Trigonométrie

MatheX

1er février 2021

1. Cercle trigonométrique

Définition 1 : (cercle trigonométrique)

Soit un repère orthonormé $(O ; I, J)$

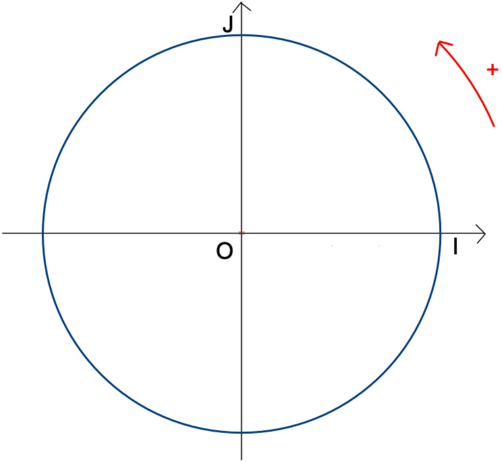
Le cercle trigonométrique est le cercle :

- de centre O
- de rayon 1
- muni d'un sens positif : de I vers J.

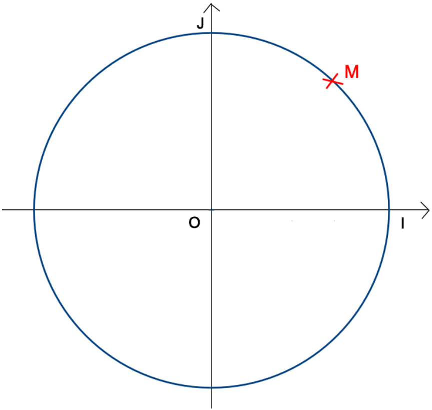
Ce sens positif est appelé sens trigonométrique (ou direct)

Exemple : *Représenter le cercle trigonométrique :*

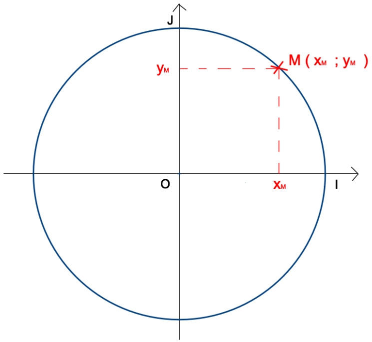
Exemple : *Représenter le cercle trigonométrique :*

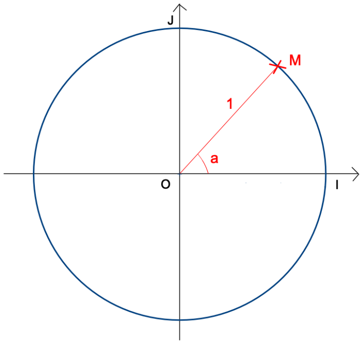


Exemple 2 : *Comment repérer un point sur le cercle trigonométrique :*



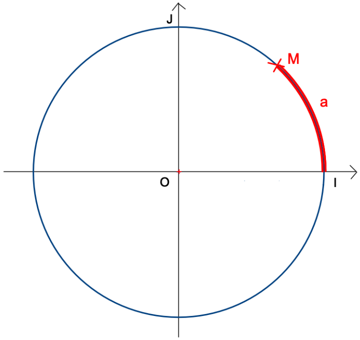
Exemple 2 : *Comment repérer un point sur le cercle trigonométrique :*

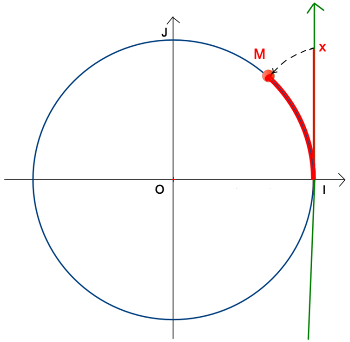




Exemple 2 : *Comment repérer un point sur le cercle trigonométrique :*

Exemple 2 : *Comment repérer un point sur le cercle trigonométrique :*





Propriété 1 : (point image d'un réel)

Soit l'axe parallèle à l'axe des ordonnées passant par I et orienté vers le haut.

On peut repérer chaque point M du cercle trigonométrique par un réel x égal à l'abscisse du point correspondant sur cet axe en l'enroulant sur le cercle trigonométrique.

On dit que M est le point **image** du réel x

Réciproquement, à tout point M du cercle trigonométrique, on peut associer plusieurs réels séparés par un multiple de 2π :

$$\boxed{x + k \times 2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$$

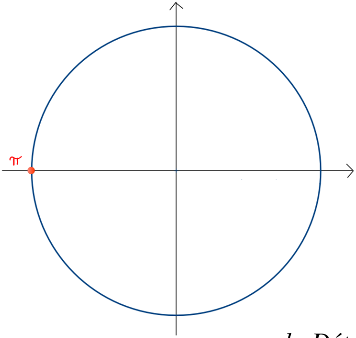
Exemple :

a. Placez le point image de π sur le cercle trigonométrique :

b. Déterminez les réels associés à ce point

Exemple :

a. Placez le point image de π sur le cercle trigonométrique :



b. Déterminez les réels associés à ce point

Tous les réels de la forme $\pi + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\pi \quad \pi + 1 \times 2\pi = 3\pi \quad \pi + 2 \times 2\pi = 5\pi \quad \pi + 3 \times 2\pi = 7\pi \quad \ldots$$

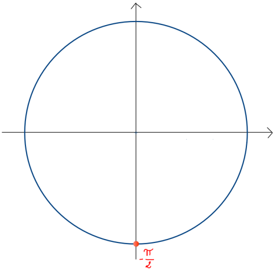
$$\pi + (-1) \times 2\pi = -\pi \quad \pi + (-2) \times 2\pi = -3\pi \quad \pi + (-3) \times 2\pi = -5\pi \quad \ldots$$

Exemple 2 :

a. Placez $-\dfrac{\pi}{2}$ *sur le cercle trigonométrique :*

b. Déterminez les réels associés à ce point

Exemple 2 : *a. Placez* $-\dfrac{\pi}{2}$ *sur le cercle trigonométrique :*



b. Déterminez les réels associés à ce point

Tous les réels de la forme $-\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$:

$-\dfrac{\pi}{2}$ $\quad -\dfrac{\pi}{2} + 1 \times 2\pi = \dfrac{3\pi}{2}$ $\quad -\dfrac{\pi}{2} + 2 \times 2\pi = \dfrac{7\pi}{2}$ $\quad -\dfrac{\pi}{2} + 3 \times 2\pi = \dfrac{11\pi}{2}$ $\quad \cdots$

$-\dfrac{\pi}{2} + (-1) \times 2\pi = -\dfrac{5\pi}{2}$ $\quad -\dfrac{\pi}{2} + (-2) \times 2\pi = -\dfrac{9\pi}{2}$ $\quad \cdots$

Propriété 2 : (mesure d'angles en radian)

Soit un repère orthonormé $(O ; I, J)$
Soit M le point image d'un réel x sur le cercle trigonométrique.

x est la mesure en radian de l'angle $\widehat{OIM}$ orienté de I vers M

Exemple : *Déterminez les correspondances des mesures d'angles :*

Mesure en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		x	
Mesure en degré						180		y

Exemple : *Déterminez les correspondances des mesures d'angles :*

Mesure en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	x	$\dfrac{\pi}{180}y$
Mesure en degré	0	30	45	60	90	180	$\dfrac{180}{\pi}x$	y

2. Fonctions trigonométriques

Définition 2 : (cosinus, sinus)

Soit un repère orthonormé $(O ; I , J)$, le cercle trigonométrique et M un point de ce cercle d'image x.

On associe aux coordonnées de M les fonctions cosinus et sinus :

- $cos(x)$ est l'abscisse de M
- $sin(x)$ est l'ordonnée de M

Les coordonnées de M sont donc : $\boxed{M\,(\,cos(x)\,;\,sin(x)\,)}$

Exemple : *Déterminez $cos(x)$ et $sin(x)$ pour :*

a. $x = 0$

b. $x = \frac{\pi}{2}$

c. $x = \pi$

d. $x = -\frac{\pi}{2}$

Exemple :

Déterminez $cos(x)$ et $sin(x)$ pour :

a. $x = 0$

$cos\, 0 = 1$ et $sin\, 0 = 0$

b. $x = \frac{\pi}{2}$

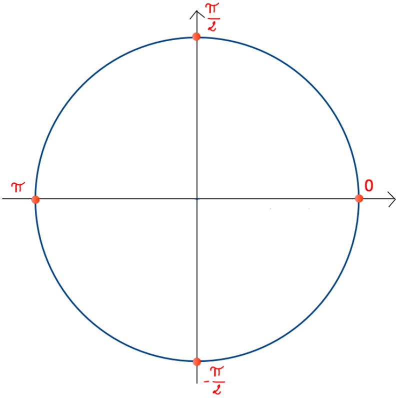
$cos\, \frac{\pi}{2} = 0$ et $sin\, \frac{\pi}{2} = 1$

c. $x = \pi$

$cos\, \pi = -1$ et $sin\, \pi = 0$

d. $x = -\frac{\pi}{2}$

$cos\, -\frac{\pi}{2} = 0$ et $sin\, -\frac{\pi}{2} = -1$



Exemple (2) :

Déterminez $\cos x$ *et* $\sin x$ *pour :*

e. $x = \dfrac{\pi}{4}$

Exemple (2) :

Déterminez $\cos x$ et $\sin x$ pour :

e. $x = \dfrac{\pi}{4}$

$\widehat{COA} = \dfrac{\pi}{4}$ et $\widehat{ACO} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \widehat{OAC} = \dfrac{\pi}{4}$

$\widehat{COA} = \dfrac{\pi}{4}$ et $\widehat{OAC} = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow CAO$ isocèle en C

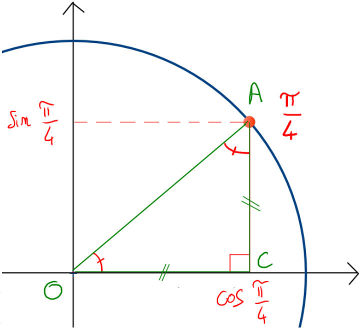
$\Rightarrow OC = CA \Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4}$

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = OA^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} > 0 \text{ et } \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ et } \boxed{\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$



Exemple (2) :

Déterminez $\cos x$ et $\sin x$ pour :

f. $x = \dfrac{\pi}{3}$

Exemple (2) :

Déterminez cos x et sin x pour :

f. $x = \frac{\pi}{3}$

$\widehat{IOA} = \frac{\pi}{3}$ et $OI = OA = 1$

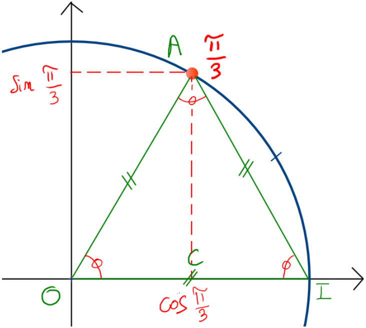
$\Rightarrow$ IAO triangle équilatéral

$\Rightarrow OC = \frac{1}{2} OI = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{cos\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$

$cos^2\,\frac{\pi}{3} + sin^2\,\frac{\pi}{3} = OA^2 = 1$

$\Rightarrow sin^2\,\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$sin\,\frac{\pi}{3} > 0$ et $sin^2\,\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{sin\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$



Exemple (2) :

Déterminez $\cos x$ *et* $\sin x$ *pour :*

f. $x = \dfrac{\pi}{6}$

Exemple (2) :

Déterminez $\cos x$ et $\sin x$ pour :

f. $x = \dfrac{\pi}{6}$

$\widehat{AOJ} = \dfrac{\pi}{3}$ et $OA = OJ = 1$

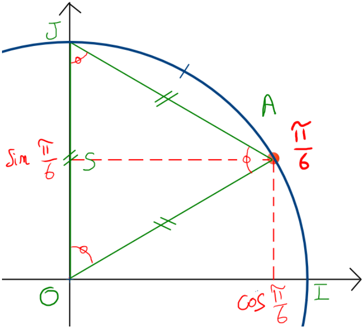
$\Rightarrow AJO$ triangle équilatéral

$\Rightarrow OS = \dfrac{1}{2} OJ = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}}$

$\cos^2 \dfrac{\pi}{6} + \sin^2 \dfrac{\pi}{6} = OA^2 = 1$

$\Rightarrow \cos^2 \dfrac{\pi}{1} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

$\cos \dfrac{\pi}{6} > 0$ et $\cos^2 \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$



Exemple (3) : *Retrouvez les formules trigonométriques du collège :*

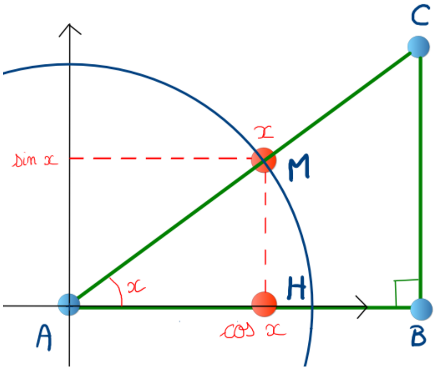
Exemple (3) : *Retrouvez les formules trigonométriques du collège :*

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AM}{AC} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{AB} = \frac{1}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\frac{HM}{BC} = \frac{AM}{AC} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{BC} = \frac{1}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$$



Définition 3 : (tangente)

La fonction tangente est définie pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{tan\, x = \frac{sin\, x}{cos\, x}}$$

Exemple :

Complétez le tableau :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$					
$\cos x$					
$\tan x$					

Exemple :

Complétez le tableau :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sin\, x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos\, x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tan\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Exemple (2) : *Représentez* $\tan x$ *à l'aide du cercle trigonométrique :*

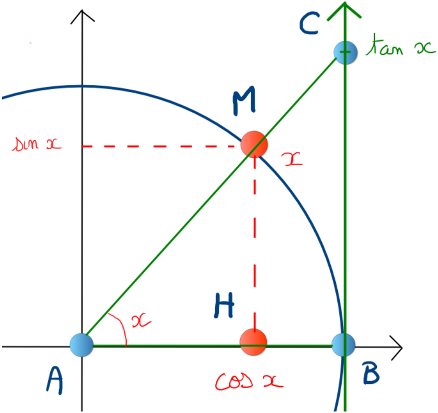
Exemple (2) : *Représentez $\tan x$ à l'aide du cercle trigonométrique :*

$$\frac{AH}{AB} = \frac{HM}{BC} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{1} = \frac{\sin x}{\tan x}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos\ x}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{\text{oppposé}}{\text{adjacent}}$$

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$



Propriété 3 : (encadrement, distance)

$$\boxed{-1 \leq cos(x) \leq 1} \tag{1}$$

$$\boxed{-1 \leq sin(x) \leq 1} \tag{2}$$

$$\boxed{cos^2(x) + sin^2(x) = 1} \tag{3}$$

Exemple :

Propriété 4 : (parité, périodicité)

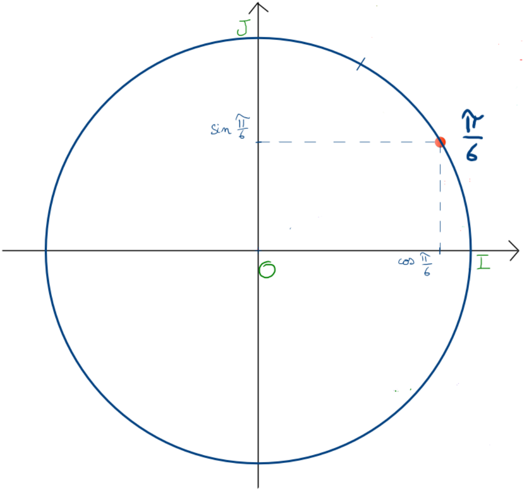
$$\boxed{cos(-x) = cos(x)} \qquad \text{fonction paire} \qquad (4)$$

$$\boxed{sin(-x) = -sin(x)} \qquad \text{fonction impaire} \qquad (5)$$

$$\boxed{cos(x + k \times 2\pi) = cos(x)} \qquad \text{fonctions } 2\pi\text{-périodiques} \qquad (6)$$
$$\boxed{sin(x + k \times 2\pi) = sin(x)}$$

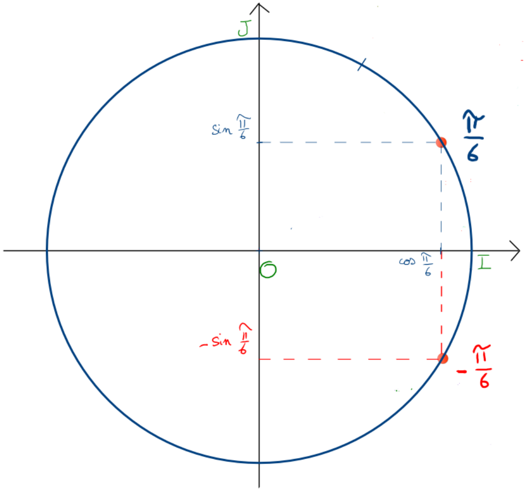
Exemple :

Représentez les symétriques de $\dfrac{\pi}{6}$:

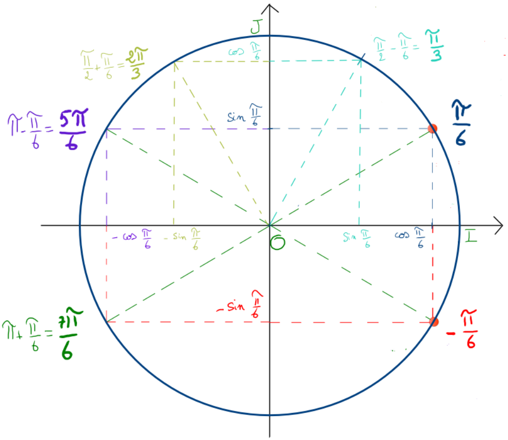


Exemple :

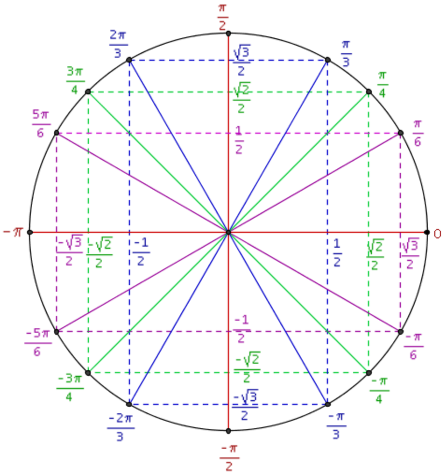
Représentez les symétriques de $\frac{\pi}{6}$:



Exemple : *Représentez les symétriques de* $\frac{\pi}{6}$ *:*



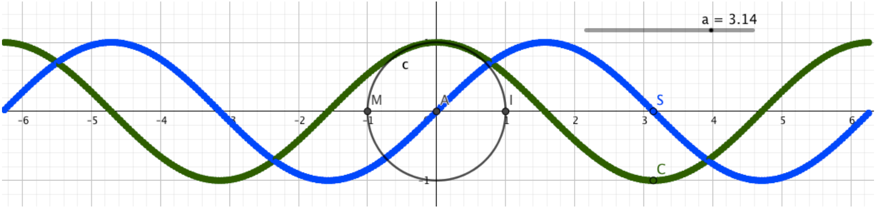
Propriété 5 : (valeurs remarquables)



Exemple :

Définition 4 : (sinusoïdes)

Les courbes représentatives de sinus et cosinus sont appelées des sinusoïdes



Exemple : *Animez les courbes trigonométriques :*

Animation geogebra:
https://www.geogebra.org/graphing/ywnz6wj7

3. Équation trigonométrique(Tale)

Propriété 6 : (équation trigonométrique)

$$\cos x = \cos a \iff \begin{cases} x = a \quad (2\pi) \\ \quad ou \\ x = -a \quad (2\pi) \end{cases}$$

$$\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x = a \quad (2\pi) \\ \quad ou \\ x = \pi - a \quad (2\pi) \end{cases}$$

Exemple :