_0} N(h). \text{ Donc } T \in \mathcal{LC}(\mathcal{B}) \text{ et } \|T\| \leq \frac{A}{x_0}.$$

4. Par récurrence, on montre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq x_0, |T^n h(x)| \leq \frac{A^n N(h)}{n! x^n}$.

C'est fait pour $n = 1$. Si le résultat est prouvé pour $n \geq 1$, $T^{n+1}h(x) = T[T^n h(x)]$

$$|T^{n+1}h(x)| = \left| \int_x^{+\infty} K(x, t) \frac{T^n h(t)}{t^2} dt \right| \leq \frac{A^{n+1} N(h)}{n!} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{n+2}} = \frac{A^{n+1} N(h)}{n! x^{n+1}}.$$

D'où la conclusion par théorème de récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, N(T^n h) \leq \frac{A^n}{n!} \cdot \frac{N(h)}{x_0^n} = \delta_n.$$

δ_n est indépendant de x et $(\sum \delta_n)_{n \geq 0}$ converge et a pour somme $N(h) \exp\left(\frac{A}{x_0}\right)$.

Donc la série $(\sum T^n h)_{n \geq 0}$ converge normalement sur $[x_0, +\infty[$.

5. La convergence normale implique la convergence uniforme de $(\sum T^n h)_{n \geq 0}$. Soit

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} T^n h. \text{ Alors } g \in \mathcal{B}. \text{ Comme } T \text{ est continue, on a : } Tg = \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1} h = g - h.$$

Pour prouver l'unicité, il suffit de prouver l'injectivité de $(I - T)$. Or si $f \in \mathcal{B}$ est telle que $Tf = f$, alors $T^n f = f$ pour tout $n \geq 1$. Comme $\sum T^n f$ converge, $T^n f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Donc $f = 0$.

Partie IV

$$1. L(x, u) = e^{-2\alpha u} u^{-2\beta} \int_x^u e^{2\alpha t} t^{2\beta} dt = e^{-2\alpha u} u^{-2\beta} \left[\int_0^u e^{2\alpha t} t^{2\beta} dt - \int_0^x e^{2\alpha t} t^{2\beta} dt \right].$$

L est continue d'après les théorèmes sur les opérations sur les fonctions continues et ceux sur les primitives de fonctions continues.

$$2. \text{ On a : } \left| e^{2\alpha(t-u)} \left(\frac{t}{u} \right)^{2\beta} \right| = \frac{f(t)}{f(u)} \text{ où } f(v) = e^{2\alpha v} v^{2\beta}.$$

De la croissance de f , on déduit que pour $(t, u) \in \Delta, x_0 \leq t \leq u \Rightarrow \frac{f(t)}{f(u)} \leq 1$.

$$3. L(x, u) = L_0(u) - e^{2\alpha(x-u)} \left(\frac{x}{u} \right)^{2\beta} L_0(x).$$

La fonction $(x, u) \mapsto e^{2\alpha(x-u)} \left(\frac{x}{u} \right)^{2\beta}$ est bornée sur Δ . Or $L_0(u) = Q_{2\beta}(u)$, on déduit de II.3. et II.4. que L_0 est continue. D'où L est bornée sur Δ .

4. En utilisant la décomposition de IV.3. on a :

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{L(x, u)}{u^{n+2}} du &= \int_x^{+\infty} \frac{L_0(u)}{u^{n+2}} du - L_0(x) \int_x^{+\infty} \frac{e^{2\alpha(x-u)}}{u^{n+2}} \left(\frac{x}{u} \right)^{2\beta} du. \\ \int_x^{+\infty} \frac{L(x, u)}{u^{n+2}} du &= \Phi(x) - \frac{L_0(x)}{x^{n+2}} P_{2\beta+n+2}(x) \text{ avec les notations précédentes au} \\ &\text{changement près de } \alpha \text{ en } 2\alpha. \end{aligned}$$

$$\Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et } \Phi'(x) = -\frac{L_0(x)}{x^{n+2}} = -\frac{Q_{2\beta}(x)}{x^{n+2}}.$$

Φ' a un DAS si $a > 0$, d'après II.3. Le terme en $\frac{1}{x^{n+2}}$ assure que les deux premiers coefficients du DAS de Φ' sont nuls, donc, d'après I.6. Φ a un DAS.

Comme $L_0, P_{2\beta+n+2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^{n+2}}$ ont un DAS, il en est de même de la fonction

$$x \mapsto \frac{L_0(x)}{x^{n+2}} P_{2\beta+n+2}(x) \text{ et par suite, de la fonction } x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{L(x, u)}{u^{n+2}} du.$$

8. Séries entières

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I. Rayon de convergence

A. Définitions

1. Définition

Une série entière à variable réelle ou complexe est une série de fonctions $\sum u_n$ où $u_n : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, z \mapsto a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{K}$. Une telle série est notée $\sum a_n z^n$.
En tout point où elle converge, sa somme est : $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

2. Opérations

a. La somme des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

b. Le produit de la série entière $\sum a_n z^n$ par $\lambda \in \mathbb{K}$ est la série entière $\sum \lambda a_n z^n$.

c. Le produit des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$ où

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q.$$

d. Muni de ces lois, l'ensemble des séries entières est une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative.

3. Rayon de convergence

3.1. Lemme d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \geq 0}$ soit bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique converge absolument (donc converge).

Démonstration

Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$ majorant les $|a_n z_0^n|$, $n \in \mathbb{N}$. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$,

$|a_n z^n| \leq |a_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$. Comme $\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$, la série géométrique $\sum \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ converge. D'où $\sum |a_n z^n|$ converge. $\square$

Si $\sum a_n z^n$ une série entière, on introduit les ensembles E_i , $1 \leq i \leq 5$ définis par :

$$E_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid (a_n z^n)_{n \geq 0} \text{ est bornée} \}, E_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid a_n z^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \},$$

$$E_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \sum a_n z^n \text{ converge} \}, E_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid \sum a_n z^n \text{ converge absolument} \},$$

$$E_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid \sum a_n z^n \text{ diverge} \}.$$

Pour $0 \leq i \leq 4$, les ensembles E_i sont non vides puisqu'ils contiennent 0 ; on note donc R_i l'élément de $\overline{\mathbb{R}}$ défini par $R_i = \sup_{z \in E_i} |z|$. En convenant que $R_5 = +\infty$ si E_5 est vide, on pose $R_5 = \inf_{z \in E_5} |z|$.

Remarquons tout d'abord que $E_4 \subset E_3 \subset E_2 \subset E_1$ de telle sorte que $R_4 \leq R_3 \leq R_2 \leq R_1$. Si $R_1 = 0$, il vient $R_4 = R_3 = R_2 = R_1 = 0$ et $R_5 = 0$.

On suppose dans ce qui suit que $R_1 > 0$. Soit alors $r \in]0, R_1[$. La suite $(a_n r^n)_{n \geq 0}$ est bornée et donc, d'après le lemme d'Abel, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument de telle sorte que $R_4 \geq r$. Ceci ayant lieu pour tout $r < R_1$, on en déduit que $R_4 \geq R_1$ et finalement $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$. De plus la série $\sum a_n r^n$ convergeant absolument, $r \notin E_5$ de sorte que $r \leq R_5$. Ceci ayant lieu pour tout $r < R_1$, on conclut que $0 < R_1 \leq R_5$. Soit maintenant $\rho \in [0, R_5[$; par définition de E_5 , le nombre ρ appartient à E_4 et donc $\rho \leq R_4$. Ceci étant valable pour tout $\rho \in [0, R_5[$, on en déduit que $R_5 \leq R_4 = R_1$ ce qui met fin à la preuve de l'assertion annoncée. Finalement : $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5$.

3.2. Théorème et définition

Avec les notations précédentes, on appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ l'élément $R \in [0, +\infty]$ tel que $R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5$.

3.3. Définitions

Pour une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, on appelle disque ouvert (resp. intervalle ouvert) de convergence, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ (resp. $] - R, R[$).

B. Détermination du rayon

1. Théorème 1 (règle de d'Alembert)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle qu'à partir d'un certain rang $a_n \neq 0$. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, tel que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors $R = \frac{1}{\ell}$.
(avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.)

Démonstration

Appliquons la règle de d'Alembert à la série à termes positifs $\sum |a_n z^n|$ si $z \neq 0$.

Comme il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $a_n \neq 0$ si $n \geq N$, on a : $\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell |z|$.

$\sum |a_n z^n|$ converge si $\ell |z| < 1$ et diverge si $\ell |z| > 1$. D'où la conclusion par application de (i) de I.A.3.2. $\square$

2. Théorème 2

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

$$(i) \quad \left(\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n| \leq |b_n| \right) \Rightarrow (R_a \geq R_b).$$

$$(ii) \quad \left(\exists \alpha \in \mathbb{R}, a_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(n^\alpha b_n) \right) \Rightarrow (R_a \geq R_b).$$

$$(iii) \quad \left(\exists \alpha \in \mathbb{R}, a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^\alpha b_n \right) \Rightarrow (R_a = R_b).$$

Démonstration

(i) $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall z \in \mathbb{C}, |a_n z^n| \leq |b_n z^n|$.

Si $|z| < R_b$, $\sum b_n z^n$ converge absolument, donc $\sum a_n z^n$ aussi ; d'où $R_a \geq R_b$.

(ii) (cf. hypothèse) $\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq A n^\alpha |b_n|$.

Si $|z| < R_b$, il existe $r \in]|z|, R_b[$. Donc $\sum |b_n| r^n$ converge ; d'où $(|b_n| r^n)$ est bornée.

$$|a_n z^n| \leq A |b_n| r^n n^\alpha \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \Rightarrow a_n z^n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(n^\alpha \left(\frac{|z|}{r}\right)^n\right).$$

Or $\sum n^\alpha \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ converge d'après la règle de d'Alembert des séries à termes positifs, car $0 \leq \frac{|z|}{r} < 1$, donc $\sum a_n z^n$ converge, d'où $R_a \geq R_b$.

(iii) Application de (ii) car $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{1}{2} n^\alpha |b_n| \leq |a_n| \leq \frac{3}{2} n^\alpha |b_n|$. $\square$

3. Exemples

a) Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$

$$(i) a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} \quad (ii) a_n = \frac{n!}{2^{2n} \sqrt{(2n)!}} \quad (iii) a_n = \left(\sum_{k=1}^n k^{-\alpha}\right)^{-1}.$$

(iv) a_n est le nombre de diviseurs de n . (v) a_n est la n ième décimale de π .

$$(vi) a_n = \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}, (\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Comparer les rayons de convergence R_a, R_b, R_c des séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ où $c_n = a_n b_n$. Cas particulier où $a_n = b_n$.

Solution

a) (i) On a facilement $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{-n} \cdot e^{-1/2}$. Or la série géométrique $\sum (e^{-1} z)^n$ converge si et seulement si $|z| < e$, donc $R = e$ cf. théorème I.B.2. de ce chapitre.

(ii) En utilisant le théorème I.B.1. ou la formule de Stirling et le théorème I.B.2. de ce chapitre, on trouve $R = 8$.

(iii) Le théorème I.B.1. permet de conclure que $R = 1$. En effet $a_n = S_n^{-1}$ où

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^{-\alpha}; d_n = \frac{S_{n+1}}{S_n} = 1 + \frac{1}{(n+1)^\alpha S_n}. \text{ Si } \alpha > 1, S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta(\alpha) \in \mathbb{R}; \text{ si}$$

$$\alpha \in [0, 1], S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty; \text{ enfin si } \alpha < 0, S_n \geq \frac{n}{n^\alpha}. \text{ Dans tous les cas, } d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

(iv) $1 \leq a_n \leq n$; d'où $R = 1$ par application du théorème 2. précédent, deux fois.

(v) $0 \leq a_n \leq 9$; d'où $R \geq 1$ par application du théorème 2. précédent et $R \leq 1$ car $\sum a_n$ diverge grossièrement en tant que série d'entiers naturels non tous nuls à partir d'un certain rang.

(vi) Par une application double du théorème 2. précédent, on obtient que R est le rayon de convergence de $\sum \cos(n\theta) z^n$. Comme $|\cos(n\theta)| \leq 1, R \geq 1$. D'autre part, comme $\sum \cos(n\theta)$ diverge grossièrement, $R \leq 1$, d'où $R = 1$.

$\cos(n\theta)$ ne tend pas vers 0 car sinon, puisque $\cos(2n\theta) = 2\cos^2(n\theta) - 1$, on aboutirait à une absurdité par passage à la limite.

b) Si $0 < r < R_a$ et $0 < r' < R_b$ les suites $(a_n r^n)$ et $(b_n r'^n)$ sont bornées, donc $(a_n r^n b_n r'^n) = (a_n b_n (rr')^n)$ est bornée. Donc cf. I.A.3.1. on a $R_c \geq rr'$. Donc

$R_c \geq R_a R_b$. Si $a_n = b_n$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée si et seulement si la suite $(a_n^2 r^{2n})$ est bornée. Donc $R_c = R_a^2$. $\square$

4. Opérations et rayon

4.1. Théorème

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

(i) Si R est le rayon de convergence de la série somme, $R \geq \min(R_a, R_b)$.
Si $R_a \neq R_b$, $R = \min(R_a, R_b)$.

(ii) Si R' est le rayon de convergence de la série produit, $R' \geq \min(R_a, R_b)$.

(iii) Si ρ est le rayon de convergence de la série $\sum \lambda a_n$, $\rho = R_a$ si $\lambda \neq 0$.

Démonstration

(i) Si $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge absolument d'après le théorème sur la somme de séries absolument convergentes. Donc $R \geq \min(R_a, R_b)$.

Si $R_a < R_b$, pour z tel que $R_a < |z| < R_b$, $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente. Donc $R = \min(R_a, R_b)$.

(ii) Raisonnement analogue en utilisant le théorème sur le produit de séries absolument convergentes. $\square$

4.2. Remarques

a) Si $R_a = R_b$, on peut avoir $R > R_a$. Soit en effet, $a_n = 1$ et $b_n = -1$, alors $R_a = R_b = 1$ car $|a_n| = |b_n| = 1$ et $\sum z^n$ est de rayon 1, alors que $R = +\infty$.

b) Cas particulier : si $R_a = R_b$ et si les séries sont **disjointes**, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \cdot b_n = 0$, alors $R = R_a$. C'est le cas si les séries $\sum a_{2p+1} x^{2p+1}$ et $\sum a_{2p} x^{2p}$ ont même rayon de convergence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |a_n| + |b_n| = |a_n + b_n| \Rightarrow R_a \geq R$. D'où $R = R_a$.

4.3. Exemple

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \Rightarrow \frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n ; R = 1.$$

Solution

Par récurrence sur k . Le résultat est bien connu si $k = 0$ cf. séries géométriques.

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons le résultat vrai à l'ordre k . De la définition de la série entière produit, et du théorème précédent, on déduit que $R \geq 1$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$,

$$\frac{1}{(1-z)^{k+2}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \text{ où } \alpha_n = \sum_{p=0}^n \binom{p+k}{p}.$$

$$\text{Or } \binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p} - \binom{p+k}{p-1} \text{ si } p \geq 1 ; \text{ donc } \alpha_n = \binom{n+k+1}{n}$$

par télescopage. D'où le résultat par théorème de récurrence. $\square$

II. Propriétés de la somme

A. Continuité

1. Théorème 1

Une série entière est normalement donc uniformément convergente sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence.

Démonstration

Soit $r < R$. Pour tout z tel que $|z| \leq r$, $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n = \lambda_n$.

λ_n est indépendant de z et $\sum \lambda_n$ converge ; donc $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon r , *a fortiori* sur tout compact inclus dans D_R . En effet, un compact de $\mathbb{K}$ est un fermé et borné de $\mathbb{K}$; il est contenu dans un disque fermé de centre 0 et de rayon r . $\square$

2. Théorème 2

La somme d'une série entière de rayon $R > 0$ est continue sur le disque ouvert de convergence.

Démonstration

Conséquence du théorème de continuité des sommes des séries de fonctions. $\square$

3. Remarques

a. Une série entière de rayon $R > 0$ ne converge en général pas uniformément sur son disque ouvert de convergence.

Soit par exemple $\sum x^n$, on a $R = 1$ et $S(x) = \frac{1}{1-x}$ si $x \in]-1, 1[$.

$$\forall x \in]-1, 1[, |S(x) - S_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \Rightarrow \sup_{x \in]-1, 1[} |S(x) - S_n(x)| = +\infty.$$

b. Si $\sum |a_n| R^n$ converge, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon R et sa somme y est continue. En effet, pour z dans ce disque, $|a_n z^n| \leq |a_n| R^n$.

3. Théorème d'Abel radial

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

Démonstration non exigible. Un résultat plus général fait l'objet de l'exercice 22.

B. Intégration

Dans ce paragraphe $a_n \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Théorème et définition

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

$$(i) \forall x \in]-R, R[, \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

(ii) La série entière $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est dite déduite de $\sum a_n x^n$ par intégration terme à terme et a pour rayon de convergence R .

Démonstration

(i) Conséquence de la convergence normale de la série de fonctions $t \mapsto a_n t^n$ sur $[0, x] \subset]-R, R[$ et du théorème d'intégration des séries de fonctions continues sur un segment.

(ii) Application du théorème I.B.2. avec $b_n = \frac{a_n}{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{-1} a_n$. $\square$

2. Remarque

Les séries entières $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $\sum a_n x^n$ ont même intervalle ouvert de convergence mais peuvent avoir des comportements différents aux bornes de cet intervalle.

Par exemple $\sum \frac{x^n}{n+1}$ diverge, alors que $\sum \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ converge si $x = 1$.

3. Exemples

a. $\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n ; R = 1.$

b. $\forall x \in]-1, 1[, \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} ; R = 1.$

Il suffit d'appliquer le théorème précédent. Dans le cas a. $\sum (-1)^n x^n$ est une série géométrique de somme sur $] -1, 1[$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

d'où : $\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$

Dans le cas b), on trouve le résultat en partant de :

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

c. En déduire que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ est définie si $x \in]-1, 1[, f(0) = 1,$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \arctan \sqrt{|x|} \text{ si } x \in]-1, 0[\text{ et } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) \text{ si } x \in]0, 1[.$$

C. Dérivabilité

Dans ce paragraphe $a_n \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{R}$

1. Définition

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

(i) Sa série dérivée première est $\left(\sum (n+1)a_{n+1}x^n\right)_{n \geq 0} = \left(\sum n a_n x^{n-1}\right)_{n \geq 1}$

(ii) Sa série dérivée p -ième est :

$$\left(\sum \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n\right)_{n \geq 0} = \left(\sum n(n-1) \dots (n-p+1) a_n x^{n-p}\right)_{n \geq p}.$$

2. Théorème 1

Si $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, il en est de même de toutes ses séries dérivées.

Démonstration

$\sum a_n x^n$ se déduit de $\sum n a_n x^{n-1}$ par intégration terme à terme. Il suffit d'appliquer le théorème II.B.1. $\square$

3. Théorème 2

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S , S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in] -R, R[$,

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^p}{dx^p} (a_n x^n). \text{ Donc } a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$
Démonstration

Par récurrence à partir du théorème précédent. $\square$

4. Théorème 3

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs non nuls R, R' . Supposons $0 < R < R'$ et

$$\forall x \in] -R, R[, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \text{ Alors, pour tout } n \in \mathbb{N}, a_n = b_n.$$
Démonstration

$\forall x \in] -R, R[, \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n = f(x) = 0 \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}, a_n - b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 \right). \square$

III. Fonctions développables en série entière**A. Définitions****1. Définition**

$f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ définie au voisinage de 0 est dite développable en série entière en 0 – on dit f a un DSE en 0 – s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \neq 0$ et une boule ouverte V de centre 0 tel que :

$$\forall z \in V, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

2. Définition

$f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ définie au voisinage de z_0 est dite développable en série entière en z_0 si $g : z \mapsto f(z_0 + z)$ est développable en série entière en 0.

Exemple

$f : z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est développable en série entière en 0 car, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

3. Remarques

- Compte tenu de la définition 2. on se limitera dans la suite de ce chapitre à l'étude des fonctions développables en série entière en 0.
- L'ensemble des fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ développables en série entière en 0 est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définies au voisinage de 0.

B. Séries de Taylor

1. Définition

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. On appelle série de Taylor de f en 0, la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

De II.C.3. on déduit :

2. Théorème

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ a un DSE en 0, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, son DSE est unique. C'est la série de Taylor de f en 0.

3. Exemple de fonction non développable en série entière

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$. Nous avons montré dans le chapitre 6 que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$. La série de Taylor de f en 0 est la série nulle, donc il n'existe aucun intervalle ouvert de centre 0 où $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ puisque f ne s'annule qu'en 0.

4. Propriété

Si une fonction f a un DSE en 0, $\sum a_n z^n$, elle est paire (resp. impaire) si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ (resp. $a_{2n} = 0$).

Démonstration

Immédiate, compte tenu du fait que $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et que si par exemple f est paire, $f^{(2n+1)}$ est impaire pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

5. Théorème (une condition nécessaire et suffisante)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 est DSE en 0 si, et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration

Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt,$$

d'après le théorème de Taylor-Laplace. D'où le résultat. $\square$

C. Développements classiques

1. Fonction : $t \mapsto (1+t)^\alpha$

1.1. Théorème

$t \mapsto (1+t)^\alpha$ est développable en série entière en 0.

$$\forall t \in]-1, 1[, (1+t)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} t^n.$$

Démonstration

Soit $f_\alpha : t \mapsto (1+t)^\alpha$. $f_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(]-1, +\infty[, \mathbb{R})$.

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, il n'y a rien à prouver, c'est le binôme de Newton.

Sinon f_α est l'unique solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle (E) :

$(1+t)y' - \alpha y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.

En effet : $\forall t \in]-1, 1[$, $(1+t)y' - \alpha y = 0 \iff \frac{d}{dt}(f_{-\alpha} \cdot y)(t) = 0$.

Donc : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall t \in]-1, 1[$, $y(t) = C \cdot f_\alpha(t)$; $y(0) = 1 \iff C = 1$.

Cherchons les solutions de (E) DSE en 0.

S'il existe $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $t \in]-R, R[$, $R > 0$, alors $g \in \mathcal{C}^\infty(]-R, R[, \mathbb{R})$ et

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} (n a_n - (\alpha - n + 1) a_{n-1}) t^{n-1} = 0.$$

De l'unicité des coefficients du DSE, on déduit : $\forall n \geq 1$, $n a_n - (\alpha - n + 1) a_{n-1} = 0$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} a_0$ et $R = 1$ si $a_0 \neq 0$, car dans ce cas, les a_n sont tous non nuls puisque $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Comme $g(0) = a_0$,

$t \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} t^n$ est la seule solution de (E) sur $]-1, 1[$

DSE en 0 et prenant la valeur 1 en 0. Comme une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ où le coefficient de y' ne s'annule pas n'a qu'une solution qui prend une valeur donnée en un point de cet intervalle, le résultat est prouvé. $\square$

1.2. Application

Déterminons le DSE en 0 de la fonction arcsin

$$\forall x \in]-1, 1[, (\arcsin)'(x) = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)} x^{2n}.$$

Du théorème d'intégration des séries entières, on déduit :

$$\forall x \in]-1, 1[, \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}.$$

2. Fonction rationnelle

2.1. Théorème

Toute fonction rationnelle f non nulle, n'admettant pas 0 pour pôle a un DSE en 0. La série entière dont f est la somme a pour rayon de convergence le plus petit module des pôles dans $\mathbb{C}$.

Démonstration

Soit $f = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ fraction rationnelle irréductible dont les pôles distincts dans

$\mathbb{C}^*$ sont $(z_j)_{1 \leq j \leq k}$ où $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_k|$, $F(X) = E(X) + \sum_{j=1}^k \left(\sum_{r=1}^{n_j} \frac{\alpha_{j,r}}{(X-z_j)^r} \right)$

où $E \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_{j,r} \in \mathbb{C}$. Du DSE de $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^p}$ vu précédemment, on déduit que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, |z| < |a|, \frac{1}{(z-a)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p-1}{n} \frac{(-1)^p}{a^{n+p}} z^n$.

Des théorèmes sur les opérations sur les séries entières, on déduit que le rayon de convergence de la série entière de somme S obtenue est $R \geq |z_1| = \min_{1 \leq i \leq k} (R_i)$. Si $R > |z_1|$, la fonction S est continue en $z_1 \in D_R$, ce qui est absurde puisque $|f|$ n'a pas une limite finie en z_1 . Donc $R \leq |z_1|$ et par suite $R = |z_1|$. $\square$

2.2. Exemple

DSE en 0 de $f_\alpha : x \mapsto \arctan\left(\frac{1+x}{1-x} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right), \alpha \in]0, \pi[$.

On a déjà $f_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \mathbb{R})$.

$$f'_\alpha(x) = \frac{\sin \alpha}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{x - e^{i\alpha}} - \frac{1}{x - e^{-i\alpha}} \right] = \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{i\alpha}}{1 - xe^{i\alpha}} - \frac{e^{-i\alpha}}{1 - xe^{-i\alpha}} \right]$$

$$\forall x \in]-1, 1[, f'_\alpha(x) = \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+1)\alpha} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+1)\alpha} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin(n+1)\alpha.$$

D'où par théorème d'intégration des séries entières,

$$\forall x \in]-1, 1[, f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} x^n.$$

EXERCICES

1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$:

a. $a_n = \frac{\text{ch}(n)}{\text{sh}^2(n)}$, b. $a_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ c. $a_n = (1 + ne^{-n})^{n^2+1} - 1$,

d. $a_n = \arcsin\left(\frac{n+1}{1+n\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4}$, e. $a_n = \frac{1}{\sin(n\pi\sqrt{3})}$,

f. $a_n = \frac{na(na+1) \cdots (na+n-1)}{n!}, a > 0$.

On montrera que : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ si $x \geq 0$.

2. Soit $\sum a_n$ une série divergente à termes strictement positifs. On note :

$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. On suppose que $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(S_n)$. Déterminer les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum S_n z^n$.

3. Soit (a_n) une suite à termes positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\frac{a_n^2}{a_{n-1}a_{n+1}} - 1 \right) \right]$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Que dire si $\ell = 0$?

4. Déterminer le rayon de convergence et exprimer les sommes des séries entières suivantes à l'aide des fonctions usuelles :

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \sum (-1)^n n x^{2n+1}, & \text{b. } \sum \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)(2n+3)}, \\ \text{c. } \sum (\text{ch}(n)) x^n, & \text{d. } \sum \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{array}$$

5. Former les développements en série entière en 0 des fonctions définies par :

$$\begin{array}{ll} \text{a. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(5x)}{\sin(x)} & \text{si } \sin(x) \neq 0, \\ 5 & \text{sinon.} \end{cases} & \text{b. } f(x) = \ln(x^3 + 2x^2 + 2x + 1). \\ \text{c. } f(x) = \ln(1 + \sqrt{1+x}). & \text{d. } f(z) = \cos(z) \text{ch}(z), \quad z \in \mathbb{C} \text{ où} \\ \cos(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \text{ et } \text{ch}(z) = \cos(iz). \end{array}$$

6. Former le développement en série entière en 1 de la fonction arctan.

7. Soit (u_n) une suite complexe bornée. $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- Déterminer les rayons de convergence de $\sum \frac{u_n}{n!} x^n$ et $\sum \frac{S_n}{n!} x^n$?
- On note u et S leurs sommes. Former une relation entre u' , S et S' .
- Si la suite (S_n) converge vers ℓ , montrer que $(e^{-x} S(x)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. On prend $u_n = (-1)^n$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} S(x))$.

8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^x}$.

En déduire les valeurs de : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+2n}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n}$.

9. Calculer la somme de la série $\left(\sum \frac{1}{(n+1)(n-2)2^n} \right)_{n \geq 3}$.

10. Établir les égalités suivantes : a. $\int_0^1 \ln(x^2) \ln(1-x^2) \frac{dx}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}$,

$$\text{b. } \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad \text{c. } \int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

11. $a \in]0, 1[$; $u_n(x) = \sin(a^n x)$. Montrer que la somme S de la série de fonctions $\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que S est développable en série entière en 0 et donner ce développement. Existence des limites de S en $-\infty$ et $+\infty$.

12. a. Existence et calcul de $I_n = \int_{\mathbb{R}} t^{2n} \exp(-t^2) dt$.

b. Existence et calcul de $F(z) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2) \cos(tz) dt$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

13. a. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\text{ch}(tz)}{\text{ch}(t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*, |z| < 1$. On définit $\text{ch}(tz) = \frac{e^{tz} + e^{tz}}{2}$.

b. Montrer que dans ces conditions :

$$(i) \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{ch}(tz)}{\text{ch}(t)} dt = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{\text{ch}(t)} dt.$$

$$(ii) \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{ch}(tz)}{\text{ch}(t)} dt = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 - z^2} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \eta(2n+1) z^{2n}.$$

où η est la fonction $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^x}$.

14. Soit $R > 0$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour $|x| < R$. Alors S est développable en série entière au voisinage de $x_0 \in]-R, R[$. Plus précisément, pour tout $x \in]-R_1, R_1[$, on a : $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ avec $R_1 \geq R - |x_0|$.

15. a. Soit $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1+t^n}$. Montrer que $S \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$.

b. Montrer que : $\forall t \in]-1, 1[, S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+1}}{1-t^{k+1}}$.

c. En déduire que $S(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\ln(2)}{1-t}$.

16. a. Montrer que $\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$ où γ est la constante d'Euler.

b. En déduire que : $\gamma = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k)$.

17. a. Développement en série entière de la fonction arcsin.

b. Du calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\sin(t)) dt$ de deux façons, déduire que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

18. Soit $(\mathcal{H})$ l'équation différentielle : $y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = 0$. Montrer que si α et β sont développables en série entière sur $] -R, R[$ à valeurs complexes, alors $(\mathcal{H})$ a une unique solution y telle que $y(0) = u_0, y'(0) = u_1$ telle que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ pour $|x| < R$. On pourra raisonner par analyse-synthèse, noter

$\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ pour $x \in] -R, R[$ et montrer que si pour

$r \in]0, R[$, il existe $C = C(r) > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, (n+1)(n+2)|a_n| \leq \frac{C}{r^{n-1}}$ et $|b_n| \leq Cr^{-n}$, alors il existe $M = M(r) > 0$ tel que pour tout $n, |u_n| \leq Mr^{-n}$.

19. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $-\alpha \notin \mathbb{N}$. On note, pour $x \in]-1, 1[$, F_α la fonction définie par $F_\alpha : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x^2 \sin^2(t))^{-\alpha} dt$.

a. Montrer qu'il existe une série entière de somme S_α dont on précisera le rayon de convergence telle que : $\forall x \in]-1, 1[, F_\alpha(x) = S_\alpha(x)$.

b. Étude de la série entière aux bornes de l'intervalle de convergence.

On pourra utiliser la règle de Raabe-Duhamel vue en travail dirigé au chapitre 4.

20. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\sum |a_n|^2$ converge.

a. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction $f_p : t \mapsto \sum_{n=p}^{\infty} \frac{a_n}{n-t}$ est développable en série entière sur $] -p, p[$. Donner ce DSE.

b. Montrer que si $f_1(t) = 0$, pour $t \in]-1, 1[$, alors $a_n = 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

21. Soit $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

On pourra montrer que $u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)} u_n$.

22. Convergence radiale.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $|z_0| = R$ et si $\sum a_n z_0^n$ converge alors la restriction de la série entière au segment $[0, z_0]$ converge uniformément sur ce segment.

SOLUTIONS DES EXERCICES

1. a. Comme $\operatorname{sh}(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$ et $\operatorname{ch}(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$, on a $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2e^{-n}$.

La série géométrique $\sum e^{-n}x^n$ convergeant si, et seulement si, $|x| < e$, on déduit de I.B.2. que $R = e$.

b. $\sin(\arccos(1-x)) = \sqrt{1 - (1-x)^2} = \sqrt{2x - x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{2x}$. Donc $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2}n^{-1}$.
 $\sum \frac{x^n}{n}$ étant de rayon de convergence 1 d'après I.B.1, On a $R = 1$ d'après I.B.2.

c. Soit $b_n = (n^2+1)\ln(1+ne^{-n})$. Alors $b_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (n^2+1)(ne^{-n} + o(ne^{-n})) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^3e^{-n}$.
 Comme $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et $a_n = e^{b_n} - 1$, on a $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} b_n$. De I.B.2. On déduit que $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ et $\sum e^{-n}x^n$ ont même rayon de convergence $R = e$.

d. $\arcsin$ étant dérivable en $\frac{1}{\sqrt{2}}$, avec $\arcsin' \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \neq 0$, on déduit de la définition de la dérivabilité que : $\arcsin(x) - \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \underset{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sim} \sqrt{2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Donc $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}-1}{n\sqrt{2}}$. De I.B1. et I.B.2. on déduit que $R = 1$.

e. Comme $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\sin(n\pi\sqrt{3}) \neq 0$ si $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $|\sin(n\pi\sqrt{3})| \leq 1$, on a $|a_n| \geq 1$. Donc $R \geq 1$ d'après I.B.2. Cherchons à majorer $|a_n|$.

De la convexité et de l'impairité de $\sin$ on déduit : $|\sin(u)| \geq \frac{2}{\pi}|u|$ si $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $p - \frac{1}{2} < n\sqrt{3} < p + \frac{1}{2}$. (1)

Soit p ainsi choisi, on a $|n\pi\sqrt{3} - p\pi| < \frac{\pi}{2}$.

$|\sin(n\pi\sqrt{3})| = |\sin(n\pi\sqrt{3} - p\pi)| \geq \frac{2}{\pi}|n\pi\sqrt{3} - p\pi| = 2|n\sqrt{3} - p|$. Donc

$|a_n| \leq \frac{1}{2|n\sqrt{3} - p|} = \frac{n\sqrt{3} + p}{2(3n^2 - p^2)} \leq \frac{1}{2}(n\sqrt{3} + p) \leq n\sqrt{3} + \frac{1}{4}$ cf. (1) et $3n^2 - p^2 \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\alpha_n = n\sqrt{3} + \frac{1}{4}$. Comme $\alpha_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n\sqrt{3}$, la série entière $\sum \alpha_n x^n$ est de rayon de convergence 1 d'après I.B.1. et I.B.2. D'où $R \leq 1$ et finalement $R = 1$.

f. Comme $a_n > 0$ pour $n \geq 1$, $\ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{a}{k+na} \right) + \ln \left(a + \frac{n}{n+1} \right)$.

L'application du théorème de Taylor-Laplace à la fonction $\varphi : t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[0, x]$ si $x > 0$ donne : $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \int_0^x (x-t)\varphi''(t)dt$.

$$\forall x \geq 0, \ln(1+x) = x - \int_0^x \frac{(x-t)}{(1+t)^2} dt.$$

Comme $0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^x (x-t) dt = \frac{x^2}{2}$, l'indication est prouvée.

Donc, pour tout $n \geq 1$, $u_n - \frac{1}{2}v_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{a}{k+na}\right) \leq u_n$ où $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{k+na}$ et

$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a}{k+na}\right)^2$. Comme $0 \leq v_n \leq n \left(\frac{a}{na}\right)^2$, on a $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ par encadrement.

$u_n = \frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \int_0^1 \psi = a \ln\left(\frac{a+1}{a}\right)$ d'après le théorème sur les

sommes de Riemann, car $\psi : t \mapsto \frac{1}{a+t}$ est continue sur $[0, 1]$. On déduit, par

encadrement que : $\sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{a}{k+na}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \ln\left(\frac{a+1}{a}\right)$.

D'où $\ln\left(\frac{a+1}{a}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (a+1) \ln(a+1) - a \ln(a)$ et $R = \frac{a^a}{(a+1)^{a+1}}$ d'après I.B.1.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$. Donc $S_n > 0$.

$a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} o(S_n)$. Donc $S_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} S_{n-1}$ et $R_S = 1$ d'après I.B.1.

$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} o(S_n) \Rightarrow R_a \geq R_S = 1$ d'après I.B.2. Mais, comme la série $\sum a_n$ diverge, $R_a \leq 1$ d'après I.A.3.1. D'où $R_a = R_S = 1$.

3. • Si $\ell \neq 0$, $\frac{a_n^2}{a_{n-1}a_{n+1}} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$. (*)

Posons $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Alors (*) $\iff \frac{b_{n-1}}{b_n} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$. Comme $\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$,

(*) $\iff \ln(b_{n-1}) - \ln(b_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$. D'où $\ln(b_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\ell \ln(n)$ d'après le théorème de sommation des relations de comparaison.

Si $\ell > 0$, alors $\ln(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$, donc $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $R = +\infty$.

Si $\ell < 0$, alors $\ln(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, donc $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et $R = 0$.

• Si $\ell = 0$, supposons que : $\frac{a_n^2}{a_{n-1}a_{n+1}} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n \ln(n)}$, on montre comme précédemment que $\ln(b_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$. La série (de Bertrand) à termes positifs $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge. Donc $\ln(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ et $R = +\infty$.

Supposons que : $\frac{a_n^2}{a_{n-1}a_{n+1}} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{-1}{n \ln(n)}$, alors $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et $R = 0$.

Supposons enfin, que $a_n = \alpha^n$ où $\alpha > 0$, alors $\frac{a_n^2}{a_{n-1}a_{n+1}} - 1 = 0$ et $R = \frac{1}{\alpha}$.

En conclusion, si $\ell = 0$, on ne peut rien conclure en général.

4. a. Soit $u_n = (-1)^n n x^{2n+1}$ pour $n \geq 1$. Si $x \neq 0$, $u_n \neq 0$ et $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^2$. Du théorème de d'Alembert sur les séries réelles, on déduit que $\sum u_n$ converge si $0 \leq x^2 < 1$, diverge si $x^2 > 1$. D'où $R = 1$.

Pour $|t| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t}$. Donc, d'après le théorème de dérivation des

séries entières, on a : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n t^{n-1} = \frac{-1}{(1+t)^2}$ si $|t| < 1$. D'où :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^{2n+1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{2n} = -\frac{x^3}{(1+x^2)^2}.$$

b. Soit $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$. De I.B.1. on déduit que $R = 1$. Comme la série

entière $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$ a pour rayon de convergence 1, on a, pour $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$,

$$S(x) = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} x^n \right] = \frac{1}{2} [S_1(x) + S_2(x)] = \frac{x+1}{2x} S_1(x) - \frac{1}{2x}$$

$$\text{car } S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} x^n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} x^{m-1} = \frac{S_1(x) - 1}{x}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n} = \arctan(t) \text{ pour } |t| < 1, \text{ donc } S_1(x) = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \text{ si } x \in]0, 1[.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n = \ln(1+t) \text{ et } \ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n \text{ si } |t| < 1, \text{ donc :}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} t^{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \text{ et } S_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \left(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right) \text{ si } x \in]-1, 0[.$$

Comme $S(0) = \frac{1}{3}$, on a $S(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

c. $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$. D'où $R = \frac{1}{e}$ (cf. raisonnement de l'exercice 1.a.)

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right[, S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(ex)^n + \left(\frac{x}{e} \right)^n \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-ex} + \frac{1}{1-\frac{x}{e}} \right].$$

$$\text{Donc : } \forall x \in \left] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right[, S(x) = \frac{1 - x \operatorname{ch}(1)}{1 - 2x \operatorname{ch}(1) + x^2}.$$

d. Posons $a_n = \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!}$ et $u_n = a_n x^{2n+1}$. Appliquons, pour $x \neq 0$, la règle de

d'Alembert à la série réelle $\sum u_n$. $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{2n}{2n+1} x^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^2$, et la série réelle

$\sum |u_n|$ converge si $0 \leq x^2 < 1$ et diverge si $x^2 > 1$, et la série entière donnée a pour rayon de convergence $R = 1$ et pour somme S . cf. définition de R .

De l'égalité vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+3)a_{n+1} - 2(n+1)a_n = 0$ on déduit :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n \geq 0} (2n+3)a_{n+1} x^{2n+2} - \sum_{n \geq 0} (2n+2)a_n x^{2n+2} = 0.$$

$$\text{Or } \sum_{n \geq 0} (2n+3)a_{n+1} x^{2n+2} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n \geq 0} a_{n+1} x^{2n+3} \right) = \frac{d}{dx} (S(x) - a_0 x)$$

$$\text{et } \sum_{n \geq 0} (2n+2)a_n x^{2n+2} = x^2 \sum_{n \geq 0} (2n+1)a_n x^{2n} + \sum_{n \geq 0} a_n x^{2n+2} = x^2 S'(x) + xS(x).$$

Donc : $\forall x \in]-1, 1[, (1-x^2)S'(x) - xS(x) = 1$.

S est la solution sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $(1 - x^2)y' - xy = 1$ (*) qui prend la valeur 0 en 0. cf. théorème du cours de première année et que nous reverrons dans le chapitre 12.

$$\forall x \in] -1, 1[, (*) \iff \frac{d}{dx} \left(\sqrt{1 - x^2} \cdot y(x) \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Donc (*) $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in] -1, 1[, y(x) = (1 - x^2)^{-1/2} (\arcsin(x) + \lambda)$.

Comme $S(0) = 0$, pour tout $x \in] -1, 1[, S(x) = (1 - x^2)^{-1/2} \arcsin(x)$.

$$5. a. \frac{\sin(5x)}{\sin(x)} = \frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = \frac{1 - e^{10ix}}{1 - e^{2ix}} \cdot e^{-4ix} = e^{-4ix} (1 + e^{2ix} + e^{4ix} + e^{6ix} + e^{8ix})$$

$$\text{car } \frac{1 - q^5}{1 - q} = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 \text{ si } q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $f(x) = 1 + 2\cos(2x) + 2\cos(4x)$. Cette égalité est encore valable si $x \in \pi\mathbb{Z}$. D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} (1 + 2^{2n})}{(2n)!} x^{2n}$.

b. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1) > 0$ si, et seulement si, $x \in] -1, +\infty[$.
 $\forall x \in] -1, +\infty[, f(x) = \ln \left(\frac{(1+x)(1-x^3)}{(1-x)} \right)$.

Donc, pour tout $x \in] -1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où $a_{3p} = \frac{1 + (-1)^{p+1}}{3p} - \frac{1}{p}$ si $p \geq 1$;

$$a_{3p+1} = \frac{1 + (-1)^p}{3p+1} \text{ et } a_{3p+2} = \frac{(-1)^{p+1} + 1}{3p+2} \text{ si } p \in \mathbb{N}.$$

$$c. f \in \mathcal{C}^1(]-1, +\infty[, \mathbb{R}) \text{ et } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1+x}} = \frac{1}{2x} \left[1 - (1+x)^{-\frac{1}{2}} \right].$$

Comme, pour tout $x \in] -1, 1[, (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} (-1)^n x^n$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} n!} (-1)^{n-1} x^{n-1} \text{ pour } x \in] -1, 1[, \text{ et}$$

$$f(x) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} n! n} (-1)^{n-1} x^n \text{ pour } x \in] -1, 1[.$$

$$d. \forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{4} \left[e^{(1+i)z} + e^{(1-i)z} + e^{(-1+i)z} + e^{(-1-i)z} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \text{ où}$$

$$4a_n = (1+i)^n + (1-i)^n + (-1+i)^n + (-1-i)^n = 2\Re((1+i)^n + (-1-i)^n).$$

$$4a_n = 2(1 + (-1)^n) \Re((1+i)^n) = 2(1 + (-1)^n) (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

D'où $a_{4q} = (-1)^q 2^{2q}$ et $a_{4q+1} = a_{4q+2} = a_{4q+3} = 0$.

$$6. f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right].$$

$$\text{Posons } x = 1 + h. \text{ On a } f'(x) = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{1+h-i} - \frac{1}{1+h+i} \right].$$

$$\frac{1}{1+h-i} = \frac{1+i}{2} \cdot \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)h} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2} \right)^{n+1} (-1)^n h^n \text{ si } \left| \frac{1+i}{2} h \right| < 1.$$

Donc si $|h| < \sqrt{2}$, $f'(x) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1+i}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-i}{2} \right)^{n+1} \right] (-1)^n h^n$.

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Im n \left[\left(\frac{1+i}{2} \right)^{n+1} \right] (-1)^n h^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}} \sin \left((n+1) \frac{\pi}{4} \right) (-h)^n.$$

$$\text{Si } |x-1| < \sqrt{2}, f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{n\pi}{4} \right)}{n(\sqrt{2})^n} (1-x)^n.$$

7. a. (u_n) étant bornée $\frac{u_n}{n!} \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{n!}\right)$. La série entière $\sum \frac{u_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ d'après I.B.2. En effet, si $a_n = \frac{u_n}{n!}$ et $b_n = \frac{1}{n!}$, alors $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(b_n) \Rightarrow R_a \geq R_b$ et ici, $R_b = +\infty$.

(u_n) étant bornée, $S_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(n)$. Donc $\frac{S_n}{n!} \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)$. Par un raisonnement analogue au précédent, on montre que la série entière $\sum \frac{S_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

b. D'après les théorèmes du cours, on a u et S de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout

$$x \in \mathbb{R}, u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{(n-1)!} x^{n-1}; S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{(n-1)!} x^{n-1}.$$

Comme $u_n = S_n - S_{n-1}$ si $n \geq 1$, on a : $u'(x) = S'(x) - S(x)$.

c. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$ alors $|S_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |S(x) - \ell e^x| \leq \left| \sum_{n=0}^{n_0} \frac{(S_n - \ell)}{n!} x^n \right| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|S_n - \ell|}{n!} x^n \quad (1)$$

$$\forall x \geq 0, \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|S_n - \ell|}{n!} x^n \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{\varepsilon}{2} e^x. \quad (2)$$

n_0 étant fixé, la fonction $P : x \mapsto \sum_{n=0}^{n_0} \frac{(S_n - \ell)}{n!} x^n$ est polynomiale. Par croissances comparées, $P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$.

$$\text{Donc, il existe } A > 0 \text{ tel que pour tout } x \geq A, |P(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^x \quad (3)$$

On déduit de (1), (2) et (3) que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists A \in \mathbb{R}_+, \forall x \geq A, |S(x) - \ell e^x| \leq \varepsilon e^x$.
Donc, pour tout $x \geq A, |S(x)e^{-x} - \ell| \leq \varepsilon$. Autrement dit, $S(x)e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

Si $u_n = (-1)^n$, alors $S_{2p} = 1$ et $S_{2p+1} = 0$. Donc (S_n) diverge et cependant,

$$S(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} = \text{ch}(x) \Rightarrow S(x)e^{-x} = \frac{1}{2} [1 + e^{-2x}] \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Remarque : voir le travail dirigé intitulé « Comportement au bord »

8. Si $x > 0$, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+t^x}$ est continue sur $[0, 1]$. Pour tout $t \in [0, 1[$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{nx}. \text{ La suite } (f_n) \text{ de fonctions continues sur } [0, 1], \text{ donc intégrables}$$

sur $[0, 1[$ définies par $f_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{kx}$ converge simplement vers f sur $[0, 1[$.

$$\forall t \in [0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(t)| = \left| \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{x(n+1)}}{1 + t^x} \right| \leq \frac{1 + t^{(n+1)x}}{1 + t^x} \leq 1.$$

La fonction $t \mapsto 1$ étant intégrable sur $[0, 1[$ et positive, on déduit du théorème de convergence dominée que $\int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt$.

$$\text{Comme } \int_0^1 f_n(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{kx} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1 + kx}, \text{ on a : } \int_0^1 f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 + kx}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 + 2k} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{4} \text{ et } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 + 3k} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^3} = \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

à l'aide d'une calculatrice.

$$9. \frac{1}{(n+1)(n-2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1} \right). \text{ Comme la série entière } \sum \frac{x^n}{n} \text{ converge}$$

$$\text{sur }]-1, 1[, \text{ on a : } \forall x \in [0, 1[, \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{n=3}^{\infty} t^n dt = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t^3}{1-t} dt.$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1 + \frac{\ln(1-x)}{x} \right).$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x^2 \ln(1-x). \text{ Si } f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n, \text{ alors :}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + 1 + \left(\frac{1}{x} - x^2 \right) \ln(1-x) \right]. \text{ D'où } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{12} - \frac{7}{12} \ln(2).$$

$$10. a. \text{ Soit } f(x) = \frac{\ln(x^2) \cdot \ln(1-x^2)}{x^2} \text{ si } x \in]0, 1[.$$

$$\forall x \in]0, 1[, f(x) = \sum_{n=1}^n f_n(x) \text{ où } f_n(x) = -\frac{x^{2(n-1)}}{n} \ln(x^2) \text{ si } x \in]0, 1[.$$

Les fonctions f_n sont continues sur $]0, 1[$ et à valeurs positives. Elles sont intégrables sur $]0, 1[$ car $f_0(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o(x^{-\frac{1}{2}})$ et $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ si $n \geq 1$ par croissances

comparées. Par intégration par parties, on trouve que $\int_0^1 f_n = \frac{2}{n(2n-1)^2}$:

terme général d'une série convergente par comparaison à une série de Riemann. Du théorème d'intégration des séries de fonctions positives et intégrables sur un intervalle on déduit que, puisque $\sum \int_0^1 f_n$ converge, on a $f \in \mathcal{L}^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$; et

dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f$. D'où le résultat.

$$b. \text{ Posons } f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \text{ si } x > 0. \text{ On peut écrire, puisque } 0 < e^{-x} < 1,$$

$$f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-(n+1)x}. \text{ Les fonctions } f_n \text{ définies sur }]0, +\infty[\text{ par}$$

$$f_n(x) = x^2 e^{-(n+1)x} \text{ sont continues sur }]0, +\infty[, \text{ à valeurs positives. Comme } \Gamma(3) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = 2, \text{ par le changement de variable affine } t = (n+1)x$$

on a : $\Gamma(3) = (n+1)^3 \int_0^{+\infty} f_n$. Donc $f_n \in \mathcal{L}^1(]0, +\infty[)$ et l'on conclut comme à l'exercice a.

c. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{-x} = \exp(-x \ln(x))$ si $x \neq 0$ et par 1 si $x = 0$ est continue sur $[0, 1]$. Donc f est intégrable sur le segment $[0, 1]$. Comme $\exp$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on peut écrire : $\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x)$

où la suite de fonctions (u_n) est définie par $u_0(x) = 1$ pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \geq 1, u_n(x) = \frac{(-x \ln(x))^n}{n!}$ si $x \in]0, 1]$ et $u_n(0) = 0$.

La fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = -x \ln(x)$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$ est continue sur le segment $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$. Donc : $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [0, 1], |\varphi(x)| \leq M$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], |u_n(x)| \leq \frac{M}{n!}$.

La série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$, *a fortiori* uniformément sur $[0, 1]$. Du théorème d'intégration des séries de fonctions continues sur un segment de $\mathbb{R}$,

on déduit que : $I = \int_0^1 f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J_n$ où $J_n = \int_0^1 x^n (-\ln(x))^n dx$.

Le changement de variable $t = -\ln(x)$ étant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, 1]$ sur $[0, +\infty[$, on a : $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} t^n dt$. Par le changement de variable affine

$u = (n+1)t$, on obtient $J_n = \frac{\Gamma(n+1)}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$.

D'où : $I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour $k \geq 1$, $u_n^{(k)}(x) = a^{nk} \sin\left(a^n x + \frac{k\pi}{2}\right)$.

Pour tout $(k, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, $|u_n^{(k)}(x)| \leq (a^k)^n$ et $|u_n(x)| \leq a^n |x|$.

Donc $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \geq 1$, $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement *a fortiori* uniformément sur $\mathbb{R}$. D'après un corollaire du théorème de dérivation des séries de fonctions, S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $S^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)}$.

Du développement en série entière de la fonction $\sin$ on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w_{n,k} \text{ où } w_{n,k} = \frac{a^{n(2k+1)} x^{2k+1} (-1)^k}{(2k+1)!}.$$

Pour tout $n \geq 0$, la série $(\sum |w_{n,k}|)_{k \geq 0}$ converge et a pour somme $v_n = \operatorname{sh}(a^n |x|)$.

La série $(\sum v_n)_{n \geq 0}$ converge car $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a^n |x|$ et $a \in]0, 1[$. Donc la suite double $(w_{n,k})$ est sommable et d'après le théorème d'interversion des sommations, on a :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^{n(2k+1)} \right) \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(1 - a^{2k+1})(2k+1)!}.$$

Ceci étant vrai pour tout x réel, S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Notons que $S(x) - S(ax) = \sin(x)$. Si la fonction S avait une limite en $\pm\infty$ la fonction sinus en aurait une : absurde.

12. a. $f : t \mapsto t^{2n} \exp(-t^2)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $f(t) \underset{|t| \rightarrow +\infty}{=} o(t^{-2})$ donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par une intégration par parties facile, on a en posant $u(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$ et $v(t) = t^{2n-1}$ la relation : $\forall n \geq 1, I_n = \frac{2n-1}{2} I_{n-1}$.

D'où par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$, car $I_0 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

b. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}, F(t) = \exp(-t^2) \cos(tz) = \sum_{n \geq 0} u_n(t)$ où $u_n(t) = \frac{(-1)^n (tz)^{2n}}{(2n)!} e^{-t^2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\int_{\mathbb{R}} |u_n(t)| dt = \frac{|z|^{2n}}{(2n)!} I_n = \frac{|z|^{2n}}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$. Donc

la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} |u_n|$ converge et a pour somme $\sqrt{\pi} \cdot \exp\left(\frac{|z|^2}{4}\right)$. D'un théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle, on déduit que $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

$$\int_{\mathbb{R}} F = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \geq 0} u_n(t) dt = \sum_{n \geq 0} \int_{\mathbb{R}} u_n(t) dt = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} I_n = \sqrt{\pi} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2^{2n} n!}.$$

Donc : $\int_{\mathbb{R}} F = \sqrt{\pi} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)$.

13. a. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{\text{ch}(tz)}{\text{ch}(t)}$ est élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$|f(t)| \leq \frac{\text{ch}(|tz|)}{\text{ch}(t)}$ et $\frac{\text{ch}(|tz|)}{\text{ch}(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t(1-|z|)} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $|z| < 1$ et par croissances comparées. Comme f est paire elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} f = 2 \int_{\mathbb{R}_+} f$.

b. $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ où $f_n(t) = \frac{(tz)^{2n}}{(2n)! \text{ch}(t)}$.

$f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $|f_n(t)| = \frac{(t|z|)^{2n}}{(2n)! \text{ch}(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(t|z|)^{2n} e^{-t}}{2(2n)!} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Les fonctions f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et

$\int_{\mathbb{R}_+} |f_n| = \frac{|z|^{2n}}{(2n)!} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{t^{2n}}{\text{ch}(t)} dt \leq 2 \frac{|z|^{2n}}{(2n)!} \int_{\mathbb{R}_+} t^{2n} e^{-t} dt = 2|z|^{2n}$ car $\Gamma(2n+1) = (2n)!$

et $\text{ch}(t) > \frac{e^t}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $|z| < 1$, $\sum_{n \geq 0} \int_{\mathbb{R}_+} |f_n|$ converge. D'un théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle, on déduit que :

$\int_{\mathbb{R}_+} f = \sum_{n \geq 0} \int_{\mathbb{R}_+} f_n = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{t^{2n}}{\text{ch}(t)} dt$, d'où (i).

Montrons (ii). Si $t \in]0, +\infty[$, $\frac{\text{ch}(tz)}{\text{ch}(t)} = \frac{2 \text{ch}(tz) e^{-t}}{1 + e^{-2t}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)$ où les fonctions

g_n sont définies par $g_n(t) = (-1)^n \text{ch}(tz) e^{-(2n+1)t}$ si $t \in [0, +\infty[$. Les fonctions g_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

$\forall t \geq 0, |g_n(t)| \leq \text{ch}(|z|t) e^{-(2n+1)t} \leq \frac{1}{2} e^{-(2n+1-|z|)t}$

Comme $|z| < 1$, on a donc $g_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{-2})$. D'où $g_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$.

Soit $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(t) = \operatorname{ch}(tz) \sum_{k=0}^{n-1} e^{-(2k+1)t} = \frac{1 - (-1)^n e^{-2nt}}{1 + e^{-2t}} \operatorname{ch}(tz) e^{-t}$.

Pour $n \geq 1$ et $t \geq 0$, $e^{-2nt} \leq e^{-t}$. Donc $|S_n(t)| \leq |\operatorname{ch}(tz)| e^{-t} = g(t)$.

Comme à la question a. on montre que $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+ \mathbb{R}_+)$. La suite (S_n) convergeant simplement vers f sur $]0, +\infty[$, on déduit du théorème de convergence dominée

que : $\int_{\mathbb{R}_+} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+} g_n$. Notons $J_n = \int_{\mathbb{R}_+} g_n$. On a :

$$J_n = \frac{(-1)^n}{2} \int_{\mathbb{R}_+} (e^{-(2n+1-z)t} + e^{-(2n+1+z)t}) dt = \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{1}{2n+1-z} + \frac{1}{2n+1+z} \right].$$

$$\text{D'où : } \int_{\mathbb{R}} f = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 - z^2}.$$

$$\frac{(2k+1)}{(2k+1)^2 - z^2} = \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{2k+1}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2k+1)^{2n+1}} \text{ car } \left| \frac{z}{2k+1} \right| < 1.$$

$$\text{Donc } \int_{\mathbb{R}} f = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,k} \text{ où } u_{n,k} = \frac{(-1)^k z^{2n}}{(2k+1)^{2n+1}}.$$

Pour tout $n \geq 1$, la série $(\sum |u_{n,k}|)_{k \geq 0}$ converge par comparaison à une série de

$$\text{Riemann et sa somme est } v_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{(2k+1)^{2n+1}} \leq |z|^{2n} \zeta(2n+1) \leq |z|^{2n} \zeta(2).$$

Comme $|z| < 1$, la série $\sum v_n$ converge. On déduit du théorème de convergence des séries doubles, que $(\sum u_{n,k})_{n \geq 1, k \geq 0}$ converge absolument et que :

$$\int_{\mathbb{R}} f = 4 \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,0} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} = 4\eta(1) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \eta(2n+1) z^{2n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \eta(2n+1) z^{2n}.$$

14. Comme $|x_0| < R$, $\frac{S^{(p)}(x_0)}{p!} = \sum_{q=p}^{\infty} \frac{q!}{p!(q-p)!} a_q x_0^{q-p}$. Soit x réel et tel que

$$|x - x_0| < R - |x_0|. \text{ Montrons que } \left(\sum \frac{S^{(p)}(x_0)}{p!} (x - x_0)^p \right)_{p \geq 0} \text{ converge.}$$

Montrons que la série double définie par $u_{p,q} = \frac{q!(x - x_0)^p a_q x_0^{q-p}}{p!(q-p)!}$ si $q \geq p$ et $u_{p,q} = 0$ si $q < p$ est absolument convergente.

Si $q \geq p$, $|u_{p,q}| = \binom{q}{p} |a_q| |x - x_0|^p |x_0|^{q-p}$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, la série $(\sum |u_{p,q}|)_{p \geq 0}$

converge et a pour somme $v_q = \sum_{p=0}^q \binom{q}{p} |a_q| |x - x_0|^p |x_0|^{q-p} = |a_q| (|x - x_0| + |x_0|)^q$.

$v_q = |a_q| r^q$ où $r = |x - x_0| + |x_0| \in]0, R[$. Donc la série $\sum v_q$ converge car R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. D'après le théorème d'interversion des sommations des séries doubles, $\sum u_{p,q}$ est absolument conver-

gente et $\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}$.

Comme $\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^p}{p!} \sum_{q=p}^{\infty} \frac{q! a_q x_0^{q-p}}{(q-p)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^p}{p!} S^{(p)}(x_0)$ et

$$\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^q u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty} a_q \sum_{p=0}^q \binom{q}{p} (x-x_0)^p x_0^{q-p} = \sum_{q=0}^{\infty} a_q (x-x_0+x_0)^q.$$

Donc : $\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty} a_q x^q = S(x)$. D'où le résultat.

15. a. Les fonctions u_n définies par $u_n(t) = \frac{t^n}{1+t^n}$ sont continues sur $] -1, 1[$. Soit $a \in]0, 1[$. Pour tout $t \in [-a, a]$, $|1+t^n| \geq |1-|t|^n| = 1-|t|^n \geq 1-a$. Donc, pour tout $t \in [-a, a]$, $|u_n(t)| \leq \frac{a^n}{1-a} = \lambda_n$. Comme λ_n est indépendant de t et comme $\sum \lambda_n$ est une série géométrique convergente, $\sum u_n$ converge normalement *a fortiori* uniformément sur tout compact inclus dans $] -1, 1[$. D'après le théorème de continuité des sommes des séries de fonctions, $S \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$.

b. Si $|t| < 1$, $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}$ où $u_{n,k} = (-1)^k t^{n(k+1)}$.

Pour tout $n \geq 1$ la série $(\sum |u_{n,k}|)_{k \geq 0}$ converge et a pour somme $v_n = \frac{|t|^n}{1-|t|^n}$.

Comme $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |t|^n$, la série à termes réels positifs $\sum v_n$ converge. D'après le théorème de Fubini pour les séries doubles, $(\sum u_{n,k})_{n \geq 1, k \geq 0}$ est absolument

convergente et $S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+1}}{1-t^{k+1}}$ (cf. séries géométriques).

c. $\forall t \in [0, 1[$, $(1-t)S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ où $f_k(t) = \frac{(-1)^k t^{k+1}}{1+t+\dots+t^k}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, $f_k(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Pour t fixé dans $[0, 1[$, la série $\sum f_k(t)$ est une série alternée qui converge avec le théorème spécial. En effet, $|f_k(t)| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ car $\sum f_k(t)$ converge ; $|f_{k+1}(t)| \leq |f_k(t)|$ car : $0 \leq t < 1 \Rightarrow 0 < 1+t+\dots+t^k \leq 1+t+\dots+t^k+t^{k+1}$ et $t^{k+2} \leq t^{k+1}$.

Donc : $\left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(t) \right| \leq |f_n(t)| \leq \frac{1}{n+1}$ si $t \in [0, 1[$ puisque $1+t+\dots+t^n \geq (n+1)t^{n+1}$.

Donc la suite de fonctions $(\sum_{k=n}^{\infty} f_k)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1[$ i.e. la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 1[$. L'application du théorème de la double limite donne :

$$(1-t)S(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k} = \ln(2).$$

16. a. $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$ où $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

Comme $\sum_{k=1}^n (\ln(k) - \ln(k+1)) = -\ln(n+1)$ par télescopage des termes, on a :

$\gamma_n = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right]$. D'où le résultat.

b. Pour tout $x \in]-1, 1]$, $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$. (1)

Ce résultat a été établi dans ce chapitre pour $x \in]-1, 1[$ et $\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

a déjà été vu à au moins deux reprises dans ce cours. D'une part dans le chapitre 4, d'autre part dans la remarque qui suit le théorème d'intégration des séries de fonctions de signe quelconque dans le chapitre précédent. Il sera encore établi dans le travail dirigé qui suit et qui s'intitule : « Comportement au bord. » Donc pour

tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k}$.

D'où : $\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} u_{n,k}$ où $u_{n,k} = \frac{(-1)^k}{kn^k}$.

Pour tout $n \geq 2$, $(\sum |u_{n,k}|)_{k \geq 2}$ converge et a pour somme $v_n = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$.

Comme $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$, la série $(\sum v_n)_{n \geq 2}$ converge. D'après le théorème de Fubini pour les séries doubles, $(\sum u_{n,k})_{n \geq 2, k \geq 2}$ est absolument convergente et :

$$\gamma - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} u_{n,k}.$$

Or $\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (\zeta(k) - 1)$. D'où le résultat.

17. a. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$ d'après III.C.2.

de ce chapitre. D'après la formule de Stirling, $a_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^{3/2} \sqrt{\pi}}$.

Donc la série de fonctions $\sum a_n x^{2n+1}$ converge normalement sur $[-1, 1]$. Sa somme est continue sur $[-1, 1]$ d'après le théorème de continuité des sommes des séries de

fonctions continues. D'où : $\forall x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$.

b. Si $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $t = \arcsin(\sin(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ où $u_n(t) = a_n (\sin(t))^{2n+1}$.

Comme, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|u_n(t)| \leq a_n$, la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge normalement *a fortiori* uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on déduit du théorème d'intégration des séries de fonctions continues sur un segment que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\sin(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t) dt.$$

En tant qu'intégrale de Wallis, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t) dt = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

Donc : $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. Or $\zeta(2) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Donc $\frac{3}{4} \zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}$ et $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

18. Supposons qu'il existe y solution de $(\mathcal{H})$ telle que $y(0) = u_0$ et $y'(0) = u_1$.

Posons $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ pour $|x| < R$. D'après un théorème sur les séries entières,

$$y \in \mathcal{C}^\infty(]-R, R[, \mathbb{C}), y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)u_{n+1}x^n \text{ et } y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)u_{n+2}x^n.$$

$$y''(x) + \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n \text{ où}$$

$$\lambda_n = (n+2)(n+1)u_{n+2} + \sum_{p=0}^n (n-p+1)u_{n-p+1}a_p + \sum_{p=0}^n u_{n-p}b_p.$$

De l'unicité des coefficients du développement en série entière de la fonction nulle, on déduit que $\lambda_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $r \in]0, R[$. Comme $\sum (n+1)(n+2)a_n x^{n-1}$ et $\sum b_n x^n$ convergent absolument pour $x = r$, il existe $C = C(r) > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)(n+2)|a_n| \leq \frac{C}{r^{n-1}}$ et $|b_n| \leq Cr^{-n}$. Comme $\lambda_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)(n+2)|u_{n+2}| \leq C \sum_{p=0}^n \frac{(n-p+1)|u_{n-p+1}|}{(p+1)(p+2)r^{p-1}} + \sum_{p=0}^n |u_{n-p}| \frac{C}{r^p}.$$

Supposons qu'il existe $M(r) > 0$ tel que, pour $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $|u_k| \leq M(r)r^{-k}$. Alors

$$(n+1)(n+2)|u_{n+2}| \leq \frac{CM(r)}{r^n} \left[\sum_{p=0}^n \frac{(n-p+1)}{(p+1)(p+2)} + (n+1) \right] \leq 2CM(r)(n+1)r^{-n}$$

$$\text{car } \sum_{p=0}^n \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{(p+1)} - \frac{1}{p+2} \right) = 1 - \frac{1}{n+2} \leq 1.$$

Donc $|u_{n+2}| \leq \frac{2CM(r)r^{-n}}{(n+2)}$ sera inférieur ou égal à $M(r)r^{-n-2}$ si $\frac{2C}{n+2} \leq \frac{1}{r^2}$ ce qui est vrai si $n \geq n_0(r)$ ($= E[2Cr^2]$ par exemple).

On suppose dans l'hypothèse de récurrence que $M(r)$ est choisi tel que, pour tout $k \in \llbracket 0, n_0(r) + 1 \rrbracket$, $|u_k| \leq M(r)r^{-k}$ et l'on a, par théorème de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M(r)r^{-n}.$$

D'où le résultat, ce qui constitue un théorème d'existence globale de solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{H})$.

19. a. Soit x fixé dans $] -1, 1[$. Pour tout $u \in] -1, 1[$, $(1+u)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n u^n$ où $\lambda_0 = 1$ et $\lambda_n = \frac{(-\alpha)(-\alpha+1) \cdots (-\alpha-n+1)}{n!} u^n$ si $n \geq 1$.

Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|x^2 \sin^2(t)| \leq x^2 < 1$. Donc $(1 - x^2 \sin^2(t))^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ où

$$f_n(t) = \lambda_n (-x^2 \sin^2(t))^n. \text{ Donc } |f_n(t)| \leq x^{2n} |\lambda_n| = \frac{x^{2n}}{n!} |\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)|.$$

Comme $-\alpha \notin \mathbb{N}$, $\lambda_n \neq 0$. Donc, si $x \neq 0$, $\left| \frac{\lambda_{n+1} x^{2n+2}}{\lambda_n x^{2n}} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^2 \in [0, 1[$.

D'après la règle de d'Alembert pour les séries réelles, la série $\sum |\lambda_n| x^{2n}$ converge. Donc la série $\sum f_n$ converge normalement *a fortiori* uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Du

théorème d'intégration des séries de fonctions continues sur un segment, on déduit que : $F_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (-x^2)^n I_{2n}$ où I_{2n} est l'intégrale de Wallis

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t) dt = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$, $F_\alpha(x) = S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ où $a_n = (-1)^n \lambda_n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$ si

$n \geq 1$ et $a_0 = \frac{\pi}{2}$. Si $x \neq 0$, $\left| \frac{a_n x^{2n}}{a_{n-1} x^{2(n-1)}} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^2$. D'après la règle de d'Alembert pour les séries réelles, la série $\sum a_n x^{2n}$ converge si $x^2 < 1$ et diverge si $x^2 > 1$. Donc la série entière $\sum a_n x^{2n}$ est de rayon de convergence égal à 1.

b. Étude de la série entière en 1 et -1. Si $n > |\alpha - 1|$. On a a_n de signe constant.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{\alpha+n}{1+n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{\frac{3}{2} - \alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (*) \text{ D'après la règle de}$$

Raabe-Duhamel, il existe $K > 0$ tel que $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{K}{n^{\frac{3}{2}-\alpha}}$. (**)

• Si $\alpha < \frac{1}{2}$, la série $\sum a_n$ converge absolument. Donc $\sum a_n x^n$ converge en 1 et -1.

• Si $\alpha \geq \frac{3}{2}$, la série $\sum |a_n|$ diverge grossièrement d'après (**). Donc $\sum a_n x^n$ diverge en 1 et -1.

• Si $\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{2}$, la série $\sum |a_n|$ diverge mais $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. D'après (*), $(|a_n|)$ décroît si n est assez grand. Donc $\sum a_n x^n$ converge -1 et diverge en 1.

20. a. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $2|xy| \leq x^2 + y^2$. D'où : $2 \left| \frac{a_n}{n-t} \right| \leq |a_n|^2 + \frac{1}{|n-t|^2}$.

Donc la série $\left(\sum_{n \geq p} \frac{a_n}{n-t} \right)$ converge quel que soit $p \geq 1$ et $t \in]-p, p[$.

Pour $n \geq 1$ et $|t| < n$, $\frac{a_n}{n-t} = \frac{a_n}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{n^k}$.

Donc, si $t \in]-p, p[$, $f_p(t) = \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}$ où $u_{n,k} = \frac{a_n t^k}{n^{k+1}}$.

• Pour tout $n \geq p$, $\left(\sum_{k \geq 0} |u_{n,k}| \right)_{k \geq 0}$ converge et a pour somme $v_n = \frac{|a_n|}{n - |t|}$.

• $\left(\sum v_n \right)_{n \geq p}$ converge et a pour somme $f_p(|t|)$.

Du théorème de Fubini on déduit que la série double $\left(\sum u_{n,k} \right)_{n \geq p, k \geq 0}$ est abso-

lument convergente et que $f_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=p}^{\infty} \frac{a_n}{n^{k+1}} \right) t^k$ si $t \in]-p, p[$.

b. Si les a_n sont non tous nuls, soit $N = \min\{n \mid a_n \neq 0\}$. On a $f_N(t) = f_1(t)$ si $t \in]-1, 1[$. Si f_1 est nulle sur $]-1, 1[$ on a $f_N^{(k)}(0) = 0$ pour tout k (cf. série de Taylor). D'où $f_N = 0$. Donc, pour $t \in]-N, N[$, $0 = \frac{a_N}{N-t} + f_{N+1}(t)$ est impossible puisque f_{N+1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-N-1, N+1[$.

21. Montrons d'abord l'indication de l'énoncé.

$$\begin{aligned}
 (2n+2)u_{n+1} &= (2n+2) + 2 \sum_{k=0}^n \frac{k!(n+1-k)!}{n!}, \\
 &= (2n+2) + \sum_{k=0}^n \frac{k!(n+1-k)!}{n!} + \sum_{k=0}^n \frac{k!(n+1-k)!}{n!}, \\
 &= (2n+2) + \sum_{k=0}^n \frac{k!(n-k)!}{n!} (n+1-k+k+1), \\
 &= (2n+2) + (n+2)u_n.
 \end{aligned}$$

Comme l'application $\left[0, \left[\frac{n}{2}\right]\right] \rightarrow \mathbb{N}, k \mapsto \binom{n}{k}$ est croissante, on a, pour tout

$$n \geq 2, \quad 2 \leq u_n \leq 2 + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq 2 + \frac{2}{n} + \frac{2(n-3)}{n(n-1)}.$$

Par encadrement, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$. D'après I.B.2. on a : $R = 1$.

De : $\forall n \in \mathbb{N}, 2(n+1)u_{n+1} = 2(n+1) + (n+2)u_n$

on déduit : $\forall x \in]-1, 1[, 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)u_{n+1}x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)u_n x^n = 0$.

D'où : $\forall x \in]-1, 1[, (2-x)S'(x) - 2S(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$.

S est la solution sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$(2-x)y' - 2y = \frac{2}{(1-x)^2}$. (*) qui prend la valeur 1 en 0.

$$(*) \iff \frac{d}{dx} \left((2-x)^2 y(x) \right) = \frac{2(2-x)^2}{(1-x)^2} = 2 \left[\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} + 1 \right].$$

Donc : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1, 1[, (2-x)^2 S(x) = 2 \ln(1-x) + \frac{2(2-x)}{1-x} + C$.

Comme $S(0) = 1, S(x) = \frac{\ln(1-x)^2}{(2-x)^2} + \frac{2}{(1-x)(2-x)}$.

22. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z_0^k, (R_n)_n$ converge vers 0.

$\forall t \in [0, 1]$ si $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ on a, en effectuant une transformation d'Abel :

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k t^k z_0^k = \sum_{k=n}^{n+p} t^k (R_k - R_{k+1}) = t^n R_n + \sum_{k=n+1}^{n+p} (t^k - t^{k-1}) R_k - t^{n+p} R_{n+p+1}$$

d'où, quand $p \rightarrow \infty, \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k t^k z_0^k \right| \leq |R_n| + (1-t) \left(\sup_{k \geq n+1} |R_k| \right) \sum_{k=n}^{\infty} t^k$ puis

$\left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k t^k z_0^k \right| \leq 2 \sup_{k \geq n} |R_k|$, ce qui prouve la convergence uniforme annoncée.

TRAVAUX DIRIGÉS

• Théorème de Bernstein

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$, à valeurs réelles avec :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times] -1, 1[, \quad f^{(2n)}(x) \geq 0.$$

On considère $g : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(2n)} \geq 0$ sur $[0, 1[$. En déduire qu'il en va de même pour $g^{(n)}$.

2. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

a. Si $\varphi_n : x \mapsto x^{-2n-1} \left[g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \right]$, montrer que φ_n est croissante et positive sur $]0, 1[$.

b. Si $x \in [0, 1[$ et $a \in]x, 1[$, en déduire la double inégalité :

$$0 \leq g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \leq \left(\frac{x}{a} \right)^{2n+1} g(a).$$

c. En déduire que, sur $] -1, 1[$, g est somme de sa série de Taylor en 0 :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

3. a. Si $|x| < 1$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer : $|h^{(2n)}(x)| \leq g^{(2n)}(x)$.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in] -1, 1[$:

$$\left| h(x) - \sum_{k=0}^n \frac{h^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right| \leq g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}.$$

c. Montrer alors le **théorème de Bernstein** : si pour $(n, x) \in \mathbb{N} \times] -1, 1[$, $f^{(2n)}(x) \geq 0$ alors f est somme de sa série de Taylor en 0 sur $] -1, 1[$.

4. Montrer que $\tan$ est développable en série entière sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Solution

Notons que g et h sont respectivement paire et impaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}$ et $h^{(n+1)}$ ont même parité que n . D'où, pour $n \in \mathbb{N}$, $g^{(2n+1)}(0) = h^{(2n)}(0) = 0$.

$$1. \quad \forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0, 1[, \quad g^{(2n)}(x) = \frac{f^{(2n)}(x) + f^{(2n)}(-x)}{2} \geq 0.$$

Si n est impair on a $g^{(n)'} \geq 0$ sur $[0, 1[$ donc $g^{(n)}$ croît avec $g^{(n)}(0) = 0$.

En résumé : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)} \geq 0$ sur $[0, 1[$.

2. a. La formule de Taylor-Laplace donne, sur $]0, 1[$,

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 (1-u)^{2n} g^{(2n+1)}(ux) du \geq 0 \text{ d'après 1.}$$

Pour tout u dans $[0, 1]$, $x \mapsto g^{(2n+1)}(ux)$ croît donc φ_n croît.

b. Le cas $x = 0$ est clair. Si $0 < x < a < 1$ on a $\varphi_n(x) \leq \varphi_n(a)$ d'où

$$g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \leq \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} \left[g(a) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} a^{2k} \right] \text{ d'où}$$

$$0 \leq g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \leq g(a) \times \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} \text{ car les } g^{(2k)}(0)a^{2k} \text{ sont positifs.}$$

c. Soit $x \in]-1, 1[$, $g(x) = g(|x|)$. Choisissons a dans $] |x|, 1[$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$$\text{Donc } g(|x|) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} |x|^{2k} \text{ et, par parité : } \forall x \in]-1, 1[, g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

3. a. Si $(n, x) \in \mathbb{N} \times]-1, 1[$, comme $f^{(2n)}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,

$$|h^{(2n)}(x)| = \left| \frac{f^{(2n)}(x) - f^{(2n)}(-x)}{2} \right| \leq \frac{f^{(2n)}(x) + f^{(2n)}(-x)}{2}.$$

donc $|h^{(2n)}| \leq g^{(2n)}$ sur $] -1, 1[$

b. Si $(n, x) \in \mathbb{N} \times]-1, 1[$, utilisons Taylor-Laplace :

$$I(x) = \left| h(x) - \sum_{k=0}^n \frac{h^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right| = \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+1)!} \left| \int_0^1 (1-u)^{2n+1} h^{(2n+2)}(ux) du \right|,$$

$$\text{puis } I(x) \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-u)^{2n+1} |h^{(2n+2)}(ux)| du \text{ ie.}$$

$$I(x) \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-u)^{2n+1} g^{(2n+2)}(ux) du$$

qui vaut, par Taylor-Laplace, $g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}$, d'où l'inégalité.

$$\text{c. Si } x \in]-1, 1[, g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k, \text{ donc } h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

par encadrement, d'après b.

Comme $f = g + h$ sur $] -1, 1[$, f est somme de sa série de Taylor en 0 sur $] -1, 1[$.

4. Soit $\varphi : x \mapsto \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, φ est $\mathcal{C}^\infty$ impaire sur $] -1, 1[$.

Si $f = \varphi'$, pour montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}, f^{(2n)} \geq 0 \text{ sur }]-1, 1[)$ il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)} \geq 0$ sur $[0, 1[$. Par récurrence :

• $\varphi \geq 0$ sur $[0, 1[$.

• Si $(\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f^{(k)} \geq 0 \text{ sur } [0, 1[)$ alors $\varphi^{(n+1)} = (\varphi')^{(n)} = \frac{\pi}{2}(1 + \varphi^2)^{(n)}$

$$\text{d'où } \varphi^{(n+1)} = \frac{\pi}{2} \left[1^{(n)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi^{(k)} \varphi^{(n-k)} \right] \text{ d'après la formule de Leibniz, d'où}$$

$\varphi^{(n+1)} \geq 0$ sur $[0, 1[$ et la fin de la récurrence.

Par suite f , et donc φ , sont développables en série entière sur $] -1, 1[$, par conséquent $\tan$ est développable en série entière sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

• Comportement aux bornes de l'intervalle de convergence

1. a. Si $\sum a_n x^n$ est une série entière réelle de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $\sum a_n R^n$ converge avec le théorème spécial des séries alternées, montrer que la série entière $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, R]$. En déduire la continuité de sa somme sur $] - R, R]$.

b. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1], \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

et que $\forall x \in]-1, 1], \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ d'où : $\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

2. Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières réelles de rayon de convergence $R = +\infty$, de sommes respectives f et g telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n > 0$.

a. Montrer que : $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} O(b_n) \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} O(g(x))$. En déduire un résultat analogue si l'on remplace O par o .

b. Montrer que $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda b_n \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda g(x), \lambda \in \mathbb{R}^*$.

c. Montrer que $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n!} x^n \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^\alpha e^x$ si $\alpha \in \mathbb{Z}$.

3. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, b_n > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$ et $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence 1. Soient f et g les sommes respectives des séries entières sur $[0, 1[$.

a. Montrer que $\lim_{1^-} g = +\infty$.

b. Montrer que : $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} O(b_n) \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} O(g(x))$. En déduire un résultat analogue si l'on remplace O par o .

c. Montrer que : $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda b_n \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \lambda g(x), \lambda \in \mathbb{R}^*$.

4. a. Si (a_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}^*$, que dire de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?

b. Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, montrer l'existence de : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left((1-x)^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} x^n \right)$.

c. Montrer que : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Prouver que : $f(x)(1-x) + \ln(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\gamma$.

d. Montrer que : $\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

e. Montrer que : $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2 t^2)}} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

f. Montrer que : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$.

Solution

1. a. Par hypothèse ($|a_n|R^n$) décroît donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_{n+1}|R \leq |a_n|$. D'où $\forall x \in [0, R]$, $|a_{n+1}|x \leq |a_{n+1}|R \leq |a_n|$. La suite ($|a_n|x^n$) décroît si $x \in [0, R]$. Or elle converge vers 0 car la série $\sum a_n x^n$ converge, donc la série $\sum a_n x^n$ converge avec le théorème spécial des séries alternées. Donc :

$$\forall x \in [0, R], \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq |a_{n+1}|x^{n+1} \leq |a_{n+1}|R^{n+1} = \alpha_{n+1}.$$

α_n est indépendant de x et $\sum \alpha_n$ converge, donc $\lim(\alpha_n) = 0$. Donc $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, R]$. Du théorème de continuité des sommes de séries de fonctions, on déduit la continuité de sa somme sur $[0, R]$; or elle est continue sur $] -R, R[$, d'après le cours, d'où le résultat.

b. Dans le premier cas particulier $R = 1$ et $a_n R^{2n+1} = -a_n(-R)^{2n+1} = a_n$, d'où une application facile du résultat de a. Le second est immédiat.

2. a. Comme $a_n = O(b_n)$ et $b_n > 0$ si $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |a_n| \leq M b_n. \quad (1)$$

Soit N ainsi fixé. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, comme $b_n \geq 0$,

$$|f(x)| \leq \left| \sum_{n=0}^N a_n x^n \right| + M \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n x^n \leq \left| \sum_{n=0}^N a_n x^n \right| + M g(x) = |P(x)| + M g(x).$$

N étant fixé, P est une fonction polynôme; donc $P(x) = o(g(x))$ car

$$\forall n \geq 1, b_n > 0 \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geq b_{N+1} x^{N+1}) \text{ et on sait que } P(x) = o(x^{N+1}).$$

Donc : $\exists x_0 > 0, \forall x \geq x_0, |P(x)| \leq M g(x)$.

Donc : $\exists x_0 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [x_0, +\infty[, |f(x)| \leq 2M g(x)$.

Si $a_n = o(b_n)$, le remplacement de M par un $\varepsilon > 0$ quelconque donne la conclusion.

b. $a_n \sim \lambda b_n \iff a_n - \lambda b_n = o(b_n)$. On déduit de a. :

$$f(x) - \lambda g(x) = o(g(x)) \text{ ie. le résultat.}$$

c. $f_0(x) = e^x - 1 \sim e^x$ et $f_1(x) = x e^x$ donnent l'idée de raisonner par récurrence. Pour ce, il suffit de vérifier que $f_{\alpha+1}(x) \sim x f_{\alpha}(x)$, ce qui se déduit

de b) avec $a_0 = a_1 = 0, a_n = \frac{n(n-1)^\alpha}{n!}$ si $n \geq 2$ et $b_0 = 0, b_n = \frac{n^{\alpha+1}}{n!}$ si $n \geq 1$.

3. a. La fonction g est croissante sur $[0, 1[$ car les b_n sont tous positifs. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = \lim_{x \rightarrow 1^-} g$, alors $g(x) \leq \ell$ pour tout $x \in [0, 1[$.

Donc, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times [0, 1[, \sum_{k=0}^n b_k x^k \leq g(x) \leq \ell$. Par passage à la limite

dans les inégalités, n fixé et x tendant vers 1, on a : $s_n = \sum_{k=0}^n b_k \leq \ell$. La suite

croissante (s_n) est majorée donc convergente; ce qui contredit $\sum_{n \geq 0} b_n = +\infty$.

b. $a_n = O(b_n) \Rightarrow R_a \geq 1$ où R_a est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$

Comme $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(b_n)$ et $b_n > 0$ si $n \geq 1$, on peut écrire

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |a_n| \leq M b_n.$$

Soit N ainsi fixé. Pour tout $x \in [0, 1[$, comme $b_n \geq 0$,

$$|f(x)| \leq \left| \sum_{n=0}^N a_n x^n \right| + M \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n x^n \leq \sum_{n=0}^N |a_n| + M g(x) = B + M g(x).$$

B étant fixé, comme $\lim_{1^-} g = +\infty$, $B \underset{x \rightarrow 1^-}{=} o(g(x))$. Donc

$$\exists c \in]0, 1[, \forall x \in]1 - c, 1[, B \leq M g(x).$$

D'où : $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \exists c \in]0, 1[, \forall x \in]1 - c, 1[, |f(x)| \leq 2M g(x)$.

Si $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(b_n)$, le remplacement de M par un $\varepsilon > 0$ quelconque donne la conclusion.

c. Même raisonnement qu'en 2. b)

4. Applications de 3.

a. $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \neq 0 \Rightarrow a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ell$. Dans ce cas $b_n = 1$, $g(x) = \frac{1}{1-x}$.

Toutes les hypothèses de 3.c. sont vérifiées et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\ell}{1-x}$.

b. $\forall x \in]-1, 1[, (1-x)^{-\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ où $a_n = \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{n!}$.

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 - \frac{1-\alpha}{n}$. Du travail dirigé du chapitre 4 (règle de Raabe-Duhamel), on déduit l'existence de $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K n^{\alpha-1}$.

Si l'on pose $b_n = n^{\alpha-1}$, l'application de 3.c) donne $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} K g(x)$;

d'où $\frac{g}{f}(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} K^{-1} > 0$ avec $f(x) = (1-x)^{-\alpha}$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} x^n$.

c. Comme $\ln(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et comme les hypothèses de 3.c) sont vérifiées,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n)) x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x} \text{ cf. DSE du cours.}$$

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} (\ln(n) - \ln(n-1)) x^n.$$

$$\ln(n) - \ln(n-1) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + c_n \text{ où } c_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

$$\text{Donc : } \forall x \in]-1, 1[, (1-x)f(x) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n.$$

$$\text{D'où : } \forall x \in]-1, 1[, (1-x)f(x) + \ln(1-x) = -x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n = h(x).$$

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $|c_n x^n| \leq |c_n|$. De la convergence de $\sum |c_n|$, on déduit la convergence normale de $\sum c_n x^n$ sur $[-1, 1]$. D'où : $\lim_{x \rightarrow 1^-} h = h(1)$.

De l'exercice 16. de ce chapitre on déduit que $h(1) = -\gamma$.

$$d. \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \dots (n+k) x^n \text{ si } x \in]-1, 1[, \text{ et}$$

$(n+1) \dots (n+k) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^k$. D'où le résultat par application de 3.c.

$$e. \text{ Soit } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}. \text{ Si } |x| < 1, \varphi \in \mathcal{C}([0, 1[, \mathbb{R})$$

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(1-x^2)(1-t)^{1/2}}}. \text{ Donc } \varphi \text{ est intégrable sur } [0, 1[\text{ si } x \in]-1, 1[.$$

Le changement de variable $\mathcal{C}^1$ et bijectif $u = \arcsin(t)$ donne

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-x^2 \sin^2(u)}}. \text{ Puis, cf. exercice 19. on a :}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} \text{ où } a_{2n} = \frac{((2n)!)^2 \pi}{(2^n n!)^4} \frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \text{ cf. Stirling.}$$

$$D'où $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{1}{2} \ln(1-x).$$$

f. Le résultat découle de 3.c), de : $(1-X)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} X^n$ si $X \in]-1, 1[$ et de la formule de Stirling.

• Inégalités de Cauchy ; applications

Pour $R \in \mathbb{R}_+$, on définit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$. On note E le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions de $\mathcal{C}(\overline{D}, \mathbb{C})$ tel qu'il existe une série entière de somme S_f de rayon au moins égal à R tel que pour tout $z \in D$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

On note $N_r(f) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$.

1. a. Soit $f \in E$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in [0, R[$,

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta \quad (1)$$

$$b. \text{ En déduire que } \forall n \in \mathbb{N}, a_n R^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta \quad (2)$$

$$c. \text{ Montrer que pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } r \in [0, R[, |a_n| r^n \leq N_r(f) \quad (3)$$

2. Si f est bornée et développable en série entière sur $\mathbb{C}$, montrer que f est constante.

3. Montrer que si f est développable en série entière en 0, si g est développable en série entière en 0 et si $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ est développable en série entière en 0. Plus précisément, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour $|z| < R_f$, si

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \text{ pour } |z| < R_g, \text{ et si } r \in]0, R_g[\text{ est tel que } |g(z)| < R_f \text{ pour}$$

$$|z| < r \text{ alors } f \circ g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ pour } |z| < r.$$

On pourra noter $(g(z))^k = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,k} z^n$ pour $k \in \mathbb{N}$.

4. En déduire que si f est développable en série entière en 0 et si $f(0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est développable en série entière en 0.

5. Montrer que $\mathcal{P}$, le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions polynômes sur D est dense dans (E, N_R) .

Solution

1. a. Pour $(r, \theta) \in [0, R[\times \mathbb{R}$, $f(re^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta}$. Posons $u_k(\theta) = r^k a_k e^{i(k-n)\theta}$.

Soit r fixé dans $[0, R[$. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $|u_k(\theta)| \leq |a_k| r^k = \lambda_k$. λ_k est indépendant de θ et $\sum \lambda_k$ converge car $0 < r < R$ et par définition du rayon de convergence de la série entière $\sum a_k z^k$. Donc la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement *a fortiori* uniformément sur $[0, 2\pi]$. Du théorème d'intégration des séries de fonctions continues sur un segment, on déduit que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta = a_n r^n \text{ ie. (1).}$$

En effet $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda\theta} d\theta = 1$ si $\lambda = 0$ et 0 si $\lambda \in \mathbb{Z}^*$

b. L'application $h : [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $(r, \theta) \mapsto f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}$ étant continue sur $[0, R] \times [0, 2\pi]$ compact de $\mathbb{R}^2$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout

$(r, \theta) \in [0, R] \times [0, 2\pi]$, $|h(r, \theta)| \leq A$. La fonction $\theta \mapsto A$ constante étant intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$, on déduit du théorème de continuité des intégrales dépendant

d'un paramètre, que l'application $[0, R] \rightarrow \mathbb{C}$, $r \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta$ est continue sur $[0, R]$. D'où (2) par passage à la limite dans (1) ;

c. De l'inégalité de la moyenne et de (1) on déduit (3).

Remarque : ces inégalités sont appelées les **inégalités de Cauchy**.

2. Si $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $N_r(f) \leq M$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $|a_n| \leq M r^{-n}$.

Si pour $n \geq 1$ fixé, on fait tendre r vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient $a_n = 0$. Ce raisonnement étant valable pour tout $n \geq 1$, $f(z) = a_0$.

3. Comme g est continue en 0, il existe $r \in]0, R_g]$ tel que $|g(z)| < R_f$ si $|z| < R_f$.

Pour z ainsi fixé, on a : $(f \circ g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (g(z))^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,k} z^n$.

Prouvons que la série double $(\sum w_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ telle que $w_{n,k} = a_k b_{n,k} z^n$ est absolument convergente .

Soit $(s, t) \in]0, R_g[\times]0, R_f[$, on déduit des inégalités de Cauchy que, pour tout

$$k \in \mathbb{N}, |a_k| \leq \frac{N_t(f)}{t^k} \text{ et } |b_{n,k}| \leq \frac{(N_s(g))^k}{s^n} \text{ pour } n \geq k \text{ (cf. } b_{n,k} = 0 \text{ si } n < k).$$

$$|w_{n,k}| \leq \frac{N_t(f)(N_s(g))^k |z|^n}{s^n t^k} = N_t(f) \left(\frac{N_s(g)}{t} \right)^k \left(\frac{|z|}{s} \right)^n.$$

Soit s tel que $|z| < s < r \leq R_g$ et t tel que $N_s(g) < t \leq R_f$. C'est possible d'après la remarque faite en début de question. Les séries géométriques $\sum \left(\frac{N_s(g)}{t} \right)^k$ et $\sum \left(\frac{|z|}{s} \right)^n$ convergent et donc la série double $\sum w_{n,k}$ est absolument convergente et du théorème d'interversion des séries doubles on déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w_{n,k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{n,k}. \text{ Comme } \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{n,k} = (f \circ g)(z) \text{ et} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w_{n,k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n,k} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n,k} \right) z^n, \text{ le résultat est prouvé.} \end{aligned}$$

4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Comme $a_0 = f(0) \neq 0$, on

peut écrire $f(z) = a_0(1 + U(z))$ où $U(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_0} z^n$. Donc $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0} V \circ U(z)$

où $V(z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ pour tout z tel que $|z| < 1$. Comme $U(0) = 0$, la question précédente permet de conclure.

5. Soit $f \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons qu'il existe $g \in \mathcal{P}$ tel que $N(f - g) \leq \varepsilon$.

f étant continue sur le compact $\overline{D}$, elle y est uniformément continue. Soit $s \in]0, R[$ tel que si $|X - Y| \leq s$, alors $|f(X) - f(Y)| \leq \varepsilon$. (★)

Soit $S_f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et K le compact $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R - s\}$. Comme le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est supérieur ou égal à R et que $R > R - s$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur K . Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in K$, on ait $\left| f(z) - \sum_{n=0}^N a_n z^n \right| \leq \varepsilon$. Posons $g(z) = P\left(\frac{R-s}{R} z\right)$ où $P(X) = \sum_{n=0}^N a_n X^n$.

On a $g \in \mathcal{P}$ et pour $z \in \overline{D}$, on a :

$$\left| f(z) - g(z) \right| \leq \left| f(z) - f\left(\frac{R-s}{R} z\right) \right| + \left| f\left(\frac{R-s}{R} z\right) - g(z) \right|.$$

D'après (★), $\left| f(z) - f\left(\frac{R-s}{R} z\right) \right| \leq \varepsilon$ car $\left| \frac{R-s}{R} z - z \right| = s \left| \frac{z}{R} \right| \leq s$.

D'autre part, $\left| f\left(\frac{R-s}{R} z\right) - g(z) \right| \leq \varepsilon$ car $\left| \frac{R-s}{R} z \right| \leq R - s$.

D'où $|f(z) - g(z)| \leq 2\varepsilon$ pour tout $z \in \overline{D}$ et donc le résultat.

• Une équation fonctionnelle

Dans tout le problème, J désigne un intervalle inclus dans $[-1, 1]$ de longueur non nulle et tel que, pour tout $x \in J$, on ait $x^2 \in J$. On étudie l'ensemble E_J des applications dérivables de J dans $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in J, f'(x) = f(x^2)$$

I. Questions préliminaires

1. Soit g une application de classe $\mathcal{C}^n$ d'un intervalle borné $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, ($a < b$), telles que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $g^{(k)}$ ait une limite finie λ_k en a . Établir que, si l'on pose $g(a) = \lambda_0$, la fonction g ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b[$ avec $g^{(k)}(a) = \lambda_k$, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

2. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, établir le théorème (T_n) :

« Soit u une application de classe $\mathcal{C}^n$ d'un intervalle A dans $\mathbb{R}$, soit v une application de classe $\mathcal{C}^n$ d'un intervalle B dans $\mathbb{R}$ avec $v(B) \subset A$. Alors $w = u \circ v$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur B . Si de plus il existe $c \in B$ tel que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u^{(k)}(v(c)) = 0$, on a aussi, pour les mêmes valeurs de k , $w^{(k)}(c) = 0$. »

On aura intérêt, (T_{n-1}) étant supposé établi, à l'appliquer à $u' \circ v$ pour démontrer (T_n) .

3. Soit J un intervalle satisfaisant aux hypothèses du préambule, et $f \in E_J$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J .

4. Soit g une application dérivable d'un intervalle borné $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, $a < b$. Établir que si g et g' sont toutes deux majorées (ou toutes deux minorées) sur $]a, b[$, g admet une limite finie en a .

II. Étude de $E_{[-1,1]}$

1. On suppose dans cette question qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels vérifiant : (i) $a_0 = 1$,

(ii) le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est non nul,

(iii) $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, $R[\cap[-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ appartient à E_J .

a. On définit une suite d'entiers $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par $q_0 = 0$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $q_{k+1} = 2q_k + 1$. Expliciter q_k .

b. Soit (Q) l'ensemble des q_k , où k décrit $\mathbb{N}$. Montrer que si $n \notin (Q)$, a_n est nul et que de plus : $a_{q_1} = \frac{1}{q_1}$, $a_{q_2} = \frac{1}{q_1 q_2}$, $\dots$, $a_{q_k} = \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_k}$.

2. La suite (a_n) est celle que l'on vient de déterminer au II.1.b.

a. Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum n a_n$ convergent et comparer leurs sommes. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

b. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on note $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Établir pour tout $x \in]-1, 1[$, $S'(x) = S(x^2)$.

c. Établir que S est continue en 1, dérivable en 1 et que $S \in E_{[-1,1]}$.

d. Donner une majoration, que l'on justifiera, de $\left| S(x) - \sum_{n=0}^{15} a_n x^n \right|$ qui soit valable sur tout $[-1, 1]$. En déduire la valeur décimale approchée à 0,001 près par défaut de $S(1)$.

e. Représenter dans un repère orthonormé l'allure de la courbe : $y = S(x)$; on précisera la concavité.

f. Établir la formule : $\int_0^1 S(x) dx = \frac{2}{3} S(1)$.

3. Soit $h \in]0, 1]$, $J = [0, h]$ et f une application de J dans $\mathbb{R}$.

a. On suppose que $f \in E_J$ et $f(0) = 0$; on pose $M = \sup_{t \in J} |f(t)|$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in J$, $|f(x)| \leq Mx^{q_n}$. Qu'en conclure ?

b. Si $f \in E_J$ et $f(0)$ quelconque, quel lien existe-t-il entre f et la restriction de S à J ?

4. Soit a et b tels que $-1 \leq a \leq 0 < b \leq 1$ avec $a^2 \leq b$ et $J = [a, b]$; déterminer E_J .

III. Étude de $E_{]0,1[}$

Dans toute la suite, J désigne l'intervalle ouvert $]0, 1[$

1. Soit $f \in E_J$.

a. Soit $p \in J$; on pose $p_0 = p$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \sqrt{p_n}$.

Établir que (p_n) est strictement monotone et donner sa limite. On pose :

$$M_n = \sup_{x \in [p_n, p_{n+1}]} |f(x)|. \text{ À l'aide de la relation } f(x) = f(p_n) + \int_{p_n}^x f'(t) dt,$$

démontrer l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}^*, M_n \leq M_{n-1}(1 + p_{n+1} - p_n)$.

En déduire que la suite (M_n) est bornée.

b. Établir que, pour tout $\alpha \in J$, f et f' sont bornées sur $[\alpha, 1[$. Montrer que f a une limite λ en 1, et que, si l'on pose $f(1) = \lambda$, la fonction ainsi prolongée appartient à $E_{]0,1]}$.

2. a. Soit $f \in E_J$; on suppose qu'il existe $\beta \in J$ tel que f soit majorée dans $]0, \beta]$. Établir que f et f' ont une même limite finie ℓ et qu'en prolongeant f par continuité en 0, on obtient un élément de $E_{]0,1]}$.

b. En déduire que si $f \in E_J$ et si f n'est pas le produit de la restriction de S à J par une constante, alors, pour tout $\varepsilon \in J$, on a les propriétés suivantes

- f n'est ni majorée ni minorée sur $]0, \varepsilon]$,
- f s'annule en une infinité de points de $]0, \varepsilon]$.

Solution

I. Questions préliminaires

1. C'est une question de cours.

2. Si $u \in C^n(A, \mathbb{R})$, si $v \in C^n(B, \mathbb{R})$ et si $v(B) \subset A$, un théorème du cours permet de conclure que $w = u \circ v \in C^n(B, \mathbb{R})$.

Soit (HR_k) : $(\forall p \in \llbracket 1, k \rrbracket, u^{(p)}(v(c)) = 0) \Rightarrow \forall p \in \llbracket 1, k \rrbracket, w^{(p)}(c) = 0$.

(HR_1) étant vérifiée, supposons, pour $n \geq 2$, (HR_{n-1}) vraie.

Avec $w_1 = u' \circ v$, le théorème de Leibniz appliqué à $w' = w_1 \cdot v'$ donne :

$$w^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} w_1^{(k)} \cdot v^{(n-k)}.$$

D'après (HR_{n-1}) , $w_1^{(k)}(c) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, d'où $w^{(n)}(c) = 0$ et (HR_n) .

Par théorème de récurrence, le théorème (T_n) est vrai pour tout $n \geq 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R})$ et $u(x) = x^2$, alors $u \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R})$ et $u(J) \subset J$. Donc : $f' = f \circ u \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R})$ i.e. $f \in \mathcal{C}^{n+1}(J, \mathbb{R})$. Par récurrence, si $f \in E_J$, alors $f \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R})$.

4. Supposons g et g' majorées sur $]a, b[$. Soit $m = \sup_{t \in]a, b[} g'(t)$. La fonction h définie sur $]a, b[$ par $h(x) = g(x) - mx$ est majorée sur $]a, b[$ et décroissante car $h'(x) = g'(x) - m \leq 0$. D'après le théorème de la limite monotone, h a une limite finie en a . Donc g a une limite finie en a .

Partie II

1. a. La suite (q_k) étant arithmético-géométrique, on écrit $q_{k+1} + 1 = 2(q_k + 1)$. Comme $q_0 = 0$, on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $q_k = 2^k - 1$.

$$b. \forall x \in J, f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = f(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}.$$

De l'unicité des coefficients d'une série entière, on déduit : $a_0 = a_1$; si n est impair, $a_{n+1} = 0$ i.e. pour $n \geq 1$, $a_{2n} = 0$; $(2n+1)a_{2n+1} = a_n$ si $n \geq 0$.

Comme $a_0 = 1$, $q_{k+1}a_{q_{k+1}} = a_{q_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'où : $a_{q_k} = \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_k}$.

Si $n \notin (Q)$, on a une suite d'entiers $(m_r)_{1 \leq r \leq s}$ telle que :

$n = 2m_s + 1, m_s = 2m_{s-1} + 1, \dots, m_2 = 2m_1 + 1$. Si par des divisions successives par 2 on arrive à 1, alors $n \in (Q)$: absurde. C'est le cas si $m_1 = 1$. Donc $m_1 \geq 2$ et m_1 est pair. D'où $m_2, \dots, m_s$ sont impairs. $a_{m_1} = 0$ et les relations $(2p+1)a_{2p+1} = a_p$ si $p \geq 0$, impliquent $a_n = 0$. D'où le résultat.

2. a. Comme $q_k \geq k$ pour $k \geq 1$, on a : $0 < a_{q_k} \leq \frac{1}{k!}$. D'où la convergence de $\sum a_{q_k}$ et de $\sum a_n$. Comme $q_k a_{q_k} = a_{q_{k-1}}$, $\sum q_k a_{q_k}$ converge i.e. $\sum n a_n$ converge.

$$\text{De plus : } \sum_{n=0}^{\infty} n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{q_{k-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

$\sum a_n x^n = \sum u_k$ où $u_k = a_{q_k} x^{q_k}$. Pour $x \neq 0$ et $k \in \mathbb{N}$, $u_k \neq 0$, donc :

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \frac{|x|^{2^k}}{2^{k+1} - 1} \text{ tend vers } 0 \text{ si } |x| \leq 1 \text{ et vers } +\infty \text{ si } |x| > 1 \text{ par croissances}$$

comparées. D'où le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.

b. La série entière $\sum a_n x^n$ étant de rayon de convergence 1, sa somme S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$. De II.1.b) on déduit pour tout $x \in] -1, 1[$, $S'(x) = S(x^2)$.

c. Pour tout $x \in [-1, 1]$, $|a_n x^n| \leq |a_n| = a_n$. Comme $\sum a_n$ converge, la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$, *a fortiori* uniformément sur $[-1, 1]$. Du théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions continues, on déduit

que $S \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$. Donc $S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (S(x^2)) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (S(x^2))$. On déduit de I.1. que $S \in \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R})$ et $S'(1) = S'(-1)$. On a bien $S \in E_{[-1, 1]}$.

d. $T(x) = S(x) - \sum_{n=0}^{15} a_n x^n = \sum_{k=5}^{\infty} a_{q_k} x^{q_k}$. Donc, pour $x \in [-1, 1]$, $|T(x)| \leq \sum_{k=5}^{\infty} a_{q_k}$.

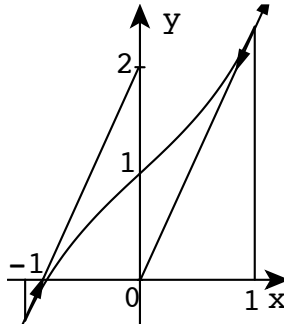
$a_{q_{k+1}} = \frac{1}{q_{k+1}} a_{q_k}$, donc si $k \geq 5$, $a_{q_{k+1}} \leq \frac{1}{q_6} a_{q_k} = \frac{1}{63} a_{q_k}$ et $a_{q_k} \leq \left(\frac{1}{63}\right)^{k-5} a_{q_5}$.

D'où : $|T(x)| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{63}} a_{q_5} = \frac{63}{62} a_{q_5} = \frac{63}{3.7.15.31.62} < 1,05.10^{-4}$.

$\sum_{n=0}^{15} a_n = 2 + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.3.7} + \frac{1}{1.3.7.15} = 2,384 \dots$ Donc $S(1) = 2,384$ à 10^{-3} près par défaut.

e. Notons que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $S(x) + S(-x) = 2$, la courbe représentative de S est symétrique par rapport au point $A(0, 1)$. Nous avons déjà vu que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$. Comme les a_n sont positifs ou nuls, on a : $S^{(k)}(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1[$ et pour tout $k \geq 0$. Donc S est croissante et convexe sur $[0, 1]$.

L'équation cartésienne de la tangente en $B(1, S(1))$ est : $y = S(1)x$ car $S(1) = S'(1)$. Cette tangente passe par O.



f. $\int_0^1 S(x) dx = [xS(x)]_0^1 - \int_0^1 xS'(x) dx = S(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 2xS(x^2) dx$.

$\int_0^1 S(x) dx = S(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 S(t) dt$ car le changement de variable $t = x^2$ est une

bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, 1]$ sur lui-même. D'où $\int_0^1 S(x) dx = \frac{2}{3} S(1)$.

3. a. f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J et $f(0) = 0$, on a :

$$\forall x \in J, f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x f(t^2) dt. \quad (*)$$

Si $t \in J$, alors $t^2 \in J$ et pour tout $x \in J$, $|f(x)| \leq M|x| = Mx^{q_1}$.

Si, pour tout $x \in J$, $|f(x)| \leq Mx^{q_n}$, alors $(*)$ implique :

$|f(x)| \leq \int_0^x Mt^{2q_n} dt = M \frac{x^{2q_n+1}}{2q_n+1} \leq Mx^{2q_n+1}$. Donc, par théorème de récurrence,

on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J, |f(x)| \leq Mx^{q_n}$.

Si $x \in [0, 1]$, $x^{q_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Donc $f(x) = 0$ si $x \in J \cap [0, 1]$. Par continuité, f est nulle. Donc, si $f \in E_J$ et $f(0) = 0$, alors f est nulle.

b. E_J est, de façon évidente, un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R})$.

Donc $g = f - f(0)S$ est élément de E_J . Mais $g(0) = 0$. Donc g est nulle d'après II.3.a.; d'où $f = f(0)S$.

En conclusion E_J est la droite vectorielle engendrée par la restriction de S à J .

4. $a^2 \leq b$ implique : $x \in J \Rightarrow x^2 \in J$.

Si $f \in E_J$, d'après II.3.b), la restriction de f à $[0, b]$ est la restriction de $f(0)S$ à $[0, b]$. Posons, pour $x \in [a, 0]$, $\psi(x) = f(x) + f(0)S(-x)$. On a alors :

$$\psi'(x) = f'(x) - f(0)S'(-x) = f(x^2) - f(0)S(x^2) = f(0)S(x^2) - f(0)S(x^2) = 0.$$

La fonction ψ est donc constante. Pour tout x , $\psi(x) = \psi(0) = 2f(0)$.

$$\forall x \in [a, 0], f(x) = 2f(0) - f(0)S(-x) = f(0)(2 - S(-x)) = f(0)S(x).$$

Tout élément f de E_J est la restriction à J de $f(0)S$.

Partie III

1. a. On a $p_n = p^{1/2^n}$. Donc la suite (p_n) est strictement croissante et de limite 1.

$$\forall x \in [p_n, p_{n+1}], f(x) = f(p_n) + \int_{p_n}^x f'(t)dt = f(p_n) + \int_{p_n}^x f(t^2)dt.$$

$$\forall x \in [p_n, p_{n+1}], |f(x)| \leq |f(p_n)| + \int_{p_n}^x \max_{t \in [p_n, p_{n+1}]} |f(t^2)|dt \leq M_{n-1} + \int_{p_n}^x M_{n-1}dt,$$

car si $t \in [p_n, p_{n+1}]$, alors $t^2 \in [p_{n-1}, p_n]$. Donc :

$$\forall x \in [p_n, p_{n+1}], |f(x)| \leq M_{n-1} + \int_{p_n}^{p_{n+1}} M_{n-1}dt = M_{n-1}(1 + p_{n+1} - p_n).$$

D'où l'inégalité demandée par définition de la borne supérieure.

• S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $M_k = 0$, la relation précédente donne : $M_n = 0$ pour tout $n \geq k$.

• Sinon, pour tout $n \geq 1$, $\ln(M_n) - \ln(M_{n-1}) \leq \ln(1 + p_{n+1} - p_n) \leq p_{n+1} - p_n$ car $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$ puisque la fonction $\ln$ est concave sur $]0, +\infty[$. Donc : $\forall n \geq 1, \ln(M_n) \leq \ln(M_0) + 1 - p_0$.

La suite $(\ln(M_n))$ est majorée ; d'où la suite à termes positifs (M_n) est bornée.

b. Pour $p = \alpha$, on déduit de III.1.a. que f est bornée sur chaque intervalle $[p_n, p_{n+1}]$ et comme (M_n) est bornée, f est bornée sur la réunion des intervalles $[p_n, p_{n+1}]$ qui est $[\alpha, 1[$.

Comme « f est bornée sur $[\alpha^2, 1[$ » donne « f' est bornée sur $[\alpha, 1[$ », la question I.4. appliquée à la fonction $x \mapsto f(1-x)$ montre que f a une limite finie λ en 1 et I.1. montre que $f'(1)$ existe et vaut $\lambda = f(1)$. On a, par prolongement $f \in E_{]0,1]}$.

2. a. Si f est majorée sur $]0, \beta]$, f' l'est. De I.4. on déduit que f a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en 0. f' a la même limite. f prolongée est dans $E_{]0,1]}$ et cf. II.3.b) f est la restriction de $f(0)S$ à $[0, 1[$.

b. Si f est majorée sur $]0, \varepsilon]$, alors f est la restriction de $f(0)S$ à $[0, 1[$. De même, avec f minorée en considérant $-f$.

Si f n'est pas la restriction de $f(0)S$ à J , si elle n'est ni majorée, ni minorée sur $]0, \varepsilon]$, il existe $(a, b) \in]0, \varepsilon]^2$ tels que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires prouve l'existence de $x_0 \in]0, \varepsilon[$ tel que $f(x_0) = 0$. Alors il existe $x_1 \in]0, x_0[$ tel que $f(x_1) = 0$. Par récurrence, on obtient une suite strictement décroissante de zéros de f dans $]0, \varepsilon]$.

• Un théorème de Hardy et Littlewood

Pour toute série S à termes complexes $a_n, n \in \mathbb{N}$, on note $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et

$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k$ la moyenne arithmétique des $(n+1)$ premières sommes partielles.

Dans l'ensemble des séries S , on envisage les sous-ensembles :

$\mathcal{S}_1$ constitué des séries S convergeant dans $\mathbb{C}$;

$\mathcal{S}_2$ constitué des séries S telles que la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$.

$\mathcal{S}_3$ constitué des séries S telles que $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence au moins égal à 1 et que de plus sa somme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ définisse sur $] -1, 1[$ une fonction f ayant dans $\mathbb{C}$ une limite, notée ℓ , lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Partie I

1. Étudier du point de vue de l'appartenance à $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$, la série S_1 telle que $a_n = (-1)^n$.

2. Étudier du point de vue de l'appartenance à $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$, la série S_2 de terme général $a_n = (-1)^{n+1}n$.

3. Établir l'inclusion $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$.

4. Soit $S \in \mathcal{S}_2$.

a. Établir la convergence sur $] -1, 1[$ de la série entière $\sum (n+1)\sigma_n x^n$ puis de la série entière $\sum s_n x^n$. En déduire une expression de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ à l'aide de la somme $g(x)$ de la première de ces deux séries entières.

b. Montrer que $S \in \mathcal{S}_3$ et que si l'on note $\sigma = \lim(\sigma_n)$, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sigma$.

5. a. Résumer en termes d'inclusions entre $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$, les résultats obtenus jusqu'ici.

b. Montrer que $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3$ si l'on se restreint aux séries S à termes réels positifs.

Partie II

Dans cette partie, on considère une série S fixée appartenant à $\mathcal{S}_3$, de terme général a_n réel et telle qu'il existe un réel A vérifiant l'inégalité $na_n \leq A$. De plus tous les polynômes envisagés seront à coefficients réels.

1. a. Soit $P(X) = \sum_{k=1}^d \alpha_k X^k$ un polynôme de valuation strictement positive.

Montrer que la série $\sum a_n P(x^n)$ converge pour $x \in] -1, 1[$ et calculer, lorsque x tend vers 1, la limite de sa somme à l'aide de ℓ et de la valeur prise par P en un point que l'on précisera.

b. Soit $Q(X) = \sum_{k=0}^{d'} \beta_k X^k$ un polynôme. Montrer que la série $\sum x^n Q(x^n)$ converge pour $x \in]-1, 1[$ et calculer, lorsque x tend vers 1, la limite de $(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n Q(x^n)$ à l'aide d'une intégrale portant sur Q .

2. Cette question est réservée aux étudiants de (MP*).

En utilisant un théorème de Weierstrass, montrer que pour toute fonction Ψ réelle continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et admettant une limite à gauche au point $\frac{1}{2}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que :

$$Q_1(x) \leq \Psi(x) \leq Q_2(x) \text{ pour tout } x \in [0, 1] \text{ avec } \int_0^1 (Q_2 - Q_1) \leq \varepsilon.$$

On pourra utiliser la fonction χ égale à 0 sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et à 1 sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

3. a. Soit χ la fonction introduite à la question précédente. Montrer que la série de fonctions $\sum a_n \chi(x^n)$ converge uniformément sur tout intervalle compact inclus dans $[0, 1]$.

b. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux polynômes P_1 et P_2 de valuations strictement positives, tels que $P_1(1) = P_2(1)$ et que :

$$P_1(x) \leq \chi(x) \leq P_2(x) \text{ pour tout } x \in [0, 1] \text{ avec } \int_0^1 \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)} dx \leq \varepsilon.$$

c. Établir que pour tout $x \in [0, 1]$ et assez proche de 1, les différences

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_1(x^n) \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_2(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(x^n)$$

sont toutes deux majorées par $(A+1)\varepsilon$, et en déduire la convergence de la série S .

4. a. Soit S_3 une série appartenant à $\mathcal{S}_3$, de terme général b_n et telle qu'il existe $B \in \mathbb{R}$ vérifiant l'inégalité $nb_n \geq B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série S_3 converge-t-elle ?

b. Existe-t-il une telle série S_3 qui vérifie la condition $\sup_{n \in \mathbb{N}} (nb_n) = +\infty$?

c. Soit S_4 une série appartenant à $\mathcal{S}_3$, de terme général c_n et telle qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ vérifiant l'inégalité $|nc_n| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série S_4 converge-t-elle ?

Solution

Partie I

1. Comme la série S_1 diverge grossièrement, $S_1 \notin \mathcal{S}_1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{2n} = 1$ et $s_{2n+1} = 0$. Donc : $(2n+1)\sigma_{2n} = n+1 = (2n+2)\sigma_{2n+1}$. D'où $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$ et $S \in \mathcal{S}_2$.

Le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est égal à 1 et sa somme est $f(x) = \frac{1}{1+x}$ si

$x \in]-1, 1[$. Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2}$, on a : $S_1 \in \mathcal{S}_3$.

2. Comme La série S_2 diverge grossièrement, $S_2 \notin \mathcal{S}_1$. On a $s_0 = 0$ et, si $n \in \mathbb{N}^*$, $s_{2n} = -n$ et $s_{2n+1} = n + 1$. Donc : $\sigma_{2n} = 0$ et $\sigma_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$. Donc $S_2 \notin \mathcal{S}_2$.

De la considération de $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ on déduit que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est égal à 1. Sa somme est $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ si $x \in]-1, 1[$. Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{4}$, on a : $S_2 \in \mathcal{S}_3$.

3. $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ est une conséquence du théorème de sommation des relations de comparaison encore appelée : lemme de Cesàro.

4. a. Comme (σ_n) converge, elle est bornée ; le rayon de convergence de $\sum \sigma_n x^n$ est au moins égal à 1. D'après le cours $\sum \sigma_n x^n$ et $\sum (n+1)\sigma_n x^n$ ont même rayon de convergence. Donc $\sum (n+1)\sigma_n x^n$ converge sur $] -1, 1[$.

Comme $s_n = (n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}$ pour $n \geq 1$, la série entière $\sum s_n x^n$ converge sur $] -1, 1[$. Si $x \in] -1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}) x^n = g(x) - xg(x) = (1-x)g(x).$$

De même, $a_n = s_n - s_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Donc $\sum s_n x^n$ converge sur $] -1, 1[$. Du produit de deux séries entières, on déduit, pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Donc : $\forall x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^2 g(x)$.

b. Il suffit d'examiner le cas où $\sigma = 0$. En effet si $\sigma \neq 0$, on remplace (a_n) par (a'_n) définie par $a'_0 = a_0 - \sigma$ et $a'_n = a_n$ si $n \geq 1$ pour s'y ramener, les suites associées à (a'_n) étant notées (s'_n) et (σ'_n) , on a $s'_n = s_n - \sigma$ d'où $\sigma'_n = \sigma_n - \sigma \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Supposons, donc $\sigma = 0$. Posons, pour $x \in] -1, 1[$,

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \text{ ie. } h(x) = \frac{1}{(1-x)^2}. \text{ Montrons que } g(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{=} o(h(x)).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $|\sigma_n| \leq \varepsilon$ si $n \geq m$.

$$\forall x \in [0, 1[, |g(x)| \leq \left| \sum_{k=0}^m (k+1)\sigma_k x^k \right| + \sum_{k=m+1}^{\infty} (k+1)\varepsilon x^k \leq \sum_{k=0}^m (k+1)\sigma_k + \varepsilon h(x).$$

m étant fixé, $A = \sum_{k=0}^m (k+1)\sigma_k$ étant une constante, $A \underset{x \rightarrow 1^-}{=} o(h(x))$ ie. il existe

$x_0 \in]0, 1[$ tel que pour $x \in]x_0, 1[$, on ait $0 \leq A \leq \varepsilon h(x)$ et donc $|g(x)| \leq 2\varepsilon h(x)$.

En conclusion : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists x_0 \in]0, 1[, \forall x \in]x_0, 1[, (1-x)^2 |g(x)| \leq 2\varepsilon$.

Autrement dit, d'après 4.a. on a : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0$.

Compte tenu de la remarque faite au début de 4.b. on a : $S \in \mathcal{S}_3$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sigma$.

5. a. En résumé : $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_3$ et les inclusions sont strictes. En effet, d'après 1. on a $\mathcal{S}_2 \not\subset \mathcal{S}_1$, d'après 2. on a $\mathcal{S}_3 \not\subset \mathcal{S}_2$, d'après 3. on a $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$, d'après 4. on a $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_3$.

b. Pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, notons $\mathcal{S}_i^+$ l'ensemble des séries à coefficients réels positifs dans $\mathcal{S}_i$. On a, d'après 5.a. $\mathcal{S}_1^+ \subset \mathcal{S}_2^+ \subset \mathcal{S}_3^+$.

Soit $S \in \mathcal{S}_3^+$. La fonction f est croissante sur $[0, 1[$. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = \lim_{x \rightarrow 1^-} f$, alors $f(x) \leq \ell$ pour tout $x \in [0, 1[$.

Donc, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times [0, 1[$, $\sum_{k=0}^n a_k x^k \leq f(x) \leq \ell$. Par passage à la limite dans les inégalités, n fixé et x tendant vers 1, on a : $s_n \leq \ell$. La suite croissante (s_n) est majorée donc convergente. D'où $S \in \mathcal{S}_1^+$. En conclusion $\mathcal{S}_1^+ = \mathcal{S}_2^+ = \mathcal{S}_3^+$.

Partie II

Notons que $A \geq 0$. Ceci est obtenu en faisant $n = 0$ dans la condition donnée.

$$1. \text{ a. } \forall x \in]-1, 1[, \forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N a_n P(x^n) = \sum_{n=0}^N a_n \sum_{k=1}^d \alpha_k x^{kn} = \sum_{k=1}^d \alpha_k \sum_{n=0}^N a_n (x^k)^n.$$

$$\text{Comme } x^k \in]-1, 1[, \text{ on a, pour tout } k \in \llbracket 1, d \rrbracket, \sum_{n=0}^N a_n (x^k)^n \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} f(x^k).$$

$$\text{La série } \sum a_n P(x^n) \text{ converge et a pour somme } \sum_{k=1}^d \alpha_k f(x^k).$$

$$\text{Or } x^k \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} 1 \text{ et } f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} \ell, \text{ on a : } \sum_{n=0}^{\infty} a_n P(x^n) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} \ell \sum_{k=1}^d \alpha_k = \ell P(1).$$

$$\text{b. } \forall x \in]-1, 1[, \forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N x^n Q(x^n) = \sum_{k=0}^{d'} \beta_k \sum_{n=0}^N x^n x^{kn} = \sum_{k=0}^{d'} \beta_k \sum_{n=0}^N (x^{k+1})^n.$$

$$\sum_{n=0}^N (x^{k+1})^n \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \sum_{n=0}^{\infty} (x^{k+1})^n = \frac{1}{1 - x^{k+1}} \cdot (\text{série géométrique})$$

$$\text{Donc la série } \sum x^n Q(x^n) \text{ converge et a pour somme } F_Q(x) = \sum_{k=0}^{d'} \frac{\beta_k}{1 - x^{k+1}}.$$

$$\text{Pour tout } x \in [0, 1[, (1 - x)F_Q(x) = \sum_{k=0}^{d'} \frac{\beta_k}{1 + x + \dots + x^k}.$$

$$(1 - x)F_Q(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} \sum_{k=0}^{d'} \frac{\beta_k}{1 + k} = \int_0^1 Q(x) dx. \text{ D'où } \sum_{n=0}^{\infty} x^n Q(x^n) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} \int_0^1 Q.$$

2. Il existe une unique constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\theta = \Psi - \lambda \chi \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $S \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, $|S(x) - \theta(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. En posant $S_1 = S - \frac{\varepsilon}{4}$ et $S_2 = S + \frac{\varepsilon}{4}$ on a S_1 et S_2 éléments de $\mathbb{R}[X]$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $S_1(x) \leq \theta(x) \leq S_2(x)$ et $S_2(x) - S_1(x) = \frac{\varepsilon}{2}$. D'où $\int_0^1 (S_2 - S_1) = \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $\lambda = 0$, il suffit de prendre $Q_1 = S_1$ et $Q_2 = S_2$ pour conclure.

Si $\lambda \neq 0$ supposons par exemple $\lambda > 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a < \frac{1}{2}$ et $\lambda a \leq \frac{\varepsilon}{6}$. Notons U_1 et U_2 les fonctions de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ définies comme suit : $U_1 = \lambda \chi$ sur

$\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2} + a, 1\right]$ et est affine sur $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + a\right]$; $U_2 = \lambda\chi$ sur $\left[0, \frac{1}{2} - a\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et est affine sur $\left[\frac{1}{2} - a, \frac{1}{2}\right]$. On a : $U_1 \leq \lambda\chi \leq U_2$ et $\int_0^1 (U_2 - U_1) = \lambda a \leq \frac{\varepsilon}{6}$.

D'après le théorème de Weierstrass, $\exists R \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x \in [0, 1]$, $|R(x) - U_2(x)| \leq \frac{\varepsilon}{12}$.

Posons $T_2 = R + \frac{\varepsilon}{12}$ alors, pour tout $x \in [0, 1]$, $(T_2 - U_2)(x) \leq \frac{\varepsilon}{6}$, d'où $\int_0^1 (T_2 - U_2) \leq \frac{\varepsilon}{6}$. De même, on construit $T_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

pour tout $x \in [0, 1]$, $(T_1 - U_1)(x) \leq \frac{\varepsilon}{6}$, d'où $\int_0^1 (T_1 - U_1) \leq \frac{\varepsilon}{6}$.

Finalement, $\forall x \in [0, 1]$, $T_1(x) \leq U_1(x) \leq (\lambda\chi)(x) \leq U_2(x) \leq T_2(x)$ et

$$\int_0^1 (T_2 - T_1) = \int_0^1 (T_2 - U_2) + \int_0^1 (U_2 - U_1) + \int_0^1 (U_1 - T_1) \leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $Q_1 = S_1 + T_1$, $Q_2 = S_2 + T_2$. Alors :

$\forall x \in [0, 1]$, $Q_1(x) = S_1(x) + T_1(x) \leq \theta(x) + \lambda\chi(x) = \Psi(x) \leq S_2(x) + T_2(x) = Q_2(x)$

$$\text{et } \int_0^1 (Q_2(x) - Q_1(x)) dx = \int_0^1 (S_2 - S_1) + \int_0^1 (T_2 - T_1) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. a. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Fixons $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha^N < \frac{1}{2}$. C'est possible car $\alpha^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Pour tout $x \in [0, \alpha]$ et tout $n \geq N$, $0 \leq x^n \leq \alpha^n < \frac{1}{2}$. D'où $\chi(x^n) = 0$. En

particulier la série $\sum a_n \chi(x^n)$ converge et son reste $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \chi(x^k)$ vérifie

$R_n = 0$ si $n \geq N$.

La série de fonctions $\sum a_n \chi \circ \tau_n$ où $\tau_n(t) = t^n$ converge uniformément sur $[0, \alpha]$. *A fortiori* elle converge uniformément sur tout compact inclus dans $[0, 1[$.

b. La fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \frac{\chi(x) - x}{x(1-x)}$ si $x \in]0, 1[$, $\varphi(0) = -1$

et $\varphi(1) = 1$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et admet une limite à gauche en $\frac{1}{2}$.

Fixons $\varepsilon > 0$. D'après II.2. il existe Q_1 et Q_2 deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall x \in [0, 1], Q_1(x) \leq \varphi(x) \leq Q_2(x) \text{ et } \int_0^1 (Q_2 - Q_1) \leq \varepsilon.$$

Posons $P_i(X) = X + X(1-X)Q_i(X)$ pour $i \in \{1, 2\}$. On a alors deux polynômes P_1 et P_2 de valuation au moins égale à 1 et vérifiant :

• $P_1(1) = P_2(1) = 1$,

• Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$P_1(x) = x + x(1-x)Q_1(x) \leq x + x(1-x)\varphi(x) = \chi(x) \leq x + x(1-x)Q_2(x) = P_2(x)$$

• $P_2(x) - P_1(x) = x(1-x)(Q_2(x) - Q_1(x))$; d'où :

$$\int_0^1 \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)} dx = \int_0^1 (Q_2 - Q_1) \leq \varepsilon.$$

c. Avec les notations de b), la fonction $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}$ est polynomiale et positive. Posons, pour $x \in [0, 1]$,

$$\Delta_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_1(x^n) \text{ et } \Delta_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_2(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(x^n).$$

Δ_1 et Δ_2 sont définies d'après II.1.a. et II.3.a. Notons que dans les sommes précédentes, on peut commencer à $n = 1$ car $P_1(1) = P_2(1) = 1 = \chi(1)$. Comme $P_1 \geq \chi \geq P_2$, on a :

$$\forall x \in [0, 1[, \Delta_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\chi(x^n) - P_1(x^n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n} (P_2(x^n) - P_1(x^n)).$$

$$\text{Donc : } \forall x \in [0, 1[, \Delta_1(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n} x^n (1 - x^n) \Phi(x^n).$$

$$\text{Or } \Phi(x^n) \geq 0 \text{ et } \frac{1 - x^n}{n} = (1 - x) \frac{1 + x + \dots + x^{n-1}}{n} \leq 1 - x \text{ si } x \in [0, 1[. \text{ Donc :}$$

$$\forall x \in [0, 1[, \Delta_1(x) \leq A(1 - x) \sum_{n=1}^{\infty} x^n \Phi(x^n) \leq A(1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Phi(x^n) \text{ car } \Phi \geq 0.$$

$$\text{D'après II.1.b), on a : } (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Phi(x^n) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \int_0^1 \Phi.$$

Comme $\int_0^1 \Phi \leq \varepsilon$, il existe $\alpha_1 \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in [\alpha_1, 1[, 0 \leq \Delta_1(x) \leq A\varepsilon + \varepsilon = (A + 1)\varepsilon.$$

De même, il existe $\alpha_2 \in]0, 1[$ tel que : $\forall x \in [\alpha_2, 1[, 0 \leq \Delta_2(x) \leq (A + 1)\varepsilon$.

Montrons alors la série S converge et a pour somme ℓ .

Soit $\varepsilon > 0$ et les notations précédentes, avec $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons $x_k = 2^{-1/k}$. On a $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$, $0 < x_k < 1$ pour tout k et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(x_k^n) = s_k$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $x_k \geq \alpha$ pour tout $k \geq N$. On a, pour tout $k \geq N$:

$$0 \leq \Delta_1(x_k) = s_k - \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_1(x_k^n) \leq (A + 1)\varepsilon. \quad (1)$$

$$\text{Or } \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_1(x_k^n) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \ell P_1(1) = \ell \text{ d'après II.1.a.}$$

$$\text{Donc il existe } N_1 \in \mathbb{N}^*, N_1 \geq N \text{ tel que pour tout } k \geq N_1, \left| \ell - \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_1(x_k^n) \right| \leq \varepsilon.$$

$$\text{Avec (1), on a : } \forall k \geq N_1, s_k - \ell \leq (A + 2)\varepsilon \quad (2)$$

De même, avec Δ_2 , il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*, N_2 \geq N$, tel que :

$$\forall k \geq N_2, \ell - s_k \leq (A + 2)\varepsilon \quad (3)$$

En posant $N_3 = \max(N_1, N_2)$, on déduit de (2) et (3) :

$$\forall k \geq N_3, \ell - (A + 2)\varepsilon \leq s_k \leq \ell + (A + 2)\varepsilon.$$

Donc la série S converge et a pour somme ℓ .

4. a. Si $S_3 \in \mathcal{S}_3$, il en est de même de $-S_3$. Or $-S_3$ vérifie les hypothèses du début de II. Donc $-S_3$ converge et S_3 aussi.

b. Posons $b_n = 2^{-p}$ si $n = 2^{2p}$ et $b_n = 0$ sinon. $\sum b_n$ converge donc est élément de $\mathcal{S}_1$ *a fortiori* de $\mathcal{S}_3$. Comme $2^{2p} b_{2^{2p}} = 2^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} +\infty$, la réponse est : oui.

c. Posons $c_n = a_n + ib_n$ avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$. Comme $S_4 \in \mathcal{S}_3$, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ appartiennent à $\mathcal{S}_3$. D'autre part, si $|nc_n| \leq C$, alors $|na_n| \leq C$ et $|nb_n| \leq C$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $na_n \leq C$ et $nb_n \leq C$. On déduit alors de 3.c. que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent. D'où S_4 est convergente.

9. Espaces préhilbertiens réels

E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel dans tout ce chapitre.

I. Espaces préhilbertiens réels

A. Produit scalaire

1. Définition

On appelle *produit scalaire* sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive sur E autrement dit, toute application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) $\forall x \in E, \varphi_x : y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire **linéarité à droite**
- (ii) $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ **symétrie**
- (iii) $\forall x \in E \setminus \{0\}, \varphi(x, x) \in]0, +\infty[$ **définie positive**

On dit que (E, φ) est un *espace préhilbertien réel*, $\varphi(x, y)$ est noté $(x|y)$.

Si E est de dimension finie, (E, φ) est un espace **euclidien**.

Remarque

Si (E, φ) est un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E , la restriction de φ à F^2 est un produit scalaire sur F ; il est encore noté φ .

2. Exemples

2.1. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Théorème

L'application $\varphi : (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$ où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

φ est clairement une forme bilinéaire symétrique.

Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a $(x|x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ car un des x_i au moins est non nul. $\square$

2.2. Produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Théorème

$(A, B) \mapsto \text{tr}({}^t A \cdot B)$ définit un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Rappelons que $M^T = {}^tM$.

Démonstration

$\text{tr}({}^tA.B) = \sum_{i=1}^p ({}^tA.B)_{i,i} = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,i}$, il s'agit donc du produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^{np}$. $\square$

2.3. Fonctions continues de carré intégrable

Théorème et définition

L'ensemble $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues de carré intégrable peut être muni d'une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ; si f et g sont deux telles fonctions alors le produit fg est intégrable sur I et $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_I fg$ définit un produit scalaire sur cet espace.

Démonstration

• Montrons que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. La fonction nulle est de carré intégrable donc cet ensemble est non vide.

Si f et g le sont et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(\lambda f + g)^2 \leq 2[(\lambda f)^2 + g^2]$ car pour tous réels x et y on a : $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ $(\star)$.

Comme $(f^2, g^2) \in (\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{R}))^2$ et comme $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, $(\lambda f + g)^2$ est élément de $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{R})$.

• Si f et g sont de carré intégrable, l'inégalité $|fg| \leq \frac{1}{2}[f^2 + g^2]$ prouve que $fg \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$. En effet, si x et y sont réels, on a $|xy| \leq \frac{1}{2}[x^2 + y^2]$.

• $(\cdot | \cdot)$ est clairement linéaire à gauche et symétrique. Si $(f|f) = 0$ alors $f^2 = 0$ car f^2 est positive continue d'intégrale nulle. D'où $f = 0$. $\square$

2.4. Espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

Théorème et définition

L'ensemble $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum u_n^2$ converge, peut être muni d'une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ; si u et v sont deux éléments de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $(\sum u_n v_n)_{n \geq 0}$ converge et $(u, v) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ définit un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Démonstration

• Si $n \in \mathbb{N}$, $2|u_n v_n| \leq [u_n^2 + v_n^2]$ d'après $(\star)$ de la démonstration précédente. La convergence absolue et par suite la convergence de la série $\sum u_n v_n$ en découle.

La suite nulle est élément de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Si u et v sont des éléments de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et λ un nombre réel, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda u_n + v_n)^2 = \lambda^2 u_n^2 + 2\lambda u_n v_n + v_n^2$ montre que $\lambda u + v \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, d'où $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

La linéarité à droite et la symétrie sont claires.

Si $u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $(u|u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (u_n)^2 > 0$ car un des u_n au moins est non nul. $\square$

2.5. Produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

Théorème

Soit $w \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R}_+^*)$, $a < b$ telle que l'application $t \mapsto t^n w(t)$ soit intégrable sur $]a, b[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'application $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_a^b P(t)Q(t)w(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto t^n w(t)$ est intégrable sur $]a, b[$, en tant que somme finie de fonctions intégrables, $t \mapsto P(t)Q(t)w(t)$ est intégrable sur $]a, b[$. La linéarité à droite et la symétrie sont claires.

Si $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$, $\varphi(P, P) = \int_a^b P^2 w > 0$ car l'application $t \mapsto P^2 w(t)$ est intégrable, continue sur $]a, b[$, $a < b$ positive et non identiquement nulle. $\square$

Désormais $(\cdot | \cdot)$ désigne un produit scalaire sur E .

3. Théorème : inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $|(x|y)| \leq (x|x)^{1/2}(y|y)^{1/2}$, l'égalité ayant lieu si, et seulement si, la famille (x, y) est liée.

Démonstration

• *Inégalité* : si $x = 0_E$, l'inégalité est égalité. Si $x \neq 0_E$, il suffit de prouver l'inégalité si $\|x\|^2 = (x|x) = 1$.

$0 \leq \|y - (x|y)x\|^2 = (y - (x|y)x | y - (x|y)x) = \|y\|^2 - (x|y)^2$ ie. le résultat.

• *Égalité* : si $\|x\| = 1$, $\|y\|^2 - (x|y)^2 = 0 \Rightarrow y = (x|y)x$. Donc (x, y) est liée.

Si $x = 0_E$, (x, y) est liée. L'autre implication est immédiate. $\square$

Reprenons alors les exemples 2.i. :

Pour 2.1. c'est $\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$.

Pour 2.2. $|\operatorname{tr}({}^t A.B)| \leq (\operatorname{tr}({}^t A.A))^{1/2} (\operatorname{tr}({}^t B.B))^{1/2}$.

Pour 2.3. $\left| \int_a^b fg \right| \leq \left(\int_a^b f^2 \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2 \right)^{1/2}$.

Enfin pour 2.4. $\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n \right| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n^2 \right)^{1/2}$.

4. Norme associée

4.1. Théorème et définition

$x \mapsto (x|x)^{1/2}$ définit une norme sur E , on l'appelle norme associée au produit scalaire et on la note $\|\cdot\|$ ou $\|\cdot\|_2$.

Démonstration

• $\forall x \in E$, $(x|x) \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \|x\| = \sqrt{(x|x)} \in \mathbb{R}_+$.

• De la bilinéarité du produit scalaire, on déduit : $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

• $\|x + y\|^2 = (x + y|x + y) = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où l'inégalité triangulaire vérifiée car $\|\cdot\|$ est à valeurs positives. $\square$

Remarque

Le lecteur prouvera facilement en s'aidant du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \text{ si, et seulement si, } x = 0 \text{ ou } y = \lambda x \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

De la bilinéarité du produit scalaire, on déduit :

4.2. Théorème

(i) *Identité du parallélogramme :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2].$$

(ii) *Identité de polarisation :*

$$\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = \frac{1}{4}[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2].$$

B. Orthogonalité

1. Définition

1. Deux éléments x et y de E sont dits orthogonaux si $(x|y) = 0$, cette relation est notée $x \perp y$.

2. Si V est un sous-espace vectoriel et x un élément de E on dit que x est orthogonal à V s'il est orthogonal à tout élément de V .

Remarques

• $x \perp y \iff y \perp x$.

• x est orthogonal à V si, et seulement si, il existe $\mathcal{B}$ base de V dont tout élément est orthogonal à x , en effet $\varphi_x : y \mapsto (x|y)$ étant linéaire, elle est nulle sur V si, et seulement si, elle nulle sur $\mathcal{B}$.

2. Théorème de Pythagore

(i) x et y sont deux vecteurs orthogonaux de E si, et seulement si,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(ii) Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de E deux à deux orthogonaux, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Démonstration

(i) Il suffit d'écrire $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$ pour s'en convaincre.

(ii) $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \left| \sum_{i=1}^n x_i \right. \right) = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} [(x_i|x_j) + (x_j|x_i)]$ d'après

la définition d'un produit scalaire, d'où l'égalité en cas d'orthogonalité. $\square$

3. Familles orthogonales

3.1. Théorème

Si $e_1, \dots, e_n$ sont des éléments deux à deux orthogonaux tous non nuls de E alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre.

Démonstration

$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \left(\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \mid e_j \right) = \lambda_j \|e_j\|^2 \right)$. D'où $\lambda_j = 0$. $\square$

3.2. Définition

Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ d'éléments de E est dite orthonormale si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $(e_i \mid e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
 Une telle famille est donc base d'un sous-espace vectoriel de dimension n .

Remarque

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale et si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors, par définition d'une famille orthonormale et du produit scalaire, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = (e_i \mid x)$ et $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.
- Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E , alors $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ où $\varphi_i(x) = (x \mid e_i)$, est sa base duale.

Exemples

- Si $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, sa base canonique est une base orthonormée sur E .
- Si $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique, sa base canonique est une base orthonormée sur E .

4. Exemples de polynômes orthogonaux

Avec les notations de II.A.2.5. nous montrerons en exercices et en travaux dirigés que les suites de polynômes définies comme suit sont des suites orthogonales.

4.1. Polynômes de Legendre

$$a = -1, b = 1, w(t) = 1, P_n(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[(t^2 - 1)^n \right].$$

4.2. Polynômes de Tchebychev de première espèce

$$a = -1, b = 1, w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, T_n(t) = \cos \left(n \arccos(t) \right).$$

4.3. Polynômes de Laguerre

$$a = 0, b = +\infty, w(t) = e^{-t} t^\alpha, \alpha \geq 0, L_{n,\alpha}(t) = e^t t^{-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} \left[e^{-t} t^{n+\alpha} \right].$$

4.4. Polynômes de Hermite

$$a = -\infty, b = +\infty, w(t) = e^{-t^2}, H_n(t) = e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} \left[e^{-t^2} \right].$$

5. Procédé d'orthonormalisation de Schmidt**5.1. Théorème**

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une suite libre de E avec $I = \llbracket 0, n \rrbracket$ ou $\mathbb{N}$. Il existe une unique suite orthonormale $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ telle que :
 $\forall k \in I, \text{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) = \text{Vect}(e_0, \dots, e_k)$ et $(e_k \mid \varepsilon_k) > 0$.

Démonstration (algorithmique)

Effectuons une récurrence sur k . Si $k = 0$, $\varepsilon_0 = \frac{e_0}{\|e_0\|}$ de façon immédiate.

Supposons le résultat vrai pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, n \geq 1$. Si $(\varepsilon'_0, \dots, \varepsilon'_n)$ satisfait aux conditions requises, on a, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \varepsilon_i = \varepsilon'_i$ car $(\varepsilon'_0, \dots, \varepsilon'_{n-1})$ satisfait alors aux conditions requises à l'ordre $(n-1)$, de même que $(e_0, \dots, e_{n-1})$. Déterminons ε_n .

• **Analyse** : Si ε_n existe, $\varepsilon_n \in \text{Vect}(e_0, \dots, e_n) = \text{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}, e_n)$.

$$\exists (\lambda, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \varepsilon_n = \lambda e_n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varepsilon_k.$$

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, (\varepsilon_n | \varepsilon_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i = -\lambda (e_n | \varepsilon_i).$$

$$\text{Donc } \varepsilon_n = \lambda v_n \text{ où } v_n = e_n - \sum_{k=0}^{n-1} (e_n | \varepsilon_k) \varepsilon_k. \quad (\star)$$

$$\|\varepsilon_n\| = 1 \Rightarrow |\lambda| \cdot \|v_n\| = 1. \text{ D'où } v_n \neq 0 \text{ et } |\lambda| = \frac{1}{\|v_n\|}.$$

Comme $(\varepsilon_n | \varepsilon_n) = 1 = \lambda (\varepsilon_n | e_n)$ et $(\varepsilon_n | e_n) > 0$, on a $\lambda > 0$.

• **Synthèse** : soit v_n définie par $(\star)$.

$v_n \neq 0$ car $e_n \notin \text{Vect}(e_0, \dots, e_{n-1}) = \text{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1})$.

On montre aisément que $\varepsilon_n = \frac{1}{\|v_n\|} v_n$ est tel que $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$ vérifie les conditions.

D'où le théorème démontré par récurrence. $\square$

5.2. Corollaire

Tout sous-espace vectoriel de E de dimension finie non nulle, en particulier tout espace euclidien, admet une base orthonormale.

5.3. Application

Avec les notations de I.A.2.5. l'espace préhilbertien réel $\mathbb{R}[X]$ ainsi défini et muni de sa base canonique $(X^n)_{n \geq 0}$, a une unique base orthonormée $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constituée de polynômes avec des coefficients dominants réels strictement positifs et tels que, pour tout n, P_n soit de degré n .

Démonstration

Le théorème précédent avec $e_n = X^n$ et $\varepsilon_n = P_n$ prouve l'existence d'une unique suite $\mathcal{B} = (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormale constituée de polynômes avec des coefficients dominants réels strictement positifs et telle que, pour tout n, P_n soit de degré n . Il suffit, pour conclure, de montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. Comme $\mathcal{B}$ est libre d'après B.3. (ou parce qu'elle est échelonnée en degrés), il reste à montrer qu'elle est génératrice. Pour tout $n, \mathcal{B}_n = (P_i)_{0 \leq i \leq n}$ étant libre et de cardinal $(n+1) = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $Q \in \mathbb{R}_p[X]$. Donc $Q \in \text{Vect}(\mathcal{B}_p) \subset \text{Vect}(\mathcal{B})$. Donc $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}[X]$. $\square$

6. Parties orthogonales

6.1. Définition

Soit A une partie non vide de E . L'orthogonal de A , noté $A^\perp$, est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A .
Si A est une partie vide, $A^\perp = E$.

6.2. Propriétés

- (i) Si A est une partie de E , alors $A^\perp = [\text{Vect}(A)]^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E .
- (ii) Si F est un sous-espace vectoriel de E , $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.
- (iii) $E^\perp = \{0_E\}$. Autrement dit : $(\forall y \in E, (x|y) = 0) \iff x = 0_E$.

Démonstration

(i) Si nous notons f_x la forme linéaire sur E définie par $f_x(y) = (x|y)$, alors $A^\perp = \bigcap_{x \in A} \text{Ker}(f_x)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Comme f_x est continue sur E , le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(f_x)$ est fermé dans E . Une intersection de fermés de E est fermée dans E . Donc $A^\perp$ est fermée dans E .

(ii) $x \in F \cap F^\perp \Rightarrow (x|x) = 0$ i.e. $x = 0$.

(iii) $(\forall y \in E, (x|y) = 0) \Rightarrow (x|x) = 0$ i.e. $x = 0$. $\square$

Exercice

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{tr}(AX) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $A = 0$.

C'est une application de (iii) à l'espace vectoriel $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

6.3. Théorème (sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux)

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) F et G sont orthogonaux.
- (ii) $F^\perp = G$
- (iii) $G^\perp = F$.

Démonstration

Par définition de $F^\perp$ et $G^\perp$, on a (ii) $\Rightarrow$ (i) et (iii) $\Rightarrow$ (i).

Montrons que (i) $\Rightarrow$ (ii). Il suffit pour cela, sachant que $E = F \oplus G$ et $G \subset F^\perp$ de montrer $F^\perp \subset G$. Si $x \in F^\perp$, $x \in E$ et donc s'écrit $x = y + z$, $(y, z) \in F \times G$.

$(x|y) = 0$ et $(z|y) = 0$, donc $(y|y) = \|y\|^2 = 0$ i.e. $y = 0$. D'où $x = z \in G$.

Par échange de F et G on a (i) $\Rightarrow$ (iii). D'où le résultat. $\square$

Exemple

Dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = [\mathcal{A}_n(\mathbb{R})]^\perp$.

C. Projection orthogonale

1. Théorème de la projection orthogonale

1.1. Théorème et définition

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et si x est un vecteur de E , il existe un unique vecteur de F , noté $p_F(x)$, tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$. On l'appelle projeté orthogonal de x sur F . On a : $E = F \oplus F^\perp$. De plus $v \mapsto d(x, v)$ admet un minimum global strict sur F , il est atteint en $p_F(x)$.

On appelle distance de x à F le réel, noté $d(x, F)$ défini par :

$$d(x, F) = \inf_{v \in F} d(x, v) = \min_{v \in F} d(x, v) = \|x - p_F(x)\|.$$

Démonstration

Notons n la dimension de F . Si $n = 0$ c'est clair. Désormais $n \geq 1$.

• *Existence et unicité de $p_F(x)$* : soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de F

et notons $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ l'élément le plus général de F . Alors $x - v \in F^\perp$ si, et

seulement si : $(\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (e_j | x) = (e_j | v))$ i.e. $(\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (e_j | x) = \lambda_j)$ par définition d'une famille orthonormale. D'où l'existence et l'unicité de $p_F(x)$ avec, de plus, $p_F(x) = (e_1 | x)e_1 + \dots + (e_n | x)e_n$.

Donc : $\forall x \in E, x = p_F(x) + (x - p_F(x)), p_F(x) \in F$ et $(x - p_F(x)) \in F^\perp$.

Comme $F \cap F^\perp = \{0\}$, on peut conclure que $E = F \oplus F^\perp$.

• *Minimisation de la distance à x* : notons $v_0 = p_F(x)$ pour simplifier.

Si $v \in F$ on a $d^2(x, v) = \|x - v\|^2 = \|(x - v_0) + (v_0 - v)\|^2 = \|x - v_0\|^2 + \|v_0 - v\|^2$ d'après le théorème de Pythagore puisque $(x - v_0) \in F^\perp$ et $(v_0 - v) \in F$.

Par conséquent $d(x, v) \geq d(x, v_0)$ avec égalité si, et seulement si, $\|v_0 - v\|^2 = 0$ i.e. $v = v_0$, ce qui prouve que $v \mapsto d(x, v)$ admet en $p_F(x)$ un minimum global strict. $\square$

Remarques

• $d^2(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$.

En effet, $x - p_F(x)$ et $p_F(x)$ sont orthogonaux, le théorème de Pythagore donne :

$$\|x\|^2 = \|(x - p_F(x)) + p_F(x)\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2.$$

• De même $d^2(x, F) = (x - p_F(x) | x - p_F(x)) = (x - p_F(x) | x)$.

• Si F n'est pas de dimension finie, on peut avoir $E \neq F \oplus F^\perp$.

Soient par exemple $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $F = \text{Vect}(e^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où, pour tout (k, n) dans $\mathbb{N}^2$, $e_k^{(n)} = \delta_{n,k}$. F est le sous-espace vectoriel des suites à support fini. u étant un élément de E , $u \in F^\perp \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (u | e^{(n)}) = 0$.

Donc $u \in F^\perp \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0)$. i.e. $F^\perp = \{0\}$. Nous avons alors

$F \oplus F^\perp = F \neq E$ car la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est élément de E et pas de F .

1.2. Théorème

| p_F est un projecteur d'image F , application lipschitzienne de rapport 1.

Démonstration

L'expression en base orthonormale $p_F(x) = \sum_{i=1}^n (e_i | x)e_i$ prouve la linéarité de p_F .

$\text{Im}(p_F) \subset F$ est clair, et, si $v \in F$, la minimisation de la distance prouve que F est point fixe de p_F , d'où $F \subset \text{Im}(p_F)$. Par conséquent $F = \text{Im}(p_F) = \text{Ker}(p_F - I_E)$, p_F est projecteur sur F . Enfin $0 \leq d^2(x, F) = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$ prouve que $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$, p_F est lipschitzienne de rapport 1. $\square$

2. Inégalité de Bessel

2.1. Théorème

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormale et si $x \in E$, alors on a l'inégalité

$$\text{de Bessel : } \sum_{i=1}^n (e_i | x)^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration

Si $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^n (e_i|x) e_i$ et $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n |(e_i|x)|^2 \leq \|x\|^2$ car p_F est lipschitzienne de rapport 1. $\square$

2.2. Corollaire

- (i) Si $\mathcal{B} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormale de E , la suite de terme général $(e_n|x)$ est élément de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et on a $\sum_{n=0}^{\infty} (e_n|x)^2 \leq \|x\|^2$.
- (ii) On a l'égalité de Parseval : $\sum_{n=0}^{\infty} (e_n|x)^2 = \|x\|^2$ si, et seulement si, $x \in \overline{\text{Vect}(\mathcal{B})}$. On dit que $\mathcal{B}$ est **totale** ou encore, que $\mathcal{B}$ est une base hilbertienne de E si $E = \overline{\text{Vect}(\mathcal{B})}$.

Démonstration

(i) Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormale de E alors, par majoration de toute somme partielle d'une série à termes positifs, pour tout $x \in E$, la suite de terme général $(e_n|x)$ est élément de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et on a $\sum_{n=0}^{\infty} (e_n|x)^2 \leq \|x\|^2$.

(ii) Si l'on a l'égalité de Parseval, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \sum_{k=0}^n (e_k|x)^2 \geq \|x\|^2 - \varepsilon^2$.

Notons $\mathcal{B}_n = \text{Vect}(e_k)_{0 \leq k \leq n}$, $F_n = \text{Vect}(\mathcal{B}_n)$ et $F = \text{Vect}(\mathcal{B})$.

D'après C.1.1. $d^2(x, F_n) = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^n (e_k|x)^2$. Donc : $\forall n \geq n_0, d^2(x, F_n) \leq \varepsilon^2$.

Comme $F_n \subset F$, on a $d(x, F) \leq d(x, F_n)$. D'où $(\forall \varepsilon > 0, d(x, F) < \varepsilon)$ i.e. $d(x, F) = 0$ ce qui équivaut à $x \in \overline{F}$.

Réciproquement, soit $x \in \overline{F}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in F$ tel que $d(y, F) < \sqrt{\varepsilon}$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $y \in F_{n_0}$. Donc $d^2(x, F_{n_0}) \leq d^2(x, y) \leq \varepsilon$ d'après C.1.1.

Donc $\|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n_0} (e_k|x)^2 \leq \varepsilon$ i.e. $\|x\|^2 - \varepsilon \leq \sum_{k=0}^{n_0} (e_k|x)^2 \leq \sum_{k=0}^n (e_k|x)^2$ si $n \geq n_0$.

On déduit de C.2.1. que $\|x\|^2 - \varepsilon \leq \sum_{k=0}^n (e_k|x)^2 \leq \|x\|^2$.

Donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=0}^n (e_k|x)^2 < \varepsilon$.

Ceci achève la démonstration. $\square$

2.3. Application

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$. Soit $w \in E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $w > 0$. On suppose E muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_a^b f g w$. Soit E' le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions polynômes à coefficients réels. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de E' si ce dernier est muni du produit scalaire induit par $(\cdot, \cdot)$.

D'après le théorème de Weierstrass, comme $\|\cdot\| \leq KN_\infty^{[a,b]}$, les hypothèses du théorème de Parseval sont vérifiées et donc $\sum_{k=0}^n (P_k|f)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|^2$.

II. Espaces euclidiens

Dans ce paragraphe, E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

A. Expressions analytiques

Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E , deux vecteurs x et y de E de coordonnées respectives dans $\mathcal{B} : (x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$. Si l'on note X et Y les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$, alors :

$$(x|y) = {}^t X I_n Y = {}^t Y I_n X = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Application à l'expression matricielle d'un projecteur orthogonal

Si F est un sous-espace vectoriel de E dont une base orthonormée est $(a_1, \dots, a_k)$ et si $(A_1, \dots, A_k)$ sont les matrices colonnes des a_j dans $\mathcal{B}$, alors : $M_{\mathcal{B}}(p_F) = \sum_{j=1}^k A_j {}^t A_j$.

Démonstration

$$\forall x \in F, p_F(x) = \sum_{j=1}^k (a_j|x) a_j \iff M X = \sum_{j=1}^k {}^t A_j X A_j = \sum_{j=1}^k A_j ({}^t A_j X) \text{ car}$$

${}^t A_j X \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ avec $M = M_{\mathcal{B}}(p_F)$ et X la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x dans $\mathcal{B}$,

$$\text{Donc : } \forall X, M X = \left(\sum_{j=1}^k A_j {}^t A_j \right) X. \text{ D'où le résultat. } \square$$

B. Isomorphisme canonique

Théorème

Un espace euclidien est canoniquement isomorphe à son dual. Autrement dit, si E est un espace euclidien, l'application $\theta : E \rightarrow E^*, x \mapsto j_x$ où $j_x : E \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto (x|y)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel E sur l'espace vectoriel E^* des formes linéaires sur E .

En effet, un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

Remarques

- Pourquoi canonique ? Car l'isomorphisme est indépendant des bases choisies sur E et E^* . Rappelons au lecteur étudiant que E et E^* étant des espaces vectoriels de dimension finie et $\dim(E) = \dim(E^*)$, on sait qu'il existe au moins un isomorphisme de E sur E^* .

- θ est continue et isométrique.

En effet : $\forall y \in E, |\theta(x)(y)| = |j_x(y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ cf. l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De plus $j_x(x) = \|x\|^2$. Donc $\|\theta(x)\| = \|x\|$.

C. Adjoint d'un endomorphisme

1. Théorème et définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme de E noté $u^\star$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u^\star(y)).$$

$u^\star$ est appelé l'endomorphisme adjoint de u .

Démonstration

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, alors $(u(x)|y) = {}^t X {}^t A Y$. Soit $u^\star \in \mathcal{L}(E)$ telle que $M_{\mathcal{B}}(u^\star) = {}^t A$, alors $(u(x)|y) = (x|u^\star(y))$.

S'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifie : $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u^\star(y)) = (x|v(y))$.

$\forall (x, y) \in E, (x|(v - u^\star)(y)) = 0 \Rightarrow \forall y \in E, (v - u^\star)(y) \in E^\perp = \{0_E\}$ ie. $v = u^\star$. $\square$

2. Propriétés

1. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ alors $M_{\mathcal{B}}(u^\star) = {}^t A$.

2. $\forall u \in \mathcal{L}(E), \text{Ker}(u^\star) = [\text{Im}(u)]^\perp$ et $\text{Im}(u^\star) = [\text{Ker}(u)]^\perp$.

3. $\forall (u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2, (u \circ v)^\star = v^\star \circ u^\star$.

4. L'application $u \mapsto u^\star$ est un automorphisme involutif de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

5. Un endomorphisme u de E et son adjoint $u^\star$ ont même polynôme caractéristique, donc même déterminant et même trace.

6. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u alors $F^\perp$ est stable par $u^\star$.

Démonstration

1. Voir démonstration précédente.

2. $x \in \text{Ker } u^\star \iff u^\star(x) = 0 \quad (1)$

$(1) \iff \forall y \in E, (y|u^\star(x)) = 0$ car $E^\perp = \{0\}$.

$(1) \iff \forall y \in E, (u(y)|x) = 0$ par définition de $u^\star$.

$(1) \iff x \in [\text{Im } u]^\perp$ cf. définition de $\text{Im } u$.

La seconde égalité découle de $(u^\star)^\star = u$ et $(F^\perp)^\perp = F$ car $\dim(F) < +\infty$.

3. et 4. sont des conséquences de 1. et des résultat sur la transposition de matrices.

5. De 4. on déduit que $\chi_u = \chi_{u^\star}$ car $\chi_A = \chi_{{}^t A}$ car le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est le polynôme caractéristique de sa matrice dans une base quelconque.

6. Si F est stable par u , soit $y \in F^\perp$. Pour tout $x \in F, u(x) \in F$. Donc $(y|u(x)) = 0$. D'où $(u^\star(y)|x) = 0$ par définition de $u^\star$. Par suite $u^\star(y) \in F^\perp$. $\square$

Exercice Montrer que $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^\star \circ u)$.

Solution

D'après le théorème du rang, il suffit de montrer que $\text{Ker}(u^\star \circ u) = \text{Ker } u$. Comme $\text{Ker } u \subset \text{Ker}(u^\star \circ u)$, il reste à prouver l'inclusion inverse.

Si $x \in \text{Ker}(u^\star \circ u), u^\star \circ u(x) = 0$. Donc : $(u^\star \circ u)(x)|x) = 0$ ie. $(u(x)|u(x)) = 0$ par définition de $u^\star$. Donc $u(x) = 0_E$ car $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire.

D'où $x \in \text{Ker}(u)$ et le résultat. $\square$

3. Définitions

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E .

- (i) u est dit **symétrique** ou **autoadjoint** si $u^\star = u$. On note $u \in \mathcal{S}(E)$.
- (ii) u est dit **antisymétrique** si $u^\star = -u$.
- (iii) u est un **automorphisme orthogonal** ou **isométrie vectorielle** de E et l'on note $u \in \mathcal{O}(E)$ si : $u \in \text{GL}(E)$ et $u^\star = u^{-1}$.
- (iv) u est un **endomorphisme normal** si $u \circ u^\star = u^\star \circ u$.

4. Caractérisations

4.1. Théorème

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est symétrique.
- (ii) $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u(y))$.
- (iii) $A = {}^tA$.

Démonstration

Immédiate compte tenu de II.C.1. et II.C.3. $\square$

4.2. Théorème

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est antisymétrique.
- (ii) $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = -(x|u(y))$.
- (iii) $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$.
- (iv) $A = -{}^tA$.

Démonstration

Elle est immédiate compte tenu de III.C.1, III.C.2. et du fait que l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (u(x)|y)$ est une forme bilinéaire sur E . (ii) est équivalent à (iii) car φ est antisymétrique si, et seulement si, elle est alternée (cf. la caractéristique de $\mathbb{K}$ est distincte de 2). $\square$

4.3. Théorème

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $u \in \mathcal{O}(E)$; (ii) u conserve la norme.
- (iii) u conserve le produit scalaire.
- (iv) L'image par u de toute base orthonormée de E est une base orthonormée de E .
- (v) Il existe une base orthonormée de E d'image par u une base orthonormée de E .
- (vi) Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $A {}^tA = I_n$ où $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.
- (vii) Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que ${}^tA A = I_n$ où $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.

Démonstration

(i) $\Rightarrow$ (iii) : $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|u^* \circ u(y))$ par définition de u^* . D'où le résultat car $u^* = u^{-1}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : en effet, (iii) $\Rightarrow \forall x \in E, \|u(x)\|^2 = \|x\|^2$. D'où u est injective. Or $u \in \mathcal{L}(E)$ et E est de dimension finie, donc $u \in \text{GL}(E)$.

$\forall (x, y) \in E^2, \exists ! y' = u^{-1}(y), (u(x)|y) = (u(x)|u(y')) = (x|y') = (x|u^{-1}(y))$.

De la définition de u^* on déduit que $u^* = u^{-1}$.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) : D'après le lemme. D'où (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)

(ii) $\Rightarrow$ (iv) : si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E et si l'on note $\mathcal{B}' = (u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$, alors $(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$. Donc $\mathcal{B}'$ est orthonormale et par suite libre. Comme $\text{Card}(\mathcal{B}') = n = \dim(E)$, $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E .

(iv) $\Rightarrow$ (v) : car l'espace euclidien E possède au moins une base orthonormale.

(v) $\Rightarrow$ (vi) : si $A = M_{\mathcal{B}}(u) = (a_{i,j})$ alors $u(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k$.

Comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, $(u(e_i)|u(e_j)) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}$ cf. III.A.

Or $(u(e_i)|u(e_j)) = \delta_{i,j}$ et ${}^t A A = (c_{i,j})$ où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}$. Donc ${}^t A A = I_n$.

(vi) $\Longleftrightarrow$ (vii) : car une matrice est inversible à droite si, et seulement si, elle est inversible à gauche si, et seulement si, elle est inversible.

(vii) $\Rightarrow$ (i) : (vii) équivaut à $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = {}^t A$; ce qui équivaut à $u \in \text{GL}(E)$ et $u^{-1} = u^*$. $\square$

5. Théorème (caractérisation des projecteurs orthogonaux)

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) p est un projecteur orthogonal ;
- (ii) $p \circ p = p$ et p est autoadjoint ;
- (iii) $p \circ p = p$ et $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Démonstration

(i) $\Rightarrow$ (ii) : soit F un sous-espace vectoriel de E . Notons p le projecteur orthogonal sur F ie. projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$. Comme p est un projecteur, $p \circ p = p$. Il reste à montrer que p est symétrique.

$\forall (x, x') \in E^2, \exists (y, z) \in F \times F^\perp, \exists (y', z') \in F \times F^\perp, x = y + z$ et $x' = y' + z'$.

On vérifie aisément que $(p(x)|x') = (y|y') = (x|p(x'))$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : $\forall x \in E, \|p(x)\|^2 = (x|(p^* \circ p)(x)) = (x|p^2(x)) = (x|p(x))$.

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz on déduit : $\|p(x)\|^2 \leq \|x\| \cdot \|p(x)\|$.

L'examen des cas $\|p(x)\|$ nul ou non, donne : $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : $p \circ p = p \Rightarrow E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

Il reste à prouver que $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$.

Comme $\dim([\text{Ker}(p)]^\perp) = \dim[\text{Im}(p)]$, montrons que $[\text{Ker}(p)]^\perp \subset \text{Im}(p)$.

Si $x \in [\text{Ker}(p)]^\perp$, alors $x = x_1 + x_2$ où $(x_1, x_2) \in \text{Ker}(p) \times \text{Im}(p)$.

$x_2 = x - x_1$ et $(x|x_1) = 0$. Donc $\|x_2\|^2 = \|x\|^2 + \|x_1\|^2 \geq \|x\|^2$.

Or $x_2 = p(x) \Rightarrow \|x_2\| \leq \|x\|$. Donc $x_1 = 0_E$ i.e. $x = x_2 \in \text{Im}(p)$. $\square$

6. Théorème

Soit u un endomorphisme de l'espace euclidien E .

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(u(x)|y)| = \|u^*\|.$$

Démonstration

La première égalité a été prouvée dans le chapitre « Espaces métriques ».

Soit $(x, y) \in E^2$, $\|x\| = \|y\| = 1$, alors $|(u(x)|y)| \leq \|u(x)\| \cdot \|y\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc $|(u(x)|y)| \leq \|u\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \leq \|u\|$ par définition de $\|u\|$.

D'où $M = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(u(x)|y)|$ existe et $M \leq \|u\|$. $(\star)$

Soit $x \in E$ et $\|x\| = 1$. Si $u(x) \neq 0$, $\|u(x)\|^2 = \|u(x)\| \left(u(x) \left| \frac{u(x)}{\|u(x)\|} \right| \right) \leq M \|u(x)\|$.

D'où $\|u(x)\| \leq M$. Cette inégalité est évidente si $u(x) = 0$. D'où $\|u\| \leq M$.

Compte tenu de $(\star)$, on a $\|u\| = M$.

Comme $(u(x)|y) = (x|u^*(y))$, on déduit de cette égalité : $\|u\| = \|u^*\|$. $\square$

D. Automorphismes orthogonaux

1. Groupe orthogonal

1.1. Théorème et définition

- (i) $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$ appelé le groupe orthogonal de E .
- (ii) $\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = +1\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ appelé **groupe spécial orthogonal** de E .

Démonstration

(i) $\bullet \mathcal{O}(E) \subset \text{GL}(E)$ par définition.

$\bullet \mathcal{O}(E) \neq \emptyset$ car $I_E \in \mathcal{O}(E)$.

$\bullet$ Soit $(u, v) \in (\mathcal{O}(E))^2$. $\forall x \in E$, $\|(u \circ v^{-1})(x)\| = \|v^{-1}(x)\|$ car $u \in \mathcal{O}(E)$.

Or $\|x\| = \|I_E(x)\| = \|(v \circ v^{-1})(x)\| = \|v^{-1}(x)\|$ car $v \in \mathcal{O}(E)$.

Donc $u \circ v^{-1} \in \text{GL}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ et conserve la norme ; d'où $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

(ii) L'application $\theta : \mathcal{O}(E) \rightarrow \{-1, 1\}$, $u \mapsto \det(u)$ est un morphisme du groupe $(\mathcal{O}(E), \circ)$ dans le groupe $(\{-1, 1\}, \times)$. Son noyau, $\mathcal{SO}(E)$ est donc un sous-groupe du groupe orthogonal de E . $\square$

Notons que $\{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = -1\}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ puisqu'il n'est pas stable par la loi $\circ$.

1.2. Théorème et définition

Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée.

(i) $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = {}^t A$.

(ii) $A {}^t A = I_n$.

(iii) ${}^t A A = I_n$.

(iv) Les vecteurs colonnes de A forment une famille orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

(v) Les vecteurs lignes de A forment une famille orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

Conséquence du théorème III.C.4.3. de ce chapitre. $\square$

1.3. Théorème et définition

- (i) L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe multiplicatif de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ appelé groupe orthogonal d'ordre n et noté $\mathcal{O}(n)$.
- (ii) $\mathcal{SO}(n) = \{A \in \mathcal{O}(n) \mid \det(A) = +1\}$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathcal{O}(n)$ appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n .

Démonstration

(i) Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ où E est un espace euclidien de dimension n . Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, alors $u \in \mathcal{O}(E) \iff A \in \mathcal{O}(n)$. L'application $\psi : \mathcal{O}(E) \rightarrow \mathcal{O}(n), u \mapsto M_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme de $(\mathcal{O}(E), \circ)$ sur $(\mathcal{O}(n), \times)$. D'où le résultat compte tenu de III.D.1.1.

(ii) Le résultat découle du même théorème car ψ induit un isomorphisme de $(\mathcal{SO}(E), \circ)$ sur $(\mathcal{SO}(n), \times)$. $\square$

Remarques

- $\mathcal{O}(n)$ et $\mathcal{SO}(n)$ sont des parties compactes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

En effet, ce sont des parties fermées et bornées de l'espace vectoriel normé de dimension finie $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{O}(n)$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, en effet, si $f : M \mapsto {}^tMM$ alors f est continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ car toutes ses coordonnées sont polynomiales en les $m_{i,j}$ et $\mathcal{O}(n) = f^{-1}(\{I_n\})$. $\mathcal{O}(n)$ est bornée dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ car,

si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}(n)$, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j}^2 \leq \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$.

Quant à $\mathcal{SO}(n) = \mathcal{O}(n) \cap \{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ un compact dans un fermé est compact de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

- $A \in \mathcal{O}(n) \Rightarrow |\det(A)| = 1$ mais la réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, $A {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2$.

2. Propriétés

Soit u un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E .

(i) Les valeurs propres de u sont dans $\{-1, 1\}$ et les sous-espaces propres sont orthogonaux.

(ii) u est diagonalisable si, et seulement si, u est une symétrie vectorielle orthogonale de E .

(iii) Si F est un sous-espace vectoriel stable par u , $F^\perp$ est stable par u et l'application induite par u sur F (resp. sur $F^\perp$) est élément de $\mathcal{O}(F)$ (resp. $\mathcal{O}(F^\perp)$).

(iv) $\text{Ker}(u - I_E)$ et $\text{Im}(u - I_E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux.

(v) La matrice de passage d'une base orthonormée à une autre est orthogonale.

(vi) Si $A \in \mathcal{SO}(n)$ et n impair, alors 1 est valeur propre de A .

Démonstration

(i) Si λ est valeur propre de u , il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Comme $\|u(x)\| = \|\lambda x\|$, $|\lambda|\|x\| = \|x\|$. D'où $|\lambda| = 1$ car $x \neq 0_E$.

Notons $E_u(1) = \text{Ker}(u - I_E)$ et $E_u(-1) = \text{Ker}(u + I_E)$.

Pour $(x, y) \in E_u(1) \times E_u(-1)$, on a : $(u(x)|u(y)) = (x|y)$ car $u \in \mathcal{O}(E)$ et $(u(x)|u(y)) = (x|-y) = (x|y)$. Donc $(x|y) = 0$.

(ii) Si u est diagonalisable, $E = E_u(1) \oplus E_u(-1)$.

Donc u est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $E_u(1)$.

(iii) Si F est stable par u , $u(F) \subset F$. Notons u_F l'application induite par u sur F ; alors $u_F \in \mathcal{L}(F)$.

Comme $F \subset E$, on a : $\forall x \in F$, $\|u_F(x)\| = \|u(x)\| = \|x\|$. Donc $u_F \in \mathcal{O}(F)$.

Montrons que $F^\perp$ est stable par u . Pour tout $(x, y) \in F \times F^\perp$, il existe un unique $x' \in F$ tel que $x = u(x') = u_F(x')$ car $u_F \in \mathcal{O}(F) \subset \text{GL}(F)$.

$(x|u(y)) = (u(x')|u(y)) = (x'|y) = 0$. Donc $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

On a de même $u_{F^\perp} \in \mathcal{O}(F^\perp)$.

(iv) $\text{Ker}((u - I_E)^\star) = [\text{Im}(u - I_E)]^\perp$.

Or $(u - I_E)^\star = u^\star - I_E = u^{-1} - I_E = (I_E - u) \circ u^{-1}$.

Donc $\text{Ker}((u - I_E)^\star) = \text{Ker}(u - I_E)$ et le résultat est prouvé.

(v) Comme $I_E \in \mathcal{O}(E)$, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases orthonormales de E , la matrice $P = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(I_E)$ est orthogonale.

(vi) $A - I_n = A - A^t A = A(I_n - {}^t A)$. Comme $\det(MN) = \det(M) \cdot \det(N)$, $\det({}^t M) = \det(M)$, $\det(-M) = (-1)^n \det(M)$, on a : $\det(A - I_n) = (-1)^n \det(A - I_n)$; d'où le résultat. $\square$

3. Interprétation matricielle du procédé de Schmidt

Toute matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique $A = QR$ où $Q \in \mathcal{O}(n)$ et R est une matrice triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs.

Démonstration

Existence : Si $\mathbb{R}^n$ est supposé muni de son produit scalaire canonique, soit $\mathcal{B}_0$ sa base canonique (orthonormale). Soit la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que A soit la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Notons Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Alors $Q \in \mathcal{O}(n)$ car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_0$ sont orthonormales. Enfin soit R la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Si x est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$, X_0, X, X' sont ses matrices colonnes dans les bases $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. D'après le cours sur les changements de bases, on peut écrire : $X_0 = QX'$, $X_0 = AX$, $X' = RX$.

Donc : $\forall X$, $AX = QRX$ i.e. $A = QR$.

Remarquons que $R = (r_{i,j})$ est triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs, est déterminée par les formules données dans la démonstration du théorème (procédé d'orthogonalisation de Schmidt) et que $r_{i,i} = (\varepsilon_i | e_i) > 0$.

Unicité : $A = QR = Q'R' \Rightarrow M = R'R^{-1} = Q'^{-1}Q$ est élément de $\mathcal{O}(n)$ et triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs. Or une seule matrice est à la fois orthogonale et triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs, c'est I_n . En effet, si M est une matrice triangulaire supérieure

à éléments diagonaux non nuls, elle est inversible et M^{-1} est triangulaire supérieure comme on peut le voir soit en utilisant la formule : $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t \text{Com}(M)$ soit en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton qui implique $M^{-1} \in \mathbb{R}[M]$.

Or si $M \in \mathcal{O}(n)$, $M^{-1} = {}^t M$ qui est triangulaire inférieure, donc M est diagonale. D'autre part, $M = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{O}(n) \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\alpha_k| = 1$.

D'où : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_k = 1$ car M est à éléments diagonaux strictements positifs.

Donc : $R = R'$ et $Q = Q'$. $\square$

E. Endomorphismes symétriques

1. Rappels

- $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique, on note $u \in S(E)$ si

$$\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u(y)).$$

- Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et A la matrice de u dans une base orthonormée de E . Alors $u \in S(E) \iff A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2. Propriétés

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E . Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u et si u_1 et u_2 sont les applications linéaires induites par u sur F et $F^\perp$, alors $u_1 \in S(F)$ et $u_2 \in S(F^\perp)$.

Démonstration

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in F^2, (u_1(x)|y) &= (u(x)|y) = (x|u(y)) \text{ car } u \in S(E). \\ &= (x|u_1(y)), \text{ ce qui prouve que } u_1 \in S(F). \end{aligned}$$

Si F est stable par u , on a vu que $F^\perp$ est stable par $u^\star = u$.

En procédant comme pour u_1 , on prouve que $u_2 \in S(F^\perp)$. $\square$

3. Lemme

Tout endomorphisme u d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie laisse soit une droite soit un plan stable.

Ce lemme a déjà été prouvé au chapitre 2.

4. Théorème spectral

Si un endomorphisme u de E est symétrique alors E admet une base orthonormée formée de vecteurs propres de u .
Si $A \in \mathcal{S}_n$ alors il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PD^t P$.

Démonstration

Les deux affirmations sont équivalentes.

Les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux, car :

$$u(x) = \lambda x \text{ et } u(y) = \mu y \text{ avec } \lambda \neq \mu \Rightarrow (u(x)|y) = \lambda(x|y).$$

Comme $u \in S(E)$, $(u(x)|y) = (x|u(y)) = \mu(x|y)$. Il s'en déduit $(x|y) = 0$.

Il suffit donc de montrer que u est diagonalisable. On procède par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant immédiat.

On traite quand même le cas $n = 2$ matriciellement. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, alors

$$\chi_A = X^2 - (a+c)X + (ac - b^2) \text{ de discriminant } \Delta = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Si $\text{Sp}(A)$ est de cardinal 2 l'affaire est faite, sinon on a à la fois $a = c$ et $b = 0$ d'où $A = aI_2$ et c'est fini.

On suppose le théorème établi dans les espaces euclidiens de dimension inférieure à $n - 1$ et $n \geq 3$.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ où E est de dimension n et soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 ou 2 stable par u . Son existence a été prouvée au chapitre 2 pour tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On a vu que u induit des endomorphismes symétriques u_1 de F et u_2 de $F^\perp$. On a vu que u_1 est diagonalisable et l'hypothèse de récurrence prouve que u_2 l'est. Comme $E = F \oplus F^\perp$ on en déduit que u est diagonalisable. $\square$

Exemple

Soit $A \in \mathcal{S}_n$ telle que : $\exists k \in \mathbb{N}^*, A^k = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

Du théorème précédent on déduit : $\exists P \in \mathcal{O}(n), \exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}), A = PD^tP$.

Donc $A^k = PD^{kt}P$. $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow D^k = \text{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.

$A^k = I_n \Rightarrow D^k = I_n \Rightarrow \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j^k = 1$.

Comme les λ_j sont réels, on a : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\lambda_j| = 1$ ie. $\lambda_j^2 = 1$.

Donc $D^2 = I_n$ et $A^2 = I_n$.

Remarque

Une matrice symétrique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas nécessairement diagonalisable.

En effet, la matrice $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable puisque son polynôme caractéristique étant $(X - i)^2$, elle n'a qu'une valeur propre et n'est pas scalaire.

5. Une forme bilinéaire symétrique dans une base orthonormée

Soit φ une forme bilinéaire symétrique d'un espace euclidien E de dimension $n \geq 1$. u étant l'endomorphisme associé à φ , on déduit de la symétrie du produit scalaire que u est autoadjoint. Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (a_{i,j})$. On déduit du théorème précédent que $A = PD^tP$ où $P \in \mathcal{O}(n), D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Donc $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(u)$

$$\varphi(x, y) = (x|u(y)) = {}^tXAY = {}^tXPD^tPY = {}^tX'DY'. \quad (1)$$

où $X = PX'$ et $Y = PY'$.

$\mathcal{B}'$ étant une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u , la matrice P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$, si $(x'_1, \dots, x'_n)$ et $(y'_1, \dots, y'_n)$ sont les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}'$, (1)

$$\text{s'écrit : } \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i x'_i y'_i.$$

On dit qu'on a **réduit** φ dans une base orthonormée de E .

Cette réduction a de nombreuses applications que nous développons dans la fin de ce chapitre.

6. Théorème (norme d'un endomorphisme symétrique)

$$\left| \begin{array}{l} \text{Si } u \text{ est un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien } E, \\ \|u\| = \sup_{\|x\|=1} |(u(x)|x)| = r(u) \text{ où } r(u) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{Sp}(u)\}. \end{array} \right.$$

Démonstration

Pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, $|(u(x)|x)| \leq \|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

Donc $m = \sup_{\|x\|=1} |(u(x)|x)|$ existe et $m \leq \|u\|$.

La réduction de la forme bilinéaire symétrique $(x, y) \mapsto (u(x)|y)$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ constituée de vecteurs propres de u où l'on a supposé $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$ et $u(e'_i) = \lambda_i e'_i$, donne :

$$\forall x \in E, (u(x)|x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x'_i)^2. \text{ Si } \|x\| = 1, |(u(x)|x)| \leq |\lambda_n| \sum_{i=1}^n (x'_i)^2$$

Donc $(u(x)|x) \leq |\lambda_n| \cdot \|x\|^2 = |\lambda_n| = r(u)$.

Comme $|(u(e'_n)|e'_n)| = |\lambda_n|$, on a : $r(u) = m$.

Par un raisonnement analogue, on a :

$$\|u\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \sum_{i=1}^n (\lambda_i x'_i)^2 = \lambda_n^2. \text{ Donc } r(u) = \|u\|. \square$$

Remarque

Si u n'est pas autoadjoint, on n'a que : $\sup_{\|x\|=1} |(u(x)|x)| \leq \|u\|$. Par exemple, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est antisymétrique non nul, on a : $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$ et $\|u\| \neq 0$.

F. Endomorphismes normaux d'un espace euclidien

Notons qu'un endomorphisme symétrique, antisymétrique ou une isométrie vectorielle d'un espace euclidien est normal.

1. Lemme 1

Soit u un endomorphisme normal d'un espace euclidien E . Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , $F^\perp$ est aussi stable par u .

Démonstration

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , dans une base orthonormée de E adaptée à la somme directe $E = F \oplus F^\perp$, la matrice de u est

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}. \text{ De } M^t M = {}^t M M \text{ on déduit } A^t A + B^t B = {}^t A A.$$

Comme $\text{tr}(A^t A) = \text{tr}({}^t A A)$ et tr linéaire, $\text{tr}(B^t B) = 0 = \|B\|^2$, Donc $B = 0$.

D'où $F^\perp$ est aussi stable par u . $\square$

2. Corollaire

Soit u un endomorphisme normal d'un espace euclidien E . Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , l'endomorphisme induit par u sur F est un endomorphisme normal de F .

Démonstration

Avec les notations de la démonstration précédente, $A^t A = {}^t A A$. $\square$

3. Lemme 2

Tout endomorphisme normal d'un espace euclidien de dimension 2 peut être représenté dans une base orthonormée par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha, \beta, \lambda, \mu \text{ réels.}$$

Démonstration

Soit M une matrice normale $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$M^t M = {}^t M M \iff \begin{cases} (b-c)(b+c) = 0 \\ (a-d)(b-c) = 0 \end{cases}$$

Si $b = c$, M est symétrique et l'on sait que M est ortho-semblable à $\text{Diag}(\lambda, \mu)$. Sinon, $a = d$ et $b = -c$ et le résultat est établi. $\square$

4. Théorème

Tout endomorphisme normal d'un espace euclidien E peut être représenté dans une base orthonormée par une matrice diagonale par blocs :

$$\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s, M_1, \dots, M_t) \text{ où } M_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}.$$

Démonstration

Par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n \in \{1, 2\}$ le résultat est clair ou établi en lemme. Supposons le résultat établi pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ avec $n-1 \geq 2$.

Soit u un endomorphisme normal d'un espace euclidien E de dimension n .

- Si u possède une droite F stable alors l'hyperplan $F^\perp$ est stable par u et l'endomorphisme induit par u sur $F^\perp$ est normal. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée de $F^\perp$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme induit est de la forme annoncée. En concaténant cette base avec un vecteur unitaire de F , on a une base orthonormée solution.

- Si u possède un plan F stable alors $F^\perp$ est stable par u , les endomorphismes induits par u sur F et $F^\perp$ sont normaux. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée de $F^\perp$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme induit est de la forme annoncée. En concaténant cette base avec une base orthonormée de F (cf. lemme), on a une base orthonormée solution. La récurrence est concluante. $\square$

5. Corollaire

Toute matrice antisymétrique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est ortho-semblable à une matrice diagonale par blocs :

$$\text{Diag}(M_1, \dots, M_p) \text{ où } M_i = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_i \\ \beta_i & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Théorème de réduction des isométries vectorielles

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{O}(E)$. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E telle que $M_{\mathcal{B}'}(u)$ soit la matrice diagonale par blocs : $\text{Diag}(I_p, -I_q, R(\theta_1), \dots, R(\theta_s))$ avec :

$$R(\theta_j) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix} \text{ est telle que } \theta_j \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}. \quad p, q, s \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

7. Application

| $\mathcal{SO}(n)$ est connexe par arcs.

Si $A = \text{Diag}(I_p, -I_q, R(\theta_1), \dots, R(\theta_s)) \in \mathcal{SO}(n)$, alors q est pair. Comme $R(\pi) = -I_2$, on peut écrire : $A = \text{Diag}(I_p, R(\theta_1), \dots, R(\theta_r))$.

L'application $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{O}(n), t \mapsto \text{Diag}(I_p, R(t\theta_1), \dots, R(t\theta_r))$ est continue, telle que $f(0) = I_n$, $f(1) = A$ et $f([0, 1]) \subset \mathcal{SO}(n)$. Donc $\mathcal{SO}(n)$ est connexe par arcs. $\square$

8. Théorème

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E .

$$\|u\| = \sqrt{r(u^* \circ u)}$$

où $r(u^* \circ u) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(u^* \circ u)} \lambda$ et $\|u\| = \|u^*\|$.

En particulier si u est symétrique positif, $\|u\| = r(u)$.

Démonstration

$$\|u\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (u^* \circ u(x) | x).$$

Comme $u^* \circ u$ est un endomorphisme symétrique positif de E , le résultat est une conséquence du théorème III.E.4.

Si u est un endomorphisme autoadjoint positif de E et si l'on note ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ avec $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, alors $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ sont les valeurs propres de $u^2 = u^* \circ u$ et $r(u^* \circ u) = \lambda_n^2 = (r(u))^2$. D'où le résultat.

Comme $u \circ u^*$ et $u^* \circ u$ ont même polynôme caractéristique, $r(u \circ u^*) = r(u^* \circ u)$. Il s'ensuit que $\|u\| = \|u^*\|$. $\square$

9. Théorème de coréduction de deux matrices symétriques réelles

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}$, $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$A = {}^t P P, \quad B = {}^t P D P.$$

Démonstration

$A \in \mathcal{S}_n^{++} \Rightarrow \exists R \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), A = {}^t R R$ d'après le théorème spectral. En effet, $A = P_1 \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}^t P = {}^t R R$ où $R = {}^t (P_1 \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}))$.

${}^t R^{-1} B R^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists Q \in \mathcal{O}(n), {}^t R^{-1} B R^{-1} = Q D {}^t Q$.

Donc $B = {}^t P D P$ où $P = {}^t Q R$ et l'on vérifie que $A = {}^t P P$ car $Q \in \mathcal{O}(n)$. $\square$

EXERCICES

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$. On suppose $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_a^b f g$. Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

2. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E , montrer que : $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

3. Projection sur un convexe compact

Soit H une partie de l'espace préhilbertien réel $(E, (\cdot | \cdot))$, convexe et compact, et soit $x \in E$. On note $d(x, H) = \inf_{h \in H} \|x - h\|$.

a. Montrer qu'il existe un unique $h_0 \in H$ tel que $d(x, H) = \|x - h_0\|$. On pourra utiliser pour h_0, h_1 dans H la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par la formule $q(t) = \|x - th_0 - (1-t)h_1\|^2$.

b. Montrer que h_0 est caractérisé par la condition $(x - h_0|h - h_0) \geq 0$ pour tout $h \in H$. On pourra utiliser la même fonction $t \mapsto q(t)$ qu'à la question précédente.

Le vecteur h_0 s'appelle projeté de x sur H .

4. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer :
$$\inf_{M=(m_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2.$$

5. Théorème de Cartan-Dieudonné. Soit E un espace euclidien. $u \in \mathcal{O}(E)$ tel que $\text{rg}(u - I_E) = p$. Montrer par récurrence sur p que u est produit d'au plus p symétries orthogonales par rapport à des hyperplans.

6. Soit E un espace euclidien de dimension n . Montrer qu'il existe $(x_1, \dots, x_{n+1})$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $\|x_i\| = 1$ et $(x_i|x_j) = -\frac{1}{n}$ si $i \neq j$.

7. Si Δ_k est le mineur principal d'ordre k de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

$$A \in \mathcal{S}_n^{++} \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \Delta_k > 0.$$

8. a. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $B \in \mathcal{S}_n^+$. Montrer que :

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \exists C \in \mathcal{S}_n^+, {}^t P P = A^{-1} \text{ et } P B {}^t P = C.$$

b. (i) Si $B \in \mathcal{S}_n^+$, montrer que $1 + \sqrt[n]{\det(B)} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + B)}$.

On pourra utiliser la convexité d'une fonction.

(ii) En déduire que si $(A, B) \in (\mathcal{S}_n^+)^2$, alors :

$$\sqrt[n]{\det(A)} + \sqrt[n]{\det(B)} \leq \sqrt[n]{\det(A+B)}.$$

9. Soient $A \in \mathcal{S}_n^+$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A' \in \mathcal{S}_n^+$ telle que $A = A'^k$. On pourra noter $A' = \sqrt[k]{A}$. Montrer qu'il existe $P_A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A' = P_A(A)$. On pourra utiliser des polynômes de Lagrange.

10. Décomposition polaire. Montrer que :

a. $\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \exists !(Q, S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}, A = QS$.

b. $\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \exists (Q, S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^+, A = QS$.

11. a. Montrer que l'ensemble des projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.

b. Si A et B sont des sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E on note p_A (*resp.* p_B) le projecteur orthogonal sur A (*resp.* B). Montrer que $\|p_A - p_B\| \in [0, 1]$ et que $\dim(A) = \dim(B)$ si $\|p_A - p_B\| < 1$.

12. On munit $E = \mathbb{R}[X]$ d'une structure préhilbertienne. u désigne un élément de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant : $\forall (P, Q) \in E^2, (u(P)|Q) = (P|u(Q))$ et $\deg[u(P)] \leq \deg(P)$.

On note $(P_n)_n$ la base obtenue à partir de $(X^n)_n$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Montrer que, pour tout n , P_n est vecteur propre de u .

13. Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 [\ln(x) - a - bx]^2 dx$.

14. Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel et $x_1, \dots, x_n$ éléments de E . Montrer que $\|x_1 + \dots + x_n\| = \|x_1\| + \dots + \|x_n\|$ si, et seulement si, il existe $u \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = \lambda_i u$.

15. Si $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} p & q & r \\ q & r & p \\ r & p & q \end{pmatrix}$ et si (A^n) converge, déterminer sa limite.

16. Pour A et B éléments de $\mathcal{S}_n^+$, montrer : $0 \leq \text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A) \text{tr}(B)$.

17. Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & {}^t C \\ C & B \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{S}_n^+$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathfrak{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$.

a. Montrer : $\alpha \geq 0$ et $B \in \mathcal{S}_{n-1}^+$. Montrer que, si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^t M A M \in \mathcal{S}_n^+$.

b. Montrer que $\alpha B - C {}^t C \in \mathcal{S}_{n-1}^+$.

c. Montrer que C est nulle dès que α est nul.

18. Décomposition de Cholesky

a. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ si, et seulement si, il existe un unique élément T de $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ à diagonale dans $]0, +\infty[$ tel que $A = {}^t T T$.

b. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+$ si, et seulement si, il existe un élément T de $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ à diagonale dans $[0, +\infty[$ tel que $A = {}^t T T$.

On pourra appliquer la décomposition QR à une racine carrée de A .

19. Méthode de Householder pour la décomposition QR

On munit $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

a. Si U est un élément non nul de E donner la matrice S_U relativement à la base canonique de la réflexion par rapport à $U^\perp$.

On appelle matrice de Householder toute matrice de la forme S_U ou I_n .

b. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'existence d'une matrice de Householder S , d'un

élément A' de $\text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ et d'un élément α de $\mathbb{R}^\star$ tels que $SA = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

c. Soit toujours A élément de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer par récurrence sur n l'existence de $n-1$ matrices de Householder $S_1, \dots, S_{n-1}$ et d'une matrice T triangulaire supérieure inversible telles que $S_1 \dots S_{n-1} A = T$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

1. $f \in \mathcal{P}^\perp \iff \forall P \in \mathcal{P}, (f|P) = \int_a^b f P = 0.$

D'après le théorème de Weierstrass, soit $(P_n) \in \mathcal{P}^\mathbb{N}$ telle que $N_\infty^{[a,b]}(f - P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f P_n = 0.$ Or $N_\infty^{[a,b]}(f^2 - f P_n) \leq N_\infty^{[a,b]}(f) N_\infty^{[a,b]}(f - P_n).$

Donc la suite de fonctions continues $(f P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2 sur

$[a, b].$ D'après un théorème du cours, $\int_a^b f P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f^2.$ D'où $\int_a^b f^2 = 0.$

Comme f est continue sur $[a, b]$ et $f^2 \geq 0$, on a : $f = 0$ i.e. $\mathcal{P}^\perp = \{0\}.$

2. • $F \cap G \subset F \Rightarrow \overline{F^\perp \subset (F \cap G)^\perp}. \text{ De même, } G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$

D'où : $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$

• $F^\perp \subset F^\perp + G^\perp \Rightarrow (F^\perp + G^\perp)^\perp \subset (F^\perp)^\perp = F.$

De même, $(F^\perp + G^\perp)^\perp \subset G.$

Donc : $(F^\perp + G^\perp)^\perp \subset F \cap G$ i.e. $(F \cap G)^\perp \subset F^\perp + G^\perp.$ D'où le résultat.

En posant $F^\perp = F'$ et $G^\perp = G'$, on a : $(F' + G')^\perp = F'^\perp \cap G'^\perp.$

Donc $(F' \cap G')^\perp = F'^\perp + G'^\perp.$ D'où le résultat.

3. a. L'application $h \mapsto \|x - h\|$ étant continue sur le compact $H \neq \emptyset$, y est bornée et atteint ses bornes. Il existe $h_0 \in H$ tel que $\|x - h_0\| = \inf_{h \in H} \|x - h\|.$

Supposons qu'il existe h_0, h_1 tels que $\|x - h_0\| = \|x - h_1\| = d(x, H).$

Comme H est convexe, pour tout $t \in [0, 1], th_0 + (1 - t)h_1 \in H.$ Donc :

$$\forall t \in [0, 1], q(t) = \|t(x - h_0) + (1 - t)(x - h_1)\|^2 \geq \|x - h_0\|^2.$$

Comme $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2(a|b)$, il s'ensuit que

$$\forall t \in [0, 1], q(t) = t^2\|x - h_0\|^2 + (1 - t)^2\|x - h_1\|^2 + 2t(1 - t)(x - h_0|x - h_1).$$

$$\forall t \in [0, 1], q(t) \geq \|x - h_0\|^2 = \|x - h_1\|^2.$$

$$\text{Donc } \forall t \in [0, 1], 2t(1 - t)(- \|x - h_0\|^2 + (x - h_0|x - h_1)) \geq 0.$$

$$\text{D'où } \forall t \in]0, 1[, -\|x - h_0\|^2 + (x - h_0|x - h_1) \geq 0.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(x - h_0|x - h_1) \leq \|x - h_0\|\|x - h_1\| = \|x - h_0\|^2,$$

donc $(x - h_0|x - h_1) = \|x - h_0\|\|x - h_1\|.$ Le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique $(x - h_0, x - h_1)$ liés. D'où $h_0 = h_1.$

Deuxième méthode : on déduit de l'égalité de la médiane que :

$\left\|x - \frac{1}{2}(h_0 + h_1)\right\|^2 = \frac{1}{2}\|x - h_0\|^2 + \frac{1}{2}\|x - h_1\|^2 - \frac{1}{4}\|h_0 - h_1\|^2 < d^2(x, H)$ si l'on suppose $h_0 \neq h_1$. Comme H est convexe, $\frac{1}{2}(h_0 + h_1) \in H$: absurde.

b. En remplaçant h_1 par h dans les calculs de a.

$$\forall t \in [0, 1], \forall h \in H, q(t) \geq \|x - h_0\|^2 \quad (\star).$$

Écrivons $q(t) = \|x - h_0 - (1-t)(h - h_0)\|^2$. Alors

$$q(t) = \|x - h_0\|^2 + (1-t)^2\|h - h_0\|^2 - 2t(1-t)(x - h_0|h - h_0).$$

$$(\star) \iff \forall t \in [0, 1], (1-t)^2\|h - h_0\|^2 - 2(1-t)(x - h_0|h - h_0) \geq 0.$$

Si $(x - h_0|h - h_0) \leq 0$ alors $(\star)$ est vérifiée.

Réciproquement, $(\star) \Rightarrow \forall t \in [0, 1], (1-t)\|h - h_0\|^2 - 2(x - h_0|h - h_0) \geq 0$.

Par passage à la limite quand $t \rightarrow 1^-$, on obtient $(x - h_0|h - h_0) \leq 0$.

D'où la caractérisation demandée.

4. D'après le cours, $\overline{\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $[\mathcal{S}_n(\mathbb{R})]^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), A = M_0 + M_1 \text{ où } M_0 = \frac{1}{2}(A + {}^tA) \text{ et } M_1 = \frac{1}{2}(A - {}^tA).$$

On cherche $\delta^2 = d^2(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$. D'après le théorème de projection orthogonale,

$$\delta^2 = \|A - M_0\|^2 = \|M_1\|^2 = \frac{1}{2^2}\|A - {}^tA\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2 \text{ puisque } \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

est supposé muni de son produit scalaire canonique : $(A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$.

5. Si $p = 0, u = I_E = s^0$ pour toute symétrie s orthogonale par rapport à un hyperplan.

Si $p = 1$, soit $x \in [\text{Ker}(u - I_E)]^\perp \setminus \{0\}$, le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(u - \lambda I_E)$ étant stable par u , le sous-espace vectoriel $[\text{Ker}(u - I_E)]^\perp = \mathbb{R}x$ est stable par $u^* = u^{-1}$ donc par u . Comme $\|u(x)\| = \|x\|$, donc $u(x) = \pm x$ et $u(x) = -x$ sinon $p = 0$. Donc u est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\text{Ker}(u - I_E)$.

Si $p \geq 2$, soit $u \in \mathcal{O}(n)$. Soit $y \in [\text{Ker}(u - I_E)]^\perp$ alors $u(y) \neq y$. Posons $z = u(y) - y$, $H = \{z\}^\perp$, σ la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan H et $v = \sigma \circ u$. Montrons que $\text{Ker}(u - I_E) \oplus \mathbb{R}y \subset \text{Ker}(v - I_E)$.

Notons $\sigma(u(y)) = y$. En effet, $(y + u(y)|y - u(y)) = (y|y) - (u(y)|u(y)) = 0$. Donc $\sigma(y + u(y)) = y + u(y)$. Comme $\sigma(u(y) - y) = y - u(y)$. Donc $\sigma(u(y)) = y$ ie. $v(y) = y$. D'autre part, $\text{Ker}(u - I_E) \subset H$ car $z \in [\text{Ker}(u - I_E)]^\perp$. Donc $\text{Ker}(u - I_E) \oplus \mathbb{R}y \subset \text{Ker}(v - I_E)$. Donc $\text{rg}(v - I_E) \leq p - 1$.

De l'hypothèse de récurrence appliquée à v , on déduit l'existence de $\sigma_1, \dots, \sigma_k$: symétries orthogonales par rapport à des hyperplans telles que $v = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k$ et que $k \leq \text{rg}(v - I_E) \leq p - 1$. Donc $u = \sigma \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k$ est le produit d'au plus p symétries orthogonales par rapport à des hyperplans.

6. **Première solution** : soit la matrice $A = \frac{1+n}{n}I_n - \frac{1}{n}J \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ où J est la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1. D'après le chapitre 2, la matrice J a pour valeurs propres 0 et n avec les multiplicités respectives $n-1$ et 1. La matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ a donc pour valeurs propres $\frac{1+n}{n}$ et $\frac{1}{n}$ avec les multiplicités respectives

$(n-1)$ et 1. Donc $A \in \mathcal{S}_n^{++}$. Comme $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où tous les λ_i sont dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe $B \in \mathcal{S}_n^{++}$ tel que $B^2 = A$. Il suffit de prendre $B = PD'P^{-1}$ avec $D' = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$.

Si $C_1, \dots, C_n$ sont les vecteurs colonnes de la matrice B , alors ${}^t C_i C_j = -\frac{1}{n}$ si $i \neq j$ et ${}^t C_i C_i = 1$. Si $x_1, \dots, x_n$ sont les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont $C_1, \dots, C_n$, alors $\|x_i\| = 1$ et $(x_i | x_j) = -\frac{1}{n}$ si $i \neq j$.

En posant $x_{n+1} = -\sum_{k=1}^n x_k$, on a : $(x_{n+1} | x_j) = -\frac{1}{n}$ pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\|x_{n+1}\| = 1$.

Deuxième solution : par récurrence sur n .

Si $n = 1$, alors $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$ constituent une solution.

Si E est de dimension $(n+1)$, soient $y \in E$, $\|y\| = 1$ et $F = \{y\}^\perp$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $(n+1)$ vecteurs $y_1, \dots, y_{n+1}$ unitaires de F vérifiant $(y_i | y_j) = -\frac{1}{n}$ si $i \neq j$.

Cherchons les x_i sous la forme $x_i = \alpha_i y + \beta_i y_i$ si $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et $x_{n+2} = y$.

$$\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, (x_{n+2} | x_i) = -\frac{1}{n+1} \iff \alpha_i = -\frac{1}{n+1}.$$

$$\|x_i\|^2 = 1 \iff \frac{1}{(n+1)^2} + \beta_i^2 = 1 \iff \beta_i = \pm \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}.$$

En posant $x_i = -\frac{1}{n+1} y + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} y_i$ si $i \leq n+1$ et $x_{n+2} = y$, on vérifie les conditions au rang $(n+1)$ et l'on conclut par théorème de récurrence.

7. Soit φ la forme bilinéaire symétrique dont A est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}$, A_k est la matrice de la restriction de φ à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, donc A_k est définie positive et $\Delta_k = \det(A_k) > 0$.

Réciproquement, effectuons une récurrence sur n . Si $n = 1$ le résultat est immédiat. Soit $n \geq 2$. La restriction de φ à $E' = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ est définie positive ; c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^{n-1}$. Il existe une base $(e'_1, \dots, e'_{n-1})$ de E' telle que le matrice de $\varphi|_{E'}$ est I_{n-1} .

Cherchons $e'_n = e_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k e'_k$ avec $\varphi(e'_n, e'_k) = 0$ quel que soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Nécessairement, $a_k = \varphi(e_n, e'_k)$. La matrice de φ dans la base $(e'_1, \dots, e'_n)$ est $\text{Diag}(1, \dots, 1, \lambda)$. Son déterminant est strictement positif, donc $\lambda > 0$. D'où Φ et A sont définis positifs.

8. a. Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}$, elle est inversible car son déterminant est > 0 puisque ses valeurs propres sont > 0 . Son inverse est symétrique de spectre égal à $\{1/\lambda \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\}$. A^{-1} est donc diagonalisable et s'écrit $A^{-1} = Q\Delta^t Q$ avec $\Delta = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\lambda_i > 0$. Notons $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ et $D = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Comme $\Delta = D^2 = D^t D$, on peut écrire $A^{-1} = {}^t P P$ où $P = {}^t (QD) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

$PB^t P = C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et comme ${}^t X C X = {}^t ({}^t P X) B ({}^t P X) = {}^t Y B Y \geq 0$, $C \in \mathcal{S}_n^+$.

b. (i) Si $B \in \mathcal{S}_n^{++}$, les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A sont dans $\mathbb{R}_+^*$. De même $I_n + B \in \mathcal{S}_n^{++}$ car $(\lambda_1 + 1), \dots, (\lambda_n + 1)$ sont les valeurs propres de $B + I_n$.

Soit (1) l'inégalité à prouver.

$$(1) \iff \ln \left[1 + \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} \right] \leq \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + \lambda_i);$$

$$(1) \iff f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(t_i) \text{ où } f(t) = \ln(1 + e^t) \text{ et } t_i = \ln(\lambda_i).$$

Ceci est vrai car f est convexe puisque $f''(t) = \frac{e^t}{(1 + e^t)^2} > 0$. D'où (1).

Si $B \in \mathcal{S}_n^+ \setminus \mathcal{S}_n^{++}$, on a $\det(B) = 0$ et $\det(I_n + B) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \geq 1$. Le résultat est encore vrai.

(ii) Si $\det(A) = \det(B) = 0$, alors le résultat est immédiat.

Sinon, supposons $\det(A) \neq 0$, on déduit de a. :

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \exists C \in \mathcal{S}_n^+, A^{-1} = {}^t P P \text{ et } B A^{-1} = P C {}^t P \text{ où } C \in \mathcal{S}_n^+.$$

On veut prouver : $\sqrt[n]{\det(A)} + \sqrt[n]{\det(B)} \leq \sqrt[n]{\det(A+B)} \iff (2)$.

$$(2) \iff 1 + \sqrt[n]{\det(BA^{-1})} \leq \sqrt[n]{1 + \det(BA^{-1})}$$

$$(2) \iff 1 + \sqrt[n]{\det(C)} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + C)} \text{ car } (\det(P))^2 > 0.$$

Le résultat découle alors de b.

9. Existence : comme $A \in \mathcal{S}_n^+$, il existe $D = \text{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}(n)$ tels que $A = P D {}^t P$. Posons $D' = \text{Diag}(\lambda_1^{1/k}, \dots, \lambda_n^{1/k})$ car on a $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La matrice $A' = P D' {}^t P$ est tel que $A'^k = A$.

Unicité : La matrice A' étant symétrique réelle, elle est diagonalisable. Comme $A A' = A' A$, on déduit d'un théorème du chapitre 2 qu'il existe une base de vecteurs propres communs à A' et A .

$$\exists Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \exists D'_1 = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}), A' = Q D'_1 Q^{-1} \text{ et } A = Q D Q^{-1}.$$

$$\text{D'où : } A'^k = Q \text{Diag}(\mu_1^k, \dots, \mu_n^k) {}^t Q = Q \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}^t Q.$$

Donc : $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu_i^k = \lambda_i)$ ie. $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu_i = \lambda_i^{1/k})$ car les μ_i sont positifs.

Notons $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_p}$ les valeurs propres *distinctes* de A . Pour montrer l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A' = P(A)$, il suffit de trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_{i_j}^{1/k} = P(\lambda_{i_j})$. Ceci étant immédiat avec les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux réels distincts $\lambda_{i_j}, 1 \leq j \leq p$. On en déduit alors que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i^{1/k} = P(\lambda_i)$ et l'on conclut.

10. a. Si $A = QS$ avec $Q \in \mathcal{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ alors $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Réciproquement, si l'on suppose l'existence de $(Q, S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}$ tel que $A = QS$, alors ${}^t A A = S {}^t Q Q S = S^2$. D'où l'unicité de $S = \sqrt{{}^t A A}$, d'après l'exercice 9. et donc celle de $Q = A S^{-1}$.

Existence : ${}^t A A \in \mathcal{S}_n^{++}$. En effet, on vérifie que ${}^t A A$ est symétrique et pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^t X {}^t A A X = \|A X\|^2 > 0$ car $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Il existe, d'après l'exercice 9, une matrice $S = \sqrt{{}^t A A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Donc $S^2 = {}^t A A$. Soit $Q = A S^{-1}$. Alors ${}^t Q Q = {}^t S^{-1} {}^t A A S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$ car S est symétrique. D'où l'existence de $(Q, S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}$ tel que $A = QS$.

b. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\text{Sp}(A)$ est un ensemble fini, à partir d'un certain rang p_0 , la matrice $A_p = A + \frac{1}{p}I_n$ est élément de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. D'après a. il existe $(Q_p, S_p) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}$ tel que $A_p = Q_p S_p$. Comme $\mathcal{O}(n)$ est compact dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une suite $(Q_{\varphi(p)})$ extraite de (Q_p) qui converge vers une matrice $Q \in \mathcal{O}(n)$. Comme $A_{\varphi(p)} = Q_{\varphi(p)} S_{\varphi(p)}$, alors $S_{\varphi(p)} = {}^t Q_{\varphi(p)} A_{\varphi(p)} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{{}^t Q} A$. Comme $\mathcal{S}_n^{++}$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on a ${}^t Q A = S$ et le résultat.

11. a. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E , φ et ψ les applications continues définies sur $\mathcal{L}(E)$ par $\varphi(p) = p^2 - p$ et $\psi(p) = \|p\|$. $\mathcal{P} = \varphi^{-1}(0_{\mathcal{L}(E)}) \cap \psi^{-1}([0, 1])$ est une partie fermée bornée de $\mathcal{L}(E)$ espace vectoriel normé de dimension finie donc compacte.

b. $p_A - p_B$ étant symétrique on a $\|p_A - p_B\| = \max_{\|x\|=1} |(p_A(x) - p_B(x)|x)|$.

Si x est un vecteur unitaire on a $0 \leq (p_A(x)|x) \leq 1$ et $0 \leq (p_B(x)|x) \leq 1$ d'où $(p_A(x) - p_B(x)|x) = (p_A(x)|x) - (p_B(x)|x) \in [-1, +1]$ et donc $\|p_A - p_B\| \leq 1$. Supposons $\|p_A - p_B\| < 1$. Si x est un vecteur unitaire de A on a $(p_A(x)|x) = 1$ et donc $(p_B(x)|x) > 0$ et, *a fortiori*, $p_B(x) \neq 0_E$. Par suite A et $B^\perp$ sont en somme directe et donc $\dim(A) + [\dim(E) - \dim(B)] \leq \dim(E)$ i.e. $\dim(A) \leq \dim(B)$. Par raison de symétrie, $\dim(A) = \dim(B)$.

12. Si $n \in \mathbb{N}$, comme $\deg[u(P_n)] \leq \deg(P_n) = n$, $u(P_n) \in \text{Vect}(P_0, \dots, P_n)$.

Si $k \in]0, n[$, on a $(u(P_n)|P_k) = (P_n|u(P_k)) = 0$ car $u(P_k) \in \text{Vect}(P_0, \dots, P_k) \subset P_n^\perp$ et donc $u(P_n) \in \text{Vect}(P_0, \dots, P_n) \cap \text{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1})^\perp = \mathbb{R}P_n$, ce qu'il fallait démontrer.

13. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ engendré par $\varphi_0 : x \mapsto 1$, $\varphi_1 : x \mapsto x$ et $\ln$. Ces trois fonctions sont de carré intégrable sur $]0, 1]$ et donc

l'application $(f, g) \mapsto \int_0^1 fg$ est un produit scalaire sur E . Si l'on note f le projeté orthogonal de $\ln$ sur $\text{Vect}(\varphi_0, \varphi_1)$ alors le théorème de projection orthogonale prouve que $d = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 [\ln(x) - a - bx]^2 dx = \|\ln - f\|^2 = \|\ln\|^2 - \|f\|^2$.

Si $f = a\varphi_0 + b\varphi_1$ alors $(\ln|\varphi_0) = (f|\varphi_0)$ et $(\ln|\varphi_1) = (f|\varphi_1)$ ou encore $\int_0^1 \ln(x) dx = \int_0^1 (a + bx) dx$ et $\int_0^1 x \ln(x) dx = \int_0^1 (ax + bx^2) dx$ ce qui donne, en intégrant par parties, $a + \frac{b}{2} = -1$ et $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = -\frac{1}{4}$ et enfin $a = -\frac{5}{2}$ et $b = 3$.

Alors $d = \int_0^1 \ln^2(x) dx - \int_0^1 (a + bx)^2 dx = \frac{1}{4}$.

14. Le sens réciproque est immédiat.

Montrons le sens direct par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant immédiat.

Si la propriété est établie à un rang $n \geq 1$ et $\|x_1 + \dots + x_{n+1}\| = \|x_1\| + \dots + \|x_{n+1}\|$, le cas où l'un des x_i est nul découle de l'hypothèse de récurrence.

Sinon $x_{n+1} \neq 0_E$ et l'on pose $x = x_1 + \dots + x_n$ et $y = x_{n+1}$, alors :

($\star$) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq \|x_1\| + \dots + \|x_{n+1}\| = \|x+y\|$, d'où $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Par suite $(x|y) = \|x\| \times \|y\|$ et donc, l'étude de l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que, comme $y \neq 0_E$, $x \in \mathbb{R}y$.

En posant $x = \lambda y$ on a $(x|y) = \|x\| \times \|y\|$ i.e. $\lambda \|y\|^2 = |\lambda| \|y\|^2$ d'où $\lambda \geq 0$.

De plus ($\star$) montre que $\|x_1 + \dots + x_n\| = \|x_1\| + \dots + \|x_n\|$ d'où l'existence de $u \in E$ et de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = \lambda_i u$. Si $\alpha = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ alors $\alpha > 0$ car aucun des x_i n'est nul et $\alpha u = \lambda x_{n+1}$ d'où $u = \frac{\lambda}{\alpha} x_{n+1}$ et donc,

pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = \frac{\lambda_i \lambda}{\alpha} x_{n+1}$ avec $\frac{\lambda_i \lambda}{\alpha} \geq 0$, ce qui termine la récurrence.

15. On remarque immédiatement que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé

à la valeur propre $p+q+r$. Notons $p+q+r, \lambda, \mu$ les valeurs propres comptées avec ordre de multiplicité, alors $\text{tr}(A) = p+q+r$ montre que $\mu = -\lambda$. La convergence de $(A^n)_n$ montre que les trois valeurs propres sont élément de $] -1, +1]$ et, comme $\mu = -\lambda$, on a $|\lambda| = |\mu| < 1$.

• Si $|p+q+r| < 1$ alors $(A^n)_n$ converge vers 0_3 .

• Sinon, $p+q+r = 1$ et, comme $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, la suite $(A^n)_n$ converge vers une matrice P vérifiant $P^2 = P \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ car (A^{2n}) converge aussi vers P . Cette matrice est donc celle du projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(U)$

relativement à la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, soit $P = \frac{U^t U}{{}^t U U} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Écrivons $A = P D^t P$ où $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$\text{tr}(AB) = \text{tr}[P(D^t P B)] = \text{tr}[(D^t P B)P] = \text{tr}(D B')$ où $B' = {}^t P B P$. Remarquons que $B' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que, pour toute colonne X , ${}^t X B' X = {}^t (P X) B (P X) \geq 0$ car $B \in \mathcal{S}_n^+$, et donc $B' \in \mathcal{S}_n^+$. Si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, en choisissant pour X le i -ème vecteur de la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on obtient $b'_{i,i} \geq 0$.

On a $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b'_{i,i}$ et $\text{tr}(A) \text{tr}(B) = \text{tr}(D) \text{tr}(B') = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b'_{i,i} \right)$ d'où $0 \leq \text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A) \text{tr}(B)$ car les λ_i et les $b'_{i,i}$ sont éléments de $\mathbb{R}_+$.

17. a. Avec ${}^t X = (10 \dots 0)$ on a $\alpha = {}^t X A X \geq 0$. La matrice B est dans $\mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$ et, si $Y \in \mathfrak{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, avec $X = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$, on a ${}^t X A X = {}^t Y B Y \geq 0$ d'où $B \in \mathcal{S}_{n-1}^+(\mathbb{R})$.

Enfin ${}^t M A M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et, si $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^t X {}^t M A M X = {}^t (M X) A (M X) \geq 0$, d'où ${}^t M A M \in \mathcal{S}_n^+$.

b. Posons $M = \begin{pmatrix} \star & -\frac{{}^t C}{\sqrt{\alpha}} \\ 0 & \sqrt{\alpha} I_{n-1} \\ \vdots & \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors ${}^t M A M = \begin{pmatrix} \star & \star \\ \star & \alpha B - C {}^t C \end{pmatrix}$ en

effectuant le produit par blocs, et la question a. montre que $\alpha B - C {}^t C \in \mathcal{S}_{n-1}^+(\mathbb{R})$.

c. Si $\alpha = 0$ alors la matrice symétrique $C^t C$ est à la fois symétrique positive et négative. Elle est diagonalisable avec 0 pour seule valeur propre donc nulle. Pour la structure euclidienne canonique sur $\mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ on a $0 = \text{tr}(C^t C) = \|C\|^2$ et donc C est la colonne nulle.

18. a. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ l'application $(X, Y) \mapsto {}^t X A Y$ est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique de E prouve l'existence de $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement positive telle que $A = {}^t T I_n T$ ie. $A = {}^t T T$. L'unicité de la base obtenue par ce procédé montre l'unicité de T . Réciproquement, si $A = {}^t T T$ où $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est à diagonale strictement positive, alors $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et, si $X \in E \setminus \{0_E\}$, ${}^t X A X = {}^t (TX)(TX) > 0$ car T est inversible, et donc $A \in \mathcal{S}_n^{++}$.

b. Écrivons $A = P \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}^t P$ où $P \in \mathcal{O}(n)$ et les $\lambda_i \geq 0$ et posons $B = P \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) {}^t P$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice $B_k = B + 2^{-k} I_n$ est élément de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ et admet une décomposition $B_k = Q_k R_k$ avec $Q_k \in \mathcal{O}(n)$ et R_k triangulaire supérieure à diagonale dans $]0, +\infty[$.

Extrayons de (Q_k) une suite $(Q_{\varphi(k)})$ convergente et écrivons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $R_{\varphi(k)} = {}^t Q_{\varphi(k)} B_{\varphi(k)}$, alors $(R_{\varphi(k)})$ converge et sa limite T est triangulaire supérieure à diagonale dans $\mathbb{R}_+$. En notant Q la limite de $(Q_{\varphi(k)})$ on a $B = QT$ et $A = B^2 = {}^t B B = {}^t (QT)(QT) = {}^t T T$.

19. a. La matrice relativement à la base canonique $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}U$ est $P_U = \frac{U {}^t U}{{}^t U U}$ et $S_U = I_n - 2P_U = I_n - 2 \frac{U {}^t U}{{}^t U U}$.

b. Soit $X = C_1(A)$ la première colonne de A . Alors X est non nulle et, si elle est colinéaire à E_1 , la matrice $S = I_n$ convient.

Sinon la réflexion par rapport à $(X + \|X\| E_1)^\perp$ transforme X en $\|X\| E_1$ et sa matrice S relativement à $\mathcal{E}$ vérifie $C_1(SA) = S A E_1 = S X = \|X\| E_1$ et convient.

c. Procédons par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant immédiat. Supposons la propriété établie à un rang $n-1 \geq 1$ et soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Choisissons S et A' comme dans la question précédente. Alors $A' \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ et l'hypothèse de récurrence prouve que $A' = S'_1 \dots S'_{n-2} T'$ où les S'_i sont des matrices de Householder dans $\mathcal{O}(n-1)$ et $T' \in \mathcal{T}_{n-1}(\mathbb{R})$. Posons, pour tout $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$, $S_i = \text{Diag}(1, S'_i)$, alors S_i

est une matrice de Householder dans $\mathcal{O}(n)$ et $S_{n-1} \dots S_1 S A = \begin{pmatrix} \alpha & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & T' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

en effectuant les produits par blocs, ce qui termine la récurrence.

TRAVAUX DIRIGÉS

• Matrice et déterminant de Gram

Soient E un espace euclidien de dimension m et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on appelle matrice de Gram de $(x_1, \dots, x_n)$ la matrice $\left((x_i | x_j)\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ et l'on note $G(x_1, \dots, x_n)$ son déterminant.

1. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ et sa matrice de Gram ont même rang.

2. Soient $(u_0, \dots, u_m)$ une famille de vecteurs unitaires de E et un élément α de $[-1, +1[$ tels que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, m \rrbracket^2$, si $i \neq j$ alors $(u_i | u_j) = \alpha$. Déterminer α et $u_0 + \dots + u_m$.

3. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée si, et seulement si, $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ et que $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre si, et seulement si, $G(x_1, \dots, x_n) > 0$.

4. Montrer que pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $G(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = G(x_1, \dots, x_n)$.

5. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on note $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Montrer que :

$$\forall x \in E, d^2(x, F) = \frac{G(x, x_1, \dots, x_n)}{G(x_1, \dots, x_n)}.$$

6. Démontrer par récurrence l'inégalité de Hadamard

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, G(x_1, \dots, x_n) \leq \|x_1\|^2 \dots \|x_n\|^2.$$

Étudier les cas d'égalité.

7. Si $(y_1, \dots, y_n) \in E^n$ montrer qu'il existe un élément u de $\mathcal{O}(E)$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $y_i = u(x_i)$ si, et seulement si, les familles $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ ont même matrice de Gram.

Solution

1. Notons A la matrice de Gram de $(x_1, \dots, x_n)$ et $\Lambda \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors $A\Lambda$ est nulle si, et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n \lambda_j (x_i | x_j) = 0$ ou encore

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)^\perp, \text{ ce qui revient à } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0_E.$$

Par suite $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(\Phi)$ où Φ est l'application linéaire surjective de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ définie par $\Phi(\Lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$. Le théorème du rang prouve

alors que $\text{rg}(A) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$

2. La famille $(u_0, \dots, u_m)$ est liée car $m+1 > \dim(E)$ et sa matrice de Gram

$A = \begin{pmatrix} 1 & & (\alpha) \\ & \ddots & \\ (\alpha) & & 1 \end{pmatrix}$ n'est donc pas inversible. Or $A = (1 - \alpha)I_{m+1} + \alpha J$

où J est la matrice de $\mathfrak{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ de coefficient générique 1 et donc semblable à $\text{Diag}(0, \dots, 0, m+1)$ d'après le cours du chapitre 2. Par suite A est semblable à $\text{Diag}(1 - \alpha, \dots, 1 - \alpha, 1 + m\alpha)$ et, comme elle n'est pas inversible et $\alpha \neq 1$, $\alpha = -\frac{1}{m}$.

La somme des colonnes de A est par conséquent nulle, ce qui signifie que, pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $u_i \perp (u_0 + \dots + u_m)$ et donc $u_0 + \dots + u_m = 0_E$.

3. La question précédente montre que $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée si, et seulement si, $G(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre on considère $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et X la matrice de $(x_1, \dots, x_n)$ relativement à $\mathcal{E}$.

Si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $({}^tXX)_{i,j} = \sum_{k=1}^n x_{k,i}x_{k,j} = \sum_{k=1}^n (x_i|e_k)(x_j|e_k) = (x_i|x_j)$ et donc

tXX est la matrice de Gram de $(x_1, \dots, x_n)$. Alors $G(x_1, \dots, x_n) = \det^2(X) > 0$ car X est inversible. La réciproque découle du début de la question.

4. • Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée, $G(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = G(x_1, \dots, x_n) = 0$.

• Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre, en reprenant la question précédente et en notant X' la matrice de $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ relativement à $\mathcal{E}$, si $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ on a $\det(X') = \varepsilon(\sigma)\det(X)$ d'où :

$$G(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon^2(\sigma)G(x_1, \dots, x_n) = G(x_1, \dots, x_n).$$

5. Soit $x \in E$. F étant un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, soit y la projection orthogonale de x sur F . On déduit du théorème de la projection orthogonale : $x = y + z$, $(y, z) \in F \times F^\perp$, $d(x, F) = \|z\|$ et $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

$$\text{D'où } A = \begin{pmatrix} (x_1|x_1) & \dots & (x_1|x_n) & (x_1|x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_{n-1}|x_1) & \dots & (x_{n-1}|x_n) & (x_{n-1}|x) \\ (x|x_1) & \dots & (x|x_n) & (x|x) \end{pmatrix} = B$$

$$\text{avec } B = \begin{pmatrix} (x_1|x_1) & \dots & (x_1|x_n) & (x_1|y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_n|x_1) & \dots & (x_n|x_n) & (x_n|y) \\ (y|x_1) & \dots & (y|x_n) & \|y\|^2 + \|z\|^2 \end{pmatrix} \text{ car } (x_i|x) = (x_i|y).$$

$y \in F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ donc $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

Notons $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}$ les vecteurs colonnes de B et effectuons dans le déterminant de B l'opération élémentaire suivante : $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - \lambda_1 C_1 - \dots - \lambda_n C_n$.

$$\text{On a alors : } \det(B) = \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & \dots & (x_1|x_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_n|x_1) & \dots & (x_n|x_n) & 0 \\ (y|x_1) & \dots & (y|x_n) & \|z\|^2 \end{vmatrix}$$

Par développement suivant la $(n+1)$ -ème colonne.

Donc : $\det(A) = G(x_1, \dots, x_n, x) = \det(B) = \|z\|^2 G(x_1, \dots, x_n)$. D'où le résultat.

6. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée alors $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ et la formule est évidente ; l'égalité ne pouvant avoir lieu que si l'un des x_i est nul.

Sinon faisons une récurrence. La propriété étant vraie pour $n = 1$ (avec égalité), pour $n = 2$, $G(x_1, x_2) = \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - (x_1 | x_2)^2 \leq \|x_1\|^2 \|x_2\|^2$ avec égalité si, et seulement si, $(x_1 | x_2) = 0$.

Supposons l'inégalité vraie pour tout système libre de n vecteurs, l'égalité ayant lieu si, et seulement si, les n vecteurs sont deux à deux orthogonaux. Soit $(x_1, \dots, x_{n+1})$ une famille libre de $(n + 1)$ vecteurs. Posons y la projection orthogonale de x_{n+1} sur $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. On déduit de 4. que :

$$G(x_1, \dots, x_{n+1}) = G(x_1, \dots, x_n) \|x_{n+1} - y\|^2 \quad (1)$$

$x_{n+1} - y = z$ étant orthogonal à y , on déduit du théorème de Pythagore : $\|x_{n+1}\|^2 = \|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$. Donc $\|x_{n+1}\|^2 \geq \|z\|^2$ (2)

De l'hypothèse de récurrence on déduit compte tenu de (1) et (2) :

$$G(x_1, \dots, x_{n+1}) \leq \|x_1\|^2 \dots \|x_n\|^2 \|x_{n+1}\|^2.$$

On n'a l'égalité que si $G(x_1, \dots, x_n) = \|x_1\|^2 \dots \|x_n\|^2$ et $\|x_{n+1}\|^2 = \|z\|^2$.

ie. $(x_1, \dots, x_n)$ sont deux à deux orthogonaux et $y = 0$. Or $y = 0 \iff x_{n+1} \in F^\perp$, donc on n'a l'égalité que si $(x_1, \dots, x_{n+1})$ sont deux à deux orthogonaux. D'où la propriété prouvée par récurrence.

7. Le sens direct découle de la conservation du produit scalaire par tout endomorphisme orthogonal.

Réciproquement, si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ ont même matrice de Gram alors elles ont même rang ; on le note p . Si $p = 0$ la propriété est immédiate.

Sinon, par exemple, $(x_1, \dots, x_p)$ est libre et donc sa matrice de Gram est inversible. Comme c'est aussi la matrice de Gram de $(y_1, \dots, y_p)$, cette dernière famille est libre. On considère $V = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \text{Vect}(y_1, \dots, y_p)$ et $W = \text{Vect}(y_1, \dots, y_p) = \text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$, $(e_{p+1}, \dots, e_m)$ et $(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_m)$ des bases orthonormales de $V^\perp$ et $W^\perp$. On définit enfin l'élément u de $\mathcal{L}(E)$ par :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, u(x_i) = y_i, \forall i \in \llbracket p+1, m \rrbracket, u(e_i) = \varepsilon_i.$$

Alors $u \in \mathcal{O}(E)$ car u conserve le produit scalaire par linéarité. Reste, pour terminer, à vérifier que, pour tout $i \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $u(x_i) = y_i$.

Soient $i \in \llbracket p+1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a :

$$(y_i - u(x_i) | y_j) = (y_i | y_j) - (u(x_i) | u(x_j)) = (y_i | y_j) - (x_i | x_j) = 0,$$

d'où $y_i - u(x_i) \in W \cap W^\perp = \{0_E\}$, et donc $y_i = u(x_i)$.

• Théorème de Courant-Fischer et applications

1. Théorème du minimax

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n et, si $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathcal{G}_p$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension p . On choisit un endomorphisme symétrique u de E de spectre ordonné décroissant $\lambda_1(u) \geq \dots \geq \lambda_n(u)$. Si F est un sous-espace vectoriel de E on note S_F sa sphère unité, $S_F = \{x \in F \mid \|x\| = 1\}$. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\lambda_k(u) = \max_{F \in \mathcal{G}_k} \left[\min_{x \in S_F} (u(x)|x) \right] = \min_{G \in \mathcal{G}_{n+1-k}} \left[\max_{x \in S_G} (u(x)|x) \right].$$

En déduire que λ_k est une application 1-lipschitzienne de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{S}(E), \|\cdot\|)$ des endomorphismes symétriques de E dans $\mathbb{R}$.

2. On suppose $n \geq 2$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1}$ matrice extraite. On ordonne les spectres de $A : \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ et de $B : \mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$. Montrer : $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$.

3. Inégalités de Bergstrom

a. Si y est un élément fixé non nul de E et u un endomorphisme symétrique défini positif de E ($u \in \mathcal{S}^{++}(E)$), on pose $\mu(u) = \frac{1}{(u^{-1}(y)|y)}$, montrer

$$\mu(u) = \min_{(x|y)=1} \left[(u(x)|x) \right].$$

Montrer que, si u et v sont deux éléments de $\mathcal{S}^{++}(E) : \mu(u) + \mu(v) \leq \mu(u+v)$.

b. Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{S}_n^{++}$, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on note A_i et B_i les matrices obtenues en supprimant les i -ème ligne et i -ème colonne.

Prouver :

$$\frac{\det(A+B)}{\det(A_i+B_i)} \geq \frac{\det(A)}{\det(A_i)} + \frac{\det(B)}{\det(B_i)}.$$

Solution

1. Fixons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres associée à $(\lambda_1(u), \dots, \lambda_n(u))$ et k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, $F_k \in \mathcal{G}_k$ et u induit un élément de $\mathcal{S}(F_k)$ et, sur S_{F_k} , $(u(x)|x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i |x_i|^2 \geq \lambda_k$, avec $(u(e_k)|e_k) = \lambda_k$ d'où

$\min_{x \in S_{F_k}} (u(x)|x) = \lambda_k$ puis $\sup_{F \in \mathcal{G}_k} \left[\min_{x \in S_F} (u(x)|x) \right] \geq \lambda_k$ sous réserve d'existence de cette borne supérieure.

Soit alors $F \in \mathcal{G}_k$, si G est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - k + 1$ alors $n \geq \dim(F + G) = n + 1 - \dim(F \cap G)$ d'où $\dim(F \cap G) \geq 1$. On prend $G = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)$, u induit un élément $\tilde{u}$ de $\mathcal{S}(G)$ de rayon spectral $r(\tilde{u}) = \lambda_k$ et, si $X \in S_G$, $(u(x)|x) \leq \lambda_k$, ce qui prouve *a fortiori* que $\min_{x \in S_{F \cap G}} (u(x)|x) \leq \lambda_k$ et donc $\min_{x \in S_F} (u(x)|x) \leq \lambda_k$. Cela prouve à la fois l'existence de la borne supérieure et l'inégalité $\sup_{F \in \mathcal{G}_k} \left[\min_{x \in S_F} (u(x)|x) \right] \leq \lambda_k$, donc l'égalité.

La deuxième égalité se démontre de la même façon.

Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $F \in \mathcal{G}_k$, u et v dans $\mathcal{S}(E)$, on a :

$(u(x)|x) - (v(x)|x) = ([u - v](x)|x) \leq \|u - v\|$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc $\min_{y \in S_F} (u(y)|y) \leq \|u - v\| + (v(x)|x)$ puis, en passant à la borne inférieure, $\min_{y \in S_F} (u(y)|y) \leq \|u - v\| + \min_{y \in S_F} (v(y)|y)$.

Choisissons F dans $\mathcal{G}_k$ tel que $\lambda_k(u) = \min_{y \in S_F} (u(y)|y)$.

$\lambda_k(u) \leq \|u - v\| + \min_{y \in S_F} (v(y)|y) \leq \|u - v\| + \lambda_k(v)$ et il vient alors :

$\lambda_k(u) - \lambda_k(v) \leq \|u - v\|$ puis, en échangeant u et v , $|\lambda_k(u) - \lambda_k(v)| \leq \|u - v\|$.

2. Si $Y \in \mathfrak{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ on pose $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{Y} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et ${}^t\tilde{Y}A\tilde{Y} = {}^tYBY$ ainsi que

$\|\tilde{Y}\| = \|Y\|$ pour les structures euclidiennes canoniques sur $\mathfrak{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(X_1, \dots, X_{n-1})$ une base orthonormée de vecteurs propres de B associée à $(\mu_1, \dots, \mu_{n-1})$.

Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ on pose $F_k = \text{Vect}(X_1, \dots, X_k)$ et $G_k = \text{Vect}(X_k, \dots, X_n)$.

Avec des notations adaptées et les égalités de Courant-Fischer on a :

$$\mu_k = \max_{Y \in S_{G_k}} {}^tYBY = \min_{Y \in S_{F_k}} {}^tYBY \text{ et } \lambda_k \geq \min_{\tilde{Y} \in S_{\tilde{F}_k}} {}^t\tilde{Y}A\tilde{Y} \text{ et } \lambda_{k+1} \leq \max_{\tilde{Y} \in S_{\tilde{G}_k}} {}^t\tilde{Y}A\tilde{Y}$$

où l'on a posé $\tilde{F}_k = \text{Vect}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k)$ et $\tilde{G}_k = \text{Vect}(\tilde{X}_k, \dots, \tilde{X}_n)$. Par conséquent :

$$\lambda_k \geq \mu_k \geq \lambda_{k+1}.$$

3. a. Comme u^{-1} est un endomorphisme symétrique défini positif, la forme bilinéaire symétrique $\varphi : (x', y') \mapsto (u^{-1}(x')|y')$ est un produit scalaire. Si $x \in E$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée avec $x' = u(x)$ et $y' = y$ montre que

$$(\star) \quad (x|y) \leq (x|u(x))(u^{-1}(y)|y), \text{ d'où } \mu(u) \leq \sup_{(x|y)=1} [(u(x)|x)].$$

$(\star)$ est une égalité si, et seulement si, $u(x)$ est colinéaire à y car $y \neq 0_E$. Par suite,

$$\text{avec } x = \frac{u^{-1}(y)}{(y|u^{-1}(y))}, \text{ on a } \mu(u) = \max_{(x|y)=1} [(u(x)|x)].$$

Soit alors x_0 tel que $(x_0|y) = 1$ et $\mu(u+v) = ((u+v)(x_0)|x_0)$, on a :

$$\mu(u) \geq (u(x_0)|x_0) \text{ et } \mu(v) \geq (v(x_0)|x_0) \text{ d'où } \mu(u) + \mu(v) \leq ((u+v)(x_0)|x_0) \text{ i.e.}$$

$$\mu(u) + \mu(v) \leq \mu(u+v).$$

b. Pour tout élément $X = {}^t(x_1 \cdots x_{i-1} \ x_{i+1} \cdots x_n)$ de $\mathfrak{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ on pose $\tilde{X} = {}^t(x_1 \cdots x_{i-1} \ 0 \ x_{i+1} \cdots x_n)$, alors $\tilde{X} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on a l'égalité ${}^t\tilde{X}A\tilde{X} = {}^tXA_iX$ d'où l'appartenance de A_i à $\mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$.

Pour $y = e_i$ considérons $\mu(u) = (u^{-1}(e_i)|e_i)$ où u est de matrice A relativement à la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

On a $(u^{-1}(e_i)|e_i) = {}^tE_iA^{-1}E_i = \frac{1}{\det(A)} {}^tE_iA^\dagger E_i$ où $A^\dagger = {}^t\text{Com}(A)$ d'où

$$(u^{-1}(e_i)|e_i) = \frac{1}{\det(A)} (A^\dagger)_{i,i} = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \text{ et donc } \mu(u) = \frac{\det(A)}{\det(A_i)}.$$

De même, si v est de matrice B relativement à $(e_1, \dots, e_n)$ alors $u+v$ est de matrice

$$A+B, \mu(v) = \frac{\det(B)}{\det(B_i)} \text{ et } \mu(u+v) = \frac{\det(A+B)}{\det(A_i+B_i)} \text{ et la fin de la démonstration.}$$

• Approximation d'une matrice de rang fixé

n désigne un élément de $\mathbb{N}^*$ et E l'ensemble $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On confond tout élément x de $\mathbb{R}^n$ avec sa matrice unicolonne notée X ; l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y) = {}^tXY$. La norme d'un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ sera notée $|X|$. L'espace vectoriel E sera muni du produit scalaire $(A, B) \mapsto \langle\langle A/B \rangle\rangle = \text{tr}({}^tAB)$, la norme de A est notée $\|A\|$.

Première partie

1. Montrer qu'une matrice $M \in E$ est de rang 1 si, et seulement si, elle s'écrit $M = X {}^tY$ où X et Y sont des matrices colonnes non nulles.

Établir les relations qui lient les matrices colonnes X, X' et Y, Y' lorsqu'une même matrice M de rang 1 est égale aux produits $X {}^tY$ et $X' {}^tY'$.

2. Si $(U_1, \dots, U_p)$ et $(V_1, \dots, V_q)$ sont deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de rangs r et s , déterminer le rang de la famille $(U_i {}^tV_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket}$.

3. a. À quelle condition sur les vecteurs X, X', Y et Y' de $\mathbb{R}^n$, les matrices $X {}^tY$ et $X' {}^tY'$ sont-elles orthogonales dans E pour $\langle\langle / \rangle\rangle$?

b. En déduire comment choisir deux suites $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$, pour que $(X_i {}^tY_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ soit base orthonormale de E .

4. Soit $A = X {}^tY$ une matrice de rang 1 et soit a le réel tXY .

a. Montrer que A annule un polynôme de degré 2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Montrer que les matrices diagonalisables de rang 1 engendrent E .

Deuxième partie

Soient A et B deux éléments de E et $\Phi_{A,B}$ l'endomorphisme de E défini par $\Phi_{A,B} : M \mapsto AM {}^tB$.

1. Déterminer en fonction des rangs r et s de A et B , le rang de $\Phi_{A,B}$.

2. a. Montrer que si V et W sont des vecteurs propres de A et B , la matrice $V {}^tW$ est vecteur propre de $\Phi_{A,B}$.

b. Caractériser les matrices de rang 1 qui sont éléments du noyau de $\Phi_{A,B}$.

c. Soit $X {}^tY$ une matrice de rang 1 vecteur propre associé à la valeur propre non nulle μ de $\Phi_{A,B}$. Est-ce que X et Y sont des vecteurs propres de A et B ?

d. Montrer que si A et B sont diagonalisables, $\Phi_{A,B}$ l'est aussi.

3. a. On suppose que $\Phi_{A,B}$ est orthogonal dans $(E, \langle\langle / \rangle\rangle)$ euclidien.

En choisissant pour M et N deux matrices égales de rang 1, établir qu'il y a une relation simple, pour tout couple (X, Y) d'éléments de $\mathbb{R}^n$, entre $|AX|^2 |BY|^2$ et $|X|^2 |Y|^2$.

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B d'appartenance de $\Phi_{A,B}$ à $\mathcal{O}(E)$.

Troisième partie

Désignons par m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice dans la base canonique M de rang r et par $m^\star$ l'endomorphisme canoniquement associé à m .

1. Montrer que le rang de $m^\star \circ m$ est r . Établir l'existence d'une base orthonormale $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de $m^\star \circ m$ et telle que les valeurs propres associées α_i vérifient les relations :

$$\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_r > 0 \text{ et si } r < n, \alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0.$$

2. a. Calculer $(m(v_i)|m(v_j))$ si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

b. En déduire qu'il existe des bases orthonormales $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(Z_j)_{1 \leq j \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ telles que : $M = \sqrt{\alpha_1} (Y_1 {}^t Z_1) + \dots + \sqrt{\alpha_n} (Y_n {}^t Z_n)$.

Quatrième partie

La matrice M de rang r est donnée ainsi qu'un entier s vérifiant $s < r$. Le but de cette partie est de déterminer une matrice P qui minimise $P \mapsto d(M, P)$ sur $\mathcal{R}_s = \{P \in E \mid \text{rg}(P) \leq s\}$. On admet que si N et M sont des matrices de rangs q et r , la suite décroissante (λ_i) des valeurs propres de ${}^t(M - N)(M - N)$ vérifie : $\forall i \in \llbracket 1, n - q \rrbracket, \lambda_i \geq \alpha_{i+q}$ où (α_i) est la suite décroissante des valeurs propres de ${}^t M M$.

1. On suppose $r > 1$, soit $s \in \llbracket 1, r - 1 \rrbracket$.

a. Montrer $d(M, \mathcal{R}_s) \leq \sqrt{\alpha_{s+1} + \dots + \alpha_r}$ où les α_i sont les valeurs propres de ${}^t M M$.

b. Soit N élément de $\mathcal{R}_s$; comparer $\|M - N\|^2$ et $\alpha_{s+1} + \dots + \alpha_r$.

c. En déduire la valeur de $d(M, \mathcal{R}_s)$.

Existe-t-il P dans $\mathcal{R}_s$ telle que $\|M - P\| = d(M, \mathcal{R}_s)$?

2. Soit $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$; soit $\mathcal{S}_s$ l'ensemble des matrices symétriques de rang inférieur ou égal à s . Soient A et B deux matrices respectivement symétrique et antisymétrique.

a. Que vaut $\langle\langle A/B \rangle\rangle$?

b. Montrer qu'il existe U dans $\mathcal{S}_s$ approchant A au plus près.

Évaluer $\|A - U\|$ à l'aide des valeurs propres λ_i de A ($|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$).

À quelle condition y a-t-il unicité de U ?

c. Soit M élément de E ; $M = A + B$ avec $A = {}^t A$ et $B = -{}^t B$.

Montrer qu'il existe un élément V de $\mathcal{S}_s$ approchant M au plus près.

Solution**Première partie**

1. Si $M = X^t Y$ avec $x_i \neq 0$ et $y_j \neq 0$ alors $\text{Im}(M) \subset \mathbb{R}X$ et $m_{i,j} = x_i y_j \neq 0$ donc $\text{rg}(M) = 1$. Réciproquement si M est de rang 1 alors, toutes ses colonnes sont homothétiques d'une même colonne X non nulle, les rapports étant $y_1, \dots, y_n$ non tous nuls, et alors $M = X^t Y$.

Si $X^t Y = X'^t Y' = M$ alors $\text{Im}(M) = \mathbb{R}X = \mathbb{R}X'$ d'où l'existence d'un réel non nul λ tel que $X' = \lambda X$ et donc $X^t Y = X'^t Y'$ si, et seulement si, $Y = \lambda Y'$.

2. On commence par le cas où les familles sont libres et on les complète en $(U_1, \dots, U_n)$ et $(V_1, \dots, V_n)$ bases de $\mathbb{R}^n$. Soient P et Q les éléments de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $U_1, \dots, U_n$ pour la première et $V_1, \dots, V_n$ pour la seconde. Alors, si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $U_i^t V_j = P E_i^t E_j^t Q = P E^{i,j,t} Q$ et, comme $X \mapsto P X^t Q$ est un automorphisme de E , la famille $(U_i^t V_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de E et donc $(U_i^t V_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket}$ est libre.

Dans le cas général, en supposant pour simplifier que $(U_1, \dots, U_r)$ et $(V_1, \dots, V_s)$ sont libres et en utilisant, pour tout $(i, j) \in \llbracket r+1, p \rrbracket \times \llbracket s+1, q \rrbracket$, $U_i \in \text{Vect}(U_1, \dots, U_r)$ et $V_j \in \text{Vect}(V_1, \dots, V_s)$, on voit en développant que, si $i \geq r+1$ ou $j \geq s+1$, $U_i^t V_j \in \text{Vect}(U_k^t V_\ell)_{(k,\ell) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket 1, s \rrbracket}$ et donc $(U_i^t V_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket}$ est de rang rs .

3. a. $\langle\langle X^t Y / X'^t Y' \rangle\rangle = \text{tr}[Y^t (X X')^t Y'] = {}^t X X' \text{tr}(Y^t Y') = (X|X')(Y|Y')$ et donc $X^t Y$ est orthogonale à $X'^t Y'$ pour $\langle\langle / \rangle\rangle$ si, et seulement si, $X \perp X'$ ou $Y \perp Y'$.

b. Il faut et il suffit que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|X_i^t Y_i\|^2 = 1$ i.e. $|X_i|^2 |Y_i|^2 = 1$, et que, de plus si $i \neq j$, $X_i \perp Y_j$ ou $X'_i \perp Y'_j$.

4. a. On a $(X^t Y)^2 = X^t (Y X) Y = aA$ et donc A annule $T = X^2 - aX$.

- Si $a \neq 0$ alors T est scindé à racines simples et A est diagonalisable.
- Si $a = 0$ alors A est nilpotente non nulle donc non diagonalisable.

b. Posons, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i = E_1 + \dots + E_i$ alors, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\text{tr}(X_i^t X_j) = \min(i, j) \neq 0$ et $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, donc $(X_i^t X_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de E constituée de matrices de rang 1 diagonalisables.

Deuxième partie

1. Si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\Phi_{A,B}(E^{i,j}) = (A E_i)^t (B E_j) = C_i(A)^t C_j(B)$ où $C_k(X)$ désigne la k -ième colonne de X . Comme le rang de $\Phi_{A,B}$ est celui de la famille $(\Phi_{A,B}(E^{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n}$, la question I. 2. montre que $\text{rg}(\Phi_{A,B}) = \text{rg}(A) \text{rg}(B)$.

2. a. Si $AV = \lambda V$ et $BW = \mu W$ on a $V^t W$ non nulle car de rang 1 et $\Phi_{A,B}(V^t W) = \lambda \mu (V^t W)$, ce qui prouve que $V^t W$ est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$ associé à $\lambda \mu$.

b. $\Phi_{A,B}(X^t Y) = 0 \iff (AX)^t (BY) = 0 \iff AX = 0$ ou $BY = 0$ car un produit $X'^t Y'$ est nul si, et seulement si, X' ou Y' est nul.

c. On a $(AX)^t (BY) = (\mu X)^t Y$ et donc, d'après I.1. AX et μX sont liés, BY et Y également, X et Y sont vecteurs propres respectifs de A et B .

d. Découle immédiatement de I.2. et de II.2.a.

$$\begin{aligned} \text{3. a. On choisit } M = N = X^t Y; \\ \langle \langle \Phi_{A,B}(M) / \Phi_{A,B}(N) \rangle \rangle &= \text{tr}(B^t M^t A A M^t B) = \text{tr}[B Y^t (A X) (A X)^t Y^t B] \\ &= {}^t(A X) (A X) \text{tr}[(B Y)^t (B Y)] = |A X|^2 |B Y|^2. \end{aligned}$$

D'autre part $\langle \langle \Phi_{A,B}(M) / \Phi_{A,B}(N) \rangle \rangle = \langle \langle M / N \rangle \rangle = \text{tr}[Y({}^t X X)^t Y] = |X|^2 |Y|^2$, d'où $|A X|^2 |B Y|^2 = |X|^2 |Y|^2$.

b. Si $\Phi_{A,B} \in \mathcal{O}(E)$ alors $\text{rg}(\Phi_{A,B}) = n^2$ d'où $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = n$.

Pour Y fixé non nul, on a, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $|A X|^2 = \alpha |X|^2$ où $\alpha = \frac{|Y|^2}{|B Y|^2} > 0$

et donc $P = \frac{A}{\sqrt{\alpha}} \in \mathcal{O}(n)$ puis $\sqrt{\alpha} Q = B \in \mathcal{O}(n)$. Enfin $\Phi_{A,B} = \Phi_{P,Q}$.

Réciproquement, s'il existe $(P, Q) \in (\mathcal{O}(n))^2$ tel que $\Phi_{A,B} = \Phi_{P,Q}$ alors, pour tout $(M, N) \in E^2$, $\langle \langle \Phi_{A,B}(M) / \Phi_{A,B}(N) \rangle \rangle = \text{tr}(Q^t M^t P P M^t Q) = \text{tr}(Q^t M M Q^{-1})$ d'où $\langle \langle \Phi_{A,B}(M) / \Phi_{A,B}(N) \rangle \rangle = \text{tr}({}^t M M) = \|M\|^2$ et donc $\Phi_{A,B} \in \mathcal{O}(E)$.

Troisième partie

1. On a immédiatement $\text{Ker}(m) \subset \text{Ker}(m^{\star} \circ m)$.

Si $x \in \text{Ker}(m^{\star} \circ m)$ alors $0 = (x | m^{\star} \circ m(x)) = {}^t X^t M M X = |M x|^2$ par définition de $m^{\star}$ d'où $x \in \text{Ker}(m)$ et donc $\text{Ker}(m) = \text{Ker}(m^{\star} \circ m)$, ce qui prouve que $\text{rg}(m) = \text{rg}(m^{\star} \circ m)$.

Comme $m^{\star} \circ m$ est symétrique E admet une base orthonormée de vecteurs propres de $m^{\star} \circ m$, ce qui termine la question.

2. a. Si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ on a :

$$(m(v_i) | m(v_j)) = {}^t(M v_i)(M v_j) = {}^t v_i {}^t M M v_j = (v_i | m^{\star} \circ m(v_j)) = \alpha_j (v_i | v_j) \text{ d'où } m(v_i) \perp m(v_j) \text{ si } i \neq j \text{ et } |m(v_i)| = \sqrt{\alpha_i}.$$

b. Complétons la famille orthonormale $\left(\frac{m(v_i)}{\sqrt{\alpha_i}} \right)_{1 \leq i \leq r}$ en une base orthonormée de E notée $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$. Si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $m(v_i) = \sqrt{\alpha_i} y_i$ et donc, matriciellement, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i} Y_i {}^t V_i \right) V_k = \sqrt{\alpha_k} Y_k = M Y_k$, d'où $M = \sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i} Y_i {}^t V_i$, ce qui répond à la question.

Quatrième partie

1. a. On reprend les notations de la question précédente et l'on considère la matrice $N = \sum_{i=1}^s \sqrt{\alpha_i} Y_i {}^t V_i$, alors $N \in \mathcal{R}_s$ et, comme $(Y_i {}^t V_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base

orthonormée de E , $\|M - N\|^2 = \sum_{i=s+1}^n \alpha_i = \sum_{i=s+1}^r \alpha_i$, d'où $d(M, \mathcal{R}_s) \leq \sqrt{\sum_{i=s+1}^r \alpha_i}$.

b. ${}^t(M - N)(M - N) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, en écrivant ${}^t(M - N)(M - N) = Q \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}^t Q$ où $Q \in \mathcal{O}(n)$ et $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, on a $\|M - N\|^2 = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \geq \alpha_{s+1} + \dots + \alpha_r$ d'après la propriété admise dans l'énoncé, d'où $\|M - N\|^2 \geq \alpha_{s+1} + \dots + \alpha_r$.

c. Les questions précédentes prouvent que $d(M, \mathcal{R}_s) = \sqrt{\alpha_{s+1} + \dots + \alpha_r}$ et que cette distance est atteinte.

2. a. $\langle\langle A/B \rangle\rangle = \text{tr}({}^tAB) = \text{tr}(AB) = \langle\langle B/A \rangle\rangle = \text{tr}({}^tBA) = -\text{tr}(AB)$.

D'où $\langle\langle A/B \rangle\rangle = 0$.

b. Si $A = Q \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) {}^tQ$ où $Q \in \mathcal{O}(n)$, on a $A = \sum_{i=1}^r \lambda_i C_i(Q) {}^tC_i(Q)$

et, en posant $U = \sum_{i=1}^s \lambda_i C_i(Q) {}^tC_i(Q) \in \mathcal{S}_s$, on a, d'après les questions précédentes,

$$\|A - U\| = \sqrt{\lambda_{s+1}^2 + \dots + \lambda_r^2} = d(A, \mathcal{R}_s) \text{ et donc } U \text{ approche } A \text{ au plus près.}$$

• Si $\lambda_s = \lambda_{s+1}$ alors $V = \sum_{i=1}^{s-1} \lambda_i C_i(Q) {}^tC_i(Q) + \lambda_{s+1} C_{s+1}(Q) {}^tC_{s+1}(Q)$ convient aussi, la solution n'est pas unique.

• Si $\lambda_s > \lambda_{s+1}$, si U est solution alors $A - U \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable. On note $\mu_1, \dots, \mu_n$ ses valeurs propres comptées avec ordre de multiplicité et $|\mu_1| \geq \dots \geq |\mu_n|$. On a $\|A - U\|^2 = \mu_1^2 + \dots + \mu_n^2 \geq \lambda_{s+1}^2 + \dots + \lambda_r^2 = \|A - U\|^2$ et il s'agit donc d'égalités. Par suite il existe $Q \in \mathcal{O}(n)$ et $\varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_r$ dans $\{-1, +1\}$ tels que $A - U = Q \text{Diag}(\varepsilon_{s+1}\lambda_{s+1}, \dots, \varepsilon_r\lambda_r, 0, \dots, 0) {}^tQ$.

Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $F = \text{Ker}(U) \cap \text{Im}(A)$ est de dimension au moins

$r - s$ et, si $X = \sum_{i=1}^s x_i V_i \in F$ avec $|X| = 1$, on a $|(A - U)X|^2 = |AX|^2 > \lambda_{s+1}^2$, ce

qui est absurde car, d'après la forme diagonale, $|(A - U)X|^2 \leq \lambda_{s+1}^2$.

Donc $F \subset \text{Vect}(V_1, \dots, V_s)^\perp = \text{Vect}(V_{s+1}, \dots, V_n)$ et alors le rang de $A - U$ prouve que $F = \text{Vect}(V_{s+1}, \dots, V_n) = \text{Im}(A - U)$.

Les matrices $A - U$ et $A - \sum_{i=1}^s \lambda_i C_i(Q) {}^tC_i(Q)$ coïncident sur F et sur $F^\perp$ donc sont égales et on a prouvé l'unicité de U .

c. Le théorème de Pythagore montre que $\|M - S\|^2 = \|A - S\|^2 + \|B\|^2$ ce qui nous ramène à la question b.

Remarque : la propriété admise par l'énoncé peut être prouvée en utilisant le théorème du minimax vu dans un autre travail dirigé de ce chapitre.

• Conditionnement d'une matrice de Hilbert

Notations

- À $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on associe $\Phi_A : \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \mapsto AX$.
- Si ${}^tX = (x_1 \dots x_n)$ et ${}^tY = (y_1 \dots y_n)$, $(X|Y) = {}^tXY$, $\|X\|_2 = \sqrt{(X|X)}$.
- À $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on associe $\|\Phi_A\| = \sup_{\|X\|_2 \leq 1} \|AX\|_2 = \|A\|$.

On rappelle que l'on définit ainsi une norme d'algèbre sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I

1. Soit $A' \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive notée par blocs : $A' = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & a \end{pmatrix}$ où $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que A est une matrice symétrique définie positive et que $a > 0$.

2. Notons $\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A , $\alpha = \min(\text{Sp}(A))$ et $\beta = \max(\text{Sp}(A))$.

a. Montrer que : $\alpha = \min_{\|X\|_2=1} q_A(X)$ et $\beta = \max_{\|X\|_2=1} q_A(X)$.

b. Si $\alpha' = \min(\text{Sp}(A'))$ et $\beta' = \max(\text{Sp}(A'))$, montrer que $\alpha' \leq \alpha$ et $\beta \leq \beta'$.

3. Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X' = \begin{pmatrix} X \\ u \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ où $u \in \mathbb{R}$.

a. Montrer l'égalité : $q_{A'}(X') = q_A(X) + 2u({}^tXC) + au^2$.

b. Montrer que : $q_{A'}(X') \leq (\|X\|_2 \quad |u|) \begin{pmatrix} \beta & \|C\|_2 \\ \|C\|_2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|X\|_2 \\ |u| \end{pmatrix}$.

c. En déduire que : $\beta' \leq \frac{1}{2} \left[\beta + a + \sqrt{4\|C\|_2^2 + (\beta - a)^2} \right]$.

Partie II

On note $H_n \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par : $H_n = (a_{i,j})$ où $a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$ pour i et j dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Pour ${}^tX = (x_0 \dots x_n) \in \mathfrak{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ et non nul, on pose $q_n(X) = q_{H_n}(X) = {}^tXH_nX$.

1. Montrer que $q_n(X) = \int_0^1 (x_0 + x_1t + \dots + x_nt^n)^2 dt$ et en déduire que H_n est définie positive.

2. a. Montrer que si P est un polynôme à coefficients complexes, on a :

$$\int_{-1}^1 P(x)dx + i \int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta = 0.$$

b. En déduire que : $q_n(X) < \int_0^\pi |x_0 + x_1e^{i\theta} + \dots + x_ne^{in\theta}|^2 d\theta$.

c. En déduire que $q_n(X) < \pi\|X\|_2^2$.

3. Montrer que $\text{Sp}(H_n)$ est une partie de $]0, \pi[$.

4. On note $\alpha_n = \min(\text{Sp}(H_n))$ et $\beta_n = \max(\text{Sp}(H_n))$. Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ et $(\beta_n)_{n \geq 0}$ sont respectivement décroissante et croissante.

Partie III

Soit $\delta_n = \inf_{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 (x_0 + x_1 t + \dots + x_{n-1} t^{n-1} + t^n)^2 dt \right)$.

1. Montrer qu'il existe un unique vecteur $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$\delta_n = \int_0^1 (a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n)^2 dt$ et qu'il est déterminé par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_0^1 (a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n) t^k dt = 0.$$

2. Soit F la fraction rationnelle définie par :

$$F(X) = \frac{a_0}{X+1} + \frac{a_1}{X+2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{X+n} + \frac{1}{X+n+1}$$

a. Quelle est la valeur de $F(k)$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$?

b. Montrer que $F(X) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{X(X-1) \cdots (X-n+1)}{(X+1) \cdots (X+n+1)}$. Exprimer δ_n à l'aide de F et en déduire la valeur de δ_n .

3. α_n ayant été défini en II.4. montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < \alpha_n \leq \frac{1}{12 \cdot (15)^{n-1}}$.

Partie IV

Pour toute matrice A inversible de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle conditionnement de A le réel défini par : $C(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

1. Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'unique solution de $AX = B$, $B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $B \neq 0$. Quand B devient $B + \Delta B$, alors X devient $X + \Delta X$, tel que :

$A(X + \Delta X) = B + \Delta B$. Montrer que :

$$\frac{\|\Delta X\|_2}{\|X\|_2} \leq C(A) \cdot \frac{\|\Delta B\|_2}{\|B\|_2} \quad \text{et que} \quad C(A) \geq 1.$$

2. a. Exprimer pour toute matrice A inversible de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ le réel $C(A)$ à l'aide des éléments de $\text{Sp}(A^t A)$. Que vaut $C(A)$ si A est une matrice symétrique définie positive ?

b. Montrer que si $C(A) = 1$, alors il existe $\mu > 0$ tel que la matrice μA soit orthogonale.

c. Comparer $C(A)$ et $C(QA)$ si Q est une matrice orthogonale.

d. Grâce au calcul de β_1 , donner une minoration de $C(H_n)$ pour $n \geq 1$.

Solution

Partie I

1. Notons $X' = \begin{pmatrix} X \\ u \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ où $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $u \in \mathbb{R}$.

$$A'X' = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^t C & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + Cu \\ {}^t CX + au \end{pmatrix}. \text{ D'où :}$$

$${}^tX'A'X' = \begin{pmatrix} {}^tX & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AX + Cu \\ {}^tCX + au \end{pmatrix} = {}^tXAX + u({}^tXC + {}^tCX) + au^2.$$

$$\text{Comme } {}^tXC = {}^tCX = (C|X), \text{ donc : } q_{A'}(X') = q_A(X) + 2u({}^tXC) + au^2 \quad (1).$$

La matrice A' étant symétrique définie positive, quel que soit $X \neq 0$, si $X' = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $q_{A'}(X') > 0$. Donc $q_A(X) > 0$ d'après (1). La matrice symétrique A est donc définie positive. De même, avec $X' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a $q_{A'}(X') > 0 \Rightarrow a > 0$.

2. a. Notons $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la forme quadratique q_A a été réduite de telle sorte que $\alpha = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \beta$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A et où $Ae_i = \lambda_i e_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

On a : $q_A(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$ où $(y_1, \dots, y_n)$ sont les coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$.

Donc : $\alpha \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq q_A(X) \leq \beta \sum_{i=1}^n y_i^2$. Comme $\sum_{i=1}^n y_i^2 = \|X\|_2^2$, on a :

$\alpha \leq \min_{\|X\|_2=1} q_A(X)$ et $\beta \geq \max_{\|X\|_2=1} q_A(X)$. De $q_A(e_1) = \alpha$ et $q_A(e_n) = \beta$, on déduit les égalités demandées.

b. Pour $X'_n = \begin{pmatrix} e_n \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $q_{A'}(X'_n) = q_A(e_n) = \beta \leq \max_{\|X'\|_2=1} q_{A'}(X') = \beta'$.

Un raisonnement analogue, avec $X'_1 = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne $\alpha' \leq \alpha$.

3. a. Déjà traité en 1.1.

b. On déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|{}^tXC| = |(X|C)| \leq \|X\|_2 \cdot \|C\|_2$.

Donc $u({}^tXC) \leq |u| \cdot |{}^tXC| \leq |u| \cdot \|X\|_2 \cdot \|C\|_2$ et :

$q_{A'}(X') \leq q_A(X) + 2|u| \cdot \|X\|_2 \cdot \|C\|_2 + au^2$. D'après 3.a. $q_A(X) \leq \beta \|X\|_2^2$.

Donc : $q_{A'}(X') \leq \beta \|X\|_2^2 + 2|u| \cdot \|X\|_2 \cdot \|C\|_2 + au^2 = z$.

On vérifie que $z = (\|X\|_2 \quad |u|) \begin{pmatrix} \beta & \|C\|_2 \\ \|C\|_2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|X\|_2 \\ |u| \end{pmatrix}$.

c. Pour déterminer les valeurs propres de $A'' = \begin{pmatrix} \beta & \|C\|_2 \\ \|C\|_2 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, on

calcule $\chi_{A''}(T) = T^2 - \text{tr}(A'')T + \det(A'') = T^2 - (\beta + a)T + a\beta - \|C\|_2^2$.

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (\beta - a)^2 + 4\|C\|_2^2 \geq 0$.

A'' a deux valeurs propres $\lambda_1 = \frac{1}{2}[\beta + a - \sqrt{\Delta}]$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}[\beta + a + \sqrt{\Delta}]$ et l'on a

$\lambda_1 \leq \lambda_2$. En appliquant à A'' le calcul de I.3.a. en posant ${}^tX'' = (\|X\|_2 \quad |u|)$, on a : $q_{A''}(X'') \leq \lambda_2 \|X''\|_2^2$. Or $\|X''\|_2^2 = \|X\|_2^2 + u^2 = \|X'\|_2^2$.

Donc $q_{A'}(X') \leq \lambda_2 \|X'\|_2^2$. Donc $\beta' = \max_{\|X'\|_2=1} q_{A'}(X') \leq \lambda_2$ ie. le résultat.

Partie II

1. $q_n(X) = {}^tXH_nX = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{i+1,j+1} x_i x_j$. Or $a_{i+1,j+1} = \frac{1}{i+j+1} = \int_0^1 t^{i+j} dt$,

donc $q_n(X) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left(\int_0^1 t^{i+j} dt \right) x_i x_j = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^n x_i t^i \right) \left(\sum_{j=0}^n x_j t^j \right) dt$ par linéarité

de l'intégration. Donc $q_n(X) = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^n x_i t^i \right)^2 dt$.

La fonction polynomiale $P : t \mapsto \sum_{i=0}^n x_i t^i$ est continue sur $[0, 1]$, distincte de la fonction nulle car $X \neq 0$. Comme $P^2 \geq 0$, on a $q_n(X) > 0$. Donc la matrice symétrique H_n est définie positive.

2. a. De la linéarité de l'intégration on déduit que l'application $\Phi : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}$,

$R \mapsto \int_{-1}^1 R(x) dx + i \int_0^\pi R(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$ est linéaire. $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ étant une base de $\mathbb{C}[X]$,

on a l'équivalence suivante : $(\forall R \in \mathbb{C}[X], \Phi(R) = 0) \iff (\forall k \in \mathbb{N}, \Phi(X^k) = 0)$.

Or $\Phi(X^k) = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_{-1}^+ + \left[\frac{e^{i(k+1)\theta}}{k+1} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{1}{k+1} [1 - (-1)^{k+1} + (-1)^{k+1} - 1] = 0$.
D'où $\Phi = 0$ et le résultat est prouvé.

b. Avec les notations de II.1. P^2 est continue, positive et distincte de la fonction nulle sur $[-1, 0]$. Donc $\int_0^1 P^2(t) dt < \int_{-1}^1 P^2(t) dt = -i \int_0^\pi P^2(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$ car, d'après a. $\Phi(P^2) = 0$. En posant $z = -i \int_0^\pi P^2(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$, on a $z \in \mathbb{R}_+$. Donc :

$$z = |z| \leq \int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta. \text{ Donc } q_n(X) < \int_0^\pi \left| \sum_{k=0}^n x_k e^{ik\theta} \right|^2 d\theta.$$

c. $|P(e^{i\theta})|^2 = P(e^{i\theta}) \overline{P(e^{i\theta})} = P(e^{i\theta}) P(e^{-i\theta})$ car P est un polynôme à coefficients réels, donc $\theta \mapsto |P(e^{i\theta})|^2$ est paire. D'où : $\int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$.

$$|P(e^{i\theta})|^2 = P(e^{i\theta}) P(e^{-i\theta}) = \left(\sum_{k=0}^n x_k e^{ik\theta} \right) \left(\sum_{\ell=0}^n x_\ell e^{-i\ell\theta} \right) = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} x_k x_\ell e^{i(k-\ell)\theta}.$$

$$\text{Par linéarité de l'intégration, } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} x_k x_\ell \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)\theta} d\theta.$$

$$\text{Comme } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip\theta} d\theta = \delta_{p,0} \text{ pour tout } p \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{k=0}^n x_k^2.$$

$$\text{Donc } \int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \pi \|X\|_2^2. \text{ D'où } q_n(X) < \pi \|X\|_2^2 \text{ d'après II.2.b).}$$

3. Du cours et de II.1. on déduit que $\text{Sp}(H_n) \subset]0, +\infty[$.

De I.3. on déduit que : $\max_{\|X\|_2=1} \text{Sp}(H_n) = \max_{\|X\|_2=1} q_n(X)$.

De II.2.c. on déduit enfin que l'on a : $\text{Sp}(H_n) \subset]0, \pi[$.

4. L'application de I.3.b. donne : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq \beta_{n+1}$.

La suite (α_n) est décroissante et la suite (β_n) croissante.

Partie III

1. Si l'on munit l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[T]$ du produit scalaire défini par :

$(A, B) \mapsto \int_0^1 A(t)B(t)dt = (A|B)$, c'est un espace préhilbertien réel. Comme $\mathbb{R}_{n-1}[T]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[T]$, on déduit du théorème de la projection orthogonale que : $\delta_n = d^2(T^n, \mathbb{R}_{n-1}[T])$.

Donc $\delta_n = \inf_{P \in \mathbb{R}_{n-1}[T]} d^2(T^n, P) = \min_{P \in \mathbb{R}_{n-1}[T]} d^2(T^n, P) = \|T^n - P_{\mathbb{R}_{n-1}[T]}(T^n)\|^2$

où $P_{\mathbb{R}_{n-1}[T]}(T^n)$ est la projection orthogonale de T^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[T]$, $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire et d la distance associée à la norme.

$$P_{\mathbb{R}_{n-1}[T]}(T^n) \in \mathbb{R}_{n-1}[T] \iff T^n - P_{\mathbb{R}_{n-1}[T]}(T^n) \in [\mathbb{R}_{n-1}[T]]^\perp.$$

Comme $(T^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[T]$, on a :

$$P_{\mathbb{R}_{n-1}[T]}(T^n) \in \mathbb{R}_{n-1}[T] \iff (\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, T^n - P_{\mathbb{R}_{n-1}[T]}(T^n) \perp T^k) \quad (\star).$$

Notons $P_{\mathbb{R}_{n-1}[T]}(T^n) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k T^k$, alors :

$$(\star) \iff \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_0^1 \left(t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \right) t^k dt = 0.$$

$$2. \text{ a. } (\star) \iff \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{1}{n+k+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{i+k+1} = 0 = F(k).$$

b. $\delta_n = (T^n - P_{\mathbb{R}_{n-1}[T]}|T^n - P_{\mathbb{R}_{n-1}[T]}) = (T^n - P_{\mathbb{R}_{n-1}[T]}|T^n)$ car $T^n - P_{\mathbb{R}_{n-1}[T]}$ est orthogonal à $P_{\mathbb{R}_{n-1}[T]}$. Donc $\delta_n = \int_0^1 \left(t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \right) t^n dt = F(n)$ d'après les

calculs du 2. a. La partie entière de F étant nulle, $F(T) = \frac{P(T)}{(T+1) \cdots (T+n+1)}$ où $P \in \mathbb{R}_n[T]$. Comme $F(k) = P(k) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\deg(P) \leq n$, on a $P(T) = \lambda T(T-1) \cdots (T-n+1)$. Pour déterminer λ , il suffit de chercher le résidu du pôle simple : $-(n+1)$ par la méthode classique, à savoir multiplication de $F(T)$ par $(T+n+1)$ puis substitution de T par $-(n+1)$. Comme ce résidu est égal à 1 par définition de F , on a : $1 = \frac{\lambda(-n-1)(-n-2) \cdots (-2n)}{(-n)(-n+1) \cdots (-1)} = \lambda \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

D'où le résultat. On a alors $\delta_n = F(n) = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$.

3. Avec les notations de la partie II, si ${}^tX = (a_0 \dots a_{n-1} 1) \in \mathfrak{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$, alors $q_n(X) = \delta_n = {}^tX H_n X \geq \alpha_n \|X\|_2^2$ d'après I.3.

Comme $\|X\|_2^2 = 1 + a_0^2 + \dots + a_n^2 \geq 1$, on a bien $\delta_n \geq \alpha_n$. (on sait déjà que $\alpha_n > 0$ d'après II.1.). Il suffit de montrer par récurrence que $\delta_n \leq \frac{1}{12(15)^{n-1}}$.

$$\alpha_1 = \frac{4 - \sqrt{13}}{6} = 0,0657 \dots \text{ et } \alpha_1 \leq \frac{1}{12}.$$

Supposons le résultat vrai au rang $(n-1)$ pour $n \geq 2$.

$$\delta_n = \frac{(n+1)^2}{4(2n+1)(2n+3)} \delta_{n-1} \text{ et } 4(n+1)^2 = (2n+1)(2n+3) + 1.$$

Donc $\delta_n = \frac{1}{16} \left[1 + \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} \right] \leq \frac{1}{16} \left[1 + \frac{1}{3.5} \right] = \frac{1}{15}$. D'où $\delta_n \leq \frac{1}{15} \delta_{n-1}$ et la conclusion avec l'hypothèse de récurrence. D'où le résultat par théorème de récurrence.

Partie IV

1. $A(X + \Delta X) = B + \Delta B$ et $AX = B$ impliquent $A\Delta X = \Delta B$ i.e. $\Delta X = A^{-1}\Delta B$ car A est inversible. Donc $\|\Delta X\|_2 \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta B\|_2$.

Or $AX = B \Rightarrow \|A\| \cdot \|X\|_2 \geq \|AX\|_2 = \|B\|_2$.

Donc $\frac{1}{\|X\|_2} \leq \frac{\|A\|}{\|B\|_2}$. (cf. $B \neq 0 \Rightarrow \|B\| > 0$). D'où $\frac{\|\Delta X\|_2}{\|X\|_2} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta B\|_2}{\|B\|_2}$.

D'autre part, $AA^{-1} = I \Rightarrow 1 = \|I\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. D'où : $\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1$

2. a. Si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, les matrices $M = A^t A$ et $M' = {}^t A A$ sont symétriques définies positives. En effet, elles sont symétriques. Elles sont inversibles en tant que produit de matrices inversibles. Donc $0 \notin \text{Sp}(M)$ et $0 \notin \text{Sp}(M')$. Enfin, on a : $q_M(X) = {}^t(A X)({}^t A X) = \|({}^t A X)\|_2^2$ et $q_{M'}(X) = \|AX\|_2^2$.

On vérifie aisément, $\|A\|^2 = \|M\| = \|M'\|$.

Du théorème II.C.5, on déduit que $\|A\| = \sqrt{\max(\text{Sp}(A^t A))} = \sqrt{\max(\text{Sp}({}^t A A))}$.

En remplaçant A par A^{-1} , on a : $\|A^{-1}\| = \sqrt{\max(\text{Sp}({}^t A^{-1} A^{-1}))}$.

Or ${}^t A^{-1} A^{-1} = M^{-1}$ et $\text{Sp}(M^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \text{Sp}(M)\}$. Donc,

$\max(\text{Sp}(M^{-1})) = \frac{1}{\min(\text{Sp}(M))}$ puisque $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$.

D'où : $C(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \sqrt{\frac{\max(\text{Sp}(A^t A))}{\min(\text{Sp}(A^t A))}}$.

Si A est symétrique définie positive, $A^2 = {}^t A A = A^t A$, de spectre $\{\lambda^2 \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\}$,

on a $C(A) = \frac{\max(\text{Sp}(A))}{\min(\text{Sp}(A))}$.

b. $C(A) = 1 \iff \max(\text{Sp}(A^t A)) = \min(\text{Sp}(A^t A)) \iff \text{Sp}(A^t A) = \{\alpha\}$.

Comme $A^t A$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable et $A^t A = \alpha I_n$.

Comme $A^t A$ est définie positive, $\alpha > 0$.

Donc $C(A) = 1 \iff \exists \alpha > 0, A^t A = \alpha I_n \iff \exists \alpha > 0, \left(\frac{A}{\sqrt{\alpha}}\right)^t \left(\frac{A}{\sqrt{\alpha}}\right) = I_n$.

Donc $C(A) = 1 \iff \exists \mu > 0, \mu A \in \mathcal{O}(n)$.

c. Si $Q \in \mathcal{O}(n)$, $(QA)^t(QA) = Q(A^t A)^t Q$ est semblable à $A^t A$ et a donc le même spectre. Par suite $C(A) = C(QA)$.

d. D'après 2. a. on a : $C(H_n) = \frac{\beta_n}{\alpha_n}$ et $\alpha_n \leq \frac{1}{12(15)^{n-1}}$ si $n \geq 1$.

Donc $C(H_n) \geq 12(15)^{n-1} \beta_n \geq 12(15)^{n-1} \beta_1$ car (β_n) est croissante.

Comme $\beta_1 = \frac{4 + \sqrt{13}}{6}$ d'après II.5. on a une minoration de $C(H_n)$. On peut conclure que la matrice de Hilbert est très mal conditionnée car $C(H_n)$ tend très vite vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.

• Norme d'un endomorphisme symétrique

Notations et objectifs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{C}$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, E_n le sous-espace vectoriel formé des $y \in \mathcal{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et vérifiant : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, y^{(k)}(0) = 0$.

On munit $\mathcal{C}$ et donc aussi E_n du produit scalaire défini par :

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt \text{ et l'on note } N \text{ la norme associée au produit scalaire.}$$

On se propose d'établir l'existence d'une plus petite constante positive A_n telle que, pour tout $y \in E_n$ ($y|y^{(n)} \leq A_n(y^{(n)}|y^{(n)})$) et d'établir quelques résultats relatifs à la valeur de A_n .

Première partie

1. Soit $f \in \mathcal{C}$; établir qu'il existe un unique $g \in E_n$ tel que $g^{(n)} = f$ et montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $g(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$.

On pose alors $g = T_n(f)$, ce qui définit une application linéaire T_n de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$; la notation $T_n(f)$ pourra être abrégée en $T_n f$.

2. a. Établir que $\text{Im}(T_n) = E_n$ et trouver $\text{Ker}(T_n)$.

b. Montrer que T_n est continue pour la norme N et donner une majoration de la norme de T_n .

3. a. Montrer que la quantité A_n définie dans le préambule existe, qu'elle est égale à : $\sup_{f \in \mathcal{C} \setminus \{0\}} \frac{(f|T_n f)}{(f|f)}$ et est majorée par $\frac{1}{(n-1)!}$.

b. À l'aide d'un élément f de $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ très simple, établir que $A_n \geq \frac{1}{(n+1)!}$.

4. À tout $f \in \mathcal{C}$ on associe la fonction $U_n(f)$, notée $U_n f$, définie par :

$$\forall x \in [0, 1], U_n f(x) = \int_x^1 \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt.$$

a. Établir que $U_n f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et donner sa dérivée n -ième.

b. $U_n f$ est donc un élément de $\mathcal{C}$, et l'on a ainsi défini une application linéaire U_n de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$. Montrer que U_n est continue.

c. Montrer que : $\forall (f, g) \in \mathcal{C}^2, (U_n f|g) = (f|T_n g)$.

5. Soit S_n l'endomorphisme de $\mathcal{C}$ défini par $S_n = \frac{1}{2}(T_n + U_n)$.

a. Établir que : $\forall f \in \mathcal{C}, \forall x \in [0, 1], (S_n f)(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$.

b. Donner la dérivée n -ième de $S_n f$.

c. Comparer, f et g étant dans $\mathcal{C}$, $(S_n f|g)$ et $(f|S_n g)$.

d. Établir que : $A_n = \sup_{f \in \mathcal{C} \setminus \{0\}} \frac{(f|S_n f)}{(f|f)}$.

Deuxième partie : Étude du cas où n est impair

1. Établir, pour tout $y \in E_1$, l'inégalité : $\int_0^1 yy' \leq \frac{1}{2} \int_0^1 y'^2$. Pour quels y de E_1 les deux membres sont-ils égaux ? Quelle est la valeur de A_1 ?

2. Dans cette question et la suivante, n est impair au moins égal à 3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k l'application : $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^k$. On désigne par P_n le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ engendré par $(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$.

a. Établir que : $\text{Im}(S_n) \subset P_n$. On précisera (sous forme d'intégrales) les coefficients du développement de $S_n f(x)$ selon les puissances de x .

b. Établir que $\text{Ker}(S_n)$ est l'orthogonal $P_n^\perp$ de P_n dans $\mathcal{C}$.

c. Établir que : $\mathcal{C} = P_n \oplus P_n^\perp$.

3. Soit σ_n l'application de P_n dans P_n qui à f associe $S_n f$.

a. σ_n est-elle un automorphisme ?

b. Comparer $\text{Im}(S_n)$ et P_n .

c. σ_n est-elle diagonalisable ? Comparer $\text{Sp}(\sigma_n)$ et $\text{Sp}(S_n)$.

d. Soit α_n la plus grande valeur propre de σ_n . Montrer que pour tout g de P_n , $(g|\sigma_n g) \leq \alpha_n (g|g)$.

Pour quels g a-t-on l'égalité ? Quel est le signe de α_n ?

e. En déduire, à l'aide de II.2.c. que $A_n = \alpha_n$, qu'il existe dans E_n au moins un polynôme non nul y tel que $(y|y^{(n)}) = A_n (y^{(n)}|y^{(n)})$ et que tout élément de E_n vérifiant cette égalité est un polynôme.

4. On suppose, dans cette question que $n = 3$. On admettra, que : $\left\{ X_0, \left(X - \frac{1}{2} X_0 \right), \left(X - \frac{1}{2} X_0 \right)^2 \right\}$ constitue une base de P_3 . Donner la

matrice de σ_3 dans cette base. On mettra cette matrice sous la forme $\frac{1}{48} M$, les coefficients de M étant tous des entiers relatifs à l'exception d'un seul. Déterminer A_3 et les éléments y de E_3 tels que : $(y|y^{(3)}) = A_3 (y^{(3)}|y^{(3)})$.

Solution

Partie I

1. Si g existe, le théorème de Taylor-Laplace donne :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} g^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t) dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt.$$

D'où l'unicité. Montrons l'existence par récurrence sur n .

Si $n = 1$, $g(x) = \int_0^x f$ de façon évidente.

Si le résultat est vrai pour $(n-1)$, soit h telle que $h^{(n-1)} = f$ et $h^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$; si l'on pose $g(x) = \int_0^x h$, on a alors $g' = h$ et $g(0) = 0$. D'où $g^{(n)} = f$ et $g^{(p)}(0) = 0$ pour $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

2. a. De I.1. on déduit : $\forall g \in E_n, g = T_n(g^{(n)})$. Donc : $\text{Im}(T_n) = E_n$.

$f \in \text{Ker}(T_n) \iff f = g^{(n)} = 0$. Donc $\text{Ker}(T_n) = \{0\}$.

b. Si $g = T_n(f)$ avec $f \in \mathcal{C}$. Alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\forall x \in [0, 1], g^2(x) \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{[(n-1)!]^2} dt \cdot \int_0^x f^2(t) dt \leq \frac{1}{[(n-1)!]^2} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} [N(f)]^2.$$

$$\text{Donc : } [N(g)]^2 = \int_0^1 g^2 \leq \frac{1}{[(n-1)!]^2 (2n-1) 2n} [N(f)]^2.$$

D'où la continuité de l'application linéaire T_n et $\|T_n\| \leq \frac{1}{(n-1)! \sqrt{(2n-1)(2n)}}$.

3. a. Comme $\text{Im}(T_n) = E_n$, on a (i) $\iff$ (ii) où :

$$(i) \forall y \in E_n, (y|y^{(n)}) \leq K(y^{(n)}|y^{(n)}) \quad \text{et} \quad (ii) \forall f \in \mathcal{C}, (f|T_n(f)) \leq K(f|f).$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(f|T_n(f)) \leq N(f)N(T_n(f)) \leq \|T_n\| [N(f)]^2$.

$\left\{ \frac{(f|T_n f)}{(f|f)} \mid f \in \mathcal{C} \setminus \{0\} \right\}$ est une partie non vide majorée (par $\|T_n\|$) de $\mathbb{R}$ donc A_n , le plus petit majorant de cet ensemble est bien la borne supérieure de cet ensemble et $A_n \leq \|T_n\| \leq \frac{1}{(n-1)!}$ d'après I.2.b.

b. Si l'on prend $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$, on a : $(f|f) = 1$ et $T_n f(x) = \frac{x^n}{n!}$.

$$\text{Donc } (f|T_n f) = \int_0^1 \frac{x^n}{n!} dx = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(f|T_n f)}{(f|f)} \leq A_n.$$

4. a. Posons $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(1-x)$. Le changement de variable affine $t = 1-u$ dans l'intégrale conduit à : $\forall f \in \mathcal{C}, \forall x \in [0, 1], U_n(f)(x) = T_n(\tilde{f})(1-x)$.

Donc $U_n f \in \mathcal{C}^n([0, 1], \mathbb{R})$ et $(U_n f)^{(n)} = (-1)^n (T_n f)^{(n)} = (-1)^n f$.

b. On procède comme pour T_n .

c. Rappelons la formule d'intégration par parties itérée. Si $(F, G) \in (\mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R}))^2$,

$$\int_a^b F^{(n)} G = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k F^{(k)}(t) G^{(n-k-1)}(t) \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b F G^{(n)}.$$

Appliquons cette formule à $F = U_n(f)$ et $G = T_n(g)$ avec $a = 0$ et $b = 1$.

$(T_n g)^{(p)}(0) = 0$ si $0 \leq p \leq n-1$ car $T_n g \in E_n$ d'après I.2.a. D'après I.4.a. on a $(U_n f)^{(p)}(1) = 0$ si $0 \leq p \leq n-1$. Donc $F^{(k)}(1) = G^{(n-k)}(0) = 0$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Comme $F^{(n)} = (-1)^n f$ d'après I.4.a. et $G^{(n)} = g$ d'après I.2, on a le résultat.

5. a. vérification immédiate, d'après la relation de Chasles.

$$b. (S_n f)^{(n)} = \frac{1}{2} \left[(T_n f)^{(n)} + (U_n f)^{(n)} \right] = \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) f.$$

c. De I.4.c) on déduit : $\forall (f, g) \in \mathcal{C}^2, (U_n f|g) = (f|T_n g)$.

Le produit scalaire étant symétrique, on a : $(T_n f|g) = (f|U_n g)$. Par addition des deux dernières égalités, on obtient : $\forall (f, g) \in \mathcal{C}^2, (S_n f|g) = (f|S_n g)$.

$$d. \forall f \in \mathcal{C}, (f|S_n f) = \frac{1}{2} \left[(f|T_n f) + (f|U_n f) \right] = \frac{1}{2} \left[(f|T_n f) + (T_n f|f) \right] = (f|T_n f)$$

$$\text{d'après I.4.c). D'où } A_n = \sup_{f \in \mathcal{C} \setminus \{0\}} \frac{(f|T_n f)}{(f|f)} = \sup_{f \in \mathcal{C} \setminus \{0\}} \frac{(f|S_n f)}{(f|f)}.$$

Partie II

1. $y \in E_1 \iff y \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $y(0) = 0$. On a donc :

$2 \int_0^1 yy' = y^2(1) - y^2(0) = y^2(1) = \left(\int_0^1 y' \right)^2 \leq \left(\int_0^1 1^2 \right) \left(\int_0^1 y'^2 \right)$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; avec égalité si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y' = \lambda \cdot 1$ i.e. $\forall x \in [0, 1], y(x) = \lambda x$ puisque $y(0) = 0$.

Donc $A_1 \leq \frac{1}{2}$ et en fait $A_1 = \frac{1}{2}$ d'après I.3.a.

2. a. n étant impair, d'après I.5.b) $(S_n f)^{(n)} = 0$; donc $S_n f \in P_n$ i.e. $\text{Im}(S_n) \subset P_n$.

Comme $(n-1)$ est pair, $|x-t|^{n-1} = (x-t)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (-1)^k t^{n-1-k}$.

Donc : $S_n f(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ où

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2(k!)(n-1-k)!} \int_0^1 t^{n-1-k} f(t) dt.$$

b. Avec les notations précédentes et la définition du vecteur nul de P_n , on a :

$f \in \text{Ker}(S_n) \iff (\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, a_k = 0)$.

Donc : $f \in \text{Ker}(S_n) \iff \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_0^1 t^{n-1-k} f(t) dt = 0$.

Autrement dit $f \in \text{Ker}(S_n) \iff (\forall k' \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, (X_{k'} | f) = 0) \iff f \in P_n^\perp$ car $P_n = \text{Vect}(X_0, \dots, X_{n-1})$.

c. $(\mathcal{C}, (|\cdot|))$ étant un espace préhilbertien réel, P_n étant un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{C}$, on déduit du théorème de la projection orthogonale que $\mathcal{C} = P_n \oplus P_n^\perp$.

3. a. $P \in \text{Ker}(\sigma_n) \iff (P \in P_n \text{ et } S_n(P) = 0) \iff P \in P_n \cap P_n^\perp = \{0\}$.

Donc σ_n est un endomorphisme injectif de l'espace vectoriel de dimension finie P_n ; d'où σ_n est un automorphisme de P_n i.e. $\sigma_n \in \text{GL}(P_n)$.

b. $P_n = \text{Im}(\sigma_n) \subset \text{Im}(S_n) \subset P_n$. Donc $\text{Im}(S_n) = P_n$.

c. D'après I.5.c), σ_n est un automorphisme symétrique de l'espace euclidien P_n . Donc σ_n est diagonalisable et P_n possède une base constituée de vecteurs propres de σ_n . On a de façon évidente : $\text{Sp}(\sigma_n) \subset \text{Sp}(S_n)$.

• $0 \in \text{Sp}(S_n)$ et le sous-espace propre associé est $\text{Ker}(S_n) = P_n^\perp$.

• $0 \notin \text{Sp}(\sigma_n)$ car σ_n est un automorphisme de P_n .

• Si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \in \text{Sp}(S_n)$, alors il existe $f \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ tel que $S_n f = \lambda f$. Comme $\text{Im}(S_n) \subset P_n$ et $\lambda \neq 0$, donc $f = \lambda^{-1} S_n f \in P_n$; d'où $\lambda \in \text{Sp}(\sigma_n)$. Donc :

$$\text{Sp}(S_n) = \text{Sp}(\sigma_n) \cup \{0\}.$$

d. Si $f \geq 0$, alors $S_n(f) \geq 0$ et $(S_n f | f) \geq 0$. Comme σ_n est un automorphisme symétrique positif de l'espace euclidien P_n , il est défini positif. d'où $\text{Sp}(\sigma_n) \subset \mathbb{R}_+^*$. Du théorème III.E.6.4. on déduit : $\forall g \in P_n, (g | \sigma_n(g)) \leq \alpha_n (g | g)$ avec égalité si g est vecteur propre associé à la valeur propre α_n .

e. Notons que α_n est un $\frac{(S_n g | g)}{(g | g)}$ particulier, pour g vecteur propre de σ_n

associé à la valeur propre α_n . Donc : $\alpha_n \leq A_n = \sup_{g \in \mathcal{C} \setminus \{0\}} \frac{(S_n g | g)}{(g | g)}$. D'autre part,

$\mathcal{C} = P_n \oplus P_n^\perp$, d'après II.2.c). Donc : $\forall f \in \mathcal{C}, \exists (g, h) \in P_n \times P_n^\perp, f = g + h$.

D'après 2.c), $S_n f = S_n g = \sigma_n(g)$. Comme $\sigma_n(g) \perp h$ d'après 2.a. on a :
 $(S_n f|f) = (\sigma_n(g)|g+h) = (\sigma_n(g)|g) \leq \alpha_n(g|g) \leq \alpha_n(f|f)$ car $\alpha_n \geq 0$ et d'après le théorème de Pythagore, $(f|f) = (g|g) + (h|h)$. Donc $A_n \leq \alpha_n$. Puis $A_n = \alpha_n$.

On déduit des inégalités précédentes que :

$$(S_n f|f) = A_n(f|f) \iff h = 0 \iff f \in P_n.$$

On a vu en I.5.d. que, pour tout $f \in \mathcal{C}$, $(S_n f|f) = (T_n f|f)$. Comme T_n est surjective, $(T_n f|f) = (y|y^{(n)})$ si $f = y^{(n)}$ et $y \in E_n$.

Si $y \in E_n$, $(y|y^{(n)}) = A_n(y^{(n)}|y^{(n)}) \iff (S_n f|f) = \alpha_n(f|f)$ avec $f = y^{(n)}$ ce qui est impossible sauf si $f \in P_n$; et donc $y = T_n f \in P_n$. De plus cette égalité est effectivement réalisée si f est vecteur propre de σ_n associé à α_n .

$$4. \forall t \in [0, 1], \forall k \in \{0, 1, 2\}, \varphi_k(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)^k.$$

$$\forall x \in [0, 1], \sigma_3 \varphi_k(x) = \frac{1}{4} \int_0^1 (x-t)^2 \left(t - \frac{1}{2}\right)^k dt \text{ d'après I.5.a.}$$

Avec le changement de variable $t - \frac{1}{2} = u$, on obtient que $\sigma_3 \varphi_k(x)$ est égal à :

$$\frac{1}{4} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} - u\right)^2 u^k du = \left[\frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{u^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{u^{k+2}}{k+2} + \frac{1}{4} \frac{u^{k+3}}{k+3} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}.$$

D'où $\sigma_3 \varphi_0(x)$, $\sigma_3 \varphi_1(x)$ et $\sigma_3 \varphi_2(x)$ et la matrice de σ_3 dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$:

$$\frac{1}{48} M = \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{20} \\ 0 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La plus grande valeur propre de σ_3 est $\alpha_3 = A_3$.

La relation $(y|y^{(3)}) = A_3(y^{(3)}|y^{(3)})$ avec $y \in E_3$ est vraie si, et seulement si, $y^{(3)} = f$ vecteur propre associé à α_3 .

$$\chi_M = -(T+2) \left[(T-1)^2 - \frac{9}{5} \right]. \text{ Donc } \alpha_3 = A_3 = \frac{1}{48} \left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}} \right).$$

Si l'on cherche les éléments de E_3 tels que $\sigma_3(f) = \alpha_3 f$, on trouve :

$f(x) = a \left[1 + 4\sqrt{5} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \right]$ où $a \in \mathbb{R}$. Donc les y de E_3 tels que $f = y^{(3)}$ et qui vérifient $(y|y^{(3)}) = A_3(y^{(3)}|y^{(3)})$ sont proportionnels à la fonction :

$$x \mapsto \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \left(1 + 4\sqrt{5} \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 \right) dt.$$

• Formes positives et produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (MP[★])

Si une partie non vide de $\mathbb{R}$ est non majorée on convient que sa borne supérieure est $+\infty$, de même si elle est non minorée on convient que sa borne inférieure est $-\infty$.

Tout au long du problème on considère un espace vectoriel E , non réduit à zéro, muni de deux formes bilinéaires symétriques a et b . On suppose que la forme a est définie positive. On note $\|x\| = \sqrt{a(x, x)}$.

On note : $M(a, b) = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \left(\frac{b(x, x)}{a(x, x)} \right)$ et $m(a, b) = \inf_{x \in E \setminus \{0\}} \left(\frac{b(x, x)}{a(x, x)} \right)$.

Soit E' un sous-espace vectoriel non nul de E , on note $a|_{E'}$ et $b|_{E'}$ les restrictions à E' de a et b . On pourra abréger les notations $M(a|_{E'}, b|_{E'})$ en $M(E')$, $m(E')$; $M(a, b)$ et $m(a, b)$ pourront être notés $M(E)$ et $m(E)$.

On ne fait *a priori* aucune hypothèse sur la dimension de E .

Partie I

1. Montrer que si E est de dimension finie, $m(a, b)$ et $M(a, b)$ sont finis.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $k \leq \dim(E)$, on note $M_k(a, b)$ la borne supérieure de $m(a|_F, b|_F)$ lorsque F décrit l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de E . Notons que $M_1(a, b) = M(a, b)$.

Soit E' un sous-espace vectoriel non nul de E , on pourra noter :

$$M_k(a|_{E'}, b|_{E'}) = M_k(E').$$

2. Montrer l'inégalité : $M_k(a, b) \geq M_{k+1}(a, b)$.

3. Soit E' un sous-espace vectoriel non nul de E ; montrer l'inégalité $M_k(E') \leq M_k(E)$.

On suppose en outre que E' est de codimension 1; montrer l'inégalité $M_k(E') \geq M_{k+1}(E)$.

4. On suppose, dans cette question, E de dimension finie $n \geq 1$. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E , A et B les matrices respectives de a et b relatives à cette base.

a. On suppose $A = I_n$ et $B = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

(i) Déterminer $M_1(a, b)$, $M_n(a, b)$ et $m(F_k)$ si $F_k = \text{Vect}(e_{n-k+1}, \dots, e_n)$.

(ii) Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension k , déduire de la considération de $F \cap E_k$ où $E_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-k+1})$ un majorant de $m(F)$.

(iii) Déduire de (i) et (ii) $M_k(a, b)$ en fonction d'un des réels λ_i , $1 \leq i \leq n$.

b. On suppose $A \neq I_n$. Montrer que :

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}), A = {}^t P P \text{ et } B = {}^t P D P.$$

Exprimer $M_k(a, b)$ en fonction de A et B . Que dire de $A^{-1}B$?

Partie II

Dans cette partie, on prend $E = \mathbb{R}[X]$. On se donne une forme linéaire L sur E telle que pour tout $P \in E \setminus \{0\}$, $L(P^2) > 0$ et l'on prend pour a et b , $a(P, Q) = L(PQ)$ et $b(P, Q) = L(XPQ)$.

On note enfin $E_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. déterminer les formes linéaires $u : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall P \in E_{n-1}, u(XP) = \mu u(P)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $2n$ nombres réels $\mu_{1,n}, \mu_{2,n}, \dots, \mu_{n,n}$ et $\gamma_{1,n}, \gamma_{2,n}, \dots, \gamma_{n,n}$ avec $\mu_{k,n} \geq \mu_{k+1,n}$ pour $1 \leq k \leq n-1$, tels que pour tout polynôme R de E_{2n} on ait la formule suivante

$$L(R) = \sum_{k=1}^n \gamma_{k,n} R(\mu_{k,n})$$

On montrera tout d'abord qu'il existe une telle formule pour les polynômes R de la forme PQ et XPQ , P et Q parcourant E_n . Pour cela, on montrera qu'il existe n formes linéaires u_k telles que $a(P, Q) = \sum_{k=1}^n u_k(P)u_k(Q)$ et $b(P, Q)$ une combinaison linéaire des $u_k(P)u_k(Q)$ et l'on utilisera II.3.b.

Montrer l'unicité des $2n$ nombres réels $\mu_{k,n}, \gamma_{k,n}$ et les inégalités : $\mu_{k,n} > \mu_{k+1,n}$ pour $1 \leq k \leq n-1$ et $\gamma_{k,n} > 0$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

3. Montrer qu'il existe une et une seule suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes, avec P_n unitaire de degré n (en particulier $P_0 = 1$), telle que $L(P_n \cdot P_m) = 0$ pour $n \neq m$. Quelles sont les racines du polynôme P_n ($n \geq 1$) ?

4. Soient α, β deux nombres réels avec $\alpha < \beta$ et $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue positive ou nulle, mais non identiquement nulle. On prend dans cette question pour L la forme linéaire définie par : $L(P) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)P(x)dx$. Montrer les inégalités : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha \leq \mu_{k,n} \leq \beta$.

Solution

Partie I

1. $\forall x \in E \setminus \{0\}, \frac{b(x, x)}{a(x, x)} = b\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right) = b(y, y), y \in S(0, 1)$.

$S(0, 1)$: sphère unité de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est fermée et bornée donc compacte si E est de dimension finie. L'application $x \mapsto b(x, x)$ étant continue, est bornée sur le compact $S(0, 1)$. D'où l'existence de $m(a, b)$ et $M(a, b)$ dans $\mathbb{R}$.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $k+1$. Si F' est un sous-espace vectoriel de F de dimension k , alors $m(a|_F, b|_F) \leq m(a|_{F'}, b|_{F'})$.

Or $m(a|_{F'}, b|_{F'}) \leq M_k(a, b)$, de la définition de $M_{k+1}(a, b)$, puisque l'on a : $m(F) \leq M_k(a, b)$ pour tout F sous-espace vectoriel de E de dimension $(k+1)$, on déduit : $M_{k+1}(a, b) \leq M_k(a, b)$.

3. Si F est un sous-espace vectoriel de E' de dimension k , on a : $m(F) \leq M_k(E)$. Par définition de la borne supérieure, on a donc : $M_k(E') \leq M_k(E)$.

Si E est de codimension 1, $E = E' \oplus \mathbb{R}e$, $e \notin E'$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $(k+1)$, alors $F = F' \oplus D$ où D est une droite de E et F' un sous-espace vectoriel de E' de dimension k .

$m(F) = m(F' \oplus D) \leq m(F') \leq M_k(E')$. D'où $M_{k+1}(E) \leq M_k(E')$.

$$4. \text{ a. (i) } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow a(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \text{ et } b(x, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

$$\forall x \in E, \lambda_1 a(x, x) = \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq b(x, x) \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n a(x, x).$$

$$\text{Or } \lambda_n = \frac{b(e_n, e_n)}{a(e_n, e_n)} \text{ et } \lambda_1 = \frac{b(e_1, e_1)}{a(e_1, e_1)}, \text{ donc } \lambda_1 = m(a, b) \text{ et } \lambda_n = M(a, b).$$

Si $F_k = \text{Vect}(e_{n-k+1}, \dots, e_n)$ par un raisonnement analogue, on montre que $m(F_k) = \lambda_{n-k+1}$.

(ii) $\dim(F) = k$ et $\dim(E_k) = n - k + 1$ impliquent $F \cap E_k \neq \{0\}$. En effet, si $F \cap E_k = \{0\}$, les sous-espaces vectoriels F et E_k sont en somme directe et $\dim(F + E_k) = n + 1 > \dim(E)$, ce qui est absurde. Donc on peut prendre $x \in E$,

$$\text{tel que } \|x\| = 1. \text{ Or si } x \in E_k, x = \sum_{i=1}^{n-k+1} x_i e_i \text{ alors } b(x, x) = \sum_{i=1}^{n-k+1} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_{n-k+1}.$$

Donc $m(F) \leq \lambda_{n-k+1}$.

(iii) De (i) et (ii) on déduit que $M_k(a, b) = \lambda_{n-k+1}$.

b. Procéder comme à l'exercice 8 précédent. On est ramené au cas 4.a.

$A^{-1}B = PDP^{-1}$. Donc $A^{-1}B$ est diagonalisable.

Partie II

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u(X^{k+1}) = \mu u(X^k)$. D'où par récurrence, en posant $u(1) = \alpha$, on obtient, pour $k \in \mathbb{N}$, $u(X^k) = \mu^k \alpha$ et par linéarité $u(P) = \alpha P(\mu)$ pour $P \in E$.

2. Comme en I.4.b. si l'on note $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ et $(u_1, \dots, u_n)$ sa base duale, alors, pour tout $(P, Q) \in (E_n)^2$,

$$a(P, Q) = \sum_{k=1}^n u_k(P) u_k(Q) \text{ et } b(P, Q) = \sum_{k=1}^n \mu_{k,n} u_k(P) u_k(Q) = L(XPQ).$$

On peut supposer $\mu_{k,n} \geq \mu_{k+1,n}$ car les $\mu_{k,n}$ sont les valeurs propres de B .

Comme $u_i(f_j) = \delta_{i,j}$, on a : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a(P, f_k) = u_k(P)$ et $b(P, f_k) = \mu_{k,n} u_k(P)$.

Donc : $u_k(XP) = a(XP, f_k) = L(XP f_k) = b(P, f_k) = \mu_{k,n} u_k(P)$.

D'après II.1. il existe $\alpha_{k,n} \in \mathbb{R}$ tel que : $u_k(P) = \alpha_{k,n} P(\mu_{k,n})$.

$$\text{Donc : } \begin{cases} L(PQ) = \sum_{k=1}^n (\alpha_{k,n})^2 P(\mu_{k,n}) Q(\mu_{k,n}), \\ L(XPQ) = \sum_{k=1}^n (\alpha_{k,n})^2 \mu_{k,n} P(\mu_{k,n}) Q(\mu_{k,n}). \end{cases}$$

Posons $\gamma_{k,n} = (\alpha_{k,n})^2 \geq 0$, comme L est déterminée sur les éléments de E_{2n} de la forme PQ et XPQ où (P, Q) parcourt E_n^2 , et comme $X^{2n-1} = X^{n-1} X^{n-1} X$, l'application L est déterminée sur E_{2n} par linéarité.

$$\forall R \in E_{2n}, L(R) = \sum_{k=1}^n \gamma_{k,n} R(\mu_{k,n}).$$

• L'unicité des $\mu_{k,n}$ découle du fait que ce sont les valeurs propres de la matrice B de $b|_{E_n}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

• Soit $T_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (X - \mu_{j,n}) \in E_{n-1}$. Alors $T_k^2 \in E_{2n-2} \subset E_{2n}$ et $T_k \neq 0$.

$L(T_k^2) = \gamma_{k,n} T_k^2(\mu_{k,n}) > 0$ par hypothèse sur L . Comme $\gamma_{k,n} \geq 0$, on a donc $\gamma_{k,n} > 0$ et $\mu_{k,n} \neq \mu_{j,n}$ si $j \neq n$. D'où $\mu_{k,n} > \mu_{k+1,n}$.

Les T_k sont déterminés par les $\mu_{j,n}$, d'où les $\gamma_{k,n}$ sont déterminés de façon unique par : $\gamma_{k,n} = \frac{L(T_k^2)}{T_k^2(\mu_{k,n})}$.

3. (E_n, a) étant un espace euclidien, l'application du procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille $(1, X, \dots, X^{n-1})$ donne une unique suite de polynômes $(\theta_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ telle que $\deg(\theta_k) = k$ et le coefficient dominant est $\delta_k > 0$. D'où le résultat demandé avec $P_k = \frac{\theta_k}{\delta_k}$; $L(P_n P_m) = a(P_n, P_m) = 0$ si $n \neq m$.

Soit $\Delta_n = \prod_{k=1}^n (X - \mu_{k,n})$. Pour $m \neq n$, $L(\Delta_n, \Delta_m) = 0$ d'après II.2.

Par unicité de $(P_k)_{0 \leq k \leq n-1}$, on conclut que $\Delta_k = P_k$. Les polynômes P_n et Δ_n ont donc les mêmes racines qui sont les $\mu_{k,n}$ où $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

4. Soit $S_k = \frac{T_k}{T_k(\mu_{k,n})} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \left(\frac{X - \mu_{j,n}}{\mu_{k,n} - \mu_{j,n}} \right)$. On a :

$$L(XS_k^2) = \gamma_{k,n} \mu_{k,n} = \int_{\alpha}^{\beta} x S_k^2(x) f(x) dx \text{ et } L(S_k^2) = \gamma_{k,n} = \int_{\alpha}^{\beta} f S_k^2.$$

De l'inégalité de la moyenne, on déduit :

$$\alpha \int_{\alpha}^{\beta} f S_k^2 \leq \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) S_k^2(x) dx \leq \beta \int_{\alpha}^{\beta} f S_k^2 \text{ ie. } \alpha \gamma_{k,n} \leq L(XS_k^2) \leq \beta \gamma_{k,n}.$$

Comme $\gamma_{k,n} > 0$, on peut conclure que : $\alpha \leq \mu_{k,n} \leq \beta$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

10. Variables aléatoires discrètes

I. Espaces probabilisés

En première année, l'univers Ω était fini. Lorsqu'il ne l'est pas, la définition d'une probabilité s'avère insuffisante comme le montre l'exemple suivant.

Si l'on tire n fois à pile ou face, $\Omega = \{0, 1\}^n$ a 2^n éléments. Si la pièce n'est pas truquée, pour tout $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{2^n}$ en vertu de l'indépendance des lancers

Si l'on poursuit le jeu indéfiniment, Ω devient $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ et si A est l'événement « on ne tire jamais pile », en notant A_n l'événement « on ne tire jamais pile lors des n premiers tirages », alors $\mathbb{P}(A_n) = 2^{-n}$.

On a $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ avec $A_{n+1} \subset A_n$. L'événement A se présente comme « limite »

des A_n . Il semble naturel d'écrire $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$. Pour que ceci soit vrai, les hypothèses de la définition du cours de MPSI sont insuffisantes. Il manque un axiome permettant ce « passage à la limite ».

1. Définition

Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{T}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{T}$ est une **tribu** de parties de Ω si

- (i) $\Omega \in \mathcal{T}$,
- (ii) $\mathcal{T}$ est stable par différence,
- (iii) $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable.

Tout élément de $\mathcal{T}$ est appelé **événement** et le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé **espace probabilisable**.

$\mathcal{T}$ est stable par différence signifie, si $A, B \in \mathcal{T}$, alors

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ et } \omega \notin B\} = A \cap \overline{B} \in \mathcal{T}.$$

Exemples

- $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu dite grossière ; c'est la plus petite (au sens de l'inclusion) tribu de parties de Ω .
- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de parties de Ω . C'est la plus grande de toutes.
- Si $A \subset \Omega \setminus \emptyset$, alors $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu.
- On vérifie aisément qu'une intersection de tribus est une tribu. Donc, si $\mathcal{B}$ est un ensemble de parties de Ω , l'intersection de toutes les tribus de Ω qui contiennent

$\mathcal{B}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{B}$. On l'appelle la **tribu engendrée par $\mathcal{B}$** et on la note $\sigma(\mathcal{B})$.

• Lorsque $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{B}$ est l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, la tribu engendrée par $\mathcal{B}$ est dite **tribu borélienne** de $\mathbb{R}$ et notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur l'espace $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- (i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- (ii) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux disjoints,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est appelé un **espace probabilisé**.

La propriété (ii) sera appelée la σ -**additivité** de $\mathbb{P}$.

II. Propriétés des probabilités

1. Propriétés élémentaires

1.1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

1.2. Pour toute suite finie $(A_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ d'événements deux à deux disjoints,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^n A_i\right) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(A_i).$$

1.3. On dit qu'un système d'événements au plus dénombrable et deux à deux disjoints $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un **système complet d'événements** si

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = 1.$$

1.4. $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

1.5. $\forall A, B \in \mathcal{T}, A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

1.6. $\mathbb{P}$ est à valeurs dans $[0, 1]$.

1.7. $\forall A, B \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

1.8. Pour toute suite finie $(A_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ d'événements,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^n A_i\right) \leq \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(A_i).$$

Démonstration

1. Conséquence de la σ -additivité de $\mathbb{P}$ avec tous les A_n vides.

2. Posons $B_i = \begin{cases} A_i & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$. Alors

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=0}^n A_i \text{ et } \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(A_i).$$

3. Conséquence de 1. et 2. puisque $\bigcup_{i=0}^n A_i = \Omega$.

4. Application de 3. à $\{A, \overline{A}\}$ qui est une partition finie.

5. $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) \cup A = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A)$ d'après 2.

Comme $\mathbb{P}(B \setminus A) \geq 0$, il s'ensuit que $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$.

6. $\emptyset \subset A \subset \Omega$ et 5. impliquent $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

7. On déduit de 2. que : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$ et $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$.

En soustrayant la deuxième égalité de la première, on obtient le résultat.

8. Preuve par récurrence immédiate sur n . Le cas $n = 0$ est immédiat et le cas $n = 2$ découle de 7. $\square$

2. Propriétés des suites d'événements

Nous laissons au lecteur le soin de prouver le

Lemme

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de Ω . On pose $B_0 = A_0$ et si $n \geq 1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Alors $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties deux à deux disjointes de Ω et $A_n = \bigcup_{k=0}^n B_k$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$.

Si $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements,

(i) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)$.

(ii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right)$.

(iii) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Démonstration

(i) Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans le lemme. On déduit de la σ -additivité de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(B_k)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(ii) L'application de (i) à la suite $(\overline{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ donne $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{A_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\overline{A_n})$.

On déduit de la propriété 1.4. que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{A_n}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(iii) Notons $C_n = \bigcup_{i=0}^n A_i$. Alors comme $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ et comme la suite

$(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on déduit de (i) et de 1.8. pour majorer $\mathbb{P}(C_k)$, que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(C_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

(cette dernière somme pouvant être $+\infty$). $\square$

3. Construction d'une probabilité sur un ensemble au plus dénombrable

Dans ce paragraphe, Ω est un ensemble au plus dénombrable et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Proposition

- (i) Une probabilité P sur Ω est entièrement déterminée par ses valeurs prises sur les singletons ie. $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$ appelé **atome de la probabilité**.
- (ii) Étant donnée une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de nombres réels, il lui correspond une unique probabilité P telle que quel que soit $\omega \in \Omega$, $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$ si, et seulement si, $p_\omega \geq 0$ et $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ $(\star)$.

Dans ce cas, pour tout $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ $(\star\star)$.

Démonstration

(i) Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω . Si $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$, alors $p_\omega \geq 0$ et comme Ω est union disjointe de singletons, on a $(\star\star)$ et dans le cas particulier où $A = \Omega$, comme $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, on a $(\star)$.

(ii) Soit p_ω vérifiant $p_\omega \geq 0$ et $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$. On définit $P(A)$ par $(\star\star)$, pour tout $A \subset \Omega$. On a immédiatement $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements non vides et deux à deux disjoints, $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \{\omega_i \mid i \in I\}$ où I est dénombrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) = \sum_{i \in I_n} p_{\omega_i}$

où $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de I . L'égalité $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ résulte du théorème de groupements par paquets pour les familles de réels positifs. $\square$

III. Probabilités conditionnelles et indépendance**1. Définition**

Soit B un événement de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. L'application $P_B : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $A \mapsto P_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ appelée **probabilité conditionnelle** à l'événement B .

On a alors $P_B(B) = 1$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = P_B(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

2. Proposition

Pour toute suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^\star}$ d'événements telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^n \mathbb{P}\left(A_k \mid \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right).$$
Démonstration

Si l'on note, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $p_n = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$. La suite $(p_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Donc, s'il existe $m \in \mathbb{N}^\star$ tel que $p_m = 0$ alors $p_{m+1} = 0$ et compte tenu de la convention, $p_n = 0$ pour tout $n \geq m$.

La remarque qui suit la définition C.1. appliquée à $A = A_{k+1}$, $B = \bigcap_{i=1}^k$ pour $k \geq 2$

donne $p_{k+1} = p_k \mathbb{P}\left(A_{k+1} \middle| \bigcap_{i=1}^k A_i\right)$. Donc, si $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = p_n = p_1 \prod_{k=2}^n \frac{p_k}{p_{k-1}} = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^n \mathbb{P}\left(A_k \middle| \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right). \square$$

3. Proposition

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition au plus dénombrable de Ω en événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ de probabilités > 0 .

$$(i) \quad \forall B \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

(formule des probabilités totales)

$$(ii) \quad \text{Si de plus } \mathbb{P}(B) > 0, \text{ pour tout } j \in I, \mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j) \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

(formule de Bayes ou de probabilité des causes).

Notons que cette dernière formule est sans intérêt mathématique, mais d'un intérêt surtout statistique.

Démonstration

(i) Comme $B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$ est union d'événements deux à deux disjoints, par la σ -additivité de $\mathbb{P}$ on a $\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B)$. Le résultat découle de C.1.

$$(ii) \quad \text{Pour tout } j \in I, \mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A_j)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_j) \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

D'où le résultat d'après (i). $\square$

4. Événements indépendants. Familles indépendantes

4.1. Définition

Deux événements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ sont dits indépendants (en probabilité) si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

4.2. Propriétés

(i) Les événements indépendants d'eux-mêmes sont ceux de probabilité 0 ou 1.

(ii) Les assertions suivantes sont équivalentes :

- A et B sont indépendants
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants,
- $\bar{A}$ et B sont indépendants
- A et $\bar{B}$ sont indépendants.

(iii) Si $\mathbb{P}(B) \notin \{0, 1\}$, les événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_{\bar{B}}(A)$ si, et seulement si, $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

4.3. Définition

Soit $(A_i)_{i \in I}$ est une famille au plus dénombrable d'événements. Les A_i sont dits **(mutuellement) indépendants** en probabilité si pour toute J partie finie de I , $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$.

Si n événements sont mutuellement indépendants alors ils le sont deux à deux mais la réciproque est fausse.

Avec $\Omega = \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $\forall k \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{4}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ et $C = \{1, 3\}$ alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(C \cap A) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ mais}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

4.4. Application à l'arithmétique

• Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}$ la loi de probabilité uniforme sur $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Si p est un diviseur premier de n et si $A_p = p\mathbb{N} \cap \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ alors

$$\mathbb{P}(A_p) = \frac{\text{Card}(A_p)}{n} = \frac{1}{p}. \text{ Notons } \mathcal{P} \text{ l'ensemble des nombres premiers.}$$

Si $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont des diviseurs de n deux à deux distincts, alors

$$A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \dots \cap A_{p_k} = A_{p_1 p_2 \dots p_k} \text{ d'où l'indépendance mutuelle des } A_{p_i}.$$

$$\mathbb{P}(m \wedge n = 1) = \mathbb{P}\left(m \in \overline{\bigcup_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p/n}} A_p}\right) = \mathbb{P}\left(m \in \bigcap_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p/n}} \overline{A_p}\right) = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p/n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\varphi(n)}{n}$$

d'où $\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p/n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$. On retrouve un résultat du chapitre 1 sur la fonction indicatrice d'Euler.

• Supposons l'existence d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout nombre premier p , on a $\mathbb{P}(p\mathbb{N}) = \frac{1}{p}$ et que les $p\mathbb{N}$ sont mutuellement indépendants.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $N \geq n$ posons $A_N = \bigcap_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ n \leq p \leq N}} \overline{p\mathbb{N}}$, alors $(A_N)_{N \geq n}$ est décroissante et,

$$\text{par indépendance, } \mathbb{P}(A_N) = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ n \leq p \leq N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \leq \exp\left(-\sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ n \leq p \leq N}} \frac{1}{p}\right) \text{ par convexité de}$$

la fonction $\exp$, d'où $\mathbb{P}(A_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ car $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

$$\text{Par limite monotone il vient } \mathbb{P}\left(\bigcap_{N \geq n} A_N\right) = 0 \text{ ie. } \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \geq n}} p\mathbb{N}\right) = 1.$$

Soit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \bigcup_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \geq n}} p\mathbb{N}$, la suite $(B_n)_n$ est décroissante et, pour

$$\text{tout } n \geq 1, \mathbb{P}(B_n) = 1 \text{ d'où } \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = 1 \text{ ie. } \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \geq n}} p\mathbb{N}\right)\right) = 1 \text{ alors}$$

$$\text{que } \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \geq n}} p\mathbb{N} \right) = \emptyset.$$

IV. Variables aléatoires discrètes

1. Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable et E un ensemble. Une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application X de Ω dans E telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et que : $\forall x \in X(\Omega), X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{T}$.
Si $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.

Remarques

- Cette définition conserve le vocabulaire historique, mais X n'est ni une variable, puisque c'est une fonction et le caractère «aléatoire» se réfère à un espace probabilisé. . .
- Le plus souvent $E = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

On laisse au lecteur le soin de prouver que l'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel stable par la multiplication et réticulé ie. si X, Y sont deux variables aléatoires réelles, $|X|, XY, \max(X, Y), \min(X, Y)$ sont des variables aléatoires réelles.

2. Proposition et définition

Pour toute partie E' de E , on note

$$\{X \in E'\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in E'\} = X^{-1}(E').$$

L'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, 1], E' \mapsto \mathbb{P}(\{X \in E'\})$ est une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$. On l'appelle la **loi de probabilité** de la variable aléatoire X ou probabilité image de $\mathbb{P}$ par X .

Démonstration

- $\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}(\{X \in E\}) = 1$.

Si $E' \subset E$ alors $E' \cap X(\Omega)$ est finie ou dénombrable et, donc, il existe une application x de $\mathbb{N}$ dans E telle que $E' \cap X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Par suite

$$\{X \in E'\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^{-1}(\{x_n\}) \in \mathcal{A} \text{ car } \mathcal{A} \text{ est une tribu.}$$

Soit $(E'_n)_{n \geq 0}$ une suite de parties deux à deux disjointes de E . Alors $(\{X \in E'_n\})_{n \geq 0}$ est une suite d'événements deux à deux disjointes.

En effet si $m \neq n$, $\{X \in E'_n\} \cap \{X \in E'_m\} = \{X \in E'_n \cap E'_m\} = \emptyset$

Par σ -additivité de $\mathbb{P}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E'_n \right) &= \mathbb{P} \left(X \in \bigcup_{n=0}^{\infty} E'_n \right) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{X \in E'_n\} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{X \in E'_n\}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_X(E'_n). \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$. $\square$

3. Cas d'une variable aléatoire réelle X

3.1. Définition

On appelle **fonction de répartition** de X la fonction
 $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], x \mapsto \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(\{X \leq x\})$.

3.2. Proposition

- (i) F_X est croissante, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
- (ii) F_X est continue à droite; $\lim_{y \rightarrow x^-} F_X(y) = P(]-\infty, x[) = F_X(x^-)$
- (iii) $\forall x \in \mathbb{R}, p_X(x) = \mathbb{P}(\{X = x\}) = F_X(x) - F_X(x^-)$.

En particulier, la fonction F_X caractérise la loi de X .

Démonstration

(i) $x \leq x' \Rightarrow]-\infty, x] \subset]-\infty, x'] \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(x')$.

$]-\infty, +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-\infty, n] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(n) = \mathbb{P}(]-\infty, +\infty[) = 1$.

De même, $]-\infty, +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n, +\infty[$. Comme $F_X(-n) = 1 - \mathbb{P}_X(]-n, +\infty[)$, on a $1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(-n) = \mathbb{P}_X(]-\infty, +\infty[) = 1$.

(ii) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge en décroissant vers x .

$(\{X \leq x_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et $\{X \leq x\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \leq x_n\}$.

Donc $F_X(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n)$.

Si $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement croissante qui converge vers x ,

$(\{X \leq x'_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et $\{X < x\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \leq x'_n\}$.

Donc $F_X(x^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x'_n)$.

(iii) Il suffit d'écrire $\{X \leq x\} = \{X < x\} \cup \{X = x\}$ et d'appliquer un résultat précédent. $\square$

V. Couple de variables aléatoires

1. Généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une application de Ω dans $\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \pi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_d) \mapsto x_i$ est la i -ème projection de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\pi_i \circ X = X_i$ est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

On a $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_d(\omega))$.

Avec les notations précédentes, si, pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket, X_i$ est une variable aléatoire sur Ω , on dit que X est une **variable** (ou un vecteur) **aléatoire de dimension d** définie sur E .

Dans la suite, on étudiera principalement le cas où $d = 2$ et l'on parlera de couple de variables aléatoires. De plus, on se limitera au cas les X_i sont des variables aléatoires discrètes *ie.* les $X_i(\Omega)$ sont au plus dénombrables.

2. Loi conjointe ; lois marginales

2.1. Définition

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes .

(i) L'application $X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$(x_i, y_j) \mapsto p_{i,j} = \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

est appelée **loi conjointe** du couple.

2.2. Définition

(ii) L'application $X(\Omega) \rightarrow [0, 1], x_i \mapsto p_{i,.} = \mathbb{P}(X = x_i)$

est appelée **première loi marginale** du couple (c'est la loi de X)

(iii) L'application $Y(\Omega) \rightarrow [0, 1], y_j \mapsto p_{.,j} = \mathbb{P}(Y = y_j)$

est appelée **deuxième loi marginale** du couple (c'est la loi de Y)

2.3. Proposition

Avec les notations précédentes,

$$\forall i \in \mathbb{N}, p_{i,.} = \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} \quad ; \quad \forall j \in \mathbb{N}, p_{.,j} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,j}$$

$$(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \text{ est sommable et } \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} p_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,j} = 1.$$

Démonstration

Y est une variable aléatoire discrète $Y(\Omega) = \{y_0, \dots, y_n, \dots\}$.

Donc $(\{Y = y_j\})_{j \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

$\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{Y = y_j\}$ union au plus dénombrable d'événements deux à deux disjoints.

Par σ -additivité de P , on a $\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$

ie. $p_{i,.} = \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}$. On prouve de même la deuxième égalité.

Comme les applications $x_i \mapsto p_{i,.}$ et $y_j \mapsto p_{.,j}$ sont les lois respectives de X et Y ,

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_{i,.} = 1 = \sum_{j=0}^{\infty} p_{.,j} \text{ impliquent le résultat. } \square$$

3. Lois conditionnelles

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes.

(i) Pour tout j tel que $\mathbb{P}(Y = y_j) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle** de X sachant $Y = y_j$ l'application de $X(\Omega)$ dans $[0, 1]$ définie par

$$x_i \mapsto \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{i,j}}{p_{.,j}}.$$

(ii) Pour tout i tel que $\mathbb{P}(X = x_i) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle** de Y sachant $X = x_i$ l'application de $Y(\Omega)$ dans $[0, 1]$ définie par

$$y_j \mapsto \mathbb{P}(Y = y_j | X = x_i) = \frac{p_{i,j}}{p_{i,.}}.$$

On a bien défini des lois de probabilité.

4. Indépendance des variables aléatoires

4.1. Définition

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont des **variables aléatoires indépendantes** si

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \mathbb{P}(Y = y_j).$$

ie. $p_{i,j} = p_{i,\cdot} \cdot p_{\cdot,j}$.

4.2. Définition

Soit $(X_1, \dots, X_d)$ une famille de d variables aléatoires discrètes sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Elles sont **mutuellement indépendantes** si

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_d(\Omega), \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^d \{X_i = \alpha_i\}\right) = \prod_{i=1}^d \mathbb{P}(X_i = \alpha_i).$$

Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires discrètes sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On dit que c'est une famille de variables aléatoires indépendantes si toute sous-famille finie est constituée de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

5. Fonctions de variables aléatoires

5.1. Définition

Soient X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans E et f une variable aléatoire définie sur $(E, \mathcal{E})$ à valeurs dans F . Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On la note $f(X)$ et on l'appelle **fonction de la variable aléatoire X** .

En effet, $\forall A \in F, (f \circ X)^{-1}(A) = X^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{T}$.

Remarques

- Si X est une variable aléatoire et si, pour tout $x \in E, X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{T}$, alors $f \circ X$ est une variable aléatoire quel que soit l'application $f : E \rightarrow F$.

Par exemple, si X est une variable aléatoire discrète, alors X^2 , $\sin \circ X$ sont des variables aléatoires discrètes.

- Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$, soit F un ensemble quelconque, et $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ une application quelconque, alors l'application $\omega \mapsto f(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ se note $f(X_1, \dots, X_n)$ et est une variable aléatoire discrète.

5.2. Proposition

Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires discrètes sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E_i, \mathcal{P}(E_i))$. On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes. Soit, pour tout $i \in I, f_i$ une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisable $(E_i, \mathcal{P}(E_i))$ à valeurs dans l'espace probabilisable $(F_i, \mathcal{P}(F_i))$. Alors les variables aléatoires $f_i(X_i)$ sont indépendantes.

Démonstration

$$\begin{aligned} \forall i \in I, \forall A_i \in \mathcal{P}(F_i), \{f_i(X_i) \in A_i\} &= (f_i \circ X_i)^{-1}(A_i) = X_i^{-1}(f_i^{-1}(A_i)) \\ &= \{X_i \in f_i^{-1}(A_i)\}. \end{aligned}$$

Or $f_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{P}(E_i)$. L'indépendance des variables X_i implique celle des $f_i(X_i)$. $\square$

Une conséquence immédiate est le corollaire suivant :

5.3. Corollaire

Soient $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$ et soient $f : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ et $g : E_{m+1} \times \dots \times E_n \rightarrow G$. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Par exemple, si X_1, X_2, X_3, X_4 sont 4 variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors $X_1 + X_2$ et $X_3 + X_4$ sont indépendantes ; $X_1 + X_3$ et $X_2 + X_4$ sont indépendantes ; $(-1)^{X_2} \cos(\pi X_3)$ et $X_1^{10} + X_4^7$ sont indépendantes.

6. Construction d'un modèle

Étant donné une famille $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i \in I}$ d'espaces probabilisables, et une loi de probabilité donnée P_i sur chacun de ces espaces, peut-on construire un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et une famille de variable aléatoires $(X_i)_{i \in I}$ définies sur cet espace, à valeurs dans $(E_i, \mathcal{E}_i)$ indépendantes et telles que, pour tout $i \in I$, la variable aléatoire X_i soit de loi P_i ?

La réponse, dans le cadre du programme est donnée dans la proposition suivante dont la démonstration est hors programme.

Proposition

Soit $I = \llbracket 1, n \rrbracket$; pour tout $i \in I$, soient E_i un ensemble dénombrable et P_i une probabilité sur l'espace probabilisable $(E_i, \mathcal{P}(E_i))$ engendré par le atome de probabilité p_i . Soit $\Omega = E_1 \times \dots \times E_n$ et la projection X_i de Ω sur E_i . La fonction $p : \Omega^n \rightarrow [0, 1], (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \prod_{i=1}^n p_i(\omega_i)$ est un atome d'une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, appelée **probabilité produit** des probabilités P_i . L'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est tel que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et de lois respectives P_i .

VI. Lois discrètes usuelles

1. Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$

1.1. Définition

X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ si $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n}.$$

On note $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

1.2. Modèle probabiliste

On choisit au hasard un objet parmi n objets numérotés de 1 à n .

X est le numéro de l'objet choisi.

2. Loi de Bernoulli

2.1. Définition

Soit $p \in [0, 1]$. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$.
On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

2.2. Modèle probabiliste

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et l'on s'intéresse à un événement S appelé succès. On définit la variable aléatoire $X : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. X est donc indicatrice du succès. Si l'on note $p = \mathbb{P}(S)$, alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

3. Loi binomiale

3.1. Définition

X suit la loi binomiale de paramètres n et p si $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

On a bien une loi de probabilité puisque, d'après le binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = (p + (1-p))^n = 1.$$

3.2. Modèle probabiliste

Soit une urne contenant une proportion p de boules noires et $1-p$ de boules blanches. On effectue un tirage de n boules avec remise de la boule tirée. X est le nombre de boules noires obtenues au cours de ce tirage.

La preuve a été donnée en MPSI.

4. Loi géométrique

4.1. Définition

Soit $p \in]0, 1[$. X suit la loi géométrique de paramètre p si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p.$$

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

4.2. Modèle probabiliste

Soit une urne contenant une proportion p de boules noires et $1-p$ de boules blanches. On effectue un tirage avec remise de la boule tirée. X est le rang d'apparition de la première boule noire. On dit que X est le **temps d'attente** de la première boule noire. En effet, $(X = k) = A \cap B$ où A est l'événement : les $(k-1)$ premiers tirages sont des échecs, B l'événement : le k -ième tirage est un succès. Comme les événements sont indépendants, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) = (1-p)^{k-1} p$.

On peut vérifier qu'on a bien une loi de probabilité. En effet la série géométrique $\sum (1-p)^{k-1} p$ converge et a pour somme $p \cdot \frac{1}{1 - (1-p)} = 1$.

5. Loi de Poisson

5.1. Définition

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que X suit la **loi de Poisson de paramètre λ** si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et pour tout } k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

On a bien défini une loi de probabilité puisque $e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

5.2. Modèle probabiliste

La loi de Poisson peut-être vue comme limite de lois binomiales. Supposons que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \begin{cases} \binom{n}{j} p_n^j (1 - p_n)^{n-j} & \text{si } 0 \leq j \leq n \\ 0 & \text{si } j \geq n + 1 \end{cases}$$

$$\text{Écrivons } \mathbb{P}(X_n = j) = \frac{1}{j!} \prod_{i=1}^{j-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) (np_n)^j (1 - p_n)^{n-j}.$$

On montre facilement que, pour j fixé, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}$.

On peut interpréter la loi de Poisson comme la loi du nombre de succès lorsque l'on compte un nombre très élevé d'épreuves avec une probabilité p de succès très faible.

VII. Moments d'une variable aléatoire discrète

1. Espérance

1.1 Définition

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, l'espérance de X est la somme dans $[0, +\infty]$ de la famille $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Si X est une variable aléatoire réelle, X est dite d'espérance finie si la famille $(|x|\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X . On la note $\mathbb{E}(X)$

1.2. Espérance des lois usuelles

- (i) Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.
- (ii) Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = 1/p$.
- (iii) Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$.
- (iv) Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

Démonstration

Nous donnons des démonstrations directes, mais proposerons d'autres preuves de ces résultats au cours de ce chapitre.

$$(i) \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

(ii) Du théorème de dérivation des séries entières on déduit que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$\text{Donc } \forall p \in]0, 1[, \mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

$$(iii) \mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \text{ Comme } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

$$\mathbb{E}(X) = np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} = np(1-p+p)^{n-1} = np.$$

$$(iv) \quad k\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \text{ si } k \geq 1 \text{ et } 0 \text{ si } k = 0.$$

Comme $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow e^{\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$, la famille $(k\mathbb{P}(X = k))_{k \in \mathbb{N}}$ est sommable de somme $\mathbb{E}(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda. \square$

1.3. Théorème de transfert

Si X est une variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans un ensemble E . Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. La variable aléatoire $f(X)$ a une espérance finie si, et seulement si, $(f(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in E}$ soit sommable. Dans ce cas

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in E} f(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration (non exigible)

Soit $y \in \mathbb{R}$, $\{f(Y) = y\} = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} \{X = x\}$ (union disjointe)

$X(\Omega)$ est au plus dénombrable. Donc $\{x \in f^{-1}(y) \mid \{X = x\} \neq \emptyset\}$ est un sous-ensemble au plus dénombrable de $f^{-1}(y)$ que l'on note A_y .

Par σ -additivité de P , on a $\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in A_y} \mathbb{P}(X = x)$.

Comme $\mathbb{P}(X = x) = 0$ si $x \in f^{-1}(y) \setminus A_y$, on a $\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathbb{P}(X = x)$.

Donc $|y|\mathbb{P}(f(X) = y) = |y| \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} |f(x)|\mathbb{P}(X = x)$.

Comme $E = \bigcup_{y \in \mathbb{R}} f^{-1}(y)$ est une union disjointe, d'après le théorème de sommation

par paquets des familles de réels positifs,

$$\sum_{x \in E} |f(x)|\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in \mathbb{R}} \sum_{x \in f^{-1}(y)} |f(x)|\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in \mathbb{R}} |y|\mathbb{P}(f(X) = y).$$

Donc $\sum_{x \in E} |f(x)|\mathbb{P}(X = x)$ est finie si, et seulement si, $\sum_{y \in \mathbb{R}} |y|\mathbb{P}(f(X) = y)$ est

finie, si, et seulement si, $f(X)$ a une espérance finie.

Lorsque cette condition est réalisée, on déduit du théorème de sommation par paquets :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X)) &= \sum_{y \in \mathbb{R}} y\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{y \in \mathbb{R}} \sum_{x \in f^{-1}(y)} f(x)\mathbb{P}(X = x) \\ &= \sum_{x \in E} f(x)\mathbb{P}(X = x). \square \end{aligned}$$

Remarque

Ce théorème permet de calculer l'espérance de la variable aléatoire $f(X)$ sans déterminer sa loi de probabilité, en utilisant uniquement celle de X .

1.5. Propriétés de l'espérance

- (i) Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles telles que $|X| \leq Y$ et $\mathbb{E}(Y) \in \mathbb{R}_+$, alors $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$ et $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(Y)$.
- (ii) L'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes possédant une espérance finie, est un espace vectoriel sur lequel, $\mathbb{E}$ est une forme linéaire.

Démonstration

(i) Immédiat.

(ii) Avec les hypothèses, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X + Y$ est une variable aléatoire discrète ainsi que $Z = (X, Y)$ qui, elle, est à valeurs dans $F = X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Si π_1 et π_2 sont les projections canoniques ie. $\forall (x, y) \in F, \pi_1(x, y) = x, \pi_2(x, y) = y$.

$\lambda X + Y = f(Z)$ où $f = \lambda \pi_1 + \pi_2$.

D'après le théorème de transfert, les familles $(\pi_i(z)\mathbb{P}(Z = z))_{z \in F, i \in \{1, 2\}}$ sont sommables et donc, en utilisant la propriété (i), $(f(z)\mathbb{P}(Z = z))_{z \in F}$ est sommable, ce qui implique que $\lambda X + Y$ a une espérance finie. Ce même théorème implique :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\lambda X + Y) &= \sum_{z \in E} (\lambda \pi_1(z) + \pi_2(z)) \mathbb{P}(Z = z) \\ &= \lambda \sum_{z \in E} \pi_1(z) \mathbb{P}(Z = z) + \sum_{z \in E} \pi_2(z) \mathbb{P}(Z = z) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y). \square \end{aligned}$$

1.6. Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ d'espérance finie non nulle m , alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(X \geq \lambda m) \leq \frac{1}{\lambda}$.

Démonstration

Si $\lambda \in]0, 1]$, le résultat est évident et sans intérêt.

Si $\lambda > 1$, notons $m = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$.

On a : $x \geq \lambda m \Rightarrow x \mathbb{P}(X = x) \geq \lambda m \mathbb{P}(X = x)$. Comme la somme d'une famille de réels positifs est ≥ 0 , on a : $m \geq \lambda m \sum_{x \in X(\Omega), x \geq \lambda m} \mathbb{P}(X = x) = \lambda m \mathbb{P}(X \geq \lambda m)$. $\square$

1.6. Espérance du produit de deux variables aléatoires

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance finie, alors XY a une espérance finie et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration

Montrons que si $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \mid j \in J\}$ où I et J sont au plus dénombrables, alors la famille $(x_i y_j p_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable.

On a $p_{i,j} = p_{i,\cdot} p_{\cdot,j}$ car les variables aléatoires sont indépendantes.

Comme X et Y sont d'espérances finies, les familles $(x_i p_{i,\cdot})_{i \in I}$ et $(y_j p_{\cdot,j})_{j \in J}$ sont sommables. On déduit du théorème sur les familles sommables que la famille $((x_i p_{i,\cdot})(y_j p_{\cdot,j}))_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable. et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i y_j p_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I \times J} (x_i p_{i,\cdot})(y_j p_{\cdot,j}) \\ &= \left(\sum_{i \in I} p_{i,\cdot} x_i \right) \left(\sum_{j \in J} p_{\cdot,j} y_j \right) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \square \end{aligned}$$

1.7. Espérance d'une variable aléatoire à valeurs entières

X désigne une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Elle admet une espérance si, et seulement si, la série de terme général $\mathbb{P}(X > n)$ est convergente et qu'on a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

Démonstration

Notons que :

$$k \in \mathbb{N}, u_k = \mathbb{P}(X = k) \text{ et } v_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n+1} (X = k)\right) = \mathbb{P}(X > n).$$

$$\sum_{k=1}^n ku_k = \sum_{k=1}^n k(v_{k-1} - v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)v_k - \sum_{k=1}^n kv_k = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - nv_n \quad (\star).$$

- Si $\sum v_n$ converge, comme $v_n \geq 0$, on a $\sum_{k=1}^n ku_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k$ et donc, par croissance,

la suite de terme général $\sum_{k=1}^n ku_k$ converge. La série $\sum ku_k$ converge.

- $0 \leq nv_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} nu_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} ku_k$ reste de rang n de la série convergente $\sum ku_k$.

Donc, par encadrement, $nv_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Ceci prouve de plus que, si $\sum ku_k$ converge, $\sum v_k$ converge et $\sum_{k=1}^{\infty} ku_k = \sum_{k=1}^{\infty} v_k$.

On vient donc de montrer que que les séries de termes généraux ku_k et v_k sont de même nature et que, en cas de convergence, leurs sommes sont égales.

On peut donc dire que X admet une espérance si, et seulement si, $\sum \mathbb{P}(X > n)$ converge avec $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} ku_k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

Autre démonstration

Notons $a_{n,k} = \begin{cases} \mathbb{P}(X = k) & \text{si } k \geq n+1 \\ 0 & \text{si } k \leq n \end{cases}$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = k) = k\mathbb{P}(X = k)$.

- Si $\mathbb{E}(X) < +\infty$, le théorème d'interversion des séries doubles implique alors que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

- Si $\sum \mathbb{P}(X > n)$ converge, comme $\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$,

le théorème d'interversion des séries doubles implique que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} = \mathbb{E}(X). \square$$

2. Variance, écart-type

2.1 Définition

On appelle **moment d'ordre** $r \in \mathbb{N}^*$ de la variable aléatoire X , l'espérance finie, si c'est le cas, de la variable aléatoire X^r .

Notons qu'il découle du théorème de transfert que $\mathbb{E}(X^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r \mathbb{P}(X = x)$.

2.2. Définition

On appelle **variance** de X le moment centré d'ordre 2 ie. l'espérance finie, si c'est le cas, de la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(x))^2 \mathbb{P}(X = x).$$

Remarques

- L'existence de la variance de X suppose celle de $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{V}(X)$ est la somme des carrés des écarts entre les valeurs de X et la moyenne, pondérés par les poids des probabilités. C'est un indicateur de « dispersion » autour de $\mathbb{E}(X)$.

2.3. Proposition

Si une variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 elle est d'espérance finie et $(\mathbb{E}(X))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$.

Démonstration

On sait que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

En prenant $x = \sqrt{p_n}$ et $y = x_n \sqrt{p_n}$, comme $\mathbb{E}(X^2)$ existe, la série $\sum p_n x_n^2$ converge et comme $\sum p_n$ converge de somme 1, la série $\sum |x_n p_n|$ converge.

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace préhilbertien réel ℓ^2 , on déduit :

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} p_n x_n \right| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} p_n} \cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x_n^2} \text{ ie. } |\mathbb{E}(X)| \leq 1 \cdot \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}. \square$$

2.4. Proposition

Si X admet une variance, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Démonstration

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2)) = \mathbb{E}(X^2 - 2(\mathbb{E}(X))^2 + (\mathbb{E}(X))^2)$ car $\mathbb{E}$ est linéaire et $\mathbb{E}(1) = 1$. D'où le résultat. $\square$

2.5. Proposition

Si X admet une variance et si $(a, b) \in \mathbb{R}^2, aX + b$ a une variance et $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$.

Démonstration

Par linéarité de E , on a $(aX + b - \mathbb{E}(aX + b))^2 = a^2(X - \mathbb{E}(X))^2$.

Si X a une variance, $(X - \mathbb{E}(X))^2$ a une espérance finie ; $a^2(X - \mathbb{E}(X))^2$ a une espérance finie égale à $a^2 \mathbb{V}(X)$. D'où le résultat. $\square$

2.6. Définitions

Si la variable aléatoire X a une variance, on appelle **écart-type** de X , le nombre réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

On appelle **variable centrée** toute variable aléatoire X telle que $\mathbb{E}(X) = 0$.

On appelle **variable réduite**, toute variable aléatoire X telle que $\sigma(X) = 1$.

Si la variable aléatoire X a une variance, $X^\star = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

2.7. Théorème

L'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2 est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

La variable aléatoire nulle a un moment d'ordre 2.

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2 et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda X + Y)$ est une variable aléatoire réelle discrète.

Comme, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$, on peut conclure que $(\lambda X + Y)$ a un moment d'ordre 2. Donc l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles discrètes. $\square$

2.8. Théorème

Si deux variables aléatoires X, Y admettent un moment d'ordre 2, XY a une espérance finie et l'on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}.$$

Démonstration

Rappelons que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Il s'ensuit que si X et Y ont un moment d'ordre 2, alors X et Y ont une espérance finie ainsi que XY .

D'après le théorème précédent, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda X + Y)$ a un moment d'ordre 2.

Notons $Q(\lambda) = \mathbb{E}((\lambda X + Y)^2)$. Alors, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $Q(\lambda) \geq 0$ $(\star)$.

Par linéarité de $\mathbb{E}$, $Q(\lambda) = \lambda^2 \mathbb{E}(X^2) + 2\lambda \mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2)$.

• Si $\mathbb{E}(X^2) > 0$, on déduit des résultats sur le signe du trinôme du second degré que : $(\star) \iff (\mathbb{E}(XY))^2 - \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) \leq 0$.

• Si $\mathbb{E}(X^2) = 0$ on a : $(\star) \iff \forall \lambda \in \mathbb{R}, 2\lambda \mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) \geq 0$.

Comme, pour a, b réels, la fonction $t \mapsto at + b$ change de signe si $a \neq 0$,

$(\star) \Rightarrow \mathbb{E}(XY) = 0$ et l'inégalité est encore vérifiée. $\square$

2.9. Variance des lois usuelles

(i) Si $X \sim \mathcal{U}([1, n])$ alors $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$.

(ii) Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

(iii) Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

(iv) Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

Démonstration

Nous donnons des démonstrations directes, mais proposerons d'autres preuves de ces résultats au cours de ce chapitre.

(i) $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^n i^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$. On déduit $\mathbb{V}(X)$ de la proposition 2.4.

(ii) Dans la démonstration de G.1.2. on a vu : $\forall x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$.

Le théorème de dérivation des séries entières implique

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) = \frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1}.$$

Donc $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1-p}{p^2}$. On déduit $\mathbb{V}(X)$ de la proposition 2.4.

$$(iii) \mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Comme $k^2 = k(k-1) + k$ et $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$

$$\mathbb{E}(X^2) = n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-2-(k-2)} + \mathbb{E}(X).$$

Donc $\mathbb{E}(X^2) = n(n-1)p^2(1-p+p)^{n-2} + \mathbb{E}(X) = n(n-1)p^2 + np$.

On déduit $\mathbb{V}(X)$ de la proposition 2.4.

(iv) D'après le théorème de dérivation des séries entières,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx}(e^x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} \Rightarrow \frac{d}{dx}(xe^x) = e^x(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{x^{n-1}}{n!}.$$

Donc $\mathbb{E}(X^2)$ existe et $\mathbb{V}(X^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{n!} = \lambda(\lambda+1)$.

On déduit $\mathbb{V}(X)$ de la proposition 2.4. $\square$

2.10. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si la variable aléatoire réelle discrète X a un moment d'ordre 2,

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma(X)^2}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration

Application de l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$, compte tenu de : $\{(X - \mathbb{E}(X))^2 > \varepsilon^2\} = \{|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon\}$. $\square$

3. Covariance de deux variables aléatoires réelles discrètes

3.1. Définition

Si X et Y sont deux variables aléatoires ayant un moment d'ordre 2, la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$ a une espérance appelée **covariance** de X et Y . On la note $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$.

En effet, X et Y ayant un moment d'ordre 2, ces variables aléatoires ont une espérance. Les variables aléatoires centrées ont un moment d'ordre 2. On déduit du théorème sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\text{cov}(X, Y) \in \mathbb{R}$. Si $\sigma(X)\sigma(Y) \neq 0$, on définit le coefficient de corrélation de X, Y : $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \in [-1, 1]$.

Notons que $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$ et $\text{cov}(X, X) = V(X) \geq 0$.

La covariance est une forme bilinéaire symétrique positive sur l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles discrètes ayant un moment d'ordre 2.

3.2. Proposition

Si X et Y sont deux variables aléatoires ayant un moment d'ordre 2,

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration

Conséquence de : $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) = XY - \mathbb{E}(X)Y - \mathbb{E}(Y)X + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et de la linéarité de $\mathbb{E}$. $\square$

3.3. Corollaire

Si X et Y sont deux variables aléatoires ayant un moment d'ordre 2 et indépendantes, $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Démonstration

Application de G.1.6. et G.3.2. $\square$

La réciproque est fausse comme on le verra en exercice.

4. Somme de variables aléatoires

Si, $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles discrètes ayant un moment d'ordre 2, $\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$.

Si ces variables aléatoires sont deux à deux indépendantes, on a :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k).$$

Démonstration

Par récurrence en utilisant la linéarité de $\mathbb{E}$. $\square$

5. Sommes finies des variables aléatoires usuelles

5.1. Théorème

Si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires discrètes, indépendantes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans le même espace probabilisable $(E, \mathcal{P}(E))$ où E est une partie d'un groupe abélien stable par l'addition, alors $X_1 + X_2$ est une variable aléatoire discrète dont la loi est définie par

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = x) = \sum_{x_1 \in E} \mathbb{P}(X = X_1) \mathbb{P}(X = x - x_1)$$

Démonstration

$(X_1 + X_2)(\Omega)$ est dénombrable en tant qu'image de $X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$ qui est dénombrable comme produit de deux ensembles dénombrables par l'application $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$. Pour tout $x \in E$,

$$\{X_1 + X_2 = x\} = \bigcup_{x_1 \in X_1(\Omega)} \{X_1 = x_1\} \cap \{X_2 = x - x_1\}.$$

Donc $\{X_1 + X_2 = x\} \in \mathcal{T}$. Le résultat se déduit de la σ -additivité de $\mathbb{P}$ et de l'indépendance de X_1 et X_2 . $\square$

La relation s'écrit encore $\mathbb{P}_{X_1+X_2}(\{x\}) = \sum_{x_1 \in E} \mathbb{P}_{X_1}(\{x_1\}) \mathbb{P}_{X_2}(\{x - x_1\})$.

5.2. Théorème

Si, $X_1, \dots, X_r$ sont des variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et si $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$, alors $\sum_{i=1}^r X_i \sim \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^r n_i, p\right)$.

Démonstration

Par récurrence. Nous ne développerons que le cas $r = 2$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{i=0}^k \mathbb{P}((X_1 = i) \mathbb{P}((X_2 = k - i) \text{ d'après G.5.1.} \\ \mathbb{P}((X_1 + X_2 = k) &= \sum_{i=0}^k \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n_2-k+i} \\ &= \left(\sum_{i=0}^k \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{k-i} p^{k-i} \right) p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \\ &= \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \\ \text{car } \binom{n_1+n_2}{k} &= \sum_{i=0}^k \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{k-i}. \end{aligned}$$

Ce résultat peut s'obtenir en identifiant le coefficient de X^k dans les deux membres de l'égalité : $(1+X)^{n_1+n_2} = (1+X)^{n_1} (1+X)^{n_2}$ ou par un raisonnement utilisant les dénombrements. $\square$

5.3. Théorème

Si, $X_1, \dots, X_r$ sont des variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et si $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, alors $\sum_{i=1}^r X_i \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i\right)$.

Démonstration

Par récurrence. Nous ne développerons que le cas $r = 2$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X_1 = i) \mathbb{P}(X_2 = k - i) \text{ d'après G.5.1.} \\ \mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{i=0}^k e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i}. \end{aligned}$$

Du binôme de Newton, on déduit que $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} (\lambda_1 + \lambda_2)^k$.
D'où $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. $\square$

6. Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors si $m = \mathbb{E}(X_1)$ et si $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ on a : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Démonstration

Compte tenu des hypothèses, $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = m$.

$\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\mathbb{V}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$ car les variables aléatoires sont indépendantes. On déduit du théorème de Bienaymé-Tchébychev que :

$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. D'où le théorème. $\square$

VIII. Fonctions génératrices

1. Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $s \in [-1, 1]$ la variable aléatoire s^X a une espérance finie. On la note $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$. La fonction G_X est appelée **fonction génératrice** de la variable aléatoire X .

En effet, $|s^X| \leq 1$. Comme la variable aléatoire constante 1 a une espérance finie, on déduit de G.1.5. que s^X a une espérance finie. $\square$

2. Propriétés

- (i) $\forall s \in [-1, 1], G_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n ; |G_X(s)| \leq 1 ; G_X(1) = 1$.
 - (ii) La fonction G_X est continue sur $[-1, 1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.
 - (iii) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.
- La fonction génératrice G_X **caractérise la loi de X** .

Si la fonction $s \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$ est définie pour $s > 1$, on notera encore sa somme G_X .

Les propriétés sont des conséquences immédiates des théorèmes sur les séries entières de rayon $R \geq 1$. La série $\sum p_n s^n$ convergeant normalement sur $[-1, 1]$.

3. Fonctions génératrices et moments

3.1. Théorème

- Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- (i) X a une espérance finie si, et seulement si, G_X est dérivable à gauche en 1. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = \lim_{s \rightarrow 1^-} G'_X(s)$.
 - (ii) X a un moment d'ordre 2 (ou une variance) si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable à gauche en 1. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X^2) = \lim_{s \rightarrow 1^-} G''_X(s) + \mathbb{E}(X)$.

Démonstration

- Si la série entière $\sum p_n s^n$ est de rayon $R > 1$, comme G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$, on a $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$ et $G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$.
- Si $R = 1$, il suffit d'appliquer un théorème du chapitre « Séries entières » à la série entière $\sum n p_n s^{n-1}$ pour (i) et à la série entière $\sum n(n-1) p_n s^{n-2}$ pour (ii). $\square$

3.2. Fonctions génératrices pour les lois usuelles

(i) Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $g_X(s) = (1 - p + ps)^n$.

(ii) Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$.

(iii) Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $G_X(s) = \frac{ps}{1 - (1-p)s}$.

Retrouver $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ dans ces cas.

Démonstration

(i) $G_X(s) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} s^k = (1-p+ps)^n$ avec le binôme de Newton.

La fonction $s \mapsto G_X(s)$ étant une fonction polynôme, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. D'où $G_X(1) = 1$, $G'_X(s) = np(1-p+ps)^{n-1} \Rightarrow \mathbb{E}(X) = G'_X(1) = np$.

$G''_X(s) = n(n-1)p^2(1-p+ps)^{n-2} \Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = n(n-1)p^2 + np$.

Comme $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, on retrouve $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

(ii) $\forall s \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} s^k = e^{\lambda(s-1)} = G_X(s)$.

En tant que somme d'une série entière de rayon $+\infty$, la fonction $s \mapsto G_X(s)$ a un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ à $\mathbb{R}$.

$G'_X(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)} \Rightarrow G'_X(1) = \lambda = \mathbb{E}(X)$.

$G''_X(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)} \Rightarrow G''_X(1) = \lambda^2 \Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow \mathbb{V}(X) = \lambda$.

(iii) $P(X = n)s^n = p(1-p)^{n-1}s^n = ps((1-p)s)^{n-1}$ est le terme général d'une série géométrique convergente si, et seulement si, $|(1-p)s| < 1$. Soit $R = \frac{1}{1-p}$.

$\forall r \in]-R, R[, G_X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1}s^n = ps \cdot \frac{1}{1 - (1-p)s}$.

Comme $R > 1$, les moments d'ordre 1 et 2 existent.

$G'_X(s) = \frac{p}{(1 - (1-p)s)^2} \Rightarrow G'_X(1) = \frac{1}{p} = \mathbb{E}(X)$.

$G''_X(s) = \frac{2p(1-p)}{(1 - (1-p)s)^3} \Rightarrow G''_X(1) = \frac{2(1-p)}{p^2} \Rightarrow \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2} \cdot \square$

3.3. Théorème

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Démonstration

Si X et Y sont indépendantes, s^X et s^Y sont des variables aléatoires indépendantes. $G_{X+Y}(s) = \mathbb{E}(s^{X+Y}) = \mathbb{E}(s^X s^Y) = \mathbb{E}(s^X) \mathbb{E}(s^Y) = G_X(s) G_Y(s)$ d'après G.1.6. $\square$

Applications

Retrouvons des résultats déjà vus.

(i) Si $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ et si X_1 et X_2 sont indépendantes,

$G_{X_1+X_2}(s) = (1-p+ps)^{n_1} (1-p+ps)^{n_2} = (1-p+ps)^{n_1+n_2}$.

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on retrouve :

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p).$$

(ii) Si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ et si X_1 et X_2 sont indépendantes,

$$G_{X_1+X_2}(s) = e^{\lambda_1(1-s)} e^{\lambda_2(1-s)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(1-s)}.$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on retrouve :

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

EXERCICES

1. Dans une famille donnée, on suppose que la probabilité qu'une famille ait k enfants est p_k telle que $p_0 = p_1 = \alpha$ et si $k \geq 2$, $p_k = \frac{(1-2\alpha)}{2^{k-1}}$ où $\alpha \in]0, 1[$. On suppose que la probabilité d'avoir un garçon ou une fille est la même.

a. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ayant exactement deux garçons parmi ses enfants, ait deux enfants seulement ?

b. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ait deux filles sachant qu'elle a deux garçons ?

2. Soit une urne contenant une proportion p de boules noires et $1-p$ de boules blanches. On effectue un tirage avec remise de la boule tirée. X_r est le rang d'apparition de la r -ième boule noire. On dit que X_r est le **temps d'attente** de la r -ième boule noire. On note $q = 1-p$.

a. Préciser $X_r(\Omega)$ et montrer que la loi de X_r est :

$$\forall k \in \llbracket r, +\infty \rrbracket, \mathbb{P}(X_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}.$$

b. Montrer que $\forall x \in]-1, 1[, \forall r \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=r-1}^{\infty} \binom{k}{r-1} x^{k-r+1} = \frac{1}{(1-x)^r}$.

c. Vérifier que la loi de X_r est bien une loi de probabilité.

d. Déterminer $\mathbb{E}(X_r)$, $\mathbb{V}(X_r)$ et la fonction génératrice de X_r .

3. Soit une urne contenant une proportion p de boules noires et $1-p$ de boules blanches. On effectue un tirage de n boules sans remise de la boule tirée. Notons N le nombre de boules dans l'urne au départ. On appelle X le nombre de boules noires obtenu.

a. Préciser $X(\Omega)$ et montrer que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

b. Déterminer l'espérance et la variance de X .

4. Soient u et v deux variables aléatoires réelles discrètes, indépendantes sur un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ de même loi définie par $P(u = 1) = p \in]0, 1[$ et $P(u = 0) = 1 - p$. Montrer que l'on peut choisir a, b, c, d réels non nuls tels que $X = au + bv$ et $Y = cu + dv$ soient deux variables aléatoires discrètes et non indépendantes alors que $\text{cov}(X, Y) = 0$.

5. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ muni de la tribu de ses parties de loi de probabilité conjointe définie par

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Y = m\}) = p^2 q^{n+m},$$

où $p \in]0, 1[$ et $q + p = 1$.

1. a. Déterminer les lois marginales de (X, Y) .
- b. Calculer $\mathbb{E}(X + Y)$.
- c. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F_X(k)$.
2. On pose $Z = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$.
 - a. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'événement $\{Z = k\}$ en fonction des événements $\{X = k\}$, $\{Y = k\}$, $\{X \leq k\}$ et $\{Y \leq k\}$. En déduire la loi de probabilité de Z et l'espérance de Z .
 - b. Calculer l'espérance de $|X - Y|$. On pourra penser à $X + Y, Z, T$.
 - c. Déterminer et identifier la loi de T .
3. Déterminer la loi conjointe de X, Z . Retrouver à partir de cette loi, celle de Z .
4. a. Calculer, pour $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{X + Y = m\})$.
- b. Déterminer et identifier la loi de Z conditionnelle à $\{X + Y = 2n + 1\}$, $n \in \mathbb{N}$.

6. Soient $\lambda > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$. On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi conjointe :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p_{i,j} = \begin{cases} \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1 - \alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0 \leq j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

- a. Vérifier que la famille $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ définit une probabilité sur $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$ et déterminer les lois de X et Y .
- b. Déterminer la loi de $Z = X - Y$.
- c. Calculer, pour tout $(n, j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(\{Y = j\} | \{Z = n\})$.

7. Pour $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, on pose $u_{m,n} = p^2 q^{2m+|n|}$ avec $p \in]0, 1[$ et $p + q = 1$.

1. Montrer que la famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}}$ permet de définir une probabilité sur $(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}))$.
2. Soit (Z, T) un couple de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}))$ de loi de probabilité définie par :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \mathbb{P}(\{Z = n\} \cap \{T = m\}) = u_{m,n}.$$

Déterminer les lois de Z et de T .

3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi. On pose $Z = X - Y$ et $T = \min(X, Y)$.
 - a. On suppose $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi conjointe de Z et T . Montrer que Z et T sont indépendantes.

b. On suppose inversement que Z et T sont indépendantes et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{X = n\}) > 0$ et l'on pose $\alpha = \frac{\mathbb{P}(\{X = n+1\} \cap \{Y = n\})}{\mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Y = n\})}$.

(i) Écrire les événements $\{X = n+1\} \cap \{Y = n\}$ et $\{X = n\} \cap \{Y = n\}$ en fonction des variables aléatoires Z et T . En déduire une autre expression de α .

(ii) Utilisant successivement l'indépendance de X et Y , puis celle de Z et T , prouver l'existence d'un réel p tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{X = n\}) = p^n \mathbb{P}(\{X = 0\})$. En déduire la loi de X .

8. Jean tente, au saut en hauteur, de franchir successivement les hauteurs $1, 2, \dots, n, \dots$. On suppose les sauts indépendants les uns des autres et l'on suppose que la probabilité de succès à la hauteur n est exactement $1/n$, $n \geq 1$. Jean est éliminé à son premier échec. On note X la variable aléatoire «le numéro du dernier saut réussi».

a. Quelles sont les valeurs possibles de X ? Donner la loi de X .

b. Déterminer l'espérance et la variance de X .

9. a. Soient deux variables aléatoires indépendantes de lois binomiales $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$ respectivement. On pose $S = X + Y$ et l'on demande $\mathbb{P}(X = x | S = s)$.

b. Même question avec X et Y suivant une loi de Poisson de paramètre λ, μ respectivement.

10. Théorème de Bernstein

a. Soit Z une variable aléatoire prenant les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $1 - x$ et $x \in]0, 1[$. Donner la valeur moyenne et la variance de Z .

b. Soient $Z_1, \dots, Z_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que Z . On pose $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$. Déterminer la valeur moyenne et la variance de Y_n . Montrer

$$\text{que pour tout } \alpha > 0, \quad \sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, |\frac{k}{n} - x| < \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

Cette majoration reste-t-elle valable si $x = 0$ ou 1 ?

c. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $x \in [0, 1]$. On pose $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Calculer $\mathbb{E}(f(Y_n))$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, |\frac{k}{n} - x| > \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \varepsilon.$$

d. En déduire de ce qui précède la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions polynomiales vers f sur $[0, 1]$.

11. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p . On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

a. Calculer la variance de $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

b. Que dire de $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right)$?

12. Processus en cascade

a. Soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^2}$ telle que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{\infty} u_{k,\ell}$ est finie et que $\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_{k,\ell}\right)$ est finie ; on note S cette dernière somme.

Montrer que pour tout k fixé dans $\mathbb{N}$, $\sum_{\ell=0}^{\infty} u_{k,\ell}$ est finie et que $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} u_{k,\ell}\right)$ est finie et égale à S .

b. Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant une espérance finie. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $\mathbb{E}_{(X=k)}(Y)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant $(X = k)$ i.e. $\mathbb{E}_{(X=k)}(Y) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \mathbb{P}(Y = \ell | X = k)$.

Montrer que $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_{(X=k)}(Y) \mathbb{P}(X = k)$.

c. On considère N poules de la même race. Le nombre de descendants femelles de chacune suit $\mathcal{P}(\lambda)$ et il y a mutuelle indépendance. Déterminer l'espérance du nombre X_n de poules de la n -ième génération.

13. Soient $N \in \mathbb{N}^*$, X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de facteurs premiers distincts de X . Si p est un nombre premier, on note Y_p la variable aléatoire $\mathbb{I}_{(p|X)}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

a. (i) Calculer $\mathbb{E}(Y_p)$ et $\mathbb{E}(Y_p Y_q)$ où p et q sont deux nombres premiers distincts.

(ii) Montrer que $\mathbb{E}(Y) \geq \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq N} \frac{1}{p} - 1$.

(iii) Montrer que $\mathbb{V}(Y) \leq 2 + 3\mathbb{E}(Y)$.

b. (i) Montrer que $\prod_{p \in \mathcal{P}, p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$.

(ii) Montrer que la famille $(1/p)_{p \in \mathcal{P}}$ n'est pas sommable.

(iii) Soit $\varepsilon > 0$. Donner la limite quand $N \rightarrow +\infty$ de $\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq \varepsilon \mathbb{E}(Y))$.

14. (Pour MP^*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mu(n)$ comme 0 si n est divisible par le carré d'un nombre premier, et sinon $(-1)^k$ où k est le nombre de diviseurs premiers de n . On fixe $s \in]1, +\infty[$, et l'on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. On admet que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

a. Montrer que $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$.

b. Montrer que $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

d. Montrer que $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \varphi(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\pi^2}$.

e. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, et l'on pose $p_n = \mathbb{P}(X_n \wedge Y_n = 1)$. Montrer que la suite (p_n) converge et préciser sa limite.

SOLUTIONS DES EXERCICES

1. Notons E_n l'événement la famille se compose de n enfants, F_n , la famille se compose de n filles, G_n , la famille se compose de n garçons. $\mathbb{P}(E_n) = p_n$.

a. On demande $\mathbb{P}(E_2|G_2) = \frac{\mathbb{P}(E_2)\mathbb{P}(G_2|E_2)}{\mathbb{P}(G_2)}$. Or $\mathbb{P}(G_2|E_n) = \binom{n}{2} \frac{1}{2^n}$.

D'après la formule de probabilités totales $\mathbb{P}(G_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)\mathbb{P}(G_2|E_n)$

Comme $\mathbb{P}(G_2|E_n) = 0$ si $n \in \{0, 1\}$ on a

$$\mathbb{P}(G_2) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n \binom{n}{2} \frac{1}{2^n} = \frac{1-2\alpha}{4^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{4^{n-2}} = \frac{8(1-2\alpha)}{27}$$

car, d'après le théorème de dérivation des séries entières,

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

$$\text{Il s'ensuit que } \mathbb{P}(E_2|G_2) = \frac{p_2 \binom{2}{2} \frac{1}{2^2}}{\frac{8(1-\alpha)}{27}} = \frac{27}{64}.$$

b. On cherche $\mathbb{P}(F_2|G_2)$.

D'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(F_2 \cap G_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)\mathbb{P}(F_2 \cap G_2|E_n)$.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{4\}$, $\mathbb{P}(F_2 \cap G_2|E_n) = 0$, on a

$$\mathbb{P}(F_2 \cap G_2) = \mathbb{P}(E_4)\mathbb{P}(F_2 \cap G_2|E_4) = \frac{1-2\alpha}{2^3} \binom{4}{2} \frac{1}{2^4} = \frac{3(1-2\alpha)}{64}.$$

$$\text{D'où } \mathbb{P}(F_2|G_2) = \frac{\mathbb{P}(F_2 \cap G_2)}{\mathbb{P}(G_2)} = \frac{81}{512}.$$

2. a. $X(\Omega) = \llbracket r, +\infty \rrbracket$. $\{X = r\} = A \cap B$ où A est l'événement : il y a eu succès au cours des $(k-1)$ premiers essais et B , l'événement : le k -ième essai est un succès. Comme les événements sont indépendants, $\mathbb{P}(\{X_r = k\}) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Or $\mathbb{P}(B) = p$ par hypothèse. $\mathbb{P}(A) = \binom{k-1}{r-1} p^{r-1} q^{(k-1)-(r-1)}$. En effet, on cherche la probabilité d'obtenir $(r-1)$ succès en $(k-1)$ essais indépendants de même probabilité p ; on a affaire à un phénomène binomial. D'où le résultat.

b. On déduit du théorème de dérivation des séries entières

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{(r-1)!}{(1-x)^r} = \sum_{k=r-1}^{\infty} k(k-1) \dots (k-r+2) x^{k-r+1}.$$

Donc : $\forall x \in]-1, 1[, \forall r \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=r-1}^{\infty} \binom{k}{r-1} x^{k-r+1} = \frac{1}{(1-x)^r}.$

c. $\sum_{k=r}^{\infty} \mathbb{P}(X_r = k) = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} = p^r \sum_{\ell=r-1}^{\infty} \binom{\ell}{r-1} q^{\ell-r+1}.$

D'après b), $\sum_{k=r}^{\infty} \mathbb{P}(X_r = k) = \frac{p^r}{(1-q)^r} = 1.$ On a bien une loi de probabilité.

d. Déterminons la fonction génératrice de X_r et nous en déduisons son espérance et sa variance. Notons $u_k = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} s^k = \binom{k-1}{r-1} (ps)^r (qs)^{k-r}.$

On déduit de b) que $\sum_{k \geq r} u_k$ converge si $|qs| < 1$ et a pour somme $\left(\frac{ps}{1-qs} \right)^r.$

Donc $\forall s \in \left] -\frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right[, G_{X_r}(s) = \sum_{k=r}^{\infty} u_k = \left(\frac{ps}{1-qs} \right)^r.$

Comme $\frac{1}{q} > 1$, on en déduit $\mathbb{E}(X_r) = G'_{X_r}(1) = \frac{r}{p}.$

Comme $G''_{X_r}(1) = \frac{r(r-1) + 2rq}{p^2}$, on obtient $\mathbb{V}(X_r) = \frac{rq}{p^2}.$

Notons que l'on peut déterminer directement $\mathbb{E}(X_r)$ et $\mathbb{V}(X_r)$ par les techniques utilisées dans le cours.

3. a. On a $X(\Omega) = \overline{[\max(0, n - Np), \min(n, Np)]} \subset \llbracket 0, n \rrbracket.$

Rappelons que $\binom{n}{p} = 0$ si $p < 0$ ou $p > n$. Il s'ensuit que $\mathbb{P}(X = k) = 0$ si $k > Np$ ou si $n - Np > k$. Il s'ensuit que la connaissance précise de $X(\Omega)$ est inutile.

Nous renvoyons notre lecteur à notre livre d'exercices de MPSI où la résolution de cette question est faite dans un cadre plus général.

On dit que X suit une loi **hypergéométrique de paramètres** N, n, p .

b. $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{N}{n}^{-1} Np \sum_{k=1}^n \binom{Np-1}{k-1} \binom{Nq}{n-k}$

car $k \binom{Np}{k} = Np \binom{Np-1}{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$.

Dans la démonstration du théorème G.5.2. on a vu que :

$$\binom{n_1 + n_2}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{k-i} \quad (\star).$$

Appliquons ce résultat avec $n_1 = Np - 1$, $n_2 = Nq$ et notons que

$$n - k = (n - 1) - (k - 1), \text{. Alors } \mathbb{E}(X) = \binom{N}{n}^{-1} Np \binom{N-1}{n-1} = np.$$

Pour calculer $E(X^2)$, on note que $k^2 = k(k-1)$ et l'on utilise la formule

$$k(k-1) \binom{Np}{k} = Np(Np-1) \binom{Np-2}{k-2} \text{ pour } 2 \leq k \leq n \text{ et } (\star) \text{ et l'on procède}$$

$$\text{comme précédemment, } \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X) + \frac{n(n-1)p(Np-1)}{N-1}.$$

$$\text{D'où } \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = npq \frac{N-n}{N-1}.$$

$$4. X = au + bv \text{ et } Y = cu + du \Rightarrow XY = acu^2 + bdu^2 + (ad + bc)uv.$$

De la linéarité de $\mathbb{E}$, on déduit $\mathbb{E}(XY) = ac \mathbb{E}(u^2) + bd \mathbb{E}(v^2) + (ad + bc)\mathbb{E}(uv)$

Comme $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = ac\mathbb{E}(u)^2 + bd\mathbb{E}(v)^2 + (ad + bc)\mathbb{E}(u)\mathbb{E}(v)$,

$\text{cov}(X, Y) = ac \mathbb{V}(u) + bd \mathbb{V}(v)$ puisque u et v sont indépendantes.

Comme $\mathbb{V}(u) = \mathbb{V}(v)$, on obtient : $\text{cov}(X, Y) = (ac + bd)\mathbb{V}(u)$.

Prenons $a + b \neq 0$ et $b + d \neq 0$. On a :

$$\{X = 0\} = \{u = 0\} \cap \{v = 0\} = \{Y = 0\}. \text{ Donc}$$

$$\mathbb{P}(\{X = 0\}) = \mathbb{P}(\{Y = 0\}) = \mathbb{P}(\{u = 0\}) \cdot \mathbb{P}(\{v = 0\}) = (1-p)^2.$$

$$\text{D'autre part, } \mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) = \mathbb{P}(\{u = 0\} \cap \{v = 0\}) = (1-p)^2.$$

$$\text{Si } p \in]0, 1[, \mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) \neq \mathbb{P}(\{X = 0\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y = 0\}).$$

Les variables aléatoires X, Y ne sont pas indépendantes si l'on prend $ac + bd = 0$ alors que $\text{cov}(X, Y) = 0$.

$$5. 1. a. \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{X = n\}) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Y = m\}) = p^2 q^n \sum_{m \in \mathbb{N}} q^m = pq^n.$$

Donc $X \sim \mathcal{G}(p)$. De même en échangeant m et n , on montre que $Y \sim \mathcal{G}(p)$.

$$b. \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{q}{p}; \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \frac{q}{p^2}. \text{ La linéarité de } \mathbb{E} \text{ implique}$$

$$\mathbb{E}(X + Y) = \frac{2q}{p}. \text{ On a } \mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = 2 \frac{q}{p^2} \text{ car } X, Y \text{ sont indépendantes.}$$

$$c. \forall k \in \mathbb{N}, F_X(k) = \mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{\ell=0}^k \mathbb{P}(\{X = \ell\}) = p \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} = 1 - q^{k+1}.$$

2. a. $\{Z = k\} = (\{X \leq k\} \cap \{Y = k\}) \cup (\{X = k\} \cap \{Y \leq k\})$. Donc : $\mathbb{P}(\{Z = k\})$ est égal à $\mathbb{P}(\{X \leq k\} \cap \{Y = k\}) + \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y \leq k\}) - \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = k\})$.

$$\mathbb{P}(\{Z = k\}) = 2\mathbb{P}(\{X \leq k\} \cap \{Y = k\}) - \mathbb{P}(\{X = k\})\mathbb{P}(\{Y = k\}).$$

$$\text{D'où } \mathbb{P}(\{Z = k\}) = 2(1 - q^{k+1})pq^k - p^2q^{2k} = pq^k(1 - q^k - q^{k+1}).$$

b. Comme $kq^{2k} \underset{k \rightarrow \infty}{=} o(kq^k)$ et $kq^k \underset{k \rightarrow \infty}{=} o(k^{-2})$ par croissances comparées puisque $0 < q < 1$, Z est d'espérance finie et

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k(2 - q^k - q^{k+1}) = 2p \sum_{k=0}^{\infty} kq^k - p(q+1) \sum_{k=0}^{\infty} kq^{2k}.$$

$$\mathbb{E}(Z) = 2 \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p(1+q)} = \frac{q(p+2)}{p(p+1)}.$$

On a $Z = \max(X, Y) = \frac{1}{2}(X + Y + |X - Y|)$. Donc, par linéarité de $\mathbb{E}$,

$$\mathbb{E}(|X - Y|) = 2\mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(X + Y) = \frac{2q}{p(1+q)}.$$

c. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on procède comme au a. $\mathbb{P}(\{T = k\})$ est égal à $\mathbb{P}(\{Y \geq k\} \cap \{X = k\}) + \mathbb{P}(\{Y = k\} \cap \{X \geq k\}) - \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = k\})$.

$$\mathbb{P}(\{T = k\}) = 2\mathbb{P}(\{X = k\}) \left(1 - \mathbb{P}\{Y \leq k - 1\}\right) - p^2 q^{2k} = (1 - q^2) q^{2k}.$$

$$\mathbb{P}(\{T = 0\}) = 2\mathbb{P}(\{X = 0\}) - (\mathbb{P}(\{X = 0\}))^2 = 2p - p^2 = (1 - q^2) q^{2 \cdot 0}.$$

Donc $T \sim \mathcal{G}(1 - q^2)$.

3. Pour tout couple $(k, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Z = k\}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\{X = n\})\mathbb{P}(\{Y = k\}) = p^2 q^{n+k} & \text{si } k > n \\ \mathbb{P}(\{X = n\})\mathbb{P}(\{Y \leq n\}) = p q^n (1 - q^{n+1}) & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k < n \end{cases}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{Z = k\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Z = k\}) = \sum_{n=0}^{k-1} p^2 q^{n+k} + p q^k (1 - q^{k+1}) \\ = p q^k (1 - q^k) + p q^k (1 - q^{k+1}) = p q^k (2 - q^k - q^{k+1}).$$

$\mathbb{P}(\{Z = 0\}) = p(1 - q)$, donc le résultat précédent est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. a. X et Y étant indépendantes,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{X + Y = m\}) = \sum_{i=0}^m \mathbb{P}(\{X = i\})\mathbb{P}(\{Y = m - i\}).$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(\{X + Y = m\}) = \sum_{i=0}^m p q^i p q^{m-i} = \sum_{i=0}^m p^2 q^m = (m + 1) p^2 q^m.$$

$$\text{b. } \mathbb{P}(\{Z = 0\} | \{X + Y = 2n + 1\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X + Y = 2n + 1\} \cap \{\max(X, Y) = k\})}{\mathbb{P}(\{X + Y = 2n + 1\})}.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(\{Z = 0\} | \{X + Y = 2n + 1\}) = \begin{cases} \alpha & \text{si } n + 1 \leq k \leq 2n + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{où}$$

$$\alpha = \frac{1}{2(m + 1) p^2 q^{2n+1}} \mathbb{P}((\{X = k\} \cap \{Y = 2n + 1 - k\}) \cup (\{X = 2n + 1 - k\} \cap \{Y = k\}))$$

$$\text{ie. } \alpha = \frac{2 p^2 q^{2n+1}}{2(n + 1) p^2 q^{2n+1}} = \frac{1}{n + 1} \quad \text{si } k \in \llbracket n + 1, 2n + 1 \rrbracket.$$

La loi est l'équiprobabilité sur $\llbracket n + 1, 2n + 1 \rrbracket$.

6. a. On a déjà, les $p_{i,j} \geq 0$.

$$\sum_{j=0}^i p_{i,j} = \sum_{j=0}^i \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1 - \alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \alpha^j (1 - \alpha)^{i-j} = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} (\alpha + 1 - \alpha)^i \\ = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}. \quad \text{Donc } \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} = 1. \quad \text{Donc } (p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \text{ est une famille}$$

sommable de réels positifs. Elle caractérise une probabilité sur $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$.

$$\bullet \forall i \in \mathbb{N}, P(\{X = i\}) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}. \quad \text{Donc } X \sim \mathcal{P}(\lambda).$$

$$\bullet \forall j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{Y = j\}) = \sum_{i=j}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1 - \alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j+k} \alpha^j (1 - \alpha)^k}{j! k!} \\ = e^{-\lambda} \frac{(\lambda \alpha)^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda (1 - \alpha))^k}{k!} = \frac{(\lambda \alpha)^j e^{-\lambda \alpha}}{j!}.$$

D'où $Y \sim \mathcal{P}(\lambda\alpha)$. Les deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes car $\mathbb{P}(\{X = 0\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y = 1\}) \neq \mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{Y = 1\})$.

b. $Z = X - Y$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{Z = k\}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{Z = k\} \cap \{Y = \ell\}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{X = k + \ell\} \cap \{Y = \ell\}) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k+\ell} \alpha^{\ell} (1-\alpha)^k}{k! \ell!} = \frac{\lambda^k (1-\alpha)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\lambda\alpha)^{\ell}}{\ell!} \\ &= \frac{(\lambda(1-\alpha))^k}{k!} e^{-\lambda(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Donc $X - Y \sim \mathcal{P}(\lambda(1-\alpha))$.

$$\begin{aligned} \text{c. } \mathbb{P}(\{Y = j\} | \{Z = n\}) &= \frac{\mathbb{P}(\{Z = n\} \cap \{Y = j\})}{\mathbb{P}(\{Z = n\})} = \frac{\mathbb{P}(\{X = n + j\} \cap \{Y = j\})}{\mathbb{P}(\{Z = n\})} \\ &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda\alpha)^j}{j!} = \mathbb{P}(\{Y = j\}). \end{aligned}$$

Donc Y, Z sont deux variables aléatoires indépendantes.

7. 1. En tant que série géométrique convergente, $\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} = p^2 q^{|n|} \frac{1}{1-q^2} = v_n$.

En tant que série géométrique, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$.

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n = \frac{p}{1+q} \left(2 \sum_{n=0}^{\infty} q^n - 1 \right) = \frac{p}{q+1} \left(\frac{2}{p} - 1 \right) = 1$.

La famille $(u_{n,m})_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}}$ de réels positifs est sommable de somme 1. Elle caractérise une probabilité sur $(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}))$.

2. $\mathbb{P}(\{T = m\}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(\{Z = n\} \cap \{T = m\}) = p^2 q^{2m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{|n|} = p(1+q)q^{2m}$ et

ceci, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Donc $T \sim \mathcal{G}(1-q^2)$. De même, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(\{Z = n\}) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\{Z = n\} \cap \{T = m\}) = p^2 q^{2|n|} \sum_{m \in \mathbb{N}} q^{2m} = \frac{pq^{|n|}}{1+q}.$$

$$\mathbb{P}(\{Z = n\} \cap \{T = m\}) = \frac{pq^{|n|}}{1+q} \cdot p(1+q)q^{2m} = \mathbb{P}(\{Z = n\}) \cdot \mathbb{P}(\{T = m\}).$$

Les deux variables aléatoires Z, T sont donc indépendantes.

3. a. $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \mathbb{P}(\{Z = n\} \cap \{T = m\}) = \mathbb{P}(\{X - Y = n\} \cap \{\min(X, Y) = m\})$.

$$\mathbb{P}(\{Z = n\} \cap \{T = m\}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\{X = m\} \cap \{Y = m - n\}) = p^2 q^{2m-n} & \text{si } n < 0 \\ \mathbb{P}(\{X = m\} \cap \{Y = m + n\}) = p^2 q^{2m+n} & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

ie. $\mathbb{P}(\{Z = n\} \cap \{T = m\}) = p^2 q^{2m+|n|}$. On déduit de 2. que Z et T sont indépendantes.

b. (i) $\{X = n + 1\} \cap \{Y = n\} = \{T = n\} \cap \{Z = 1\}$ et

$$\{X = n\} \cap \{Y = n\} = \{T = n\} \cap \{Z = 0\}. \text{ Donc } \alpha = \frac{\mathbb{P}(\{T = n\} \cap \{Z = 1\})}{\mathbb{P}(\{T = n\} \cap \{Z = 0\})}.$$

(ii) Comme X et Y sont indépendantes, $\alpha = \frac{\mathbb{P}(\{X = n + 1\})}{\mathbb{P}(\{X = n\})}$.

Comme Z et T sont indépendantes, $\alpha = \frac{\mathbb{P}(\{Z = 1\})}{\mathbb{P}(\{Z = 0\})} = p$.

Donc la suite $(\mathbb{P}(\{X = n\}))_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison p .

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{X = n\}) = p^{n-1} \mathbb{P}(\{X = 0\})$. Les deux variables aléatoires X et Y sont de loi $\mathcal{G}(1-p)$.

8. a. L'événement $(X = n)$ est réalisé si Jean a franchi avec succès les étapes $1, 2, \dots, n$ mais a échoué à l'étape $(n+1)$. L'hypothèse d'indépendance permet d'écrire $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$.

b. Notons $u_n = n \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge de somme e , la série $\sum u_n$ converge et $E(X)$ existe.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = e - 1.$$

De même, $n^2 u_n = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ si $n \geq 2$ et $\frac{1}{2}$ si $n = 1$, donc

$\mathbb{E}(X^2)$ existe et $\mathbb{E}(X^2) = e + 1$. D'où $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 3e - e^2$.

$$9. a. \mathbb{P}(X = x | S = s) = \frac{\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = s - x\})}{\mathbb{P}(S = s)}.$$

X et Y étant indépendantes et, d'après le cours $S \sim \mathcal{B}(n+m, p)$,

$$\text{On a } \mathbb{P}(X = x | S = s) = \frac{\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \binom{m}{s-x} p^{s-x} (1-p)^{m-x+s}}{\binom{m+n}{s} p^s (1-p)^{m+n-s}}$$

$$\text{d'où } \mathbb{P}(X = x | S = s) = \frac{\binom{n}{x} \binom{m}{s-x}}{\binom{m+n}{s}} \text{ (loi hypergéométrique).}$$

$$b. \text{ Dans ce cas, on obtient : } \mathbb{P}(X = x | S = s) = \binom{s}{x} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^x \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{s-x}$$

ie. loi binomiale de paramètres s et $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

10. a. Z suit une loi de Bernoulli. Donc $\mathbb{E}(Z) = x$ et $\mathbb{V}(Z) = x(1-x)$.

b. La linéarité de $\mathbb{E}$ donne $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Z_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Z) = x$. Comme les

variables aléatoires X_i sont indépendantes, $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(Z_k) = \frac{x(1-x)}{n}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, implique : $\mathbb{P}(|Y_n - x| > \alpha) \leq \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}$.

Comme, pour tout $x \in [0, 1]$, $x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$,

$\mathbb{P}(|Y_n - x| > \alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$. Comme $nY_n \sim \mathcal{B}(n, x)$, l'inégalité précédente s'écrit :

$\sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, |\frac{k}{n} - x| > \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$. Cette inégalité reste vraie si $x \in \{0, 1\}$.

Comme $\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n}$ l'application de la formule de transfert donne $\mathbb{E}(f(Y_n)) = P_n(x)$.

c. Comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est, d'après le théorème de Heine, uniformément continue. Donc :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Donc $\sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ |\frac{k}{n} - x| \leq \alpha}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \varepsilon \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ |\frac{k}{n} - x| \leq \alpha}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \varepsilon$.

Pour $x \in [0, 1]$, $|\mathbb{P}_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, |\frac{k}{n} - x| > \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|$.

Notons $M = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \in \mathbb{R}_+$, on peut écrire, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, |\frac{k}{n} - x| > \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq 2M \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

Donc $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow M \frac{1}{2n\alpha^2} \leq \varepsilon$.

d. Finalement, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0(\varepsilon), \forall x \in [0, 1], |P_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$. Ceci traduit bien la convergence uniforme de la suite de fonctions polynômes $(P_n)_{n \geq 1}$ vers f sur $[0, 1]$. On retrouve le théorème de Weierstrass avec une suite explicite de polynômes appelés **polynômes de Bernstein**.

11. a. Comme les variables aléatoires sont indépendantes, on a :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{P}(X_n X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1) \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{E}(X_n)^2 = p^2.$$

Donc $\mathbb{E}(S_n) = np^2$. D'autre part, $\mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n Y_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Y_i Y_j\right)$. Donc

$$\mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k^2 X_{k+1}^2\right) + 2\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i Y_j\right) + 2\mathbb{E}\left(\sum_{2 \leq i+1 < j \leq n} Y_i Y_j\right).$$

b. Comme Y_i et Y_j sont indépendantes si $i + 1 < j$, on a :

$$\mathbb{E}(S_n^2) = np^2 + 2\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i X_{i+1} X_{i+2}\right) + 2 \sum_{2 \leq i+1 < j \leq n} p^4.$$

Comme $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) = p$ et comme les variables aléatoires X_i sont indépendantes, $2\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i X_{i+1} X_{i+2}\right) = 2(n-1)p^3$.

$$\text{D'où } \mathbb{E}(S_n^2) = np^2 + 2(n-1)p^3 + p^4(n-1)(n-2).$$

$$\text{Donc } \mathbb{V}(S_n) = np^2 + 2(n-1)p^3 - (3n-2)p^4.$$

Il suffit d'appliquer la loi faible des grands nombres avec ici $m = p^2$, pour conclure que $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

12. a. On va fortement utiliser la positivité des $u_{k,\ell}$.

Posons, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $s_\ell = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,\ell}$.

Fixons $\varepsilon > 0$ puis ℓ_0 tel que $S - \varepsilon \leq \sum_{l=0}^{\ell_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_{k,l} \right) \leq \varepsilon$.

$\sum_{\ell=0}^{\ell_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_{k,\ell} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{\ell_0} u_{k,\ell} \right)$ et on choisit alors un entier k_0 tel que :

$$\sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{\ell=0}^{\ell_0} u_{k,\ell} \right) = \sum_{\ell=0}^{\ell_0} \left(\sum_{k=0}^{k_0} u_{k,\ell} \right) \geq S - 2\varepsilon.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, $u_{k,\ell} \leq s_\ell$ et $\sum_{\ell=0}^{\infty} s_\ell$ est finie donc $\sum_{\ell=0}^{\infty} u_{k,\ell}$ est finie.

Soit alors $K \geq k_0$. On a $U_K = \sum_{k=0}^K \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} u_{k,\ell} \right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^K u_{k,\ell} \right) \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} s_\ell = S$.

De plus $U_K \geq U_{k_0} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{k_0} u_{k,\ell} \right) \geq \sum_{\ell=0}^{\ell_0} \left(\sum_{k=0}^{k_0} u_{k,\ell} \right) \geq S - 2\varepsilon$. Par suite $K \geq k_0 \Rightarrow S - 2\varepsilon \leq U_K \leq S$, ce qui prouve que $(U_K)_K$ converge vers S , ce qu'il fallait montrer.

Remarque : cette question est une conséquence du cours sur les familles sommables de première année.

b. Posons, pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $u_{k,\ell} = \ell \mathbb{P}((Y = \ell) \cap (X = k))$. La suite $(u_{k,\ell})_{k,\ell}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Si $\ell \in \mathbb{N}$, comme $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (X = k)\right) = 1$, la formule des probabilités totales montre

que $s_\ell = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,\ell} = \ell \mathbb{P}(Y = \ell)$ qui est donc finie.

De plus $\sum_{k=0}^{\infty} s_\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \mathbb{P}(Y = \ell) = \mathbb{E}(Y)$ qui est aussi finie.

La première question montre que $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \mathbb{P}(Y = \ell | X = k) \mathbb{P}(X = k) \right)$

soit $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \mathbb{P}(Y = \ell | X = k) \right) \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_{(X=k)}(Y) \mathbb{P}(X = k)$.

c. Notons X_k le nombre de poules de la k -ième génération. Comme $\mathcal{P}(\lambda)$ a λ pour espérance et comme il y a mutuelle indépendance des descendance de chaque poule on a $\mathbb{E}(X_1) = N\lambda$.

Supposons que $\mathbb{E}(X_p) = N\lambda^p$.

La loi conditionnelle de X_{p+1} sachant $(X_p = k)$ est $\mathcal{P}(k\lambda)$ d'où $\mathbb{E}_{(X_p=k)}(Y) = k\lambda$.

La question précédente montre : $\mathbb{E}(X_{p+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} k\lambda \mathbb{P}(X_p = k) = \lambda \mathbb{E}(X_p) = N\lambda^{p+1}$.

Cela montre, par récurrence, que l'espérance du nombre de poules de la n -ième génération est $N\lambda^n$.

13. a. (i) Comme, pour $p \in \mathcal{P}$ il existe $\lfloor N/p \rfloor$ multiples de p dans $\llbracket 1, N \rrbracket$, on a :

$\mathbb{E}(Y_p) = \mathbb{P}(p|X) = \frac{1}{N} \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor$. De même, comme p et q sont distincts,

$\mathbb{E}(Y_p Y_q) = \mathbb{P}(p|X, q|X) = \mathbb{P}(pq|X) = \frac{1}{N} \left\lfloor \frac{N}{pq} \right\rfloor$.

(ii) Comme $Y = \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq N} Y_p$ et comme $\mathbb{E}$ est linéaire,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq N} \mathbb{E}(Y_p) \geq \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq N} \frac{1}{N} \left(\frac{N}{p} - 1 \right) \geq \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq N} \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \alpha$$

où $\alpha = \text{Card}(\mathcal{P} \cap \llbracket 1, N \rrbracket)$. Comme $\alpha \leq N$, le résultat est établi.

$$(iii) \mathbb{E}(Y^2) = \sum_{p, q \in \mathcal{P}, p, q \leq N} \mathbb{E}(Y_p Y_q) = \mathbb{E}(Y) + \sum_{p, q \in \mathcal{P}, p, q \leq N, p \neq q} \frac{1}{N} \left\lfloor \frac{N}{pq} \right\rfloor.$$

Comme $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)$, il s'ensuit que :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y) + \sum_{p, q \in \mathcal{P}, p, q \leq N, p \neq q} \frac{1}{N} \left\lfloor \frac{N}{pq} \right\rfloor - \sum_{p, q \in \mathcal{P}, p, q \leq N} \frac{1}{N} \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor \frac{1}{N} \left\lfloor \frac{N}{q} \right\rfloor.$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$,

$$\mathbb{V}(Y) \leq \mathbb{E}(Y) + \sum_{p, q \in \mathcal{P}, p, q \leq N, p \neq q} \left(\frac{1}{N} \frac{N}{pq} - \frac{1}{N^2} \left(\frac{N}{p} - 1 \right) \left(\frac{N}{q} - 1 \right) \right).$$

$$\text{Donc } \mathbb{V}(Y) \geq \mathbb{E}(Y) + \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq N} \frac{1}{p} + \sum_{q \in \mathcal{P}, q \leq N} \frac{1}{q}.$$

On déduit de a. (i) que $\mathbb{V}(Y) \geq \mathbb{E}(Y) + (\mathbb{E}(Y) + 1) + (\mathbb{E}(Y) + 1) = 3\mathbb{E}(Y) + 2$.

b. (i) Tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrivant comme produit de puissances de

nombre premiers, on a $\sum_{n=1}^N \frac{1}{N} \leq \prod_{p \in \mathcal{P}, p \leq N} \sum_{k=0}^N \frac{1}{p^k} \leq \prod_{p \in \mathcal{P}, p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1}$.

En effet, comme $p \geq 2$, on a : $\sum_{k=0}^N \frac{1}{p^k} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{1 - 1/p}$.

(ii) Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même du produit des $\left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1}$.

Comme $\ln \left(\left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} \right) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{p}$ la série $\sum 1/p$ diverge ie. la famille $(1/p)_{p \in \mathcal{P}}$ n'est pas sommable.

(iii) On en déduit ainsi que de a. (i) que $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y) = +\infty$.

On déduit de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que :

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq \varepsilon \mathbb{E}(Y)) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(Y)^2} \leq \frac{2 + 3\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(Y)^2}.$$

$$\frac{2 + 3\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(Y)^2} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3}{\varepsilon^2 \mathbb{E}(Y)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \text{ d'où le résultat.}$$

14. a. Soit $n \geq 2$. Notons sa décomposition en facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$. les diviseurs entiers naturels non nuls d de n tels que $\mu(d) \neq 0$ sont de la forme $d = \prod_{i \in P} p_i$ où P est une partie quelconque de $\llbracket 1, k \rrbracket$. Donc $\mu(d) = (-1)^{\text{Card}(P)}$.

$$\text{D'où } \sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{P \subset \llbracket 1, k \rrbracket} (-1)^{\text{Card}(P)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i = (1 - 1)^k = 0.$$

b. Les deux séries $\sum \frac{1}{k^s}$ et $\sum \frac{\mu(n)}{n^s}$ sont absolument convergentes. Donc la famille $\left(\frac{1}{(kn)^s} \right)_{k, n \geq 1}$ est sommable. On déduit du théorème de Fubini que :

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\substack{p, n \geq 1 \\ kn=p}} \frac{\mu(n)}{(kn)^s} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^s} \sum_{n|p} \mu(n) = 1.$$

c. Rappelons un résultat vu au chapitre 1 : $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

$$\sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{e|\frac{n}{d}} \varphi(e) = \sum_{d, e, de|n} \mu(d) \varphi(e) = \sum_{e|n} \varphi(e) \sum_{d|\frac{n}{e}} \mu(d) = \varphi(n)$$

d'après a.

d. On peut alors écrire que : $\sum_{k=1}^n \varphi(k) = \sum_{k=1}^n \sum_{d|k} \mu(d) \frac{k}{d} = \sum_{k=1}^n \frac{\mu(d)}{d} \sum_{k=1, d|k}^n k$.

Avec le changement de variable $k = pd$,

$$\sum_{k=1}^n \varphi(k) = \sum_{d=1}^n \frac{\mu(d)}{d} \sum_{1 \leq p \leq n/d} pd = \sum_{d=1}^n \mu(d) \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor + 1 \right).$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, on a : $\left(\frac{n}{d} - 1 \right) \frac{n}{d} \leq \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor + 1 \right) \leq \frac{n}{d} \left(\frac{n}{d} + 1 \right)$.

Donc $\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor + 1 \right) = \frac{n^2}{d^2} + O\left(\frac{n}{d}\right)$.

D'où $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \varphi(k) = \sum_{d=1}^n \left(\frac{\mu(d)}{2d^2} + O\left(\frac{1}{nd}\right) \right) = \sum_{d=1}^n \frac{\mu(d)}{2d^2} + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Finalement : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \varphi(k) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{2d^2} = \frac{1}{2\zeta(2)} = \frac{3}{\pi^2}$.

e. $\text{Card}\{(x, y) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid x \wedge y = 1\} = 1 + 2 \text{Card}\{(x, y) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid x \wedge y = 1 \text{ et } y < x\}$.

$$p_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} \sum_{x=2}^n \text{Card}\{y \in \llbracket 1, x \rrbracket \mid x \wedge y = 1\} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} \sum_{x=2}^n \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\pi^2}.$$

TRAVAUX DIRIGÉS

• Autour des records

Partie I

Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, pour tout $n \geq 1$, on pose $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$ et $R_n = \sum_{k=1}^n \chi_{A_k}$.

1. a. Déterminer l'espérance et la variance de R_n . Donner un équivalent de $\mathbb{E}(R_n)$ et de $\mathbb{V}(R_n)$.

b. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{R_n}{\ln(n)} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0$.

Interpréter ce résultat.

c. Calculer, pour tout $t \in [-1, 1]$, $\varphi_n(t) = \mathbb{E}(t^{R_n})$. En déduire, pour $i = 1, 2$ et n , $\mathbb{P}(R_n = i)$.

2. a et b étant deux éléments de $\mathbb{N}^*$, $a < b$, on pose $T_n = R_{bn} - R_{an}$.

a. Déterminer la fonction génératrice ψ_n de T_n .

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\psi_n(t)) = (t-1)\left(\frac{b}{a}\right)$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t)$.

On pourra utiliser après justifications : $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) < x$.

Quelle conclusion en tire-t-on ?

b. Vérifier que $\psi_n(t)$ est un polynôme de degré $(b-a)n$. On note $\alpha_n(k)$ le coefficient de t^k de ce polynôme. Déterminer, pour chaque k de $\mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(k)$.

Partie II

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ et $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de I_n . On considère l'espace probabilisé $(\mathfrak{S}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n), P_n)$ où P_n est l'équiprobabilité sur $(\mathfrak{S}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n))$.

1. Pour $i, j \in I_n$, on note $A_i(j)$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui envoient i sur j .

a. Calculer $P_n(A_i(j))$.

b. Soient k un entier strictement supérieur à 1 et inférieur ou égal à n , $(i_1, \dots, i_k)$ et $(j_1, \dots, j_k)$ deux k -uplets d'éléments deux à deux distincts de

I_n . Montrer que : $P_n\left(\bigcap_{m=1}^k A_{i_m}(j_m)\right) = \frac{(n-k)!}{n!}$.

Les événements $A_{i_m}(j_m), m \in \llbracket 1, k \rrbracket$ sont-ils indépendants ?

2. Pour $k \in I_n$, on considère la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k : \mathfrak{S}_n \rightarrow I_n, \sigma \mapsto Y_k(\sigma)$ le rang de $\sigma(k)$ dans la suite $(\sigma(1), \dots, \sigma(k))$ réordonné en croissant. On a donc $Y_1(\sigma) = 1, Y_2(\sigma) = 1$, si $\sigma(2) < \sigma(1)$, $Y_2(\sigma) = 2$, si $\sigma(2) > \sigma(1)$; etc ... On note Z le n -uplet $(Y_1, \dots, Y_n)$. Pour tout entier $r \leq k$, on appelle $B_k(r)$ l'événement $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid Y_k(\sigma) = r\}$.

a. Montrer que Z est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur $\Pi_n = \prod_{k=1}^n \{1, 2, \dots, k\}$.

b. Soit $\rho = (r_1, \dots, r_n)$ un élément de Π_n . Calculer $\mathbb{P}(\{Z = \rho\})$ et déduire que, pour tout $k \in I_{n-1}$, on a : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^k \{Y_m = r_m\}\right) = \frac{1}{k!}$.

c. Montrer que les variables aléatoires Y_k sont indépendantes et que, pour tout $k \in I_k$, la loi de Y_k est l'équiprobabilité. Que peut-on en déduire pour les événements $B_i, 1 \leq i \leq n$?

d. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $R_n(\sigma)$ le cardinal de l'ensemble $\{i \mid Y_i(\sigma) = i\}$. Exprimer $R_n(\sigma)$ en fonction des indicatrices des $B_i(i)$. Quel lien peut-on faire avec la première partie ?

Solution

Première partie

1. a. Par linéarité de $\mathbb{E}$, on a : $\mathbb{E}(R_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Les événements étant indépendants, $\mathbb{V}(R_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(\chi_{A_k}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Comme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n)$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge, $\mathbb{V}(R_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n)$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, U_n = \frac{R_n}{\ln(n)}$ est une variable aléatoire ayant une variance et

l'on a : $\mathbb{E}(U_n) = \frac{\mathbb{E}(R_n)}{\ln(n)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1$ et $\mathbb{V}(R_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\mathbb{V}(R_n)}{\ln^2(n)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$ est de limite nulle quand $n \rightarrow \infty$, le résultat demandé est établi.

c. Les χ_{A_i} étant indépendants, pour tout $t \in [-1, 1]$, on a :

$$\varphi_n(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{A_i}(t) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{i} + \frac{t}{i}\right) = \frac{t}{n!} \prod_{i=2}^n (i-1+t). \text{ Notons } \varphi_n(t) = \frac{t f_n(t)}{n!}.$$

$$\mathbb{P}(R_n = 0) = \varphi_n(0) = 0.$$

$$\mathbb{P}(R_n = 1) = \varphi'_n(0) = \frac{1}{n!} (0 f'_n(0) + f_n(0)) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

$$\mathbb{P}(R_n = 2) = \frac{1}{2} \varphi''_n(0) = \frac{1}{2n!} (0 f''_n(0) + 2 f'_n(0)) = \frac{f'_n(0)}{n!}.$$

Comme $\frac{f'_n(t)}{f_n(t)} = \sum_{i=2}^n \frac{1}{t+i-1}$ on a $P(R_n = 2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

$\mathbb{P}(R_n = n)$ est le coefficient de t^n dans $\varphi_n(t)$ ie. $\frac{1}{n!}$.

2. a. Les événements A_k étant indépendants, pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$\psi_n(t) = \mathbb{E}(t^{T_n}) = \prod_{i=an+1}^{bn} \varphi_{A_i}(t) = \frac{\varphi_{nb}(t)}{\varphi_{na}(t)} = \prod_{i=na+1}^{nb} \left(\frac{i-1}{i} + \frac{t}{i} \right).$$

ψ_n est une fonction polynôme. $\forall t \geq 1, \ln(\psi_n(t)) = \sum_{i=na+1}^{nb} \ln \left(1 + \frac{t-1}{i} \right)$.

On déduit, par exemple, de l'inégalité de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) < x.$$

D'où, $\forall i \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 1, \frac{t-1}{i} - \frac{(t-1)^2}{2i^2} \leq \ln \left(1 + \frac{t-1}{i} \right) \leq \frac{t-1}{i}$.

Par sommation, $\alpha_n(t-1) - \beta_n \frac{(t-1)^2}{2} \leq \ln(\psi_n(t)) \leq \alpha_n(t-1)$

où $\alpha_n = \sum_{i=na+1}^{nb} \frac{1}{i}$ et $\beta_n = \sum_{i=na+1}^{nb} \frac{1}{2i^2}$.

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$.

D'autre part, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$. Donc $\alpha_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln \left(\frac{b}{a} \right) + o(1)$.

Par encadrement, $\forall t \geq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\psi_n(t)) = (t-1) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$.

La continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$ implique $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t) = \exp \left(\ln \left(\frac{b}{a} \right) (t-1) \right)$.

La limite simple de la fonction ψ_n est donc la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre $\ln \left(\frac{b}{a} \right)$.

b. La fonction ψ_n étant le produit de $(bn - an)$ monomes est un polynôme de degré $(b-a)n$. On déduit de a. que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{T_n = k\}) = \frac{a}{b} \frac{1}{k!} \ln^k \left(\frac{b}{a} \right).$$

Deuxième partie

1. a. $\sigma \in A_i(j) \iff \sigma(i) = j$ et $\forall k \neq i, \sigma(k) \in I_n \setminus \{j\}$.

$\text{Card}(A_i(j)) = (n-1)!$ puisque c'est le nombre de bijections de $I_n \setminus \{i\}$ sur $I_n \setminus \{j\}$.

$$\text{Donc } \mathbb{P}_n(A_i(j)) = \frac{\text{Card}(A_i(j))}{\text{Card}(\mathfrak{S}_n)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

b. De même, $\sigma \in \bigcap_{m=1}^k A_{i_m}(j_m) \iff \forall m \in \{1, \dots, k\}, \sigma(i_m) = j_m$

ie. k valeurs de σ parmi les n sont fixées. Donc σ est déterminée par les $(n-k)$

valeurs restantes. Le cardinal de $\bigcap_{m=1}^k A_{i_m}(j_m)$ est donc le nombre de bijections de

$I_n \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ sur $I_n \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$ ie. $(n-k)!$ Il en résulte que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^k A_{i_m}(j_m)\right) = \frac{\text{Card}\left(\bigcap_{m=1}^k A_{i_m}(j_m)\right)}{\text{Card}(\mathfrak{S}_n)} = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Ce dernier nombre réel étant distinct de $\prod_{m=1}^k \mathbb{P}_n(A_{i_m}(j_m)) = \frac{1}{n^k}$, on peut conclure que les événements $A_{i_m}(j_m)$ ne sont pas indépendants.

2. a. Pour chaque $k \in I_n$, $\sigma(k)$ peut occuper les positions $1, 2, \dots, k$ dans la suite réordonnée $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k)$. Par suite, Y_k est à valeurs dans I_k et Z est à valeurs dans $\Pi_n = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$. Soit $\rho = (r_1, \dots, r_n) \in \Pi_n$. On a $\sigma(n) = r_n$, $\sigma(n-1)$ est à valeurs dans $I_n \setminus \{r_n\}$. Il y a donc une unique valeur se trouvant en r_{n-1} -ième position et $\sigma(n-1)$ est ainsi fixé et ainsi de suite... Il s'ensuit que, pour chaque $\rho \in \Pi_n$ il existe une unique permutation σ_ρ telle que $Z(\sigma_\rho) = \rho$; Z est bien bijective.

b. Donc $\mathbb{P}_n(\{Z = \rho\}) = \mathbb{P}_n(\sigma_\rho) = \frac{1}{n!}$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^k \{Y_m = r_m\}\right) &= \sum_{(r_{k+1}, \dots, r_n) \in E_{k+1} \times \dots \times E_n} P\left(\bigcap_{m=1}^n \{Y_m = r_m\}\right) \\ &= \frac{1}{n!} \text{Card}\left(E_{k+1} \times \dots \times E_n\right) = \frac{(k+1) \dots n}{n!} = \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

c. Les variables aléatoires Y_i sont bien à valeurs dans I_i et l'on a : $\forall r_i \in I_i$,

$$\mathbb{P}_n(Y_i = r_i) = \sum_{\forall j \neq i, r_j \in E_j} \mathbb{P}_n\left(\bigcap_{m=1}^k \{Y_m = r_m\}\right) = \frac{1.2 \dots (i-1).(i+1) \dots n}{n!} = \frac{1}{i}.$$

La loi de Y_i est donc l'équiprobabilité sur E_i et l'on a :

$$\forall \rho = (r_1, \dots, r_n) \in \Pi_n, \mathbb{P}_n\left(\bigcap_{m=1}^n \{Y_m = r_m\}\right) = \frac{1}{n!} = \prod_{m=1}^n \mathbb{P}_n(Y_m = r_m),$$

ce qui prouve l'indépendance des variables aléatoires Y_i . On en déduit, en particulier, l'indépendance des événements $B_i(j) = \{Y = i\}$.

d. Comme $Y_i(\sigma) = i$ équivaut à $\sigma \in B_i(i)$, on a $R_n = \sum_{i=1}^n \chi_{B_i(i)}$. Pour n fixé, les résultats de la partie I s'appliquent à $\Omega = \mathfrak{S}_n$, $\mathcal{A} = P(\mathfrak{S}_n)$ et $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}$.

• Somme aléatoire de variables aléatoires

1. Pour p réel de $]0, 1[$, on pose $q = 1 - p$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \frac{-q^n}{n \ln(p)}$.

a. Montrer que $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ définit une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ une probabilité $\mathcal{L}(p)$.

b. Déterminer l'espérance mathématique, la variance et la fonction génératrice d'une variable aléatoire X de loi $\mathcal{L}(p)$.

Dans la suite du problème, $(N, X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs entières. Les variables aléatoires X_n ont la même loi que X_1 . On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(N = n) = \beta_n, S_N : \omega \in \Omega \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \\ \sum_{i=1}^n X_i(\omega) & \text{si } N(\omega) = n > 0 \end{cases}$$

2. a. Vérifier que l'on a :

$$\begin{aligned} \{S_N = 0\} &= \{N = 0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\{N = n\} \cap \left\{ \sum_{i=1}^n X_i = 0 \right\} \right) \\ \forall m \in \mathbb{N}^*, \{S_N = m\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\{N = n\} \cap \left\{ \sum_{i=1}^n X_i = m \right\} \right). \end{aligned}$$

En déduire que S_N et $N - S_N$ sont des variables aléatoires.

b. On suppose dans les questions 2.b), c) et d) que X_1 est une variable aléatoire d'espérance mathématique p . Déterminer, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P(S_N = m)$ en fonction de p , m et des β_n .

c. On suppose dans les questions 2. c) et d) que $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer et identifier la loi de S_N . Écrire sa fonction génératrice.

d. Calculer, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(\{S_N = n\} \cap \{N - S_N = m\})$. En déduire la loi de $N - S_N$ et l'indépendance de S_N et $N - S_N$.

3. a. On note φ la fonction génératrice de N et ψ celle X_1 . Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in [-1, 1]$, on a : $\mathbb{E}_{N=n}(u^{S_N}) = \mathbb{E}(u^{X_1 + \dots + X_n})$.

En déduire $\mathbb{E}_N(u^{S_N})$ en fonction de ψ , puis que la fonction génératrice de S_N est $\varphi \circ \psi$.

b. On suppose désormais que $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

(i) Déterminer la fonction génératrice de S_N en fonction de λ et ψ .

(ii) Retrouver, lorsque X_1 est une variable aléatoire indicatrice d'espérance mathématique p , les résultats de 2.c).

(iii) Déterminer la fonction génératrice de S_N lorsque $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Préciser la loi de S_N lorsque λ est le produit d'un entier strictement positif par $-\ln(p)$.

4. On considère une suite $(Y_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires entières indépendantes. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction génératrice φ_{Y_k} est donnée par $\forall t \in [-1, 1], \varphi_{Y_k}(t) = \exp(\lambda \alpha_k(t^k - 1))$.

a. Déterminer, pour tout k la loi de probabilité de Y_k .

b. Déterminer la fonction génératrice Φ_n de $\sum_{k=1}^n Y_k$

c. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n$. Conclure.

Solution

1. a. Pour tout $u \in [-1, 1]$ la famille $(\alpha_n u^n)_{n \geq 1}$ est sommable de somme

$$f(u) = \frac{-1}{\ln(p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(uq)^n}{n} = \frac{\ln(1 - uq)}{\ln(p)}.$$

Comme les α_n sont positifs et $f(1) = 1$, la famille $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ sommable de somme 1, définit une loi de probabilité $\mathcal{L}(p)$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{L}(\mathbb{N}^*))$.

b. Il découle du calcul précédent qu'une variable aléatoire $X \sim \mathcal{L}(p)$ admet f pour fonction génératrice f .

$$\text{Comme } f'(1) = \frac{-q}{p \ln(p)} \text{ et } f''(1) = \frac{-q^2}{p^2 \ln(p)} \text{ on a : } \mathbb{E}(X) = f'(1) = \frac{-q}{p \ln(p)}$$

$$\mathbb{V}(X) = f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2 = \frac{-q(q + \ln(p))}{p^2 \ln^2(p)}.$$

2. a. Pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\{S_N = m\} = \{S_N = m\} \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{N = n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{S_N = m\} \cap \{N = n\}).$$

$$n = m = 0 \Rightarrow \{S_N = 0\} \cap \{N = 0\} = \{N = 0\};$$

$$n = 0 \text{ et } m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \{S_N = m\} \cap \{N = 0\} = \{S_0 = m\} \cap \{N = 0\} = \emptyset;$$

$$(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \Rightarrow \{S_N = m\} \cap \{N = n\} = \left\{ \sum_{i=1}^n X_i = m \right\} \cap \{N = n\}.$$

Pour chaque n , $\sum_{i=1}^n X_i$ est une variable aléatoire et, une tribu étant stable par

l'intersection et l'union dénombrable, $\{S_n = m\}$ est un événement. Il en résulte que S_N et $N - S_N$ sont des variables aléatoires.

b. L'indépendance des X_i et de N implique celle de $\sum_{i=1}^n X_i$ et de N . La loi de $\sum_{i=1}^n X_i$, somme de n variables aléatoires indicatrices indépendantes de même espérance mathématique est binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{S_N = 0\}) &= \mathbb{P}(\{X = 0\}) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{N = n\}) \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^n X_i = 0\right\}\right) \\ &= \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (1-p)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (1-p)^n. \end{aligned}$$

De même, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{S_N = m\}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{N = n\}) \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^n X_i = m\right\}\right) \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \beta_n \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}, \text{ encore vraie si } m = 0. \end{aligned}$$

c. Les calculs de la question précédente donnent :

$$\mathbb{P}(\{S_N = m\}) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-m}}{(n-m)!}$$

$$\text{ie. } \mathbb{P}(\{S_N = m\}) = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^m}{m!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^m}{m!}. \text{ Donc } S_N \sim \mathcal{P}(\lambda p).$$

La fonction génératrice de S_N est $u \mapsto \varphi_{S_N}(u) = e^{-\lambda p + p \lambda u}$ pour tout $u \in [-1, 1]$.

$$\text{d. } \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \{S_N = n\} \cap \{N - S_N = m\} = \{S_N = m\} \cap \{N = n + m\}.$$

$$\{S_N = n\} \cap \{N - S_N = m\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n+m} X_i = n \right\} \cap \{N = n + m\}.$$

Comme N et $\sum_{i=1}^{n+m} X_i$ sont indépendantes, et comme la loi de $\sum_{i=1}^{n+m} X_i$ est binomiale $\mathcal{B}(n+m, p)$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{S_N = n\} \cap \{N - S_N = m\}) &= \mathbb{P}\left(\left\{ \sum_{i=1}^{n+m} X_i = n \right\}\right) \mathbb{P}(\{N = n + m\}) \\ &= \frac{(n+m)!}{n!m!} p^n (1-p)^m e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+m}}{(n+m)!} \\ &= \mathbb{P}(\{S_N = n\}) \frac{e^{-\lambda(1-p)} (\lambda(1-p))^m}{m!}. \end{aligned}$$

Par suite, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{N - S_N = m\}) &= \frac{e^{-\lambda(1-p)} (\lambda(1-p))^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{S_N = n\}) \\ &= \frac{e^{-\lambda(1-p)} (\lambda(1-p))^m}{m!}. \end{aligned}$$

Donc la variable aléatoire $N - S_N$ suit une loi $\mathcal{P}(\lambda(1-p))$.

Comme $\mathbb{P}(\{S_N = n\} \cap \{N - S_N = m\}) = \mathbb{P}(\{S_N = n\}) \mathbb{P}(\{N - S_N = m\})$, les variables aléatoires S_N et $N - S_N$ sont indépendantes.

3. a. Comme les variables aléatoires N et $\sum_{i=1}^n X_i$ sont indépendantes, pour

$u \in [-1, 1]$ et pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{S_N = k\} | \{N = n\}) &= \frac{\mathbb{P}(\{S_N = k\} \cap \{N = n\})}{\mathbb{P}(\{N = n\})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{N = n\}) \mathbb{P}\left(\left\{ \sum_{i=1}^n X_i = k \right\}\right)}{\mathbb{P}(\{N = n\})} = \mathbb{P}\left(\left\{ \sum_{i=1}^n X_i = k \right\}\right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\mathbb{E}_{\{N=n\}}(u^{S_N}) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k \mathbb{P}(\{S_N = k\} | \{N = n\}) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k \mathbb{P}\left(\left\{ \sum_{i=1}^n X_i = k \right\}\right)$$

$$\text{ie. } \mathbb{E}_{\{N=n\}}(u^{S_N}) = E(u^{X_1 + \dots + X_n}).$$

Comme les X_i sont indépendantes, il s'en déduit que :

$$\mathbb{E}_{\{N=n\}}(u^{S_N}) = \varphi_{X_1 + \dots + X_n}(u) = (\psi(u))^n.$$

Donc l'espérance conditionnelle de u^{S_N} à N est $(\psi(u))^N$ et comme $\psi(u) \in [-1, 1]$, on a : $\varphi_{S_N}(u) = E(u^{S_N}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}_N(u^{S_N})) = \mathbb{E}((\psi(u))^N) = \varphi(\psi(u)).$

b. (i) Lorsque $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, la fonction génératrice φ est telle que, pour $t \in [-1, 1]$, $\varphi(t) = \exp(\lambda(t-1))$. Le résultat de 3.a. s'écrit :

$$\forall u \in [-1, 1], \varphi_{S_N}(u) = \exp(\lambda(\psi(u) - 1)).$$

(ii) Lorsque X_1 est une variable aléatoire indicatrice d'espérance mathématique p , la fonction génératrice de X_1 est $u \mapsto \psi(u) = 1 - p + pu$. Donc $\forall u \in [-1, 1], \varphi_{S_N}(u) = \exp(\lambda(pu - p)) = \exp(\lambda p(u - 1))$. On retrouve bien le résultat de 2.c.

$$(iii) \text{ Lorsque } X \sim \mathcal{L}(p) \text{ on a vu que : } \forall u \in [-1, 1], (u) = \frac{\ln(1 - uq)}{\ln(p)}.$$

$$\text{Donc : } \forall u \in [-1, 1], \varphi_{S_N}(u) = \exp\left(-\lambda + \lambda \frac{\ln(1 - uq)}{\ln(p)}\right) = \left(\frac{p}{1 - qu}\right)^{-\lambda / \ln(p)}$$

Lorsqu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = -r \ln(p)$, la fonction génératrice qui s'écrit $\varphi_{S_N}(u) = \left(\frac{p}{1 - qu}\right)^r$ est connue sous le nom de la loi binomiale négative $\mathcal{N}(r, p)$.

4. a. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [-1, 1]$,

$$\varphi_{Y_k}(t) = \exp(\lambda \alpha_k(t^k - 1)) = \varphi_Y(t^k) = E((t^k)Y) = E(t^{kY})$$

où $Y \sim \mathcal{P}(\lambda \alpha_k)$. Donc Y_k et kY ont la même loi. La variable aléatoire Y_k est à valeurs dans $k\mathbb{N}$ et sa loi est caractérisée par :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{Y_k = k\ell\}) = \mathbb{P}(\{Y = \ell\}) = \frac{e^{-\lambda \alpha_k} (\lambda \alpha_k)^\ell}{\ell!}.$$

b. L'indépendance des Y_k entraîne que l'on a, pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$\Phi_n(t) = \varphi_{Y_1 + \dots + Y_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{Y_i}(t) = \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n \alpha_k + \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_k t^k\right).$$

c. Comme la série entière $\sum \alpha_k t^k$ converge sur $[0, 1]$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k = \frac{\ln(1 - qt)}{\ln(p)}.$$

$$\text{Par continuité de la fonction exp, } \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(t) = \exp\left(-\lambda + \lambda \frac{\ln(1 - qt)}{\ln(p)}\right) = \varphi_{S_N}(t)$$

ce qui montre que la suite des lois des variables aléatoires $\sum_{i=1}^n Y_i$ converge vers la loi de S_N .

• Variables aléatoires entières décomposables

Notations

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont discrètes. On note $\mathbb{P}_X$ la loi d'une variable aléatoire X .

Si X et X' sont deux variables aléatoires définies sur les espaces probabilisés respectifs $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, la notation $X \sim X'$ signifie que X et X' ont même loi, c'est-à-dire $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X'}$.

Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note G_X sa fonction génératrice.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *décomposition* de X toute relation de la forme $X \sim Y + Z$ où Y et Z sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé pouvant être distinct de celui sur lequel X est définie.

On dit que X est *décomposable* si X admet une décomposition où Y et Z ne sont pas constantes presque sûrement.

A - Premiers exemples

A.1) Soit X et X' deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Justifier que $X \sim X'$ si et seulement si $G_X = G_{X'}$.

A.2) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une décomposition $X \sim Y + Z$ où Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Quelle relation lie G_X, G_Y et G_Z ?

A.3) Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $n \geq 1$ et $p \in]0, 1[$. Montrer que X est décomposable si et seulement si $n \geq 2$.

A.4) Soit $A(T) \in \mathbb{R}[T]$ le polynôme : $A(T) = T^4 + 2T + 1$.

a. Soit $U(T)$ et $V(T)$ deux polynômes à coefficients réels positifs ou nuls tels que $U(T)V(T) = A(T)$. Montrer que l'un des polynômes $U(T)$ ou $V(T)$ est constant.

On pourra distinguer les cas selon les valeurs des degrés de $U(T)$ et $V(T)$.

b. En déduire qu'il existe une variable aléatoire décomposable X telle que X^2 ne soit pas décomposable.

On pourra considérer le polynôme $\frac{1}{4}A(T)$.

B. Variables uniformes

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la loi uniforme sur $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \text{ si } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ et } \mathbb{P}(X = k) = 0 \text{ sinon}$$

B.1) Variables uniformes décomposables

On suppose dans cette question que n n'est pas premier : il existe des entiers a et b , supérieurs ou égaux à 2, tels que $n = ab$.

a. Montrer qu'il existe un unique couple de variables aléatoires entières (Q, R) définies sur Ω telles que $X = aQ + R$ et $\forall \omega \in \Omega, R(\omega) \in \llbracket 0, a-1 \rrbracket$. On pourra considérer une division euclidienne.

b. Préciser la loi de (Q, R) puis les lois de Q et de R .

c. Montrer que X est décomposable. En déduire une expression de G_X comme produit de deux polynômes non constants que l'on précisera.

B.2) Variables uniformes non décomposables

On suppose dans cette question que n est un nombre premier et on établit que X n'est pas décomposable.

a. Montrer qu'il suffit de prouver le résultat suivant : si U et V sont des polynômes de $\mathbb{R}[T]$ unitaires à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ tels que $U(T)V(T) = 1 + T + \dots + T^{n-1}$, alors l'un des deux polynômes U ou V est constant.

Dans ce qui suit, on fixe des polynômes U et V de $\mathbb{R}[T]$ unitaires à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ tels que $U(T)V(T) = 1 + T + \dots + T^{n-1}$

On pose $r = \deg(U)$ et $s = \deg(V)$ et l'on suppose que $r \neq 0$ et $s \neq 0$.

b. Montrer que $U(T) = T^r U\left(\frac{1}{T}\right)$ et $V(T) = T^s V\left(\frac{1}{T}\right)$.

On note alors $U(T) = 1 + u_1 T + \dots + u_{r-1} T^{r-1} + T^r$ et

$V(T) = 1 + v_1 T + \dots + v_{s-1} T^{s-1} + T^s$ avec $r \leq s$ (quitte à échanger les rôles de U et V).

c. Montrer que $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, u_k v_k = 0$.

d. En déduire que $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, u_k \in \{0, 1\}$ et $v_k \in \{0, 1\}$.

e. Conclure. On pourra d'abord montrer que tous les coefficients de V sont à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Solution

A.1) $X \sim X' \Rightarrow G_X = G_{X'}$. Réciproquement, Si $G_X = G_{X'}$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!} = \frac{G_{X'}^{(n)}(0)}{n!} = \mathbb{P}(X' = n).$$

Donc $X \sim X' \iff G_X = G_{X'}$.

A.2) Y et Z étant indépendantes, t^Y et t^Z sont deux variables aléatoires indépendantes et donc $\forall t \in]-R, R[, G_{Y+Z}(t) = \mathbb{E}(t^Y)\mathbb{E}(t^Z) = G_Y(t)G_Z(t)$.

A.3) On suppose que X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Si $n \geq 2$, $X \sim Y + Z$ où $Y \sim \mathcal{B}(n-1, p)$ et $Z \sim \mathcal{B}(1, p)$ avec Y et Z indépendantes.

Si $n = 1$, $G_X(t) = pt + q$ avec $q = 1 - p$. Supposons $X \sim Y + Z$. alors

$G_X = G_Y G_Z$. Donc $G_Y G_Z$ est une fonction polynomiale de degré 1. Donc

G_X et G_Y sont polynomiales de degré ≤ 1 puisque, $\forall k \geq 2, (Y = k) \subset (Y + Z \geq k)$.

Donc G_Y est polynomiale de degré 0 ou 1. Si G_Y est de degré 0, $G_Y(t) = 1$ alors

$\mathbb{P}(Y = 0) = 1$ et $\forall k \geq 1, \mathbb{P}(Y = k) = 0$. Donc Y est presque sûrement constante et

X non décomposable. Finalement X est décomposable si, et seulement si, $n \geq 2$.

A.4) a. Comme -1 est racine évidente, $A(T) = (T+1)(T^3 - T^2 + T + 1)$.

$f: x \mapsto x^3 - x^2 + x + 1$ est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 2x^2 + (x-1)^2 > 0$.

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Elle a donc une unique racine réelle. Comme $f(0) = 1 > 0$, cette racine est strictement négative. Notons la $-a^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

Donc $A(T) = (T+1)(T+a^2)(T-z)(T-\bar{z})$ avec $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. La décomposition de d'Alembert-Gauss de A est $A(T) = (T+1)(T+a^2)(T^2 - 2\Re(z)T + |z|^2)$.

Notons que la somme des racines de A est $0 = -1 - a^2 + 2\Re(z)$.

Donc $-2\Re(z) = -(1+a^2) < 0$. On ne peut avoir $A = UV$ avec U et V polynômes à coefficients réels positifs que si U ou V est constant.

b. $X \sim \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$ est décomposable d'après A.3) et

$$G_X(t) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(t^2 + 2t + 1). \text{ Donc } G_{X^2}(t) = \frac{1}{4}(t^4 + 2t + 1) = \frac{1}{4}A(t).$$

X^2 n'est pas décomposable car $A(T)$ n'est pas le produit $U(T)V(T)$ de deux polynômes à coefficients réels positifs que si U ou V est constant d'après a.

B.1) a. D'après le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{N}$,

$\forall k \in \mathbb{N}, \exists!(q, r) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} k = aq + r \\ 0 \leq r < a \end{cases}$. Donc il existe un unique couple de variables

aléatoires entières (Q, R) définies sur Ω telles que $X = aQ + R, \forall \omega \in \Omega, R(\omega) \in \llbracket 0, a \rrbracket$.

b. $X = k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \iff k = ai + j \in \llbracket 0, ab-1 \rrbracket$.

Donc $Q(\Omega) = \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ et $R(\Omega) = \llbracket 0, a-1 \rrbracket$.

Comme X suit une loi uniforme sur $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et comme l'application

$X \mapsto (Q, R)$ est bijective, (Q, R) suit une loi uniforme sur $\llbracket 0, b-1 \rrbracket \times \llbracket 0, a-1 \rrbracket$ qui est un ensemble de cardinal n .

$$\mathbb{P}(Q = i) = \sum_{j=0}^{a-1} \mathbb{P}(Q = i, R = j) = \sum_{j=0}^{a-1} \frac{1}{n} = \frac{a}{n} = \frac{1}{b}. \text{ De même, } \mathbb{P}(R = j) = \frac{1}{a}.$$

c. Posons $Y = aQ$ et $Z = R$, on a deux variables aléatoires non constantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrons qu'elles sont indépendantes.

$$\mathbb{P}(Y = y, Z = z) = \mathbb{P}(aQ = y, R = z)$$

Si $y = aq, q \notin \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ ou $x \notin \llbracket 0, a-1 \rrbracket$, alors

$$\mathbb{P}(Y = y, Z = z) = \mathbb{P}(aQ = y, R = z) = 0 = \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}(Z = z).$$

Si $y = aq, q \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ et $x \in \llbracket 0, a-1 \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(Y = y, Z = z) = \mathbb{P}(Q = q, R = z) = \frac{1}{n} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} = \mathbb{P}(Q = q)\mathbb{P}(R = z).$$

On a $\forall y, z, \mathbb{P}(Y = y, Z = z) = \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}(Z = z)$ ie. Y et Z sont indépendantes.

Donc X est décomposable.

$$\text{Donc } G_X(T) = G_{AQ}(T)G_R(T) = \left(\sum_{i=0}^{b-1} \frac{T^{ai}}{b}\right) \left(\sum_{i=0}^{a-1} \frac{T^i}{a}\right).$$

B.2) a. Supposons X décomposable. Il existe Y et Z presque sûrement non

constants tels que $G_X = G_Y G_Z$. Or $G_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} t^k$.

Comme $\forall k \geq n, (Y = k) \subset (Y + Z \geq k)$ et $(Z = k) \subset (Y + Z \geq k)$, on a G_Y et G_Z polynomiales. Posons $U(T) = \alpha G_Y(T)$ et $V(T) = \beta G_Z(T)$ avec U et V unitaires.

On a U, V unitaires à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ tels que $U(T)V(T) = \sum_{k=0}^{n-1} T^k$.

Donc U ou V est constant ; G_Y ou G_Z est constant. Donc Y ou Z est presque sûrement constant ce qui est absurde.

$$\text{b. } U(T)V(T) = \sum_{k=0}^{n-1} T^k = \prod_{k=1}^{n-1} (T - z_k). \text{ avec } z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = \overline{z_{n-k}} = \frac{1}{z_k}.$$

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est racine de U , comme $U \in \mathbb{R}[X]$, alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$ est racine de $U(T)$. La seule racine réelle de U est -1 qui vérifie aussi $-1 = \frac{1}{-1}$.

Comme $U(0)V(0) = 1 \Rightarrow U(0) \neq 0$ le polynôme $T^r U\left(\frac{1}{T}\right)$ est de degré r a les mêmes racines que U qui est de degré r . Donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha U(T) = T^r U\left(\frac{1}{T}\right)$.

$1 = \alpha U(0) = \alpha |U(0)|$ car U est à coefficients positifs. Comme $|U(0)|$ est le module du produit des racines de U , on a $|U(0)| = 1$, donc $\alpha = 1$.

Donc $U(T) = T^r U\left(\frac{1}{T}\right)$ et $V(T) = T^s V\left(\frac{1}{T}\right)$ par un raisonnement analogue.

c. L'énoncé suggère que $u_0 = u_r = v_0 = v_s = 1$.

$U(T) = T^r U\left(\frac{1}{T}\right)$ et $(T^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$, donc $\forall k \in \llbracket 0, r \rrbracket, u_k = u_{r-k}$.

En identifiant les coefficients de T^r dans UV , il vient

$$1 = \sum_{k=0}^r u_{r-k} v_k = 1 + \sum_{k=1}^r u_k v_k. \text{ Comme } \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, u_k v_k \geq 0, \text{ il s'ensuit que } \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, u_k v_k = 0.$$

d. Procédons par récurrence. On a $u_0 = v_0 = 1 \in \{0, 1\}$.

Soit $k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ tel que, $\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, (u_j, v_j) \in \{0, 1\}^2$.

En identifiant les coefficients de T^{k+1} dans UV , il vient

$$1 = u_{k+1} + v_{k+1} + \sum_{j=0}^k u_j v_{k+1-j}. \text{ Donc } \sum_{j=0}^k u_j v_{k+1-j} \in [0, 1].$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, (u_j, v_{k+1-j}) \in \{0, 1\}^2 \Rightarrow \sum_{j=0}^k u_j v_{k+1-j} \in \{0, 1\}.$$

Donc $u_{k+1} + v_{k+1} \in \{0, 1\}$. Or $u_{k+1} v_{k+1} = 0$, donc $(u_{k+1}, v_{k+1}) \in \{0, 1\}^2$.

On conclut par théorème de récurrence forte.

e. On montre de même que $\forall k \in \llbracket 1, s \rrbracket, v_k \in \{0, 1\}$.

$$U(1) = \sum_{j=0}^r u_j = 2 + \sum_{j=1}^{r-1} u_j \Rightarrow 2 < U(1) \leq r+1. \text{ De même, } 2 \leq V(1) \leq s+1.$$

Or $(U(1), V(1)) \in \mathbb{N}^2, U(1)V(1) = n$ et n est un nombre premier. C'est impossible. On a donc prouvé le résultat. Si n est premier, $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 0, n-1 \rrbracket)$ n'est pas décomposable.

• Variables aléatoires infiniment divisibles : exemples

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que X est infiniment divisible si, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires réelles discrètes $X_{m,1}, \dots, X_{m,m}$ mutuellement indépendantes, de même loi, et vérifiant $X \sim X_{m,1} + \dots + X_{m,m}$. Dans cette définition, l'espace probabilisé Ω_m sur lequel sont définies les $X_{m,i}$ peut dépendre de m .

A - Variables bornées

A.1) On suppose que X est constante égale à $a \in \mathbb{R}$. Montrer que X est infiniment divisible.

Soit X une variable aléatoire bornée infiniment divisible définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $M = \sup_{\Omega} |X|$, de sorte que $|X(\omega)| \leq M$ pour tout $\omega \in \Omega$.

A.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi, et telles que $X_1 + \dots + X_n$ ait même loi que X .

a. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que $X_i \leq \frac{M}{n}$ presque sûrement, puis $|X_i| \leq \frac{M}{n}$ presque sûrement.

b. En déduire que $\mathbb{V}(X) \leq \frac{M}{n^2}$, où $\mathbb{V}(X)$ désigne la variance de X .

A.3) Conclure que X est presque sûrement constante.

B - Étude du caractère infiniment divisible de quelques variables entières

B.1) Une variable binomiale est-elle infiniment divisible ?

B.2) Soit n un entier naturel non nul et soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

B.3) Soit X une variable aléatoire de Poisson. Montrer que X est infiniment divisible.

B.4) Soit r un entier naturel non nul et soit $X_1, \dots, X_r$ des variables aléatoires de Poisson mutuellement indépendantes.

Montrer que $\sum_{i=1}^r iX_i$ est une variable aléatoire infiniment divisible.

C - Séries de variables aléatoires à valeurs entières

C.1) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a. Montrer que si X et Y sont des événements de $\mathcal{A}$, et si $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont leurs événements contraires respectifs, alors

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B).$$

b. En déduire que, pour tout $t \in [-1, 1]$, $|G_X(t) - G_Y(t)| \leq 2\mathbb{P}(X \neq Y)$.

C.2) Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série des $\mathbb{P}(U_i \neq 0)$ soit convergente.

a. Soit $Z_n = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \geq n, U_i(\omega) \neq 0\}$. Montrer que (Z_n) est une suite décroissante d'événements et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0$.

b. En déduire que l'ensemble $\{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i \neq 0\}$ est presque sûrement fini.

c. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n U_i$ et $S = \sum_{i=1}^{\infty} U_i$. Justifier que S est définie presque sûrement. Montrer que (G_{S_n}) converge uniformément vers G_S sur $[-1, 1]$.

C.3) Soit $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs ou nuls. On suppose que la série $\sum \lambda_i$ est convergente, et on note $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$.

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout i , X_i suive une loi de Poisson de paramètre λ_i . On convient que, si $\lambda_i = 0$, X_i est la variable aléatoire nulle.

a. Montrer que la série $\sum \mathbb{P}(X_i \neq 0)$ est convergente.

b. Montrer que la série $\sum X_i$ est presque sûrement convergente et que sa somme (définie presque sûrement) suit une loi de Poisson de paramètre λ .

c. Montrer que la série $\sum iX_i$ est presque sûrement convergente et que sa somme $X = \sum_{i=1}^{\infty} iX_i$ définit une variable aléatoire infiniment divisible.

Solution

A -

A.1) On admet qu'il existe $X_{m,1}, \dots, X_{m,m}$ définies sur un espace probabilisé Ω_m mutuellement indépendantes de même loi que $\frac{X}{m}$.

On a : $\forall \omega \in \Omega_m, \sum_{k=1}^m X_{m,k}(\omega) = a \Rightarrow X \sim X_{m,1} + \dots + X_{m,m}$.

Donc X constante est infiniment divisible.

A.2) a. S'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\mathbb{P}\left(X_i > \frac{M}{n}\right) > 0$. Comme les X_k sont de même loi, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}\left(X_k > \frac{M}{n}\right) > 0$.

Les X_k étant indépendantes, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \left(X_k > \frac{M}{n}\right)\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}\left(X_k > \frac{M}{n}\right) > 0$.

Comme $\bigcap_{k=1}^n \left(X_k > \frac{M}{n}\right) \subset \left(\sum_{k=1}^n X_k > M\right)$, $\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k > M\right) = \mathbb{P}(X > M) > 0$ ce qui est absurde puisque $(X > M) = \emptyset$.

Donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \leq \frac{M}{n}$ presque sûrement.

Comme $-X \leq M$, on a $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, -X_i \leq \frac{M}{n}$ presque sûrement.

Donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |X_i| \leq \frac{M}{n}$ presque sûrement.

b. $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n)$ car les variables aléatoires X_i sont indépendantes. Comme elles sont de même loi, $\mathbb{V}(X) = n\mathbb{V}(X_1)$.

$\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 \leq \mathbb{E}(X_1^2) \leq \frac{M^2}{n^2}$ d'après a. et par croissance de $\mathbb{E}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{V}(X) \leq \frac{M^2}{n}$.

A.3) Comme $V(X) \geq 0$, il découle de l'inégalité précédente et du théorème d'encadrement que $\mathbb{V}(X) = 0$ i.e. $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = 0$.

Donc $X = \mathbb{E}(X)$ presque sûrement. Donc X est presque sûrement constante.

B -

B.1) Une variable aléatoire binomiale étant bornée et non constante, n'est pas infiniment divisible d'après II.A.

B.2) Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on a $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

Si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ et sont indépendantes, on déduit du cours que $G_{X_1+X_2}(t) = e^{(t-1)(\lambda_1+\lambda_2)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Supposons que $X_1 + \dots + X_{n-1} \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})$. Comme $X_1 + \dots + X_{n-1}$ et X_n sont indépendantes, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G_{X_1+\dots+X_n}(t) = G_{X_1+\dots+X_{n-1}}(t)G_{X_n}(t) = e^{(t-1)(\lambda_1+\dots+\lambda_{n-1})}e^{\lambda_n(t-1)}.$$

$$\text{Donc } \forall t \in \mathbb{R}, G_{X_1+\dots+X_n}(t) = e^{(t-1)(\lambda_1+\dots+\lambda_n)}.$$

Il découle de I.A.1) que $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

B.3) Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. D'après un résultat admis, il existe $X_{m,1}, \dots, X_{m,m}$ définies sur un espace probabilisé Ω_m mutuellement indépendantes de même loi que $\frac{X}{m}$.

D'après II.B.2), $X_{m,1} + \dots + X_{m,m} \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Donc $X_{m,1} + \dots + X_{m,m} \sim X$ et donc X est infiniment divisible.

B.4) On déduit de B.3) que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, il existe $X_{m,1}(i), \dots, X_{m,m}(i)$ définies sur un espace probabilisé Ω_m mutuellement indépendantes de même loi

que $X_{m,1}(i)$ et telles que $\sum_{k=1}^m X_{m,k}(i) \sim X_i$.

Notons, pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket, Y_{m,k} = \sum_{i=1}^r iX_{m,k}(i)$.

Les variables aléatoires $iX_{m,k}(i), i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ étant mutuellement indépendantes,

$$G_{Y_{m,k}} = \prod_{i=1}^r G_{iX_{m,k}(i)} = G_{Y_{m,1}}, \text{ donc les } Y_{m,k}, 1 \leq k \leq m \text{ ont même loi que } Y_{m,1}.$$

$$\text{Or } \sum_{k=1}^m Y_{m,k} = \sum_{i=1}^r i \sum_{k=1}^m X_{m,k}(i) \text{ et } X_{m,1}(i) \text{ et telles que } \sum_{k=1}^m X_{m,k}(i) \sim X_i.$$

Comme $(X_i)_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ et $\left(i \sum_{k=1}^m X_{m,k}(i)\right)_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ sont des familles mutuellement indépendantes, en utilisant les fonctions génératrices et A.1), on montre que :

$\sum_{i=1}^r i \sum_{k=1}^m X_{m,k}(i) \sim \sum_{i=1}^r i X_i$ et donc $\sum_{i=1}^r i X_i$ est infiniment divisible.

C -

C.1) a. $A \subset B \cup (A \cap \overline{B})$ et $B \cap (A \cap \overline{B}) = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$.

Donc $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$.

L'échange de A et B donne $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$.

Donc $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$.

b. $\forall t \in [-1, 1], |G_X(t) - G_Y(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)|$.

D'après a. $|\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \leq \mathbb{P}(X = n, Y \neq n) + \mathbb{P}(X \neq n, Y = n)$.

Or $(X \neq Y) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X = n, Y \neq n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \neq n, Y = n)$.

Comme les événements $(X = n, Y \neq n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles, ainsi que les événements $(X \neq n, Y = n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n, Y \neq n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \neq n, Y = n)$. Donc $\forall t \in [-1, 1]$,

$|G_X(t) - G_Y(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{P}(X = n, Y \neq n) + \mathbb{P}(X \neq n, Y = n)) \leq 2\mathbb{P}(X \neq Y)$.

C.2) a. $\forall n \geq 1, Z_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} (U_i \neq 0) \Rightarrow Z_{n+1} \subset Z_n$.

Donc (Z_n) est décroissante. On a $0 \leq \mathbb{P}(Z_n) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(U_i \neq 0)$ car $\sum \mathbb{P}(U_i)$ converge.

Comme la suite des restes d'une série convergente converge vers 0, on déduit du théorème d'encadrement que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0$.

b. (Z_n) étant décroissante, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0$, d'après un théorème

du cours. Donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Z_n}\right) = 1$ ie. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Z_n}$ est un événement presque sûr. Or

$\overline{Z_n} = \bigcap_{i \leq n} \overline{\{U_i \neq 0\}} = \{\omega \mid \forall i \geq n, U_i(\omega) = 0\}$.

$\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Z_n} \iff (\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall i \geq n, U_i(\omega) = 0) \iff \{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i(\omega) \neq 0\}$ est fini.

Donc l'ensemble $\{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i(\omega) \neq 0\}$ est presque sûrement fini.

c. On déduit de b) que la suite $(U_i(\omega))$ est presque nulle. Donc la série $\sum U_i$ converge simplement presque sûrement ie. S est définie presque sûrement sur $\mathcal{D}$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $\{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i(\omega) \neq 0\}$ est presque sûrement fini.

On déduit de II.C.b) que $|G_{S_n}(t) - G_S(t)| \leq \mathbb{P}(S_n \neq S)$ (*).

Pour $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{D}$ la suite $(S_n(\omega))_{n \geq 1}$ stationnaire converge vers $S(\omega)$. Comme elle est croissante, la suite d'événements $(S_n \neq S)$ est décroissante. On déduit d'un

théorème du cours que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (S_n \neq S)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n \neq S)$.

Comme $\bigcap_{n=1}^{\infty} (S_n \neq S) \subset \overline{\mathcal{D}}$ on a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (S_n \neq S)\right) = 0$. On déduit de $(\star)$ que (G_{S_n}) converge uniformément vers G_S sur $[-1, 1]$.

C.3) a. $\mathbb{P}(X_i \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - e^{-\lambda_i}$.

Comme $\sum \lambda_i$ converge, $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = 0$. Donc $1 - e^{-\lambda_i} \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \lambda_i \geq 0$

La convergence de $\sum \lambda_i$ et le critère d'équivalence des séries à termes positifs implique la convergence de $\sum \mathbb{P}(X_i \neq 0)$.

b. Le remplacement de U_i par X_i permet de conclure que $\sum X_i$ converge presque sûrement. En notant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$ on sait que (G_{S_n}) converge simplement car uniformément sur $[-1, 1]$ vers G_S .

Comme $\forall t \in \mathbb{R}, G_{S_n}(t) = \exp\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)(t-1)\right)$, on a $G_S(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

On déduit de I.A.1) que $S \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

c. Notons que $G_{iX_i}(t) = \mathbb{E}(t^{iX_i}) = \mathbb{E}((t^i)^{X_i}) = e^{\lambda_i(t^i-1)}$.

On peut remplacer, dans cette question, U_i par iX_i puisque les hypothèses sont vérifiées. Donc $X = \sum_{i=1}^{\infty} iX_i$ est définie presque sûrement. On sait que (G_{S_n})

converge simplement car uniformément sur $[-1, 1]$ vers G_X avec $S_n = \sum_{i=1}^n iX_i$.

Les iX_i étant des variables aléatoires indépendantes,

$$G_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n G_{iX_i}(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i t^i\right).$$

Pour tout $t \in [-1, 1]$, $|\lambda_i t^i| \leq \lambda_i$. La convergence de $\sum \lambda_i$ implique celle de $\sum \lambda_i t^i$.

$$\text{Donc } G_{S_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} G_X(t) = e^{-\lambda} \exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i t^i\right).$$

Montrons que X est infiniment divisible.

$$\text{Soit } m \in \mathbb{N}^{\star}, G_X(t) = (f_m(t))^m \text{ avec } f_m(t) = e^{-\lambda/m} \exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{m} t^i\right).$$

La fonction f_m est la fonction d'une variable aléatoire comme on peut le voir en remplaçant λ_i par λ_i/m dans la démonstration précédente.

D'après le résultat admis et déjà maintes fois utilisé, il existe $X_{m,1}, \dots, X_{m,m}$ définies sur un espace probabilisé Ω_m mutuellement indépendantes de même loi.

$$\text{Donc } G_{X_{m,1} + \dots + X_{m,m}} = \prod_{k=1}^m G_{X_{m,k}} = (f_m)^m = G_X.$$

Donc $X_{m,1} + \dots + X_{m,m} \sim X$. D'où $X = \sum_{i=1}^{\infty} iX_i$ est infiniment divisible.

• Variable aléatoire sous-gaussienne

Dans tout le problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $\alpha > 0$. On dit que la variable aléatoire X est α -sous-gaussienne si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

On rappelle la notation : $\text{ch}(t) = \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\text{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$. On pourra au préalable établir le développement de la fonction ch en série entière.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1, 1]$, on a l'inégalité de convexité

$$\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2} \exp(t) + \frac{1-x}{2} \exp(-t).$$

3. Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne. En déduire que, si X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α -sous-gaussienne.

4. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α -sous-gaussiennes, et $\mu_1, \dots, \mu_n$ des nombres réels tels que

$\sum_{i=1}^n (\mu_i)^2 = 1$. Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est α -sous-gaussienne.

5. Soit X une variable aléatoire α -sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$: $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t\right)$.

En déduire que : $\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$.

Dans la suite du problème, on admet qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum \mathbb{P}(X \geq k)$ converge

et que, dans ce cas : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$.

6. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, montrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X \geq k)$

converge et que, dans ce cas : $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) \leq \mathbb{E}(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$.

On pourra pour cela considérer la partie entière $[X]$.

Pour tout $s \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$.

7. Soit X une variable aléatoire α -sous-gaussienne et $\beta > 0$. Montrer que pour tout entier $k > 0$: $\mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2k^{-\eta}$ où on a posé $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$. En déduire que si $\alpha\beta < 1$, la variable aléatoire $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie majorée par $1 + 2\zeta(\eta)$.

En particulier, en prenant $\alpha\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et en utilisant l'inégalité $1 + 2\zeta(2) \leq 5$ (que l'on ne demande pas de justifier), on obtient immédiatement, et on l'admet, que si X est une variable aléatoire α -sous-gaussienne, on a l'inégalité d'Orlicz

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{X^2}{4\alpha^2}\right)\right) \leq 5.$$

Solution

1. $\forall t \in \mathbb{R}, \text{ch}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$.

Comme $(2n)! = n!(n+1)\dots(n+n) \geq n!2^n$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \text{ch}(t) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

2. $tx = \frac{1+x}{2}t + \frac{1-x}{2}(-t) = at + b(-t)$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $a+b=1$ car $x \in [-1, 1]$.

$$\exp \text{ étant convexe sur } \mathbb{R}, e^{tx} \leq ae^t + be^{-t} = \frac{1+x}{2}e^t + \frac{1-x}{2}e^{-t}.$$

3. Par hypothèse, $X(\Omega) \subset [-1, 1]$ et $\mathbb{E}(X) = 0 = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)$ (1).

D'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx}\mathbb{P}(X=x)$.

$$\text{Or } e^{tx}\mathbb{P}(X=x) \leq \frac{1+x}{2}\mathbb{P}(X=x)e^t + \frac{1-x}{2}\mathbb{P}(X=x)e^{-t} \text{ car } \mathbb{P}(X=x) \geq 0.$$

$$\text{On déduit de (1) que } \sum_{x \in X(\Omega)} e^t \frac{1+x}{2}\mathbb{P}(X=x) = \frac{e^t}{2} \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) = \frac{e^t}{2}$$

$$\text{et } \sum_{x \in X(\Omega)} e^{-t} \frac{1-x}{2}\mathbb{P}(X=x) = \frac{e^{-t}}{2} \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) = \frac{e^{-t}}{2}.$$

$$\text{Donc } \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \text{ch}(t). \text{ On déduit de 1. que } \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Donc X est 1-sous-gaussienne.

Si X est centrée et bornée par $\alpha > 0$, on remplace X par X/α dans le raisonnement précédent puisque X/α est bornée par 1 et centrée car $\mathbb{E}$ est linéaire. On a :

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}(e^{(t\alpha)\frac{X}{\alpha}}) \leq \exp\left(\frac{(t\alpha)^2}{2}\right). \text{ Donc } X \text{ est } \alpha\text{-sous-gaussienne.}$$

4. D'après le cours, $S_n = \sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est une variable aléatoire.

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^n t\mu_i X_i\right)\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{t\mu_i X_i}\right).$$

Les X_i étant indépendantes, il en est de même des $e^{t\mu_i X_i}$. D'où

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{t\mu_i X_i}). \text{ On déduit de 3. et de la positivité de } \exp \text{ que :}$$

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{(t\mu_i \alpha)^2}{2}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2 \frac{t^2 \alpha^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{(t\alpha)^2}{2}\right).$$

Donc S_n est α -sous-gaussienne.

$$\mathbf{5.} \text{ On a déjà vu que } \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} \mathbb{P}(X = x).$$

$$\text{Comme } t > 0, \text{ on a } \mathbb{E}(e^{tX}) \geq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq \lambda}} e^{t\lambda} \mathbb{P}(X = x) = e^{\lambda t} \mathbb{P}(X \geq \lambda).$$

Donc $\forall t > 0, \mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq e^{-\lambda t} \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t\right)$ car X est α -sous-gaussienne.

$(|X| \geq \lambda) = (X \geq \lambda) \cup (-X \geq \lambda)$ union de deux événements incompatibles.

$$\text{Donc } \forall t > 0, \mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t\right).$$

Or $\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t = \frac{1}{2}\left(\alpha t - \frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{2\alpha^2}$. Donc en particulier pour $t = \frac{\lambda}{\alpha^2} > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

6. $\lfloor X \rfloor \leq X < \lfloor X \rfloor + 1$. Donc X a une espérance finie si, et seulement si, $\lfloor X \rfloor$ a une espérance finie. Dans ce cas, comme la variable aléatoire constante égale à 1 a pour espérance 1, on a $\mathbb{E}(\lfloor X \rfloor) \leq \mathbb{E}(X) \leq 1 + \mathbb{E}(\lfloor X \rfloor)$.

$$\text{D'après le résultat admis, } \mathbb{E}(\lfloor X \rfloor) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor \geq k).$$

Comme $(X \geq k) = (\lfloor X \rfloor \geq k)$ car $k \in \mathbb{N}$, le résultat demandé est établi.

$$\mathbf{7.} \text{ Pour } k \geq 2, \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) = \mathbb{P}\left(|X| \geq \sqrt{\frac{2 \ln(k)}{\beta^2}}\right).$$

On déduit de 12) que $\mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2} \cdot \frac{2 \ln(k)}{\beta^2}\right) = 2k^{-\eta}$

où $\eta = (\alpha\beta)^{-2}$. Lorsque $k = 1$, l'inégalité est claire. En effet, elle se réduit à

$$\mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2.$$

Si $0 < \alpha\beta < 1$ alors $\eta > 1$ et $\sum_{k \geq 0} k^{-\eta}$ converge. L'inégalité précédente implique la convergence de $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right)$. On déduit de 6. que la variable aléatoire

$\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie et l'on a :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\right) \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^{\eta}} = 1 + 2\zeta(\eta).$$

• Étude du processus de Galton-Watson

Dans tout le problème, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

I - Étude d'une suite récurrente

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que f' et f'' soient à valeurs positives. On suppose $f(1) = 1$, $f'(0) < 1$ et $f''(1) > 0$. On considère de plus la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On pose $m = f'(1)$.

I.A -

I.A.1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, puis qu'elle est convergente. On note ℓ sa limite.

I.A.2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution. dans toute la suite, on la notera x_f .

I.A.3) Montrer que $\ell = x_f$.

I.B - On suppose $m > 1$. Montrer que $x_f \in]0, 1[$.

I.C - On suppose maintenant $m \leq 1$. Montrer que $x_f = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.

I.D - Dans cette question, on suppose $m = 1$.

I.D.1) On pose, $\varepsilon_n = 1 - u_n$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) = \frac{f''(1)}{2}$.

I.D.2) En déduire que, $1 - u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{f''(1)n}$.

I.E - On suppose maintenant $m < 1$ et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$.

I.E.1) Montrer que la série de terme général ε_n est absolument convergente et en déduire la convergence de celle de terme général $\ln \left(\frac{m^{-(n+1)} \varepsilon_{n+1}}{m^{-n} \varepsilon_n} \right)$.

I.E.2) En déduire qu'il existe $c > 0$ tel que, $1 - u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} cm^n$.

II - Formule de Wald

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires, mutuellement indépendantes, de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$, et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des précédentes. $(T, X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

On note G_X la fonction génératrice commune à toutes les X_n . Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, on pose $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$, $S_0(\omega) = 0$ et $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.

II.A - On souhaite démontrer l'égalité $G_S = G_T \circ G_X$.

II.A.1) Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

II.A.2) Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_{S_k} = (G_X)^k$.

II.A.3) Conclure.

II.B - En déduire que, si T et les X_n sont d'espérance finie, alors S aussi et $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X_1)$.

II.C - Lors d'une ponte, un insecte pond un nombre aléatoire d'œufs suivant la loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$. Ensuite, la probabilité qu'un œuf donné devienne un nouvel insecte est $\alpha \in]0, 1[$.

II.C.1) Rappeler la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

II.C.2) En utilisant la loi de composition ci-dessus, déterminer la loi du nombre d'insectes issus de la ponte.

III - Processus de Galton-Watson

Soit μ une loi de probabilité caractérisée par la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres réels entre 0 et 1 telle que $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

Dire qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suit la loi μ signifie que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = p_k$.

On suppose que $p_0 + p_1 < 1$ (ce qui signifie qu'il existe au moins un entier k supérieur ou égal à 2 tel que $p_k \neq 0$).

On étudie un individu qui a un certain nombre de fils. Ces fils ont également chacun (indépendamment les uns des autres) un certain nombre de fils et ainsi de suite. Afin de modéliser la situation, on se donne des variables aléatoires $(X_{n,i})_{(n,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ indépendantes qui suivent toutes la loi μ , on pose Y_0 la variable certaine égale à 1 et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$,

$$\begin{cases} Y_{n+1}(\omega) = 0 & \text{si } Y_n(\omega) = 0 \\ Y_{n+1}(\omega) = \sum_{i=1}^{Y_n(\omega)} X_{n,i}(\omega) & \text{si } Y_n(\omega) \neq 0 \end{cases}$$

Y_n représente le nombre d'individus à la génération n .

S'il n'y a pas d'individu à la génération n , il n'y en a pas plus à la génération suivante et sinon, le nombre de fils du i -ème élément de la génération n est égal à $X_{n,i}$.

On dit qu'il y a extinction lorsqu'il existe un entier n tel que $Y_n = 0$.

On note f la fonction génératrice de la loi μ (et donc de chacune des variables $X_{n,i}$) et, pour $n \in \mathbb{N}$, φ_n la fonction génératrice de la variable aléatoire Y_n .

On a donc en particulier, pour $t \in [0, 1]$, $\varphi_0(t) = t$.

On suppose que toute variable aléatoire suivant la loi μ possède une espérance égale à m et une variance.

III.A - Probabilité d'extinction

III.A.1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f$.

III.A.2) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'espérance de Y_n en fonction de m et de n .

III.A.3) a. Vérifier que la probabilité d'extinction est la limite de $(\varphi_n(0))$.

b. Vérifier qu'on peut appliquer les résultats de la partie I à $(\varphi_n(0))_{n \geq 0}$.

• **Galton Watson (suite et fin)**

III.A.4) Si $m \leq 1$, montrer que la probabilité d'extinction est 1.

On définit alors le temps d'extinction T par : $\forall \omega \in \Omega$,

$$T(\omega) = \begin{cases} \min \{n \in \mathbb{N} \mid Y_n(\omega) = 0\} & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } Y_n(\omega) = 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admettra que T est une variable aléatoire.

III.B - Cas sous-critique $m < 1$

On suppose dans cette question que $m < 1$.

III.B.1) Vérifier que T admet une espérance.

III.B.2) a. Montrer que, pour tout entier n , $\mathbb{P}(Y_n \geq 1) \leq m^n$.

b. Montrer que $\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n)$.

c. En déduire une majoration de $\mathbb{E}(T)$.

III.C - Étude de la lignée. Dans cette question, on suppose $m \leq 1$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = 1 + \sum_{i=1}^n Y_i$ et $Z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$.

On admettra que Z est une variable aléatoire définie sur $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{Y_k = 0\}$.

III.C.1) Montrer que Z est définie sur un ensemble de probabilité 1.

III.C.2) a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{P}(Z_n \leq k))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite convergente. Déterminer sa limite.

b. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{P}(Z_n = k))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\mathbb{P}(Z = k)$.

c. Montrer que, pour tout $s \in [0, 1[$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $K \in \mathbb{N}$,

$$|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \sum_{k=0}^K |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| + \frac{s^K}{1-s}.$$

d. En déduire que la suite de fonctions (G_{Z_n}) converge simplement vers G_Z sur $[0, 1]$.

III.C.3) a. Exprimer G_{Z_1} en fonction de f .

b. On admet que, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2 et pour tout $s \in [0, 1]$, $G_{Z_n}(s) = sf(G_{Z_{n-1}}(s))$.

En déduire que $\forall s \in [0, 1]$, $G_Z(s) = sf(G_Z(s))$.

c. Montrer que Z est d'espérance finie si, et seulement si, $m < 1$. Calculer l'espérance lorsque c'est le cas.

IV - Un exemple

On suppose dans cette partie que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \frac{1}{2^{k+1}}$.

IV.A - Exprimer, pour $t \in [0, 1]$, $f(t)$ et calculer m .

IV.B - Vérifier que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi_n(t) \neq 1$.

On peut donc poser $a_n(t) = \frac{1}{\varphi_n(t) - 1}$.

IV.C - Montrer que, pour tout $t \in [0, 1[$, la suite $(a_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique.

IV.D - En déduire que, pour $t \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(t) = \frac{n + (1 - n)}{1 + n - nt}$.

IV.E - Exprimer, pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $P(Y_n = k)$ en fonction de n et k .

IV.F - Exprimer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de l'événement $(T > n)$. La variable T admet-elle une espérance ?

IV.G - Exprimer, pour $s \in [0, 1[$, $G_Z(s)$ en fonction de s . En déduire la loi de Z .

V - Cas surcritique

On suppose dans cette partie $m > 1$.

On étudie un problème légèrement différent : k étant un entier strictement positif fixé, on suppose qu'il y a k individus à la génération 0 ; ensuite tout se passe comme précédemment. On note W_n le nombre d'individus à la n -ième génération et on définit u_n la probabilité que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ prenne la valeur k pour la première fois au rang n :

$$u_n = P \left((W_n = k) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (W_i \neq k) \right) \right).$$

Pour n et r entiers naturels non nuls, on définit de même $u_n^{(r)}$ comme la probabilité pour que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ prenne la valeur k pour la r -ième fois au rang n .

V.A - Vérifier que les séries $\sum_{n \geq 1} u_n s^n$ et $\sum_{n \geq 1} u_n^{(r)} s^n$ convergent quand $s \in [-1, 1]$. On peut donc définir $U(s) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n s^n$ et $U_r(s) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(r)} s^n$ pour $s \in [-1, 1]$.

V.B.1) Montrer que $P(W_1 > k) > 0$.

V.B.2) Montrer que la probabilité que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne prenne pas la valeur k est non nulle ; on note u cette probabilité.

On pourra étudier séparément les cas $p_0 = 0$ et $p_0 > 0$.

V.C.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et r un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer la relation $u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$.

V.C.2) En déduire que, pour tout entier r strictement positif, $U_r = U^r$ (U^r désigne $U \times U \times \dots \times U$ r fois).

V.D.1) Montrer que la probabilité que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ prenne la valeur k une infinité de fois est nulle.

V.D.2) Montrer qu'il en est de même pour la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

V.E - Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements tous de probabilité 1.

Montrer que $P \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \right) = 0$. Qu'en déduit-on pour $P \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)$?

V.F - Soit α la probabilité qu'il y ait extinction et β la probabilité que la suite (Y_n) diverge vers l'infini. Montrer que $\alpha + \beta = 1$.

Solution**Partie I****I.A -**

I.A.1) Par hypothèses f est croissante à valeurs dans $[0, 1]$ et l'on a aussi :

$0 = u_0 \leq u_1 = f(u_0) \leq 1$. En notant $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ qui est elle-même croissante

et à valeurs dans $[0, 1]$, on a $0 \leq f^n(u_0) = u_n \leq f^n(u_1) = u_{n+1} \leq 1$.

Cela prouve que $(u_n)_n$ est croissante majorée donc convergente.

I.A.2) Si $(x_n)_n$ est une suite convergente de solutions de $f(x) = x$ de limite ω alors $\omega \in [0, 1]$ fermé et, par continuité de f en ω , on a $f(\omega) = \omega$. Par suite $\{x \in [0, 1] \mid f(x) = x\}$ est une partie fermée de $[0, 1]$ et non vide car $f(1) = 1$, donc cette partie admet un minimum.

I.A.3) Par continuité de f en ℓ on a $f(\ell) = \ell$.

De plus $u_0 = 0 \leq x_f$ d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par croissance de f^n , il vient $u_n = f^n(u_0) \leq f^n(x_f) = x_f$ d'où, par passage à la limite, $\ell \leq x_f$ et, par définition de x_f , on en déduit $\ell = x_f$.

I.B - $g : x \mapsto f(x) - x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ et $g'' = f'' \geq 0$. La fonction g' est croissante sur $[0, 1]$ avec $g'(0) = f'(0) - 1 < 0$ et $g'(1) = m - 1 > 0$ donc g' possède un zéro, noté α , dans $]0, 1[$. On en déduit le tableau de variations

x	0	α	1
g	$f(0)$	$\searrow < 0 \nearrow$	0

Cela montre que g admet un zéro dans $]0, 1[$ et donc que $x_f < 1$.

I.C - Cette fois g' est croissante sur $[0, 1]$ et $g'(1) = m - 1 \leq 0$ donc g' est négative, g est décroissante sur $[0, 1]$.

Si $x_f < 1$ alors g est nulle sur $[x_f, 1]$ et donc g'' aussi, d'où $f''(1) = 0$, ce qui contredit l'énoncé. Par conséquent $x_f = 1$.

I.D -

I.D.1) $f(1 - h) \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - h + \frac{h^2}{2} f''(1) + o(h^2)$ car $m = 1$.

$$\varepsilon_{n+1} = 1 - f(u_n) = 1 - f(1 - \varepsilon_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2)$$

$$\text{puis } \frac{1}{\varepsilon_{n+1}} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{\varepsilon_n} \times \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_n f''(1)}{2} + o(\varepsilon_n)} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{\varepsilon_n} \left[1 + \frac{\varepsilon_n f''(1)}{2} + o(\varepsilon_n) \right] \text{ d'où}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{f''(1)}{2} + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f''(1)}{2}.$$

I.D.2) Par Cesaro $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}} - \frac{1}{\varepsilon_k} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f''(1)}{2}$ soit encore

$$\frac{1}{n\varepsilon_n} - \frac{1}{n\varepsilon_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f''(1)}{2} \text{ ou } \frac{1}{n\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f''(1)}{2} \text{ et donc, comme } f''(1) \neq 0,$$

$$\varepsilon_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{n f''(1)}.$$

I.E -

I.E.1) La question I.C montre que ε_n n'est jamais nul.

$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{1 - f(1 - \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(1) = m < 1$, la règle de d'Alembert montre la convergence de la série $\sum \varepsilon_n$ à termes strictement positifs.

De plus $\varepsilon_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 - f(1 - \varepsilon_n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} m\varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2)$

d'où $\ln \left(\frac{m^{-(n+1)} \varepsilon_{n+1}}{m^{-n} \varepsilon_n} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{m^{-(n+1)} \varepsilon_{n+1}}{m^{-n} \varepsilon_n} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\varepsilon_n f''(1)}{2m}$.

La convergence de $\sum \ln \left(\frac{m^{-(n+1)} \varepsilon_{n+1}}{m^{-n} \varepsilon_n} \right)$ en découle.

I.E.2) Si l'on note L la somme de la série précédente, comme on a

$\sum_{n=1}^{N-1} \ln \left(\frac{m^{-(n+1)} \varepsilon_{n+1}}{m^{-n} \varepsilon_n} \right) = \ln(m^{-N} \varepsilon_N) - \ln(m^{-1} \varepsilon_1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} L$ on en déduit $m^{-N} \varepsilon_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{L'}$ où L' est un nombre réel. Par suite $\varepsilon_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{L'} m^n$.

Partie II

II.A -

II.A.1) Question de cours

$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X + Y = n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n (X = k, Y = n - k)\right)$ d'où

$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k)$ par indépendance et donc, par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, sur $[-1, 1]$, on obtient $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

II.A.2) $G_{S_0} = 1 = G_X^0$.

Si $G_{S_k} = G_X^k$ alors, comme $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$ et comme les variables S_k et X_{k+1} sont indépendantes, la question précédente montre : $G_{S_{k+1}} = G_{S_k} G_X$ soit $G_{S_{k+1}} = G_X^{k+1}$. On a montré par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, G_{S_k} = G_X^k$.

II.A.3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la formule des probabilités totales montre :

$\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S = n | T = k) \mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k)$ car S_k et T indépendantes pour tout entier k , d'après un théorème du cours, puisque $(X_n, T)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes.

Donc si $|t| \leq 1$, $G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n \right)$

Notons $u_{n,k} = \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,k}| &= \mathbb{P}(T = k) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) |t|^n = \mathbb{P}(T = k) G_{S_k}(|t|) \\ &= \mathbb{P}(T = k) G_X^k(|t|) = v_k. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=0}^{\infty} v_k = G_T(G_X(|t|))$, on déduit du théorème d'interversion des suites doubles que

$\forall t \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n \right)$
ie. $\forall t \in]-1, 1[, G_S(t) = G_T(G_X(t))$.

II.B - Sur $[0, 1]$ on a $G'_S = (G'_T \circ G_X) G'_X$.

Comme T et X sont d'espérance finie, G'_S a pour limite $\mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X)$ en 1. Donc S est d'espérance finie et $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X)$.

II.C -

II.C.1) Si X suit $\mathcal{P}(\lambda)$ alors, si $-1 \leq t \leq 1$, $G_X(t) = e^{-\lambda(1-t)}$.

II.C.2) La variable aléatoire T représentant le nombre d'œufs suit $\mathcal{P}(\lambda)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si l'œuf numéro k devient un insecte et 0 sinon ; ainsi X_k est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre α .

Le nombre S d'insectes vérifie $\forall \omega \in \Omega, S(\omega) = \sum_{k=1}^{T(\omega)} X_k(\omega)$, donc $G_S = G_T \circ G_X$ d'après ce qui précède où X désigne une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre α .

Comme $G_X : t \mapsto (1-\alpha) + \alpha t$ il vient $G_S : t \mapsto e^{-\lambda\alpha(1-t)}$ ainsi, comme la fonction génératrice caractérise la loi, S suit $\mathcal{P}(\lambda\alpha)$.

Partie III

III.A -

III.A.1) Découle de II.A en admettant toujours, pour tout (k, n)

- $\sum_{i=1}^k X_{n,i}$ est indépendante de $X_{n,k+1}$;
- $\sum_{i=1}^k X_{n,i}$ est indépendante de Y_n .

III.A.2) La question II.B montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Y_{n+1}) = m\mathbb{E}(Y_n)$ et donc $\mathbb{E}(Y_n) = m^n$ puisque que Y_0 est certaine égale à 1.

III.A.3)

a. $((Y_n = 0))_n$ est une suite croissante d'événements et donc, par continuité croissante, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (Y_n = 0)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(0)$.

b. $\varphi_0 = Id$ et, si $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f$ donc $\varphi_n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} = f^n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1}(0) = f^{n+1}(0) = f(\varphi_n(0))$.

Comme μ admet une variance (finie s'entend) sa fonction génératrice, qui n'est autre que f , est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, les fonctions f' et f'' sont positives sur $[0, 1]$ comme sommes de séries entières dont les coefficients sont positifs,

$$f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1, \quad f'(0) = p_1 < 1 \text{ car } p_1 \leq p_0 + p_1 < 1 \text{ et } f''(1) = 2p_2 > 0$$

car $p_2 \geq 1 - (p_0 + p_1) > 0$.

La partie I s'applique donc à $(\varphi_n(0))_n$.

III.A.4) Si $m \leq 1$ la question I.C montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(0) = x_f = 1$.

III.B -

III.B.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(T = n) \subset (Y_{n-1} \geq 1)$,

$$\text{d'où } \mathbb{P}(T = n) \leq \mathbb{P}(Y_{n-1} \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_{n-1} = k) \leq \mathbb{E}(Y_{n-1}) = m^{n-1}.$$

Par domination $\sum n\mathbb{P}(T = n)$ converge et donc T admet une espérance finie.

III.B.2)

a. On vient de le montrer puis de l'utiliser.

b. Question de cours

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T > n - 1) - \mathbb{P}(T > n)$ d'où, en réindexant, si $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N n\mathbb{P}(T = n) &= \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)\mathbb{P}(T > n) - \sum_{n=1}^N n\mathbb{P}(T > n) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}(T > n) - N\mathbb{P}(T > N). \end{aligned}$$

Or $0 \leq N\mathbb{P}(T > N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} N\mathbb{P}(T = n) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n\mathbb{P}(T = n) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$ car $\sum n\mathbb{P}(T = n)$ converge. Donc, quand $N \rightarrow \infty$, on obtient le résultat.

c. $(T > n) \subset (Y_n \geq 1) \Rightarrow \mathbb{P}(T > n) \leq m^n \Rightarrow \mathbb{E}(T) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m^n = \frac{1}{1-m}.$

III.C - Que signifie $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$? S'agit-il de convergence simple, uniforme, normale ? Sur quel ensemble ? On admettra qu'il s'agit de convergence simple et l'on remarquera que si $Y_n(\omega) = 0$ alors $(Y_n(\omega))_n$ stationne à 0 d'où la convergence de $\sum Y_n(\omega)$.

III.C.1) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y_k = 0)$ est l'extinction dont la probabilité est 1 d'après III.A.

III.C.2)

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n \leq Z_{n+1}$ et donc $(\mathbb{P}(Z_n \leq k))_n$ est décroissante positive, donc convergente ; notons ℓ sa limite.

Par continuité décroissante de $\mathbb{P}$ on en déduit que $\ell = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} (Z_n \leq k)\right)$ ou encore $\ell = \mathbb{P}(Z \leq k)$.

b. $\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z_n \leq k) - \mathbb{P}(Z_n \leq k - 1)$ et d'après ce qui précède, $\mathbb{P}(Z_n = k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k - 1) = \mathbb{P}(Z = k)$.

De plus $\mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}(Z_n \leq 0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(Z \leq 0) = \mathbb{P}(Z = 0)$.

c. Si $0 \leq s < 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $K \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| &\leq \sum_{k=0}^K |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| s^k \\ &\quad + \sum_{k=K+1}^{\infty} |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| s^k \\ &\leq \sum_{k=0}^K |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| + \sum_{k=K+1}^{\infty} s^k \end{aligned}$$

car, si $k \geq K + 1$, $|\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| \leq \max(\mathbb{P}(Z_n = k), \mathbb{P}(Z = k)) \leq 1$

d'où $|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \sum_{k=0}^K |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| + \frac{s^{K+1}}{1-s}$, ce qui est meilleur que le majorant demandé.

d. Fixons s dans $[0, 1[$ et $\varepsilon > 0$.

On choisit ensuite $K \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{s^K}{1-s} \leq \varepsilon$ puis la question b. montre que

$$\sum_{k=0}^K |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ et on choisit } n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ tel que, si } n \geq n_\varepsilon,$$

$$\text{alors } \sum_{k=0}^K |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| \leq \varepsilon.$$

Alors $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq 2\varepsilon$, ce qui montre que $(G_{Z_n})_n$ converge simplement vers G_Z sur $[0, 1[$. De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $G_{Z_n}(1) = 1 = G_Z(1)$, la convergence simple a donc lieu sur $[0, 1]$.

III.C.3)

a. $Z_1 = 1 + Y_1$ et les variables 1 et Y_1 sont indépendantes, d'où $G_{Z_1} = G_1 G_{Y_1}$, soit $G_{Z_1} : s \mapsto sf(s)$.

b. Découle de la convergence simple précédente et de la continuité de f sur $[0, 1]$.

$$c. \forall s \in [0, 1[, G'_Z(s) = f(G_Z(s)) + sf'(G_Z(s))G'_Z(s)$$

$$\text{d'où } [1 - sf'(G_Z(s))]G'_Z(s) = f(G_Z(s)).$$

Quand $s \rightarrow 1$, $1 - sf'(G_Z(s)) \rightarrow 1 - m$ et $f(G_Z(s)) \rightarrow 1$. Si $m < 1$ cela prouve que $G'_Z(s) \rightarrow \frac{1}{1-m}$ et que, si $m = 1$, $G'_Z(s)$ n'a pas de limite finie, donc tend vers $+\infty$.

Partie IV

$$\text{IV.A - } \forall t \in [0, 1], f(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{t}{2}} = \frac{1}{2-t}.$$

$$\text{IV.B - } f([0, 1[) \subset [0, 1[\text{ et, } \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}, \text{ d'où } \varphi_n([0, 1[) \subset [0, 1[.$$

$$\text{IV.C - } a_{n+1}(t) - a_n(t) = \frac{1}{\frac{1}{2-\varphi_n(t)} - 1} - \frac{1}{\varphi_n(t) - 1} = \frac{2 - \varphi_n(t)}{\varphi_n(t) - 1} - \frac{1}{\varphi_n(t) - 1} \text{ d'où}$$

$$a_{n+1}(t) - a_n(t) = -1.$$

$$\text{IV.D - } a_n(t) = a_0(t) - n = \frac{1}{t-1} - n = \frac{1+n-nt}{t-1} = \frac{1}{\varphi_n(t) - 1} \text{ d'où}$$

$$\varphi_n(t) = \frac{t-1}{1+n-nt} + 1 = \frac{n+(1-n)t}{1+n-nt}.$$

IV.E - Sur $[0, 1]$ on a

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \frac{n-1}{n} + \left(\varphi_n(t) - \frac{n-1}{n} \right) = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(1+n-nt)} \\ &= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{1}{1 - \frac{nt}{n+1}} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^k t^k \end{aligned}$$

$$\text{d'où } P(Y_n = 0) = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\text{et, si } k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{n^{k-1}}{(n+1)^{k+1}}.$$

IV.F - Quelle est cette variable T , celle définie dans II ou le temps d'extinction ? Parions pour la deuxième hypothèse.

$$(T > n) = (Y_n \geq 1) \Rightarrow \mathbb{P}(T > n) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = 0) = \frac{1}{n+1}.$$

Si T était d'espérance finie la série de terme général $\mathbb{P}(T > n)$ convergerait, ce qui est faux. Donc T n'est pas d'espérance finie.

IV.G - III.C.3 montre que, sur $[0, 1[$, $G_Z(s) = \frac{s}{2 - G_Z(s)}$ et donc $G_Z(s)$ est racine de $X^2 - 2X + s$ d'où, pour tout $s \in [0, 1[$, $\exists \varepsilon(s) \in \{-1, 1\}$ tel que l'on a $G_Z(s) = 1 + \varepsilon(s)\sqrt{1-s}$. Comme $G_Z \leq 1$ la fonction ε est égale à -1 . Par continuité cela montre $G_Z(s) = 1 - \sqrt{1-s}$ sur $[0, 1]$.

On développe en série entière sur $[0, 1[$: $G_Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!} s^n$ d'où

$$\mathbb{P}(Z = 0) = 0 \text{ et, si } n \geq 1, \mathbb{P}(Z = n) = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}.$$

Partie V

V.A - $(W_n = k) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (W_i \neq k) \right) \subset (W_n = k)$ donc, si $s \in [-1, 1]$, on a $|u_n s^n| \leq \mathbb{P}(W_n = k)$ d'où l'absolue convergence de $\sum u_n s^n$.

Il en va de même pour $\sum u_n^{(r)} s^n$.

V.B -

V.B.1) Si chaque individu de la génération 0 a deux fils alors $W_1 > k$ donc $0 < p_2^k \leq \mathbb{P}(W_1 > k)$.

V.B.2) Si $p_0 > 0$ alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} (W_n \neq k)\right) \geq \mathbb{P}(W_1 = 0) = p_0^k > 0$.

Si, au contraire, $p_0 = 0$, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(W_{n+1} \geq W_n) = 1$ d'où

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} (W_n \neq k)\right) \geq \mathbb{P}(k < W_1 \leq W_2 \leq \dots) = \mathbb{P}(W_1 > k) = 1 - p_1^k > 0.$$

V.C -

V.C.1) Si $A_{n,r}$ est l'événement « la suite des W_p prend la valeur k pour la r -ième fois au rang n » alors $(A_{n,r} \cap A_{n-i,r-1})_{1 \leq i \leq n-1}$ est une partition de $A_{n,r}$ car il faut bien que la valeur k soit prise pour la $(r-1)$ -ième fois à un rang compris entre 1 et $n-1$. Donc $u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_{n,r} | A_{n-i,r-1}) u_{n-i}^{(r-1)}$ d'après la formule des probabilités totales.

Si $A_{n-i,r-1}$ est réalisé on peut considérer la génération $n-i$ comme génération originale et constater qu'ainsi $\mathbb{P}(A_{n,r} | A_{n-i,r-1}) = \mathbb{P}(A_{i,1}) = u_i$, d'où l'égalité

$$u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}.$$

V.C.2) Par produit de Cauchy la question précédente montre que l'on a :

$U_r = U U_{r-1}$ et donc, par récurrence, $U_r = U^r$.

V.D -

V.D.1) Si $r \in \mathbb{N}^*$, $U^r(1) = U_r(1) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(r)} = \mathbb{P}(S_r)$ où S_r est l'événement « $(W_n)_n$ prend au moins r fois la valeur k » car, par définition, on a

$u_n^{(r)} = \mathbb{P}(n = \min \{p \in \mathbb{N}^* \mid W_p = k \text{ pour la } r\text{-ième fois}\})$. La suite $(S_r)_{r \geq 1}$ est décroissante donc, par continuité décroissante de P , il vient :

$\mathbb{P}\left(\bigcap_{r \geq 1} S_r\right) = \lim_{r \rightarrow \infty} U^r(1) = \lim_{r \rightarrow \infty} (1-u)^r = 0$ ce qui revient à dire que $(W_n)_n$ prend la valeur k une infinité de fois avec une probabilité nulle.

V.D.2) Tout comme dans V.B.2 la probabilité que $(Y_n)_n$ ne prenne jamais la valeur k est strictement positive puis on suit la même démarche que dans la question précédente en considérant la première fois que la suite $(Y_n)_n$ prend la valeur k pour la r -ième fois.

V.E - Si $N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^N \overline{A_n}\right) \leq \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(\overline{A_n}) = 0$ par hypothèse.

Comme $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^N \overline{A_n}\right)$, on en déduit $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 0$.

Par complémentarité $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$.

V.F - Encore une fois totalement hors programme car $(Y_n)_n$ est une suite définie sur Ω .

Immédiatement $\alpha + \beta \leq 1$.

Si $k \in \mathbb{N}^*$ soit D_k l'événement « il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow Y_n > k$ ».

$D_k \subset \langle (Y_n)_n \text{ reste un nombre fini de fois dans } [0, k] \rangle$ d'où $\mathbb{P}(\overline{D_k}) \leq \alpha$ d'après la question V.D

Comme $(D_k)_k$ est décroissante, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq 1} D_k\right) \geq 1 - \alpha$, soit $\beta \geq 1 - \alpha$, d'où $\alpha + \beta = 1$.

Ce problème est largement inspiré d'un problème de Centrale PSI.

11. Équations différentielles

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Conformément au programme, seules les équations différentielles linéaires seront étudiées.

I. Généralités

- **Équations différentielles scalaires d'ordre $n \geq 1$** : c'est l'écriture

$$(\mathcal{L}) \quad a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = b(t)$$

où $a_0, \dots, a_n, b$ sont $n+2$ fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ telles que a_0 soit non nulle.

- b est le **second membre** de $(\mathcal{L})$.
- $(\mathcal{L})$ est dite **homogène** si $b = 0$. On note $(\mathcal{H}) : a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0$.
- $(\mathcal{L})$ est dite à coefficients constants si les a_k sont des constantes.
- Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenu dans I et non réduit à un point, $f \in \mathcal{D}^n(J, \mathbb{K})$ est une **J-solution** de $\mathcal{L}$ si pour tout $t \in J$, $a_0(t)f^{(n)}(t) + \cdots + a_n(t)f(t) = b(t)$.
- $t_0 \in I$ tel que $a_0(t_0) = 0$ est un **point singulier** de $(\mathcal{L})$.
- **Résoudre** ou **intégrer** $(\mathcal{L})$, c'est obtenir toutes les solutions de $(\mathcal{L})$ sur tous les intervalles possibles contenus dans I .
- $S_J(\mathcal{L})$ (*resp.* $S_J(\mathcal{H})$) est l'ensemble des J -solutions de $\mathcal{L}$ (*resp.* de $(\mathcal{H})$).
- $S_J(\mathcal{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}^n(J, \mathbb{K})$.
- $S_J(\mathcal{L})$ est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $S_J(\mathcal{H})$.

Ceci est une conséquence de la linéarité de l'application $y \mapsto \sum_{k=0}^n a_k y^{(n-k)}$.

II. Équations linéaires scalaires d'ordre 1

1. Théorème

Soit $(\mathcal{L}) : y' = a(t)y + b(t)$ où a et b sont des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, $S_I(\mathcal{L})$ est une droite affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Démonstration

$a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Elle possède donc des primitives sur I . Soit $P : t \mapsto \int_{t_0}^t a(s)ds, t_0 \in I$,

l'une d'elles. On a : $y \in S_I(\mathcal{L}) \iff \left(\forall t \in I, \frac{d}{dt} \left(e^{-P(t)} y(t) \right) = e^{-P(t)} b(t) \right)$ (1)

$$(1) \iff \exists C \in \mathbb{K}, \forall t \in I, e^{-P(t)} y(t) = \int_{t_0}^t e^{-P(u)} b(u) du + C.$$

$$(1) \iff \exists C \in \mathbb{K}, \forall t \in I, y(t) = \left(\int_{t_0}^t e^{-P(u)} b(u) du + C \right) e^{P(t)}.$$

ce qui met fin à la démonstration. En effet :

$$(i) \text{ si } (\mathcal{H}) \text{ est } y' = a(t)y, y \in S_I(\mathcal{H}) \iff \left(\exists C \in \mathbb{K}, \forall t \in I, y(t) = C e^{P(t)} \right).$$

$$(ii) f \in S_I(\mathcal{L}) \iff \left(f = f_0 + g, g \in S_I(\mathcal{H}) \right). \square$$

2. Remarques

• Si $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique $f \in S_I(\mathcal{L})$ telle que $f(t_0) = y_0$.

En effet, $f(t_0) = y_0 \iff C = y_0$.

• La démonstration est algorithmique. Autrement dit, elle constitue une (la ?) bonne méthode de résolution de $(\mathcal{L})$. Nous la conseillons vivement à nos lecteurs étudiants. Évitez la méthode dite de variation de la constante ou des considérations de $\frac{dy}{y}$.

• Si l'on connaît deux solutions distinctes de $(\mathcal{L})$ sur $I : f_1, f_2$, la solution générale de $(\mathcal{L})$ est $f = f_1 + \lambda(f_1 - f_2), \lambda$ parcourant $\mathbb{K}$.

En effet, $f_1 - f_2$ est solution non nulle de $\mathcal{H}$ sur I .

3. Exemple

Résoudre sur chacun des intervalles $I_1 =] - \infty, -1[, I_2 =] - 1, 1[, I_3 =]1, +\infty[$
 $(\mathcal{L}_1) \quad (t^2 - 1)y' + ty + 1 = 0$

Solution

Sur les intervalles considérés, on peut écrire : $(\mathcal{L}_1) \iff y' = a(t)y + b(t)$.

où $a(t) = \frac{t}{1-t^2}$ et $b(t) = \frac{1}{1-t^2}$. a et b sont continues sur les $I_j, 1 \leq j \leq 3$. Avec

les notations de la démonstration précédente, $P(t) = -\frac{1}{2} \ln |1 - t^2|$. Donc

$$(\mathcal{L}_1) \iff \forall t \in I_j, \frac{d}{dt} \left(\sqrt{|t^2 - 1|} y(t) \right) = \frac{\sqrt{|t^2 - 1|}}{1 - t^2}.$$

$$\text{si } t \in I_2, \frac{d}{dt} \left(\sqrt{1 - t^2} y(t) \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \text{ et si } t \in I_1 \cup I_3, \frac{d}{dt} \left(\sqrt{t^2 - 1} y(t) \right) = \frac{-1}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

Donc : $\exists C_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in I_2, y(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} (C_2 + \arcsin(t))$. De même,

$$\exists C_1 \in \mathbb{R}, \forall t \in I_1, y(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} \left(C_1 - \ln \left| t + \sqrt{t^2 - 1} \right| \right).$$

$$\exists C_3 \in \mathbb{R}, \forall t \in I_3, y(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} \left(C_3 - \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) \right).$$

4. Raccordement des solutions

Soit à résoudre $(\mathcal{L}) : a_0 y' + a_1 y = b$ où a_0, a_1, b sont continues sur $I =]t_0, t_{p+1}[$.

- Si a_0 ne s'annule pas sur I , le théorème I.B.1. permet de conclure.
- Si par exemple $Z = \{t \in I \mid a_0(t) = 0\} = \{(t_i)_{1 \leq i \leq p} \mid t_1 < t_2 < \dots < t_p\}$, après avoir résolu $(\mathcal{L})$ sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, cf. définition de l'expression : résoudre l'équation différentielle (I.A.), il faut voir s'il est possible de raccorder les solutions. Pour mieux comprendre, reprenons un exercice précédent.

$$(\mathcal{L}_1) : (t^2 - 1)y' + ty + 1 = 0.$$

Cette équation a déjà été étudiée sur I_1, I_2 et I_3 .

(i) Recherche des solutions sur $] -1, +\infty[= J_1$. Procédons par analyse-synthèse.

S'il existe $f \in S_{J_1}(\mathcal{L}_1)$ alors il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\text{si } t \in I_2, f(t) = \frac{C_2 + \arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \text{ si } t \in I_3, f(t) = \frac{C_3 - \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})}{\sqrt{t^2 - 1}}, f(1) = -1.$$

Noter que $f(1) = -1$ par substitution de t par 1 dans $(\mathcal{L}_1)$.

Si $C_2 \neq -\frac{\pi}{2}$ et $C_3 \neq 0$, alors $\lim_{1^-} |f| = +\infty$ et $\lim_{1^+} |f| = +\infty$ et f n'est pas continue en 1. Donc si f existe, elle est unique et définie par :

$$\text{si } t \in I_2, f(t) = \frac{-\arccos(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \text{ si } t \in I_3, f(t) = \frac{-\ln(t + \sqrt{t^2 - 1})}{\sqrt{t^2 - 1}}, f(1) = -1. \quad (1)$$

Montrons l'existence. Soit f définie par (1), elle est I_2 -solution et I_3 -solution. Pour montrer qu'elle est J_1 -solution, il suffit de montrer qu'elle est dérivable en 1. La méthode directe est possible, mais les calculs sont pénibles. Examinons en une autre avec des calculs moins fastidieux.

Le changement de variable $t = x + 1$ transforme y en z qui est solution de :

$$(\mathcal{L}_2) : (x^2 + 2x)z' + (x + 1)z + 1 = 0$$

Recherchons les solutions développables en série entière de $(\mathcal{L}_2)$.

Si $z(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ pour $x \in]-R, +R[$, et $R > 0$, alors $z'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$

d'après le théorème de dérivation des séries entières. Pour tout $x \in]-R, +R[$, $(x^2 + 2x) \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} + (x + 1) \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 1 = 0$.

$$\forall x \in]-R, +R[, 1 + a_0 + \sum_{n \geq 1} \left((2n + 1)a_n + n a_{n-1} \right) x^n = 0.$$

De l'unicité des coefficients du développement en série entière de la fonction nulle, on déduit $a_0 = -1$ et pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{-n}{2n + 1} a_{n-1}$. Comme $\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$,

$$R = 2. \text{ Par récurrence on obtient : } a_n = \frac{(-1)^n n!}{(2n + 1) \dots 5 \cdot 3} = -\frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n + 1)!}.$$

Donc $z : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1} 2^n (n!)^2}{(2n + 1)!} x^n$ est l'unique solution développable en série

entière en 0, de $(\mathcal{L}_2)$. La fonction z est une solution de $(\mathcal{L}_2)$ sur $] -2, 2[$. Donc $g : t \mapsto z(t - 1)$ est solution de $(\mathcal{L}_1)$ sur $] -1, 3[$. Par suite $g = f$ sur $] -1, 3[$ d'après l'unicité de la solution de $(\mathcal{L}_1)$ sur $] -1, +\infty[$. En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 2, z est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 3[$. Donc g est dérivable sur $] -1, 3[$. D'où f est dérivable en 1.

(ii) Recherche des solutions sur $] -\infty, 1[= J_2$.

Comme dans le cas (i), on montre que $(\mathcal{L}_1)$ a une unique J_2 -solution h définie par

$$h(t) = \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}} \text{ si } t \in I_2, \quad h(t) = \frac{-\ln|t + \sqrt{t^2-1}|}{\sqrt{t^2-1}} \text{ si } t \in I_1, \text{ et } h(-1) = 1.$$

(iii) Recherche des solutions sur $\mathbb{R}$.

Si y est une $\mathbb{R}$ -solution de $(\mathcal{L}_1)$, alors $y = f$ sur $] -1, +\infty[$. Comme $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow -1^+]{ } -\infty$, y ne peut être continue en -1 et $(\mathcal{L}_1)$ n'a pas de $\mathbb{R}$ -solution *ie.* $S_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}_1) = \emptyset$.

III. Équations linéaires du premier ordre

1. Définitions

1.1. Définition

Soient F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, a une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$ et b une application continue de I dans F .

On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* l'écriture :

$$(\mathcal{L}) \quad x' = a(t)x + b(t).$$

On appelle *équation différentielle linéaire homogène du premier ordre*

$$(\mathcal{H}) \quad x' = a(t)x.$$

1.2 Définition

Si J est un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ contenu dans I , on appelle J -solution de $(\mathcal{L})$ toute fonction $\varphi : J \rightarrow F$ dérivable telle que :

$$\forall t \in J, \varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t).$$

On note $S_J(\mathcal{L})$ l'ensemble des J -solutions de $\mathcal{L}$.

Étant donné $(t_0, x_0) \in J \times F$, le **problème de Cauchy** consiste à trouver une J -solution φ de $\mathcal{L}$ telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

1.3. Remarques

- $S_J(\mathcal{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(J, F)$.
- $S_J(\mathcal{L})$ est $\emptyset$ ou un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(J, F)$ de direction $S_J(\mathcal{H})$.
- La résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre $n \geq 2$ équivaut à celle d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

En effet, si $(\mathcal{L}) : y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b$. Alors $\mathcal{L} \iff X' = A(t)X + B(t)$ où X est la matrice colonne telle que ${}^t X = (y \quad y' \quad \dots \quad y^{(n-1)})$, $B(t)$ la matrice colonne telle que ${}^t B(t) = (0 \quad 0 \quad \dots \quad b(t))$ et $A(t)$ la matrice carrée définie par

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & \dots & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

1.4. Écriture matricielle ou sous forme de système

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F , $A(t) = (a_{i,j}(t)) = M_{\mathcal{B}}(a(t))$ la matrice de $a(t)$ dans la base $\mathcal{B}$. On a : $b(t) = \sum_{i=1}^n b_i(t)e_i$ et $\varphi(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t)e_i$. On écrit :

$$(\mathcal{L}) \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x'_i = \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}(t)x_j \right) + b_i$$

$$\varphi \in S_J(\mathcal{L}) \iff \forall t \in J, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi'_i(t) = \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}(t)\varphi_j(t) \right) + b_i(t).$$

2. Théorème de Cauchy linéaire

Soient F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, a une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$ et b une application continue de I dans F . Pour $t_0 \in I$ et $x_0 \in F$, il existe une unique I -solution φ de $(\mathcal{L})$ telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

Démonstration (non exigible)

Notons N une norme sur F et $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $\mathcal{L}(F)$.

Posons $f(t, x) = a(t)x + b(t)$. En utilisant le théorème sur les primitives de fonctions continues, on définit, par récurrence, la suite $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur

I en posant : $\varphi_0(t) = x_0$ et $\varphi_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s)) ds$ pour tout $t \in I$.

Si K est un compact de diamètre h inclus dans I . Comme a et b sont continues sur K , il existe $k = \max_{t \in K} \|a(t)\|$ et $M = \max_{t \in K} N(f(t, x_0))$ dans $\mathbb{R}_+$. Donc :

$$\forall (t, x_1, x_2) \in K \times F \times F, N(f(t, x_2) - f(t, x_1)) \leq k N(x_2 - x_1). \quad (\star)$$

- Montrons que : $\forall n \geq 1, \forall t \in K, N(\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)) \leq Mh \frac{(hk)^{n-1}}{n!}$.

$$(HR_n) : \quad \forall t \in K, N(\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)) \leq \frac{Mk^{n-1}}{n!} |t - t_0|^n.$$

(HR_1) est vérifiée d'après l'inégalité de la moyenne car $\varphi_1(t) - \varphi_0(t) = \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds$

Soit $n \geq 2$; supposons (HR_{n-1}) . Pour $t \in K$,

$$N(\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)) \leq \left| \int_{t_0}^t N(f(s, \varphi_{n-1}(s)) - f(s, \varphi_{n-2}(s))) ds \right|.$$

$$(\star) \Rightarrow \forall t \in K, N(f(t, \varphi_{n-1}(t)) - f(t, \varphi_{n-2}(t))) \leq k N(\varphi_{n-1}(t) - \varphi_{n-2}(t)).$$

$$\text{Donc : } N(\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)) \leq \left| \int_{t_0}^t k \frac{Mk^{n-2}}{(n-1)!} |s - t_0|^{n-1} ds \right|.$$

$$\forall t \in K, t \geq t_0, N(\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)) \leq \frac{Mk^{n-1}}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (s - t_0)^{n-1} ds = \frac{Mk^{n-1}(t - t_0)^n}{n!}.$$

$$\forall t \in K, t < t_0, N(\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)) \leq \frac{Mk^{n-1}}{(n-1)!} \int_t^{t_0} (t_0 - s)^{n-1} ds = \frac{Mk^{n-1}(t_0 - t)^n}{n!}.$$

D'où (HR_n) et, d'après le théorème de récurrence, (HR_n) pour tout n .

Si $t \in I$, $|t - t_0| \leq h$ et le résultat est prouvé.

- Montrons que la suite de fonctions (φ_n) converge uniformément sur K .

$\alpha_n = Mh \frac{(hk)^{n-1}}{n!}$ est le terme général d'une série à termes réels positifs convergente (de somme $\frac{M}{k} e^{hk}$ si $k \neq 0$). Donc la série de fonctions $(\sum (\varphi_n - \varphi_{n-1}))_{n \geq 1}$ converge normalement *a fortiori* uniformément sur K . Les fonctions φ_n étant continues sur I , la somme S de la série est une fonction continue sur I . Or $\varphi_n = \varphi_0 + \sum_{k=1}^n (\varphi_k - \varphi_{k-1})$, donc (φ_n) converge uniformément sur K vers la fonction $\varphi = \varphi_0 + S \in \mathcal{C}(I, F)$.

• Montrons que $\varphi \in S_I(\mathcal{L})$.

Comme $\varphi_n(t_0) = x_0$ pour tout n , on a $\varphi(t_0) = x_0$ par passage à la limite.

Prenons, dorénavant pour compact K le segment d'extrémités t_0 et t , pour $t \in I$.

L'application de $(\star)$ avec $x_1 = \varphi(x)$ et $x_2 = \varphi_n(x)$ donne :

$$N(f(t, \varphi(t)) - f(t, \varphi_n(t))) \leq k N(\varphi(t) - \varphi_n(t)).$$

Soit $g_n(t) = f(t, \varphi_n(t))$ et $g(t) = f(t, \varphi(t))$. Comme (φ_n) converge uniformément sur K vers φ , on déduit de l'inégalité précédente, que (g_n) converge uniformément sur K vers g . D'après le théorème d'intégration des suites de fonctions continues sur un segment, $\int_{t_0}^t g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t g$. Or $\varphi_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t g_n$ et $\varphi_{n+1}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(t)$.

Donc, pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$. De la continuité de $s \mapsto f(s, \varphi(s))$ et du théorème sur les primitives de fonctions continues, on déduit **l'existence** d'une solution φ de $\mathcal{L}$ prenant la valeur x_0 en t_0 .

• Montrons l'unicité.

Supposons l'existence d'une fonction ψ dérivable sur I telle que $\psi'(t) = f(t, \psi(t))$ si $t \in I$ et que $\psi(t_0) = x_0$. Notons $b = \max_{s \in K} N(\psi(s) - x_0)$ où K est un segment d'extrémités t_0 et t , pour $t \in I$. L'existence de b découle de la continuité de ψ .

Puisque ψ est une I -solution de $\mathcal{L}$ telle que $\psi(t_0) = x_0$, on peut écrire, pour tout $t \in I$, $\psi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds$. En opérant comme précédemment, on montre

par récurrence que : $\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, N(\psi(t) - \varphi_n(t)) \leq \frac{k^n b |t - t_0|^n}{n!} \leq b \frac{(kh)^n}{n!}$.

Comme $\sum \frac{(kh)^n}{n!}$ converge (et a pour somme e^{kh}), on a $\frac{(kh)^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Donc $\varphi_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \psi(t)$. D'après l'unicité de la limite, $\psi(t) = \varphi(t)$ pour $t \in I$. $\square$

3. Cas homogène

3.1. Théorème

Soient F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, a une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$ et $t_0 \in I$. L'application $\Phi_{t_0} : S_I(\mathcal{H}) \rightarrow F, \varphi \mapsto \varphi(t_0)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. En particulier, si la dimension de F est $n \geq 1$, $S_I(\mathcal{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, F)$ de dimension n .

Démonstration

La linéarité de Φ_{t_0} est immédiate et Φ_{t_0} est bijective d'après I.C.2. $\square$

3.2. Corollaire 1

Soient F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, a une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$ et $(\mathcal{H})$ l'équation différentielle $x' = a(t)x$. Si $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les I -solutions $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ sont linéairement indépendantes si, et seulement si, il existe $t_0 \in I$ tel que les vecteurs $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_p(t_0)$ sont linéairement indépendants dans F . Si c'est le cas, pour tout $t \in I$, les vecteurs $\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)$ sont linéairement indépendants dans F .

Démonstration

Conséquence du fait que les Φ_{t_0} sont des isomorphismes d'espaces vectoriels. $\square$

3.3. Définition

On appelle **système fondamental** de solutions de $(\mathcal{H})$ toute base de $S_I(\mathcal{H})$.

3.4. Remarque

On déduit du corollaire 1 que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $S_I(\mathcal{H})$.
- (ii) Il existe $t_0 \in I$ tel que $(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$ est une base de F .
- (iii) Pour tout $t \in I$, $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est une base de F .

4. Cas général

4.1. Corollaire 2

Soient F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F))$, $b \in \mathcal{C}(I, F)$ et $(\mathcal{L})$ l'équation différentielle $x' = a(t)x + b(t)$. L'ensemble $S_I(\mathcal{L})$ est un sous-espace affine de dimension n de $\mathcal{C}^1(I, F)$.

Démonstration

La non vacuité de $S_I(\mathcal{L})$ est assurée par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. $S_I(\mathcal{H})$ étant un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n d'après le corollaire 1, $S_I(\mathcal{L})$ étant un sous-espace affine de direction $S_I(\mathcal{H})$, le corollaire est prouvé. $\square$

4.2. Wronskien

Avec les notations de I.C.1.3. si $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions de $(\mathcal{H})$, W défini par $W(t) = \det(R(t)) = \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est appelé le **wronskien** de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

5. Variation des constantes

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de $(\mathcal{H})$ et $(C_1, \dots, C_n)$ un n -uple de fonctions de $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$.

$$\varphi = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k \in S_I(\mathcal{L}) \iff \forall t \in I, \sum_{k=1}^n C'_k(t) \varphi_k(t) = b(t).$$

Démonstration

$$\varphi' = \sum_{k=1}^n C'_k \varphi_k + \sum_{k=1}^n C_k \varphi'_k = \sum_{k=1}^n C'_k \varphi_k + \sum_{k=1}^n C_k a \varphi_k = \sum_{k=1}^n C'_k \varphi_k(t) + a \varphi.$$

$$\text{Donc } \varphi' = a \varphi + b \iff \sum_{k=1}^n C'_k \varphi_k = b \iff \forall t \in I, R(t) \begin{pmatrix} C'_1(t) \\ \vdots \\ C'_n(t) \end{pmatrix} = b(t). \square$$

6. Cas des équations à coefficients constants

Dans ce paragraphe $(\mathcal{L})$ est l'équation $x' = ax + b(t)$ où $a \in \mathcal{L}(F)$ et $b \in \mathcal{C}(I, F)$ et $(\mathcal{H})$ l'équation $x' = ax$.

Dans le cas où $F = \mathbb{K}^n$, les matrices X et $B(t)$ sont éléments de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$; $(\mathcal{L})$ est l'équation $X' = AX + B(t)$ où $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\mathcal{H})$ l'équation $X' = AX$.

6.1. Cas général

Rappelons que :

- $\varphi : t \mapsto e^{ta} = \exp(ta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(t) = a \circ e^{ta} = e^{ta} \circ a$.
- Pour $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, $e^{ta} \circ e^{sa} = e^{sa} \circ e^{ta} = e^{(s+t)a}$.

En effet, $(sa) \circ (ta) = (ta) \circ (sa) = (ts)a^2$ puisque $(\mathcal{L}(F), +, \circ, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre.

Théorème

| La solution de $(\mathcal{H})$ prenant la valeur x_0 en t_0 est la fonction $t \mapsto e^{(t-t_0)a}x_0$.

Démonstration

Avec les notations du rappel, $e^{(t-t_0)a} = \varphi(t-t_0)$. L'application $g : t \mapsto e^{(t-t_0)a}x_0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(t) = (a \circ \varphi(t-t_0))x_0 = ag(t)$. Or $g(t_0) = \varphi(0)x_0 = x_0$; donc g est solution de $x' = ax$ et $x(t_0) = x_0$. Du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire on déduit l'unicité de la solution de $\mathcal{H}$ telle que $x(t_0) = x_0$. $\square$

Théorème (expression intégrale de la solution)

| La solution de $\mathcal{L}$ prenant la valeur x_0 en t_0 est la fonction :

$$t \mapsto e^{(t-t_0)a}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)a}b(s)ds.$$

Démonstration

$$x \in S_I(\mathcal{L}) \iff \forall t \in I, \frac{d}{dt}(e^{-ta}x(t)) = e^{-ta}b(t). \quad (1)$$

$$(1) \iff \exists c \in F, \forall t \in I, e^{-ta}x(t) = e^{ta} \int_{t_0}^t e^{-sa}b(s)ds + c.$$

$$(1) \iff \exists c \in F, \forall t \in I, x(t) = e^{ta}c + \int_{t_0}^t e^{-sa}ds.$$

$x(t_0) = x_0 \iff e^{t_0a}c = x_0$. D'où la conclusion du théorème. $\square$

6.2. Cas où A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$

Première méthode : il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P D P^{-1}$ où $D = \text{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$. On pose $X = P Y$ et $(\mathcal{L}) \Rightarrow (\mathcal{L}_1) : Y' = D Y + P^{-1}B(t)$.

$$(\mathcal{L}_1) \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall t \in I, y'_i = \lambda_i y_i + g_i(t).$$

$$(\mathcal{L}_1) \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall t \in I, \frac{d}{dt}(e^{-\lambda_i t} y_i(t)) = e^{-\lambda_i t} g_i(t).$$

$$(\mathcal{L}_1) \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \beta_i \in \mathbb{K}, \forall t \in I, y_i(t) = \beta_i e^{\lambda_i t} + \int_{t_0}^t e^{\lambda_i(t-s)} g_i(s) ds.$$

La solution générale de $(\mathcal{L})$ s'obtient avec $X = P Y$.

Exemple

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' - 5x + 2y = e^t, \\ y' + x - 6y = t. \end{cases}$

Il s'écrit $X' = AX + B(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est $\lambda^2 - 11\lambda + 28 = (\lambda - 4)(\lambda - 7)$.

Un vecteur propre associé à la valeur propre 4 (*resp.* 7) est $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (*resp.* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$)

$A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Avec les notations précédentes, $(\mathcal{L}_1) : Y' = DY + P^{-1}B(t)$, $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$(\mathcal{L}_1) \iff \begin{cases} u' = 4u + \frac{1}{3}(e^t + t), \\ v' = 7v + \frac{1}{3}(e^t - 2t). \end{cases}$$

En déterminant une primitive de $t \mapsto te^{-4t}$ en intégrant par parties ou en écrivant qu'elle est de la forme $(ct + d)e^{-4t}$, on obtient :

$$u' = 4u + \frac{1}{3}(e^t + t) \iff \frac{d}{dt}(e^{-4t}u(t)) = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left[-\frac{e^{-3t}}{3} - \frac{1}{4} \left(t + \frac{1}{4} \right) e^{-4t} \right].$$

$$\text{D'où : } \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, u(t) = \alpha e^{4t} - \frac{1}{3} \left[\frac{e^t}{3} + \frac{1}{4} \left(t + \frac{1}{4} \right) \right].$$

$$\text{En procédant de même, on obtient } v(t) = \beta e^{7t} + \frac{1}{3} \left[-\frac{e^t}{6} + \frac{2}{7} \left(t + \frac{1}{7} \right) \right].$$

On conclut en écrivant : $x = 2u + v$ et $y = u - v$

Deuxième méthode : si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$ et $(X_1, \dots, X_n)$ base de vecteurs propres associés aux λ_i , la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ telle que $\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t} X_i$ est un système fondamental de solutions de $(\mathcal{H})$. En effet, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi'_i(t) = \lambda_i \varphi_i(t) = A\varphi_i(t)$. Si $R(t)$ est la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a : $\det(R(0)) = \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, X_n) \neq 0$ car $(X_1, \dots, X_n)$ est libre puisque A est diagonalisable. D'après un théorème précédent, $(\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0))$ étant libre dans $\mathbb{K}^n$, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions. $R(t) = Pe^{tD}$ où $P = [X_1 \cdots X_n]$. Donc $R(t)R(0)^{-1} = R(t)P^{-1} = Pe^{tD}P^{-1} = e^{tA}$.

Le théorème 2 permet d'achever la résolution de $(\mathcal{L})$ puisque :

$$e^{(t-s)A} = e^{tA}e^{-sA} = R(t)(R(s))^{-1}.$$

On peut aussi utiliser la méthode de variation des constantes puisque l'on a un système fondamental de solutions de $(\mathcal{H})$.

Exemple

Déterminer les fonctions x et y telles que $x(0) = y(0) = 0$ et $\begin{cases} x' = 6x - 3y + e^{5t}, \\ y' = 2x + y + 4. \end{cases}$

Avec les notations précédentes, on a : $\varphi_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\varphi_2(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Donc } R(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}. \text{ D'où } (R(s))^{-1} = \begin{pmatrix} -2e^{-3s} & 3e^{-3s} \\ e^{-4s} & -e^{-4s} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } X(t) = R(t) \int_0^t (R(s))^{-1} B(s) ds \text{ ie. } \begin{cases} x(t) = 5e^{3t} - 6e^{4t} + 2e^{5t} - 1, \\ y(t) = 5e^{3t} - 4e^{4t} + e^{5t} - 2. \end{cases}$$

6.3. Cas où A est trigonalisable

Il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PT P^{-1}$ où T est triangulaire supérieure.

On pose $X = PY$ et $(\mathcal{L}) \Rightarrow (\mathcal{L}_2) : Y' = TY + P^{-1}B(t)$.

La dernière ligne de $(\mathcal{L}_2)$ est de la forme $y'_n = \lambda_n y_n + h_n(t)$. D'où $y_n(t)$.

Une fois fixée une solution de cette équation, la ligne précédente est une équation linéaire du premier ordre en y_{n-1} , etc. ...

Exemple

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = x + y + \sin(t), \\ y' = -x + 3y. \end{cases}$

Il s'écrit $X' = AX + B(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est $(\lambda - 2)^2$. $A \neq I_2$, donc A n'est pas diagonalisable. Trigonalisons la puisque son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. Le sous espace propre associé à la valeur propre 2 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Posons $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$(\mathcal{L}_1) : Y' = TY + P^{-1}B(t) \iff \begin{cases} u' = 2u + v + \sin(t), \\ v' = 2v - \sin(t). \end{cases}$

$v' = 2v - \sin(t) \iff \frac{d}{dt}(e^{-2t}v(t)) = -e^{-2t}\sin(t) = -\Im m(e^{(-2+i)t})$.

Donc : $v' = 2v - \sin(t) \iff \frac{d}{dt}(e^{-2t}v(t)) = \frac{d}{dt}\left[\Im m\left(\frac{e^{(-2+i)t}}{2-i}\right)\right]$.

D'où : $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, v(t) = \frac{1}{5}(2\sin(t) + \cos(t)) + \alpha e^{2t}$.

$u' = 2u + v + \sin(t) \iff u' = 2u + \frac{1}{5}(7\sin(t) + \cos(t)) + \alpha e^{2t}$.

En procédant de même, on trouve :

$\exists \beta \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, u(t) = (\alpha t + \beta)e^{2t} - \frac{1}{25}(13\sin(t) + 9\cos(t))$.

$X = PY \iff \begin{cases} x(t) = u(t) = (\alpha t + \beta)e^{2t} - \frac{1}{25}(13\sin(t) + 9\cos(t)), \\ y(t) = u(t) + v(t) = (\alpha t + \beta + \alpha)e^{2t} - \frac{1}{25}(3\sin(t) + 4\cos(t)). \end{cases}$

IV. Équations scalaires d'ordre 2

1. À coefficients constants (rappels)

1.1 Théorème

Soit $\mathcal{H} : y'' + ay' + by = 0$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$; $f(r) = r^2 + ar + b$ son polynôme caractéristique de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

(i) Si $\Delta \neq 0$, $f(r)$ a deux zéros distincts r_1, r_2 .

$y \in S_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}) \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$.

(ii) Si $\Delta = 0$, $f(r)$ a un zéro double r_1 .

$y \in S_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}) \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{r_1 t}(\lambda + \mu t)$.

1.2. Théorème

Soit $\mathcal{H} : y'' + ay' + by = 0$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Si $\Delta > 0$, $f(r)$ a deux zéros réels distincts $r_1 = \alpha + \beta$, $r_2 = \alpha - \beta$.

$$y \in S_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}) \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}.$$

$$y \in S_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}) \iff \exists(\nu, \tau) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{\alpha t}(\nu \operatorname{ch}(\beta t) + \tau \operatorname{sh}(\beta t)).$$

(ii) Si $\Delta < 0$, $f(r)$ a deux zéros $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \bar{r}_1$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

$$y \in S_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}) \iff \exists(\nu, \tau) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{\alpha t}(\nu \cos(\beta t) + \tau \sin(\beta t)).$$

(iii) $\Delta = 0$, $f(r)$ a un zéro double r_1 .

$$y \in S_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}) \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{r_1 t}(\lambda + \mu t).$$

2. Cas général

2.1. Théorème

Soient $t_0 \in I$, $(x_0, x'_0) \in \mathbb{K}^2$, $(a, b, c) \in (\mathcal{C}(I, \mathbb{K}))^3$. Il existe une unique I -solution f de $(\mathcal{L}) : x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ telle que $f(t_0) = x_0$ et $f'(t_0) = x'_0$.

Démonstration

Comme dans I.C.1.3. posons $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$. Alors :

$(\mathcal{L}) \iff X' = A(t)X + B(t)$. Le théorème est une conséquence de I.C.2. $\square$

2.2. Théorème

Soit $(a, b, c) \in (\mathcal{C}(I, \mathbb{K}))^3$. Si $(\mathcal{L}) : x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, alors $S_I(\mathcal{L})$ est un plan affine de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ de direction $S_I(\mathcal{H})$ où $(\mathcal{H}) : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$.

Démonstration

Il suffit d'utiliser les notations de la démonstration précédente et d'appliquer les résultats de I.C. à $F = \mathbb{K}^2$. $\square$

2.3. Wronskien

Définitions

Soit $(a, b) \in (\mathcal{C}(I, \mathbb{K}))^2$. Si $(\mathcal{H}) : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, alors toute base de $S_I(\mathcal{H})$ est appelée un système fondamental de I -solutions. Si u et v sont des I -solutions, $W = uv' - u'v$ est le wronskien de ces solutions.

Propriétés

Avec les notations de la définition précédente,

a) $W' + aW = 0$.

b) Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) (u, v) est une famille libre, (ii) $\exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0$, (iii) $\forall t \in I, W(t) \neq 0$.

Démonstration

a) $W' = uv'' - u''v$ et vérification facile.

b) a été prouvé en I.C.3. (cf. notations de la démonstration de D.2.1.) $\square$

3. Résolution de $\mathcal{L}$

Notons $(\mathcal{L}) : y'' + \alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathcal{C}(I, \mathbb{K}))^3$.

D'après I.C.5. et les notations de la démonstration de I.C.2. on a :

3.1. Théorème (méthode de variation des constantes)

Si l'on connaît un système fondamental (u, v) de solutions de $\mathcal{H}$, on cherche une solution particulière de $(\mathcal{L})$ sous la forme $y(t) = c_1(t)u(t) + c_2(t)v(t)$ où c_1 et c_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et déterminées par $c'_1 U + c'_2 V = B$ où

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Exemple

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $(\mathcal{L}) : y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$.

$(\mathcal{H}) : y'' + 3y' + 2y = 0$ a pour polynôme caractéristique $r^2 + 3r + 2 = (r+2)(r+1)$.

Donc : $y \in S_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}) \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$.

$f \in S_{\mathbb{R}^*}(\mathcal{L}) \iff \exists(c_1, c_2) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R}))^2, \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{-2x}$.

c'_1, c'_2 sont déterminés par le système :
$$\begin{cases} c'_1(x)e^{-x} + c'_2(x)e^{-2x} = 0, \\ -c'_1(x)e^{-x} - 2c'_2(x)e^{-2x} = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}. \end{cases}$$

D'où $c'_1(x) = \frac{x-1}{x^2}$ et $c'_2(x) = \frac{1-x}{x^2} e^x$. Par une intégration facile on en déduit :

$c_1(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + \lambda$ et $c_2(x) = -\frac{e^x}{x} + \mu$ pour $x \in]0, +\infty[$.

$y \in S_{\mathbb{R}^*}(\mathcal{L}) \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in]0, +\infty[, y(x) = e^{-x} \ln(x) + \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$.

3.2. Si l'on connaît une solution particulière

Soit u une solution de $\mathcal{H}$ ne s'annulant pas sur un intervalle J non réduit à un point. $y = uz \in S_J(\mathcal{H})$ si, et seulement si, $Z = u^2 z' \in S_J(\mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est une équation différentielle scalaire du premier ordre.

Démonstration

Si $u \in S_J(\mathcal{H})$ et ne s'annule pas sur J , pour $y \in S_J(\mathcal{H}), z = \frac{y}{u}$ est définie sur J .

$y = uz \Rightarrow y' = u'z + uz' \Rightarrow y'' = u''z + 2u'z' + uz''$. Comme $au'' + bu' + cu = 0$, $y \in S_J(\mathcal{H}) \iff auz'' + (bu + 2au')z' = 0 \iff a(u^2 z')' + b(u^2 z') = 0$ (1)

Soit $Z(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t -\frac{b(s)}{a(s)} ds\right)$. (1) est équivalent à $u^2(t)z'(t) = \lambda Z(t)$ pour $t \in J$.

Donc, pour tout $t \in J, z(t) = \mu + \lambda \int_{t_0}^t \frac{Z(s)}{u^2(s)} ds$ et $y(t) = u(t)z(t)$.

On obtient ainsi toutes les J -solutions de $\mathcal{H}$, car les deux fonctions u et h (définie par $h(t) = u(t) \int_{t_0}^t \frac{Z(s)}{u^2(s)} ds$) constituent une base du plan $S_J(\mathcal{H})$. En effet, d'après les propriétés du wronskien vues précédemment, $(h'u - hu')(t_0) = Z(t_0) = 1 \neq 0$. $\square$

3.3. Recherche d'une solution développable en série entière

Cette méthode a déjà été développée au chapitre 8. Elle peut être pratiquée lorsque l'équation différentielle est à coefficients polynomiaux.

Notons que nous l'avons justifiée en exercice, au chapitre 8 lorsque les coefficients sont des fonctions développables en série entière en 0.

EXERCICES

1. Si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont n solutions de $X' = A(t)X$ sur $[a, b]$ et $t_0 \in [a, b]$, le wronskien W de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ dans la base $\mathcal{B}$ est déterminé par :

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} (A(s)) ds \right).$$

2. Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{H}) : 3(x^2 + x)y'' + (8x + 3)y' + 2y = 0$ sur $] -1, +\infty[$. On pourra chercher les solutions développables en série entière en 0.

3. Discuter suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ les solutions réelles du système différentiel $(\mathcal{H}_a) : X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} -(2a+3) & 3a+5 & -(3a+5) \\ 2a-2 & -(3a-2) & (3a-1) \\ 2a & -(3a+1) & (3a+2) \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

4. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{L}) : y^{(n)} = f(x)$ qui vérifient $y^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

5. Soit $(\mathcal{H}) : X' = AX$ où $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que (i) $\iff$ (ii).

(i) Toute solution de $(\mathcal{H})$ est bornée.

(ii) A est diagonalisable et $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}i$.

6. Soit $\mathcal{E} : xy'' + y' + xy = 0$.

a. Déterminer les solutions développables en série entière ; on note f_0 la solution développable en série entière telle que $f_0(0) = 1$.

b. Montrer que, si f est solution sur $]0, a[$, alors (f_0, f) est libre si, et seulement si, f n'est pas bornée au voisinage de 0.

7. Soient $(\mathcal{L}) : y'' + e^{-t^2}y = \sin(t)$ et $f \in S_I(\mathcal{L})$ où $I = [0, +\infty[$. Si $f \in \mathcal{B}(I)$ et $f^2 \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$, montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

On pourra étudier l'intégrabilité de $f'' - \sin$ sur I .

8. Soit $(\mathcal{H}) : y'' + q(x)y = 0$ où $q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est croissante et de limite $+\infty$ en $+\infty$. Montrer que toute solution de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}_+$ est bornée. On pourra considérer $\varphi = f^2 + f'^2 q^{-1}$ si $f \in S_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{H})$.

9. Soit $(\mathcal{H}) : y'' + q(x)y = 0$ où $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Montrer que si f est une solution bornée de $(\mathcal{H})$, alors $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et il existe des solutions non bornées.

On pourra utiliser le wronskien.

10. Résoudre $[1 - \cos(4x)]y'' + 2y' \sin(4x) - 8y = 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ sachant qu'elle admet deux solutions u et v vérifiant $uv = 1$.

11. Résoudre $xy' + |y| = x^2 + \frac{3}{2}$, $y(1) = -1$.

12. Résoudre $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$.

13. Soit $\mathcal{E} : y' - y = \ln(x)$.

- Étudier le comportement des solutions au voisinage de 0, de $+\infty$.
- Donner l'ensemble des points du plan en lesquels une courbe intégrale admet une tangente horizontale, un point d'inflexion.
- Donner l'allure des courbes intégrales.

14. a. Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ montrer que chaque courbe intégrale du système différentiel $X' = AX$ est tracée dans un sous-espace affine de direction $\text{Im}(A)$.

b. On munit $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique et on suppose que $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et est antisymétrique. Montrer que toute solution de $X' = AX$ est de norme constante. Étudier la réciproque. Que peut-on en déduire pour les courbes intégrales ?

15. Si p, q, h sont des éléments de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $q \geq 0$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $y'' + p(x)y' - q(x)y = h(x)$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ admet une et une seule solution.

SOLUTIONS DES EXERCICES

1. D'après le théorème de dérivation d'une forme n -linéaire, vu au chapitre 6 :

$$W'(t) = \sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}} (\varphi_1(t), \dots, \varphi_{k-1}(t), \varphi'_k(t), \varphi_{k+1}(t), \dots, \varphi_n(t)).$$

Or $\varphi'_k = A\varphi_k$. Donc $\det_{\mathcal{B}} (\varphi_1(t), \dots, \varphi_{k-1}(t), \varphi'_k(t), \varphi_{k+1}(t), \dots, \varphi_n(t)) = \Delta_k$ est le déterminant d'une matrice dont les colonnes sont $C_1, \dots, C_n$ sauf la k -ième

colonne $C_k = \sum_{i=1}^n a_{i,k} C_i$. Du caractère n -linéaire et alterné du déterminant, on déduit que $\Delta_k = a_{k,k} \Delta$ où $\Delta(t) = \det_{\mathcal{B}} (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$.

Donc, pour tout $t \in [a, b]$, $W'(t) = \sum_{k=1}^n a_{k,k} W(t) = \text{tr}(A(t))W(t)$.

W est solution sur $[a, b]$ de l'équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre $y' = \text{tr}(A(t))y$. D'où le résultat.

2. a. Recherchons les solutions de $(\mathcal{H})$ développables en série entière en 0.

Si $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, x \in]-R, +R[, R > 0$, alors, d'après le cours sur les séries

entières, $y \in \mathcal{C}^\infty(]-R, R[, \mathbb{R})$, $y'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

$$3(x^2 + x) \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} + (8x + 3) \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0. \quad (1)$$

De l'unicité des coefficients du développement en série entière de la fonction nulle, on déduit que : (1) $\iff \forall n \geq 1, 3n a_n = -(3n-1) a_{n-1}$

Si $a_0 = 0$, alors y est la fonction nulle et $R = +\infty$.

Si $a_0 \neq 0$, alors $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme $\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, on a $R = 1$.

Par une récurrence facile on a $a_n = -\frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3} - 1 \right) \cdots \left(-\frac{2}{3} - n + 1 \right) \frac{a_0}{n!}$.

Du cours sur les séries entières, on déduit que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$y(x) = a_0(1+x)^{-2/3}$. Notons $u :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^{-2/3}$. L'ensemble des solutions développable en série entière en 0 de $(\mathcal{H})$ est la droite vectorielle engendrée par la restriction de u à $] -1, 1[$.

b. Résolution de $(\mathcal{H})$ sur I_1 et I_2 où $I_1 =]-1, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.

On vérifie que u est solution de $(\mathcal{H})$ sur chacun des intervalles I_1, I_2 et ne s'y annule pas. On cherche (cf. cours) les autres solutions de $(\mathcal{H})$ en posant $y = uz$; on est ramené à résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre en $Z = u^2 z'$:

$$3x(x+1)Z' + (8x+3)Z = 0 \quad (2)$$

Comme $\frac{8X+3}{3X(X+1)} = \frac{1}{X} + \frac{5}{3(X+1)}$, on a :

$$(2) \iff \forall j \in \{1, 2\}, \exists \lambda_j \in \mathbb{R}, \forall x \in I_j, Z(x) = u^2 z'(x) = \lambda_j x^{-1} (x+1)^{-5/3}.$$

$$(2) \iff \forall x \in I_j, z'(x) = \frac{\lambda_j}{x \sqrt[3]{1+x}}.$$

Le changement de variable $t = \sqrt[3]{1+x}$ permet de ramener le calcul d'une primitive φ de $x \mapsto \frac{1}{x \sqrt[3]{1+x}}$ à celui de la fonction rationnelle $t \mapsto \frac{3t}{t^3-1}$ qui, après décomposition en éléments simples conduit au résultat. Mais les calculettes donnent pour $x \in I_j$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\sqrt[3]{1+x}-1)^2}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1} \right) + \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt{3}} \right).$$

Donc, il existe des constantes réelles λ_j et μ_j telles que $z_j(x) = \lambda_j \varphi + \mu_j$ pour tout $x \in I_j$. On déduit du cours que $S_{I_j}(\mathcal{H})$ est le plan vectoriel $\text{Vect}(u_j, v_j)$ où les fonctions u_j et v_j sont $u|_{I_j}$ et $(u\varphi)|_{I_j}$.

c. Résolution sur $J =]-1, +\infty[$.

Si $f \in S_J(\mathcal{H})$, alors d'après b), il existe $(\lambda_2, \mu_2, \lambda_1, \mu_1) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall x \in I_1, f(x) = u(x)(\lambda_1 \varphi(x) + \mu_1); \forall x \in I_2, f(x) = u(x)(\lambda_2 \varphi(x) + \mu_2).$$

$\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$ et $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} u(0) = 1$. La fonction f étant continue en 0, nécessairement, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Donc $f = \mu u$ où $\mu \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λu est J -solution de $\mathcal{H}$.

Donc $S_J(\mathcal{H}) = \mathbb{R}u$.

Remarque : les lecteurs curieux pourront utiliser les méthodes exposées précédemment pour résoudre $(\mathcal{H})$ sur $] -\infty, 0[$ puis sur $\mathbb{R}$. Ils pourront montrer que la seule $\mathbb{R}$ -solution est la fonction nulle.

3. $(\mathcal{H}_a)$ est un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants.

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (1 - X)(X^2 + 2aX + 1)$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A .

• Si $a^2 \neq 1$, la matrice A a trois racines complexes simples. Elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Comme $(X^2 + 2aX + 1) = (X - r_1)(X - r_2)$, on a $r_1 r_2 = 1$. On peut, à bon droit, choisir $\theta \in \mathbb{C}$ tel que $r_1 = e^\theta$ et $r_2 = e^{-\theta}$. (La fonction $\exp$ est une surjection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$.) Donc $a = -\operatorname{ch}(\theta)$ et $\theta \neq 0$ car $a^2 \neq 1$.

Sous-espace propre associé à la valeur propre $r_1 : E_{r_1}(u) = \mathbb{C}e'_1$

La matrice $A - e^\theta I_3 = \begin{pmatrix} -3 + e^{-\theta} & 5 - 3\operatorname{ch}(\theta) & 3\operatorname{ch}(\theta) - 5 \\ -2 - 2\operatorname{ch}(\theta) & 2 + 3\operatorname{ch}(\theta) - e^\theta & -1 - 3\operatorname{ch}(\theta) \\ -2\operatorname{ch}(\theta) & 3\operatorname{ch}(\theta) - 1 & 2 - 3\operatorname{ch}(\theta) - e^\theta \end{pmatrix}$ est de rang 2. Si L_1, L_2, L_3 sont les lignes de cette matrice, $L_1 + L_2$ et $L_2 - L_3$ donnent les lignes $\begin{pmatrix} -5 - e^\theta & 7 - e^\theta & -6 \\ 2 & -3 + e^\theta & 3 - e^\theta \end{pmatrix}$ qui sont indépendantes. Du calcul des trois mineurs, on déduit $e'_1 = (e^\theta + 3e^{-\theta} - 4)e_1 + (-e^\theta + 3e^{-\theta} - 2)e_2 + (-e^\theta + e^{-\theta})e_3$.

On passe de r_1 à r_2 en changeant θ en $-\theta$. D'où : $E_{r_2}(u) = \mathbb{C}e'_2$ avec $e'_2 = (e^{-\theta} + 3e^\theta - 4)e_1 + (-e^{-\theta} + 3e^\theta - 2)e_2 + (-e^{-\theta} + e^\theta)e_3$.

Enfin $E_1(u) = \mathbb{C}e'_3$ où $e'_3 = e_2 + e_3$.

Donnons maintenant les solutions réelles de $(\mathcal{H}_a)$.

•• Si $|a| > 1$, on peut choisir θ réel, et on le fait. $X \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_a)$ si, et seulement si, il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \alpha_1 e^{r_1 t} e_1 + \alpha_2 e^{r_2 t} e_2 + \alpha_3 e^t e_3$.

$$\text{ie. } \begin{cases} x(t) = \alpha_1 \exp(te^\theta)(e^\theta + 3e^{-\theta} - 4) + \alpha_2 \exp(te^{-\theta})(3e^\theta + e^{-\theta} - 4), \\ y(t) = \alpha_1 \exp(te^\theta)(-e^\theta + 3e^{-\theta} - 2) + \alpha_2 \exp(te^{-\theta})(3e^\theta - e^{-\theta} - 2) + \alpha_3 e^t, \\ z(t) = \alpha_1 \exp(te^\theta)(-e^\theta + e^{-\theta}) + \alpha_2 \exp(te^{-\theta})(e^\theta - e^{-\theta}) + \alpha_3 e^t. \end{cases}$$

•• Si $|a| < 1$, on peut choisir $\theta = i\varphi$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$, et on le fait. Comme les composantes de e_1, e_2 et e_3 sont réelles, les solutions réelles sont données par :

$\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \Re e [(\alpha + i\beta)e^{tr_1} e'_1] + \gamma e^t e'_3$.

$$\begin{cases} x(t) = \exp(t \cos \varphi) \left[\alpha (\cos(\varphi + t \sin \varphi) + 3 \cos(-\varphi + t \sin \varphi) - 4 \cos(t \sin \varphi)) \right. \\ \quad \left. - \beta (\sin(\varphi + t \sin \varphi) + 3 \sin(-\varphi + t \sin \varphi) - 4 \sin(t \sin \varphi)) \right], \\ y(t) = \exp(t \cos \varphi) \left[\alpha (-\cos(\varphi + t \sin \varphi) + 3 \cos(-\varphi + t \sin \varphi) - 2 \cos(t \sin \varphi)) \right. \\ \quad \left. + \beta (-\sin(\varphi + t \sin \varphi) + 3 \sin(-\varphi + t \sin \varphi) - 2 \sin(t \sin \varphi)) \right] + \gamma e^t, \\ z(t) = 2 \sin \varphi \exp(t \cos \varphi) [\alpha \sin(t \sin \varphi) + \beta \cos(t \sin \varphi)] + \gamma e^t. \end{cases}$$

• Si $a = -1$, $\chi_A(X) = (1 - X)^3$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a : $A = I_3 + B$ où $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et $B^3 = 0$. Donc $\exp(tA) = e^t e^{tB} = e^t [I_3 + tB + \frac{t^2}{2} B^2]$

car $B^3 = 0$. Le calcul donne $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B^2 = 0$.

$$\text{D'où : } \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^t(I_3 + tB) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

$$\text{ie. } \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = e^t(\alpha + 2(\beta - \gamma - \alpha)t), \\ y(t) = e^t(\beta + 4(-\alpha + \beta - \gamma)t), \\ z(t) = e^t(\gamma + 2(-\alpha + \beta - \gamma)t). \end{cases}$$

• Si $a = 1$ alors $\chi_A = (1 - X)(1 + X)^2$. Comme le rang de $A + I_3$ est égal à 2, on conclut que A n'est pas diagonalisable. Son polynôme caractéristique étant scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

On a $\varepsilon_1 = e'_1$ tel que $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$. On obtient facilement ε_2 tel que $u(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2$; $\varepsilon_2 = 2e_1 + e_2$. On trouve $\varepsilon_3 = -2e_1 + e_3$ tel que $u(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3 + \varepsilon_2$. D'où $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$

$$\text{à } \mathcal{B}', \text{ alors } A = PTP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = M_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En procédant comme indiqué dans le cours, on résout $(\mathcal{H}_1) : X'_1 = TX_1$ et l'on

$$\text{dédit } X = PX_1. \text{ On a : } (\mathcal{H}_1) \iff \begin{cases} x'_1 = x_1 \\ y'_1 = -y_1 + z_1 \\ z'_1 = -z_1 \end{cases}$$

$$\text{D'où } (\mathcal{H}_1) \iff \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1 = \alpha e^t, \\ y'_1 + y_1 = \gamma e^{-t}, \\ z_1 = \gamma e^{-t}. \end{cases}$$

$$\text{Or } y'_1 + y_1 = \gamma e^{-t} \iff \frac{d}{dt}(e^t y_1(t)) = \gamma \iff \exists \beta \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, e^t y_1(t) = \beta + \gamma t,$$

$$\text{donc : } \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = 2e^{-t}[\gamma t + \beta - \gamma], \\ y(t) = \alpha e^t + (\gamma t + \beta)e^{-t}, \\ z(t) = \alpha e^t + \gamma e^{-t}. \end{cases}$$

4. Première méthode : Le système différentiel $\begin{cases} y^{(n)} = f(x) \\ y^{(k)}(0) = 0, 0 \leq k \leq n-1. \end{cases}$ est

$$\text{équivalent à } (\mathcal{L}) \begin{cases} X' = AX + B(x) \\ Y(0) = 0. \end{cases} \text{ avec } {}^tX = (y \quad y' \quad \dots \quad y^{(n-1)}),$$

$A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ où les $a_{i,j}$ sont tous nuls sauf les $a_{i,i+1}, 1 \leq i \leq n-1$ qui sont égaux à 1 et ${}^tB(x) = (0 \quad 0 \quad \dots \quad f(x)) \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, $(\mathcal{L})$ a une unique $\mathbb{R}$ solution qui s'écrit sous forme

$$\text{intégrale : } X(x) = e^{xA}X(0) + \int_0^x e^{(x-t)A}B(t)dt.$$

Comme $A^n = 0$, on a : $\exp(xA) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k A^k}{k!}$. La première ligne de $\exp(xA)$ est

$$\left(1 \quad x \quad \frac{x^2}{2} \quad \dots \quad \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right). \text{ Donc la première ligne de } \exp((x-t)A)B(t) \text{ est}$$

$$\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t); \text{ d'où } y(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt.$$

Deuxième méthode

Unicité : Si y est une $\mathbb{R}$ -solution de $(\mathcal{L})$, alors le théorème de Taylor-Laplace donne :

$$y(x) = y(0) + y'(0) + \dots + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n)}(t)dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt.$$

Existence : par récurrence sur n . Si $n = 1$, alors $y(x) = \int_0^x f$ de façon immédiate.

Soit $n \geq 2$. Si le résultat est vrai pour $(n-1)$, soit h tel que $h^{(n-1)} = f$ et $h^{(k)}(0) = 0$ pour $0 \leq k \leq n-2$; si l'on pose $y(x) = \int_0^x h$, on a alors $y' = h$ et $y(0) = 0$. D'où : $y^{(n)} = f$ et $y^{(p)}(0) = 0$ pour $0 \leq p \leq n-1$.

5. On sait que : $(\mathcal{H}) \iff \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{tA} X_0$ où $X_0 \in \mathbb{C}^n$.

Supposons (ii) et notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A . Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des vecteurs propres associés, on a $X(t) = \sum_{m=1}^n \alpha_m e^{\lambda_m t} X_m$ où $\alpha_m \in \mathbb{C}$. Soit N

une norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $N(X(t)) \leq \sum_{m=1}^n N(\alpha_m X_m)$

car les λ_m sont imaginaires purs. D'où (i).

Réciproquement, si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $Y \neq 0$ tels que $AY = \lambda Y$, alors $e^{tA} Y = e^{\lambda t} Y$.

Comme $t \mapsto e^{\lambda t} Y$ est solution de $(\mathcal{H})$, elle est bornée. D'où $\lambda \in \mathbb{R}i$.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A . Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(T) = \prod_{m=1}^k (T - \lambda_m)^{\alpha_m}$. D'après le théorème de Cayley-

Hamilton et le théorème des noyaux, on a : $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{m=1}^k \text{Ker}[(A - \lambda_m I_n)^{\alpha_m}]$.

Pour montrer que A est diagonalisable, il suffit de prouver que pour tout $m \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\text{Ker}[(A - \lambda_m I_n)^{\alpha_m}] = \text{Ker}(A - \lambda_m I_n)$.

S'il existe $m \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et $Y \in \text{Ker}[(A - \lambda_m I_n)^{\alpha_m}]$ tel que $Y \notin \text{Ker}(A - \lambda_m I_n)$, alors $\varphi : t \mapsto e^{t\lambda_m} Y$ est solution de $(\mathcal{H})$ et l'on a :

$$\varphi(t) = e^{tA} Y = e^{\lambda_m t} e^{t(A - \lambda_m I_n)} Y = e^{\lambda_m t} \sum_{p=0}^{\alpha_m-1} \frac{(t(A - \lambda_m I_n))^p}{p!} Y = e^{\lambda_m t} P_m(t).$$

Comme $Y \notin \text{Ker}(A - \lambda_m I_n)$, P_m est un polynôme en t de degré supérieur ou égal à 1. Comme $\Re(\lambda_m) = 0$, on a : $N(e^{\lambda_m t} P_m(t)) = N(P_m(t))$ et la fonction $t \mapsto N(P_m(t))$ n'est pas bornée. D'où une contradiction. Donc $\mathbb{C}^n$ est somme directe des sous-espaces propres de A i.e. la matrice A est diagonalisable.

6. a. Soit f une solution développable en série entière sur $] -R, R[$ où $R > 0$,

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, alors, si $|x| < R$, $a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}] x^n = 0$ et, par unicité des coefficients d'un développement en série entière, il vient $a_1 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)^2} a_{n-1}$ d'où, si $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} a_0$.

Donc $f = a_0 f_0$ où $f_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$.

Comme $\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{n!}\right)$, le rayon de convergence de cette série entière est infini, l'ensemble des solutions développables en série entière est donc la droite vectorielle engendrée par f_0 .

b. Si f est bornée au voisinage de 0 alors, comme $\frac{d}{dx}[xf'(x)] = -xf(x)$, la fonction $x \mapsto \frac{d}{dx}[xf'(x)]$ est intégrable sur $]0, \frac{a}{2}]$ et donc $x \mapsto xf'(x)$ admet une limite réelle ℓ en 0. Par suite $f'(x) = \frac{\ell}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ et donc, par intégration de la relation o , on a $f(x) = \ell \ln(x) + o[\ln(x)]$ et donc $\ell = 0$ car f est localement bornée. Le wronskien $W = W_{f_0, f}$ vérifie $xW'(x) + W(x) = 0$ sur $]0, a[$ et donc $x \mapsto xW(x)$ est constante. Or $xW(x) = f_0(x)[xf'(x)] - xf'_0(x)f(x) = o(1)$ car, d'après a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'_0 = 0$. Donc W est nulle et (f_0, f) est liée.

Remarques

- Le cours permet de montrer que $S_{]0, +\infty[}(H) = \text{Vect}(f_0, g)$ où g est définie par : $g(x) = f_0(x) \int_{x_0}^x \frac{dt}{tf_0^2(t)}$ et de retrouver les résultats précédents.
- f_0 est la fonction de Bessel J_0 cf. travail dirigé qui suit.

$$7. f \in S(\mathcal{L}) \Rightarrow \forall t \in I, f''(t) - \sin(t) = -e^{-t^2} f(t)$$

$$f \in \mathcal{B}(I) \Rightarrow g(t) = f''(t) - \sin(t) = O(e^{-t^2}) = o(t^{-2}). \text{ Donc } g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}).$$

D'où $h : x \mapsto \int_0^x g$ a une limite finie en $+\infty$. Or $h(x) = f'(x) + \cos(x) - f(0) - 1$, donc f' est bornée sur I . Comme $f^2 \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ et $f' \in \mathcal{B}(I)$, alors $f^2 f' = O(f^2)$. Donc $f^2 f' \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$. Comme $\int_0^x f^2 f' = \frac{1}{3} (f^3(x) - f^3(0))$, f^3 a une limite finie ℓ . Si $\ell \neq 0$, alors $f^2(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ell^{2/3} > 0$, ce qui contredit $f^2 \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$.

$$8. q(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \left(\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \geq \alpha, q(x) > 0 \right).$$

Si $f \in S_I(H)$, $\varphi = f^2 + \frac{f'^2}{q}$ est définie et dérivable sur $[\alpha, +\infty[$.

$\forall x \in [\alpha, +\infty[, \varphi'(x) = 2f(x)f'(x) + 2\frac{f'(x)f''(x)}{q(x)} - \frac{f'^2(x)q'(x)}{q^2(x)} = -\frac{f'^2(x)q'(x)}{q^2(x)}$ car $f \in S_I(\mathbb{R}_+)$. q étant croissante, $\varphi' \leq 0$ sur $[\alpha, +\infty[$. Donc φ est décroissante sur $[\alpha, +\infty[$. q étant positive sur $[\alpha, +\infty[$, on a : $\forall x \geq \alpha, f^2(x) \leq \varphi(x) \leq \varphi(\alpha)$.

Donc f est bornée sur $[\alpha, +\infty[$. f étant continue sur le segment $[0, \alpha]$ de $\mathbb{R}$ y est bornée. On conclut que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

$$9. \text{ Si } f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \cap S_{\mathbb{R}_+}(H), q \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \Rightarrow f'' = -qf \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}).$$

Donc f' a une limite finie ℓ , car $f(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)dt$. Supposons $\ell \neq 0$.

On déduit du théorème de sommation des relations d'équivalence que :

$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ell x$. f est alors non bornée. Donc $\ell = 0$.

Si (f, g) est un système fondamental de solutions de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}_+$ alors $W = fg' - f'g$ est non nul sur $\mathbb{R}_+$. Si f et g sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ alors du raisonnement précédent, on déduit que f' et g' tendent vers 0 en $+\infty$ et donc $W(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. (1)

(cf. produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle).

D'après le cours, si W est le wronskien de deux solutions de l'équation différentielle : $y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = 0$, alors W est solution de $y' + \alpha(x)y = 0$.

Ici $\alpha = 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $W(x) = W(0)$. On déduit de (1) que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $W(x) = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse (f, g) famille libre. Donc il existe des solutions non bornées.

10. Posons $I =]0, \frac{\pi}{2}[$.

Si $x \in I$, $v(x) = \frac{1}{u(x)}$ d'où $v'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$ et $v''(x) = -\frac{u''(x)}{u^2(x)} + 2\frac{u'(x)^2}{u^3(x)}$, et donc

$$\begin{aligned} [1 - \cos(4x)]v''(x) + 2\sin(4x)v'(x) &= -\frac{[1 - \cos(4x)]u''(x) + 2\sin(4x)u'(x)}{u^2(x)} \\ &\quad + 2[1 - \cos(4x)]\frac{u'(x)^2}{u^3(x)} \\ &= -\frac{8}{u(x)} + 2[1 - \cos(4x)]\frac{u'(x)^2}{u^3(x)}, \end{aligned}$$

et par suite, en écrivant que v est solution de l'équation, $4u^2(x) = u'^2(x)\sin^2(2x)$.

puis, comme $\sin(2x) \neq 0$ sur I , $u'(x) = \frac{\varepsilon(x)}{\sin(2x)}u(x)$ où $\varepsilon(x) \in \{-1, +1\}$. Comme ε est une fonction continue sur I elle est constante et donc il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que, soit $u = k \tan$, soit $u = k \cotan$.

($\tan$, $\cotan$) est un couple de solutions linéairement indépendantes (car $\lim_{x \rightarrow 0} \tan = 0$ alors que $\cotan(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$) d'une équation différentielle linéaire homogène scalaire d'ordre 2. Comme, sur I , $1 - \cos(4x) \neq 0$, il s'agit d'un système fondamental, l'ensemble des solutions est donc $\text{Vect}(\tan, \cotan)$.

11. On montre que, sur $I =]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ toute solution de

$$\begin{cases} (1) & xy' + y = x^2 + \frac{3}{2} \text{ est de la forme } \varphi : x \mapsto \frac{2x^3 + 9x + \alpha}{6x}, \\ (2) & xy' - y = x^2 + \frac{3}{2} \text{ est de la forme } \psi : x \mapsto x^2 + \beta x - \frac{3}{2}. \end{cases}$$

La solution de ((2) et $y(1) = -1$) est $\psi_0 : x \mapsto x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$, $\psi_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{3}{2} - \frac{x}{2} + o(x)$

et $\psi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{3}{2} + \beta x + o(x)$, donc le problème de Cauchy ((2) et $y(1) = -1$) admet

une seule $\mathbb{R}$ -solution, à savoir ψ_0 . De plus : $\psi_0(x) = 0 \iff x \in \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$.

Le problème de Cauchy ((1) et $y(-1) = 0$) admet $\varphi_1 : x \mapsto \frac{(x+1)(2x^2 - 2x + 11)}{6x}$

pour solution et l'équation $xy' + |y| = x^2 + \frac{3}{2}$ montre que $\psi'_0(-1) = \varphi_1(-1)$, de

plus $\varphi_1 > 0$ sur $] -\infty, -1[$. De même le problème de Cauchy ((1) et $y\left(\frac{3}{2}\right) = 0$)

admet pour solution $\varphi_2 : x \mapsto \frac{(x - \frac{3}{2})(4x^2 + 6x + 27)}{12x}$ pour solution, $\varphi_2 > 0$ sur

$]\frac{3}{2}, +\infty[$ et $\psi'_0\left(\frac{3}{2}\right) = \varphi'_2\left(\frac{3}{2}\right)$.

On obtient donc une et une seule $\mathbb{R}$ -solution : $\varphi_1 \mathbb{I}_{]-\infty, -1[} + \psi_0 \mathbb{I}_{[-1, \frac{3}{2}]} + \varphi_2 \mathbb{I}_{[\frac{3}{2}, +\infty[}$.

12. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2. Soit φ une solution développable en série entière sur $] - R, R[$ où $R > 0$, $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alors, sur $] - R, R[$, en utilisant le théorème de dérivation des séries entières,

$$(1+x^2)\varphi''(x) + x\varphi'(x) - \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2-1)a_n]x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2}a_n$ d'où $a_3 = 0$ et donc, pour tout $n \geq 1$, $a_{2n+1} = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{1.3 \dots (2n-3)}{2^n n!} a_0 \text{ soit } \varphi(x) = a_0 \sqrt{1+x^2} + a_1 x \text{ sur }]-1, 1[.$$

En fait $(x \mapsto x, x \mapsto \sqrt{1+x^2})$ sont des $\mathbb{R}$ -solutions et elles sont linéairement indépendantes par raison de parité, donc elles constituent un système fondamental.

13. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On se place sur $I =]0, +\infty[$.

a. φ est solution si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $\frac{d}{dx}(\varphi(x)e^{-x}) = \psi(x)$ où $\psi : x \mapsto e^{-x} \ln(x)$ est continue sur I avec $\psi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{-\frac{1}{2}})$ et $\psi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^{-2})$, d'où l'intégrabilité de ψ sur I .

Donc φ est solution si, et seulement si, il existe un réel k tel que, pour tout réel $x > 0$, $\varphi(x) = \left(k + \int_{+\infty}^x \psi\right)e^x$.

- Étude au voisinage de 0 : comme ψ est intégrable sur I , φ admet $k - \int_I \psi$ soit $k - \Gamma'(1)$ pour limite en 0.

- Étude au voisinage de $+\infty$: si $k \neq 0$ alors $\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} ke^x$ et $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} k \cdot \infty$ avec les conventions usuelles.

Si $k = 0$, en posant $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = \ln(t)$ et en intégrant par parties, on

$$a \varphi(x) = -\ln(x) + e^x \int_{+\infty}^x \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ or } \frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-t}) \text{ et } t \mapsto e^{-t} \text{ est positive}$$

intégrable sur I d'où $\int_{+\infty}^x \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-x})$ par sommation de relation de comparaison, puis $\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$.

b. Soit Γ l'ensemble des points du plan en lesquels une courbe intégrale a une tangente horizontale. Si $M_0 = (x_0, y_0) \in \Gamma$ et si φ est la solution telle que $\varphi(x_0) = y_0$ alors $\varphi'(x_0) - \varphi(x_0) = \ln(x_0)$ d'où $y_0 = -\ln(x_0)$. Réciproquement, si $y_0 = -\ln(x_0)$, la solution φ telle que $\varphi(x_0) = y_0$ vérifie $\varphi'(x_0) = 0$ et donc $(x_0, y_0) \in \Gamma$. La courbe Γ admet $y = -\ln(x)$ pour équation.

En notant Γ' l'ensemble des points du plan en lesquels une courbe intégrale admet un point d'inflexion et en remarquant que, si φ est solution, on a

$$\varphi''(x) = \varphi(x) + \ln(x) + \frac{1}{x} \text{ ainsi que } \varphi'''(x) = \varphi(x) + \ln(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, \text{ on montre de}$$

la même façon que Γ' admet $y = -\ln(x) - \frac{1}{x}$ pour équation.

La fonction $\gamma : x \mapsto \ln(x) - \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\gamma'(x) = \frac{1-x}{x^2}$ d'où le

tableau de variations :

	0	1	$+\infty$
γ'		+	0 -
γ	$-\infty$	$\nearrow$	$-1 \searrow -\infty$

c. Soit φ une solution, comme elle est bornée au voisinage de 0 on a $\varphi'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x)$ et donc φ est localement décroissante.

De même $\varphi''(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ et φ est localement convexe.

Si la courbe de φ rencontre Γ on aura une courbe qui correspond au cas $k > 0$.

Sinon et si la courbe de φ rencontre Γ' alors à partir de l'abscisse de l'intersection φ est concave, on a une courbe qui correspond à $k < 0$.

Reste le cas où la courbe de φ ne rencontre ni Γ ni Γ' , c'est le cas où $k = 0$.

14. a. On munit $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique et on choisit un élément N de $(\text{Im}(A))^\perp$, on a ${}^t N A = 0$. Si X est une solution du système différentiel alors, en posant $Y = {}^t N X$, on a $Y' = {}^t N X' = {}^t N A X = 0$ et donc Y est constante.

Si $(N_1, \dots, N_p)$ est une base de $(\text{Im}(A))^\perp$ et si l'on note, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, α_i la valeur constante de $(N_i | X)$, on s'aperçoit que la courbe représentative de X est tracée dans le sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ défini par $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (N_i | X) = \alpha_i)$ qui est de direction $\text{Im}(A)$.

b. Posons, si X est solution, $Z = (X | X)$, alors on obtient : $Z' = 2(X | X')$

ie. $Z' = 2 {}^t X A X = -2 {}^t (A X) X = -2 (X' | X)$ et donc $Z' = 0$ ie. $\|X\|$ est constante.

Réciproquement, si la norme de toute solution de $X' = A X$ est constante et si $X_0 \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, en notant X la solution de $(X' = A X \text{ et } X(0) = X_0)$ on a $0 = (X | X)' = 2 {}^t X_0 A X_0$ d'où $(X_0 | (A + {}^t A) X_0) = 0$ et, comme $A + {}^t A \in S_3(\mathbb{R})$, on en déduit que $A + {}^t A = 0$ ie. $A \in A_3(\mathbb{R})$.

Soit X une solution du système différentiel. On a $\det(A) = \det({}^t A) = (-1)^3 \det(A)$ d'où $\det(A) = 0$ et il existe un plan contenant $\text{Im}(A)$. La courbe de X est donc tracée dans l'intersection d'une sphère et d'un plan d'après le début de la question et a. Si X n'est pas constante cette courbe est donc un arc de cercle.

X' vérifie le même système différentiel donc est de norme constante non nulle, l'arc associé à X est régulier de longueur infinie, c'est un cercle.

15. Soient φ_0 une solution de $y'' + p(x)y' - q(x)y = h(x)$ et (φ, ψ) un système fondamental de l'équation homogène associée. Toute solution f s'écrit de façon unique

$$\lambda\varphi + \mu\psi + \varphi_0 \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \begin{cases} f(a) = \alpha \\ f(b) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda\varphi(a) + \mu\psi(a) = \alpha - \varphi_0(a) \\ \lambda\varphi(b) + \mu\psi(b) = \alpha - \varphi_0(b) \end{cases}$$

montre que le problème admet une et une seule solution si, et seulement si, $y'' + py' - qy$ admet une et une seule solution nulle à la fois en a et b , à savoir la solution nulle. Soit f une solution de ce dernier problème, $\{x \in [a, b] \mid f'(x) = 0\}$ est un compact non vide d'après le théorème de Rolle ; notons c son minimum. Sur $[a, c]$ le signe de f est constant toujours d'après le théorème de Rolle ; supposons le positif. En notant P une primitive de p et $g = f'e^P$ on a $g' = (f'' + pf')e^P = qfe^P$ de signe constant sur $[a, c]$. La fonction g est croissante sur $[a, c]$ nulle en c donc $g(a) \leq 0$ ie. $f'(a) \leq 0$ et la positivité de f sur $[a, c]$ impose alors $f'(a) = 0$. Le théorème de Cauchy linéaire prouve alors la nullité de f .

TRAVAUX DIRIGÉS

• Solutions pseudo-périodiques d'une équation différentielle

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On donne $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et l'on note $E_{\mathbb{K}}$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle (1) $y'' + \varphi(x)y = 0$.

Première partie

1. Montrer que si (u_1, u_2) est base de $E_{\mathbb{R}}$ elle est aussi base de $E_{\mathbb{C}}$.
2. Soit $(u, v) \in E_{\mathbb{K}}^2$. On note $C_{u,v}$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ définie par $C_{u,v} = uv' - u'v$.
 - a. Montrer que $C_{u,v}$ est constante.
 - b. Que dire de l'application $E_{\mathbb{K}}^2 \rightarrow \mathbb{K}, (u, v) \mapsto C_{u,v}(0)$?
 - c. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur (u, v) a-t-on $C_{u,v}(0) \neq 0$?
3. Montrer que les éléments de $E_{\mathbb{R}}$ qui ne s'annulent pas sont les fonctions de la forme εe^f , où f est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y'^2 + \varphi(x) = 0$ et où $\varepsilon \in \{-1, +1\}$.
4. Soit u un élément de $E_{\mathbb{K}}$ qui ne s'annule pas. On définit $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto u(x) \int_0^x \frac{dt}{u^2(t)}$. Montrer que (u, v) est une base de $E_{\mathbb{K}}$.
5. On donne $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, strictement monotone et telle que $\varphi \circ \psi = \varphi$. Pour $u \in E_{\mathbb{K}}$, on note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi}(u)$ l'application $u \circ \psi$. On considère les propriétés suivantes : (i) $\forall u \in E_{\mathbb{K}}, \mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi}(u) \in E_{\mathbb{K}}$ et (ii) ψ est une isométrie de $\mathbb{R}$.
 - a. Montrer : (ii) $\Rightarrow$ (i).
 - b. Montrer que si φ n'est pas la fonction nulle alors (i) $\Rightarrow$ (ii).
 - c. Montrer que si (ii) est vérifiée l'application $\mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi}$ est un automorphisme et que l'on a $\det(\mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi}) = \psi'(0)$.
6. Une base (u_1, u_2) de $E_{\mathbb{K}}$ est dite adaptée si u_1 est paire et u_2 est impaire.
 - a. Montrer que si (u_1, u_2) est adaptée, les bases adaptées de $E_{\mathbb{K}}$ sont exactement les $(\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2)$, avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{K}^*)^2$.
 - b. Montrer que $E_{\mathbb{K}}$ admet une base adaptée si et seulement si φ est paire.
 - c. Déterminer des bases adaptées de $E_{\mathbb{R}}$ dans les cas suivants :
 - (i) φ est constante égale au réel k .
 - (ii) $\varphi : x \mapsto -1 - x^2$.

Deuxième partie

On suppose que φ est 1-périodique. $u \in E_{\mathbb{K}}$ est dit **pseudo-périodique** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x+1) = \lambda u(x)$. On dit que φ vérifie la condition (S) si 0 est le seul élément pseudo-périodique de $E_{\mathbb{R}}$.

1. a. Si $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $E_{\mathbb{R}}$, on note pour $x \in \mathbb{R}$, $U_{\mathcal{B}}(x)$ la matrice : $\begin{bmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{bmatrix}$. Montrer que $M_{\mathcal{B}}(x) = U_{\mathcal{B}}(x)^{-1}U_{\mathcal{B}}(x+1)$ est une matrice de déterminant 1 indépendante de x et préciser le lien entre $M_{\mathcal{B}}$ et l'endomorphisme $\mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi_1}$ où $\psi_1 : x \mapsto x+1$.

b. Montrer que φ vérifie la condition (S) si et seulement si les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi_1}$ sont de la forme $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. En déduire que si φ vérifie la condition (S) tout élément de $E_{\mathbb{K}}$ est borné.

2. Soient a et b des réels avec $a < b$ et $h \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in [a, b], h(x)h''(x) = 0.$$

a. Montrer que $F = \{x \in [a, b] \mid h(x) = 0\}$ est un segment.

b. En envisageant différents cas montrer que h est affine.

3. Soient a et b des réels vérifiant $a < b$, $w \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ telle que :

(i) $w(a) = w(b) = 0$, (ii) $\forall x \in]a, b[, w(x) > 0$,

(iii) L'intégrale $I = \int_a^b \frac{|w''(x)|}{w(x)} dx$ existe.

On pose $M = \max_{[a, b]} w(x)$ et $J = \frac{1}{M} \times \max_{a \leq x_1 \leq x_2 \leq b} |w'(x_2) - w'(x_1)|$.

a. Montrer que $I \geq J$.

b. En utilisant II.2. et en raisonnant par l'absurde montrer que $I > J$.

c. Soit $c \in]a, b[$ tel que $M = w(c)$. A l'aide de **b.** et de réels x_1 et x_2 convenablement choisis dans $]a, c[$ et $]c, b[$, montrer que $(b-a)I > 4$.

4. On suppose dans cette question $\int_0^1 \varphi(x) dx > 0$. Montrer que tout élément pseudo-périodique de $E_{\mathbb{R}}$ s'annule sur $[0, 1]$.

On pourra raisonner par l'absurde à l'aide de $\frac{w'}{w}$.

5. On suppose que φ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et que $0 < \int_0^1 \varphi(x) dx \leq 4$. Montrer que tout élément de $E_{\mathbb{R}}$ est borné.

Solution

Première partie

Il s'agit de démontrer (et non d'utiliser) les propriétés du wronskien au début du problème.

1. Si (u_1, u_2) est un $\mathbb{R}$ -système fondamental alors u_1 et u_2 sont à valeurs réelles.

Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda u_1 + \mu u_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda)u_1 + \operatorname{Re}(\mu)u_2 &= 0 \\ \operatorname{Im}(\lambda)u_1 + \operatorname{Im}(\mu)u_2 &= 0 \end{cases}$ d'où, immédiatement, $\lambda = \mu = 0$. Comme $\dim_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}) = 2$, (u_1, u_2) est un $\mathbb{C}$ -système fondamental.

2. a. $C_{u,v}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(C_{u,v})' = uv'' - u''v = \varphi \times (uv - vu) = 0$ d'où le résultat.

b. Cette application est clairement bilinéaire alternée *ie.* élément de $\Lambda_2^*(E_{\mathbb{K}})$. En

prenant u solution du problème de Cauchy $\begin{cases} (1) \\ u(0) = 1 \text{ et } v \text{ solution du problème} \\ u'(0) = 0 \end{cases}$

de Cauchy $\begin{cases} (1) \\ v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \end{cases}$ on a $C_{u,v}(0) = 1$. Comme $\Lambda_2^*(E_{\mathbb{K}})$ est de dimension 1,

l'application proposée en est un vecteur directeur.

c. On vient de prouver qu'une condition nécessaire et suffisante est : (u, v) système fondamental.

3. Si u est sans zéro, le théorème des valeurs intermédiaires prouve que u est de signe constant. Posons alors $f = \ln(\varepsilon u)$, $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ *ie.* $u = \varepsilon e^f$. On a :

$u'' = (f'' + f'^2)\varepsilon e^f$, donc u est solution de (1) si, et seulement si :

$(f'' + f'^2 + \varphi)\varepsilon e^f = 0$ *ie.* si, et seulement si, $f'' + f'^2 + \varphi = 0$.

4. On voit immédiatement que v est de classe $\mathcal{C}^2$ et que, pour tout x réel,

$v''(x) = u''(x) \int_0^x \frac{dt}{u^2(t)} = -\varphi(x)v(x)$, d'où l'appartenance de v à $E_{\mathbb{K}}$. Comme

$C_{u,v}(0) = 1 \neq 0$, (u, v) est un système fondamental.

5. Pour tout simplifier on posera $\Psi = \mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi}$. Ψ est clairement linéaire sur $E_{\mathbb{K}}$.

a. $\psi'^2 = 1$ et $\psi'' = 0$ d'où $[\Psi(u)]' = (u' \circ \psi)\psi'$ puis $[\Psi(u)]'' = (u'' \circ \psi) = -\varphi \times \Psi(u)$ et donc $E_{\mathbb{K}}$ est stable par Ψ .

b. Si $x \in \mathbb{R}$, $\Lambda : (u, v) \mapsto C_{\Psi(u), \Psi(v)}$ est élément de $\Lambda_2^*(E_{\mathbb{K}})$ et indépendant de x comme on l'a déjà vu. On a même l'existence d'un scalaire λ tel que $\Lambda(u, v) = \lambda C_{u,v}$ pour tout (u, v) .

Or $\Lambda(u, v) = (u \circ \psi)(v \circ \psi)' - (u \circ \psi)'(v \circ \psi) = \psi' \times [(uv' - u'v) \circ \varphi] = \psi' \times C_{u,v}$ car $C_{u,v}$ est constante, donc ψ' est constante, ψ'' est nulle.

Alors $[\Psi(u)]'' + \varphi \times \Psi(u) = \varphi \times (u \circ \psi) \times (1 - \psi'^2) = 0$ pour tout u dans $E_{\mathbb{K}}$ et, comme φ est non nulle, $\psi'^2 = 1$.

Le théorème des valeurs intermédiaires montre alors que ψ' est constante égale à ε où $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ et, en intégrant, que ψ est une isométrie.

c. Soit (u, v) un système fondamental, $\Theta : (u, v) \mapsto C_{u,v}$ engendre $\Lambda_2^*(E_{\mathbb{K}})$ et on a vu dans b) que l'on a $\Lambda(u, v) = \psi'(0)\Theta(u, v) = \Theta(\Psi(u), \Psi(v)) = \det(\Psi)\Theta(u, v)$ car Θ est un déterminant. Par conséquent $\det(\mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi}) = \psi'(0) \neq 0$ et $\mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi} \in \text{GL}(E_{\mathbb{K}})$.

6. a. Si (u_1, u_2) est une base adaptée, (λ_1, λ_2) dans $(\mathbb{K}^*)^2$, il est clair que $(\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2)$ est une base adaptée.

Soit (u, v) une base adaptée, $u = \alpha u_1 + \beta u_2 \Rightarrow \beta u_2 = u - \alpha u_1$ est à la fois paire et impaire, donc nulle. Comme u_2 n'est pas nulle, nécessairement $\beta = 0$, de même v est colinéaire à u_2 , $(u, v) = (\alpha u_1, \gamma u_2)$ et $\alpha \gamma \neq 0$, ce qui termine la question.

b. On va traiter séparément les deux implications :

• Soit (u_1, u_2) une base adaptée, si $u_1(x) \neq 0$ on a $\varphi(x) = -\frac{u_1''}{u_1}(x)$ et les zéros de u_1 sont isolés (*c'est un classique à connaître et déjà prouvé dans un autre travail dirigé*), $-\frac{u_1''}{u_1}$ admet donc un unique prolongement continu à $\mathbb{R}$ et c'est une fonction paire, or c'est φ , donc φ est paire.

• On suppose φ paire, alors $\psi : x \mapsto -x$ est une isométrie de $\mathbb{R}$, $\varphi \circ \psi = \varphi$ et $\mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi}$ est involutive car ψ l'est. $\det(\mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi}) = \psi'(0) = -1$ donc $\mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi} \neq \pm I_{E_{\mathbb{K}}}$ et donc les sous-espaces propres de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi}$ sont des droites.

$E_{\mathbb{K}} = \text{Ker}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi} - I_{E_{\mathbb{K}}}) \oplus \text{Ker}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi} + I_{E_{\mathbb{K}}})$, prenons (u, v) une base de $E_{\mathbb{K}}$ associée à cette décomposition. $\mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi}(u) = u$ signifie que u est paire, de même v est impaire et donc $E_{\mathbb{K}}$ admet une base adaptée.

c. On se contente de donner les réponses, les vérifications sont immédiates.

- (i) $\begin{cases} \text{Si } k = 0 \text{ une base adaptée est } (x \mapsto 1, x \mapsto x) \\ \text{Si } k > 0 \text{ une base adaptée est } (x \mapsto \cos(x\sqrt{k}), x \mapsto \sin(x\sqrt{k})) \\ \text{Si } k < 0 \text{ une base adaptée est } (x \mapsto \text{ch}(x\sqrt{-k}), x \mapsto \text{sh}(x\sqrt{-k})) \end{cases}$
- (ii) Par 4. une base adaptée est $\left(x \mapsto e^{x^2/2}, x \mapsto e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2} dt\right)$.

Deuxième partie

1. a. On pose $\Psi_1 = \mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi_1}$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Psi_1)$.

Alors, pour tout x réel, $(\Sigma) \quad \begin{cases} u_1(x+1) &= \alpha u_1(x) + \gamma u_2(x) \\ u_2(x+1) &= \beta u_1(x) + \delta u_2(x) \end{cases}$ ou encore, matriciellement : $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = (\Psi_1(u_1) \quad \Psi_1(u_2))$.

En dérivant on a également $\begin{pmatrix} u'_1 & u'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = ([\Psi_1(u_1)]' \quad [\Psi_1(u_2)]')$ et

donc, en définitive, $U_{\mathcal{B}} = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Psi_1)U_{\Psi_1(\mathcal{B})}$ soit, en multipliant par $U_{\mathcal{B}}^{-1}$, on a $M_{\mathcal{B}} = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi_1})$ qui est constante et de déterminant 1 car $\psi'_1(0) = 1$.

b. u est un élément de $E_{\mathbb{K}}$ pseudo-périodique si, et seulement si, u est nulle ou vecteur propre de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}, \psi_1}$, donc φ vérifie (S) si, et seulement si, $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}_{\mathbb{R}, \psi_1}) = \emptyset$ i.e. si, et seulement si, les racines de $\chi_{M_{\mathcal{B}}}$ sont dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Comme $\chi_{M_{\mathcal{B}}}$ est un trinôme réel cela équivaut à dire que les racines de $\chi_{M_{\mathcal{B}}}$ sont des complexes conjugués non réels et on sait que leur produit est $\det(M_{\mathcal{B}})$, soit 1. Donc :

φ vérifie (S) si, et seulement si, il existe $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ tel que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}_{\mathbb{R}, \psi_1}) = \{e^{-i\theta}, e^{i\theta}\}$.

Si c'est le cas, $M_{\mathcal{B}}$ est $\mathbb{C}$ -semblable à $\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$, soit u un vecteur propre associé à $e^{i\varepsilon\theta}$. Pour tout x réel et tout k entier on a nécessairement $u(x+k) = e^{i\varepsilon k\theta}u(x)$ d'où $|u(x)| \leq \max_{[0,1]} |u|$ et u est bornée.

Si (u, v) est une base formée de vecteurs propres alors u et v sont bornées donc tout élément de $E_{\mathbb{C}}$ l'est, *a fortiori* tout élément de $E_{\mathbb{R}}$.

2. a. $F = h^{-1}(\{0\}) \cap [a, b]$ est fermé comme intersection de fermés. Si F n'est pas un segment on peut trouver α et β dans F avec $\alpha < \beta$ et $]\alpha, \beta[\cap F = \emptyset$. Sur $]\alpha, \beta[$ on a $h'' = 0$ et donc $h|_{[\alpha, \beta]}$ est affine nulle en α et β donc nulle : absurde.

b. Si F a plus d'un élément et n'est pas $[a, b]$, par exemple $\alpha = \min F \in]a, +\infty[$. h n'a aucun zéro dans $[a, \alpha[$ d'où $h''|_{[a, \alpha[} = 0$ et donc $h|_{[a, \alpha]}$ est affine nulle en α , $\forall x \in [a, \alpha]$, $h(\alpha) = \lambda(x - \alpha)$ où λ est un réel.

h est nulle sur un intervalle $[\alpha, \alpha + \eta]$ où $\eta > 0$ car F est un segment non réduit à α , donc $h'(\alpha) = 0$ et $\lambda = 0$ en découle, h serait nulle sur $[a, \alpha]$, ce qui a été exclu.

Soit F a plus d'un point et alors $F = [a, b]$, soit F a au plus un point, h'' est nulle sauf en au plus un point donc partout et h est affine. Dans tous les cas, h est affine.

3. a. Sur $[a, b]$ on a $\frac{1}{w} \geq \frac{1}{M}$, donc si $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$, on a :

$$I \geq \int_{x_1}^{x_2} \frac{|w''|}{w} \geq \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} |w''|.$$

Or $\int_{x_1}^{x_2} |w''| \geq \left| \int_{x_1}^{x_2} w'' \right| = |w'(x_2) - w'(x_1)|$. Le nombre réel MI majore l'ensemble : $\{|w'(x_2) - w'(x_1)| \mid a \leq x_1 \leq x_2 \leq b\}$. D'où : $I \geq J$.

b. Si $I = J = \frac{1}{M} |w'(x_2) - w'(x_1)|$ où $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$, on a :

$I \geq \int_{x_1}^{x_2} \frac{|w''|}{w} \leq \int_{x_1}^{x_2} \frac{|w''|}{M} \geq \frac{J}{M} = I$, il s'agit donc d'une suite d'égalités, en particulier $\int_{x_1}^{x_2} |w''| \left[\frac{1}{w} - \frac{1}{M} \right] = 0$ or l'intégrande est continue positive sur $]x_1, x_2[$,

donc nulle, ce qui donne, par continuité, la nullité de $(w - M)w''$ sur $[x_1, x_2]$.

En prenant $h = w - M$, la question 2. montre que h est affine sur $[x_1, x_2]$ et donc que w'' y est nulle. Alors $I = J = 0$, w' est constante sur $[a, b]$, w est affine nulle en a et b donc nulle, ce qui est absurde. Donc $I > J$.

c. Utilisons les accroissements finis, soient x_1 et x_2 dans $]a, c[$ et $]c, b[$ tels que $\frac{w(c) - w(a)}{c - a} = w'(x_1)$ et $\frac{w(c) - w(b)}{c - b} = w'(x_2)$, alors

$$|w'(x_2) - w'(x_1)| = M \left| \frac{1}{c - a} + \frac{1}{b - c} \right| = \frac{M(b - a)}{(c - a)(b - c)}.$$

La question 3. montre que $MI > |w'(x_2) - w'(x_1)|$ d'où $I > \frac{(b - a)}{(c - a)(b - c)}$, or

$\varphi : x \mapsto (x - a)(b - x)$ atteint son maximum sur $[a, b]$ en $\frac{a + b}{2}$ et ce maximum vaut $\left(\frac{b - a}{2}\right)^2$ d'où $(b - a)I < \left(\frac{b - a}{b - a} \times 2\right)^2$, soit : $(b - a)I > 4$.

4. Sinon, $v = \frac{u'}{u}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et $v' = \frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u}\right)^2 \leq -\varphi$

d'où $v(1) - v(0) \leq -\int_0^1 \varphi < 0$ et $\frac{u'}{u}(1) - \frac{u'}{u}(0) \neq 0$. Si $w : x \mapsto u(x + 1)$, $w \in E_{\mathbb{R}}$ par I.5. et $C_{u,w}(0) = u(0)u'(1) - u'(0)u(1) \neq 0$ ie. (u, w) est base de $E_{\mathbb{R}}$, or (u, w) est liée car u est pseudo-périodique.

5. Si φ ne vérifie pas la condition (S), soit u une solution pseudo-périodique non nulle, par 4. elle a un zéro, noté a dans $[0, 1]$ et, pour tout k dans $\mathbb{Z}$, $u(a + k) = 0$ par pseudo-périodicité. Dans $[a, a + 1]$, u a un nombre supérieur ou égal à 2 mais fini de zéros car ceux-ci sont isolés, supposons donc a et b zéros consécutifs (et on

vient de montrer que cela a un sens), supposons pour fixer les idées que $u > 0$ sur $]a, b[$ en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

On a : $4 < (b-a) \int_a^b \frac{|u''|}{u} = (b-a) \int_a^b \varphi \leq (b-a) \int_a^{a+1} \varphi = (b-a) \int_0^1 \varphi \leq 4(b-a)$
d'où $1 < b-a$, ce qui est absurde. Par conséquent φ vérifie la condition (S) et donc, d'après 1.b), tout élément de $E_{\mathbb{R}}$ est borné.

• Équation différentielle de Bessel

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on note $\mathcal{B}_\alpha$ l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$\mathcal{B}_\alpha : \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

que l'on étudiera sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

1. a. On suppose que $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Déterminer les I -solutions de $\mathcal{B}_\alpha$. On les cherchera sous la forme $y(x) = x^r \sum_{n \geq 0} a_n(r) x^n$ où $a_0(r) = 1$ et $r \in \mathbb{C}$.

b. Déterminer les I -solutions de $\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}$.

On note $J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\alpha + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ où $(\alpha, x) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

On suppose $\alpha = 0$ dans les deux questions suivantes.

2. a. Déterminer les solutions développables en série entière de $\mathcal{B}_0$.

b. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $J_0(x) > 0$ si $x \in [0, a]$. Exprimer la solution générale de $\mathcal{B}_0$ sur $]0, a[$.

3. a. Montrer que la fonction f est I -solution de $\mathcal{B}_0$ si, et seulement si, la fonction $g : x \mapsto f(x) - J_0(x) \ln(x)$ est I -solution de l'équation différentielle

$$\mathcal{C}_0 : A(x)z'' + B(x)z' + C(x)z = -2J'_0(x).$$

où A, B et C sont des fonctions polynomiales que l'on déterminera.

b. Déterminer les solutions de $\mathcal{C}_0$ développables en série entière. On les cherchera sous la forme $z(x) = \sum_{n \geq 0} a_{2n} s_n x^{2n}$ où $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}$. On

déterminera les s_n en fonction des γ_k définis par $\gamma_0 = 0$ et $\gamma_k = \sum_{m=1}^k \frac{1}{m}$ si $k \geq 1$. On précisera le rayon de convergence des séries qui conviennent.

c. Déterminer les I -solutions de $\mathcal{B}_0$.

4. On suppose dorénavant que $\alpha = p \in \mathbb{N}^*$ et l'on note $(b_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $b_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+p} n! (n+p)!}$.

a. Soit $h \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto J_p(x) \ln(x) + x^{-p} h(x)$. Montrer que g est I -solution de $\mathcal{B}_p$ si, et seulement si, h est I -solution d'une équation différentielle $\mathcal{C}_p : xy'' + A_1(x)y' + B_1(x)y = \theta(x)$ où A_1, B_1 et θ sont à déterminer.

b. Déterminer les suites $(\sigma_n)_{n \geq p}$ réelles et $(c_1, \dots, c_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tels que la série entière de somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{p-1} c_n x^{2n} + \sum_{n=p}^{\infty} b_{2n} \sigma_n x^{2n}$ soit I -solution de $\mathcal{C}_p$. Préciser l'ensemble des I -solutions de $\mathcal{B}_p$.

Solution

1. a. Si $y(x) = x^r Y(x)$ où $Y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(r) x^n$ pour $x \in]-R, R[$ avec $R > 0$, d'après

les théorèmes sur les séries entières, $Y \in \mathcal{C}^\infty(]-R, R[, \mathbb{R})$. Donc $y \in \mathcal{C}^\infty(]0, R[, \mathbb{R})$.

$$y'(x) = \sum_{n \geq 0} (n+r) a_n(r) x^{n+r-1}, y''(x) = \sum_{n \geq 0} (n+r)(n+r-1) a_n(r) x^{n+r-2}.$$

y est solution de $\mathcal{B}_\alpha$ sur $]0, R[$ si, et seulement si, pour tout $x \in]0, R[$,

$$x^r \left[(r^2 - \alpha^2) a_0(r) + [(r+1)^2 - \alpha^2] a_1(r) + \sum_{n \geq 2} \left[[(n+r)^2 - \alpha^2] a_n(r) + a_{n-2}(r) \right] x^n \right] = 0.$$

$$\text{D'où } (r^2 - \alpha^2) a_0(r) + [(r+1)^2 - \alpha^2] a_1(r) + \sum_{n \geq 2} \left[[(n+r)^2 - \alpha^2] a_n(r) + a_{n-2}(r) \right] x^n = 0$$

pour tout $x \in]0, R[$. Du lemme suivant, on déduit que : $(r^2 - \alpha^2) a_0(r) = 0$, $[(r+1)^2 - \alpha^2] a_1(r) = 0$ et pour tout $n \geq 2$, $[(n+r)^2 - \alpha^2] a_n(r) + a_{n-2}(r) = 0$.

Lemme

Si $\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ pour tout $x \in]0, R[$ avec $R > 0$, alors :

$$\forall x \in]0, R[, \Psi(x) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}, c_n = 0.$$

En effet, si tous les c_n sont nuls, alors Ψ est nulle.

Réciproquement, $c_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \Psi(x) = 0$. S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $c_n \neq 0$, soit

$$p = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid c_n \neq 0\}. \text{ On déduit de l'hypothèse : } \forall x \in]0, R[, c_p + \sum_{n \geq p+1} c_n x^n = 0.$$

Par passage à la limite quand x tend vers 0, on obtient $c_p = 0$: absurde. D'où la preuve du lemme.

Comme $a_0(r) = 1$, on a donc $\alpha \in \{-r, r\}$, $(2r+1)a_1(r) = 0$ et pour tout $n \geq 2$, $n(n+2r)a_n(r) + a_{n-2}(r) = 0$. (★)

• Si $r = \alpha$, comme $\alpha \geq 0$, on a : $a_1(r) = 0$ et par récurrence, on déduit de (★) que $a_{2n+1}(r) = 0$ et $a_{2n}(r) = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (\alpha + n) \cdots (\alpha + 1)} = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha + 1)}{2^{2n} n! \Gamma(\alpha + n + 1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

• Si $r = -\alpha$, comme $(2\alpha - 1)a_1(r) = 0$, si $\alpha \neq \frac{1}{2}$, alors $a_1(r) = 0$ et par récurrence, on déduit de (★) que $a_{2n+1}(r) = 0$ et $a_{2n}(r) = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (-\alpha + n) \cdots (-\alpha + 1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $u_n = a_{2n} x^{2n}$. Si $x \neq 0$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$, $r \in \{-\alpha, \alpha\}$ et $n \geq 0$, alors

$u_n \neq 0$. Comme $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{x^2}{|(n+r)^2 - \alpha^2|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. D'après la règle de d'Alembert pour les séries réelles que $\sum |u_n|$ converge quel que soit le réel x . Donc $R = +\infty$.

Notons $f_\alpha(x) = x^\alpha \left[1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (\alpha + n) \cdots (\alpha + 1)} x^{2n} \right]$ si $x > 0$.

Alors f_α et $f_{-\alpha}$ sont deux I -solutions de $\mathcal{B}_\alpha$. D'autre part, $(f_\alpha, f_{-\alpha})$ est libre car $f_\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ et $f_{-\alpha}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$. Comme $\mathcal{B}_\alpha$ est une équation différentielle linéaire du second ordre dont les coefficients sont des fonctions continues sur I et le coefficient de y'' ne s'annule pas sur I , $S_I(\mathcal{B}_\alpha)$ est un plan vectoriel. D'où $S_I(\mathcal{B}_\alpha) = \text{Vect}(f_\alpha, f_{-\alpha})$.

b. $a_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ et $a_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ pour tout $n \geq 0$ d'après 1.a.

D'où, si $r = \frac{1}{2}$, $y(x) = x^{\frac{1}{2}} \left[1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \right] = x^{-\frac{1}{2}} \sin(x)$ pour $x > 0$.

En reprenant les calculs de 1.a. on a $a_1\left(-\frac{1}{2}\right)$ quelconque et, pour tout $n \geq 1$,

$$2n(2n-1)a_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = -a_{2n-2}\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ et } (2n+1)(2n)a_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -a_{2n-1}\left(-\frac{1}{2}\right).$$

D'où par récurrence : $a_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ et $a_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_1\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Si $r = -\frac{1}{2}$, $y(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left[\cos(x) + a_1\left(-\frac{1}{2}\right) \sin(x) \right]$.

Un raisonnement analogue à celui fait au 1.a. prouve que les deux fonctions $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ constituent une base de $S_I(\mathcal{B}_{\frac{1}{2}})$.

Notons que $f_\alpha(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) J_\alpha(x)$ si x et α sont dans $\mathbb{R}_+^*$.

2. a. La reprise du calcul fait à la question 1.a. avec $r = 0$ prouve que les solutions développables en série entière de $\mathcal{B}_0$ sont les fonctions λJ_0 définies sur $\mathbb{R}$ où λ est une constante réelle et leurs restrictions à des intervalles $] - A, A[$ où $A > 0$.

b. J_0 étant un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $J_0(0) = 1$, il existe $a > 0$ tel que $J_0(x) > 0$ quel que soit $x \in [0, a]$. Il suffit d'appliquer la technique vue en cours pour déterminer la solution générale d'une équation différentielle linéaire du second ordre lorsque l'on connaît une solution sur un intervalle et que cette solution ne s'y annule pas. On pose $y = J_0 z$. D'où $y' = J_0' z + J_0 z'$ et $y'' = J_0'' z + 2J_0' z' + J_0 z''$. y vérifie $\mathcal{B}_0$ si, et seulement si, $x J_0(x) z'' + (2x J_0'(x) + J_0(x)) z' = 0$ (2)

$$(2) \iff \frac{d}{dx} \left(x J_0^2(x) z'(x) \right) = 0 \text{ pour tout } x \in]0, a[.$$

$$(2) \iff \exists (C, D) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in]0, a[, z(x) = C \int_{x_0}^x \frac{dt}{t J_0^2(t)} + D, \text{ où } x_0 \in]0, a[.$$

$$y \in S_{]0, a[}(\mathcal{B}_0) \iff \exists (C, D) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in]0, a[, y(x) = J_0(x) \left(C \int_{x_0}^x \frac{dt}{t J_0^2(t)} + D \right).$$

3. a. $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \iff g \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$. De $f(x) = g(x) + J_0(x) \ln(x)$ on déduit $f'(x) = g'(x) + J_0'(x) \ln(x) + \frac{J_0(x)}{x}$ et $f''(x) = g''(x) + J_0''(x) \ln(x) + 2 \frac{J_0'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2}$.

D'où : $x f''(x) + f'(x) + x f(x) = x g''(x) + g'(x) + x g(x) + 2 J_0'(x)$.

Donc $f \in S_I(\mathcal{B}_0) \iff g \in S_I(\mathcal{C}_0)$ où $\mathcal{C}_0 : x y'' + y' + x y = -2 J_0'(x)$.

b. Si $z(x) = \sum_{n \geq 0} a_{2n} s_n x^{2n}$ où $x \in] - R_1, R_1[$ et $R_1 > 0$, d'après le théorème de

dérivation des séries entières, $z \in \mathcal{C}^\infty(]-R_1, R_1[, \mathbb{R})$, $z'(x) = \sum_{n \geq 1} 2na_{2n}s_n x^{2n-1}$ et

$$z''(x) = \sum_{n \geq 1} 2n(2n-1)a_{2n}s_n x^{2n-2}. \quad z \text{ est solution de } \mathcal{C}_0 \text{ sur }]-R_1, R_1[\text{ si, et}$$

seulement si, pour tout $n \geq 1$, $2n(2n-1)s_n a_{2n} + 2na_{2n}s_n + a_{2n-2}s_{n-1} = -4na_{2n}$.

Or, pour tout $n \geq 1$, $4n^2 a_{2n} + a_{2n-2} = 0$ et $a_{2n} \neq 0$, donc z est solution de $\mathcal{C}_0$ si, et seulement si, pour tout $n \geq 1$, $s_n - s_{n-1} = -\frac{1}{n} = \gamma_{n-1} - \gamma_n$ i.e. $s_n = s_0 - \gamma_n$.

Posons $v_n = a_{2n}s_n x^{2n}$ pour tout $n \geq 1$. Comme $|s_n| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n)$ et $v_n \neq 0$ si $x \neq 0$,

$$\left| \frac{v_n}{v_{n-1}} \right| = \frac{1}{4n^2} \left| \frac{s_n}{s_{n-1}} \right| x^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } R_1 = +\infty.$$

Les fonctions z solutions de $\mathcal{C}_0$ et développables en série entière sont des $\mathbb{R}$ -solutions de $\mathcal{C}_0$. Ce sont les fonctions $z : x \mapsto \lambda J_0(x) + \sum_{n \geq 1} a_{2n} \gamma_n x^{2n}$ où λ est une constante

réelle arbitraire.

c. D'après 3.a. et 3.b. la fonction $\varphi : x \mapsto J_0(x) \ln(x) - \sum_{n \geq 1} a_{2n} \gamma_n x^{2n}$ est une

I -solution de $\mathcal{B}_0$. Comme $J_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 1$ et $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x)$, les deux fonctions J_0 et φ sont linéairement indépendantes. Comme $S_I(\mathcal{B}_0)$ est un espace vectoriel de dimension 2, une base de $S_I(\mathcal{B}_0)$ est (J_0, φ) .

4. a. En procédant comme à la question 3.a. on obtient :

$$\mathcal{C}_p : xy'' - (2p-1)y' + xy = -2x^p J'_p(x).$$

b. On a donc $J_p(x) = \sum_{n \geq 0} b_{2n} x^{2n+p}$ pour tout $x \in I$.

$$\text{D'où : } -2x^p J'_p(x) = -2 \sum_{n \geq 0} (2n+p) b_{2n} x^{2n+2p-1}.$$

Si l'on pose $c_n = b_{2n} \sigma_n$ pour $n \geq p$ et si l'on procède comme en 3.b. la fonction $y : x \mapsto \sum_{n \geq 0} c_n x^{2n}$ est solution de $\mathcal{C}_p$ sur $]-R_2, R_2[$ où $R_2 > 0$, on obtient, pour

$$n \geq 1, \quad 2n(2n-2p)c_n + c_{n-1} = -2(2n-p)b_{2n-2p}. \quad (\text{convention } b_{2k} = 0 \text{ si } k < 0.)$$

$$\text{D'où : } 4n(n-p)c_n + c_{n-1} = 0 \text{ pour } n \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \quad c_{p-1} = -2p.$$

$$\text{Si } n \geq p+1, \quad 4n(n-p)b_{2n-2p}\sigma_n + b_{2n-2p-2}\sigma_{n-1} = -2(2n-p)b_{2n-2p}.$$

$$\text{Or } b_{2n-2} + 4n(n+p)b_{2n} = 0 \text{ pour } n \geq 1, \text{ donc } \sigma_n - \sigma_{n-1} = -\frac{2n-p}{2n(n-p)}.$$

$$\text{De } c_{p-1} = -2p, \text{ on déduit par récurrence : } c_{p-k-1} = -\frac{k!p!2^{2k+1}}{(p-k-1)!} \text{ si } 0 \leq k \leq p-1.$$

$$\sigma_p \text{ est arbitraire et pour } n > p, \quad \sigma_n - \sigma_{n-1} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-p} \right).$$

$$\text{Donc, pour tout } n \geq p, \quad \sigma_n = \sigma_p - \frac{1}{2} (\gamma_n - \gamma_p + \gamma_{n-p}).$$

Comme $\sigma_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\ln(n)$, un raisonnement analogue à celui fait à la question 3.b. permet de conclure que $R_2 = +\infty$ et que les fonctions S solutions de $\mathcal{C}_p$ et développables en série entière sont des $\mathbb{R}$ -solutions de $\mathcal{C}_p$. Ce sont les fonctions

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{p-1} c_n x^{2n} + \sum_{n=p}^{\infty} b_{2n} \sigma_n x^{2n} \text{ où les } c_n \text{ et } \sigma_n \text{ sont déterminés comme indiqué}$$

précédemment. La fonction ψ définie par $\psi(x) = J_p(x) \ln(x) + x^{-p} S(x)$ où $\sigma_p = 0$

est I -solution de $\mathcal{B}_p$ d'après 4.a. et 4.b. Comme $\psi(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -x^{-p} 2^{2p-1} (p-1)! p!$ on a $\psi(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} -\infty$. Donc (J_p, ψ) est une famille libre du plan vectoriel $S_I(\mathcal{B}_p)$, ie. une base de $S_I(\mathcal{B}_p)$.

• Lemme de Gronwall ; applications

1. On note $I = [a, b[$ où $-\infty < a < b \leq +\infty$. Soient u, v et y trois fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall t \in I, y(t) \leq u(t) + \int_a^t v(s)y(s)ds \quad (\star).$$

a. Montrer que, pour $t \in I, y(t) \leq u(t) + \int_a^t u(s)v(s) \exp\left(\int_s^t v(x)dx\right)ds$.

On pourra étudier $G(t) = \int_a^t v(s)y(s)ds$.

b. En déduire que si v et y sont deux fonctions de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}_+)$, vérifiant :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall t \in I, y(t) \leq \lambda + \int_a^t v(s)y(s)ds \quad (\star\star)$$

alors, pour tout $t \in I, y(t) \leq \lambda \exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)$.

On suppose, jusqu'à la fin de la question 1. que $b = +\infty$.

c. Supposons v intégrable sur I . Montrer que si l'inégalité $(\star\star)$ est vraie pour tout réel $x > a$, λ ne dépendant pas de x , alors y est bornée sur I .

d. Si y est bornée sur I et si v est intégrable sur I , montrer que s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in I, y(t) \leq \lambda + \int_t^{+\infty} y(s)v(s)ds$, alors :

$$\forall t \in I, y(t) \leq \lambda \exp\left(\int_t^{+\infty} v(s)ds\right).$$

2. Soit $(\mathcal{H}) : y'' + (1 + \varphi(x))y = 0$ où $\varphi \in \mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{R})$. Si f est une solution de $(\mathcal{H})$ sur I , on note $g(x) = f(x) + \int_a^x \sin(x-t)\varphi(t)f(t)dt$.

a. Montrer que, pour tout $x \in I, g''(x) + g(x) = 0$.

b. Montrer que : $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in I, |f(x)| \leq M + \int_a^x |\varphi(t)f(t)|dt$.

c. En déduire que toute solution de $(\mathcal{H})$ est bornée sur I .

d. En déduire que $h : x \mapsto \int_a^{+\infty} f(t)\varphi(t)\sin(x-t)dt$ est définie sur I et que : $\exists(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, h(x) = \lambda_0 \cos(x) + \mu_0 \sin(x)$.

e. Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + O\left(\int_x^{+\infty} |\varphi(t)|dt\right)$$

3. Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ et croissante. Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{H}) : y'' + q(x)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

4. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{H}) : y'' + (1 + f(x))y = 0$ sont bornées si

$$\ell = \lim_{+\infty} f > -1.$$

5. Montrer que les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle de Bessel

$$\mathcal{B}_\alpha : \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$$

$$\text{vérifient : } y(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} [\lambda \cos x + \mu \sin x] + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$$

On pourra procéder au changement de fonction $z(x) = \sqrt{x}y(x)$.

Solution

1. a. En tant que primitive d'une fonction continue, $G \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $G' = v y$. Par multiplication des deux membres de $(\star)$ par $v \geq 0$ on trouve :

$$\forall t \in I, G'(t) - v(t)G(t) \leq u(t)v(t).$$

$$\text{Donc : } \forall t \in I, \frac{d}{dt} \left[G(t) \exp \left(- \int_a^t v(s) ds \right) \right] \leq u(t)v(t) \exp \left(- \int_a^t v(s) ds \right)$$

D'où par intégration : $G(t) \exp \left(- \int_a^t v(s) ds \right) \leq \int_a^t u(s)v(s) \exp \left(- \int_a^s v(x) dx \right) ds$ car $G(a) = 0$. Or $(\star) \Rightarrow y(t) \leq u(t) + G(t)$. D'où le résultat, compte tenu de $e^{x+y} = e^x e^y$ et de la relation de Chasles.

b. Cas particulier où u est la fonction constante $t \mapsto \lambda$.

$$y(t) \leq \lambda + \int_a^t \lambda v(s) \exp \left(\int_s^t v(x) dx \right) ds = \lambda + \lambda \left[- \exp \left(\int_s^t v(x) dx \right) \right]_{s=a}^{s=t}.$$

c. $v \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+) \Rightarrow \forall t \in I, 0 \leq y(t) \leq \lambda \exp \left(\int_a^{+\infty} v(s) ds \right)$. Donc y est bornée.

d. Si y est bornée sur I , on a : $y(t)v(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(v(t))$. Donc si $v \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$, alors

$$yv \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+). \text{ Posons } g(t) = \left(\lambda + \int_t^{+\infty} y(s)v(s) ds \right) \exp \left(- \int_t^{+\infty} v(s) ds \right).$$

Comme $\int_t^{+\infty} y(s)v(s) ds = \int_t^a y(s)v(s) ds + \int_a^{+\infty} y(s)v(s) ds = -G(t) + C$ où C est une constante réelle, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et l'on a :

$$g'(t) = v(t) \left[-y(t) + \lambda + \int_t^{+\infty} y(s)v(s) ds \right] \exp \left(- \int_t^{+\infty} v(s) ds \right) \geq 0.$$

D'où la croissance de g sur I . Or $g(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \lambda$. Donc $g(t) \leq \lambda$ pour tout $t \in I$.

$$\text{Donc : } \forall t \in I, y(t) \leq \lambda + \int_t^{+\infty} y(s)v(s) ds \leq \lambda \exp \left(\int_t^{+\infty} v(s) ds \right).$$

2. a. $g(x) = f(x) + h(x)$ où $h(x) = \Im m \left(\int_0^x e^{i(x-t)} f(t) \varphi(t) dt \right)$.

$h(x) = \Im m (e^{ix} \psi(x))$ où $\psi : x \mapsto \int_0^x e^{-it} f(t) \varphi(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant

que primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Donc $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $h'(x) = \Im m (f(x) \varphi(x) + i e^{ix} \psi(x)) = \Im m (i e^{ix} \psi(x))$. Donc $h' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$h''(x) = \Im m (i f(x) \varphi(x) - e^{ix} \psi(x)) = f(x) \varphi(x) - h(x).$$

Donc $g''(x) = -g(x)$ car f est I -solution de $(\mathcal{H})$.

b. $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, g(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, |g(x)| \leq |\lambda| + |\mu| = M$. D'où : $\forall x \in I, |f(x)| \leq M + \int_a^x |f(t)\varphi(t)|dt$.

c. De 1.b. et de $\varphi \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ on déduit que, pour tout $x \in I, |f(x)| \leq M \exp\left(\int_I |\varphi|\right)$.
 f est bornée sur I .

d. f et $\sin$ étant bornées, on a $f(t)\varphi(t)\sin(x-t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(\varphi(t))$.

Comme φ est intégrable sur I , il en est de même de $t \mapsto f(t)\varphi(t)\sin(x-t)$.

Comme $\sin(x-t) = \sin(x)\cos(t) - \sin(t)\cos(x)$, on a : $h(x) = \lambda_0 \cos(x) + \mu_0 \sin(x)$
 où : $\lambda_0 = -\int_I f(t)\varphi(t)\sin(t)dt$ et $\mu_0 = \int_I f(t)\varphi(t)\cos(t)dt$.

e. De 2.a. on déduit que : $f(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) - \int_a^x f(t)\varphi(t)\sin(x-t)dt$.

$$f(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) - h(x) + \int_x^{+\infty} f(t)\varphi(t)\sin(x-t)dt.$$

$$f(x) = (\alpha - \lambda_0) \cos(x) + (\beta - \mu_0) \sin(x) + \int_x^{+\infty} f(t)\varphi(t)\sin(x-t)dt.$$

Posons $\lambda = \alpha - \lambda_0, \mu = \beta - \mu_0$. Comme f est bornée, on a :

$$\int_x^{+\infty} f(t)\varphi(t)\sin(x-t)dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\int_x^{+\infty} |\varphi(t)|dt\right). \text{ D'où le résultat.}$$

3. Soit $y \in S_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{H})$. Alors $2y'y'' + 2qyy' = 0$. D'où par intégration :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, y'^2(x) - y'^2(0) + 2 \int_0^x q(t)y(t)y'(t)dt = 0.$$

Par intégration par parties, en posant $a = y'^2(0) + y^2(0)q(0)$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, y'^2(x) + q(x)y^2(x) = a + \int_0^x q'(t)y^2(t)dt.$$

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R}_+, q(x)y^2(x) \leq a + \int_0^x q'(t)y^2(t)dt.$$

L'application de 1.b. aux fonctions positives qy^2 et $\frac{q'}{q}$ (cf. $q > 0$) donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, q(x)y^2(x) \leq a \exp\left(\int_0^x \frac{q'(t)}{q(t)}dt\right) = a \frac{q(x)}{q(0)}.$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+, y^2(x) < \frac{a}{q(0)}$ car $q > 0$. D'où le résultat.

4. Comme $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$, ℓ existe.

$$\forall y \in S(\mathcal{H}), \forall x \in \mathbb{R}_+, y'(x)y''(x) = -(1 + f(x))y(x)y'(x).$$

$$\text{D'où par intégration, } y'^2(x) - y'^2(x_0) = -2 \int_{x_0}^x (1 + f(t))y(t)y'(t)dt.$$

Par intégration par parties :

$$y'^2(x) - y'^2(x_0) = -(1 + f(x))y^2(x) + (1 + f(x_0))y^2(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)y^2(t)dt.$$

Comme $\ell > -1$, fixons x_0 tel que : $\forall x \geq x_0, 1 + f(x) \geq k = \frac{1+\ell}{2} > 0$.

$$\forall x \geq x_0, y^2(x) = \frac{(1 + f(x_0))y^2(x_0) + y'^2(x_0) - y'^2(x)}{1 + f(x)} + \frac{1}{1 + f(x)} \int_{x_0}^x f'(t)y^2(t)dt$$

$$\forall x \geq x_0, y^2(x) \leq \lambda + a \int_{x_0}^x |f'(t)| y^2(t) dt \text{ où } a = \frac{1}{k}, \lambda = a[(1 + f(x_0)y^2(x_0) + y'^2(x_0))].$$

$$\text{Par application du 1.b. } \forall x \geq x_0, y^2(x) \leq \lambda \exp\left(a \int_{x_0}^x |f'|\right) \leq \lambda \exp\left(a \int_{\mathbb{R}_+} |f'|\right).$$

D'où y est bornée puisqu'elle est continue sur le segment $[0, x_0]$.

5. Le changement de fonction inconnue $z(x) = y(x)\sqrt{x}$ donne : $z'' + \left(1 + \frac{K}{x^2}\right)z = 0$

où $K = \frac{1}{4} - \lambda^2$. La fonction $\varphi : x \mapsto Kx^{-2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. On déduit

de 2.e. que $z(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + O\left(\int_x^{+\infty} \frac{K}{t^2} dt\right)$ D'où le résultat.

• Fonctions oscillantes

Toutes les fonctions considérées dans le problème sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$(A, a, b, \alpha, m) \in \mathbb{R}^5$ et vérifie : $m > 0$; $\alpha < 2$; $b > a > 0$; $A > 0$.

$(f, g, p, q, r, s) \in (\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))^6$; $(u, \varphi) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))^2$; on appelle zéro de f tout réel tel que $f(x) = 0$. On dira que f est une **fonction oscillante** sur $]a, +\infty[$ s'il existe une suite strictement croissante que l'on notera $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : (i) $x_0 > a$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n}) = +\infty$; (ii) f s'annule en changeant de signe en tout point x_{2n} ; (iii) $\forall x > a, f(x) = 0 \iff \exists n \in \mathbb{N}, x = x_{2n}$.

Partie I

1. On suppose que f' est intégrable et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$. Si (t_n) est une suite strictement croissante de réels supérieurs à 1, étudier la convergence de la série de terme général : $|f(t_n) - f(t_{n-1})|$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $y'' + \frac{A}{4x^2}y = 0$ en effectuant simultanément le changement de variable $t = \ln(x)$ et le changement de fonction $z(t) = \frac{y(x)}{\sqrt{x}}$. On distinguera les cas $A > 1$; $A = 1$; $A < 1$.

3. a. Transformer l'équation différentielle $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ à l'aide du changement de fonction $z(x) = y(x) \exp\left(\frac{1}{2} \int_1^x p(t) dt\right)$. L'équation transformée est du type $z'' + v(x)z = 0$. Donner v en fonction de p, q et p' .

b. Appliquer cette transformation à $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

On donnera l'équation transformée sous la forme $z'' + \left(1 + \frac{K}{x^2}\right)z = 0$.

c. Montrer que si une solution non nulle f de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annule en x_0 , f change de signe en x_0 .

Partie II

1. (y_1, y_2) désigne une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'' + r(x)y = 0$. On pose : $W_{(y_1, y_2)}(x) = (y_1 y_2' - y_2 y_1')(x)$.

a. Montrer que $W'_{(y_1, y_2)}(x) = 0$ pour tout $x > 0$. En déduire qu'il est possible de choisir (y_1, y_2) de sorte que $W_{(y_1, y_2)} = 1$. On suppose qu'il en est ainsi.

b. À l'aide de la méthode de variation des constantes, montrer que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'' + r(x)y = \varphi(x)$ peuvent

s'écrire sous la forme :

$$y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x) + \int_1^x \varphi(t) \begin{vmatrix} y_1(t) & y_1(x) \\ y_2(t) & y_2(x) \end{vmatrix} dt \text{ avec } W_{(y_1, y_2)}(x) = 1.$$

c. Utiliser cette expression pour résoudre $y'' + my = \varphi(x)$ où $m > 0$. Puis montrer que si f vérifie $f''(x) + mf(x) \geq 0$ pour $x > 0$, alors pour tout $x > 0$, $f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{m}}\right) \geq 0$.

2. a. On suppose dans cette question que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, r(x) > 0$. Effectuer simultanément dans l'équation différentielle $y'' + r(x)y = 0$ le changement de variable : $t = \int_1^x \sqrt{r(\xi)} d\xi + C$ (C est une constante réelle) et le changement de fonction $z(t) = \sqrt[4]{r(x)} y(x)$. On donnera l'équation transformée sous la forme $z'' + (1 + u(t))z = 0$ avec $u(t) = \frac{K_1 r'^2(x) - K_2 r''(x)r(x)}{16r^3(x)}$.

b. Quelle équation différentielle obtient-on en transformant de cette façon, en prenant $C = \frac{2\sqrt{A}}{2-\alpha}$, l'équation $y'' + \frac{A}{x^\alpha} y = 0$ où $A > 0$ et $\alpha < 2$? Vérifier que dans ce cas u est intégrable sur $]1, +\infty[$.

Partie III

On suppose dorénavant que la fonction r vérifie :

$$\exists (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in]1, +\infty[, m_2 \geq r(x) \geq m_1 > 0.$$

f désigne une solution non nulle de $y'' + r(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que f s'annule en changeant de signe en au moins un point de $\left[b, b + \frac{\pi}{\sqrt{m_1}}\right]$ pour tout $b > 1$.

On pourra utiliser la fonction g définie par $g(x) = \sin(\sqrt{m_1}(x - b))$, puis raisonner par l'absurde en construisant le tableau de variations de $W_{(f, g)}$.

2. Si α et β sont deux zéros consécutifs de f , prouver à l'aide d'une solution g bien choisie de $y'' + m_2 y = 0$ que $\beta - \alpha \geq \frac{\pi}{\sqrt{m_2}}$.

3. En déduire que f est oscillante sur $]1, +\infty[$.

4. Dans toute la suite du problème, on suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = R > 0$.

On sait que f est oscillante sur $]1, +\infty[$. Soit (x_{2n}) la suite strictement croissante des zéros de f sur $]1, +\infty[$. En détaillant avec soin la solution proposée, prouver que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n+2} - x_{2n}) = \frac{\pi}{\sqrt{R}}$.

5. Déduire de ce qui précède que toute solution non nulle de $y'' + \frac{A}{x^\alpha} y = 0$, ($A > 0$, $\alpha < 2$) est oscillante. (Justifier avec précision le choix $\alpha < 2$).

6. On note $M_n = \sup\{|f(t)| \mid x_{2n} \leq t \leq x_{2n+2}\}$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! x_{2n+1} \in]x_{2n}, x_{2n+2}[$, $|f(x_{2n+1})| = M_n$.

b. Si r est monotone sur $]1, +\infty[$, prouver que (M_n) est une suite monotone. Préciser son sens de variation par rapport à celui de r . On pourra intégrer la fonction $2f'f'' + 2rf'f$.

c. Si r' est intégrable sur $]1, +\infty[$, montrer que la suite (M_n) converge vers $M > 0$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} |f'(x_{2n})| = M\sqrt{R}$. On pourra utiliser I.1.

Solution**Partie I**

$$1. |f(t_n) - f(t_{n-1})| = \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} f' \right| \leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} |f'| \text{ pour } n \geq 1.$$

f' étant intégrable sur $[1, +\infty[$, la série $\left(\sum \int_{t_{n-1}}^{t_n} |f'| \right)_{n \geq 1}$ converge. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |f(t_n) - f(t_{n-1})|$ converge.

2. À partir de $y(x) = \sqrt{x}z(\ln(x))$ on obtient :

$$y''(x) + \frac{A}{4x^2} y(x) = 0 \iff z''(t) + \frac{A-1}{4} z(t) = 0.$$

- Si $A < 1$ et $\omega = \sqrt{\frac{1-A}{4}}$, alors $z(t) = \lambda e^{\omega t} + \mu e^{-\omega t}$ et $y(x) = (\lambda x^\omega + \mu x^{-\omega})\sqrt{x}$.
- Si $A = 1$, alors $z(t) = \lambda t + \mu$ et $y(x) = (\lambda \ln(x) + \mu)\sqrt{x}$.
- Si $A > 1$, posons $\omega = \sqrt{\frac{A-1}{4}}$, alors $z(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$. Donc $y(x) = \left[\lambda \cos(\omega \ln(x)) + \mu \sin(\omega \ln(x)) \right] \sqrt{x}$.

$$3. \text{ a. } y = e^u z \text{ où } u(x) = \frac{1}{2} \int_1^x p(t) dt.$$

$$\text{Donc : } y' = e^u \left(z' - \frac{1}{2} p z \right) \text{ et } y'' = e^u \left(z'' - \frac{1}{2} p' z - p z' + \frac{p^2}{4} z \right).$$

$$y'' + p y' + q y = 0 \iff z'' + v z = 0 \text{ où } v = q - \frac{1}{4} p^2 - \frac{1}{2} p' \text{ car } e^u \neq 0.$$

b. Dans cette question $z(x) = \sqrt{x}y(x)$. Prenons $p(x) = \frac{1}{x}$ et $q(x) = 1 - \frac{\lambda^2}{x^2}$, alors

$$v(x) = 1 + \frac{K}{x^2} \text{ où } K = \frac{1}{4} - \lambda^2.$$

c. On déduit du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle : $y'' + p y' + q y = 0$ sur $]0, +\infty[$ vérifiant $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. La fonction nulle étant solution, on conclut que c'est la seule solution de l'équation différentielle : $y'' + p y' + q y = 0$ sur $]0, +\infty[$ vérifiant $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Soit f une solution non nulle vérifiant $f(x_0) = 0$, alors $f'(x_0) \neq 0$ et $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} (x - x_0) f'(x_0)$. Donc les fonctions f et $x \mapsto (x - x_0) f'(x_0)$ ont même signe au voisinage de x_0 . Par suite f change de signe en x_0 .

Partie II

1. a. On vérifie que $W'_{(y_1, y_2)}(x) = 0$ pour tout $x > 0$. (cf. aussi le cours sur le wronskien). Donc $W_{(y_1, y_2)}$ est constant et non nul car (y_1, y_2) est libre. Il est possible de choisir (y_1, y_2) de sorte que $W_{(y_1, y_2)} = 1$ en multipliant une des fonctions par une constante réelle non nulle, compte tenu des propriétés du déterminant.

b. La méthode de variation des constantes consiste à chercher des solutions sous la forme : $y(x) = \lambda(x)y_1(x) + \mu(x)y_2(x)$, où $(\lambda, \mu) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))^2$. On a alors :

$$\lambda'(x) \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} + \mu'(x) \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(x) \end{pmatrix}. \text{ D'où } \begin{cases} \lambda'(x) = -\varphi(x)y_2(x), \\ \mu'(x) = \varphi(x)y_1(x). \end{cases}$$

Posons $\lambda = \lambda(1)$ et $\mu = \mu(1)$, on a alors :

$\lambda(x) = \lambda - \int_1^x \varphi(t)y_2(t)dt$ et $\mu(x) = \mu + \int_1^x \varphi(t)y_1(t)dt$. D'où le résultat.

c. Posons $\omega = \sqrt{m}$. Alors $y_1(x) = \cos(\omega x)$ et $y_2(x) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)$ par exemple.

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_+, y(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x) + \frac{1}{\omega} \int_1^x \varphi(t) \sin(\omega(x-t))dt$. $(\star)$

Soit f vérifiant $f''(x) + mf(x) \geq 0$; en posant $\varphi(x) = f''(x) + mf(x)$, on déduit de $(\star)$ que : $f\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right) + f(x) = \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\frac{\pi}{\omega}} \varphi(t) \sin(\omega(t-x))dt \geq 0$ car si $t \in \left[x, x + \frac{\pi}{\omega}\right]$, alors $\sin(\omega(t-x)) \geq 0$ et $\varphi(t) \geq 0$.

2. a. r étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a : $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{r(x)}}$.

$$y(x) = z(t)(r(x))^{-1/4} \Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{4} r'(x)(r(x))^{-5/4} z(t) + (r(x))^{-1/4} z'(t) \frac{dt}{dx}.$$

Donc $y'(x) = -\frac{1}{4} r'(x)(r(x))^{-5/4} z(t) + (r(x))^{1/4} z'(t)$. D'où :

$$y''(x) = -\frac{1}{4} \left[r''(x)(r(x))^{-5/4} - \frac{5}{4} r'^2(x)(r(x))^{-9/4} \right] z(t) - \frac{1}{4} r'(x)(r(x))^{-1/4} z'(t) + (r(x))^{3/4} z''(t) + \frac{1}{4} r'(x)(r(x))^{-3/4} z'(t).$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+, y''(x) + r(x)y(x) = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R}_+, z''(t) + (1 + u(t))z(t) = 0$ avec u définie par $u(t) = \frac{1}{16r^2(x)} [5r'^2(x) - 4r(x)r''(x)]$.

b. Avec $r(x) = Ax^{-\alpha}$, on obtient : $u(t) = \frac{x^{\alpha-2}}{16A} (\alpha^2 - 4\alpha)$.

$$t = \sqrt{A} \int_1^x \zeta^{-\frac{\alpha}{2}} d\zeta + C = \frac{2\sqrt{A}}{2-\alpha} \left[\zeta^{1-\frac{\alpha}{2}} \right]_1^x + C = \frac{2\sqrt{A}}{2-\alpha} x^{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

On a alors $u(t) = \frac{K}{t^2}$ où $K = \frac{(\alpha^2 - 4\alpha)(2-\alpha)^2}{64A^2}$. Donc $u \in \mathcal{L}^1([1, +\infty[, \mathbb{R})$.

Partie III

1. Supposons f de signe constant sur $\left[b, b + \frac{\pi}{\sqrt{m_1}}\right]$ et soit $g(x) = \sin(\sqrt{m_1}(x-b))$.

Alors, pour tout $x \in \left[b, b + \frac{\pi}{\sqrt{m_1}}\right]$, $g(x) \geq 0$ et, quitte à changer f en $-f$, on peut aussi supposer $f(x) \geq 0$. Comme $g''(x) - m_1 g(x) = 0$, on a :

$$W'_{(f,g)}(x) = f(x)g''(x) - f''(x)g(x) = (r(x) - m_1)f(x)g(x) \geq 0.$$

Donc $W_{(f,g)}$ est croissante sur $\left[b, b + \frac{\pi}{\sqrt{m_1}}\right]$. Or $W_{(f,g)}(b) = f(b)\sqrt{m_1} \geq 0$

et $W_{(f,g)}\left(b + \frac{\pi}{\sqrt{m_1}}\right) = -f\left(b + \frac{\pi}{\sqrt{m_1}}\right)\sqrt{m_1} \leq 0$. Donc $W_{(f,g)}$ s'annule dans $\left]b, b + \frac{\pi}{\sqrt{m_1}}\right[$. Donc, d'après le cours, (f, g) est liée. Comme $g \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$

tel que $f(x) = \lambda g(x)$ si $x \in \left[b, b + \frac{\pi}{\sqrt{m_1}}\right]$. Donc $f(b) = 0$. D'où deux cas :

- f n'est pas de signe constant sur $\left[b, b + \frac{\pi}{\sqrt{m_1}}\right]$, alors f s'annule en changeant de signe cf. I.3.c. en un point de $\left]b, b + \frac{\pi}{\sqrt{m_1}}\right[$.

- f s'annule en b en changeant de signe cf. I.3.c.

Dans tous les cas, f s'annule en changeant de signe en un point de $\left[b, b + \frac{\pi}{\sqrt{m_1}}\right]$.

2. Notons que d'après I.3.c. les zéros de f sont isolés et que l'on peut à bon droit, parler de zéros consécutifs. Supposons $\beta - \alpha \leq \frac{\pi}{\sqrt{m_2}}$. La fonction g définie par $g(x) = -\sin(\sqrt{m_2}(x - \beta))$ est positive sur $[\alpha, \beta]$. On a comme en III.1. la fonction $W_{(f,g)}$ croissante. D'où deux cas de figure pour f . Voici le premier.

En changeant f en $-f$, on passe du premier au second cas. Dans le premier cas, $f'(\alpha) > 0$ et $f'(\beta) < 0$; donc $W_{(f,g)}(\alpha) = g(\alpha)f'(\alpha) > 0 = W_{(f,g)}(\beta)$. D'où $W_{(f,g)}$ est nulle sur $[\alpha, \beta]$. Comme à la question précédente, on en déduit que, pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $g(x) = \lambda f(x)$. Donc $g(\alpha) = 0$, ce qui contredit $\beta - \alpha < \frac{\pi}{\sqrt{m_2}}$.

3. D'après III.1. f a une infinité de zéros; d'après III.2. la distance entre deux zéros consécutifs est au plus de $\frac{\pi}{\sqrt{m_1}}$ et au moins de $\frac{\pi}{\sqrt{m_2}}$. D'après I.3.c. f change de signe en chacun de ses zéros. Donc f est oscillante sur $[a, +\infty[$; On définit par récurrence, la suite (x_{2n}) par x_{2n+2} est le plus petit zéro de f (ils sont isolés) supérieur à $x_{2n} + \frac{\pi}{\sqrt{m_2}}$. On a : $\frac{\pi}{\sqrt{m_2}} \leq x_{2n+2} - x_{2n} \leq \frac{\pi}{\sqrt{m_2}}$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $A > 0$ tel que : $x \geq A \Rightarrow R - \varepsilon \leq r(x) \leq R + \varepsilon$. Soit alors N tel que $x_{2N} \geq A$. On déduit de III.3. que, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{\pi}{\sqrt{R + \varepsilon}} \leq x_{2n+2} - x_{2n} \leq \frac{\pi}{\sqrt{R - \varepsilon}}. \text{ Donc } (x_{2n+2} - x_{2n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\sqrt{R}}.$$

5. On a vu en II.2.b. qu'en effectuant le changement de variable $t = \frac{2\sqrt{A}}{2 - \alpha} x^{1 - \frac{\alpha}{2}}$

et le changement de fonction inconnue $z(t) = \left(\frac{A}{x}\right)^{\frac{\alpha}{4}} y(x)$ on obtenait :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, y''(x) + \frac{A}{x^\alpha} y(x) = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, z''(t) + \left(1 + \frac{K}{t^2}\right) z(t) = 0$$

$$\text{où } K = \frac{(\alpha^2 - 4\alpha)(2 - \alpha)^2}{64A^2}.$$

On déduit de III.4. que z est oscillante et que la suite de ses zéros (t_{2n}) vérifie : $t_{2n+2} - t_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi$. La fonction y possède une suite de zéros (x_{2n}) .

$$x_{2n} = \left(\frac{2 - \alpha}{2\sqrt{A}} t_{2n}\right)^{\frac{2}{2 - \alpha}}. \text{ Donc } x_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \text{ si } \alpha < 2.$$

6. a. f étant de signe constant sur $]x_{2n}, x_{2n+2}[$, $f'' = -rf$ en fait de même car $r > 0$. la fonction f' est donc strictement monotone sur $]x_{2n}, x_{2n+2}[$. Comme au III.2. on a : $f'(x_{2n})f'(x_{2n+2}) < 0$. Donc f' s'annule en un unique point de $]x_{2n}, x_{2n+2}[$ noté x_{2n+1} . D'où f a un unique extremum sur $]x_{2n}, x_{2n+2}[$.

b. $2f'f'' + 2rf'f = 2f'(f'' + rf) = 0$. Donc, en intégrant :

$$0 = \int_{x_{2n-1}}^{x_{2n+1}} (2f'f'' + 2rf'f) = f'^2(x_{2n+1}) - f'^2(x_{2n-1}) + \int_{x_{2n-1}}^{x_{2n+1}} 2rf'f'.$$

$$\text{Par intégration par parties, } \int_{x_{2n-1}}^{x_{2n+1}} 2rf'f' = \left[r(t)f^2(t)\right]_{x_{2n-1}}^{x_{2n+1}} - \int_{x_{2n-1}}^{x_{2n+1}} r'f^2.$$

$$\text{Donc : } r(x_{2n+1})M_n^2 - r(x_{2n-1})M_{n-1}^2 = \int_{x_{2n-1}}^{x_{2n+1}} r'f^2.$$

Si r est croissante, r' est positive et donc :

$r(x_{2n+1})M_n^2 - r(x_{2n-1})M_{n-1}^2 \leq \int_{x_{2n-1}}^{x_{2n}} r'(t)M_{n-1}^2 dt + \int_{x_{2n}}^{x_{2n+1}} r'(t)M_n^2 dt$. D'où :
 $r(x_{2n+1})M_n^2 - r(x_{2n-1})M_{n-1}^2 \leq (r(x_{2n}) - r(x_{2n+1}))M_{n-1}^2 + (r(x_{2n+1}) - r(x_{2n}))M_n^2$
 Donc : $r(x_{2n})(M_{n-1}^2 - M_n^2) \geq 0$. *ie.* $M_{n-1} \geq M_n \geq 0$.

La suite (M_n) est décroissante. On montre, de même que si r est décroissante, la suite (M_n) est croissante.

c. Posons $E(t) = f'^2(t) + r(t)f^2(t)$. On a alors $E'(t) = r'(t)f^2(t)$.

Donc $|E'(t)| \leq \frac{1}{m_1}|r'(t)| \cdot |r(t)|f^2(t) \leq \frac{1}{m_1}|r'(t)|E(t)$. D'où : $\left| \frac{E'(t)}{E(t)} \right| \leq \frac{|r'(t)|}{m_1}$.

r' étant intégrable sur $[1, +\infty[$, il en est de même de $\frac{E'}{E}$. Donc il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ln |E(t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \ell$. Or $E(x_{2n+1}) = f'^2(x_{2n+1}) + r(x_{2n+1})f(x_{2n+1})^2 = r(x_{2n+1})M_n^2$.

r' étant intégrable sur $[1, +\infty[$, il existe $R \in \mathbb{R}$ tel que $R \geq m_1$ et $r(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} R$.

Donc $M_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{L}{R} = M^2$ où $L = e^\ell$.

De même : $E(x_{2n}) = f'^2(x_{2n})$. Donc $|f'(x_{2n})| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{L} = M\sqrt{R}$.

12. Calcul différentiel

(E, N) , (F, P) et (G, Q) sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie n, p et q avec, en général $n \geq 2$, U désigne une partie ouverte de E et f une application de U dans F . On choisit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$

bases de E et F , on décompose f sous la forme $f = \sum_{i=1}^p f_i \varepsilon_i$ où, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f_i \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$. $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les notions de limite et de continuité ont été vues au chapitre 3.

I. Généralités

1. Différentielle en un point

1.1. Définition

Théorème et définition

Soit a élément de U ; il existe au plus un élément φ de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \varphi(h) + o(N(h)).$$

Si c'est le cas, on dit que f est différentiable en a , φ est alors appelée différentielle de f en a ou application linéaire tangente à f en a et notée $df(a)$. Ainsi $df(a)$ est élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration

Si φ et ψ sont solutions alors, par différence, $(\varphi - \psi)(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} o(Nh)$, $\varphi - \psi$ est donc lipschitzienne de rapport ε pour tout $\varepsilon > 0$, donc constante nulle car $(\varphi - \psi)(0) = 0$ par linéarité. $\square$

Remarques

- Dans le cas $n = 1$ et $E = \mathbb{R}$, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est isomorphe à F par $\varphi \mapsto \varphi(1)$. Donc φ est l'application $h \mapsto h\alpha$ où $\alpha \in F$, on retrouve la notion de développement limité d'ordre 1 en a avec, bien sûr, $\alpha = f'(a)$. On parlera donc encore de développement limité d'ordre 1 en a . f est différentiable en a si, et seulement si, f admet un développement limité d'ordre 1 en a .
- Si f est différentiable en a alors f est continue en a car φ est continue en 0 comme application linéaire entre espaces vectoriels normés de dimensions finies. La réciproque est fausse comme on l'a vu dans le cas $n = 1$.

1.2. Exemples

• Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors, pour tous a et h dans E on a $f(a+h) = f(a) + f(h)$ donc f est partout différentiable avec $df(a) = f$.

• Si Φ est bilinéaire sur $E \times F$ à valeurs dans G , pour tous (a, b) et (h, k) dans $E \times F$ on a $\Phi(a+h, b+k) = \Phi(a, b) + \Phi(h, b) + \Phi(a, k) + \Phi(h, k)$.

$\varphi : (h, k) \mapsto \Phi(h, b) + \Phi(a, k)$ est linéaire à valeurs dans G et il existe C dans $\mathbb{R}_+$ tel que, pour tout (h, k) dans $E \times F$, $Q[\Phi(h, k)] \leq CN(h)P(k)$ (voir le lemme qui suit). Avec un tel C , $Q[\Phi(h, k)] \leq \frac{C}{2}(\mathcal{N}(h, k))^2$ où $\mathcal{N}$ est la norme $(h, k) \mapsto \max(N(h), P(k))$ sur $E \times F$.

Donc $\Phi(a+h, b+k) \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{=} \Phi(a, b) + \varphi(h, k) + o(\mathcal{N}(h, k))$.

Φ est partout différentiable avec $d\Phi(a, b) : (h, k) \mapsto \Phi(a, k) + \Phi(h, b)$.

1.3. Lemme

Soient $(E_1, N_1), (E_2, N_2), (F, N')$ trois espaces vectoriels normés de dimension finie et u une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F . Alors

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, N'(u(x_1, x_2)) \leq CN_1(x_1)N_2(x_2).$$

Démonstration

Compte tenu des hypothèses, u est continue sur $E_1 \times E_2$ donc en 0. Si l'on note N la norme produit sur $E_1 \times E_2$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$N(x_1, x_2) \leq \alpha \Rightarrow N'(u(x_1, x_2)) \leq 1.$$

Donc $N_1(x_1) \leq \alpha$ et $N_2(x_2) \leq \alpha \Rightarrow N'(u(x_1, x_2)) \leq 1$.

Pour $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ avec $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$, soit $y_i = \alpha \frac{x_i}{N(x_i)}$ avec $i \in \{1, 2\}$.

$$N'(u(y_1, y_2)) \leq 1 \Rightarrow N'(u(x_1, x_2)) \leq \frac{1}{\alpha^2} N_1(x_1)N_2(x_2).$$

L'inégalité est encore vraie si un des x_i est nul. D'où une preuve du lemme. $\square$

2. Dérivée selon un vecteur

Soient $a \in U$ et $h \in E$, comme a est centre d'une boule ouverte contenue dans U , il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tel que $|t| < \delta$ alors $a + th \in U$.

Avec un tel δ , $\varphi_h : t \mapsto f(a + th)$ est définie sur $] -\delta, \delta[$.

$t \mapsto a + th$ est un paramétrage de la droite $a + \mathbb{R}h$ (si $h \neq 0$), on se ramène donc, le long de cette droite, à une fonction de la variable réelle t .

2.1. Définition

On dit que f admet en a une dérivée selon h si φ_h est dérivable en 0, on note dans ce cas $D_h f(a) = \varphi'_h(0)$ et on l'appelle dérivée de f en a selon le vecteur h .

Remarques

• Si h est nul alors f est en tout point dérivable selon h car φ_h est constante et $D_h f(a) = 0$

• Sous réserve d'existence $D_h f(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$.

2.2. Théorème

Si f est différentiable en a alors f admet en a une dérivée selon tout vecteur et $D_h f(a) = df(a)(h)$.

Démonstration

Si $h \in E$ et $t \in \mathbb{R}$ alors $f(a+th) - f(a) \underset{t \rightarrow 0}{=} df(a)(th) + o(N(th)) \underset{t \rightarrow 0}{=} tdf(a)(h) + o(t)$
 par linéarité de $df(a)$, d'où $\frac{f(a+th) - f(a)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0, t \neq 0]{} df(a)(h)$. $\square$

3. Définition des dérivées partielles

Si $a \in U$ et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on dit que f admet en a une j -ième dérivée partielle relativement à $\mathcal{E}$ si elle admet en a une dérivée selon le vecteur e_j . On la note dans ce cas $D_j f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ ie. $D_j f(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$.

Exemples

1. Si f est différentiable en a alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_j f(a)$ existe et est égale à $df(a)(e_j)$.

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Les restrictions de f aux droites $(0, 0) + \mathbb{R}(1, 0)$ et $(0, 0) + \mathbb{R}(0, 1)$ sont nulles donc f admet en $(0, 0)$ des dérivées partielles et $D_1 f(0, 0) = D_2 f(0, 0) = 0$.

Par contre $f(x, x) = \frac{1}{2} \not\xrightarrow[x \rightarrow 0]{} f(0, 0)$ donc f est discontinue en $(0, 0)$.

⤵ || L'existence de dérivées partielles n'assure pas la continuité et donc pas la différentiabilité.

4. Applications de classe $\mathcal{C}^1$ **4.1. Définition**

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U relativement à $\mathcal{E}$ si, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_j f$ existe et est continue sur U .

Exemples

1. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ on a vu que, en tout point a de E , $df(a)$ existe et est égale à f , donc pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_j f$ est constante égale à $f(e_j)$ donc continue sur E . La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E relativement à $\mathcal{E}$.

2. Si Φ est bilinéaire sur $E \times F$ à valeurs dans G , pour tout (a, b) dans $E \times F$, $d\Phi(a, b) : (h, k) \mapsto \Phi(a, k) + \Phi(h, b)$, donc $d\Phi$ est continue sur $E \times F$ en tant qu'application linéaire entre les espaces vectoriels de dimension finie $E \times F$ et $\mathcal{L}(E \times F, G)$. Par suite toutes les dérivées partielles existent et sont continues sur $E \times F$. L'application Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $E \times F$.

4.2. Théorème

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U relativement à $\mathcal{E}$, alors f est différentiable en tout point a de U avec $df(a) : h \mapsto \sum_{j=1}^n D_j f(a) h_j$ si $h = \sum_{j=1}^n h_j e_j$.

Démonstration (non exigible)

On se limite, afin d'alléger les notations, au cas où $E = \mathbb{R}^2$, N est la norme produit et $a = (0, 0)$. On peut supposer $f(0, 0) = D_1 f(0, 0) = D_2 f(0, 0) = 0$, quitte à remplacer f par $(h, k) \mapsto f(h, k) - f(0, 0) - hD_1 f(0, 0) - kD_2 f(0, 0)$.

Reste à montrer $f(h, k) \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{=} o((h, k))$.

Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons $\eta > 0$ tel que sur la boule $B = B((0, 0), \eta)$ on ait $P(D_1 f) \leq \varepsilon$ et $P(D_2 f) \leq \varepsilon$.

Si $(h, k) \in B$ on a $P[f(h, k)] \leq P[f(h, k) - f(0, k)] + P[f(0, k)] \leq \varepsilon[|h| + |k|]$ par l'inégalité des accroissements finis appliquée aux fonctions $t \mapsto f(t, k)$ et $t \mapsto f(0, t)$, d'où $P[f(h, k)] \leq 2\varepsilon N(h, k)$ et le résultat. $\square$

L'expression de df prouve alors le corollaire suivant :

4.3. Corollaire

| Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ relativement à $\mathcal{E}$ sur U alors df est continue sur U .

4.4. Corollaire et définition

| Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U relativement à $\mathcal{E}$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U relativement à toute base de E . On dira donc simplement que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ou continûment différentiable sur U . On note $\mathcal{C}^1(U, F)$ l'ensemble de telles applications.

Démonstration

Si $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une base de E alors, pour tout j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, pour tout a dans U , f est dérivable en a selon le vecteur e'_j et $D_{e'_j} f(a) = df(a)(e'_j)$, $D_{e'_j} f$ est donc continue sur U et f est de classe $\mathcal{C}^1$ relativement à $\mathcal{E}'$. $\square$

II. Opérations sur l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$

1. Théorème

| $\mathcal{C}^1(U, F)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et, pour tout a dans U , $f \mapsto df(a)$ est une application linéaire entre $\mathcal{C}^1(U, F)$ et $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration

Découle des définitions de $\mathcal{C}^1(U, F)$, des dérivées partielles, de la linéarité de la notion de limite et la structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de $\mathcal{C}(U, F)$. $\square$

2. Théorème de composition

| Si $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$, $g \in \mathcal{C}^1(V, G)$ où V est une partie ouverte de F contenant $f(U)$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U avec, pour tout a dans U , l'égalité

$$[d(g \circ f)](a) = \left(dg[f(a)] \right) \circ [df(a)].$$

Démonstration

Posons $\varphi = \left(dg[f(a)] \right) \circ [df(a)]$, alors $\varphi \in \mathcal{L}(E, G)$.

Si $(a, h) \in E^2$ on a $f(a + h) = f(a) + df(a)(h) + P(h)\varepsilon(h) = f(a) + P(h)M(h)$ où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon = 0$ et M bornée.

$(g \circ f)(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} g[f(a)] + dg[f(a)][P(h)M(h)] + o[P(h)M(h)]$ d'où

$(g \circ f)(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} g[f(a)] + \varphi(h) + P(h)\varphi[\varepsilon(h)] + P(h)o[M(h)]$ ie.

$(g \circ f)(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} g[f(a)] + \varphi(h) + o(N(h));$

$g \circ f$ est donc différentiable en a avec $[d(g \circ f)](a) = \varphi$.

Si $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_j(g \circ f)(a)$ existe, est égale à $\varphi(e_j)$ ie. $D_j(g \circ f)(a) = dg[f(a)] [D_j f(a)]$.
Par composition $D_j(g \circ f)$ est continue sur U et $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U . $\square$

3. Applications du théorème de composition

3.1. Applications coordonnées

On rappelle que si $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une base de F alors $f = \sum_{i=1}^p f_i \varepsilon_i$ où, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f_i \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$, $f_1, \dots, f_p$ sont les applications coordonnées de f relativement à $\mathcal{F}$.

Théorème

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si, et seulement si, pour tout i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, f_i est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U . Dans ce cas : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_j(f_i) = (D_j f)_i$.

Démonstration

La structure d'espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(U, F)$ et le lien entre f et les f_i prouvent que, si les f_i sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , alors f aussi.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , en notant, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\varepsilon_i^\star$ l'application i -ième coordonnée relativement à $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$, on a $f_i = \varepsilon_i^\star \circ f$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les f_i sont donc toutes de classe $\mathcal{C}^1$ sur U . De plus, si $a \in E$,

$D_j f_i(a) = [d(\varepsilon_i^\star \circ f)](a)(e_j) = (d\varepsilon_i^\star[f(a)] \circ df(a))(e_j) = \varepsilon_i^\star[D_j f(a)] = (D_j f)_i(a)$
car $d\varepsilon_i^\star$ est constante égale à $\varepsilon_i^\star$ par linéarité. $\square$

3.2. Dérivation

Théorème

Si $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, U)$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout t de I , $(f \circ \varphi)'(t) = df[\varphi(t)] [\varphi'(t)]$.

Démonstration

Si, par exemple, $I = [a, b[$, $f \circ \varphi$ est déjà de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ par le théorème de composition. De plus, si $t \in]a, b[$, $[f \circ \varphi]'(t) = d(f \circ \varphi)(t)(1) = [df[\varphi(t)] \circ d\varphi(t)](1)$
d'où $[f \circ \varphi]'(t) = df[\varphi(t)] [\varphi'(t)]$.

Par continuité de $df \circ \varphi$ et φ' , $[f \circ \varphi]'(t) \xrightarrow{t \rightarrow a^+} df[\varphi(a)] [\varphi'(a)]$.

Comme $f \circ \varphi$ est continue sur $[a, b[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $[f \circ \varphi]'(a) = df[\varphi(a)] [\varphi'(a)]$. $\square$

Corollaire

Si $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b], U)$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$ avec $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b df(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Rappels

• Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Supposons f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et à valeurs dans $\mathbb{K}$, φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\varphi(I) \subset U$. Alors $F \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.
Notons $F(t) = (f \circ \varphi)(t) = f(x(t), y(t), z(t))$. Alors, pour tout $t \in I$,

$$F'(t) = D_1 f(\varphi(t))x'(t) + D_2 f(\varphi(t))y'(t) + D_3 f(\varphi(t))z'(t).$$

- Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{K})$ et $F : x \mapsto \int_0^x f(t, x) dt$.

Considérons $\Phi : (x, y) \mapsto \int_0^x f(t, y) dt$, sur $\mathbb{R}^2$ on a $D_1 \Phi(x, y) = f(x, y)$ et

$D_2 \Phi(x, y) = \int_0^x D_2 f(t, y) dt$, $D_1 \Phi$ et $D_2 \Phi$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ donc Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit aussi $\Psi : x \mapsto (x, x)$, Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Comme $F = \Phi \circ \Psi$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $F'(x) = (d\Phi[\Psi(x)])(\Psi'(x))$

d'où $F'(x) = \int_0^x D_2 f(t, x) dt + f(x, x)$.

Remarque : si $F(x) = \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$ avec $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ne pas procéder comme précédemment pour montrer que $F'' + F = f$. Poser plutôt

$F(x) = \Im \left(\int_0^x f(t) e^{i(x-t)} dt \right) = \Im \left(e^{ix} \int_0^x f(t) e^{-it} dt \right)$ et utiliser les théorèmes sur les primitives de fonctions continues sur un intervalle. Voir un travail dirigé du chapitre 11.

3.3. Théorème

Soient f_1 et f_2 deux applications différentiables en un point a d'un ouvert U d'un espace vectoriel normé de dimension finie respectivement dans F_1 et F_2 deux espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit B une application bilinéaire de $F_1 \times F_2$ dans G . L'application g de U dans G définie par $g(x) = B(f_1(x), f_2(x))$ est différentiable en a et

$$dg(a) : h \mapsto B(f_1(a), df_2(a).h_2) + B(df_1(a).h_1, f_2(a)).$$

Démonstration

Notons que $g = B \circ f$ où $f : x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$. L'application B est différentiable en tout point d'après l'exemple I.1.2. et f est différentiable en a avec $df(a) : h \mapsto (df_1(a).h_1, df_2(a).h_2)$. Le théorème découle du théorème II.2. $\square$

4. Jacobienne, jacobien

4.1. Définition

Si $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$ et $a \in U$ on appelle jacobienne de f en a (resp. jacobien de f en a) la matrice, notée $J_a(f)$, de l'application linéaire $df(a)$ relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ (resp. le déterminant de cette matrice si $n = p$).

Remarque

$J_a(f) = (D_j f_i(a)) \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ car, avec les notations précédentes,

$$\varepsilon_i^* [df(a)(h)] = \varepsilon_i^* \left[\sum_{j=1}^n D_j f(a)(h_j) \right] = \sum_{j=1}^n D_j f_i(a)(h_j) \text{ si } h = \sum_{j=1}^n h_j \varepsilon_j.$$

Exemples

1. En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, $f : z \mapsto e^z$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$, sa jacobienne en $z = x + iy$ relativement à la base $(1, i)$ est facilement $\begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix}$ soit encore $e^x \begin{pmatrix} \cos(y) & -\sin(y) \\ \sin(y) & \cos(y) \end{pmatrix}$, son jacobien en z est $e^{2\Re(z)}$ donc $df(z) \in \text{GL}(\mathbb{C})$.

2. Si $\Phi(\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$, alors Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et sa jacobienne en (ρ, θ) est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix}$, son jacobien est ρ , donc $d\Phi(\rho, \theta) \in \text{GL}(\mathbb{R}^2)$ si, et seulement si, $\rho \neq 0$.

4.2. Théorème

Si $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$, $g \in \mathcal{C}^1(V, G)$ où V est une partie ouverte de F contenant $f(U)$, alors $J_a(g \circ f) = J_{f(a)}(g) \cdot J_a(f)$.

Démonstration

Elle est une conséquence immédiate du théorème I.B.2. et du lien entre composée d'applications linéaires et produit des matrices de ces applications dans des bases. $\square$

On en déduit la **formule de la chaîne**.

Si $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ et $G = \mathbb{R}^p$, le théorème précédent se traduit en notant : $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, $g(y) = (g_1(y), \dots, g_p(y))$, $h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x))$ où $h = g \circ f$,

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

III. Algèbre $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{K})$

1. Structure

1.1. Théorème

1. $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre sur laquelle $f \mapsto df$ est une application linéaire vérifiant en outre $d(fg) = f dg + g df$.
2. Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{K}^\star)$ alors $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U avec $d\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2} df$.

Démonstration

1. On sait déjà que $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et que $f \mapsto df$ est linéaire. Soient f et g éléments de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{K})$, alors $F : a \mapsto (f(a), g(a))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{K}^2$, $\Phi : (\lambda, \mu) \mapsto \lambda\mu$ est bilinéaire donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{K}^2$. Par composition $\Phi \circ F$, i.e. fg , est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

De plus, si $a \in U$, $d(fg)(a) = \left(d\Phi[F(a)]\right) \circ dF(a) = f(a) dg(a) + g(a) df(a)$ car $d\Phi(\lambda, \mu)(h, k) = \lambda k + \mu h$.

2. $I : z \mapsto \frac{1}{z}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{K}^\star$ facilement, par composition $I \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U avec $d(I \circ f) = (dI \circ f) \circ df = -\frac{1}{f^2} df$. $\square$

Une application directe du théorème est :

1.2. Corollaire

Si f et g sont éléments de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{K})$ et si g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U avec $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}$.

1.3. Corollaire

Si on note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées relativement à $\mathcal{E}$ de tout élément x de E , toute fonction rationnelle $\frac{P}{Q}$ en les x_i est de classe $\mathcal{C}^1$ sur la partie ouverte $U = \{x \in E \mid Q(x) \neq 0\}$.

Démonstration

U est une partie ouverte en tant qu'image réciproque par Q continue de la partie ouverte $\mathbb{K}^\star$ de $\mathbb{K}$, le reste découle directement du théorème. $\square$

Exemples

1. $\Delta : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $A \mapsto \det(A)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ car polynomiale en les $a_{i,j}$. Pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, le développement de $\det(A)$ selon la i -ième ligne montre que $\det(A) = a_{i,j} \Delta_{i,j}(A) + \mu_{i,j}$ où $\Delta_{i,j}(A)$ désigne le cofacteur i, j et $\mu_{i,j}$ est une constante quand $a_{i,j}$ varie.

$$D_{i,j} \Delta(A) = \Delta_{i,j}(A) \text{ puis } d\Delta(A)(H) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} D_{i,j} \Delta(A) h_{i,j} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \Delta_{i,j}(A) h_{i,j}$$

d'où $d\Delta(A) : H \mapsto \text{tr} [{}^t \text{Com}(A)H]$ où $\text{Com}(A)$ désigne la comatrice de A .

2. $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie ouverte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ en tant qu'image réciproque par Δ de $\mathbb{K}^\star$, $A \mapsto A^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert car sa coordonnée i, j est $A \mapsto \frac{\Delta_{i,j}(A)}{\Delta(A)}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ en tant que fonction rationnelle en les $a_{i,j}$.

2. Gradient

2.1. Théorème et définition

Soit $E, (\cdot | \cdot)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Pour tout $a \in U$, il existe un unique élément de E , noté $\text{grad } f(a)$ ou $\nabla f(a)$ tel que :

$$df(a)(h) = (\text{grad } f(a) | h).$$

$\text{grad } f$ est une application continue de U dans E appelée gradient de f . Si $\mathcal{E}$ est une base orthonormée de E les coordonnées de $\text{grad } f$ relativement à $\mathcal{E}$ sont $(D_1 f, \dots, D_n f)$.

Démonstration

Pour tout $a \in E$, $df(a)$ est une forme linéaire sur E et $\theta : E \rightarrow E^\star$, $x \mapsto (x | \cdot)$ est l'isomorphisme canonique d'espaces vectoriels, d'où l'existence et l'unicité de $\text{grad } f(a)$. Si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_i f(a) = df(a)(e_i) = (\text{grad } f(a) | e_i) = (\text{grad } f)_i(a)$. $\square$

2.2. Théorème : interprétation du gradient

$\mathbb{R}^2$ étant muni de sa structure euclidienne canonique, soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on appelle **courbe de niveau** l'ensemble d'équation $f(x) = \lambda$. Soient $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla f(a) \neq 0$ et γ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ défini sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\|\gamma'(t)\| = 1$ pour tout t .

(i) $\nabla f(a)$ est dans la direction de « plus grande pente » de f en a .

(ii) Si $\gamma'(0)$ est colinéaire à $\nabla f(a)$ et de même sens, alors pour λ proche de $f(a)$, il existe un unique t voisin de 0 tel que $x = \gamma(t) \in \mathcal{C}_\lambda$.

Démonstration

(i) $F : t \mapsto f(\gamma(t))$ est telle que $F'(0) = df(a) \cdot \gamma'(0) = (\nabla f(a) | \gamma'(0))$.

Comme $\|\gamma'(0)\| = 1$, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$F'(0) \in [-\|\nabla f(a)\|, \|\nabla f(a)\|]$. Le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de prouver que la valeur maximale $\|\nabla f(a)\|$ est obtenue si, et seulement si, $\gamma'(0)$ est colinéaire et de même sens que $\nabla f(a)$.

$F'(0) = 0$ si, et seulement si, l'arc γ est orthogonal en a à $\nabla f(a)$ i.e. tangent en a à la courbe de niveau de f passant par ce point.

(ii) Il découle de l'hypothèse que $F'(0) = \|\nabla f(a)\|$.

Par continuité de F' , il existe $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$ tel que : $\forall t \in I, F'(t) > 0$.

Donc F est strictement croissante de I sur $F(I) = J$ intervalle ouvert contenant $F(0) = f(a)$. Pour tout $\lambda \in J$, il existe un unique $t \in I$ tel que $F(t) = f \circ \gamma(t) = \lambda$.

$t = F^{-1}(\lambda)$. Comme F^{-1} est dérivable sur J et comme $(F^{-1})' = \frac{1}{F' \circ F^{-1}}$ le point

$$x(\lambda) = \gamma(F^{-1}(\lambda)) \in \mathcal{C}_\lambda \text{ et } x'(\lambda) = \frac{\gamma'(0)}{F'(0)}.$$

$$\text{Donc } x(\lambda) - x(\alpha) \underset{\lambda \rightarrow \alpha}{=} \frac{\gamma'(0)}{F'(0)}(\lambda - \alpha) + o(\lambda - \alpha).$$

$$\text{D'où } \|x(\lambda) - \alpha\| \underset{\lambda \rightarrow \alpha}{\sim} \frac{|\lambda - \alpha|}{\|\nabla f(a)\|} \text{ car } \|\gamma'(0)\| = 1. \square$$

Commentaires

Ce théorème permet de faire le lien entre le gradient défini précédemment et celui utilisé en physique. Sa « direction » orthogonale aux courbes de niveau est celle dans laquelle la fonction (altitude, pression...) augmente le plus vite lors d'un déplacement à vitesse donnée (ici égale à 1). Sa norme est inversement proportionnelle à l'écartement des courbes de niveau.

Ce résultat se généralise aisément à $\mathbb{R}^n, n \geq 3$.

2.3. Théorème

Soient E un espace euclidien, U un ouvert de E et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ différentiable sur U . Si X est une ligne de niveau de f , les vecteurs tangents à X au point $x \in X$ sont orthogonaux aux vecteurs $\nabla f(x)$.

Démonstration

On reprend les notations de II.3.4. avec $t_0 = x$, $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

$$(\star) \iff (\nabla f(x) | v) = 0. \square$$

3. Accroissements finis**3.1. Théorème**

Si U est une partie ouverte de E , $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in U^2$ tel que $[a, b] \subset U$. Il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $f(b) - f(a) = df(1 - \theta)a + \theta b \cdot (b - a)$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction g définie par $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f((1 - t)a + tb)$. Il existe $\theta \in]0, 1[$, $g(1) - g(0) = (1 - 0)g'(\theta)$. $\square$

3.2. Théorème

| Si U est une **partie ouverte et convexe** de E , $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{K})$ et, pour tout x dans U , $df(x)$ lipschitzienne de rapport k , alors, pour tout $(a, b) \in U^2$,
 $|f(b) - f(a)| \leq kN(b - a)$.

Démonstration

Soit $(a, b) \in U^2$, alors $[a, b] \subset U$ par convexité et, si pour tout $t \in [0, 1]$ on pose $\varphi(t) = tb + (1 - t)a$, on a $F : t \mapsto f(\varphi(t))$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ par composition, avec pour tout $t \in [0, 1]$, $F'(t) = df(\varphi(t))(b - a)$ d'où $|F'| \leq kN(b - a)$ par hypothèse et $|f(b) - f(a)| = \left| \int_0^1 F' \right| \leq kN(b - a)$. $\square$

3.3. Corollaire

| Si U est une **partie ouverte et convexe** de E , pour qu'une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{K}$ soit constante sur U il faut et il suffit que sa différentielle soit nulle sur U .

Démonstration

Si f est constante sur U sa différentielle est clairement partout nulle. La réciproque découle immédiatement du théorème. $\square$

4. Extremum local

f désigne un élément de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

4.1. Définition

| Un point a de U est dit **point critique** de f si $df(a)$ est nulle.

4.2. Théorème

| Si f admet en a un extremum local, alors c'est un point critique.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset U$. Si h est un vecteur unitaire alors $f \mapsto f(a + th)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$ admet un extremum local en 0 donc sa dérivée en ce point, $D_h f(a)$, est nulle et c'est $df(a)(h)$, d'où le résultat. $\square$

Remarque : Ce n'est bien sûr qu'une condition nécessaire, comme on l'a déjà vu si $E = \mathbb{R}$.

5. Vecteur tangent à une partie d'un espace vectoriel normé

5.1. Définition

| Soient X une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E et $x \in E$. Un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$, un arc γ défini sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeurs dans X tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

5.2. Définition

| Si F est une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, on appelle surface S l'ensemble défini par $F(x, y, z) = 0$.

5.3. Plan tangent à une surface définie implicitement

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$, différentiable en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ où $df(M_0) \neq 0$. Soit S la surface d'équation : $F(x, y, z) = 0$.

Si l'on considère un arc tracé sur S , passant par M_0 et défini par $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\gamma(I) \subset S$, $\gamma(t_0) = M_0$ et γ dérivable en t_0 .

$$\forall t \in I, f(\gamma(t)) = 0 \Rightarrow df(M_0) \circ \gamma'(t_0) \quad (\star).$$

Si $\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$, comme $df(M_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(M_0), \frac{\partial F}{\partial y}(M_0), \frac{\partial F}{\partial z}(M_0) \right) = 0$ on a :

$$(\star) \iff \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(M_0) + \mu \frac{\partial F}{\partial y}(M_0) + \nu \frac{\partial F}{\partial z}(M_0) = 0.$$

Le plan affine tangent à S en M_0 a pour équation :

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(M_0) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(M_0) + (z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z}(M_0) = 0.$$

En particulier si S a une équation de la forme : $z = f(x, y)$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, en posant $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ on obtient une équation du plan affine tangent à S :

5.4. Théorème

Le plan affine tangent en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ à la surface S définie par $z = f(x, y)$ où f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ est d'équation : $(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = z - z_0$.

IV. Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$

1. Généralités

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application $D_i : \mathcal{C}^1(U, F) \rightarrow \mathcal{C}(U, F)$, $f \mapsto D_i f$ est linéaire.

1.1. Définition

On définit par récurrence sur k l'ensemble $\mathcal{C}^k(U, F)$ par :

$$f \in \mathcal{C}^k(U, F) \iff f \in \mathcal{C}^1(U, F) \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, D_i f \in \mathcal{C}^{k-1}(U, F)$$

On dit dans ce cas que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U .

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \geq 1$.

Remarque

$$f \in \mathcal{C}^k(U, F) \iff f \in \mathcal{C}^1(U, F) \text{ et } df \in \mathcal{C}^{k-1}(U, \mathcal{L}(E, F)).$$

De cette définition découle directement le

1.2. Théorème

$\mathcal{C}^k(U, F)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel dont $\mathcal{C}^{k-1}(U, F)$ est un sous-espace vectoriel, et, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, D_i est une application linéaire de $\mathcal{C}^k(U, F)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(U, F)$, df une application linéaire de $\mathcal{C}^k(U, F)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(U, \mathcal{L}(E, F))$.

Par exemple f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si, et seulement si, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, l'application $D_i D_j f = (D_i \circ D_j)(f)$ existe et est continue sur U .

1.3. Théorème de Schwarz

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, les restrictions de D_i et D_j à $\mathcal{C}^2(U, F)$ commutent i.e. pour toute f dans $\mathcal{C}^2(U, F)$, on a $D_i D_j f = D_j D_i f$.

Démonstration (*non exigible*)

On peut supposer f de deux variables car $x_3, \dots, x_n$ sont fixées dans cette question.

La propriété découle du fait que l'on peut définir, sous ces hypothèses, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)$

$$\text{par la formule : } \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) = \lim_{\substack{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0) \\ h_1 h_2 \neq 0}} g(h_1, h_2) \quad (1).$$

$$\text{où } g(h_1, h_2) = \frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2)}{h_1 h_2}.$$

La symétrie de cette définition fait apparaître la propriété d'interversion. Pour établir (1), en prenant les coordonnées dans une base de F , on se ramène à la même propriété pour les fonctions à valeurs réelles. Utilisons deux fois le théorème des accroissements finis.

La fonction $\varphi : h_1 \mapsto f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2)$ est dérivable au voisinage de 0 et $\varphi'(h_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + h_1, a_2)$.

On suppose les hypothèses d'existence des dérivées partielles vérifiées sur V défini par $V = \{(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \mid |h_1| < \alpha \text{ et } |h_2| < \alpha\}$.

Si $(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \in V$, la fonction φ est dérivable entre 0 et h_1 et il existe k_1 entre 0 et h_1 tel que : $\varphi(h_1) - \varphi(0) = h_1 \varphi'(k_1)$. Donc

$$g(h_1, h_2) = \frac{\varphi'(k_1)}{h_2} = \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + k_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + k_1, a_2) \right).$$

$$\text{Il existe } k_2 \text{ entre 0 et } h_2 \text{ tel que : } g(h_1, h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + k_1, a_2 + k_2).$$

La continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ en (a_1, a_2) permet d'écrire que, pour $\varepsilon > 0$,

$$\exists \alpha > 0, |h_1| \leq \alpha, |h_2| \leq \alpha \Rightarrow \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2) \right| \leq \varepsilon$$

a fortiori, $|k_1| \leq \alpha$ et $|k_2| \leq \alpha$, donc $\left| g(h_1, h_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2) \right| \leq \varepsilon$ dans les mêmes conditions, et le résultat voulu. $\square$

Remarque

Ce théorème peut aider à prouver qu'une fonction n'est pas deux fois différentiable.

$$\text{Soit } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Toutes les dérivées partielles secondes existent et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$.

D'où $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$ alors que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ puisque $f(x, y) = -f(y, x)$. Il découle du théorème de Schwarz que f n'est pas deux fois différentiable en $(0, 0)$.

2. Algèbre $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{K})$ **2.1. Théorème**

$\mathcal{C}^k(U, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre et, si $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{K}^\star)$, alors $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration

On connaît déjà la structure d'espace vectoriel et la fonction constante égale à 1 est clairement élément de $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{K})$. Montrons la stabilité par produit par récurrence sur k , le cas $k = 1$ ayant déjà été traité. Supposons que $\mathcal{C}^{k-1}(U, \mathbb{K})$ soit une $\mathbb{K}$ -algèbre et choisissons f et g dans $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{K})$.

On a $d(fg) = f dg + g df \in \mathcal{C}^{k-1}(U, \mathbb{K})$ car f, g, df et dg en sont éléments et par hypothèse de récurrence. Par suite $fg \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{K})$ et la fin de la récurrence.

On procède exactement de même avec $\frac{1}{f}$ car $d\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2} df$. $\square$

2.2. Corollaire

Toute fonction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ en les coordonnées x_i de x relativement à une base est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur la partie ouverte $\{x \in E \mid Q(x) \neq 0\}$.

Démonstration

U est ouverte comme image réciproque par Q continue de $\mathbb{K}^\star$ partie ouverte de $\mathbb{K}$ et le fait que F soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ découle directement du théorème. $\square$

Exemples

1. Identifions $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. Alors, si $z = x + iy$, on a $e^z = e^x e^{iy}$ donc $z \mapsto e^z$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$ en tant que produit de $z \mapsto e^x$ et $z \mapsto e^{iy}$.

2. Rappelons que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie ouverte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et que, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, tout coefficient i, j de A^{-1} est rationnel en les $a_{i,j}$, donc $A \mapsto A^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

3. Différentielle seconde

3.1. Définition

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et U un ouvert de E . Soit f une application de U dans F . On dit que f est deux fois différentiable en $a \in U$ si elle est différentiable au voisinage de a et si df est, elle même différentiable en a . Dans ce cas, on appelle différentielle seconde de f l'application $d^2f : U \rightarrow \mathcal{L}(E, E; F)$ définie par :

$$d^2f(x)(h, k) = (d(df)(x)(h))(k).$$

Si de plus, l'application $x \mapsto d^2f(x)$ est continue sur U , on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

Exemple. Dans le cas où f est une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F on a vu que $df(x_1, x_2)(h_1, h_2) = f(x_1, h_2) + f(h_1, x_2)$.

(h_1, h_2) étant fixé, la différentielle de $\theta : (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, h_2) + f(h_1, x_2)$ est :

$$d\theta(x_1, x_2)(k_1, k_2) = f(k_1, h_2) + f(h_1, k_2).$$

D'où $d^2f(x_1, x_2)(h, k) = f(k_1, h_2) + f(h_1, k_2)$

La différentielle seconde d'une application bilinéaire est constante.

3.2. Théorème

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application différentiable sur U et deux fois différentiable en a . Alors, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$d^2f(a)(h, k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j.$$

3.3. Définition

La matrice jacobienne de ∇f en a s'appelle **matrice hessienne** de f en a et est notée $H_f(a)$. Donc $H_f(a) = J_{\nabla f}(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.
avec $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$.

Exemples

(i) Soient $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto (x|a) + b$. Montrer que f est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et préciser sa hessienne.

En tant qu'application affine, $\forall x \in \mathbb{R}^n, \nabla f(x) = a$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n, H_f(x) = 0$.

(ii) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (Ax|x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer $H_f(x)$.

Par théorème de composition, f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n, \nabla f(x) = 2Ax$. ∇f étant linéaire, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n, H_f(x) = 2A$.

Conséquence du théorème de Schwarz

On suppose $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. On a alors

$$d^2 f(a)(h, k) = {}^t h H_f(a) k = (h | H_f(a) k).$$

3.4. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$.
 $f(x+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x) + (\nabla f(x)|h) + \frac{1}{2}(H_f(x)(h)|h) + o(\|h\|^2)$
soit aussi
 $f(x+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x) + \nabla f(x)^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(x) h + o(\|h\|^2).$

Démonstration non exigible

Cas particulier où $n = 2$

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$, $A = (a, b) \in U$ et $H = (h, k)$ tel que $A + H \in U$. Si $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et si N est une norme sur $\mathbb{R}^2$, alors :

$$f(A+H) \underset{H \rightarrow 0}{=} f(A) + ph + qk + \frac{1}{2} [rh^2 + 2shk + tk^2] + o(N(H))^2$$

où $p = D_1 f(A)$, $q = D_2 f(A)$, $r = D_1^2 f(A)$, $s = D_1 D_2 f(A)$, $t = D_2^2 f(A)$.

3.5. Position du graphe de f par rapport à son approximation affine

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$.

Si f est différentiable en $a \in U$, $T(x) = f(a) + (\nabla f(a)|x-a)$ est son approximation affine.

Théorème : condition nécessaire du second ordre

On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U . Si f a un minimum local en $a \in U$, alors a est un point critique et $H_f(a) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Démonstration

Soit $x \in U$ tel que $[a, x] \subset U$. La fonction φ définie par

$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f((1-t)a + tx)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ par composition.

$\varphi'(t) = (\nabla f((1-t)a + tx)|x-a)$ puis $\varphi''(t) = (H_f((1-t)a + tx)(x-a)|x-a)$.

Si f a un minimum local en $a \in U$, alors la condition nécessaire du second ordre pour une fonction d'une variable réelle est vérifiée en ce point. Donc $\varphi''(0) \geq 0$.

Donc $(H_f(a)(x-a)|x-a) \geq 0$. Ce qui implique $H_f(a) \in S_n^+(\mathbb{R})$. $\square$

Théorème : condition suffisante du second ordre

On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U . Si $H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{--}(\mathbb{R})$), alors $f(x) > T(x)$ (resp. $f(x) < T(x)$) dans un voisinage épointé de a .

En particulier f a un minimum local en a (resp. un maximum) en a si a est un point critique de f .

Démonstration

Supposons que $H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Nous ferons la démonstration avec la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. On déduit de la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 que :

$f(x) - T(x) = \frac{1}{2} (x-a|H_f(a)(x-a)) + \|x-a\|^2 \varepsilon(x-a)$ où ε est continue en 0 et $\varepsilon(0) = 0$.

Soit $m = \min \left\{ \frac{(H_f(a)y|y)}{\|y\|^2} \mid y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} = \min \{ (H_f(a)z|z) \mid \|z\| = 1 \}$.

L'application $z \mapsto (H_f(a)|z)$ étant continue sur le compact $\{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z\| = 1\}$ il existe z^* tel que $m = (H_f(a)z^*|z^*) > 0$ puisque $H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

$\varepsilon(x-a) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in V, |\varepsilon(x-a)| \leq \frac{m}{4}$.

Il s'ensuit que : $\forall x \in V, f(x) - T(x) \geq \frac{m}{4} \|x-a\|^2$.

On conclut aisément le théorème. $\square$

Exemple : La fonction f définie par $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + x^4$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in S_2^{++}(\mathbb{R})$. Donc tout point du graphe est au dessus du plan tangent.

Cas particulier où $n = 2$

Avec les notations (appelées notations de Monge) vues précédemment,

a) Si $A = (a, b)$ un point critique de f tel que $rt - s^2 \neq 0$, alors :

- (i) Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors f a un minimum en A ;
- (ii) si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors f a un maximum en A ;
- (iii) si $rt - s^2 < 0$, alors f n'a pas d'extremum en A .

b) Déterminer les extremums relatifs et absolus de $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

Démonstration

a) A étant un point critique, on a : $p = q = 0$. On déduit du a) que $f(A+H) - F(A)$ est du signe de $\Phi(H) = rh^2 + 2shk + tk^2$ lorsque $N(H)$ est au voisinage de 0.

$\Phi(H) = k^2 \varphi(h/k)$ si $k \neq 0$ avec $\varphi(\theta) = r\theta^2 + 2s\theta + t$ est un trinôme du second degré si $r \neq 0$, dont le discriminant est $\delta = s^2 - rt$.

Si $rt - s^2 < 0$ alors $\delta > 0$ et $\varphi(\theta)$ change de signe.

Si $rt - s^2 > 0$ alors $\delta < 0$ et $\varphi(\theta)$ est du signe de r .

La conclusion est immédiate.

b) En tant que fonction polynomiale, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

$D_1 f(x, y) = 4x^3 - 4(x-y)$ et $D_2 f(x, y) = 4y^3 + 4(x-y)$. Donc $M = (x, y)$ est un point critique si, et seulement si, (1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x^3 - y^3 + 2(x-y) = 0 \end{cases}$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^3$ étant bijective, (1) $\iff ((y = -x) \text{ et } (x(x^2 - 2) = 0))$

D'où trois points critiques : O , $A = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $B = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

• Étude en O . Comme $f(x, x) = 2x^4$ et $f(x, -x) = 2x^2(x^2 - 4)$, pour $x \neq 0$, $f(x, x) > 0$ et pour $0 < |x| < 2$, $f(x, -x) < 0$. Donc dans toute boule ouverte de centre O il existe des points où $f(M) > f(O)$ et des points où $f(M) < f(O)$. Le point O est un point col. O n'est pas un extremum de f .

• Étude en A : $r = t = 20$ et $s = 4$. Donc $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$. D'où A est un minimum local de f .

• Étude en B . Comme $f(-x, -y) = f(x, y)$, le graphe de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ possède $(O; \vec{k})$ pour axe de symétrie. Donc B est un minimum local de f .

• Étude globale. En coordonnées polaires $f(x, y) = \rho^4 \varphi(\theta) - 2\rho^2 [\cos(\theta) - \sin(\theta)]^2$ où $\varphi : \theta \mapsto \cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)$ est continue $\frac{\pi}{2}$ -périodique sans annulation donc minorée par $m > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc $f(x, y) \geq \rho^2 [m\rho^2 - 8] \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} +\infty$.

Soit $r > 2$ tel que, hors de la boule fermée $B_f(O, r)$, $f \geq 0$.

f est continue sur $B_f(O, r)$ compact donc y admet un minimum majoré par -8 .

f admet donc, sur $\mathbb{R}^2$, un minimum global, nécessairement local, $\min_{\mathbb{R}^2} f = -8$.

3.6. Optimisation sous contrainte d'égalité

Position du problème

Soient f et g deux applications de U dans $\mathbb{R}$. Optimiser f sous contrainte $g = 0$ revient à optimiser f sur l'ensemble $\Gamma = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.

Par exemple, optimiser $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sous la contrainte $x^2 + y^2 - 1 = 0$ revient à chercher les extremums de f sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

Première méthode : substitution

a) Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ et $g(x, y) = x^2 - y$. On est ramené à optimiser la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

On conclut que F a un minimum global en $-1/2$. Donc f a un minimum global sous la contrainte $g = 0$ en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

b) Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ et $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. On peut paramétrer le cercle Γ . On est ramené à optimiser la fonction $\theta \mapsto G(\theta) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$.

Comme $G(\theta) = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ on conclut que f a un maximum global sous la contrainte $g = 0$ en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et un minimum global sous la contrainte $g = 0$ en $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Deuxième méthode : multiplicateurs de Lagrange

Théorème admis

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs réelles. Soit Γ l'ensemble des zéros de g . Supposons que $f|_{\Gamma}$ admette un extremum local en un point a où $dg(a) \neq 0$. Alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df(a) = \lambda dg(a)$. Le scalaire λ est appelé multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $g = 0$.

Exemple : soient $f : (x, y) \mapsto x + y$ et $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\}$.

dg ne s'annule pas sur Γ . D'après le théorème précédent, si $f|_{\Gamma}$ a un extremum en

$$(a, b) \in \Gamma, \text{ il existe un unique } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} 1 + 4\lambda a^3 = 0 \\ 1 + 4\lambda b^3 = 0 \end{cases}$$

Comme $\lambda = 0$ est impossible, on a $a = b$.

$$(a, b) \in \Gamma \Rightarrow (a, b) = (-2^{-1/4}, -2^{-1/4}) \text{ ou } (2^{-1/4}, 2^{-1/4}).$$

Γ étant un compact de $\mathbb{R}^2$ et f étant continue, f a au moins un minimum global et un maximum global sur Γ .

$$f(-2^{-1/4}, -2^{-1/4}) = -2^{3/4} \text{ et } f(2^{-1/4}, 2^{-1/4}) = 2^{3/4}.$$

f a donc un minimum en $(-2^{-1/4}, -2^{-1/4})$ et un maximum en $(2^{-1/4}, 2^{-1/4})$.

EXERCICES

1. Les fonctions suivantes sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$?

a. $f(x, y) = \frac{x \sin(y) - y \sin(x)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$ et $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$.

b. $f(x, y) = \exp\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right)$ si $x^2 + y^2 < 1$, $f(x, y) = 0$ sinon et $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$.

c. $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^x}{1 + n^y}$ si $(x, y) \in \mathcal{D}$ ensemble de définition de f .

2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$, $F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ si $x \neq y$.

a. Soit $a \in I$. La limite de $F(x, y)$ quand $(x, y) \xrightarrow{x \neq y} (a, a)$ existe-t-elle ? Examiner le cas où f' est continue en a .

b. Si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ et $F(x, x) = f'(x)$. Montrer que $F \in \mathcal{C}(I^2, \mathbb{R}^n)$. Calculer $\text{grad}(F(a, a))$ si $f'' \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^n)$.

3. Fonction harmonique et transformation de Kelvin

Soient $\mathcal{D}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ne contenant pas 0 et $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D}, \mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on

$$\text{pose } r = \|x\| = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{1/2}, \quad \Delta_1 f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad \Delta_2 f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$$

a. Montrer que $\theta : x \mapsto \frac{x}{r^2}$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bijective de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur lui-même et donner sa différentielle.

b. Montrer que F définie par $F(x) = f\left(\frac{x}{r^2}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U que l'on précisera. Examiner $\Delta_1 F, \Delta_2 F$ au moyen de $\Delta_1 f, \Delta_2 f, r$ et vérifier que :

$$\Delta_2 F(x) - \frac{1}{r^4} \Delta_2 f\left(\frac{x}{r^2}\right) \text{ s'exprime au moyen des dérivées premières de } f.$$

c. Si $(u, v) \in (\mathcal{C}^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}))^2$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, calculer $\Delta_2(uv)$ en fonction de $\Delta_2 u, \Delta_2 v$ et des dérivées premières de u et v .

d. cf. notations du a. montrer qu'il existe α ne dépendant que de n tel que :
 $\Delta_2 f = 0 \iff \Delta_2(r^\alpha F) = 0$.

4. Extremums de la fonction définie par : $f(x, y) = x^2 y + \ln(1 + y^2)$.

5. Déterminer $\inf \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \forall M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \det(M) \leq \lambda \operatorname{tr}(MM) \}$.

6. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que si $\max(|u_0|, |v_0|) \leq r$, alors les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + u_n^2 + v_n^2), \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2 + v_n^2), \end{cases}$$
 vérifient $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On pourra utiliser le théorème du point fixe vu en travaux dirigés au chapitre 3.

7. Théorème de d'Alembert

On suppose $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$ par l'application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x + iy$ et muni de la structure euclidienne canonique. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 1$.

a. Montrer que $f_P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, z \mapsto P(z)$ est différentiable et déterminer sa différentielle en un point $z_0 \in \mathbb{C}$. Même question pour $g_P : z \mapsto \overline{P(z)}$. Interprétation géométrique du résultat.

b. Montrer que $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto |P(z)|^2$ est différentiable, et que les points critiques de F sont les zéros de PP' .

c. Montrer que F ne peut présenter d'extremum en un point $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) \neq 0$. On pourra faire un développement limité de $F(z_0 + re^{i\theta}) - F(z_0)$ lorsque r est au voisinage de 0.

d. Montrer que F atteint son minimum en au moins un point de $\mathbb{C}$ et en déduire que P a au moins un zéro.

8. a. (i) Soit E un espace euclidien. Montrer que $f : x \mapsto \|x\|$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et donner sa différentielle.

(ii) Soit F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. Montrer que si y est l'élément de F tel que $\|x - y\| = \min_{x' \in F} \|x - x'\|$, alors $(x - y)$ est orthogonal à F .

b. (i) Soient $(a, b) \in E^2$ et $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x - a\| + \|x - b\|$. Déterminer les points de E où la différentielle de φ s'annule. Quels sont les extremums de φ ?

(ii) Déterminer sans calculs les extremums de f définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{(1 - x)^2 + y^2}.$$

c. Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan euclidien $\mathcal{P}$. Montrer que le minimum de la fonction $g : M \mapsto MA + MB + MC$ est atteint en l'un des points A, B, C ou en un point d'où l'on voit les trois côtés du triangle (ABC) sous un angle de $\frac{2\pi}{3}$. Cas où le triangle (ABC) est équilatéral.

9. a. Déterminer les fonctions non nulles continues sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, f(xy) = f(x)f(y). \quad (1)$$

b. Déterminer les couples (f, g) de fonctions non nulles continues sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, f(xy) = g(x)f(y)$. (2)

c. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ tel que pour tout $x \in \Omega$, et tout $t \in]0, +\infty[, tx \in \Omega$. Déterminer les couples (g, h) de fonctions non nulles à valeurs dans $\mathbb{R}$ où $h \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times \Omega, h(xy) = g(t)h(x).$$

10. E et F désignent des espaces vectoriels normés de dimension finie et f un élément de $\mathcal{C}^1(E, F)$. On dit que f est α -homogène si pour tout (λ, x) dans $\mathbb{R}_+ \times E$, $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$. On suppose ici $\alpha > 1$.

a. Montrer : f α -homogène $\iff (df(\alpha - 1)$ -homogène et $f(0) = 0)$.

b. Montrer que f est α -homogène si, et seulement si, $\forall x \in E, df(x)(x) = \alpha f(x)$.

11. Montrer que si $f \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(t, x) dx \right) dt = \int_c^d \left(\int_a^b f(t, x) dx \right) dt.$$

Application : calcul de $I = \int_0^\pi \ln \left(\frac{b - \cos(t)}{a - \cos(t)} \right) dt$ où $1 < a < b$.

12. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f_k : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), A \mapsto A^k$ est différentiable sur

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et que : } \forall H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), df_k(A)(H) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i} H A^i.$$

13. a. Montrer que $f : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R}), A \mapsto A^{-1}$ est différentiable en I_n et que $df(I_n)(H) = -H$. On pourra noter que $I_n - (I_n - H)(I_n + H) = H^2$.

b. Montrer que $f : A \mapsto A^{-1}$ est différentiable sur $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $df(A)(H)$.

14. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ et $f : (\mathbb{R}_+)^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

On définit $\Gamma = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 1\}$.

a. Montrer que $\exists a \in \Gamma$ tel que $f(a) = \sup_{x \in \Gamma} f(x)$ (*) avec les a_i dans $\mathbb{R}_+^*$.

b. Déterminer tous les points a vérifiant (*) et en déduire que :

$$\forall x \in \Gamma, x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq 1.$$

c. Montrer que $\forall x \in (\mathbb{R}_+)^n, x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Cas d'égalité ?

d. On considère dans $\mathbb{R}^3$ un parallélépipède rectangle de côtés de longueurs x, y, z de volume V et de surface S . Montrer que $V^{2/3} \leq \frac{S}{6}$. Comment obtenir un parallélépipède rectangle de surface minimale de volume donné.

15. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, on note $\Delta f(a)$ le laplacien de f en $a \in U$. Montrer que si f a un maximum (resp. minimum) local en a alors $\Delta f(a) \leq 0$ (resp. $\Delta f(a) \geq 0$).

SOLUTIONS DES EXERCICES

1. a. Si l'on considère $\varphi : (x, y) \mapsto \frac{x[\sin(y) - y]}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $\varphi(0, 0) = 0$ alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi(y, x)$.

De plus, la formule de Taylor-Laplace montre que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\sin(y) - y = -\frac{y^3}{2} \int_0^1 (1-u)^2 \cos(uy) dy$ et la fonction $g : y \mapsto \int_0^1 (1-u)^2 \cos(uy) dy$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme intégrale dépendant d'un paramètre. En effet si l'on pose : $\forall (u, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$, $G(u, y) = (1-u)^2 \cos(uy)$ et si l'on note K un segment de $\mathbb{R}$, comme G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$ et comme $[0, 1] \times K$ est un compact de $\mathbb{R}^2$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $M_k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (u, y) \in [0, 1] \times K$, $\left| \frac{\partial^k G}{\partial y^k}(u, y) \right| \leq M_k$.

Si $(x, y) \neq (0, 0)$ on a $\varphi(x, y) = -\frac{xy^3}{2(x^2 + y^2)} g(y)$ et il suffit donc de montrer que la fonction ψ définie par $\psi(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $\psi(0, 0) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle l'est par quotient sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

L'inégalité $|xy| \leq \frac{1}{2}[x^2 + y^2]$ prouve la continuité en $(0, 0)$. Comme la restriction de ψ à Ox est nulle on a $D_1\psi(0, 0) = 0$.

Si $(x, y) \neq (0, 0)$, $|D_1\psi(x, y)| = \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq |y| \left(1 + \frac{1}{2} \right)$ toujours en utilisant $|xy| \leq \frac{1}{2}[x^2 + y^2]$ et donc $D_1\psi$ est continue en $(0, 0)$. La même méthode s'applique à $D_2\psi$ et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

b. La fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \exp\left(\frac{1}{t-1}\right)$ si $t < 1$ et $\varphi(t) = 0$ sinon est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f = \varphi \circ \psi$ où $\psi : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Par composition f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

c. Posons, si $n \geq 1$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u_n(x, y) = \frac{1 + n^x}{1 + n^y}$, alors $u_n(x, y) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha(x, y)}}$ et donc $(x, y) \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, $\alpha(x, y) > 1$, ce qui a lieu si, et seulement si, $(x > 0 \text{ et } y - x > 1)$ ou $(x \leq 0 \text{ et } y > 1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

Soient $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ et, pour tout n , $v_n : x \mapsto u_n(x, y_0)$. Choisissons $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in K = [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, $\alpha(x, y_0) \geq \frac{1 + \alpha(x_0, y_0)}{2} = \beta > 1$.

La série $\sum v_n$ converge simplement sur K , chaque v_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur K et $|v'_n(x)| = \frac{n^x \ln(n)}{1 + n^y} \leq \frac{\ln(n)}{n^\beta}$, ce qui montre la convergence normale sur K de $\sum v'_n$.

Par suite $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ avec $\sum_{n=1}^{\infty} v'_n : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x \ln(n)}{1 + n^y}$.

La série de fonctions de terme général $w_n : (x, y) \mapsto \frac{n^x \ln(n)}{1 + n^y}$ converge normalement sur un voisinage compact de (x_0, y_0) pour la même raison et donc $D_1 f$ existe et est continue sur $\mathcal{D}$. On procède de la même façon avec $D_2 f$.

2. a. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$ donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Avec $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$ on a $f(x_n) = (-1)^n x_n^2$ d'où

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) = (-1)^n [x_n^2 - x_{n+1}^2] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi^2}.$$

Comme $x_n - x_{n+1} = \frac{1}{n\pi} \left(\left[1 + \frac{1}{2n}\right]^{-1} - \left[1 + \frac{3}{2n}\right]^{-1} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2 \pi}$ le quotient $\frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}}$ est sans limite, la limite n'existe donc pas en général.

Si f' est continue en a on peut se limiter au cas où f est à valeurs réelles quitte à utiliser les applications coordonnées. L'égalité des accroissements finis assure l'existence de c dans l'intervalle ouvert d'extrémités x et y tel que $F(x, y) = f'(c)$ et, par encadrement, la limite existe et est $f'(a)$.

b. La formule de Taylor-Laplace montre que $F(x, y) = \int_0^1 f'[ux + (1-u)y] du$, F est donc continue sur I^2 comme intégrale sur un segment dépendant d'un paramètre.

Si f'' existe et est continue sur I , exactement pour la même raison on a :

$$D_1 F(a, a) = \int_0^1 u f''(a) du = \frac{f''(a)}{2} = D_2 F(a, a).$$

3. a. L'application $\varphi : x \mapsto \|x\|^2$ est la restriction à la diagonale de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de l'application bilinéaire continue $(x, y) \mapsto (x|y)$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa différentielle est l'application $d\varphi(x) : h \mapsto (x|h) + (h|x) = 2(x|h)$.

Par théorème de composition, $\psi = \frac{1}{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et sa différentielle est l'application $d\psi(x) : h \mapsto -\frac{2(x|h)}{\|x\|^4}$. Donc l'application involutive θ , produit de l'application identique et de ψ , est un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur lui-même et $d\theta(x) : h \mapsto -\frac{2(x|h)}{\|x\|^4} x + \frac{1}{\|x\|^2} h$.

b. $F = f \circ \theta$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U = \theta^{-1}(\mathcal{D})$. Comme θ est involutive, on a $U = \theta(\mathcal{D})$. On déduit de a. que $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r^2} \right) = -\frac{2x_i}{r^4}$. Donc :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\frac{x}{r^2} \right) - \frac{2x_i}{r^4} \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{x}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\frac{x}{r^2} \right) - \frac{2x_i}{r^2} (\Delta_1 f) \left(\frac{x}{r^2} \right).$$

$$\text{D'où : } (\Delta_1 F)(x) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = -(\Delta_1 f) \left(\frac{x}{r^2} \right).$$

En opérant de même, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \theta \right] (x) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{x}{r^2} \right) - \frac{2x_i}{r^4} \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{x}{r^2} \right). \text{ D'où :} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} (x) &= -\frac{4x_i}{r^4} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \left[\frac{8x_i^2}{r^4} - \frac{2}{r^2} \right] (\Delta_1 f) \left(\frac{x}{r^2} \right) + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \left(\frac{x}{r^2} \right) - \frac{4x_i}{r^6} \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{x}{r^2} \right) \\ &\quad + \frac{4x_i^2}{r^8} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_j x_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \left(\frac{x}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Par addition, on obtient :

$$(\Delta_2 F)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} (x) = \frac{1}{r^4} (\Delta_2 f) \left(\frac{x}{r^2} \right) + \frac{4-2n}{r^2} (\Delta_1 f) \left(\frac{x}{r^2} \right).$$

$$c. \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, D_i^2(uv) = v D_i^2 u + 2 D_i u D_i v + u D_i^2 v.$$

$$\text{Donc : } \Delta_2(uv) = v \Delta_2 u + 2(\text{grad } u | \text{grad } v) + u \Delta_2 v.$$

d. La fonction $x \mapsto \|x\|^\alpha$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a :

$$\text{grad}(r^\alpha) = \alpha r^{\alpha-2} x \text{ et } \Delta_2(r^\alpha) = \alpha(n + \alpha - 2) r^{\alpha-2}. \text{ Comme } (x | \text{grad } F) = \Delta_1 F.$$

L'application du résultat de c. donne :

$$\Delta_2(r^\alpha F) = r^\alpha \Delta_2 F + 2\alpha r^{\alpha-2} \Delta_1 F + \alpha(n + \alpha - 2) r^{\alpha-2} F.$$

Des résultats de la question b. on déduit :

$$r^{2-\alpha} \Delta_2(r^\alpha F)(x) = r^{-2} \Delta_2 f \left(\frac{x}{r^2} \right) + (4-2n) \Delta_1 f \left(\frac{x}{r^2} \right) - 2\alpha \Delta_1 f \left(\frac{x}{r^2} \right) + \alpha(n + \alpha - 2) F.$$

$$\text{Donc } \Delta_2 f = 0 \iff \Delta_2(r^\alpha F) = 0 \iff \alpha = 2 - n.$$

4. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\text{grad } f(x, y) = \left(2xy, x^2 + \frac{2y}{1+y^2} \right)$; donc (x, y) est un point critique si, et seulement si, $x = y = 0$.

$f(0, 0) = 0$, $f(x, x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \geq 0$ et $f(x, -x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^5 \leq 0$, il s'agit d'un point col. La fonction f n'admet aucun extremum.

5. $(M, N) \mapsto \text{tr}^t(MN)$ est le produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et, pour tout $(\alpha, M) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(\alpha M) = \alpha^2 \det(M)$. Comme $\det$ est polynomiale elle est continue et admet donc un maximum sur la sphère unité qui est compacte, ce maximum est strictement positif et c'est le réel λ cherché.

Pour ce λ , la fonction $f : M \mapsto \lambda \text{tr}^t(MM) - \det(M)$ admet un minimum et donc un point critique car elle est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. En écrivant

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ cela donne } 2\lambda a = d, 2\lambda b = -c, 2\lambda c = -b \text{ et } 2\lambda d = a \text{ d'où, si}$$

$x \in \{a, b, c, d\}$, $x = 4\lambda^2 x$ et donc $\lambda = \frac{1}{2}$ car f admet un point critique sur la sphère unité.

6. Il suffit de déterminer un voisinage D convexe compact de $(0, 0)$, stable par une application f et sur lequel f est contractante pour appliquer le théorème du point fixe. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la norme N_∞ et f définie par $f(x, y) = (u, v)$ où $u = \frac{1}{2}(y + x^2 + y^2)$ et $v = \frac{1}{2}(x + x^2 + y^2)$. Si $N_\infty(x, y) \leq \alpha$ alors $N_\infty(u, v) \leq \frac{\alpha}{2} + \alpha^2$. Donc si $\alpha \leq \frac{1}{2}$ alors $N_\infty(u, v) \leq \alpha$. La matrice jacobienne

de f est $J = \begin{pmatrix} x & \frac{1}{2} + y \\ \frac{1}{2} + x & y \end{pmatrix}$ et la norme matricielle subordonnée à N_∞ est $\|J\| = \max \left(|x| + \left| \frac{1}{2} + y \right|, |y| + \left| \frac{1}{2} + x \right| \right) \leq 2\alpha + \frac{1}{2}$ si $N_\infty(x, y) \leq \alpha$. En prenant un α quelconque tel que $\alpha < \frac{1}{4}$ on a le résultat. $D = \{(x, y) \mid N_\infty(x, y) \leq \alpha\}$ est une partie convexe compacte, stable par f . L'application induite par f sur D est contractante.

Remarque : pour les lecteurs étudiants qui n'ont pas vu pourquoi on a cherché D convexe et compacte, revoir l'inégalité des accroissements finis.

7. a. Posons $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Pour $z \neq z_0$, on a :

$$\frac{P(z) - P(z_0)}{z - z_0} = \sum_{k=1}^n a_k \frac{z^k - z_0^k}{z - z_0} = \sum_{k=1}^n a_k (z_0^{k-1} + z z_0^{k-2} + \cdots + z_0 z^{k-2} + z^{k-1}).$$

$$\text{Donc : } \frac{P(z) - P(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \sum_{k=1}^n k a_k z_0^{k-1} = P'(z_0).$$

ie. $P(z) - P(z_0) \underset{z \rightarrow z_0}{=} (z - z_0)P'(z_0) + o(|z - z_0|)$. D'où f_P est différentiable en z_0 et sa différentielle en z_0 est l'application $df_P(z_0) : h \mapsto P'(z_0)h$. On reconnaît une similitude directe.

Notons s l'application $\mathbb{R}$ -linéaire définie par $s(z) = \bar{z}$ (ie. la symétrie par rapport à l'axe réel). On a $g_P = s \circ f_P$. Donc g_P est différentiable en z_0 et sa différentielle en z_0 est l'application : $h \mapsto dg_P(z_0)(h) = s \circ df_P(z_0) : h \mapsto \overline{P'(z_0)h}$. On reconnaît une similitude indirecte.

b. En tant que produit de deux fonctions différentiables, $F = f_P g_P$ est différentiable et $dF(z_0) = df_P(z_0)g_P + f_P dg_P(z_0)$.

$$\text{Donc } dF(z_0)(h) = P'(z_0)\overline{P(z_0)h} + P(z_0)\overline{P'(z_0)h} = 2\Re \left[\overline{P(z_0)}P'(z_0)h \right].$$

Si z_0 est un point critique, de $dF(z_0)(1) = 0$ et $dF(z_0)(i) = 0$ on déduit $\overline{P(z_0)}P'(z_0) = 0$. Donc : $dF(z_0) = 0 \iff P(z_0)P'(z_0) = 0$.

c. Si $P(z_0) = \lambda, P'(z_0) = \dots = P^{(m-1)}(z_0) = 0$ et $\frac{P^{(m)}(z_0)}{m!} = \mu \neq 0$, et m existe car $\deg(P) \geq 1$, alors, pour $t \in \mathbb{C}$, $P(z_0 + t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \lambda + \mu t^m + O(t^{m+1})$. D'où $f_P(z_0 + t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \lambda + \mu t^m + O(t^{m+1})$ et $g_P(z_0 + t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \bar{\lambda} + \bar{\mu} \bar{t}^m + O(\bar{t}^{m+1})$.

$$\text{Donc } F(z_0 + t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \lambda \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \mu t^m + \lambda \bar{\mu} \bar{t}^m + O(t^{m+1}).$$

Posons $t = r e^{i\theta}$ et $\lambda \bar{\mu} = r_0 e^{i\theta_0}$. Comme $F(z_0) = \lambda \bar{\lambda}$, on a :

$$F(z_0 + r e^{i\theta}) - F(z_0) \underset{t \rightarrow 0}{=} r_0 r^m \cos(m\theta - \theta_0) + O(r^{m+1}).$$

Comme $P(z_0) \neq 0$ et $r_0 = |\lambda \bar{\mu}| \neq 0$, on peut choisir le réel θ tel que $\cos(m\theta - \theta_0)$ ait un signe donné. Dans ce cas, il existe des valeurs de t dans tout voisinage de 0 telles que $F(z_0 + t) - F(z_0)$ ait un signe arbitrairement donné ie. F n'a pas d'extremum en z_0 .

d. F étant une fonction réelle positive, il existe $M = \inf_{z \in \mathbb{C}} F(z) \in \mathbb{R}_+$. Il existe une suite (λ_n) de points de $\mathbb{C}$ telle que $F(\lambda_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M$. Comme $|P(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} +\infty$,

la suite (λ_n) est bornée. Elle admet une valeur d'adhérence z_0 et par passage à la limite, on a $F(z_0) = M$. Donc F atteint son minimum en z_0 et d'après le résultat de la question c), on a $F(z_0) = 0$ et le résultat.

8. a. (i) L'application $\theta : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa différentielle est $d\theta(x) : h \mapsto 2(x|h)$ (cf. cours). Par théorème de composition, $f : x \mapsto \sqrt{\theta(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $E \setminus \{0\}$ et sa différentielle est l'application $df(x) : h \mapsto \frac{(x|h)}{\|x\|}$.

(ii) • L'existence et l'unicité de $y = P_F(x)$, la projection orthogonale de x sur F , sont une conséquence du théorème de projection orthogonale dans les espaces euclidiens (cf. chapitre 9).

• On suppose seulement ici : $\exists y \in F, d(x, F) = \|x - y\| = \min_{x' \in F} \|x - x'\|$.

$\psi : F \rightarrow \mathbb{R}, x' \mapsto \|x - x'\|$ est différentiable sur $F \setminus \{0\}$. Si y réalise le minimum de ψ et si $y \neq x$, alors $d\psi(y) = 0$ ie. $\forall h \in F, \frac{(x - y|h)}{\|x - y\|} = 0$. Donc $(x - y) \perp F$.

b. (i) D'après a. (i), $\varphi : x \mapsto f(x - a) + f(x - b)$ est différentiable sur $E \setminus \{a, b\}$ et $d\varphi(x) : h \mapsto \frac{(x - a|h)}{\|x - a\|} + \frac{(x - b|h)}{\|x - b\|}$. Donc $d\varphi(x) = 0 \iff \frac{x - a}{\|x - a\|} + \frac{x - b}{\|x - b\|} = 0$.

Autrement dit les deux vecteurs unitaires $\frac{x - a}{\|x - a\|}$ et $\frac{x - b}{\|x - b\|}$ sont opposés. Donc $d\varphi(x) = 0 \iff x \in]a, b[$.

Si $x \in [a, b]$, $f(x) = \|b - a\|$ et si $x \notin [a, b]$, $(x - a|x - b) < \|x - a\| \cdot \|x - b\|$. L'inégalité est stricte car on n'a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz que si les vecteurs sont colinéaires et $(u|v) = |u|v|$ si u et v sont de même sens. Donc $\|b - a\|^2 = \|x - a\|^2 + \|x - b\|^2 - 2(x - a|x - b) < \|x - a\|^2 + \|x - b\|^2 + 2\|x - a\| \cdot \|x - b\|$. D'où $\|b - a\|^2 < (\|x - a\| + \|x - b\|)^2$ ie. $\|b - a\| < \varphi(x)$. Donc $\min_{x \in E} \varphi(x)$ est atteint

en tout point de $[a, b]$. φ n'a pas d'autre point extremum ni d'autre point critique.

(ii) Il suffit d'appliquer le résultat précédent sur $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, de poser $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$ et $m = (x, y)$. La fonction f définie par $f(m) = \|\vec{m\vec{a}}\| + \|\vec{m\vec{b}}\|$ atteint son minimum en tout point du segment $[a, b]$ et n'a pas d'autre point extremum.

c. Une application de a. prouve que g est différentiable sur $\mathcal{P} \setminus \{A, B, C\}$ et que

$dg(M) : \vec{h} \mapsto \frac{(\vec{MA}|\vec{h})}{\|\vec{MA}\|} + \frac{(\vec{MB}|\vec{h})}{\|\vec{MB}\|} + \frac{(\vec{MC}|\vec{h})}{\|\vec{MC}\|}$. Comme $g(M) \geq \|\vec{MA}\|$, g est non

majorée mais elle est minorée et sa borne inférieure est atteinte en au moins un point de $\mathcal{P}$. Si ce point est $M_0 \notin \{A, B, C\}$ alors $dg(M_0) = 0$ ie. les trois vecteurs

unitaires $\vec{x} = \frac{\vec{M_0\vec{A}}}{\|\vec{M_0\vec{A}}\|}$, $\vec{y} = \frac{\vec{M_0\vec{B}}}{\|\vec{M_0\vec{B}}\|}$ et $\vec{z} = \frac{\vec{M_0\vec{C}}}{\|\vec{M_0\vec{C}}\|}$ vérifient $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{0}$.

De $\|\vec{z}\|^2 = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2(\vec{x}|\vec{y})$ on déduit $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{2}$.

De même pour $\cos(\vec{z}, \vec{y})$ et $\cos(\vec{x}, \vec{z})$. D'où le résultat.

Si (A, B, C) est équilatéral, on sait que l'on voit les trois côtés du triangle sous un angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$ du centre O du triangle. Le minimum de g est atteint en O car $g(A) = g(B) = g(C) = 2AB > OA + OB + OC$.

9. a. Supposons que f existe et vérifie (1). S'il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) = 0$, alors f est la fonction nulle sur $]0, +\infty[$. En effet, pour tout $x > 0$, $f(x) = f(x_0)f\left(\frac{x}{x_0}\right)$.

De $(f(1))^2 = f(1)$, on déduit $f(1) = 1$. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \left(f(\sqrt{x})\right)^2 > 0$.

L'application $\psi : x \mapsto \ln[f(x)]$ vérifie $\psi(xy) = \psi(x) + \psi(y)$ pour $(x, y) \in]0, +\infty[^2$. Du cours de MPSI on déduit l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(x) = \alpha \ln(x)$. Doù f est l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$. La réciproque est immédiate.

b. On déduit de (2) que : $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, g(x)f(y) = g(y)f(x)$.

f étant non nulle, on déduit de (2) que $g(1) = 1$. Posons $a = f(1)$. Alors $a \neq 0$ sinon, puisque $f(x) = g(x)f(1)$ la fonction f serait nulle.

Donc $f(yx) = \frac{1}{a}f(y)f(x)$ pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$. L'application $\frac{1}{a}f$ vérifiant (1), on a $f(x) = ax^\alpha$ et par suite $g(y) = y^\alpha$ pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$.

c. h étant non nulle il existe $\omega \in \Omega$ tel que $h(\omega) \neq 0$. L'application $f : x \mapsto h(\omega x)$ vérifie les hypothèses de b), donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(t) = t^\alpha$.

10. a. Pour le sens direct, fixons $\lambda > 0$ et considérons $\varphi_\lambda : x \mapsto f(\lambda x) - \lambda^\alpha f(x)$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E par composition et combinaison linéaire et, pour tout x dans E , $d\varphi_\lambda(x) = \lambda df(\lambda x) - \lambda^\alpha df(x)$.

Comme φ_λ est nulle on a $df(\lambda x) = \lambda^{\alpha-1}df(x)$ si $x \in E$ et $\lambda > 0$.

Comme $\lambda \mapsto df(\lambda x) - \lambda^{\alpha-1}df(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour x fixé, on obtient $df(0) = 0$ par passage à la limite quand $\lambda \rightarrow 0^+$ et df est $(\alpha - 1)$ -homogène.

Si df est $(\alpha - 1)$ -homogène, $d\varphi_\lambda$ est nulle sur E pour tout $\lambda \geq 0$, donc φ_λ est constante égale à $\varphi_\lambda(0)$ soit 0 si $f(0) = 0$ et f est α -homogène.

b. Si f est α -homogène, fixons x dans E et considérons $\psi_x : \lambda \mapsto f(\lambda x) - \lambda^\alpha f(x)$, ψ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ nulle et $\psi'_x(\lambda) = df(\lambda x)(x) - \alpha \lambda^{\alpha-1}f(x) = 0$.

Pour $\lambda = 1$ on, obtient $df(x)(x) = \alpha f(x)$.

Pour la réciproque, avec les mêmes notations, $\lambda \psi'_x(\lambda) = \lambda df(\lambda x)(x) - \alpha \lambda^\alpha f(x)$ ie. $\psi'_x(\lambda) = df(\lambda x)(x) - \alpha \lambda^{\alpha-1}f(x) = \alpha \psi_x(\lambda)$.

ψ_x est donc solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation $\lambda y' - \alpha y = 0$, équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 dont 0 est point singulier.

D'où $\psi_x(\lambda) = \psi_x(1)\lambda^\alpha$ si $\lambda > 0$, comme $\psi_x(1) = 0$, ψ_x est nulle sur $]0, +\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}_+$ par continuité, ce qui termine la réciproque.

11. Soit $F : [c, d] \rightarrow \mathbb{K}, y \mapsto \int_c^y \left(\int_a^b f(t, x) dt \right) dx$ et G définie par

$G : [c, d] \rightarrow \mathbb{K}, y \mapsto \int_a^b \int_c^y \left(f(t, x) dx \right) dt$. On déduit des théorèmes de dérivation des intégrales paramétrés que F et G sont continues sur $[c, d]$ et dérivables sur $]c, d[$. On a aussi, $F'(y) = \int_a^b f(t, y) dt$.

Notons $\varphi(t, y) = \int_c^y f(t, x) dx$. Alors $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y) = f(t, y)$.

Comme $G(y) = \int_a^b \varphi(t, y) dt$, on a $G'(y) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y) dt = \int_a^b f(t, y) dt$.

Pour tout $y \in]c, d[$, $F'(y) = G'(y)$. Comme $F(c) = G(c) = 0$, on a $F(y) = G(y)$ pour tout $y \in [c, d]$.

Application : comme $I = \int_0^\pi \ln \left(\frac{b - \cos(t)}{a - \cos(t)} \right) dt = \int_0^\pi \left(\int_a^b \frac{dt}{x - \cos(t)} \right) dx$,

en posant, pour $(x, t) \in [a, b] \times [0, \pi]$, $f(t, x) = \frac{1}{x - \cos(t)}$, on peut appliquer le résultat précédent.

$\int_0^\pi f(t, x) dt = \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - 1}}$ avec le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif entre $[0, \pi[$ et $[0, +\infty[$: $u = \tan(t/2)$.

Donc $I = \int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \pi \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right)$.

12. Le résultat étant donné, un raisonnement par récurrence s'impose. Nous laissons au lecteur le soin du développement des calculs.

13. a. La relation est immédiatement vérifiée. Si $I_n + H$ est inversible, elle implique $(I_n + H)^{-1} - I_n + H = (I_n + H)^{-1} H^2 \underset{H \rightarrow 0}{=} o(\|H\|)$.

Le résultat est donc établi.

b. En supposant HA^{-1} inversible, cette dernière égalité s'écrit : $((I_n + HA^{-1})^{-1} - I_n + HA^{-1}) \underset{H \rightarrow 0}{=} o(\|H\|)$.

En prémultipliant par A^{-1} , il vient

$$A^{-1}(I_n + HA^{-1})^{-1} \underset{H \rightarrow 0}{=} A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + o(\|H\|)$$

$$\text{ie. } (A + H)^{-1} \underset{H \rightarrow 0}{=} A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + o(\|H\|).$$

f est différentiable et $df(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}$.

14. a. La fonction $g : (\mathbb{R}_+)^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n - 1$ étant polynomiale, est continue. Donc $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

D'autre part, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq \alpha_i x_i \leq 1$. D'où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq x_i \leq \frac{1}{\alpha_i}$ (car $\alpha_i > 0$).

Il s'ensuit que Γ est un compact de $\mathbb{R}^n$ sur lequel f est continue par théorème sur les opérations sur les fonctions continues; d'où l'existence de $a \in \Gamma$ tel que $f(a) = \sup_{x \in \Gamma} f(x) = \max_{x \in \Gamma} f(x)$.

Si un des a_i est nul, alors $f(a) = 0$. Or $f(1, \dots, 1) = 1$ et f atteint son maximum en a . Contradiction. Donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i > 0$.

b. Les $a \in \Gamma$ vérifiant $f(a) = \sup_{x \in \Gamma} f(x)$ sont dans l'ouvert $]0, +\infty[^n$ de $\mathbb{R}^n$. Ce sont donc les extremums de f sous la contrainte $g = 0$. D'après le théorème du cours sur l'optimisation sous contrainte, si a est l'un d'entre eux, $\exists \lambda \in \mathbb{R}, df(a) = \lambda dg(a)$.

$$\text{On a : } \forall h \in \mathbb{R}^n, df(a)(h) = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i^{\alpha_i - 1} h_i \prod_{j \neq i} a_j^{\alpha_j} \text{ et } dg(a)(h) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i.$$

$$\text{Donc } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i^{\alpha_i - 1} \prod_{j \neq i} a_j^{\alpha_j} = \lambda \alpha_i.$$

$$\text{D'où } \lambda \neq 0 \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i = \frac{1}{\lambda} \prod_{j=1}^n a_j^{\alpha_j} = \beta \text{ et } \lambda = \beta^{n-1}.$$

Il s'ensuit que $a = (\beta, \dots, \beta)$. Comme $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, on a $a \in \Gamma \iff \beta = 1$.

Donc, l'unique point de Γ où f peut atteindre son maximum est $a = (1, \dots, 1)$. Comme l'existence d'un point où f atteint son maximum a déjà été prouvée, on conclut que $1 = f(1, \dots, 1) = \sup_{x \in \Gamma} f(x)$. L'inégalité demandée en résulte.

c. Soit $x \in (\mathbb{R}_+)^n$. Si $x = 0$ alors on a égalité. Sinon, $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \neq 0$.

En posant $y = \frac{x}{s}$ on a $y \in \Gamma$ et $y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n} \leq 1$. Donc $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq s^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} = s$.

On a égalité si $x = (0, \dots, 0)$ ou $f(y) = 1$ i.e. $y = (1, \dots, 1)$.

On a donc égalité en les points $x = (z, \dots, z)$ où z parcourt $\mathbb{R}_+$.

d. Dans ce cas on a $V = xyz$ et $S = 2xy + 2yz + 2zx$. Des résultats précédents avec $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$ et $x_1 = xy$, $x_2 = yz$, $x_3 = zx$ on déduit que

$V^{\frac{2}{3}} = (xy)^{\frac{1}{3}}(yz)^{\frac{1}{3}}(zx)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3}(xy) + \frac{1}{3}(yz) + \frac{1}{3}(zx) = \frac{S}{6}$ avec égalité si, et seulement si, $xy = yz = zx$. Pour $xyz \neq 0$ ceci équivaut à $x = y = z$.

À volume V donné, le parallélépipède rectangle de surface minimale est le cube de côté $x = V^{1/3}$.

15. Supposons que f admet un minimum en $a \in U$. Alors a est un point critique de f , donc $\nabla f(a) = 0$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 s'écrit avec les notations de Monge :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \frac{1}{2}(rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2) + o(\|h\|^2).$$

Pour $h = (h_1, 0)$, il vient $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \frac{r}{2}h_1^2 + o(h_1^2)$.

Si $r \neq 0$, on a $f(a+h) - f(a) \underset{h_1 \rightarrow 0}{\sim} \frac{r}{2}h_1^2$.

Comme f a un minimum en a , au voisinage de a , on a $f(a+h) - f(a) \geq 0$. Donc $r \geq 0$. L'échange de x et y donne $t \geq 0$. Donc $\Delta f(a) = r + t \geq 0$.

Si f a un maximum en a , alors $-f$ admet un minimum en a et donc :

$\Delta(-f)(a) = -\Delta f(a)$, d'où $\Delta f(a) \leq 0$.

TRAVAUX DIRIGÉS

• Endomorphismes conservant un opérateur différentiel

Notations et objectifs

Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})$ est une matrice carrée symétrique réelle ie. un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application linéaire

$$D \text{ de } \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \text{ dans } \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \text{ définie par } Df = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

On note $\mathcal{N}$ son noyau. Le but du problème est de chercher les $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ qui conservent $\mathcal{N}$ ie. qui vérifient la propriété : si $f \in \mathcal{N}$, alors $f \circ u \in \mathcal{N}$.

On note $u = (u_1, \dots, u_n)$ où les u_k sont les applications coordonnées de u . Sa matrice jacobienne en $x \in \mathbb{R}^n$ est $J_x(u) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$ et l'on appelle la matrice **hessienne** de f en x la matrice $H_x(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$.

Partie I

Dans cette partie $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et u désigne une application de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ conservant $\mathcal{N}$ ie. si $Df = 0$, alors $D(f \circ u) = 0$.

1. Montrer que les applications composantes de u appartiennent à $\mathcal{N}$. On pourra introduire les $f_k : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$.

2. a. Exprimer $\frac{\partial(f \circ u)}{\partial x_i}$ en fonction des $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_k}$ et de u .

b. En appliquant deux fois cette relation, montrer que :

$$\frac{\partial^2(f \circ u)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell} \circ u \right) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ u \right).$$

c. Interpréter l'ensemble de ces égalités pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ comme une identité matricielle qui exprime $H_x(f \circ u)$ en fonction de ${}^t J_x(u), H_{u(x)}(f), J_x(u)$ et des $\frac{\partial f}{\partial x_k} [u(x)]$ et $H_x(u_k)$.

3. a. Montrer que $(V, W) \mapsto \text{tr}(VW)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b. Soit V_1 et V_2 deux éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si $\text{tr}(V_1 S)$ alors $\text{tr}(V_2 S) = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $V_2 = \lambda V_1$.

4. a. Montrer que $D(f)(x) = \text{tr} [A H_x(f)]$.

b. Montrer que $D(f \circ u)(x) = \text{tr} [A {}^t J_x(u) H_{u(x)}(f) J_x(u)]$.

5. a. Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{i,j} x_i x_j$.

Calculer $H_x(q)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. En considérant $V_1 = A$ et $V_2 = J_x(u) A^t J_x(u)$ montrer qu'il existe $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ tel que : $J_x(u) A^t J_x(u) = \lambda(x) A$.

En déduire : $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n, D(f \circ u)(x) = \lambda(x) Df[u(x)]$.

Partie II

On suppose A inversible dans cette partie et l'on note $B = A^{-1} = (b_{i,j})$. Dans cette partie u désigne une application de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que :

$$(1) \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, Du_k = 0,$$

$$(2) \quad \exists \lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, J_x(u) A^t J_x(u) = \lambda(x) A,$$

$$(3) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \det(J_x(u)) \neq 0.$$

1. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda(x) \neq 0$.

b. Montrer que $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

c. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, J_x(u) B J_x(u) = \lambda(x) B$.

2. Montrer que, pour tout $(i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3$,

$$\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n b_{p,q} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} b_{k,i} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} b_{k,j} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} b_{i,j} \right).$$

Indication : Dériver par rapport à x_k la quantité : $\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n b_{p,q} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial u_q}{\partial x_j}$ et

$$\text{écrire : } \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_k \partial x_i} \cdot \frac{\partial u_q}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u_p}{\partial x_k} \frac{\partial u_q}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial u_p}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}.$$

3. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(n-2) \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} = 0$. On calculera à cet

$$\text{effet : } \sum_{i,j,p,q} a_{i,j} b_{p,q} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}.$$

4. On suppose $n \neq 2$.

a. Montrer que λ est constant et déduire de II.2. que pour tout (i, j, q) ,

$$\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

b. Prouver que u est une application affine. Que peut-on dire de sa partie linéaire ?

5. On suppose $n = 2$ et l'on prend pour A la matrice I_2 . On considère l'application $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2) \mapsto (e^{x_1} \cos(x_2), e^{x_1} \sin(x_2))$.

Montrer que u satisfait aux conditions (1), (2) et (3) mais que u n'est pas affine.

Solution

1. Les applications f_k sont éléments de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0$. Donc $f_k \in \mathcal{N}$. D'où $f_k \circ u = u_k \in \mathcal{N}$.

2. a. $\frac{\partial(f \circ u)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ u \right) \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$.

b. Par dérivation de l'expression précédente par rapport à x_i , on a :

$$\frac{\partial^2(f \circ u)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ u \right) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ u \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_i}.$$

Donc : $\frac{\partial^2(f \circ u)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ u \right) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell} \circ u \right)$.

c. Avec les notations $M = (M_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on a, si l'on pose $h_{i,j} = (H_x(f \circ u))_{i,j}$

$$h_{i,j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(u(x)) (H_x(u_k))_{i,j} + \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (J_x(u))_{k,i} (H_{u(x)}(f))_{k,\ell} (J_x(u))_{\ell,j}.$$

$$h_{i,j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(u(x)) (H_x(u_k))_{i,j} + (J_x(u) H_{u(x)}(f) J_x(u))_{i,j}.$$

Donc : $H_x(f \circ u) = J_x(u) H_{u(x)}(f) J_x(u) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(u(x)) H_x(u_k)$.

3. a. Exemple fondamental du chapitre sur les espaces euclidiens.

b. L'hypothèse s'écrit : $V_1^\perp \subset V_2^\perp$. Si $V_2 = 0$, alors $V_2 = 0V_1$. Sinon, $V_2^\perp$ est un hyperplan de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'où $V_1^\perp = V_2^\perp$. Donc $V_2 \in [V_1^\perp]^\perp = \mathbb{R}V_1$; d'où l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $V_2 = \lambda V_1$.

4. a. $\text{tr}(AH_x(f)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} (H_x(f))_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = Df(x)$.

b. $D(f \circ u)(x) = \text{tr}[AH_x(f \circ u)]$. Comme tr est linéaire, on déduit de 2.c. que :

$$D(f \circ u)(x) = \text{tr}[AJ_x(u)H_{u(x)}(f)J_x(u)] + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(u(x)) \text{tr}[AH_x(u_k)]. \text{ Donc :}$$

$$D(f \circ u)(x) = \text{tr}[AJ_x(u)H_{u(x)}(f)J_x(u)] + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(u(x)) Du_k(x). \text{ D'où :}$$

$$D(f \circ u)(x) = \text{tr}[AJ_x(u)H_{u(x)}(f)J_x(u)] \text{ car } u_k \in \mathcal{N}.$$

5. a. $\frac{\partial q}{\partial x_i}(x) = 2 \sum_{k=1}^n s_{i,k} x_k \Rightarrow \frac{\partial^2 q}{\partial x_j \partial x_j}(x) = 2s_{i,j}$. d'où $H_x(q) = 2S$.

b. D'après les hypothèses, $q \in \mathcal{N} \Rightarrow q \circ u \in \mathcal{N}$. Ce qui se traduit par :

$$\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(AS) = 0 \Rightarrow \text{tr}[AJ_x(u)SJ_x(u)] = 0.$$

Comme $\text{tr}[AJ_x(u)SJ_x(u)] = \text{tr}[J_x(u)AJ_x(u)S]$, de I.3.b. on déduit que :

$$\exists \lambda(x) \in \mathbb{R}, J_x(u)AJ_x(u) = \lambda(x)A.$$

$$D(f \circ u)(x) = \text{tr}[J_x(u)AJ_x(u)H_{u(x)}(f)] = \lambda(x) \text{tr}[AH_{u(x)}(f)] = \lambda(x)Df(u(x)).$$

Partie II

1. a. A et $J_x(u)$ étant deux matrices de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, la matrice $\lambda(x)A = J_x(u)A^t J_x(u)$ est inversible, donc $\lambda(x) \neq 0$.

b. $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, donc l'application $x \mapsto J_x(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$; d'où pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $x \mapsto \lambda(x)a_{i,j} = (J_x A^t J_x(u))_{i,j}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. La matrice A est inversible, donc il existe $a_{i,j} \neq 0$; d'où $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

c. $\lambda(x)I_n = B J_x(u) A^t J_x(u)$. Par multiplication à gauche par $J_x(u)$ et à droite par $[J_x(u)]^{-1}$ on a : $\lambda(x)I_n = J_x(u) B J_x(u) A$; d'où $\lambda(x)B = J_x(u) B J_x(u)$ car $B = A^{-1}$.

$$2. \lambda(x)b_{i,j} = (J_x(u) B J_x(u))_{i,j} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n b_{p,q} \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x) \frac{\partial u_q}{\partial x_j}(x).$$

$$\text{Donc : } \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} b_{i,j} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n b_{p,q} \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_k \partial x_i} \frac{\partial u_q}{\partial x_j} + \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n b_{p,q} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Échangeons (i, j, k) en (k, j, i) et alors :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} b_{k,j} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n b_{p,q} \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_k \partial x_i} \frac{\partial u_q}{\partial x_j} + \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n b_{p,q} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}.$$

De même, en échangeant (i, j, k) en (i, k, j) on a :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} b_{i,k} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n b_{p,q} \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial u_q}{\partial x_k} + \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n b_{p,q} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_j \partial x_k}.$$

$$\text{Donc : } \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} b_{k,j} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} b_{i,k} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} b_{i,j} = 2 \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n b_{p,q} \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u_q}{\partial x_k} \text{ car } B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

$$3. \text{ Calculons de deux manières } E = \sum_{i,j,p,q} a_{i,j} b_{p,q} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u_p}{\partial x_k}.$$

$$\text{D'une part : } E = \sum_{p,q} b_{p,q} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} \left(\sum_{i,j} a_{i,j} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \sum_{p,q} b_{p,q} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} D u_q = 0. \text{ D'autre}$$

$$\text{part : } E = \sum_{i,j} a_{i,j} \sum_{p,q} b_{p,q} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{i,j} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} b_{k,j} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} b_{k,i} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} b_{i,j} \right].$$

$$2E = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,j} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n b_{k,j} a_{j,i} \right) - \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}.$$

$$2E = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \delta_{k,j} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \delta_{k,i} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} \text{tr}(AB) \text{ car } AB = BA = I_n.$$

$$\text{Donc } E = -\frac{1}{2} (n-2) \frac{\partial \lambda}{\partial x_k}. \text{ D'où } (n-2) \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} = 0 \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

$$4. \text{ a. } n \neq 2, \text{ donc } \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} = 0 \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket. \text{ D'où } \lambda \text{ est constant.}$$

$$\forall (i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3, \sum_{1 \leq p, q \leq n} b_{p,q} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Soit $U_{i,j}$ la matrice colonne qui a pour élément de la q -ième ligne $\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}(x)$.

On a : $\sum_{p,q} b_{p,q} \frac{\partial u_p}{\partial x_k}(x) \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \left({}^t J_x(u) B U_{i,j} \right)_{k,1}$. Donc ${}^t J_x(u) B U_{i,j} = 0$.

Or ${}^t J_x(u) B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Donc $U_{i,j} = 0$ i.e. $\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0$ pour tout (q, i, j) .

b. Les applications $\frac{\partial u_q}{\partial x_i}$ sont des constantes. Posons $\frac{\partial u_q}{\partial x_i} = \alpha_{q,i}$. Appliquons le théorème de Taylor-Laplace à la fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ définie par $\varphi(t) = u_q(tx)$. Il vient : $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt$.

Comme $\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u_q}{\partial x_i}(tx)$ et $\varphi''(t) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}(tx) = 0$, on a :

$u_q(x) = u_q(0) + \sum_{i=1}^n \alpha_{q,i} x_i$. Donc u est affine et la matrice de la partie linéaire de u dans la base canonique est $J_x(u)$; elle est inversible.

5. $n = 2$. On a : $Df = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$. Doù la condition (1) puisque :

$Du_1(x) = e^{x_1} \cos(x_2) - e^{x_1} \cos(x_2) = 0$ et $Du_2(x) = e^{x_1} \sin(x_2) - e^{x_1} \sin(x_2) = 0$.

On a $J_x(u) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \cos(x_2) & -e^{x_1} \sin(x_2) \\ e^{x_1} \sin(x_2) & e^{x_1} \cos(x_2) \end{pmatrix}$. Donc ${}^t J_x(u) J_x(u) = e^{2x_1}$ et la condition (2) est réalisée. Enfin $\det(J_x(u)) = e^{2x_1} \neq 0$ et la condition (3) est réalisée. Et pourtant, u n'est pas affine.

• Équation aux dérivées partielles

$\mathcal{C}$ désigne l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Le sous-espace de $\mathcal{C}$ constitué des fonctions polynomiales de deux variables est noté $\mathcal{P}$. Étant donnée l'équation aux dérivées partielles (1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ on désigne par E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ constitué des solutions de (1) et par F l'ensemble $E \cap \mathcal{P}$.

1. Soit P un élément de F que l'on écrit sous la forme $P(x, t) = \sum_{k=0}^n P_k(x) t^k$

où, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k \in \mathbb{C}[X]$, P_n n'étant pas le polynôme nul.

a. Calculer P_n'' et exprimer P_k'' en fonction de P_{k+1} lorsque $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

b. En déduire l'expression de P_k , puis de P , en fonction de P_0 . Quel est le degré de P_0 ? Prouver finalement que $P(x, t) = \sum_{k=0}^n \frac{\partial^{2k} P}{\partial x^{2k}}(x, 0) \frac{t^k}{k!}$.

2. a. Prouver que pour tout élément π de $\mathbb{C}[X]$, la fonction polynôme à deux variables P_π définie par : $P_\pi(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi^{(2k)}(x) \frac{t^k}{k!}$ appartient à F .

b. On note désormais L l'application de $\mathbb{C}[X]$ dans F définie par $L(\pi) = P_\pi$. Prouver que L est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathbb{C}[X]$ et F . Expliciter L^{-1} .

3. Si $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = L(X^n)$.

a. Prouver que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de F . Expliciter $U_n(x, t)$.

b. Montrer, sans calcul, que pour tout entier n , les fonctions $\frac{\partial U_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial U_n}{\partial t}$ sont encore des éléments de F et les exprimer dans la base $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

4. Soit $(\lambda, x, t) \mapsto f_\lambda(x, t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$. Pour tout $(n, \lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ on pose $f_\lambda^{(n)}(x, t) = \frac{\partial^n f}{\partial \lambda^n}(x, t)$. On suppose, pour tout λ , que la fonction $(x, t) \mapsto f_\lambda(x, t)$ est solution de (1). Montrer, pour tout entier n et tout réel λ , que la fonction $f_\lambda^{(n)}$ est aussi solution de (1).

5. Soit g un élément non nul de $\mathcal{C}$ de la forme $g(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$ où φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer : $g \in E \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi'' = \alpha^2 \varphi$ et $\psi' = \alpha^2 \psi$.

b. En déduire la forme générale des solutions g de la forme précédente. (On distinguera le cas $\alpha = 0$ et le cas $\alpha \neq 0$).

6. On note désormais F la fonction définie sur $\mathbb{C}^3$ par : $F(\lambda, x, t) = e^{\lambda x + \lambda^2 t}$.

a. Soit (u, v) un élément donné de $\mathbb{C}^2$; prouver que $\alpha \mapsto F(\alpha, u, v)$ est la somme d'une série entière sur $\mathbb{C}$ de la forme (2) $F(\alpha, u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(u, v) \frac{\alpha^n}{n!}$

où V_n est, quel que soit l'entier n , un élément de $\mathcal{P}$.

b. Pour λ réel, on note f_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_\lambda(x, t) = F(\lambda, x, t)$. Exprimer $V_n(x, t)$ à l'aide de $f_\lambda^{(n)}$ et en déduire que la fonction, qui à tout élément (x, t) de $\mathbb{R}^2$ associe $V_n(x, t)$ appartient à F .

c. En utilisant (2) calculer $V_n(x, 0)$ et en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, U_n(x, t) = V_n(x, t).$$

7. a. Calculer $f_\lambda^{(1)}$ et prouver, si $n \geq 2$:

$$f_\lambda^{(n)}(x, t) = (x + 2\lambda t) f_\lambda^{(n-1)}(x, t) + 2t(n-1) f_\lambda^{(n-2)}(x, t).$$

b. En déduire que les polynômes U_n satisfont, pour tout (x, t) dans $\mathbb{R}^2$, à $U_0(x, t) = 1, U_1(x, t) = x$ et, si $n \geq 1, U_{n+1}(x, t) = xU_n(x, t) + 2ntU_{n-1}(x, t)$.

8. En considérant $\frac{\partial F}{\partial x}$, retrouver l'expression de $\frac{\partial U_n}{\partial x}$ trouvée dans I.3.b.

Solution

1. a. $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{k=0}^n P_k''(x) t^k = \frac{\partial P}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=1}^n k P_k(x) t^{k-1}$. Par liberté de $(t^k)_{k \geq 0}$ sur le corps $\mathbb{C}(x)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}(x)[t]$, en identifiant les coefficients de t^k il vient : $P_n'' = 0$ et $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P_k'' = (k+1)P_{k+1}$.

b. Par récurrence : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P_k = \frac{1}{k!} P_0^{(2k)}$ et donc $P = \sum_{k=0}^n P_0^{(2k)}(x) \frac{t^k}{k!}$.

Comme $P_n \neq 0$ et $P_n'' = 0$ on a $\deg(P_n) \in \{0, 1\}$ d'où $\deg(P_0) \in \{2n, 2n+1\}$.

Si $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\frac{\partial^{2i} P}{\partial x^{2i}}(x, t) = \sum_{k=0}^n P_0^{(2(i+k))}(x) \frac{t^k}{k!}$ d'où $\frac{\partial^{2i} P}{\partial x^{2i}}(x, 0) = P_0^{(2i)}(x)$ et donc :

$$P(x, t) = \sum_{k=0}^n \frac{\partial^{2k} P}{\partial x^{2k}}(x, 0) \frac{t^k}{k!}.$$

2. a. Par linéarité des opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ et comme les sommes portent en fait sur un ensemble fini d'indices, on a $\frac{\partial^2 P_\pi}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi^{(2(k+1))}(x) \frac{t^k}{k!}$ et aussi

$$\frac{\partial P_\pi}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi^{(2k)}(x) \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \text{ ce qui prouve que } P_\pi \in F.$$

b. L est clairement linéaire et 1.b. prouve sa surjectivité. De plus $P_\pi(x, 0) = \pi(x)$ donc $\text{Ker}(L) = \{0\}$ et donc L est un isomorphisme entre $\mathbb{C}[x]$ et F avec $L^{-1}(P) = \pi$ si $\pi(x) = P(x, 0)$.

3. a. L'image de la base $(x^n)_{n \geq 0}$ de $\mathbb{C}[x]$ par l'isomorphisme L est une base de F .

$$\frac{d^{2k} x^n}{dx^{2k}} = \frac{n!}{(n-2k)!} x^{n-2k} \text{ si } n \geq 2k, 0 \text{ sinon, } U_n(x, t) = \sum_{k=0}^{E[n/2]} \frac{n!}{(n-2k)!k!} x^{n-2k} t^k.$$

On se place dans $\mathbb{C}(x)[t]$, le degré cherché est $E[n/2]$ comme on vient de le voir.

$$\text{b. } \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_n}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} \right) \text{ d'après le théorème de}$$

Schwarz car U_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Donc $\frac{\partial U_n}{\partial x} \in F$ et, de même $\frac{\partial U_n}{\partial t} \in F$.

$$U_n(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{2k} x^n}{dx^{2k}} \frac{t^k}{k!} \text{ d'où } \frac{\partial U_n}{\partial x}(x, t) = n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{2k+1} x^n}{dx^{2k+1}} \frac{t^k}{k!} = n U_{n-1}(x, t) \text{ si } n \geq 1$$

et $\frac{\partial U_0}{\partial x}(x, t) = 0$ car U_0 est constant. Alors $\frac{\partial U_n}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} = n(n-1)U_{n-2}$ si $n \geq 2$ et 0 sinon.

4. Utilisons le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f_\lambda^{(n)}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^n f}{\partial \lambda^n} \right) = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^n f}{\partial \lambda^n} \right) = \frac{\partial f_\lambda^{(n)}}{\partial t} \text{ donc } f_\lambda^{(n)} \text{ est}$$

solution de (1).

5. a. • Si $\varphi'' = \alpha^2 \varphi$ et $\psi' = \alpha^2 \psi$ g est solution de (1).

• Si g est solution de (1) on a, pour tout (x, t) dans $\mathbb{R}^2$, $\varphi''(x)\psi(t) = \varphi(x)\psi'(t)$. La fonction g étant non nulle on peut trouver un élément (x_0, t_0) de $\mathbb{R}^2$ tel que $g(x_0, t_0) \neq 0$ i.e. tel que $\varphi(x_0) \neq 0 \neq \psi(t_0)$. Si $t \in \mathbb{R}$, on a $\psi'(t) = \left(\frac{\varphi''(x_0)}{\varphi(x_0)} \right) \psi(t)$.

Notons α une racine carrée dans $\mathbb{C}$ de $\frac{\varphi''(x_0)}{\varphi(x_0)}$, alors $\psi' = \alpha^2 \psi$. Pour tout x dans

$\mathbb{R}$, on a $\varphi''(x) = \left(\frac{\psi'(t_0)}{\psi(t_0)} \right) \varphi(x)$ i.e. $\varphi''(x) = \alpha^2 \varphi(x)$, d'où l'équivalence demandée.

b. Si $\alpha = 0$, en tenant compte de la solution nulle, $g : (x, t) \mapsto ax + b$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

Si $\alpha \neq 0$ on obtient $g : (x, t) \mapsto [\lambda e^{\alpha x} + \mu e^{-\alpha x}] e^{\alpha^2 t}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

6. a. En tant que produit de fonctions développables en série entière sur $\mathbb{C}$ on a :

$F(\alpha, u, v) = e^{\alpha u} e^{\alpha^2 v} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n u^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n} v^n}{n!} \right)$ et donc $\alpha \mapsto F(\alpha, u, v)$ est

développable en série entière sur $\mathbb{C}$ avec $F(\alpha, u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(u, v) \frac{\alpha^n}{n!}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \in \mathcal{P}$.

b. Par unicité des coefficients d'un développement en série entière on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n(x, t) = \frac{\partial^n F}{\partial \lambda^n}(0, x, t) = f_0^{(n)}(x, t)$.

Or $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\lambda, x, t) = \lambda^2 F(\lambda, x, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(\lambda, x, t)$, donc f_0 est solution de (1) en particulier et, par II.1. $f_0^{(n)}$ aussi. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x, t) \mapsto V_n(x, t) \in F$.

c. $F(\lambda, x, 0) = e^{\lambda x} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x, 0) \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \lambda^n$. Par unicité des coefficients d'un développement en série entière il vient Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n(x, 0) = x^n$.

En utilisant la notation L définie dans I.2. on a $L^{-1}(V_n) - L^{-1}(U_n)$ polynôme qui s'annule sur $\mathbb{R}$ donc nul, et, par injectivité de L^{-1} , on en déduit $U_n = V_n$.

7. a. $f_\lambda^{(1)}(x, t) = (x + 2\lambda t)f_\lambda(x, t)$ facilement. La formule de Leibniz prouve alors que $f_\lambda^{(n)}(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{\partial^k (x + 2\lambda t)}{\partial \lambda^k} \frac{\partial^{n-k-1} f_\lambda}{\partial \lambda^{n-k-1}}(x, t)$ et donc :

$$\text{si } n \geq 2, f_\lambda^{(n)}(x, t) = (x + 2\lambda t)f_\lambda^{(n-1)}(x, t) + 2(n-1)t f_\lambda^{(n-2)}(x, t).$$

b. $U_0(x, t) = V_0(x, t) = f_0^{(0)}(x, t) = 1$, $U_1(x, t) = V_1(x, t) = f_0^{(1)}(x, t) = x f_0(x, t) = x$. Si $n \geq 1$, $U_{n+1}(x, t) = V_{n+1}(x, t) = f_0^{(n+1)}(x, t) = (x + 2\lambda t)f_0^{(n)}(x, t) + 2nt f_0^{(n-1)}(x, t)$ ie. $U_{n+1}(x, t) = (x + 2\lambda t)U_n(x, t) + 2nt U_{n-1}(x, t)$.

8. $\frac{\partial U_n}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial f_0^{(n)}}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^n F}{\partial \lambda^n} \right)(0, x, t)$, le théorème de Schwarz et la formule de Leibniz montrent que, si $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^n F}{\partial \lambda^n} \right)(\lambda, x, t) &= \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)(\lambda, x, t) = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} [\lambda F(\lambda, x, t)] \\ &= \lambda f_\lambda^{(n)}(\lambda, x, t) + n f_\lambda^{(n-1)}(\lambda, x, t), \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial x}(x, t) = n f_0^{(n-1)}(0, x, t) = n U_{n-1}(x, t) \text{ si } n \geq 1 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

• Optimisation, méthode du gradient (MP^{*})

Notations

$E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. On note $(\cdot | \cdot)$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ sa norme euclidienne.

• Soit $\mathcal{C}$ une partie convexe de E . On dit que $J : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si :

$$\forall (t \in [0, 1], \forall (x, y) \in \mathcal{C}, J((1-t)x + ty) \leq (1-t)J(x) + tJ(y).$$

• Soit $\mathcal{C}$ une partie convexe de E . On dit que J est dite strictement convexe si :

$$\forall (t \in]0, 1[, \forall (x, y) \in \mathcal{C}, x \neq y, J((1-t)x + ty) < (1-t)J(x) + tJ(y).$$

• $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive si $J(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$.

• On notera le problème $\mathcal{P} : \min_{x \in E} J(x)$.

• Si $J \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$, on note $\nabla J(x)$ le vecteur gradient de J en x .

• Si $J \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$, on rappelle que : $\frac{J(x+ty) - J(x)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} (\nabla J(x)|y)$

Partie I. Fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$

1. a. Montrer que la fonction $E \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \|x\|$ est convexe.

b. La fonction : $J : E \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (b|x) + \beta$ est-elle convexe ? Strictement convexe ?

c. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. La fonction : $J : E \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)$ est-elle convexe ? Est-elle strictement convexe ?

2. a. Si $n = 2$, la fonction $J_1 : x \mapsto x_1^2 + x_2^2 - ax_1 - bx_2 - c$ est-elle coercive ? Et la fonction $J_2 : x \mapsto x_1^2 - x_2^2$? Et la fonction $J_3 : x \mapsto x_1^2$?

b. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. La fonction

$$J : E \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x) \text{ est-elle coercive ?}$$

c. Soit $(\alpha, \beta) \in E \times \mathbb{R}$. La fonction : $J : E \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (\alpha|x) + \beta$ est-elle coercive ?

3. a. Montrer que si $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et coercive, $\mathcal{P}$ a au moins une solution.

b. Montrer que si $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe, alors $\mathcal{P}$ a au plus une solution.

4. Soit $\mathcal{C}$ une partie convexe de E et J une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{C}$. Montrer qu'elle est convexe si, et seulement si,

$$\forall (u, v) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}, J(v) \geq J(u) + (\nabla J(u)|v - u) \quad (1).$$

5. Soit $\mathcal{C}$ une partie convexe de E et J une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{C}$. Montrer qu'elle est convexe si, et seulement si, ∇J est un opérateur monotone de E ie. $\forall (u, v) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}, (\nabla J(u) - \nabla J(v)|u - v) \geq 0 \quad (2).$

On pourra introduire pour prouver l'une des implications, la fonction :

$$\varphi : t \mapsto (1-t)J(u) + tJ(v) - J((1-t)u + tv).$$

Dans la suite, on admettra que ∇J est strictement monotone si, et seulement si, J est strictement convexe.

6. Soit $J \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ telle que :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (u, v) \in E^2 (\nabla J(u) - \nabla J(v) | u - v) \geq \alpha \|u - v\|^2 \quad (\star)$$

Montrer que J est strictement convexe et coercive. Que conclure pour $\mathcal{P}$?

On pourra appliquer le théorème de Taylor avec reste intégral à la fonction $\psi : t \mapsto J((1-t)u + tv)$.

7. Soit $J \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ et convexe. Montrer que x^* réalise un minimum de J sur E si, et seulement si, $\nabla J(x^*) = 0$.

Partie II. Algorithmes

On veut minimiser une fonction J . On se donne un point de départ x_0 . Pour construire x_1 on veut se rapprocher de $\min J = J(x^*)$. on veut $J(x_1) < J(x_0)$; on cherche $x_1 = x_0 + \rho_1 d_1$ où d_1 est un vecteur de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\rho_1 > 0$. Quand ρ_1 existe, c'est une direction de descente de pas ρ_1 .

Schéma : $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné; $x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$, ρ_k, d_k choisis tels que $J(x_{k+1}) < J(x_k)$.

Pour trouver une direction de descente, le théorème de Taylor-Young donne : $J(x_{k+1}) = J(x_k) + \rho_k (\nabla J(x_k) | d_k) + o(\rho_k d_k)$.

Si l'on veut $J(x_{k+1}) < J(x_k)$, il suffit de prendre $d_k = -\nabla J(x_k)$.

On appelle cet algorithme **méthode du gradient**.

Le pas ρ_k est choisi constant ou variable. La méthode à pas optimal propose un choix qui rend J minimale le long de la direction de descente choisie.

1. Montrer que si le pas est optimal, $(\nabla J(x_k) | \nabla J(x_{k+1})) = 0$.

2. Soient $J \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$, $M > 0$ et $\alpha > 0$.

On suppose que ∇J est M -lipschitzienne et

$$\forall (x, y) \in E^2, (\nabla J(x) - \nabla J(y) | x - y) \geq \alpha \|x - y\|^2.$$

Montrer, en utilisant le théorème du point fixe, que l'algorithme du gradient à pas constant converge. On pourra considérer $S_\rho : x \mapsto x - \rho \nabla J(x)$.

3. Avec les mêmes hypothèses, montrer que l'algorithme du gradient à pas optimal converge vers le minimum de J . On pourra utiliser les calculs de I.6 pour comparer $J(x_k)$ et $J(x_{k+1})$.

Solution

Partie I

1. a. $J((1-t)x + ty) = \|(1-t)x + ty\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\|$ car $t \in [0, 1]$.

b. J est affine donc convexe mais pas strictement convexe.

c. Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}$, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A et l'on a alors : $(Ax|x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ avec $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ étant strictement convexe, $x \mapsto (Ax|x)$ et par suite J est strictement convexe ; en effet, pour tout $x \neq y$ et tout $t \in]0, 1[$,

$$((1-t)x + ty)^2 < (1-t)x^2 + ty^2 \iff t(1-t)(x-y)^2 > 0.$$

2. a. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$, on peut écrire
 $J_1(x) = \|x\|^2 - ax_1 - bx_2 + c \geq \|x\|^2 - \sqrt{a^2 + b^2} \|x\| - c \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty.$

Donc J_1 est coercive.

$J_2(0, p) = -n^2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc J_2 n'est pas coercive.

$J_3(0, p) = 0$. Donc J_3 n'est pas coercive.

b. Avec les notations de 1.c. et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x) \geq \frac{1}{2}\lambda_1 \|x\|^2 - \|b\| \cdot \|x\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty. \text{ Donc } J \text{ est coercive.}$$

$$c. J(x) = (\alpha|x) + \beta = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta.$$

S'il existe $\alpha_i = 0$, pour x tel que $x_i = p \in \mathbb{N}$ et $x_j = 0$ si $j \neq i$, on a $J(x) = \beta$.

S'il existe $\alpha_i < 0$, pour x tel que $x_i = p \in \mathbb{N}$ et $x_j = 0$ si $j \neq i$, on a
 $J(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} -\infty,$

S'il existe $\alpha_i > 0$, pour x tel que $x_i = -p \in \mathbb{N}$ et $x_j = 0$ si $j \neq i$, on a
 $J(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} -\infty.$

Autre méthode. Si $\alpha = 0$, alors $J(x) = \beta$. Si $\alpha \neq 0$, on a $\forall x \in \{\alpha\}^\perp, J(x) = \beta$.

Dans tous les cas, J est non coercive.

3. a. J étant coercive, soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| \geq a, J(x) > J(0_E)$. L'application J étant continue, il en est de même de sa restriction au compact de E défini par $B_f(0_E, a)$. Il existe $x_1 \in B_f(0_E, a)$ tel que, pour tout $x \in B_f(0_E, a), J(x) \geq J(x_1)$. Comme $J(0_E) \geq J(x_1)$, pour tout $x \in E, J(x) \geq J(x_1)$ ie. $\min_{x \in E} J(x) = J(x_1)$.

b. Si J est strictement convexe et si $m = \min_{x \in E} J(x) = J(x_1) = J(x_2)$ avec $x_1 \neq x_2$

alors $J\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(J(x_1) + J(x_2)) = m$ ce qui contredit le fait que m est minimum.

4. Si J est convexe, $\forall t \in [0, 1], \forall (u, v) \in \mathcal{C}^2, J((1-t)u + tv) \leq (1-t)J(u) + tJ(v)$.

$$\forall t \in]0, 1[, \frac{J((1-t)u + tv) - J(u)}{t} \leq J(v) - J(u).$$

par passage à la limite quand $t \rightarrow 0^+$ on obtient (1).

Réciproquement (1) appliqué au couple $((1-t)u + tv, u)$ puis au couple

$((1-t)u + tv, v)$ avec $t \in [0, 1]$, donne :

$$J(u) \geq J((1-t)u + tv) - t(\nabla((1-t)u + tv)|v - u) \text{ puis}$$

$$J(v) \geq J((1-t)u + tv) - (1-t)(\nabla((1-t)u + tv)|v - u).$$

Si l'on multiplie la première inégalité par $(1-t)$, la seconde par t et si l'on les additionne membre à membre, on obtient : $(1-t)J(u) + tJ(v) \geq J((1-t)u + tv)$ ie. J est convexe.

5. D'après I.4. si J est convexe, alors, pour tout $(u, v) \in \mathcal{C}^2$, on a :

$$J(v) \geq J(u) + (\nabla J(u)|v - u) \quad \text{et} \quad J(u) \geq J(v) + (\nabla J(v)|u - v).$$

L'addition membre à membre de ces inégalités donne :

$$0 \geq (\nabla J(u) - \nabla J(v)|v - u) \text{ ie. (2).}$$

Réciproquement, si (2) est vérifiée, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ à valeurs réelles par composition et $\varphi'(t) = J(v) - J(u) - (\nabla J((1-t)u + tv)|v - u)$.

$$\varphi'(t_1) - \varphi'(t_2) = (\nabla J((1-t_2)u + t_2v)) - \nabla J((1-t_1)u + t_1v)|v - u).$$

Si $x = (1-t_2)u + t_2v$ et $y = (1-t_1)u + t_1v$, alors $x - y = (t_1 - t_2)(u - v)$.

Donc $(\varphi'(t_1) - \varphi'(t_2))(t_1 - t_2) \leq 0$ d'après (2). D'où la décroissance de φ' . D'après le théorème de Rolle, comme $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Il s'ensuit que $\varphi' \geq 0$ sur $[0, c]$ et $\varphi' \leq 0$ sur $[c, 1]$. La fonction φ est croissante sur $[0, c]$ et décroissante sur $[c, 1]$. D'où $\varphi \geq 0$ sur $[0, 1]$ ie. J est convexe.

6. (*) implique que ∇J strictement monotone et donc J est strictement convexe d'après le résultat admis.

$$\psi(1) = \psi(0) + \psi'(0) + \int_0^1 (\psi'(t) - \psi'(0))dt \text{ ie.}$$

$$J(y) = J(x) + (\nabla J(x)|y - x) + \int_0^1 (\nabla J(x + t(y - x)) - \nabla J(x)|y - x)dt.$$

D'après (*),

$$\begin{aligned} J(y) &\geq J(x) + (\nabla J(x)|y - x) + \int_0^1 \alpha \|y - x\|^2 t dt \\ &= J(x) + (\nabla J(x)|y - x) + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2 \quad (***) \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $J(y) \geq J(x) - \|\nabla J(x)\| \cdot \|y - x\| + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2$.

Avec $x = 0$ on trouve $J(y) \xrightarrow{\|y\| \rightarrow +\infty} +\infty$ ie. J est coercive.

De I.3.a. et b. on déduit que J a un minimum atteint en un unique x^* ie. $\mathcal{P}$ a une solution unique.

7. • La condition nécessaire découle du cours.

• Si $\nabla J(x^*) = 0$, on déduit de (1) : $\forall x, J(x) \geq J(x^*) + (\nabla J(x^*)|x - x^*) = J(x^*)$.

Donc x^* réalise le minimum.

Partie II

1. Si J est minimale le long de la direction de descente choisie,

$$\frac{d}{dt} \left[J(x_k - t \nabla J(x_k)) \right]_{t=\rho_k} = -(\nabla J(x_{k+1})|\nabla J(x_k)) = 0 \Rightarrow \nabla J(x_k) \perp \nabla J(x_{k+1}).$$

2. Si $S_\rho : x \mapsto x - \rho \nabla J(x)$, alors $S_\rho(x) - S_\rho(y) = x - y - \rho(\nabla J(x) - \nabla J(y))$.

$$\begin{aligned} \|S_\rho(x) - S_\rho(y)\|^2 &= \|x - y\|^2 - 2\rho(\nabla J(x) - \nabla J(y)|x - y) + \rho^2 \|\nabla J(x) - \nabla J(y)\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 [1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2] = k^2 \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

$1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2 < 1 \iff \rho(2\alpha - M^2\rho) > 0 \iff \rho \in]0, \frac{2\alpha}{M^2}[$. Dans ce cas, S_ρ est contractante. S_ρ a un point fixe unique et la suite converge vers ce point fixe.

Remarque : si $\rho = \frac{\alpha}{M^2}$, k est le meilleur possible. On a convergence géométrique.

3. Avec les hypothèses, J est coercive et strictement convexe. Donc J a un minimum unique sur $\mathbb{R}^n$. Celui-ci est caractérisé par $\nabla J(x^*) = 0$.

($\star\star$) avec $x = x_{k+1}$ et $y = x_k$ donne :

$$J(x_k) \geq J(x_{k+1}) + (\nabla J(x_{k+1})|x_k - x_{k+1}) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x_{k+1}\|^2.$$

$$\nabla J(x_k) \perp \nabla J(x_{k+1}) \Rightarrow (\nabla J(x_{k+1})|x_{k+1} - x_k) = 0.$$

$$\text{Donc } J(x_k) \geq J(x_{k+1}) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x_{k+1}\|^2 \quad (\star\star\star).$$

($J(x_k)$) étant décroissante et minorée par $J(x^\star)$, converge.

$$(\star\star\star) \Rightarrow \|x_{k+1} - x_k\|^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

$$\nabla J \text{ étant } M\text{-lipschitzienne, } \nabla J(x_k) - \nabla J(x_{k+1}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Comme $\nabla J(x_{k+1}) \perp \nabla J(x_k)$, on a :

$$\|\nabla J(x_k)\|^2 = (\nabla J(x_k)|\nabla J(x_k) - \nabla J(x_{k+1})) \leq \|\nabla J(x_k)\| \cdot \|\nabla J(x_k) - \nabla J(x_{k+1})\|$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc $\nabla J(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

D'après l'hypothèse et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\alpha\|x_k - x^\star\|^2 \leq (\nabla J(x_k) - \nabla J(x^\star)|x_k - x^\star) \leq \|\nabla J(x_k) - \nabla J(x^\star)\| \cdot \|x_k - x^\star\|.$$

$$\text{Comme } \nabla J(x^\star) = 0, \text{ on a : } \forall k \in \mathbb{N}, \|x_k - x^\star\| \leq \frac{1}{\alpha}\|\nabla J(x_k)\|.$$

La suite (x_k) converge vers $x^\star$.

Index

A

Abel (transformation) 161
accroissements finis 204, 522
adhérence
 partie 104
 valeur 101, 136
adjoint (endomorphisme) 359

B

base
 adaptée 40
Bergstrom (inégalités) 382
Bernstein 330
Bessel
 inégalité 356
 équation différentielle 500
Bienaymé-Tchebychev 423
boule 92
Borel (théorème) 228

C

caractéristique (polynôme) 47
caractéristique (sous-espaces) 51
Carathéodory 124
Cartan-Dieudonné (théorème) 370
Cauchy
 inégalités 335
 problème 476
Cauchy-Schwarz (inégalité) 422
Cayley-Hamilton (théorème) 49
Cesàro (théorème) 144
chinois (théorème) 13
Cholesky (décomposition) 371
classe $\mathcal{C}^k$ 199
compact 113
compléments (formule)
continue 105
continue par morceaux 168
continuité uniforme 111
congruence 6
connexité par arcs 119

convergence
 absolue 143
 normale 174
 série 141
 simple 163
 suite
 uniforme 165, 173
 dominée 250
 en moyenne 207
 en moyenne quadratique
convexité 118
convolution 277
Courant-Fischer (théorème) 382
covariance 423
critique (point) 522
cyclique
 groupe 3, 6
 matrices 77
cyclotomiques (polynômes) 29

D

D'Alembert (théorème) 530
Darboux 124
décomposition des noyaux 43
décomposition polaire 370
dense 105
dérivable, dérivée 193
diagonalisable 52
différentielle 513
Dini (théorèmes) 184
distance 91
distance à une partie 93
double limite 167, 175
DSE
Dunford (décomposition) 86
Eisenstein (critère) 29
endomorphisme
 normal 367
 symétrique 365
équivalence

normes 99
 écart-type 422
 escalier (fonctions) 168
 espace ℓ^p 158
 espace vectoriel normé 91
 espérance 417
 Euler (indicatrice) 13
F
 fermée (partie) 103
 fonctions génératrices 426
 Fourier (transformation) 280
 frontière 104
G
 Galton-Watson 462
 Gamma (fonction) 245, 254
 gradient 521, 548
 Gram-Schmidt (procédé) 353
 Gram (déterminant) 379
 Gronwall (lemme) 504
H
 Hadamard (inégalité) 61
 Hardy (théorème) 251
 Hardy-Littlewood (théorème) 383
 harmonique (fonction) 529
 Heine (théorème) 114
 Hermite (polynômes) 353
 hessienne 526
 Hilbert (matrice) 389
 homéomorphisme
 Householder (méthode) 371
I
 Idéal 10
 induit (endomorphisme) 37
 inégalité de Cauchy-Schwarz 351
 intégrale
 de Bertrand 245
 à paramètre 252
 intérieur 105
J
 Jacobien(ne) 518

L
 Lagrange
 polynômes 58
 théorème 4
 multiplicateurs 528
 Laplace
 méthode 288
 transformation 284
 Laguerre (polynômes) 353
 Legendre (polynômes) 353
 Leibniz (formule) 199
 limite
 d'une fonction 105
 d'une suite 97
 Liouville (théorème) 18
 lipschitzienne 96
M
 Markov (négalité) 419
 Mertens (théorème) 177
 minimal (polynôme) 42
 moment d'une variable aléatoire 417
 monogène 3
 Möbius 29
N
 Nilpotent 10
 Norme 91
O
 Ouverte (partie) 102
 orthogonal
 automorphisme 360
 groupe 362
 matrice 362
 sous-espace vectoriel 355
 orthogonalité 352
P
 Paquets 156
 Parseval (égalité) 357
 point fixe (théorème) 155
 primitive 203
 Probabilité 406
 produit infini 187

produit scalaire 349
projection orthogonale 355, 369
projecteurs spectraux 61
Pythagore (théorème) 352
Q
Quaternions 33
R
Raabe-Duhamel (règle) 152
radical d'un idéal 17
rayon de convergence 303
Riemann-Lebesgue (lemme) 212
Riesz (théorème) 123
S
Schmidt (orthonormalisation) 353
Schwarz (théorème) 524
série
 de fonctions 173
 entières 303
 de Riemann 144
 de vecteurs 145
 composantes 142
Simpson (méthode) 230
sous-espace propre 45
spectre 45
Stirling (théorème) 288
subdivision 168
suite
 convergentes 97
 extraite 100
 de fonctions 163
 de polynômes orthogonaux 353

 vecteurs 97
suites récurrentes linéaires 89
T
Taylor (formules)
 inégalité 206
 Laplace 206
 Young 206, 526
Tchebychev (polynômes) 353
totale (famille) 357
transfert (théorème) 418
transformation suite/série 142
tribu 405
trigonalisable 56
V
Valeur propre 45
Vandermonde 84
variables aléatoires 411
 divisibles 454
 gaussiennes 459
variance 421
variation bornée 236
variation des constantes 479, 484
vecteur propre 45
voisinages 101
W
Wallis (intégrale) 207
Weierstrass (théorème) 171
Wilson (théorème) 18
wronskien 483
Z
Zêta de Riemann 173, 175, 209.

MATHS

**NOUVEAUX
PROGRAMMES**

**MP-MP*
MPI-MPI***

Ce manuel de mathématiques, conforme aux nouveaux programmes, est écrit à l'intention des étudiants des classes préparatoires de seconde année des filières MP/MP* et MPI/MPI*.

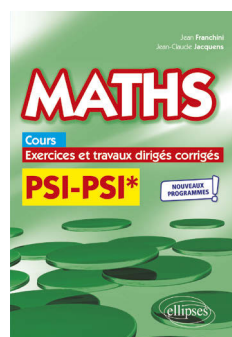
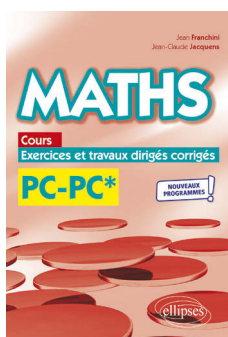
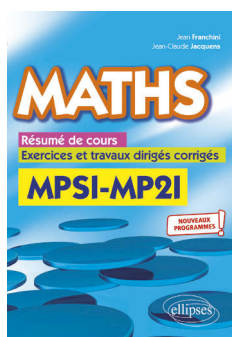
Les auteurs se sont efforcés de respecter le programme où certaines démonstrations sont déclarées « hors programme » et d'autres « non exigibles des étudiants ». Si les premières ne figurent pas toutes dans ce livre, les secondes sont explicitées et pourront n'être abordées qu'en seconde lecture.

Chaque chapitre est à considérer comme un triptyque dont la partie centrale serait le cours et les panneaux les exercices et les travaux dirigés :

- le cours contient un très grand nombre d'exemples et de remarques pour aider à la compréhension ;
- les 220 exercices sont tous intégralement corrigés ;
- les 57 travaux dirigés prolongent le cours et ouvrent des horizons vers la physique, les sciences de l'ingénieur, et les mathématiques enseignées dans les écoles d'ingénieur.

Les auteurs n'ont pas privilégié les exercices « rusés » mais les exercices riches tant par l'utilisation du cours qu'ils nécessitent que par les espaces de liberté qu'ils ouvrent.

Des mêmes auteurs :



www.editions-ellipses.fr

