Mathématiques pour DEUG

collection dirigée par Philippe PILIBOSSIAN

MATHS DEUG

ANALYSE 4

Séries de Fourier
Séries entières
Intégrales multiples

Claude SERVIEN

ellipses

ANALYSE 4

MATHÉMATIQUES POUR DEUG
collection dirigée par Philippe PILIBOSSIAN

DEUG SCIENCES

ANALYSE 4

Séries de Fourier
Séries entières
Intégrales multiples

Cours et exercices corrigés

Claude SERVIEN
Maître de conférences
à l'université Pierre et marie Curie (Paris VI)

ellipses

Dans la même collection, chez le même éditeur

- *Analyse 1. Corps des réels • Suites numériques • Fonctions d'une variable réelle • Développements limités*, par Thérèse MERLIER, Marie-Claude SARMANT, Philippe PILIBOSSIAN et Sleiman YAMMINE. À paraître.

- *Analyse 2.* par Thérèse MERLIER, Marie-Claude SARMANT, Philippe PILIBOSSIAN et Sleiman YAMMINE. À paraître.

- *Analyse 3. Séries numériques • Suites et séries de fonctions • Intégrales*, par Claude SERVIEN. 128 pages, 75 francs.

- *Algèbre 1. Ensembles fondamentaux • Arithmétique • Polynômes*, Gilles CHRISTOL, Philippe PILIBOSSIAN et Sleiman YAMMINE 128 pages, 75 francs.

- *Algèbre 2. Espaces vectoriels • Applications linéaires • Matrices • Déterminants • Systèmes linéaires*, par Gilles CHRISTOL, Philippe PILIBOSSIAN et Sleiman YAMMINE. À paraître.

ISBN 2-7298-9659-7

Présentation de la Collection

Les Mathématiques constituent un élément très important dans la plupart des disciplines modernes, à commencer par la Mécanique, la Physique, la Chimie, la Biologie, les Sciences économiques etc., sans omettre la dernière-née, l'Informatique. C'est donc tout naturellement que l'enseignement de cette matière, qui trouve sa naissance aux temps les plus reculés de l'Antiquité, occupe une place importante dans les programmes d'enseignement des premiers cycles.

D'une manière générale, les programmes successifs de Mathématiques de ce cycle n'ont pas subi de changements importants dans leur contenu ; la manière d'enseigner a évolué et certaines notions modernes se sont greffées au corpus principal, en suivant le processus d'avancement des disciplines qui à leur tour s'adaptaient à celui de la Science. C'est pourquoi on actualise périodiquement les manuels de Mathématiques, les excellents ouvrages plus anciens restant toujours utilisables — lorsqu'ils sont encore disponibles.

L'objectif de la présente collection, Mathématiques pour DEUG, est de mettre à la disposition des étudiants des premiers cycles scientifiques des universités un ensemble de livres de mathématiques ; ils contiennent le cours et de nombreux exercices et problèmes corrigés, et sont conformes aux derniers programmes des DEUG–Sciences des universités françaises.

Nous avons conçu ces ouvrages en ayant à l'esprit une double préoccupation : celle de rendre ces livres aussi accessibles que possible à tous les étudiants —, et pas seulement aux plus brillants, et celle de leur donner toute la rigueur mathématique, afin de satisfaire nos collègues les plus exigeants. Cette collection sera formée d'une dizaine d'ouvrages, de volume volontairement réduit.

Dans les premiers volumes, nous avons jugé utile d'introduire certaines parties des mathématiques en marge des programmes des enseignements du secondaire, ainsi que quelques nouvelles notions souhaitées par nos collègues numériciens et informaticiens. Pour attirer particulièrement l'attention des lecteurs, les parties délicates sont signalées par le signe de danger . La plupart des exercices sont des applications directes du cours et peuvent être facilement résolus ; toutefois, pour prévenir les lecteurs, ceux d'une certaine difficulté sont précédés du signe $\oplus$ et ceux marqués par le double signe $\oplus\oplus$ sont destinés aux plus courageux.

Pour la préparation de ces manuels, nous avons fait appel à une douzaine de mathématiciens, professant en moyenne depuis 30 ans, issus de diverses universités ;

cette équipe rédactionnelle trouve son ossature dans l'ancienne Faculté des Sciences de Paris et l'un de ses successeurs directs, l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

Nous avons apporté le plus grand soin à la présentation et à la mise en page des textes et des figures de ces livres; le choix du logiciel TEX de Donald E. Knuth s'est imposé pour ce travail.

Le travail accompli pour réaliser cette collection trouve sa parfaite justification dans l'aide qu'elle apportera aux étudiants pour une acquisition solide des mathématiques fondamentales.

Philippe Pilibossian

Avant–propos

Le présent livre, *Analyse 4*, destiné aux étudiants de seconde niveau du DEUG–Sciences, est consacré à l'Analyse ; il traite des séries de FOURIER, des séries entières et des intégrales multiples. Ce livre, *Analyse 4*, complète le précédent ouvrage *Analyse 3*.

Le cours est présenté dans sa version la plus utile pour la résolution des exercices et problèmes figurant à la fin de chaque chapitre, sans tomber dans l'accumulation de recettes propre à quelques manuels. Certaines parties apparaissent en petits caractères et peuvent être négligées par les lecteurs qui ne cherchent pas à approfondir toutes les notions mathématiques. Les exercices sont souvent des applications directes du cours et sont faciles à résoudre. Les solutions, qui suivent directement les énoncés des exercices et des problèmes, sont rédigées de façon détaillée et peuvent servir dans de nombreux cas comme modèle de corrigé–type. Elles ont été rédigées en tenant compte des programmes du DEUG, ce qui peut dans certains cas dépasser le cadre des classes préparatoires. De nombreux énoncés, signalés par $\boxed{\text{Exam}}$ sont des extraits de sujets d'examens et certains sont devenus des thèmes classiques de concours aux grandes écoles ; nous ne pouvons mieux faire qu'encourager les étudiants des classes préparatoires à s'entraîner sur ces textes.

Nous avons adopté les notations mathématiques les plus courantes en France en donnant une préférence à celles déjà homologuées par l'AFNOR ; on trouvera en début uniquement celles utilisées dans les livres *Analyse 3* et *Analyse 4*. Nous avons jugé utile de reproduire aussi l'alphabet grec, souvent ignoré, avec l'appellation et l'usage le plus courant des lettres.

On trouvera en annexe, en petit caractères, la théorie du calcul d'intégrales par la méthode des résidus et un formulaire de trigonométrie classique.

Nous remercions par avance les lecteurs qui nous signaleront les erreurs éventuelles malgré le soin que nous avons porté à cette édition.

l'Auteur

Table des matières

Notations mathématiques d'Analyse 3 et d'Analyse 4

$\Longleftrightarrow$ équivalence logique

$\Rightarrow$ implication logique

$\forall$ pour tout

$\exists$ il existe

$\in$ appartient

$\sum_{i=1}^{n}$ somme pour i variant de 1 à n

$\prod_{i=1}^{n}$ produit pour i variant de 1 à n

$\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

$\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs

$\mathbb{Q}$ ensemble des rationnels

$\mathbb{R}$ ensemble des réels

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$

$\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} + \{-\infty, +\infty\}$ droite achevée

$d\,(a, b)$ distance de a à b

$\|\cdot\|$ norme

$\mathbb{C}$ corps des complexes

$\Re e(z)$ partie réelle du complexe z

$\mathrm{im}\, m(z)$ partie imaginaire de z

$\overline{z}$ complexe conjugué

$|z|$ module de z

$\mathrm{Arg}(z)$ argument du complexe z

$\mathrm{Res}\,(z)$ résidu du complexe z

$\overline{A}$ adhérence de A

$\mathring{A}$ adhérence de A

$f : E \longrightarrow F$ application f de E dans F

$f : x \longmapsto y$ application f qui à x fait correspondre y

$\lim\limits_{m \to a} f(m)$ limite de $f(m)$ lorsque m tend vers a

$f(a^+)$ limite de $f(x)$ lorsque x tend par valeurs supérieures vers a $(x \to a^+)$

$f(a^-)$ limite de $f(x)$ lorsque x tend par valeurs inférieures vers a $(x \to a^-)$

f'_x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ dérivée partielle de f par rapport à x

cos cosinus

cosh cosinus hyperbolique

cot cotangente

sin sinus

sinh sinus hyperbolique

tan tangente

exp exponentielle de base e

ln logarithme népérien

$\simeq$ valeur approchée

$\sim$ équivalent à (fonctions)

$\approx$ équivalent à (fonctions) pour les séries de Fourier

$o(u)$ infiniment petit équivalent à u

(u_n) suite de terme général u_n

$\sum u_n$ série de terme général u_n

$\emptyset$ ensemble vide

$A - B = \{x \ ; \ x \in A, \ x \notin B\}$

$\operatorname{im} \gamma$ image de γ

$n!$ factoriel n

rot rotationnel

div divergent

$\mathcal{F}(E, F)$ espace vectoriel des fonction de E dans F

$\mathcal{C}(E, F)$ l'ensemble des fonctions continues de E dans F

Lettres de l'alphabet grec utilisées

Lettre	Appélation	Valeur	Utilisations
α	*alpha*	a	
β	*béta*	b	
γ	*gamma*	g	
δ	*delta*	d	
ε	*epsilon*	e	infiniment petit
ζ	*dzêta*	dz	
η	*êta*	e	infiniment petit
θ	*thêta*	t*	angle
κ	*kappa*	k	constante
λ	*lambda*	l	scalaire
μ	*mu*	m	scalaire
ν	*nu*	n	
ξ	*xi*	ks	
π	*pi*	p	constante universelle = 3,14 ...
ρ	*rhô*	r	rayon en coordonnés polaires
σ	*sigma*	s	écart type en probabilité
τ	*tau*	t	
ϕ, φ	*phi*	p*	fonction caractéristique
χ	*khi*	k*	loi de khi–deux en statistique
ψ	*psi*	ps	
ω	*omega*	o	pulsation en mécanique
Γ	*Gamma*	g	fonction gamma
Δ	*Delta*	D	accroissement
Θ	*Thêta*	T*	
Λ	*Lambda*	L	
Π	*Pi*	P	produit
Σ	*Sigma*	S	somme
Φ	*Phi*	P*	
Ψ	*Psi*	Ps	
Ω	*Omega*	O	événement certain en probabilité

(∗) aspiré

CHAPITRE I

SÉRIES DE FOURIER

1. Séries trigonométriques

Définition I.1. — *Une série trigonométrique est une série de fonctions dont le terme général est de la forme :*

$$\boxed{u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (n \geq 1)}$$

où x est une variable réelle et (a_n), (b_n) sont des suites complexes ou réelles. Pour $n = 0$, on pose $u_0(x) = \frac{1}{2}a_0$ (cela sera justifié ultérieurement).

REMARQUE I.2. — Le terme général u_n est une fonction continue de période 2π.

REMARQUE I.3. — Le réel T étant positif, posons $v_n(x) = a_n \cos \dfrac{2\pi nx}{T} + b_n \sin \dfrac{2\pi nx}{T}$; v_n est une fonction continue de période T, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation, $f = \frac{1}{T}$ est la fréquence.

REMARQUE I.4. — Dans la suite on ne considérera que des fonctions de période 2π, en donnant les formules utiles pour une période T quelconque.

Autre expression de $u_n(x)$. — Sachant que :

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}),$$

on a
$$\begin{aligned} u_n(x) &= \frac{a_n}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) - \frac{ib_n}{2}(e^{inx} - e^{-inx}) \\ &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx}. \end{aligned}$$

Pour $n > 0$, posons $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, pour $(-n) < 0$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ et $c_0 = \frac{1}{2}a_0$. On peut alors écrire, sous réserve que la série en question converge, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ avec la convention suivante :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n = \alpha_0 + \sum_{1}^{+\infty}(\alpha_n + \alpha_{-n}).$$

REMARQUE I.5. — On en déduit que $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$ $\quad (n \geq 1)$.

1.1 Convergence

On donne deux cas où la série converge :

Proposition I.6. — *Si les séries de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes, la série $\sum u_n(x)$ est uniformément convergente et sa somme $u(x)$ est une fonction continue de période 2π.*

Preuve : $|u_n(x)| \leq |a_n \cos nx| + |b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|$, donc $\sum u_n(x)$ converge absolument et normalement ; la continuité de la somme en résulte. La périodicité est évidente. □

Proposition I.7 [Théorème d'ABEL-uniforme]. — *Si (a_n) et (b_n) sont des suites positives qui tendent vers 0 en décroissant, la série trigonométrique est convergente ; elle converge uniformément sur tout compact $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$; sa somme $u(x)$ est donc continue sur $]0, 2\pi[$, donc sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.*

Preuve : Posons $\alpha_n(x) = a_n \cos nx$ et a_n décroit vers 0, uniformément par rapport à x puisque indépendant de x, comme $\sum_0^n \cos kx = Re(\sum_0^n e^{ikx})$ avec

$$\left|\sum_0^n e^{ikx}\right| = \left|\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right| \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|}$$
$$= \frac{2}{\left|e^{\frac{ix}{2}}\right| . \left|e^{\frac{ix}{2}} - e^{\frac{-ix}{2}}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leq \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$$

sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$. On peut alors appliquer le théorème d'ABEL. De même avec $\beta_n(x) = b_n \sin nx$. □

1.2 Calcul des coefficients en fonction de la somme

On suppose que la série converge uniformément sur $[0, 2\pi]$ et on pose

$$u(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Soit p un entier relatif :

$$\int_0^{2\pi} u(x) e^{-ipx} dx = \int_0^{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i(n-p)x} dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)x} dx.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{imx} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } m = 0 \end{cases}$ et m entier relatif, on trouve que :

$$\int_0^{2\pi} u(x) e^{-ipx} dx = 2\pi c_p.$$

On en déduit l'expression des coefficients a_p et b_p :

$$\boxed{\begin{aligned} a_p &= c_p + c_{-p} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \left(e^{-ipx} + e^{ipx}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \cos(px)\, dx \ ; \\ b_p &= i\left(c_p - c_{-p}\right) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \left(e^{-ipx} - e^{ipx}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \sin(px)\, dx\,. \end{aligned}}$$

REMARQUE I.8. — $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x)\, dx$; or par nos formules $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x)\, dx$ ce qui justifie que la série ait pour terme constant $\frac{1}{2} a_0$.

Formulaire I.9. — On retiendra les formules suivantes :

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} u(x)\cos px\,dx \quad (p \geq 0), \alpha \text{ réel quelconque}$$
$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} u(x)\sin px\,dx \quad (p \geq 0)$$
$$c_p = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} u(x)e^{-ipx}\,dx \quad (\text{p entier relatif})$$

En particulier $\alpha = 0$ donne les expressions précédentes, tandis que $\alpha = -\pi$ donne d'autres formules ; c'est la fonction $u(x)$ qui déterminera, comme on le verra, le choix de α ; ces formules reposent sur le lemme suivant.

Lemme I.10. — *Si g est une fonction de période 2π, intégrable, on a*

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} g(x)\,dx = \int_0^{2\pi} g(x)\,dx.$$

Preuve : $\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+2\pi} g(x)\,dx = \int_\alpha^0 g(x)\,dx + \int_0^{2\pi} g(x)\,dx + \int_{2\pi}^{2\pi+\alpha} g(x)\,dx.$
Posons $x = y + 2\pi$ dans la dernière intégrale qui devient $\int_0^\alpha g(y)\,dy$ car g est périodique, de période 2π, d'où le résultat. □

Cas particuliers : **a)** Si la période T est différente de 2π, on trouverait

$$c_p = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} u(x)e^{-i\frac{2\pi p}{T}x}\,dx\ , \qquad a_p = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} u(x)\cos\frac{2\pi p}{T}x\,dx\ ,$$
$$b_p = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} u(x)\sin\frac{2\pi p}{T}x\,dx$$

b) En prenant $\alpha = -\pi$, on obtient les cas suivants :
- ▷ si $u(x)$ est une fonction paire, alors $u(x)\sin px$ est impaire donc $b_p = 0$ et $a_p = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x)\cos px\,dx$;
- ▷ si $u(x)$ est une fonction impaire, on aura $a_p = 0$ et $b_p = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x)\sin px\,dx$.

Exemple I.11. — $u_n(x) = r^n\cos nx\ ,\quad n \geq 0\ ,\ 0 < r < 1$. Pour étudier cette série trigonométrique, on lui associe :

$$v_n(x) = r^n\sin nx\,,\quad \text{puis}\quad w_n = u_n + iv_n = r^n e^{inx} = (re^{ix})^n.$$

On sait que cette série converge car $|w_n| = r^n$ et converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

$$\sum_{n=0}^\infty r^n e^{inx} = \frac{1}{1-re^{ix}} = \frac{1 - r\cos x + ir\sin x}{1 - 2r\cos x + r^2}\ ;$$

d'où, en prenant les parties réelle et imaginaire,

$$\sum_{n=0}^\infty r^n\cos nx = \frac{1 - r\cos x}{1 + r^2 - 2r\cos x} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^\infty r^n\sin nx = \frac{r\sin x}{1 + r^2 - 2r\cos x}.$$

Exemple I.12. — Cet exemple utilise la notion de logarithme complexe.
Soit $u_n(x) = \dfrac{1}{n}e^{inx}$ $(n \geq 1)$. La convergence est connue par Abel et on admet que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}e^{inx} = -\ln(1-e^{ix})$ (voir Chapitre II, Séries entières). En remarquant que :

$$1 - e^{ix} = e^{\frac{1}{2}ix}(e^{-\frac{1}{2}ix} - e^{\frac{1}{2}ix}) = -2ie^{\frac{1}{2}ix}\sin\frac{x}{2},$$

et compte tenu de la détermination du logarithme complexe (voir *Analyse 3*, Chapitre II, Suites et séries de fonctions), on a :

$$\ln(1-e^{\frac{1}{2}ix}) = \ln\left(2\sin\frac{x}{2}e^{\frac{1}{2}ix}e^{-\frac{1}{2}i\pi}\right) = \ln 2sin\frac{x}{2} + i\,\frac{x-\pi}{2}.$$

D'où :
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right),\quad 0 < x < 2\pi$$

et
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},\quad 0 < x < 2\pi\,.$$

2. Développement en série de Fourier

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de période 2π, localement intégrable.

2.1 Coefficients de Fourier d'une fonction

Définition I.13. — *Les coefficients de* Fourier *d'une fonction f sont les nombres complexes ou réels :*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad et \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n \geq 0),$$

ou encore :
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n \text{ entier relatif}).$$

Remarque I.14. — Il se peut que ces intégrales définissant les coefficients soient généralisées, on doit alors résoudre un problème de convergence.

Remarque I.15. — On choisit α selon la parité (éventuelle) de f.

Définition I.16. — *On appelle série de* Fourier *d'une fonction f, la série trigonométrique :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos n\,x + b_n\sin n\,x), \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

où les a_n, b_n, c_n sont les coefficients de Fourier *de f.*

Si besoin est, on précisera $a_n(f)$, etc ... Cette série trigonométrique est le développement de f en série de FOURIER; plus généralement, si f est définie sur un compact $[a,b]$, le développement en série de FOURIER de f sur $[a,b]$ est le développement de FOURIER de la fonction périodique f_1 de période $(b-a)$, égale à f sur $[a,b]$.

Problème : La série de FOURIER d'une fonction f peut ne pas converger; quand elle converge, sa somme peut ne pas être $f(x)$. Le but du présent chapitre sera donc de trouver des conditions satisfaisantes pour ne pas rencontrer les ennuis précités.

EXEMPLE I.17. — Fonction continue dont la série de FOURIER diverge en un point. — On pose $u_q(x) = 2\sin qx\left[\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin qx}{q}\right]$ (fonction paire, continue, de période 2π) et $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} u_{q_k}(x)$ avec $q_k = 2^{k^3}$. Cette série converge uniformément et sa somme $f(x)$ est donc continue (et périodique). Or sa série de FOURIER diverge en un point.

Convention : Sans préjuger de la convergence ni de la somme de la série de FOURIER on écrira : $f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

EXEMPLE I.18. — Pour $x \in]0, 2\pi[$, on pose $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ et $f(0) = 0$, avec f de période 2π. Cette fonction est impaire donc $a_n = 0$, pour tout n.

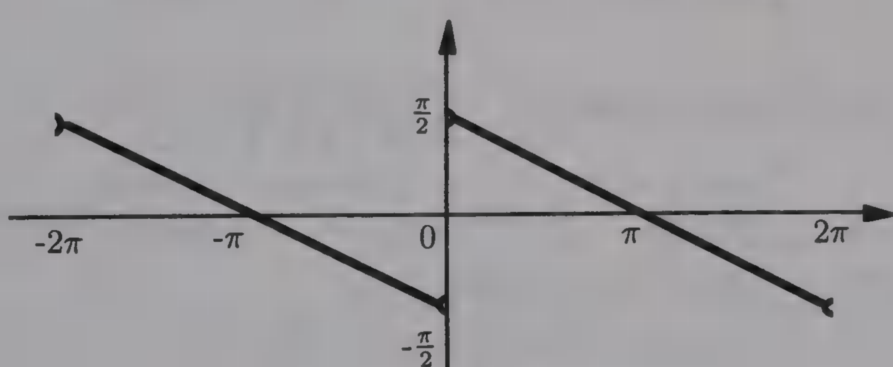

Figure I.1

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx\, dx \qquad (\alpha = -\pi) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin nx\, dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{2} \sin nx\, dx \\
&= \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\left(\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx\, dx\right) = \frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

On écrira donc $\frac{\pi - x}{2} \approx \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n}$, $0 < x < 2\pi$.

EXEMPLE I.19. — Sur l'intervalle $]0, \pi]$, on pose $f(x) = \ln(2\sin\frac{x}{2})$, $f(0) = 0$.

On prolonge la fonction f par symétrie par rapport à Oy sur $[-\pi, 0[$ et on l'achève sur $\mathbb{R}$ par périodicité, de période 2π. Ainsi, pour tout x, la fonction f est paire ; donc $b_n = 0$. D'autre part les coefficients sont donnés par :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx$$

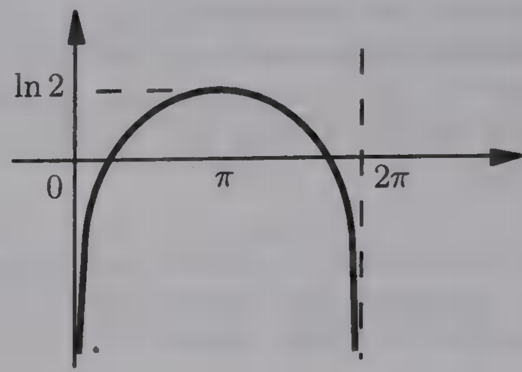

Figure I.2

et $$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(\ln 2\int_0^\pi dx + \int_0^\pi \ln(\sin\frac{x}{2})\,dx\right)$$
$$= 2\ln 2 + \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin u\,du = 2\ln 2 + \frac{2}{\pi}I\,.$$

Or :

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin u\,du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin v\,dv = \int_0^\pi \ln\sin t\,dt$$
$$= \int_0^\pi \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)dt = \pi\ln 2 + \int_0^\pi \ln\left(\sin\frac{t}{2}\right)dt + \int_0^\pi \ln\left(\cos\frac{t}{2}\right)dt$$
$$= \pi\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin y\,dy + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx$$
$$= \pi\ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin y\,dy = -\pi\ln 2\,.$$

Donc $a_0 = 0$ et :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}\sin nx\,\ln(2\sin\frac{x}{2})\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx\right)$$
$$= -\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx = -\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x + \sin(n-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx\,.$$

Lemme I.20. — [Noyau de DIRICHLET] *On a :*

$$D_n(u) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n \cos pu\,.$$

Ce lemme sera aussi utilisé dans un théorème de convergence.

Preuve : On a $\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n \cos pu = \Re e\left(\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n e^{ipu}\right)$. Supposons $u \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.

Comme $\displaystyle\sum_{p=1}^n e^{ipu} = e^{iu}\frac{1-e^{iun}}{1-e^{iu}}$, on obtient :

$$\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n e^{inu} = \frac{1 + e^{iu} - 2e^{i(n+1)u}}{2(1-e^{iu})} = \frac{1 + e^{iu} - 2e^{i(n+1)u}}{2e^{\frac{1}{2}iu}(e^{-\frac{1}{2}iu} - e^{\frac{1}{2}iu})}$$
$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}iu} + e^{\frac{1}{2}iu} - 2e^{i(n+\frac{1}{2})u}}{-4i\sin\frac{u}{2}}$$
$$= \frac{i}{2\sin\frac{u}{2}}\left(\cos\frac{u}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})u - i\sin(n+\frac{1}{2})u\right).$$

Il suffit de prendre la partie réelle pour obtenir le lemme, qui reste valable pour $u = 0 \pmod{2\pi}$par prolongement. On en déduit que :

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}+\sum_{p=1}^n \cos px\right)dx = \frac{\pi}{2}+\sum_1^n \int_0^\pi \cos px\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot$$

De même on a $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(n-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot$

Finalement $a_n = -\dfrac{1}{n}$ et $\ln\left(2\sin\dfrac{x}{2}\right) \approx -\displaystyle\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi).$ □

Exemple I.21. — Soit $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, +\pi]$, prolongée sur $\mathbb{R}$ par périodicité 2π. La fonction f est paire donc $b_n = 0$. On trouve que $a_n = 0$, si n est pair, et que $a_n = -\dfrac{4}{\pi n^2}$, si n est impair, avec $a_0 = \pi$. D'où $|x| \approx \dfrac{\pi}{2} - \displaystyle\sum_0^\infty \frac{4\cos(2p+1)x}{\pi(2p+1)^2}\cdot$

2.2 Propriétés des coefficients

Proposition I.22 [Lemme de Riemann-Lebesgue]. — *Soit une fonction f définie et intégrable sur un compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, prenant des valeurs complexes ou réelles. Pour tout t réel, on définit $I(t) = \int_a^b f(x)\,e^{itx}\,dx$. Alors $I(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini.*

Preuve : Nous examinons deux cas :
Premier cas. Si f est une fonction en escalier sur $[a,b]$, il existe une subdivision $c_0 = a < \ldots < c_n = b$ telle que $f(x) = \lambda_k$ constante sur $]c_{k-1}, c_k[$.

$$I(t) = \sum_{k=1}^n \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,e^{itx}\,dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_{c_{k-1}}^{c_k} e^{itx}\,dx = \frac{1}{it}\sum_{k=1}^n \lambda_k\left(e^{itc_k} - e^{itc_{k-1}}\right)\ ;$$

d'où $|I(t)| \leq \dfrac{1}{|t|}\displaystyle\sum_{k=1}^n |\lambda_k|\left|e^{itc_k} - e^{itc_{k-1}}\right| \leq \frac{2}{|t|}\sum_{k=1}^n |\lambda_k| = \frac{A}{|t|} \to 0$, quand $|t| \to +\infty$.
Cas général. f étant intégrable. il existe une fonction en escalier g telle que $|f(x)-g(x)| \leq \epsilon$ sur $[a,b]$. Il suffit d'écrire que $f(x)e^{itx} = (f(x)-g(x))e^{itx}+g(x)e^{itx}$ pour avoir

$$|I(t)| \leq \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx + \left|\int_a^b g(x)e^{itx}\,dx\right| < \varepsilon(b-a) + \frac{A'}{|t|} < \varepsilon'.$$ □

Conséquences : Les coefficients de Fourier a_n et b_n , ainsi que c_n , tendent vers 0 quand $n \to \infty$.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \to 0\,, \qquad \text{quand } n \to \infty\,,$$

et
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} (\Re e\, f(x))\cos nx\,dx + \frac{i}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} [\,\Im m\, f(x)]\cos nx\,dx.$$

Posons $h(x) = \Re e\, f(x)$ et $k(x) = \Im m\, f(x)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} h(x)\cos nx\, dx = \Re e \left(\frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} h(x) e^{inx}\, dx\right).$$

Donc tend vers 0, quand $n \to \infty$. De même

$$\frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} k(x)\sin nx\, dx = \Im m \left(\frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} k(x) e^{inx}\, dx\right)$$

tend vers 0, quand $n \to \infty$. Finalement a_n tend vers 0, quand $n \to \infty$. On prouve de façon analogue que b_n tend vers 0, quand $n \to \infty$. □

Proposition I.23. — *Si la fonction f est de classe C^k, de période 2π, on a :*

$$c_n(f) = \left(\frac{1}{i\,n}\right)^k c_n\left(f^{(k)}\right), \qquad n \neq 0.$$

Preuve : On calcule :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{f(x)e^{-inx}}{-in}\right]_\alpha^{\alpha+2\pi} + \frac{1}{in}\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f'(x) e^{-inx}\, dx\,. \end{aligned}$$

Or $\left[f(x)e^{-inx}\right]_\alpha^{\alpha+2\pi} = f(\alpha+2\pi) - f(\alpha) = 0$. Par périodicité, on a $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$ et, par récurrence, on en déduit la relation annoncée.

Conséquences :

1) Comme $f^{(k)}$ est continue

$$\left|\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f^{(k)}(x) e^{-inx}\, dx\right| \leq \sup_{[\alpha,\alpha+2\pi]} \left|f^{(k)}(x)\right| 2\pi = M_f\,.$$

Donc $|c_n(f)| \leq \dfrac{M_f}{n^k}$, c'est–à–dire que plus une fonction est régulière, plus ses coefficients de Fourier décroissent rapidement vers 0.

2) On en déduit que $|a_n| = \mathcal{O}(n^{-k})$ et $|b_n| = \mathcal{O}(n^{-k})$. En particulier, si f est de classe C^2, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$.

3. Convergence des séries de Fourier

Théorème I.24 [Formule de Dirichlet]. — *Soit f un fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, localement intégrable et de période 2π. On a :*

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)]\, \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\, du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+u)+f(x-u)]\, D_n(u)\, du\,, \end{aligned}$$

où, par définition, $D_n(u)$ est le noyau de Dirichlet.

Preuve : On considère les coefficients de FOURIER de f en prenant $\alpha = -\pi$.

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sum_1^n [\cos kt\,\cos kx + \sin kt \sin kx]\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x)\right] dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\frac{\sin(n+1/2)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt \text{ (Lemme du noyau de DIRICHLET).}
\end{aligned}$$

Posons $u = t - x$. Quand $t \in [-\pi, +\pi]$, $u \in [-\pi - x\,, \pi - x]$; d'où :

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+u)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du$$

(car f est 2π périodique)

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du - \frac{1}{\pi}\int_0^{-\pi} f(x+u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du.$$

Il suffit alors de changer u en $-u$ dans la seconde intégrale pour obtenir la formule de DIRICHLET. □

Cas particulier : Si $f(x) = 1$, alors on a $a_0 = 2\,, a_n = 0\,, b_n = 0$ et donc $S_n(x) = 1$; d'où l'identité $1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du$.

Théorème I.25 [DIRICHLET]. — *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, localement intégrable, de période 2π. On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :*

(1) *Pour $x \in \mathbb{R}$, f admet en ce point une limite à droite, notée $f(x^+)$, et une limite à gauche, notée $f(x^-)$.*

(2) *La fonction $u \longmapsto \dfrac{1}{u}\left[f(x+u) + \left(f(x-u) - f(x^+) - f(x^-)\right)\right]$ est bornée au voisinage de $u = 0$.*
Alors, au point x, la série de FOURIER de f converge vers $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$.

Preuve : On pose $S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, somme partielle de la série de FOURIER de f, et $\ell = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$. On doit montrer que $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \ell$. On écrit $\ell = \ell \times 1 = 2\,\ell\,\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du$ et on utilise la formule de DIRICHLET. Ainsi :

$$\begin{aligned}
S_n(x) - \ell &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u) - 2\ell]\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(u)(\sin n + \frac{1}{2})\,u\,du\,,
\end{aligned}$$

où l'on a posé $g(u) = \dfrac{f(x+u) + f(x-u) - f(x^+) - f(x^-)}{2\sin\frac{u}{2}}$. Cette fonction g est intégrable sur tout intervalle $[\varepsilon\,, \pi]\,, \varepsilon > 0$ comme combinaison de fonctions intégrables.

Sur $[0\,,\varepsilon[$, en écrivant $g(u) = \frac{1}{u}[f(x+u) + f(x-u) - f(x^+) - f(x^-)]\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$ et en utilisant la condition (2) et le fait que $\frac{\sin v}{v} \sim 1$ au voisinage de 0, on trouve que g est bornée au voisinage de 0; donc intégrable sur $[0\,,\varepsilon[$. Finalement g est intégrable sur $[0,\pi]$ et la Proposition I.22 (avec $t = n+\frac{1}{2}$) montre que $\lim_{n\to\infty}(S_n(x)-\ell) = 0$. □

Deux cas classiques de convergence sont donnés dans les corollaires suivants.

Corollaire I.26. — *Dans le théorème précédent on remplace la condition (2) par la condition suivante :*

(2bis) *La fonction f admet une dérivée à droite généralisée et une dérivée à gauche généralisée au point x.*

Alors la conclusion du théorème subsiste.

Preuve : Il suffit de prouver que (2bis) implique (2). On dit que f admet une dérivée à droite généralisée en x si f, n'étant pas continue en x, est telle que $\lim\limits_{u\to 0, u>0} \frac{1}{u}[f(x+u) - f(x^+)]$ existe. Si f admet une dérivée à droite généralisée au point x, $\frac{1}{u}[f(x+u) - f(x^+)]$ a une limite ℓ_1 quand $u \to 0$. De même $\frac{1}{u}[f(x-u) - f(x^-)]$ a une limite ℓ_2, puisque la dérivée à gauche généralisée existe. Donc $\frac{1}{u}[f(x+u) + f(x-u) - f(x^+) - f(x^-)]$ a une limite $\ell_1 + \ell_2$ quand $u \to 0$ et il s'en suit est borné. □

Cas particulier : Si f est continue au point x et admet en ce point une dérivée à droite et une dérivée à gauche, sa série de Fourier converge vers $f(x)$.

Corollaire I.27. — *Dans le théorème précédent, si f est une fonction 2π–périodique et dérivable, sa série de* Fourier *converge vers $f(x)$.*

Preuve : La fonction f est alors continue donc intégrable et le corollaire précédent est satisfait puisque les dérivées à droite et à gauche existent et sont égales; comme f est continue, $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$. □

Remarques I.28. — **1)** Plus généralement, si f est dérivable par morceaux, sa série de Fourier converge vers $f(x)$ en chaque point x de continuité et vers $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ aux points de discontinuité.

2) Si f est de classe C^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge uniformément sur tout intervalle où f est continue.

Exemples I.29. — **1)** Soit, pour $x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ et $f(0) = 0$. Sur $]0, \pi]$, f est dérivable donc $\frac{\pi - x}{2} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n}$. Il en est de même sur $[-\pi, 0[$. En 0, f n'est pas dérivable, mais les dérivées généralisées à droite et à gauche existent ; la série de Fourier converge donc vers $\frac{1}{2}[f(0^+) + f(0^-)] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right] = 0$.

Application : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}$, car la convergence est assurée. On obtient ainsi la relation $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{2p+1}$, puisque $\sin\frac{n\pi}{2} = 0$, si n est pair.

2) Soit, pour $x \in]0, \pi[$, $f(x) = \ln(2\sin\frac{x}{2})$ une fonction paire et $f(0) = 0$. Sur $[-\pi, 0[\cup]0, +\pi]$, f est dérivable; donc $\ln\left(2\sin\dfrac{x}{2}\right) = -\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos nx}{n}$.

Application : $x = \pi$, $\ln 2 = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$; faire $x = \dfrac{\pi}{2}$ et conclure.

3) Soit, pour $x \in [-\pi, +\pi]$, $f(x) = |x|$. On a, pour $x \in [-\pi, 0[\cup]0, +\pi]$:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4\cos(2\pi+1)x}{\pi(2p+1)^2},$$

car f est dérivable. Pour $x = 0$, $f(0^+) = 0 = f(0^-)$ et $f'_d(0) = +1$, $f'_g(0) = -1$. Il y a donc convergence vers $\frac{1}{2}(0+0) = 0$; d'où on peut écrire $0 = \dfrac{\pi}{2} - \sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{4}{\pi(2p+1)^2}$

et on en déduit la relation $\dfrac{\pi^2}{8} = \sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2}$.

4) Soit $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ et, pour $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \cos\alpha x$ et prolongée sur $\mathbb{R}$ par période 2π. f est dérivable et paire; donc on a : $b_n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\alpha x\, dx = \frac{2}{\pi\alpha}\sin\pi\alpha$$

et

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\alpha x\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(\alpha-n)x + \cos(\alpha+n)]\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n} + \frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n}\right] = (-1)^n \frac{2\alpha\sin\pi\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}. \end{aligned}$$

D'où : $$\cos\alpha x = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi}\sin\pi\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\cos nx.$$

Applications de l'Exemple I.29-4) :

4.1) Prenons $x = \pi$ et $\alpha = z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Comme $\cos nx = (-1)^n$ on obtient :

$$\frac{1}{\tan\pi z} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2}.$$

Cela est le développement en série de fractions rationnelles de la fonction méromorphe $\dfrac{1}{\tan\pi z}$, quotient des deux fonctions holomorphes $\cos\pi z$ et $\sin\pi z$.

4.2) $x = 0$ et $\alpha = z$. On a $\dfrac{\pi}{\sin\pi z} = \dfrac{1}{z} + 2z\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{z^2-n^2}$.

4.3) On a $\left(\dfrac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(z-n)^2}$. La série qui définie $\dfrac{1}{\tan\pi z}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$, ainsi que la série des dérivées. On peut donc dériver terme à terme :

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\tan\pi z}\right) = -\frac{\pi}{(\sin\pi z)^2} = -\frac{1}{\pi z^2} - \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{z^2+n^2}{(z^2-n^2)^2};$$

d'où :
$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} = \frac{1}{z^2} + 2\sum_1^\infty \frac{z^2+n^2}{(z-n)^2(z+n)^2}$$
$$= \frac{1}{z^2} + 2\sum_1^\infty \left[\frac{\frac12}{(z+n)^2} + \frac{\frac12}{(z-n)^2}\right] = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}\,.$$

Remarque I.30. — Si $z = \frac{1}{2}$, on a $\pi^2 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(2n+1)^2} = 8\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

On retrouve l'Exemple I.29–3).

Théorème I.31 [Jordan]. — *Soit f une fonction réelle, intégrable et 2π-périodique. Si f est monotone par morceaux, alors la série de Fourier de f converge vers $\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$.*

On démontrera d'abord le lemme suivant.

Lemme I.32. — *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a :*
$$\left|\sum_{n=1}^{q} \frac{\sin nx}{n}\right| \leq \pi + 1\,.$$

Preuve : On peut supposer que $0 < x \leq \pi$. Soit un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $px \leq \pi < (p+1)x$. Alors si $1 \leq k \leq p$, on a $x \leq kx \leq \pi$ et $0 \leq \dfrac{\sin kx}{kx} \leq \dfrac{\sin x}{x}$; d'où $0 \leq \sum_{n=1}^{p} \dfrac{\sin nx}{n} \leq p\sin x \leq px \leq \pi$. D'autre part, pour $p < q$, par la transformation d'Abel et en posant $v_{p,q}(x) = \sin px + \ldots + \sin qx$, on a :
$$\sum_{p+1}^{q} \frac{\sin nx}{n} = \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}\right) v_{p+1,p+1} + \left(\frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3}\right) v_{p+1,p+2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{q}\right) v_{p+1,q-1} + \frac{1}{q} v_{p+1,q}\,.$$

On a, d'après un calcul classique, toujours $|v_{p,q}(x)| \leq \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}$; d'où :
$$\left|\sum_{p+1}^{q} \frac{\sin nx}{n}\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \left(\left|\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}\right| + \ldots + \left|\frac{1}{q-1} - \frac{1}{q}\right| + \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{(p+1)\sin\frac{x}{2}}\,.$$

Comme $p+1 \geq \dfrac{\pi}{x}$ et que $\dfrac{x}{\sin x}$ est croissante :
$$\frac{1}{(p+1)\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\frac{\pi}{x}\sin\frac{x}{2}} = \frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \times \frac{2}{\pi} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} \times \frac{2}{\pi} = 1\,;$$

d'où
$$\left|\sum_{1}^{q} \frac{\sin nx}{n}\right| \leq \left|\sum_{1}^{p} \frac{\sin nx}{n}\right| + \left|\sum_{p+1}^{q} \frac{\sin nx}{n}\right| \leq \pi + 1\,. \qquad \square$$

Preuve : [Théorème de JORDAN]

Pour établir ce théorème, on prouve que $S_n(x) - \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ tend vers 0 et, compte tenu de la Formule de DIRICHLET, on démontre que les deux intégrales

$$\int_0^\pi [f(x+u) - f(x^+)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\, du \quad \text{et} \quad \int_0^\pi [f(x-u) - f(x^-)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\, du$$

tendent vers 0.

Prenons $\alpha > 0$ de façon que f soit monotone, bornée sur $[x-\alpha, x[\cup]x, x+\alpha]$ et h tel que $0 < h \leq \alpha$. La différence $f(x+u) - f(x^+)$ est monotone, bornée, de signe constant sur $]0, h]$; d'après la deuxième formule de la moyenne on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^h [f(x+u) - f(x^+)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\, du\right| \\
&\qquad \leq \left|f(x+h) - f(x^+)\right| \sup_{0\leq a\leq b\leq h} \left|\int_a^b \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\, du\right| \\
&\qquad \leq |f(x+h) - f(x^+)|\, (\alpha + 4(\pi+1)),
\end{aligned}$$

compte tenu du lemme précédent et de $h \leq \alpha$.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^h [f(x+u) - f(x^+)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\, du$ tend vers 0 quand $h \to 0$.

D'autre part, la fonction $u \longmapsto \dfrac{f(x+u) - f(x^+)}{\sin\frac{u}{2}}$ est intégrable sur $[h\,,\pi]$; donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_h^\pi \frac{[f(x+u) - f(x^+)]}{\sin\frac{u}{2}} \sin(n+\tfrac{1}{2})u\, du = 0$, d'après le Lemme de RIEMANN–LEBESGUE. Finalement $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi [f(x+u) - f(x^+)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\, du = 0$. Il en est de même avec l'autre expression ; d'où le théorème. □

Théorème I.33 [Inégalité de BESSEL]. — *Soit f une fonction 2π-périodique, à valeurs réelles ou complexes, intégrable, de coefficients de* FOURIER *a_n, b_n ou c_n. On a :*

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2\, dx \text{ ou } \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

Preuve : Calculons l'intégrale :

$$\begin{aligned}
I_n =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|f(x) - \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx}\right|^2 dx \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left(f(x) - \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx}\right)\left(\overline{f(x)} - \sum_{k=-n}^{+n} \overline{c_k} e^{-ikx}\right) dx \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2\, dx - \sum_{k=-n}^{+n} \overline{c_k} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx \\
& - \sum_{k=-n}^{+n} c_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \overline{f(x)}\; \overline{e^{-ikx}}\, dx + \sum_{k=-n}^{+n}\sum_{l=-n}^{+n} c_k \overline{c}_l \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(k-l)x} dx.
\end{aligned}$$

Compte tenu que $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(k-l)x}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ 2\pi & \text{si } k = l \end{cases},$ on obtient :

$$I_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2\,dx - \sum_{k=-n}^{+n} |c_k|^2 - \sum_{k=-n}^{+n} |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{+n} |c_k|^2.$$

Comme $I_n \geq 0$, on a $s_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{+n} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2\,dx$. La suite (s_n) est croissante, majorée, donc convergente ; d'où $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 dx.$

L'autre expression provient des relations entre c_n et les a_n, b_n. □

Application : On peut montrer, grâce à l'inégalité de BESSEL, que certaines séries trigonométriques convergentes ne sont les séries de FOURIER d'aucune fonction intégrable.

Exemple : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, car $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$ diverge.

REMARQUE I.34. — Sous les même hypothèses, on peut démontrer que l'inégalité de BESSEL devient une égalité, appelée égalité PARSEVAL, dont la démonstration utilise la convergence au sens de CESARO des sommes partielles de la série de FOURIER de f.

4. Exercices

Exercice I.1

a) Soit f_1 la fonction paire de période 2π définie par $f_1(x) = x$ sur $[0, \pi]$.

(i) Démontrer que la série de FOURIER de f_1 converge vers f_1.

(ii) Calculer les coefficients de FOURIER de f_1.

(iii) En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

b) Soit g_1 la fonction impaire de période 2π définie par $g_1(x) = x$ sur $[0, \pi[$ et $g_1(\pi) = 0$.

(i) Étudier la convergence de la série de FOURIER de g_1.

(ii) Calculer les coefficients de FOURIER de g_1.

(iii) En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$.

c) Soit f_2 la fonction paire de période 2π définie par $f_2(x) = x^2$ sur $[0, \pi]$.

(i) Étudier la convergence de la série de FOURIER de f_2.

(ii) Calculer les coefficients de FOURIER de f_2.

(iii) En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

d) Soit g_2 la fonction impaire de période 2π définie par $g_2(x) = x^2$ sur $[0, \pi[$ et $g_2(\pi) = 0$.

(i) Étudier la convergence de la série de FOURIER de g_2.

(ii) Calculer les coefficients de FOURIER de g_2.

(iii) En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

e) Soit f_3 la fonction paire de période 2π définie par $f_3(x) = x^3$ sur $[0, \pi]$.

(i) Étudier la convergence de la série de FOURIER de f_3.

(ii) Calculer les coefficients de FOURIER de f_3.

(iii) En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

f) Soit g_3 la fonction impaire de période 2π définie par $g_3(x) = x^3$ sur $[0, \pi[$ et $g_3(\pi) = 0$.

(i) Étudier la convergence de la série de FOURIER de g_3.

(ii) Calculer les coefficients de FOURIER de g_3.

(iii) En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice I.2 Soit f_{2k} la fonction paire de période 2π définie par $f_{2k}(x) = x^{2k}$ sur $[0, \pi]$ où k est un entier, $k \geq 1$.

a) Étudier la convergence de la série de FOURIER de f_{2k}.

b) On pose $I(2k, n) = \int_0^\pi x^{2k} \cos nx \, dx$, n entier, $n \geq 1$. Trouver une relation entre $I(2k, n)$ et $I(2k-2, n)$.

c) Calculer les coefficients de FOURIER de f_{2k}.

d) On pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha > 1$.Calculer $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

e) Démontrer que $\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\pi^{2k}\left(\frac{k}{(2k+1)!} + \sum_{p=1}^{k-1} \frac{(-1)^p\zeta(2p)}{(2k-2p+1)!\pi^{2p}}\right)$.

f) En déduire que $\zeta(2k)$ est un multiple rationnel de π^{2k}.

Exercice I.3

a) Soit f la fonction paire de période 2π définie par $f(x) = \cos^3 x$ sur $[0, \pi]$.

(i) Étudier la convergence de la série de FOURIER de f.

(ii) Calculer les coefficients de FOURIER de f.

b) Soit g la fonction paire de période 2π définie par $g(x) = |\cos^3 x|$ sur $[0, \pi]$.

(i) Étudier la convergence de la série de FOURIER de g.

(ii) Calculer les coefficients de FOURIER de g.

(iii) En déduire la somme des séries :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)(4n^2-9)} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(4n^2-1)(4n^2-9)}.$$

c) Soit h la fonction impaire de période 2π définie par $h(x) = \cos^3 x$ sur $]0, \pi[$ et $h(0) = h(\pi) = 0$.

(i) Étudier la convergence de la série de FOURIER de h.

(ii) Calculer les coefficients de FOURIER de h.

(iii) En déduire que $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{n}{(4n^2-9)} = 3\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n}{(4n^2-1)}$.

d) Soit k la fonction impaire de période 2π définie par $k(x) = |\cos^3 x|$ sur $]0, \pi[$ et $k(0) = k(\pi) = 0$.

(i) Étudier la convergence de la série de FOURIER de k.

(ii) Calculer les coefficients de FOURIER de k en précisant b_n selon $n = 4q + \ell$, $\ell = 0, 1, 2, 3$.

(iii) En déduire la somme de la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}$.

Exercice I.4 Soit f la fonction impaire de période 2π définie par $f(x) = \frac{\pi - x}{2}\cos x$ sur $]0, \pi]$ et $f(0) = 0$.

a) Étudier la convergence de la série de FOURIER de f (Tracer le graphe de f).

b) Calculer les coefficients de FOURIER de f.

c) En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{2n+1}{n^2+n}$.

Exercice I.5 Soit f la fonction paire de période 2π définie par $f(x) = e^{-x\frac{\sqrt{3}}{2}}\cos\frac{x}{2}$ sur $[0, \pi]$.

a) Étudier la convergence de la série de FOURIER de f.

b) Calculer les coefficients de FOURIER de f.

Exercice I.6 Soit f la fonction de période 2π définie par $f(x) = e^x \sin x$ sur $[-\pi, +\pi[$.

a) Étudier la convergence de la série de FOURIER de f (on pourra représenter le graphe de f).

b) Pour p entier, $p \geq 0$, calculer $I_p = \int_{-\pi}^{+\pi} e^x e^{ipx}\, dx$. En déduire les coefficients de FOURIER de f.

c) Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2-n^2}{n^4+4}$.

⊕ **Exercice I.7** Soit f la fonction paire de période 2π définie par $f(x) = \ln(\tan \frac{x}{2})$ sur $]0, \pi[$ et $f(0) = f(\pi) = 0$

a) Étudier la convergence de la série de FOURIER de f.

b) Calculer les coefficients de FOURIER de f.

c) En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(6n+1)(6n+3)(6n+5)}$.

⊕ **Exercice I.8** $\boxed{\text{Exam}}$ On définit une fonction f_t de période 2π par : $f_t(x) = 4\cos^4 \frac{1}{2}tx$ sur $[-\pi, +\pi[$, avec t un réel strictement positif fixé.

a) On suppose dans cette question que t est un entier fixé, avec $t \geq 1$.

(i) Étudier la convergence de la série de FOURIER de f_t.

(ii) Calculer les coefficients de FOURIER de f_t.

b) On suppose dans cette question que $t = \frac{1}{2}$.

(i) Étudier la convergence de la série de FOURIER de f_t.

(ii) Calculer les coefficients de FOURIER de f_t.

(iii) En déduire la somme des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \frac{1}{4}}$.

c) On suppose dans cette question que t est un irrationnel, avec $t > 0$.

(i) Étudier la convergence de la série de FOURIER de f_t.

(ii) Calculer les coefficients de FOURIER de f_t.

Exercice I.9 On définit une fonction f_t de période 2π par $f_t(x) = e^{tx}$ sur $[-\pi, +\pi[$, avec t réel non nul fixé.

a) Étudier la convergence de la série de FOURIER de f_t.

b) Calculer les coefficients de FOURIER de f_t.

c) Démontrer que $\displaystyle\coth(\pi t) = \frac{1}{\pi t} + \frac{2}{\pi t}\sum_{n\geq 1} \frac{t^2}{n^2+t^2}$.

d) En déduire que $\displaystyle\frac{\pi^2}{(\operatorname{sh} t\pi)^2} = \frac{1}{t^2} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{t^2-n^2}{(t^2+n^2)^2}$.

Exercice I.10 Soit f la fonction de période 2π définie sur $[-\pi, +\pi[$ par $f(x) = |\sinh x|$.

a) Étudier la convergence de la série de FOURIER de f.

b) Calculer les coefficients de FOURIER de f.

c) En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n^2+2n+1}$.

Exercice I.11 Soit f la fonction de période 2π définie par $f(x) = x\cosh x$ sur $[-\pi, +\pi[$.

a) Étudier la convergence de la série de FOURIER de f.

b) Pour un entier $n \geq 0$, calculer les intégrales suivantes

$$J_n = \int_0^{\pi} \sinh x \sin nx \, dx \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^{\pi} \cosh x \cos nx \, dx.$$

c) En déduire les coefficients de FOURIER de f.

Exercice I.12 Soit f la fonction paire de période 2π définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos x}$.

a) Étudier la convergence de la série de FOURIER de f.

b) Calculer les coefficients de FOURIER de f.

c) Calculer de deux façons la somme de la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n(2-\sqrt{3})^n$.

Exercice I.13 Dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé (O, Ox, Oy) on considère un triangle équilatéral ABC de centre O dont le côté AB est porté par la droite d'équation $x = 1$. La courbe γ formée des côtés AB, BC, CA du triangle a une équation en coordonnées polaires de la forme $r = f(\theta)$

a) Déterminer f et la période T de f.

b) Étudier la convergence de la série de Fourier de f.

c) Calculer les coefficients a_0 et a_1 de la série de FOURIER de f et en donner une valeur numérique décimale à la précision 10^{-2}.

d) On pose $s_1(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos 3\theta$. Construire en coordonnées polaires la courbe représentative de $\rho = s_1(\theta)$ et la comparer à la courbe γ.

Exercice I.14 On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

a) Pour x réel et λ réel positif, on pose $c(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t^2 - ixt} dt$.

(i) Justifier l'existence de $c(x)$.

(ii) Démontrer que la fonction c est continue, dérivable et même indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

(iii) Calculer $c(x)$ sous forme de fonction élémentaire.

b) Pour t réel, on pose $F(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(t+p)^2}$.

(i) Justifier l'existence de F.

(ii) Démontrer que F est continue, dérivable et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) (i) Démontrer que la série de FOURIER de F converge vers F.

(ii) Calculer les coefficients de FOURIER de F.

(iii) En déduire que $\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2} = \sqrt{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2 n^2}$.

5. Solution des exercices

Exercice I.1 a) (i) f_1 est monotone par morceaux, donc sa série de FOURIER est partout convergente d'après le théorème de JORDAN. Autre solution : f_1 est dérivable sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$; elle admet aux points $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) une dérivée à droite et une dérivée à gauche; d'après le théorème de DIRICHLET, sa série de FOURIER est convergente et vers f_1, car f_1 est continue.

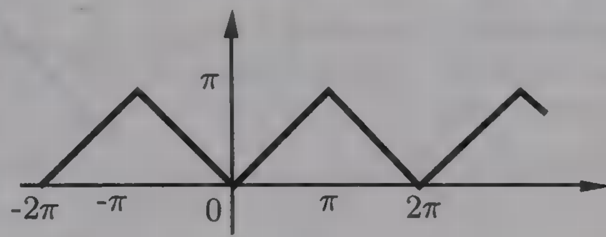

Figure I.3

(ii) f_1 est paire donc $b_n = 0$ et

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_1(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx\\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,dx\right\} \qquad (n\neq 0)\\
&= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1]\ ; \qquad \text{d'où, selon la parité de } n :
\end{aligned}$$

$$a_{2p} = 0\ ;\quad a_{2p+1} = \frac{-4}{\pi(2p+1)^2}\ ;\quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \pi\,.$$

(iii) $f_1(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p\geq 0}\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}$;

$$f_1(0) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2}, \qquad \text{d'où} \quad \sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On remarque que :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \sum_{p\geq 1}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{3}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \text{d'où} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour l'autre série, on utilise l'identité de PARSEVAL :

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f_1^2(x)\,dx, \qquad \text{qui devient ici :}$$

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{p\geq 0}a_{2p+1}^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_1^2(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^4} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \text{d'où} \quad \sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

b) (i) g_1 est dérivable sur $]-\pi, +\pi[$; d'après le théorème de DIRICHLET sa série de FOURIER converge vers g_1. Au point π (ou $-\pi$) g_1 admet une dérivée généralisée à droite et une dérivée généralisée à gauche; donc sa série de FOURIER converge vers :
$\frac{1}{2}(g_1(\pi^+) + g_1(\pi-)) = 0$.

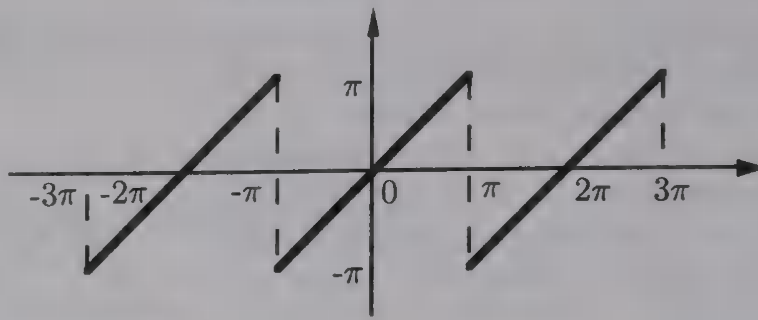

Figure I.4

(ii) g_1 est impaire donc $a_n = 0$ et

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g_1(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\,dx\right\} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \qquad (n \geq 1).$$

(iii) On a $g_1(x) = 2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$. Pour $x = \frac{\pi}{2}$

$$\sin nx = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}; \quad \frac{\pi}{2} = 2\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{2p+1}, \quad \text{d'où} \quad \sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$

c) (i) f_2 est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $]-\pi, +\pi[$; au point $+\pi$ f_2 admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche, donc d'après le théorème de DIRICHLET, sa série de FOURIER converge partout vers f_2.

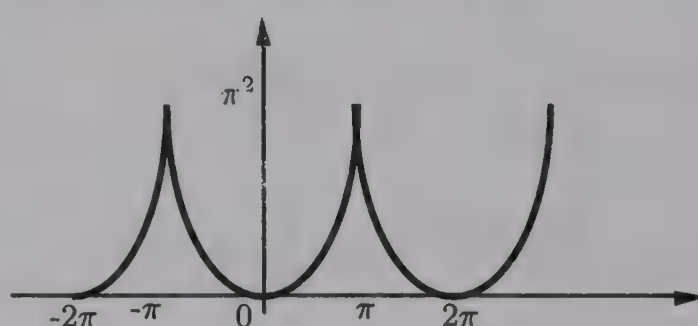

Figure I.5

(ii) f_2 est paire donc $b_n = 0$ et

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_2(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin nx\,dx\right\} \quad (n \neq 0)$$
$$= -\frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x\sin nx\,dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \qquad \text{d'après b)(ii),}$$
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = 2\frac{\pi^2}{3}.$$

(iii) On a $f_2(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$;

$$f_2(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}; \qquad \text{d'où} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Remarque : $x=\pi$ donne $\pi^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$, d'où $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

d) (i) g_2 est dérivable sur $]-\pi, +\pi[$; sa série de FOURIER converge donc vers g_2. Au point $+\pi$, g_2 admet des dérivées généralisées à droite et à gauche, sa série de FOURIER converge vers $\frac{1}{2}(g_2(\pi^+) + g_2(\pi^-)) = 0$.

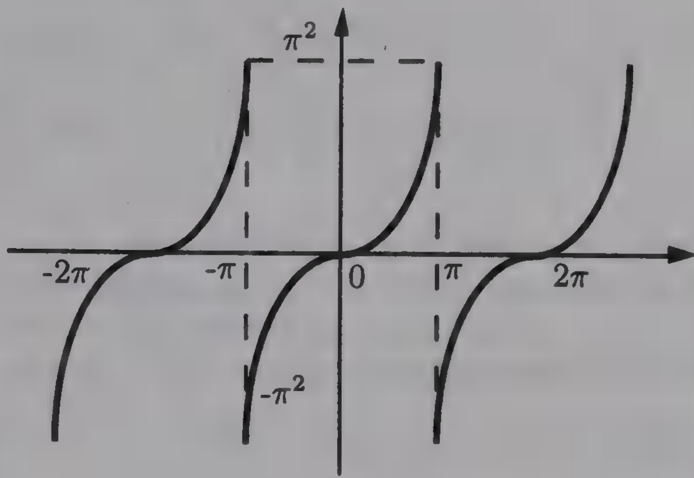

Figure I.6

(ii) g_2 est impaire, donc $a_n = 0$ et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g_2(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{x^2\cos nx}{n}\right]_0^\pi + \frac{2}{n}\int_0^\pi x\cos nx\,dx\right\} = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x\cos nx\,dx \\ &= \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1), \quad \text{d'après a)(ii).} \end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned} g_2(x) &= 2\pi\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx + \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n - 1}{n^3}\sin nx \\ &= 2\pi\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx - \frac{8}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{\sin(2p+1)x}{(2p+1)^3}. \end{aligned}$$

Avec $x = \dfrac{\pi}{2}$, on a $\dfrac{\pi^2}{4} = 2\pi\sum_{p\geq 0}\dfrac{(-1)^p}{2p+1} - \dfrac{8}{\pi}\sum_{p\geq 0}\dfrac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$. Compte tenu que $\sum_{p\geq 0}\dfrac{(-1)^p}{2p+1} = \dfrac{\pi}{4}$, il vient $\dfrac{8}{\pi}\sum_{p\geq 0}\dfrac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \dfrac{\pi^2}{2} - \dfrac{\pi^2}{4}$, d'où $\sum_{p\geq 0}\dfrac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \dfrac{\pi^3}{32}$.

e) L'allure du graphe de f_3 est celle du c).
(i) f_3 est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $]-\pi, +\pi[$, dérivable à droite et à gauche en $+\pi$ et $-\pi$; d'après le théorème de DIRICHLET, sa série de FOURIER converge partout vers f_3.
(ii) f_3 est paire donc $b_n = 0$ et :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_3(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^3\cos nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x^3\sin nx}{n}\right]_0^\pi - \frac{3}{n}\int_0^\pi x^2\sin nx\,dx\right\} \quad (n\neq 0) \\ &= -\frac{3}{n}\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin nx\,dx = -\frac{3}{n}\left[\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right], \text{ d'après d)(ii)} \\ &= \frac{6\pi}{n^2}(-1)^n - \frac{12}{\pi n^4}((-1)^n - 1) \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^3\,dx = \frac{\pi^3}{2}. \end{aligned}$$

(iii) $f_3(x) = \dfrac{\pi^3}{4} + 6\pi \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \cos nx + \dfrac{24}{\pi} \sum_{p\geq 0} \dfrac{1}{(2p+1)^4} \cos(2p+1)x.$

Pour $x = 0$, compte tenu que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi}{12}$, on obtient :

$$\frac{24}{\pi} \sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{4}\,; \qquad \text{d'où} \quad \sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\,.$$

f) L'allure du graphe de g_3 est celle du d).

(i) g_3 est dérivable sur $]-\pi, +\pi[$; sa série de FOURIER est donc convergente vers g_3 ; au point $+\pi$, g_3 admet des dérivées généralisées à droite et à gauche, sa série de FOURIER converge vers $\frac{1}{2}(g_3(\pi^+) + g_3(\pi^-)) = 0$.

(ii) g_3 est impaire donc $a_n = 0$ et :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g_3(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^3 \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[-\frac{x^3 \cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{3}{n} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \right\} \\ &= \frac{2\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{3}{n}\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{2\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{12}{n^3}(-1)^n, \ \text{ d'après c)(ii).} \end{aligned}$$

(iii) $g_3(x) = 2\pi^2 \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx + 12 \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^3} \sin nx\,;$

$g_3\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\pi^2 \sum_{p\geq 0} \dfrac{(-1)^p}{2p+1} - 12 \sum_{p\geq 0} \dfrac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$ d'où, compte tenu que

$$\sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{on a} \ \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}\,.$$

Exercice I.2 a) f_{2k} est dérivable sur $]-\pi, +\pi[$, dérivable à droite et à gauche aux points π et $-\pi$; d'après le théorème de DIRICHLET, sa série de FOURIER converge vers f_{2k} car cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

b)
$$\begin{aligned} I(2k,n) &= \int_0^{\pi} x^{2k} \cos nx \, dx = \left[x^{2k} \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2k}{n} \int_0^{\pi} x^{2k-1} \sin nx \, dx \\ &= -\frac{2k}{n} \left(\left[-x^{2k-1} \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2k-1}{n} \int_0^{\pi} x^{2k-2} \cos nx \, dx \right) \\ &= \frac{2k}{n^2} \pi^{2k-1}(-1)^n - \frac{2k(2k-1)}{n^2} I(2k-2,n) \qquad (k \geq 1). \end{aligned}$$

c) f_{2k} est paire, donc $b_n = 0$ et $a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f_{2k}(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} I(2k,n)\,.$

$a_0 = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} x^{2k} dx = \frac{2}{2k+1} \pi^{2k}.$ $a_n = \dfrac{2}{\pi} I(2k,n)$, il suffit de calculer $I(2k,n)$ par une récurrence descendante jusqu'à $I(0,n)$.

$$I(2k,n) = \frac{(-1)^n}{n^2}\,2k\pi^{2k-1} - \frac{2k(2k-1)}{n^2}\,I(2k-2,n)$$

$$I(2k-2,n) = \frac{(-1)^n}{n^2}\,(2k-2)\pi^{2k-3} - \frac{(2k-2)(2k-3)}{n^2}\,I(2k-4,n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I(4,n) = \frac{(-1)^n}{n^2}\,4\pi^3 - \frac{4\times 3}{n^2}\,I(2,n)$$

$$I(2,n) = \frac{(-1)^n}{n^2}\,2\pi - \frac{2\times 1}{n^2}\,I(0,n), \quad \text{avec } I(0,n) = \int_0^\pi \cos nx\,dx = 0\,.$$

En multipliant la dernière ligne par $-\dfrac{4\times 3}{n^2}$ et en l'ajoutant à l'avant–dernière ligne, on obtient $I(4,n) = \dfrac{(-1)^n}{n^2}\,4\pi^3 - \dfrac{(-1)^n}{n^2}\,4\times 3\times 2\pi$. En poursuivant ce procédé, on obtient $I(2k,n) = \dfrac{(-1)^n}{n^2}\displaystyle\sum_{p=1}^{k}\frac{(2k)!\,(-1)^{p+1}\,\pi^{2k-2p+1}}{(2k-2p+1)!\,n^{2p-2}}$ $(k \geq 1)$, formule obtenue par récurrence. D'où $a_n = (-1)^n 2\pi^{2k}\displaystyle\sum_{p=1}^{k}\frac{(2k)!\,(-1)^{p+1}}{(2k-2p+1)!}\frac{1}{(\pi n)^2 p}$ $\quad (n \geq 1)$.

d) On a $f_{2k}(x) = \dfrac{1}{2}a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$

$$= \frac{\pi^{2k}}{2k+1} + 2\pi^{2k}\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\sum_{p=1}^{k}\frac{(-1)^{p+1}(2k)!}{(2k-2p+1)!}\cdot\frac{1}{(\pi n)^{2p}}\right)\cos nx.$$

Prenons $k = 1$: $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 2\pi^2\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos nx$ et $x = \pi$ donne $\pi^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 2\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2}{n^2}$; d'où $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}\cdot$

Pour $k = 2$: $x^4 = \dfrac{\pi^4}{5} + 2\pi^4\left(\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos nx - \sum_{n\geq 1}\frac{4!(-1)^n}{\pi^4 n^4}\cos nx\right)$ et $x = \pi$ donne $\pi^4 = \dfrac{\pi^4}{5} + 8\pi^2\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} - 48\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}$; d'où $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}\cdot$

Pour $k = 3$:

$$x^6 = \frac{\pi^6}{7} + 2\pi^6\left(\sum_{n\geq 1}\frac{6(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos nx - \sum_{n\geq 1}\frac{6!(-1)^n}{3!\,\pi^4 n^4}\cos nx + \sum_{n\geq 1}\frac{6!(-1)^n}{\pi^6 n^6}\cos nx\right)$$

et $x = \pi$ donne $\pi^6 = \dfrac{\pi^6}{7} + 12\pi^4\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} - 240\pi^2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} + 1440\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^6}$;

d'où $\zeta(6) = \dfrac{\pi^6}{945}\cdot$

e) Pour k fixé, on remplace x par π dans la série de Fourier de f_{2k}

$$\pi^{2k} = \frac{\pi^{2k}}{2k+1} + 2\pi^{2k}\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{p=1}^{k}\frac{(-1)^{p+1}(2k)!}{(2k-2p+1)!}\times\frac{1}{(\pi n)^{2p}}\right).$$

La série de terme général $u_n = \sum_{p=1}^{k} \left(\frac{(-1)^{p+1}(2k)!}{(2k-2p+1)!} \times \frac{1}{(\pi n)^{2p}} \right)$ est convergente et $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{p=1}^{k} \frac{(-1)^{p+1}(2k)!}{(2k-2p+1)!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^{2p}} \right)$. On peut donc intervertir les sommations : $\pi^{2k} = \frac{\pi^{2k}}{2k+1} + 2\pi^{2k} \sum_{p=1}^{k} \frac{(-1)^{p+1}(2k)!}{(2k-2p+1)!} \times \frac{\zeta(2p)}{\pi^{2p}}$,

$$\pi^{2k} \frac{2k}{2k+1} = 2\pi^{2k} \sum_{p=1}^{k-1} \frac{(-1)^{p+1}(2k)!}{(2k-2p+1)!} \times \frac{\zeta(2p)}{\pi^{2p}} + 2\pi^{2k}(-1)^{k+1}(2k)! \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} \ ;$$

d'où $$\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} = (-1)^{k+1} \left(\frac{k}{(2k+1)!} + \sum_{p=1}^{k} \frac{(-1)^{p+1}(2k)!}{(2k-2p+1)!} \cdot \frac{\zeta(2p)}{\pi^{2p}} \right).$$

f) $\frac{\zeta(2)}{\pi^2}$ et $\frac{\zeta(4)}{\pi^4}$ sont rationnels ; par récurrence, il est donc immédiat que $\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}$ est rationnel.

Exercice I.3 a)

(i) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de DIRICHLET, sa série de FOURIER est partout convergente vers f.

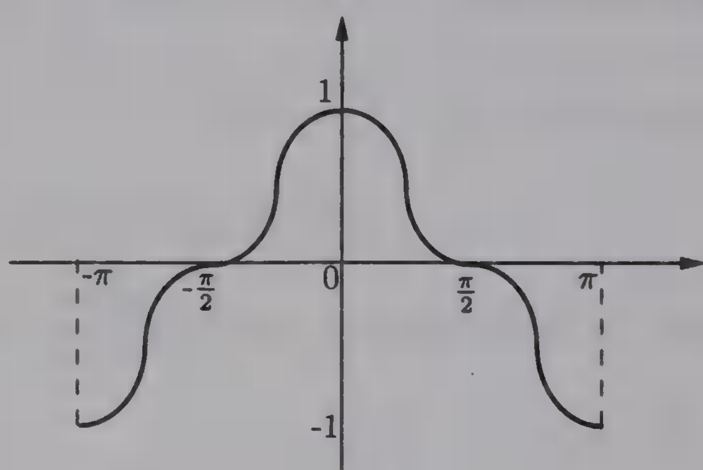

Figure I.7

(ii) f est paire, donc $b_n = 0$ et :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^3 x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{3}{4} \int_0^{\pi} \cos x \cos nx \, dx + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \cos 3x \cos nx \, dx \right\}$$
$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{3}{4} \int_0^{\pi} (\cos(n+1)x + \cos(n-1)x) \, dx + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (\cos(n+3)x + \cos(n-3)x) \, dx \right\}$$

donc $a_n = 0$ si $n \neq 1$ et $n \neq 3$. On calcule :

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{3}{4} \int_0^{\pi} (\cos 2x + 1) \, dx + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (\cos 4x + \cos 2x) \, dx \right\} = \frac{3}{4},$$
$$a_3 = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{3}{4} \int_0^{\pi} (\cos 4x + \cos 2x) \, dx + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (\cos 6x + 1) \, dx \right\} = \frac{1}{4}.$$

D'où $f(x) = \cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$. Ce qui n'est pas surprenant, bien entendu, les calculs étaient inutiles .

b) (i) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sa série de FOURIER est convergente vers g.

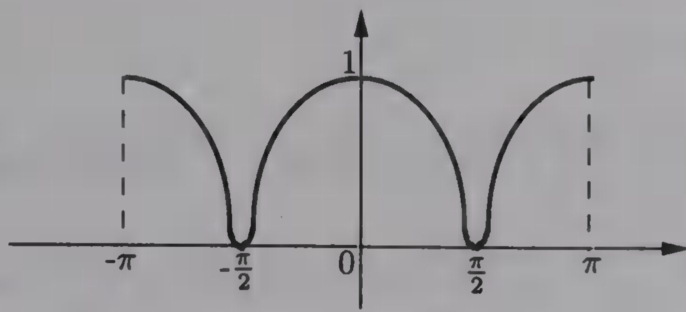

Figure I.8

(ii) La fonction g est paire, donc $b_n = 0$ et

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos^3 x| \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \cos nx\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x \cos nx\, dx\right\}\\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos nx\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cos nx\, dx\right]\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos nx\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 3x \cos nx\, dx\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(n+1)x+\cos(n-1)x]\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[\cos(n+1)x+\cos(n-1)x]\, dx\right]\right.\\
&\left. + \frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(n+3)x+\cos(n-3)x]\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[\cos(n+3)x+\cos(n-3)x]\, dx\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Pour $n \neq 1$ et $n \neq 3$, il vient :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left[\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(n+3)x}{n+3} + \frac{\sin(n-3)x}{n-3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\}\\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{n-1}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(n+3)\frac{\pi}{2}}{n+3} + \frac{\sin(n-3)\frac{\pi}{2}}{n-3}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Les entiers $n-1$, $n-3$, $n+1$, $n+3$ ont mêmes parités. Si n est impair, $\sin(n+1)\dfrac{\pi}{2} = 0$ donc $a_{2p+1} = 0$. Si $n = 2p$, $\sin(2p+1)\dfrac{\pi}{2} = (-1)^p$, $\sin(2p-1)\dfrac{\pi}{2} = (-1)^{p-1}$, $\sin(2p+3)\dfrac{\pi}{2} = (-1)^{p-1}$ et $\sin(2p-3)\frac{\pi}{2} = (-1)^p$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
a_{2p} &= \frac{(-1)^p}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left[\frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p-1}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2p-3} - \frac{1}{2p+3}\right]\right\}\\
&= \frac{(-1)^p}{\pi}\left\{\frac{-\frac{3}{2}}{4p^2-1} + \frac{\frac{3}{2}}{4p^2-9}\right\}\\
&= \frac{3(-1)^p}{2\pi}\cdot\frac{8}{(4p^2-1)(4p^2-9)} = \frac{6(-1)^p}{\pi(4p^2-1)(4p^2-9)}.
\end{aligned}$$

En particulier, on a $a_0 = \dfrac{2}{3\pi}$ et

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{1}{\pi}\Bigg\{\frac{3}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x+1)\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos 2x+1)\,dx\right] \\ +\frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x+\cos 4x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos 2x+\cos 4x)\,dx\right]\Bigg\} \\ = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]\right\} = 0\,. \end{aligned}$$

Il en est de même avec $a_3 = 0$.

(iii) On a $\quad g(x) = |\cos^3 x| = \dfrac{1}{3\pi} + \dfrac{6}{\pi}\displaystyle\sum_{p\geq 1}\dfrac{(-1)^p}{(4p^2-1)(4p^2-9)}\cos 2px$

et $$g(0) = 1 = \frac{1}{3\pi} + \frac{6}{\pi}\sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^p}{(4p^2-1)(4p^2-9)}.$$

D'où : $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^p}{(4p^2-1)(4p^2-9)} = \frac{3\pi-1}{18}.$

D'autre part, de

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3\pi} + \frac{6}{\pi}\sum_{p\geq 1}\frac{1}{(4p^2-1)(4p^2-9)} = 0\,,$$

on calcule

$$\sum_{p\geq 1}\frac{1}{(4p^2-1)(4p^2-9)} = -\frac{1}{18}\,.$$

c) (i) Comme h est dérivable sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, sa série de FOURIER est donc convergente vers h. Aux points $-\pi$, 0, π, h admet des dérivées généralisées à droite et à gauche; sa série de FOURIER converge alors vers $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ aux points $x = -\pi, 0, \pi$. Dans ces trois cas, cette demi–somme vaut 0.

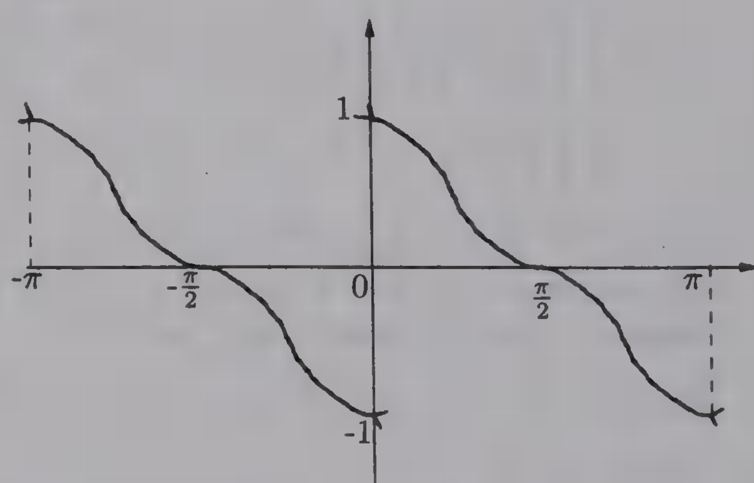

Figure I.9

(ii) h est impaire donc $a_n = 0$ et :

$$\begin{aligned} b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^3 x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\,dx + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 3x\sin nx\,dx\right\} \\ = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x]\,dx+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}[\sin(n+3)x+\sin(n-3)x]\,dx\right\}. \end{aligned}$$

Pour $n \neq 1$ et $n \neq 3$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^\pi + \frac{1}{4}\left[-\frac{\cos(n+3)x}{n+3} - \frac{\cos(n-3)x}{n-3}\right]_0^\pi\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left[\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{1-(-1)^{n+3}}{n+3} + \frac{1-(-1)^{n-3}}{n-3}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Les entiers $(n-1)$, $(n+1)$, $(n-3)$, $(n+3)$ ont mêmes parités donc si $n = 2p+1$, tous les numérateurs sont nuls et $b_{2p+1} = 0$. Si $n = 2p$:

$$\begin{aligned}
b_{2p} &= \frac{1}{4}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p+3} + \frac{1}{2p-3}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{6p}{4p^2-1} + \frac{2p}{4p^2-9}\right) = \frac{p}{2}\left(\frac{3}{4p^2-1} + \frac{1}{4p^2-9}\right).
\end{aligned}$$

Et
$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\int_0^\pi \sin 2x\, dx + \frac{1}{4}\int_0^\pi (\sin 4x - \sin 2x)\, dx\right\} = 0\,, \\
b_3 &= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\int_0^\pi (\sin 4x + \sin 2x)\, dx + \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin 6x\, dx\right\} = 0\,.
\end{aligned}$$

(iii) On en déduit que :

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{1}{2}\sum_{p\geq 1}\left(\frac{3p}{4p^2-1} + \frac{p}{4p^2-9}\right)\cos 2px \\
h\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 = \frac{1}{2}\left(\sum_{p\geq 1}\frac{3p}{4p^2-1}(-1)^p + \sum_{p\geq 1}\frac{p}{4p^2-9}(-1)^p\right)
\end{aligned}$$

d'où la relation cherchée.

d) (i) k est dérivable sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, donc de série de FOURIER convergente ; en $-\pi$, 0, π, k admet des dérivées généralisées à droite et à gauche, sa série de FOURIER converge vers $0 = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ pour $x \in \{-\pi, 0, \pi\}$.

(ii) k est impaire, donc $a_n = 0$ et :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\cos^3 x| \sin nx\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin nx\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x \sin nx\, dx\right]\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \sin nx\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos 3x \sin nx\, dx\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Pour $n \neq 1$ et $n \neq 3$:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x]\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x]\,dx\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(n+3)x+\sin(n-3)x]\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[\sin(n+3)x+\sin(n-3)x]\,dx\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left(\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\left(\left[-\frac{\cos(n+3)x}{n+3} - \frac{\cos(n-3)x}{n-3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{\cos(n+3)x}{n+3} - \frac{\cos(n-3)x}{n-3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{1-\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{n+1} + \frac{1-\cos(n-1)\frac{\pi}{2}}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}-\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{n+1}\right.\right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^{n-1}-\cos(n-1)\frac{\pi}{2}}{n-1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos(n+3)\frac{\pi}{2}}{n+3}\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1-\cos(n-3)\frac{\pi}{2}}{n-3} + \frac{(-1)^{n+3}-\cos(n+3)\frac{\pi}{2}}{n+3} + \frac{(-1)^{n-3}-\cos(n-3)\frac{\pi}{2}}{n-3}\right)\right\}.$$

Les parités de $n-1$, $n+1$, $n-3$, $n+3$ étant les mêmes, on a :

$$b_{2p} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n-3}\right)\right\}=0.$$

Pour $n = 2p+1$:
$\cos(2p+2)\frac{\pi}{2} = (-1)^{p+1}$ et $\cos(2p)\frac{\pi}{2} = (-1)^p$, $\cos(2p+4)\frac{\pi}{2} = (-1)^p$ et $\cos(2p-2)\frac{\pi}{2} = (-1)^{p-1} = (-1)^{p+1}$.

$$b_{2p+1} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{1-(-1)^{p+1}}{2p+2} + \frac{1-(-1)^p}{2p} + \frac{1-(-1)^{p+1}}{2p+2} + \frac{1-(-1)^p}{2p}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\left(\frac{1-(-1)^p}{2p+4} + \frac{1-(-1)^{p+1}}{2p-2} + \frac{1-(-1)^p}{2p+4} + \frac{1-(-1)^{p+1}}{2p-2}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{1+(-1)^p}{2p+2} + \frac{1-(-1)^p}{2p}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1+(-1)^p}{2p-2} + \frac{1-(-1)^p}{2p+4}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1+(-1)^p}{2}\left(\frac{3}{2p+2} + \frac{1}{2p-2}\right) + \frac{1-(-1)^p}{2}\left(\frac{3}{2p} + \frac{1}{2p+4}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[(1+(-1)^p)\frac{2p-1}{p^2-1} + (1-(-1)^p)\frac{2p+3}{p(p+2)}\right].$$

Si $p = 2q$: $b_{4q+1} = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{4q-1}{4q^2-1}$; si $p = 2q+1$, $b_{4q+3} = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{4q+5}{(2q+1)(2q+3)}$ et, bien entendu, $b_{4q} = 0 = b_{4q+2}$.

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x \sin x\, dx\right\}\\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{\cos^4 x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\cos^4 x}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\} = \frac{1}{\pi}.\\
b_3 &= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin 3x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \sin 3x\, dx\right]\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \sin 3x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 3x \sin 3x\, dx\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 4x + \sin 2x)\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin 4x + \sin 2x)\, dx\right]\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 6x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 6x\, dx\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\left[-\left(\frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2}\right)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{4}\left[\left(-\frac{\cos 6x}{6}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{\cos 6x}{6}\right)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}[1+1] + \frac{1}{4}\left[\frac{2}{6} + \frac{2}{6}\right]\right\} = \frac{5}{3\pi}.
\end{aligned}$$

(iii) On a

$$k(x) = \frac{1}{\pi}\sin x + \frac{5}{3\pi}\sin 3x + \frac{1}{\pi}\sum_{q\geq 1}\frac{4q-1}{4q^2-1}\sin(4q+1)x + \frac{1}{\pi}\sum_{q\geq 1}\frac{4q+5}{(2q+1)(2q+3)}\sin(4q+3)x$$

et $k(\frac{\pi}{2}) = 0$. D'autre part $\sin(4q+1)\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin(4q+3)\frac{\pi}{2} = 1$. On en tire :

$$0 = \frac{1}{\pi} - \frac{5}{3\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{q\geq 1}\left(\frac{4q-1}{(2q-1)(2q+1)} + \frac{4q+5}{(2q+1)(2q+3)}\right)$$

et $\displaystyle \frac{2}{3\pi} = \frac{1}{\pi}\sum_{q\geq 1}\frac{4q+2}{(2q-1)(2q+1)(2q+3)}$; d'où $\displaystyle \sum_{q\geq 1}\frac{1}{(2q-1)(2q+3)} = \frac{1}{3}$.

Exercice I.4 **a)** On calcule facilement la dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\Big(-\cos x - (\pi - x)\sin x\Big) = -\frac{\pi - x}{2}\cos x\left(\frac{1}{\pi - x} + \tan x\right).$$

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$; sa série de FOURIER est donc convergente. Aux points $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, f admet des dérivées généralisées à droite et à gauche ; donc sa série de FOURIER converge vers

$$0 = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}.$$

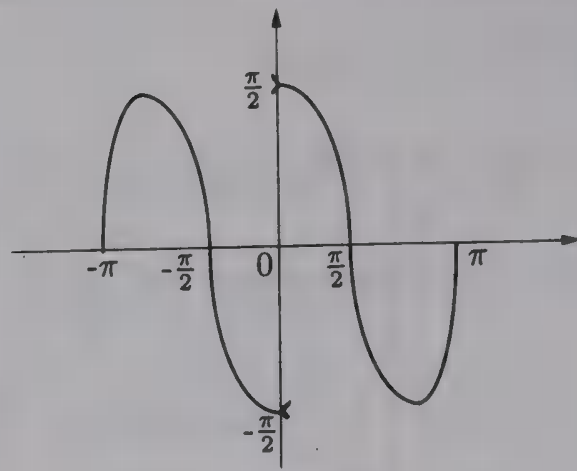

Figure I.10

b) f est impaire ; donc $a_n = 0$ et

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - x}{2}\cos x\,\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - x}{2}\big[\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\big]\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\pi - x}{2}\left(-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)\right]_0^\pi \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)dx\right\} \quad (n \neq 1) \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right)\right\} = \frac{n}{n^2 - 1}\ ;
\end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - x}{2}\sin 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\pi - x}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{4}\int_0^\pi \cos 2x\,dx\right\} = \frac{1}{4}.$$

c) $$f(x) = \frac{1}{4}\sin x + \sum_{n\geq 2}\frac{n}{n^2 - 1}\sin nx\,,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \frac{1}{4} + \sum_{n\geq 2}\frac{n}{n^2-1}\sin n\frac{\pi}{2}\,,$$

avec $\sin n\dfrac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$.

Et l'on a : $-\dfrac{1}{4} = \displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2 - 1}$; d'où $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^p(2p+1)}{p^2 + p} = -1.$

Exercice I.5 a) f est continue sur $\mathbb{R}$, car en $+\pi$, $\displaystyle\lim_{x\to\pi, x<\pi} f(x) = 0$ et f est paire.

f est dérivable sur $]0, \pi[$; elle admet une dérivée à droite en 0 $f'_d(0) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et, par symétrie, une dérivée à gauche. De même, en π, f admet une dérivée à gauche qui est $f'_g(\pi) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}}$. D'après le théorème de DIRICHLET, sa série de FOURIER est partout convergente vers $f(x)$.

b) La fonction f est paire, donc $b_n = 0$ et $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx$.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{-x\frac{\sqrt{3}}{2}}\cos\frac{x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-x\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\cos(n+\frac{1}{2})x + \cos(n-\frac{1}{2})x\right]dx.$$

En posant $I(n) = \displaystyle\int_0^\pi e^{-x\frac{\sqrt{3}}{2}}\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\,dx$, on trouve $a_n = \dfrac{1}{\pi}(I(n) + I(n-1))$.

Calculons

$$I(n) = \Re e \int_0^\pi e^{x\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+i(n+\frac{1}{2})\right]}\,dx = \Re e \left[\frac{e^{x\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+i(n+\frac{1}{2})\right]}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+i(n+\frac{1}{2})}\right]_0^\pi$$

$$= \frac{\Re e\left(\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - i(n+\frac{1}{2})\right]\left[e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}}e^{i\pi(n+\frac{1}{2})}\right]\right)}{\frac{3}{4}+(n+\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+(-1)^n e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}}(n+\frac{1}{2})}{n^2+n+1}.$$

Donc $\quad a_n = \dfrac{1}{\pi}\left\{\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}+(-1)^n e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}}(n+\frac{1}{2})}{n^2+n+1} + \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}+(-1)^{n-1} e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}}(n-\frac{1}{2})}{n^2-n+1}\right\}$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\sqrt{3}\frac{n^2+1}{n^4+n^2+1} + (-1)^{n+1}e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{n^2-1}{n^4+n^2+1}\right]$$

et $\quad a_0 = \dfrac{1}{\pi}\left[\sqrt{3}+e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}}\right].$

D'où :

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}+e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}}}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{3}(n^2+1)+(-1)^{n+1}e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}}(n^2-1)}{n^4+n^2+1}\cos nx\,.$$

Exercice I.6 a) $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$
f est dérivable sur $]-\pi,+\pi[$, dérivable à droite et à gauche en π donc sa série de FOURIER converge vers f sur $\mathbb{R}$.

b) On a :

$$I_p = \int_{-\pi}^{+\pi} e^x e^{ipx}\,dx = \left[\frac{e^{x(1+ip)}}{1+ip}\right]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{e^\pi(-1)^p - e^{-\pi}(-1)^p}{1+ip} = (-1)^p 2\sinh\pi\frac{1-ip}{1+p^2}.$$

D'où
$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^x\cos px\,dx = 2\sinh\pi\frac{(-1)^p}{1+p^2}$$

et
$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^x\sin px\,dx = 2\sinh\pi\frac{(-1)^{p+1}p}{1+p^2}.$$

La fonction f n'est ni paire, ni impaire. Ainsi :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^x\sin x\cos nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^x\left[\sin x(n+1) - \sin x(n-1)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[2\sinh\pi\frac{(-1)^{n+2}n+1}{1+(n+1)^2} - 2\sinh\pi\frac{(-1)^n(n-1)}{1+(n-1)^2}\right]$$

$$= \frac{\sinh\pi}{\pi}(-1)^n\left[\frac{n+1}{n^2+2+2n} - \frac{n-1}{n^2+2-2n}\right] = \frac{2\sinh\pi}{\pi}(-1)^n\frac{2-n^2}{n^4+4}\;;$$

$$a_0 = \frac{\sinh\pi}{\pi}\;;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^x\sin x\sin nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^x\left[\cos x(n-1) - \cos x(n+1)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[2\sinh\pi\frac{(-1)^{n-1}}{1+(n-1)^2} - 2\sinh\pi\frac{(-1)^{n+1}1}{1+(n+1)^2}\right] = \frac{4\sinh\pi}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^4+4}.$$

c) $f(x) = \dfrac{\sinh \pi}{2\pi} + \dfrac{2\sinh \pi}{\pi} \sum_{n\geq 1} \left((-1)^n \dfrac{2-n^2}{n^4+4} \cos nx + (-1)^{n-1} \dfrac{n}{n^4+4} \sin nx \right)$

$$f(\pi) = 0 = \frac{\sinh \pi}{2\pi} + \frac{2\sinh \pi}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{2-n^2}{n^4+4} \, ; \qquad \text{d'où} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{2-n^2}{n^4+4} = -\frac{1}{4} \, .$$

Exercice I.7 **a)** f est dérivable sur $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, donc de série de Fourier convergente vers f sur cet ensemble d'après le théorème de Dirichlet.
b) f est paire donc $b_n = 0$ et $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx$. a_n est défini par une intégrale généralisée convergente car à la borne 0, $f(x) \sim \ln \frac{x}{2}$; de même à la borne π, au signe près. D'autre part

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) \frac{\sin nx}{n} \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} \, dx \right\} \quad (n \neq 0) \\ &= -\frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} \, dx \, , \end{aligned}$$

car la partie toute intégrée $\Big[\dots\Big]_0^\pi$ est nulle, par exemple, étant équivalente à $x \ln \frac{x}{2}$ en 0.

Le rapport $\quad \dfrac{\sin nx}{\sin x} = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \dfrac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\cos\frac{x}{2}}$.

Utilisant le Noyau de Dirichlet (Lemme 1.18), $\dfrac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} \cos px = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$,

on trouve :

$$\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} \cos px = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \cos px = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} \cos p(x+\pi) &= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x+\pi)}{2\sin\frac{x+\pi}{2}} \\ &= \frac{(-1)^n \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\cos\frac{x}{2}} \, . \end{aligned}$$

D'où $\quad \dfrac{\sin nx}{\sin x} = \dfrac{1-(-1)^n}{2} + \sum_{p=1}^{n} \cos px - (-1)^n \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \cos px$

et enfin $\quad a_n = -\dfrac{2}{\pi n} \displaystyle\int_0^\pi \dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2} \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \text{n=2p} \\ -\frac{2}{2p+1} & \text{si} \quad \text{n=2p+1} \end{cases}$

avec $\quad a_0 = \dfrac{2}{\pi} \left[\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right) dx - \int_0^\pi \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right) dx \right]$.

Posons $x = \pi - y$ dans la seconde intégrale :

$$\int_0^\pi \ln(\cos\frac{x}{2}) \, dx = -\int_0^\pi \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right)\right) (-dy) = \int_0^\pi \ln\left(\sin\frac{y}{2}\right) dy \, ;$$

d'où $\; a_0 = 0$.

c) $f(x) = -2\sum_{p\geq 0} \dfrac{\cos(2p+1)x}{2p+1}\cdot$ On prend $x = \dfrac{\pi}{3}$; $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \ln\left(\tan\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}\ln 3$ et $\cos(2p+1)\dfrac{\pi}{3}$ se calcule en considérant séparément les trois cas :

▷ si $p = 3k$, on a $\cos(6k+1)\dfrac{\pi}{3} = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$;

▷ si $p = 3k+1$, on a $\cos(6k+3)\dfrac{\pi}{3} = -1$;

▷ si $p = 3k+2$, on a $\cos(6k+5)\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}\cdot$

On a donc :

$$-\frac{1}{2}\ln 3 = -2\sum_{k\geq 0}\left(\frac{\frac{1}{2}}{6k+1} - \frac{1}{6k+3} + \frac{\frac{1}{2}}{6k+5}\right)$$

et
$$\begin{aligned}\frac{\ln 3}{2} &= \sum_{k\geq 0} \frac{(6k+3)(6k+5) - 2(6k+1)(6k+5) + (6k+1)(6k+3)}{(6k+1)(6k+3)(6k+5)} \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{8}{(6k+1)(6k+3)(6k+5)}\,.\end{aligned}$$

D'où finalement :
$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(6k+1)(6k+3)(6k+5)} = \frac{\ln 3}{16}.$$

Exercice I.8 On note que $f_t(x) = \frac{3}{2} + 2\cos tx + \frac{1}{2}\cos 2tx$.

a) (i) Si $t = n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{3}{2} + 2\cos nx + \frac{1}{2}\cos 2nx$. f_n est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(k\pi) = 0$. Sa série de FOURIER est donc convergente ce qui se voit puisque f_n est une somme finie de termes.

(ii) $a_0 = 3$; $\quad a_k = 0$, si $k \neq n$ et si $k \neq 2n$; $a_n = 2$ et $a_{2n} = \frac{1}{2}$

b) $f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{3}{2} + 2\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos x$.

(i) $f_{\frac{1}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $]-\pi, +\pi[$, dérivable à droite et à gauche en $-\pi$ et $+\pi$, ($f_g'(\pi) = -1$, $f_d'(\pi) = 1$). D'après le théorème de DIRICHLET, sa série de FOURIER est partout convergente vers $f_{\frac{1}{2}}$.

(ii) $f_{\frac{1}{2}}$ est paire, donc $b_n = 0$ et $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f_{\frac{1}{2}}(x)\cos nx\,dx$.

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{3}{2} + 2\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos x\right)\cos nx\,dx \\ &= \frac{3}{\pi}\int_0^\pi \cos nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left[\cos(n+\frac{1}{2})x + \cos(n-\frac{1}{2})x\right]\,dx \\ &\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left[\cos(n+1)x + \cos(n-1)x\right]\,dx\,.\end{aligned}$$

Pour $n \neq 0$ et $n \neq 1$, il vient :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\sin(n-\frac{1}{2})x}{n-\frac{1}{2}}\right]_0^\pi + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\sin(n-\frac{1}{2})\pi}{n-\frac{1}{2}}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-\frac{1}{2}}\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\frac{1}{4}} \qquad (n \geq 2)\ ; \\
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{3}{2} + 2\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos x\right) dx = 3 + \frac{8}{\pi}\ ; \\
a_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\frac{3}{2} + 2\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos x)\cos x\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (1+\cos 2x)\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + 2\sin\frac{\pi}{2}\right] + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{8}{3\pi}.
\end{aligned}$$

(iii) On calcule

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{\pi}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{8}{3\pi}\right)\cos x + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\frac{1}{4}}\cos nx$$

$$f_{\frac{1}{2}}(\pi) = 1 = \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{\pi}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{8}{3\pi}\right) - \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}\ ;$$

d'où $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\cdot$ D'autre part :

$$f_{\frac{1}{2}}(0) = 4 = \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{\pi}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{8}{3\pi}\right) - \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\frac{1}{4}}\ ;$$

et on en tire
$$\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\frac{1}{4}} = \frac{10}{3} - \pi.$$

c) (i) f_t est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $]-\pi, +\pi[$ et dérivable à droite et à gauche en $-\pi$ et π, sa série de Fourier est donc convergente.
(ii) On calcule

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{3}{2} + 2\cos tx + \frac{1}{2}\cos 2tx\right) dx \\
&= 3 + \frac{4}{\pi t}\sin\pi t + \frac{1}{2\pi t}\sin 2\pi t.
\end{aligned}$$

Pour $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2} + 2\cos tx + \frac{1}{2}\cos 2tx\right)\cos nx\,dx \\
&= \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos tx\cos nx\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos 2tx\cos nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(n+t)x + \cos(n-t)x)\,dx \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos(n+2t)x + \cos(n-2t)x)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(n+t)\pi}{n+t} + \frac{\sin(n-t)\pi}{n-t}\right] + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n+2t)\pi}{n+2t} + \frac{\sin(n-2t)\pi}{n-2t}\right] \\
&= \frac{2}{\pi}(-1)^n\sin\pi t\left[\frac{1}{n+t} - \frac{1}{n-t}\right] + \frac{(-1)^n\sin 2\pi t}{2\pi}\left[\frac{1}{n+2t} - \frac{1}{n-2t}\right] \\
&= \frac{4}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{t\sin\pi t}{n^2-t^2} + \frac{2}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{t\sin 2\pi t}{n^2-4t^2}\,.
\end{aligned}$$

La fonction f_t étant paire, les b_n sont nuls.

Exercice I.9 a) La fonction f_t est continue et dérivable sur $]-\pi,+\pi[$, sa série de FOURIER est donc convergente. La fonction f n'est pas continue au point π, mais admet une limite à gauche $f_t(\pi^-) = e^{t\pi}$ et une limite à droite $f_t(\pi^+) = e^{-t\pi}$. Elle admet en ce point des dérivées généralisées à droite et à gauche, sa série de FOURIER converge alors vers $\frac{1}{2}(e^{t\pi} + e^{-t\pi}) = \cosh t\pi$.

b) La fonction f_t n'est ni paire ni impaire, donc :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{tx}\cos nx\,dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{tx}\sin nx\,dx\,.$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
I_n = a_n + ib_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{tx}e^{inx}\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{x(t+in)}}{t+in}\right]_{-\pi}^{+\pi} \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\,\frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{t+in} = \frac{2(-1)^n}{\pi}\sinh\pi t\frac{(t-in)}{t^2+n^2}\ ;
\end{aligned}$$

d'où $$a_n = \frac{2(-1)^n}{\pi}\,\frac{t\sinh\pi t}{t^2+n^2} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}\,\frac{n\sinh\pi t}{t^2+n^2}\,.$$

En particulier $a_0 = \dfrac{2\sinh\pi t}{\pi t}$.

c) Le théorème de convergence au point $x = \pi$ s'écrit, d'après a) :

$$\begin{aligned}
\cosh t\,\pi &= \frac{\sinh\pi t}{\pi t} + \frac{2t\sinh\pi t}{\pi t}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+t^2} \qquad (\text{car} \quad \sin\pi = 0) \\
&= \frac{1}{\pi\,t} + \frac{2}{\pi\,t}\sum_{n\geq 1}\frac{t^2}{n^2+t^2}\,.
\end{aligned}$$

d) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{t}{n^2+t^2}$ converge sur $\mathbb{R}$, la série dérivée $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{t^2-n^2}{(n^2+t^2)^2}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^*$, on peut donc écrire que

$$(\coth \pi t)' = -\frac{1}{\pi t^2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{t^2-n^2}{(n^2+t^2)^2}, \quad \text{soit} \quad \frac{\pi^2}{(\sinh \pi t)^2} = \frac{1}{t^2} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{t^2-n^2}{(n^2+t^2)^2}.$$

Exercice I.10 a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, admet des dérivées à droite et à gauche aux points $k\pi$; sa série de FOURIER est alors convergente vers f.

b) La fonction f est paire, donc $b_n = 0$ et $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sinh x \cos nx \, dx$. On intègre deux fois par parties en prenant $u = \cos nx$ et $dv = \sinh x \, dx$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\left\{ [\cosh x \cos nx]_0^\pi + n\int_0^\pi \sinh x \sin nx \, dx \right\} \\
&= \frac{2}{\pi}((-1)^n \cosh \pi - 1) + \frac{2n}{\pi}\left\{ [\sinh x \sin nx]_0^\pi - n\int_0^\pi \sinh x \cos nx \, dx \right\} \\
&= \frac{2}{\pi}((-1)^n \cosh \pi - 1) - n^2 a_n \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n \cosh \pi - 1}{\text{pour } x \geq 1 n^2 + 1}
\end{aligned}$$

et $\quad a_0 = \dfrac{2}{\pi}(\cosh \pi - 1)$.

c) $f(x) = \dfrac{\cosh \pi - 1}{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \cosh \pi - 1}{n^2+1} \cos nx$

Écrivons $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n \cos nx$, alors :

$$f(\pi) - f(0) = \sinh \pi = \sum_{n\geq 1} a_n(\cos n\pi - 1) = \sum_{n\geq 1} a_n((-1)^n - 1) ;$$

d'où $\quad \displaystyle \sinh \pi = -2\sum_{p\geq 0} a_{2p+1} = \frac{4}{\pi}(\cosh \pi + 1)\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2+1}.$

D'autre part :

$$\frac{\pi \sinh \pi}{\cosh \pi + 1} = 4\sum_{p\geq 0} \frac{1}{2(2p^2+2p+1)} ;$$

d'où $\quad \displaystyle \sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p^2+2p+1)} = \frac{\pi}{2}\frac{\sinh \pi}{\cosh \pi + 1} = \frac{\pi}{2}\tanh\frac{\pi}{2}.$

Exercice I.11 a) La fonction f est dérivable sur $]-\pi, +\pi[$. En π, f n'est pas continue mais $f(\pi^-) = \pi \cosh \pi$ et $f(\pi^+) = -\pi \cosh \pi$. f admet en ce point des dérivées généralisées à droite et à gauche, donc sa série de FOURIER est convergente vers $\frac{1}{2}(f(\pi^+) + f(\pi^-)) = 0$. Sur $]-\pi, +\pi[$, la série de FOURIER converge vers f.

b) et c) La fonction f est impaire, donc $a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx$.

On a $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x\cosh x \sin nx\,dx$. On intègre deux fois par parties en prenant $u = x\cosh x$ et $dv = \sin nx\,dx$; donc $du = (\cosh x + x\sinh x)dx$ et $v = -\dfrac{\cos nx}{n}$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-x\cosh x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\cosh x + x\sinh x)\cos nx\,dx\right\}\\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{n}\cosh\pi(-1)^{n+1} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cosh x\cos nx\,dx\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{n}\left[\left(x\sinh x\frac{\sin nx}{n}\right)_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\sinh x + x\cosh x)\sin nx\,dx\right]\right\}\\
&= \frac{2}{n}\cosh\pi(-1)^{n+1} - \frac{1}{n^2}b_n + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cosh x\cos nx\,dx - \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\sinh x\sin nx\,dx.
\end{aligned}$$

Posons $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi}\cosh x\cos nx\,dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi}\sinh x\sin nx\,dx$. Alors :

$$I_n = \left[\cosh x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sinh x\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}J_n$$

et

$$\begin{aligned}
J_n &= \left[-\sinh x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cosh x\cos nx\,dx\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sinh\pi + \frac{1}{n}\left\{\left[\cosh x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sinh x\sin nx\,dx\right\}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sinh\pi - \frac{1}{n^2}J_n\,.
\end{aligned}$$

D'où :

$$J_n = \sinh\pi\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1} \qquad \text{et} \qquad I_n = \sinh\pi\frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

On calcule

$$b_n \times \frac{n^2+1}{n^2} = \frac{2}{n}\cosh\pi(-1)^{n+1} + \frac{2\sinh\pi(-1)^n}{\pi n(n^2+1)} + \frac{2\sinh\pi(-1)^n}{\pi n(n^2+1)}\ ;$$

$$b_n = \frac{2\cosh\pi(-1)^{n+1}n}{n^2+1} + \frac{4\sinh\pi(-1)^n n}{\pi(n^2+1)^2}$$

et donc

$$f(x) = 2\cosh\pi\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}\sin nx + \frac{4\sinh\pi}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n n}{(n^2+1)^2}\sin nx\,.$$

Exercice I.12 a) La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec la dérivée $f'(\pi) = 0 = f'(0)$. Sa série de Fourier est partout convergente sur $\mathbb{R}$ vers f.

b) La fonction f est paire; donc $b_n = 0$ et :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{2+\cos nx}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos nx}{2+\cos x}dx = \frac{1}{\pi}I_n\,.$$

Pour varier, on calcule I_n par la méthode des résidus (*cf.* Annexe) en posant $z = e^{ix}$, $dz = iz\,dx$. Soit γ le cercle de centre O, de rayon 1, orienté positivement. Alors

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{\gamma}\frac{(z^n+z^{-n})/2}{2+\frac{z^2+1}{2z}}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{\gamma}\frac{z^{2n}+1}{z^n(z^2+4z+1)}dz\\
&=2i\pi\frac{1}{i}\sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{z^{2n}+1}{z^n(z^2+4z+1)}\ ; \qquad z_k \in \text{disque unité ouvert}\right).
\end{aligned}$$

Les racines de $z^2+4z+1=0$ sont $z_1=-2+\sqrt{3}$ et $z_2=-2-\sqrt{3}$. Seule z_1 appartient au disque unité; les points singuliers sont donc z_1, pôle simple et $z_0=0$, pôle d'ordre n.

Le calcul des résidus de $g(z)=\dfrac{z^{2n}+1}{z^n(z^2+4z+1)}$ donne

$$\operatorname{Res}(g(z)\ ;\ z_1)=\frac{z_1^{2n}+1}{z_1^n(2z_1+4)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{z_1^{2n}+1}{z_1^n}.$$

Pour trouver le résidu de g au point z_0, on cherche le coefficient de z^{-1} dans le développement en série de LAURENT en 0 de g : $g(z)=\sum_{m=-n}^{+\infty}a_m z^m$. Or

$$\frac{1}{z^2+4z+1}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\sum_{m\geq 0}(z_1^{m+1}-z_2^{m+1})z^m$$

de rayon de convergence $R=\min(|z_1|,|z_2|)=|z_1|$. Le coefficient de z^{-1} dans g est donc le coefficient de z^{n-1} dans cette série d'où $\operatorname{Res}(g(z)\ ;\ z_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(z_1^n-z_2^n)$.

Calculons :

$I_n=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(z_1^n+\dfrac{1}{z_1^n}+z_1^n-z_2^n\right)$. Comme $z_1z_2=1$ on a $\dfrac{1}{z_1^n}-z_2^n=0$, on trouve

$I_n=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}z_1^n=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}(-2+\sqrt{3})^n$ et $a_n=\dfrac{2}{\sqrt{3}}(-2+\sqrt{3})^n \quad (n\geq 0)$.

c) $\dfrac{1}{2+\cos x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n\geq 1}(-2+\sqrt{3})^n\cos nx$. En faisant $x=0$ on a :

$\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n\geq 1}(-1)^n(2-\sqrt{3})^n$; d'où $\sum_{n\geq 1}(-1)^n(2-\sqrt{3})^n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-1\right)$.

C'est une série géométrique de raison $-(2-\sqrt{3})$, commençant à $n=1$; donc

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n(2-\sqrt{3})^n=\frac{1}{1+2-\sqrt{3}}-1=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.$$

Exercice I.13 a) Le segment $[AB]$ est porté par la droite d'équation : $x=1=r\cos\theta$ d'où l'équation polaire de $[AB]$ est donnée par $r=\dfrac{1}{\cos\theta}=f_1(\theta)$ avec $-\dfrac{\pi}{3}\leq\theta\leq+\dfrac{\pi}{3}$.

Le segment $[CA]$ se déduit du segment $[AB]$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; son équation polaire est donc

$$r=f_2(\theta)=\frac{1}{\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})}.$$

De même $[BC]$ se déduit de $[CA]$ par la même rotation.

Conclusion : $f(\theta)=\dfrac{1}{\cos\theta}$ et $T=\dfrac{2\pi}{3}$.

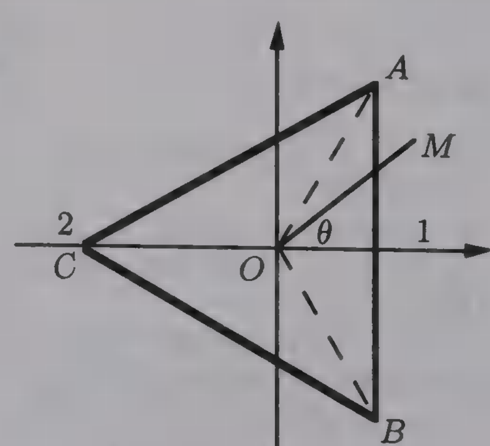

Figure I.11

b) f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{3}, +\frac{\pi}{3}\right[$ et admet en $\pm\frac{\pi}{3}$ des dérivées à droite et à gauche, donc sa série de FOURIER converge sur $\mathbb{R}$ vers f.

c) f est paire, donc $b_n = 0$ et $a_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(\theta)\cos\frac{2\pi}{T}n\theta\,d\theta = \frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3n\theta}{\cos\theta}\,d\theta.$

Pour le calcul de $a_0 = \dfrac{6}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos\theta}$ on pose $u = \tan\frac{\theta}{2}$ et $du = (1+u^2)\frac{d\theta}{2}$, avec $\cos\theta = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}\cdot$ Ainsi :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{1-u^2}\,du = \frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)du = \frac{6}{\pi}\left[\ln\frac{1+u}{1-u}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\\
&= \frac{6}{\pi}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{6}{\pi}\ln(2+\sqrt{3}) \simeq 2{,}52 \quad (\text{à } 10^{-2}\text{ près})\\
\text{et}\quad a_1 &= \frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}\,d\theta = \frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4\cos^3\theta - 3\cos\theta}{\cos\theta}\,d\theta\\
&= \frac{3\sqrt{3}}{\pi} - 2 \simeq -0{,}35 \quad (\text{à } 10^{-2}\text{ près}).
\end{aligned}$$

d) $s_1(\theta) = 1,26 - 0,35\cos 3\theta$ est la somme partielle d'ordre 1 de la série de FOURIER de $f(\theta) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n\cos 3n\theta$; $s_1'(\theta) = 1,05\sin 3\theta.$

Sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\rho = s_1(\theta)$ est croissant de 0,91 à 1,61 et la courbe est une "approximation" du triangle (*cf. Figure I.11*).

Exercice I.14 a) (i) $\left|e^{-\lambda t^2}\right|\left|e^{-ixt}\right| = e^{-\lambda t^2}$ et, pour tout α, $|t|^\alpha e^{-\lambda t^2} \to 0$, lorsque $|t| \to +\infty$; en choisissant $\alpha > 1$, on prouve ainsi la convergence absolue de l'intégrale.

(ii) La fonction $(x,t) \longmapsto e^{-\lambda t^2 - ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. L'intégrale converge normalement sur $\mathbb{R}$ d'après (i) donc C est continue sur $\mathbb{R}$.

Or $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\lambda t^2 - ixt}\right) = -ite^{-\lambda t^2 - ixt}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi : $\left|\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right| = |t|e^{-\lambda t^2}$ dont l'intégrale converge, ce qui prouve la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,dt$ donc C est dérivable et

$$C'(x) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\lambda t^2 - ixt}\,dt.$$

Par une récurrence immédiate on a $\dfrac{\partial^n}{\partial x^n}(f(x,t)) = (-i)^n t^n f(x,t)$ donc toujours convergence normale; on en déduit que C est indéfiniment dérivable et

$$C^{(n)}(x) = (-i)^n\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\lambda t^2 - ixt}\,dt.$$

(iii) On calcule

$$C(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\lambda}t+\frac{ix}{\sqrt{\lambda}})^2-\frac{x^2}{4\lambda}}\,dt=e^{-\frac{x^2}{4\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\lambda}t+\frac{ix}{\sqrt{\lambda}})^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}e^{-\frac{x^2}{4\lambda}}.$$

Autre méthode : C vérifie l'équation différentielle $C'(x)+\dfrac{x}{2\lambda}C(x)=0$; d'où $C(x)=Ke^{-\frac{x^2}{4\lambda}}$, avec $K=C(0)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}$.

b) (i) $u_p(t)=e^{-\lambda(t+p)^2}\sim e^{-\lambda p^2}$, quand $|p|\to\infty$, et $(u_p(t))^{\frac{1}{|p|}}\to 0$, quand $|p|\to\infty$; d'où la convergence de la série.
(ii) Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $t\in[a,b]$. Alors $a+p\leq t+p\leq b+t$; il existe p_a tel que $a+p>0$ pour $p\geq p_a$ d'où $u_p(t)=e^{-\lambda(b+p)^2}$, ce qui prouve la convergence normale de la série sur tout compact; on en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}$. $u_p'(t)=-2\lambda(t+p)u_p(t)$ et $\sup\limits_{[a,b]}|u_n'(t)|\leq 2\lambda(b+p)u_p(b)$.
Cette série majorante est convergente, ce qui montre que la série des dérivées converge compactement sur $\mathbb{R}$ et F est dérivable; par récurrence immédiate, on a convergence compacte des dérivées successives $u_p^{(k)}(t)$ qui sont de la forme $u_p^{(k)}(t)=Q_k(t,p)u_p(t)$ où Q_k est un polynôme de degré k en $(t+p)$. F est donc de classe C^∞.

c) (i) F est de période 1 car $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda(t+p+1)^2}=\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda(t+p)^2}$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$; sa série de FOURIER est donc convergente vers F.
(ii) On calcule les coefficients sous forme complexe :

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T F(t)e^{-2i\pi n\frac{t}{T}}\,dt=\int_0^1 F(t)e^{-2i\pi nt}dt\quad (n\in\mathbb{Z}).$$

La série définissant F converge uniformément sur $[0,1]$; d'où :

$$\begin{aligned}c_n&=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\int_0^1 e^{-\lambda(t+p)^2-2i\pi nt}dt\quad\text{en posant } u=t+p,\ e^{2i\pi np}=1\\&=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\int_p^{p+1}e^{-\lambda u^2-2i\pi nu}du=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda u^2-2i\pi nu}du\\&\qquad\qquad\text{(d'après a), avec } x=2\pi n)\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}e^{-\frac{\pi^2n^2}{\lambda}}\quad(n\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

(iii) $F(t)=\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}c_ne^{2i\pi nt}=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\pi^2n^2}{\lambda}}e^{2i\pi nt}$ et $t=0$ donne :

$$F(0)=\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda n^2}=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\pi^2n^2}{\lambda}}$$

et $\lambda=1$ donne la relation demandée.

CHAPITRE II
SÉRIES ENTIÈRES

1. Rayon de convergence

1.1 Introduction

Définition II.1. — *On appelle série entière une série de fonctions de terme général $u_n(z) = a_n z^n$ où $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ et (a_n) est une suite de nombres complexes appelés coefficients de la série entière.*

Plus généralement on appelle série entière une série de fonctions $\sum a_{\varphi(n)} z^{\varphi(n)}$ où φ est une fonction croissante de $\mathbb{N}$ dans lui–même.

Exemples II.2. — 1) $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$; 2) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n}$; 4) $\sum\limits_{n\geq 0} z^{n!}$.

Remarque II.3. — Tous les résultats du Chapitre II d'*Analyse 3* peuvent être utilisés pour étudier les séries entières ; mais la propriété importante consiste en ce que les sommes partielles $s_n(z) = \sum_0^n a_k z^k$ sont des polynômes qui convergent (éventuellement) vers une fonction non polynômiale ; c'est cet aspect qui sera développé dans le section 3 de ce chapitre (Fonctions analytiques).

Exemples II.4. — **Convergence de quelques séries :**

1) $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$; $s_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ converge vers $\dfrac{1}{1-z}$ si, et seulement si, $|z| < 1$.

2) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$; $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \dfrac{|z|}{n+1} \longrightarrow 0$ pour tout $|z|$; donc cette série converge pour tout z.

3) $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n}$; $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = |z|\,\dfrac{n}{n+1} \longrightarrow |z|$; donc convergence si $|z| < 1$, divergence si $|z| > 1$ (d'ailleurs dans ce cas, le terme général ne tend pas vers 0).

4) $\sum\limits_{n\geq 0} z^{n!}$; $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = |z|^{(n+1)!-n!} = |z|^{n!n} \to \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \text{ , convergence} \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \text{ , divergence} \end{cases}$.

1.2 Disque de convergence

Lemme II.5 [Abel]. — *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière ; s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(|a_n z_0^n|)$ soit bornée (indépendamment de n), alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout z tel que $|z| < |z_0|$ et normalement dans tout disque $\{z \ ; \ |z| \leq k\,|z_0| \ ; \ 0 < k < 1\}$.*

Preuve : On a $a_n z^n = a_n z_0^n \left(\dfrac{z}{z_0}\right)^n$; or il existe une constante M telle que $\forall n \geq 0$, $|a_n z_0^n| \leq M$ ce qui implique $|a_n z^n| \leq M \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n$.

▷ Si $|z| \leq k|z_0|$ alors $|a_n z^n| \leq Mk^n$ et on a convergence normale puisque $\sum_{n\geq 0} k^n$ est convergente. □

Rayon et disque de convergence. — Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et I l'ensemble des réels $r \geq 0$ tels que la suite $(|a_n| r^n)$ soit bornée; 0 appartient toujours à I.

▷ Si I est borné, I est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure R et pour tout z tel que $|z| < R$, il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < |z_0| < R$; d'après le lemme d'ABEL la série entière est donc convergente pour tout z tel que $|z| < R$. Si z_0 est tel que $|z_0| > R$, la suite $(|a_n z_0^n|)$ n'est pas bornée et la série ne peut pas converger.

▷ Si I n'est pas borné, alors chaque $z_0 \in \mathbb{C}$ est tel que la suite $(|a_n z_0^n|)$ est bornée et il y a convergence de la série entière pour chaque $z \in \mathbb{C}$.

▷ Le nombre réel R défini ci-dessus s'appelle rayon de convergence de la série entière; on appelle *disque de convergence* le domaine de $\mathbb{C}$ défini par $D = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| < R\}$; on appelle *cercle de "convergence"* le cercle $\{|z| = R\}$ mais il faut prendre garde que, si la série converge en tout point z du disque de convergence, diverge en tout point z tel que $|z| > R$, on ne peut a priori rien dire pour les points du cercle de "convergence" ; en particulier il n'y a aucune raison pour que la série $\sum a_n R^n$ soit convergente.

▷ Dans le cas où I n'est pas borné on dira que le rayon de convergence est infini et on écrira par convention $R = +\infty$.

1.3 Calcul du rayon de convergence

Les critères de CAUCHY et de D'ALEMBERT pour les séries de fonctions fournissent les résultats suivants :

▷ $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} |z|\,|a_n|^{\frac{1}{n}}$ donc la série converge si $|z| < \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ et diverge si $|z| > \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ donc $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ cela à condition que la suite $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)$ ait une limite.

Plus généralement on aura $\boxed{\dfrac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ (Formule d' HADAMARD);

c'est-à-dire la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(|a_n|^{\frac{1}{n}})$, notée aussi $\dfrac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ (On convient que $\frac{1}{\infty} = 0$).

▷ $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ donc la série converge si $|z| < \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ et diverge si $|z| > \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$; donc $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, cela à condition que le quotient $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ soit défini et que sa limite existe.

EXEMPLES II.6. — **1)** $\sum_{n\geq 0} z^n$; $a_n = 1 \; \forall n$ donc $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$ et $R = 1$. Cette série ne converge en aucun point du cercle de convergence $\{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| = 1\}$ puisque pour $z = e^{i\theta}$ le terme général ne tend pas vers 0.

2) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$; $a_n = \dfrac{1}{n!}$; $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$.

3) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$; $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$; $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} = 1.$

4) $\sum_{n\geq 0} z^{n!}$; $a_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ n'est pas le factoriel d'un entier} \\ 1 & \text{si } p = n!\,. \end{cases}$

La suite $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ n'a pas de limite; la plus grande valeur d'adhérence sera $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{p\to\infty}}\,|a_p|^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} 1^{\frac{1}{n!}} = 1$; donc $R = 1$.

5) $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2}$; $a_n = \frac{1}{n^2}$; $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} = 1$ donc $R = 1$.

Cette série converge en tout point du cercle de convergence $\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$ car la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente.

1.4 Rayon de la somme et du produit de deux séries entières

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = A(z)$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n = B(z)$ deux séries de rayons de convergence R_A et R_B respectivement et de somme $A(z)$ et $B(z)$.

▹ On définit la somme des deux séries entières par $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n$ quand elle existe et on note $(A+B)(z) = \sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)z^n$.
Si R_{A+B} est le rayon de convergence de la série somme, on a :

$$\boxed{R_{A+B} \geq \min(R_A, R_B)\,.}$$

En effet, $\lim_{n\to+\infty}\sum_0^n (a_p + b_p)z^p = \lim_{n\to+\infty}\sum_0^n a_p z^p + \lim_{n\to+\infty}\sum_0^n b_p z^p$ existe si $|z| < R_A$ et $|z| < R_B$ donc si $|z| < \min(R_A, R_B)$ et le rayon de convergence est au moins égal à ce minimum de R_A et de R_B.

▹ Pour définir le produit de deux séries entières de rayons de convergence R_A et R_B, on utilise la définition du produit de deux séries de fonctions :

$$A(z)B(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{p+q=n}(a_p z^p)(b_q z^q)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{p+q=n} a_p b_q\right] z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}\right] z^n$$

et on a :

$$\boxed{R_{AB} \geq \min(R_A, R_B)\,.}$$

Remarques II.7. — Si $R_A \neq R_B$ alors $R_{A+B} = \min(R_A, R_B)$ car si $R_A < R_B$ et si z est tel que $R_A < |z| < R_B$, alors $\sum a_n z^n$ diverge tandis que $\sum b_n z^n$ converge, donc $R_{A+B} \leq R_A$ mais aussi $R_{A+B} \geq \min(R_A, R_B)$. Par contre si $R_A = R_B$, on peut avoir $R_{A+B} > R_A = R_B$ (inégalité stricte).

Exemples II.8. — **1)** $a_n = 2^{-n} - 1$ **et** $b_n = 1$, $R_A = 1$, $R_B = 1$, $a_n + b_n = 2^{-n}$, $R_{A+B} = 2$.

2) $\sum_{n\geq 1} z^n = \frac{1}{1-z} = A(z)$; $R_A = 1$; $B(z) = 1 - z$ **et** $R_B = +\infty$.

$A(z)B(z) = 1$ et $R_{AB} = +\infty > \min(R_A, R_B)$. Exemple d'inégalité stricte.

3) $\left(\sum_{n\geq 0} z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} z^n\right) = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$, pour $|z| < 1$.

2. Propriété de la somme d'une série entière

2.1 Continuité ; rayon de convergence d'une série dérivée ou primitive

Théorème II.9 [Continuité]. — *La somme $S(z)$ d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R est une fonction continue dans le disque de convergence.*

Preuve : Cela résulte du théorème des séries de fonctions continues puisque la série entière est normalement convergente dans tout disque $\{|z| \leq kR\ ;\ 0 < k < 1\}$. □

Lemme II.10. — [Série dérivée ou primitive] *Les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence ainsi que $\sum_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$.*

Preuve : Soit $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Alors $\overline{\lim_{n\to\infty}} |na_n|^{\frac{1}{n-1}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n-1}} \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{R}$.
Enfin $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$ est la série de terme général dont la dérivée est $a_n z_n$. □

2.2 Fonction holomorphe

Définition II.11. — *Soit f une fonction définie dans un domaine D du plan complexe $\mathbb{C}$ et à valeurs complexes ; on dit que f est holomorphe au point $z_0 \in D$ si elle est $\mathbb{C}$–dérivable en ce point, c'est-à-dire si $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe ; on note $f'(z_0)$ cette limite. f est holomorphe dans D si elle est holomorphe en chaque point z_0 de D.*

Cela peut s'écrire sous la forme :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z - z_0)\,|z - z_0|\,,$$

où $\varepsilon(z - z_0)$ est une fonction continue qui tend vers 0 quand $z \to z_0$.
Si $z = x + iy$, f différentiable en (x_0, y_0) s'écrit :

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) \\ &+ \varepsilon(x - x_0, y - y_0)\,\|(x - x_0),(y - y_0)\|\,. \end{aligned}$$

Alors f holomorphe équivaut à f différentiable et $\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$; cette dernière condition peut s'exprimer si $f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$ avec P et Q réelles par

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}\,.} \qquad \text{(Conditions de Cauchy)}$$

Exemple II.12. — $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$; f est dérivable par rapport à z dans tout le plan complexe ; elle est aussi différentiable et ici $P(x,y) = e^x \cos y$, $Q(x,y) = e^x \sin y$, les conditions de Cauchy sont vérifiées.

Remarque II.13. — $\mathcal{H}(D)$, ensemble des fonctions holomorphes dans D est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (et même une algèbre).

Théorème II.14. — *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R ; alors sa somme $S(z)$ est une fonction holomorphe dans le disque de convergence et on a $S'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$.*

Preuve : Soit $|z_0| < R$ et $|z| < R$ et $z \neq z_0$

$$\frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)$$

avec $v_n(z) = a_n(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z^{n-k}z_0^{k-1} + \cdots + z_0^{n-1})$ pour $z \neq z_0$ et $v_n(z_0) = na_n z_0^{n-1}$.
Soit $r < R$ tel que $|z_0| \leq r$ et $|z| \leq r$.

$$|v_n(z)| \leq |a_n| \sum_{k=1}^{n} |z|^{n-k} |z_0|^{k-1} \leq |a_n| \sum_{k=1}^{n} r^{n-k} r^{k-1} = n\,|a_n|\, r^{n-1} = w_n.$$

La série de terme général w_n est convergente, donc la série $\sum v_n(z)$ converge normalement dans $D(0, r)$, sa somme $\phi(z) = \sum_0^{\infty} v_n(z)$ est donc une fonction continue dans ce disque d'où $\lim_{z \to z_0} \phi(z) = \phi(z_0)$ existe, ce qui s'écrit

$$\lim_{z \to z_0} \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z_0) = S'(z_0). \qquad \square$$

Corollaire II.15. — *1) Si $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est une série entière réelle de rayon de convergence R, sa somme est une fonction dérivable sur l'intervalle de convergence $]-R, +R[$.*
2) Puisque $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ est la somme de la série entière dérivée, on en déduit que $S'(z)$ est dérivable et par récurrence que $S(z)$ est indéfiniment dérivable. On aura alors :

$$S^{(p)}(z) = \sum_{n \geq p} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n z^{n-p} = \sum_{n \geq p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n z^{n-p}.$$

Remarque II.16. — Pour trouver le rayon de convergence d'une série, on peut chercher celui de la série dérivée (ou celui de la série primitive) si cette méthode apporte une simplification.

Exemple II.17. — $\dfrac{p!}{(1-z)^{p+1}} = \dfrac{d^p}{dz^p}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \sum_{n \geq p} \dfrac{n!}{(n-p)!} z^{n-p}$ et $R = 1$.

2.3 Coefficient d'une série entière

Les coefficients a_p d'une série entière convergente peuvent s'exprimer en fonction des dérivées p–ièmes de la somme $S(z)$ à l'origine.

$$S^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n z^{n-p}$$

Donc $S^{(p)}(0) = p!a_p$, soit $a_p = \dfrac{1}{p!} S^{(p)}(0)$ et $S(z) = \sum_{n \geq 0} \dfrac{1}{p!} S^{(p)}(0) z^n$.
(Série de Taylor à l'origine ou série de Maclaurin de S)

3. Fonctions analytiques

3.1 Définitions et exemples

Définition II.18. — *Soit f une fonction définie dans un voisinage d'un point z_0 du plan complexe et à valeurs complexes; f est développable en série entière au point z_0 s'il existe une suite (a_n), $n \in \mathbb{N}$, telle que la série entière de terme général $a_n(z-z_0)^n$ soit convergente pour z voisin de z_0 et ait pour somme $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$. Les coefficients a_n dépendent de z_0 ; comme*

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n\geq p} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n(z-z_0)^{n-p}, \qquad \text{on a} \quad a_p = \frac{1}{p!}f^{(p)}(z_0).$$

Définition II.19. — *On dit que f est analytique au point z_0 si elle est développable en série entière en ce point.*

Une fonction f définie dans un domaine D du plan complexe est analytique dans D si elle est analytique en chaque point de D.

On définit de façon analogue la notion de fonction analytique réelle pour une fonction f réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ mais il y a une grande différence entre les fonctions analytiques complexes et les fonctions analytiques réelles.

Une fonction analytique complexe est dérivable puisque somme d'une série entière (et même indéfiniment dérivable) donc holomorphe; réciproquement on peut montrer que si une fonction est holomorphe elle est analytique. Or si une fonction analytique réelle est bien indéfiniment dérivable, une fonction réelle qui est C^∞ n'est pas nécessairement analytique.

Exemples II.20. — **1)** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \exp\left\{-\dfrac{1}{x^2}\right\}$ si $x \neq 0$. Alors la fonction f est de classe C^∞ pour tout $p > 0$ et on a $f^{(p)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}P\left(\dfrac{1}{x}\right)$, où P est un polynôme en $\dfrac{1}{x}$. Donc $\lim_{x\to 0} f^{(p)}(x) = 0 = f^{(p)}(0)$ et $\sum_{p\geq 0} \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p = 0 \neq f(x)$, pour x non nul et voisin de 0. Il s'en suit que f n'est pas analytique.

2) La fonction $f : D = \{|z| < 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $z \longmapsto \dfrac{1}{1-z}$ est analytique à l'origine, car $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$.

3) La fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto e^z$ est analytique à l'origine, car $e^z = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$.

On a le résultat suivant qui sera admis.

Théorème II.21. — *La somme d'une série entière est une fonction analytique dans son disque de convergence.*

Ce qui signifie que si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ pour $|z| < R$, il existe pour chaque z_0 tel que $|z_0| < R$ une suite (b_n) qui dépend de z_0 telle que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} b_n(z-z_0)^n$ pour des z voisins de z_0.

Exemples II.22. — **1)** $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$ pour $|z|<1$. Soit z_0 tel que $|z_0|<1$; $\dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{(1-z_0)-(z-z_0)} = \dfrac{1}{1-z_0}\dfrac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}} = \sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{(1-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$ pour les z tels que $|z-z_0|<|1-z_0|$, a fortiori pour les z appartenant au disque de centre z_0 et de rayon $1-|z_0|$. Ici $b_n = \dfrac{1}{(1-z_0)^{n+1}}$.

2) La fonction $z \longmapsto e^z$ est analytique dans tout le plan complexe $\mathbb{C}$ car, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, on a $e^z = e^{z-z_0+z_0} = e^{z_0}\sum_{n\geq 0}\dfrac{(z-z_0)^n}{n!}$.

3.2 Fonctions développables en séries entières

Si une fonction est développable en série entière, à l'origine pour simplifier, on a : $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ pour z voisin de 0 et $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$.
Réciproquement soit f une fonction définie sur un voisinage de l'origine, indéfiniment dérivable. On considère la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)z^n$. Deux problèmes se posent :

i) Cette série est–elle convergente ?

ii) Quand elle converge, sa somme est–elle égale à $f(z)$?

Il existe des fonctions indéfiniment dérivables dont la série de Maclaurin ne converge pas (sauf pour $x=0$).
Il existe des fonctions indéfiniment dérivables dont la série de Maclaurin converge mais dont la somme n'est pas f (*cf.* Exemple II.20). Ce problème ne concerne que les fonctions de variable réelle puisque si f est une fonction dérivable de z, elle est holomorphe donc analytique. Pour les fonctions de variable réelle, on a plusieurs résultats permettant de savoir que la série converge et que sa somme est f.

Théorème II.23 [Condition nécessaire et suffisante]. — *La formule de Maclaurin d'ordre n s'écrit :*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),$$

avec $0<\theta<1$. Pour que la série $\sum_{n\geq 0}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge et ait pour somme $f(x)$, il faut et il suffit que $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) = 0$ pour tout x dans un voisinage de 0.

Théorème II.24 [Condition suffisante]. — *Soit f une fonction indéfiniment dérivable pour $|x|<r$; on suppose que pour tout $x \in]-r,+r[$, pour tout n, il existe une constante M telle que $|f^n(x)| \leq M$; alors f est développable en série entière sur $]-r,+r[$. On a donc $\forall x \in]-r,+r[$; $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.*

Preuve : Pour $|x|<r$ on a

$$\left| f(x) - \sum_{0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)\right| \leq \frac{M.r^{n+1}}{(n+1)!} = \alpha_{n+1}$$

et $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = r\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$. Montre que $\sum_{n\geq 0}\alpha_n$ converge donc $\alpha_n \to 0$ quand $n\to\infty$. □

3.3 Méthodes de développements en série entière

1) En utilisant la formule de MACLAURIN ou la condition précédente, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} e^z &= \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n\,!} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{1-z} &= \sum_{n\geq 0} z^n \quad \text{pour tout } |z| < 1\,. \end{aligned}}$$

Ces formules sont valables pour les valeurs réelles de z correspondantes.
Par combinaison linéaire et par définition on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \;; \\ \sin x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \;; \\ \cosh x &= \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \;; \\ \cosh z &= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \;; \\ \sinh x &= \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \;; \\ \sinh z &= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}\,. \end{aligned}}$$

Par intégration, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} \ln(1-x) &= -\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} \quad \text{pour tout } |x| < 1 \;; \\ \ln(1-z) &= -\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n} \quad \text{pour tout } |z| < 1 \,; \\ \ln(1+x) &= \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{pour tout } |x| < 1 \,; \\ \ln(1+z) &= \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad \text{pour tout } |z| < 1 \,; \\ \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{2n} \quad \text{pour tout } |x| < 1 \,; \\ \operatorname{Arctan} x &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{pour tout } |x| < 1\,. \end{aligned}}$$

Justification de $\ln(1+z) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$

Soit $f(z) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ la somme de cette série convergente pour $|z| < 1$. On a $f'(z) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}z^{n-1} = \frac{1}{1+z}$ dans le disque de convergence. On pose $g(z) = \exp f(z)$ d'où $g'(z) = f'(z)\exp f(z) = \frac{g(z)}{1+z}$, ce qui donne $\frac{g'(z)(1+z)-g(z)}{(1+z)^2} = 0 = \frac{d}{dz}\left(\frac{g(z)}{1+z}\right)$.
Soit $\frac{g(z)}{1+z} = cste = g(0) = \exp f(0) = 1$. Ainsi $g(z) = 1+z = \exp f(z)$; donc $f(z)$ est une détermination de $\ln(1+z)$.

2) En utilisant une équation différentielle.
Pour trouver le développement en série entière de $f_\alpha(z) = (1+z)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ on établit une équation différentielle vérifiée par la fonction et on cherche les solutions sous formes de série entière, pour $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$. La dérivée de f_α par rapport à z est

$$f'_\alpha(z) = \alpha(1+z)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+z}f_\alpha(z) \text{ d'où } (1+z)f'_\alpha(z) - \alpha f_\alpha(z) = 0\,.$$

On pose : $y = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$
Alors $y' = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots$

Ainsi $$(1+z)\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} - \alpha \sum_{n\geq 0} a_n z^n = 0\,;$$
ce qui s'écrit $$\sum_{n\geq 0}\left((n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n\right)z^n = 0\,.$$

On obtient une relation de récurrence entre les coefficients, valable pour tout $n \geq 0$

$$a_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1}a_n\,.$$

D'où $$a_{n+1} = \frac{(\alpha-n)(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)\cdots\times\alpha(\alpha-1)}{(n+1)n(n-1)\cdots 2\times 1}a_0 \text{ et } a_0 = f_\alpha(0) = 1.$$

On en déduit :

$$\boxed{(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,z^n \quad \text{avec } R = 1\,.}$$

On remarque que si α est entier, $f_\alpha(z)$ est un polynôme de degré n et tous ses coefficients sont nuls à partir du rang $n+1$.

▷ Pour $\alpha = -1$ on retrouve la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n = (1+z)^{-1}$.

▷ Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ on obtient le développement de $(1+z)^{-\frac{1}{2}}$ et en particulier celui de $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ qui est la dérivée de $\operatorname{Arcsin} x$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n\geq 0}\frac{1\times 3\times 5\cdots 2n-1}{2^n n!}x^{2n} = \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n} \quad \text{pour tout } |x| < 1.$$

D'où :

$$\operatorname{Arcsin} x = \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{pour tout } |x| < 1\,.$$

4. Énoncés des exercices

Exercice II.1 Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\sum_{n\geq 1} \ln n z^n$; b) $\sum_{n\geq 1} n^{\sqrt{n}} z^n$; c) $\sum_{n\geq 1} n^{(-1)^n} z^n$;

d) $\sum_{n\geq 1} (nz)^{n^2}$; e) $\sum_{n\geq 1} n^{\ln n} z^{n^2}$; f) $\sum_{n\geq 1} k^{(-1)^n - n} z^n$, $k \in \mathbb{C}^*$;

g) $\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{n! n^n} z^n$; h) $\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)! n^{2n}}{2^n n!(3n)!} z^n$; i) $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{C_{2n}^n}$;

j) $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} z^n$; k) $\sum_{n\geq 0} n! z^{n^2}$; l) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{n!}}{n!}$;

m) $\sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ premier}}} \frac{z^{n^2}}{n}$; n) $\sum_{n\geq 0} \sqrt{n!}\, z^n$; o) $\sum_{n\geq 0} \sqrt{n!}\, z^{n^2}$;

p) $\sum_{n\geq 0} 2^n z^{n!}$; q) $\sum_{n\geq 0} (\sin n)^n z^n$; r) $\sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{3n}$;

s) $\sum_{n\geq 2} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \right) \frac{z^n}{\ln n}$; t) $\sum_{n\geq 0} z^{2^n}$; u) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n!}{(n+\sin n\theta)^n} z^{2n}$, $\theta \in \mathbb{R}$;

v) $\sum_{n\geq 1} \pi(n) z^{n^3}$, où $\pi(n) =$ n–ième décimale de π ;

w) $\sum_{n\geq 0} (\sin \pi(2+\sqrt{3})^n)^n z^n$; x) $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{1.3\cdots(2n+1)} z^{2n+1}$;

y) $\sum_{n\geq 0} a^{n^2} z^{1+2+\cdots+n}$, $a \in \mathbb{R}^*$; z) $\sum_{n\geq 0} \left(\int_0^{\pi} (\sin t)^{2n}\, dt \right) z^n$.

Exercice II.2 On considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq 1$. Soit R' le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n z^n$. Démontrer que $R' \geq 1$ dans chacun des cas suivants :

a) $b_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $n \geq 0$;

b) $b_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}$, $n \geq 1$;

c) $b_n = \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{1}$, $n \geq 1$.

Exercice II.3 Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes en précisant le rayon de convergence.

a) $f(z) = \frac{1}{6z^2 - 5z + 1}$, $z \in \mathbb{C}$.

b) $f(x) = \ln \frac{2+x}{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

c) $f(z) = e^{z \cosh a} \cosh(z \sinh a)$, $a \in \mathbb{C}^*$, $z \in \mathbb{C}$.

d) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, $x \in \mathbb{R}$.

e) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,dt$.

f) $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

g) $f(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\tan a\right)$, $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

h) $f(x) = (\sin x \sinh x)^2$.

Exercice II.4 Soit f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\alpha(x) = (x + \sqrt{1 + x^2})^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Calculer f'_α, f''_α et en déduire une équation différentielle du second ordre vérifiée par f_α.

b) On suppose qu'il existe une solution de l'équation différentielle $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ développable en série entière. Déterminer une relation de récurrence entre les coefficients a_n et en déduire l'expression de a_n selon la parité de n.

c) En déduire le développement en série entière de f_α.

Exercice II.5 Soit $f(x) = (\text{Arcsin}\, x)^2$.

a) Trouver une équation différentielle vérifiée par f.

b) En déduire le développement en série entière de f.

⊕ **Exercice II.6** Exam On pose $f(z) = \dfrac{1}{2 + \cos z}$, $z \in \mathbb{C}$.

a) Démontrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. On écrira $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

b) Calculer a_0, a_1, a_2 et a_{2p+1} pour $p \geq 1$.

c) Donner une relation de récurrence permettant de calculer les a_n pour n entier pair ; en déduire a_4.

d) Calculer le rayon de convergence de cette série entière.

Exercice II.7 Exam Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = e^{-x\frac{\sqrt{3}}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

a) Démontrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

b) Calculer les coefficients de la série entière.

c) Calculer son rayon de convergence.

Exercice II.8 On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1 + x + x^2)y' + (2x + 1)y = 0\,, \quad \text{avec } y(0) = 1.$$

a) On suppose que (E) admet une solution y développable en série entière au voisinage de 0, $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Calculer $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ et a_6.

b) Donner une relation de récurrence permettant de calculer a_n. En déduire a_n.

c) Calculer le rayon de convergence de cette série entière.

d) Déterminer la fonction somme de la série entière.

Exercice II.9 On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (1-x^4)y' - 4xy = 0\,.$$

a) On suppose que (E) admet une solution y développable en série entière au voisinage de 0, $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Calculer a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 éventuellement en fonction de a_0.

b) Donner une relation de récurrence permettant de calculer a_n .

c) En déduire a_n selon la parité de n et le rayon de convergence.

d) Déterminer la fonction somme de cette série entière.

Exercice II.10 On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x^2y'' - 2xy' + (2-x^2)y = 0\,, \quad \text{avec} \ \ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1.$$

a) On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Calculer a_0, a_1 et a_3.

b) Donner une relation de récurrence permettant de calculer les coefficients a_n.

c) En déduire a_n en fonction de n et le rayon de convergence.

d) Exprimer la somme de la série sous forme de fonctions élémentaires.

Exercice II.11 On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (1-x^4)y' - 2x^3y = 0\,.$$

On suppose qu'il existe une solution de (E) développable en série entière au voisinage de 0, soit $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.
a) Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4.
b) Donner une relation de récurrence permettant de calculer a_n suivant les différentes valeurs de n et donner l'expression de a_n en fonction de n et éventuellement de a_0.
c) Calculer le rayon de convergence de cette série.
d) Déterminer la somme de cette série entière.

⊕⊕ **Exercice II.12** Déterminer les solutions développables en série entière de

$$(E) \qquad x(x+2)y' + (x+1)y = 1$$

et exprimer la somme de ces séries entières sous forme de fonctions élémentaires.

Exercice II.13 $\boxed{\text{Exam}}$ Soit

$$(E) \qquad x(1+x^2)y' - 2(1+x^2)y - x^3 = 0\,, \quad \text{avec} \ \ y''(0) = 0$$

une équation différentielle dont on cherche une solution y développable en série entière au voisinage de 0, $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

a) Calculer a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5.

b) Donner une relation de récurrence entre les coefficients et en déduire a_n.

c) Calculer le rayon de convergence.

d) Exprimer la somme de la série sous forme de fonctions élémentaires.

Exercice II.14 $\boxed{\text{Exam}}$ Soit

$$(E) \qquad x(1-x^2)y'' + (1-2x^2)y' + 2\pi x = 0\,, \quad \text{avec } y(0) = 0$$

une équation différentielle dont on cherche une solution y développable en série entière au voisinage de 0, $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

a) Calculer a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4.

b) Trouver une relation de récurrence entre les coefficients a_n.

c) En déduire a_n selon la parité de n et le rayon de convergence.

d) Calculer la somme de la série sous forme de fonctions élémentaires.

Exercice II.15 Soit $w \in \mathbb{R}_+^*$ donné.

$\boxed{\text{A}}$ a) Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n w^{2n}}{(2n)!2^{2n-1}} x^{2n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n w^{2n}(n!)^2}{(2n)!2^{2n-1}} x^{2n}.$$

b) Étudier, quand cela est possible, la convergence de ces séries aux bornes de l'intervalle de convergence.

$\boxed{\text{B}}$ On considère l'équation différentielle du second ordre

$$(E) \qquad y'' + w^2 y = 3w^2 \cos^2 \frac{wx}{4}\,, \quad \text{avec } y(0) = 4 \text{ et } y'(0) = 0.$$

On suppose qu'il existe une solution de (E) développable en série entière au voisinage de 0, soit $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

a) Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3.

b) Donner une relation de récurrence permettant de calculer les coefficients a_n et donner l'expression de a_n en fonction de n et de w.

c) Déterminer le rayon de convergence de la série entière solution de (E).

d) Exprimer la somme de cette série à l'aide de fonctions élémentaires.

e) Retrouver ce résultat par une intégration de l'équation différentielle (E).

f) Déduire de ce qui précède la somme des séries

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \pi^{2n} b_n}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n} b_n}{(2n)!}\,, \qquad \text{où} \quad b_n = \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2}\,.$$

Exercice II.16 $\boxed{\text{Exam}}$ Soit u et z des variables complexes, avec $u \neq 0$.

$\boxed{\text{A}}$ On pose $f(u,z) = \dfrac{1}{z^2 - 2uz + 1}$.

a) Démontrer que, pour u fixé, f admet un développement en série entière de la variable z, noté $f(u,z) = \sum_{n\geq 0} a_n(u) z^n$ et calculer les coefficients $a_n(u)$ en fonction des racines α et β (distincts ou non) du dénominateur. Calculer le rayon de convergence $R(u)$ de cette série entière.

b) De façon analogue, démontrer que f admet, sauf pour certaines valeurs de z que l'on précisera, un développement en série entière de la variable u, noté $f(u,z) = \sum_{n\geq 0} b_n(z) u^n$ et calculer les coefficients $b_n(z)$ et le rayon de convergence $R(z)$ en fonction de z.

$\boxed{\text{B}}$ On pose $g(u,z) = (1-z^2)f(u,z) = \sum_{n\geq 0} c_n(u)z^n$ car g est développable en série entière de la variable z.
a) Calculer c_0, c_1 et donner une relation de récurrence entre les coefficients. En déduire que $c_n(u)$ est un polynôme en u à coefficients entiers.
b) Calculer c_n en fonction de α et β.
c) Calculer le rayon de convergence de cette série entière.

⊕ **Exercice II.17** $\boxed{\text{Exam}}$ $\boxed{\text{A}}$ Pour n entier ≥ 0, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2}\,du$.
a) Calculer a_0 et a_1.
b) Trouver une relation de récurrence entre a_n et a_{n-2}.
c) En déduire a_n selon la parité de n.
d) Calculer le rayon de convergence de la série entière

$$S(x) = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_n x^n.$$

$\boxed{\text{B}}$ On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-xu)^2(1+u^2)}\,du.$
a) Déterminer les réels x pour lesquels l'intégrale définissant F est convergente.
b) Calculer $F(x)$ sous forme de fonctions élémentaires.
c) Démontrer, en justifiant les calculs, que $F(x) = S(x)$.

Exercice II.18 Soit x un réel fixé.
a) Montrer que les fonctions suivantes

$$f_1 : z \longmapsto \frac{e^{zx}-e^z}{z}, \quad f_2 : z \longmapsto \frac{z}{e^z-1} \quad \text{et} \quad f_3 : z \longmapsto \frac{e^{zx}-e^z}{e^z-1}$$

sont développables en série entière au voisinage de 0.
b) Montrer que les coefficients du développement de f_3 sont des polynômes en x dont on précisera le degré.
c) On pose $f_3(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} Q_n(x)\frac{z^n}{n!}$.
Montrer que les Q_n sont des polynômes tels que, pour tout p entier,

$$Q_n(p) = 1^n + 2^n + \cdots + (p-1)^n$$

et que cette relation détermine de façon unique les polynômes Q_n.

⊕ **Exercice II.19** $\boxed{\text{Exam}}$ Soit α un nombre réel positif. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_n = \alpha\sum_{k=1}^{n} u_{k-1}u_{n-k} \quad \text{pour } n \geq 1$$

et l'on désigne par $S(z)$ la série entière $\sum_{n\geq 0} u_n z^n$.
a) En supposant le rayon de convergence de $S(z)$ non nul, comparer dans le disque de convergence les séries $zS^2(z)$ et $S(z)$.
b) Développer en série entière la fonction $T(z) = \dfrac{1-(1-4\alpha z)^{\frac{1}{2}}}{z}$ au voisinage de 0 et déterminer le rayon de convergence.

c) Déduire de ce qui précède l'expression de $S(z)$ et son rayon de convergence.

d) En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

e) Pour quelles valeurs de α la série (u_n) converge-t-elle? Quelle est alors sa somme? (On étudiera aussi la convergence pour les valeurs limites de α)

⊕ **Exercice II.20** Soit f une fonction holomorphe dans le disque $D(0, R)$ de centre 0 et de rayon R; f est alors développable en série entière en tout point z_0 de ce disque; on appelle $R(z_0)$ le rayon de convergence de cette série entière.

a) Démontrer que l'on a les inégalités suivantes

$$R - |z_0| \leq R(z_0) \leq R + |z_0| \,.$$

Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

b) Démontrer qu'il existe au moins un point z_0 du disque pour lequel

$$R - |z_0| = R(z_0).$$

En déduire que f a au moins un point singulier sur le bord du disque de convergence.

⊕ **Exercice II.21** Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence R. On suppose que la série converge pour $x = R$. Montrer que $f(x)$ a une limite l quand $x \longrightarrow R$, $x < R$, et que $l = \sum_{n\geq 0} a_n R^n$.

5. Solutions des exercices

Exercice II.1 **a)** $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$ et $R = 1$.

b) $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(n^{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \exp \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = 1$ et $R = 1$.

c) $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{(-1)^n}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \exp\left\{(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}\right\} = 1$ et $R = 1$.

d) Les coefficients de cette série sont définies par $a_p = \begin{cases} n^{n^2} & \text{si } p = n^2 \\ 0 & \text{si } p \neq n^2 \end{cases}$.

D'après la formule d'HADAMARD, on a :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{p\to\infty} |a_p|^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} (n^{n^2})^{\frac{1}{n^2}} = +\infty \text{ donc } R = 0.$$

e) Les coefficients sont donnés par $a_p = \begin{cases} n^{\ln n} & \text{si } p = n^2 \\ 0 & \text{si } p \neq n^2 \end{cases}$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} (n^{\ln n})^{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 = 1 \text{ et } R = 1.$$

f) $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{|k|^{2(-1)^{n+1}}}{|k|}$ d'où $\lim\limits_{p\to\infty} \left|\dfrac{a_{2p+1}}{a_{2p}}\right| = \dfrac{1}{|k|^3}$ et $\lim\limits_{p\to\infty} \left|\dfrac{a_{2p+2}}{a_{2p+1}}\right| = |k|$ si $|k| \neq 1$, la suite $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ n'a pas de limite. Par contre $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \dfrac{|k|^{\frac{(-1)^n}{n}}}{|k|} \longrightarrow \dfrac{1}{|k|}$ quand n tend vers $+\infty$ donc $R = |k|$.

g) $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{(2n+2)!n!n^n}{(2n)!(n+1)!(n+1)^{n+1}} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \sim \dfrac{4}{(1+\frac{1}{n})^n}$

avec $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left\{n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right\} = \exp\left\{n\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})\right)\right\} \longrightarrow e$, quand $n \longrightarrow \infty$; d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{4}{e}$ et $R = \dfrac{e}{4}$.

h)
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+2)!n!(3n)!2^n(n+1)^{2n+2}}{(2n)!(n+1)!(3n+3)!2^{n+1}n^{2n}}$$
$$= \frac{(2n+2)(2n+1)(n+1)^2}{(n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1).2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \sim \frac{2}{27}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{2e^2}{27}$ et $R = \dfrac{27}{2e^2}$.

i) On a $C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, donc $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{((n+1)!)^2(2n)!}{(2n+2)!(n!)^2} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \sim \dfrac{1}{4}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{4}$; d'où $R = 4$.

j) $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^{n+1}} \sim \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ donc $R = 1$. On peut étudier la convergence de la série sur le bord du disque de convergence, c'est–à–dire la convergence de la série numérique obtenue en prenant $z = e^{i\theta}$: $u_n(\theta) = \dfrac{(-1)^n e^{in\theta}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, série qui ne converge pas absolument.

$$u_n(\theta) = \frac{(-1)^n e^{in\theta}}{\sqrt{n}(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})} = \frac{e^{in(\theta+\pi)}}{\sqrt{n}}\Big(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\Big)$$
$$= \frac{e^{in(\theta+\pi)}}{\sqrt{n}} - \frac{e^{in\theta}}{n} + \frac{e^{in(\theta+\pi)}}{n^{\frac{3}{2}}} + o\Big(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Big) = \alpha_n - \beta_n + \gamma_n\,.$$

$\sum \gamma_n$ converge absolument; $\sum \alpha_n$ et $\sum \beta_n$ sont des séries semi–convergentes (Théorème d'ABEL) à condition que $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$; pour ces valeurs $\sum \alpha_n$ diverge ($\theta = \pi$) ou $\sum \beta_n$ diverge ($\theta = 0$).

Conclusion : La série converge sur le cercle de convergence $\{|z| = 1\}$ sauf aux points $z = 1$ et -1.

k) On a $a_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n^2 \\ n! & \text{si } p = n^2 \end{cases}$; donc $\dfrac{1}{R} = \limsup_{p\to\infty} |a_p|^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

On trouve cette limite en utilisant un équivalent de $n!$, pour n très grand, $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (Formule de STIRLING); on obtient $R = 1$. Pour éviter d'utiliser cet équivalent, on revient aux méthodes des séries de fonctions en calculant la limite de :

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(n+1)!\,|z|^{(n+1)^2}}{n!\,|z|^{n^2}} = (n+1)\,|z|^{2n+1} \ ;$$

d'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n}(z)\right| = \begin{cases} 0 \text{ si } |z| < 1 \\ +\infty \text{ si } |z| > 1 \end{cases}.$

La série entière converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$ donc $R = 1$

l) $a_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n! \\ \dfrac{1}{n!} & \text{si } p = n! \end{cases}$ et $\dfrac{1}{R} = \limsup_{p\to\infty} |a_p|^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n!}} = 1$; $R = 1$.

m) On a $a_p = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } p = n^2 \text{ et } n \text{ premier} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$; $\dfrac{1}{R} = \displaystyle\lim_{p\to\infty} |a_p|^{\frac{1}{p}} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ premier}}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}} = 1$

et $R = 1$. On peut aussi remarquer que $\dfrac{|z|^{n^2}}{n} \leq |z|^{n^2}$ dont la série converge si $|z| < 1$ et $R \geq 1$; pour $z = 1$, $\displaystyle\sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ premier}}} \frac{1}{n}$ est une série divergente; donc $R \leq 1$ et par conséquent $R = 1$.

n) $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sqrt{\dfrac{(n+1)!}{n!}} = \sqrt{n+1}$; donc $R = 0$.

o) $a_p = \begin{cases} \sqrt{n!} \text{ si } p = n^2 \\ 0 \text{ si } p \neq n^2 \end{cases}$. Pour ne pas utiliser un équivalent de $n!$, on revient aux séries de fonctions en calculant $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \sqrt{n+1}\,|z|^{2n+1}$.

Donc $\lim \left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$ et on en déduit que $R = 1$.

p) $a_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n! \\ 2^n & \text{si } p = n! \end{cases}$; $\dfrac{1}{R} = \limsup_{p\to\infty} |a_p|^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{n}{n!}} = 1$ et $R = 1$.

q) $|a_n|^{\frac{1}{n}} = |\sin n|$, suite qui n'a pas de limite, mais $\dfrac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$ et $R = 1$. On peut aussi remarquer que $|(\sin n)^n z^n| \leq |z|^n$; donc $R \geq 1$ et, si $z = 1$, la série $\sum(\sin n)^n$ diverge. D'où $R \leq 1$ et finalement $R = 1$.

r) Pour éviter d'utiliser un équivalent de $n!$, on revient aux séries de fonctions : $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \dfrac{(2n+2)!(n!)^2}{((n+1)!)^2(2n!)}|z|^3 \sim \dfrac{|z|^3}{4}$. La série converge si $|z|^3 < 4$ et diverge si $|z|^3 > 4$; donc $R = 4^{\frac{1}{3}}$.

s) On peut remarquer que $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sim \ln n$ donc $a_n \sim 1$ et $R = 1$. On peut aussi écrire $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{\ln n}{\ln(n+1)} \dfrac{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}) + \frac{1}{n+1}}{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})} \longrightarrow 1$, quand $n \to \infty$.

t) $a_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 2^n \\ 0 & \text{si } p \neq 2^n \end{cases}$; $\dfrac{1}{R} = \limsup_{p\to\infty} |a_p|^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} 1^{2^{-n}} = 1$ et $R = 1$.

u) $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = |z|^2 \left|\dfrac{(n+1)!(n+\sin n\theta)^n}{(n+1)+\sin(n+1)\theta)^{n+1}n!}\right| \sim |z|^2 \dfrac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}$;

d'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = |z|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{|z|^2}{e}$. On en déduit que $R = \sqrt{e}$.

v) $\pi(n)\,|z|^{n^3} \leq 9\,|z|^{n^3}$ et $\sum |z|^{n^3}$ converge si $|z| < 1$; donc $R \geq 1$. Pour $z = 1$, $\sum \pi(n)$ est une série divergente; donc $R \leq 1$ et finalement $R = 1$.

w) $\dfrac{1}{R} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|(\sin \pi(2+\sqrt{3})^n)^n\right|^{\frac{1}{n}}$. Par la formule du binôme :

$(2+\sqrt{3})^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(\sqrt{3})^k 2^{n-k}$ et $(2-\sqrt{3})^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k(\sqrt{3})^k 2^{n-k}$; d'où

$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(1+(-1)^k)(\sqrt{3})^k 2^{n-k} = \sum\limits_{k=2p=0}^{n} C_n^k 2(3^p)2^{n-k} = 2N$,

où N est un entier strictement positif. On en déduit que :

$$\sin \pi(2+\sqrt{3})^n = \sin(2\pi N - \pi(2-\sqrt{3})^n) = -\sin \pi(2-\sqrt{3})^n .$$

D'où $\left|\sin \pi(2+\sqrt{3})^n\right| = \sin \pi(2-\sqrt{3})^n \sim \pi(2-\sqrt{3})^n$ car $0 < 2-\sqrt{3} < 1$; par conséquent $\lim_{n\to\infty} \left|\sin \pi(2+\sqrt{3})^n\right| = 0$ et $R = +\infty$.

x) $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \dfrac{n+1}{2n+1}|z|^2$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{|z|^2}{2}$; donc $R = \sqrt{2}$.

y) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; donc $a_p = \begin{cases} a^{n^2} & \text{si } p = \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & \text{si } p \neq \dfrac{n(n+1)}{2} \end{cases}$

et $\dfrac{1}{R} = \limsup_{p\to\infty} |a_p|^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} |a|^{\frac{2n^2}{n(n+1)}} = a^2$ et $R = a^{-2}$.

z) $a_n = \int_0^\pi (\sin t)^{2n}\,dt$; on établit une relation de récurrence :

$$a_n = \int_0^\pi (\sin t)^{2n-1} \sin t\,dt = \left[-\cos t(\sin t)^{2n-1}\right]_0^\pi + (2n-1)\int_0^\pi (\sin t)^{2n-2}\cos^2 t\,dt$$

$$= (2n-1)\int_0^\pi (\sin t)^{2n-2}(1-\sin^2 t)\,dt = (2n-1)a_{n-1} - (2n-1)a_n \;;$$

d'où $a_n = \dfrac{2n-1}{2n} a_{n-1}$, pour $n \geq 1$. Il est inutile de calculer a_n, car :
$\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{2n-1}{2n}\right| = 1$ et $R = 1$. Toutefois on trouve facilement

$$a_n = \frac{3.5\cdots(2n-1)}{2.4\cdots(2n)}\pi = \frac{(2n)!\,\pi}{(2^n\,n!)^2}.$$

Exercice II.2 On sait que :

$$(\sum_{n\geq 0} a_n z^n)(\sum_{n\geq 0} c_n z^n) = \sum_{n\geq 0} (\sum_{p=0}^{n} a_p c_{n-p}) z^n \quad \text{et} \quad R_{AC} \geq \min(R_A, R_C).$$

a) On aura $(\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n)(\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n) = \sum\limits_{n\geq 0} (\sum\limits_{p=0}^{n} a_p) z^n$ si, et seulement si, $c_n = 1$, pour tout n ; donc $\sum_{n\geq 0} c_n z^n = \sum_{n\geq 0} z^n$ de rayon $R_C = 1$; d'où $R' \geq \min(R, 1) = 1$.

b) On a $(\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n)' = \sum\limits_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$,pour $|z| < R$, et :

$$(\sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n)(\sum_{n\geq 0} z^n) = \sum_{n\geq 0} (a_1 + 2a_2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}) z^n ;$$

donc $R' \geq \min(R, 1) = 1$.

c) La série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1.

$(\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n)(\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{n}) = \sum\limits_{n\geq 1} \left(\dfrac{a_0}{n} + \dfrac{a_1}{n-1} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{1}\right) z^n$; donc $R' \geq \min(R, 1) = 1$.

Exercice II.3 **a)** On se ramène à des développements en série entière connus : $\dfrac{1}{1-u} = \sum\limits_{n\geq 0} u^n$ avec $R = 1$. En décomposant f en éléments simples :

$$6z^2 - 5z + 1 = (2z-1)(3z-1) \;; \qquad \text{d'où} \quad f(z) = \frac{2}{2z-1} - \frac{3}{3z-1}.$$

▷ Pour $|z| < \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{1-2z} = \sum\limits_{n\geq 0} 2^n z^n$, d'où $\dfrac{2}{2z-1} = -\sum\limits_{n\geq 0} 2^{n+1} z^n$, $R_1 = \dfrac{1}{2}$.

▷ Pour $|z| < \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{1-3z} = \sum\limits_{n\geq 0} 3^n z^n$; d'où $\dfrac{2}{1-3z} = -\sum\limits_{n\geq 0} 3^{n+1} z^n$, $R_2 = \dfrac{1}{3}$.D'où

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} (3^{n+1} - 2^{n+1}) z^n \text{ avec } R_f = \min(R_1, R_2) = \frac{1}{3} \text{ car } R_1 \neq R_2 .$$

b) On utilise $\ln(1-u) = -\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{u^n}{n}$, $R = 1$; $f(x) = \ln 2(1 + \dfrac{x}{2}) - \ln(1-x)$, avec :

$$\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \; R_1 = 2 \;;$$

$$\ln\left(1 - x\right) = -\sum_{n\geq 1} x^n, \; R_2 = 1.$$

D'où $f(x) = \ln 2 + \sum\limits_{n\geq 1} (1 + (-1)^{n-1} 2^{-n})$ et $R_f = \min(R_1, R_2) = 1$, car f est la somme de deux séries de rayons distincts.

c) $f(z) = e^{z\cosh a}\left(\dfrac{e^{z\sinh a} + e^{-z\sinh a}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(e^{ze^{a}} + e^{ze^{-a}})$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(ze^{a})^n}{n!} + \frac{(ze^{-a})^n}{n!}\right), \text{ en sachant que } e^{u} = \sum_{0}^{\infty}\frac{u^n}{n!} \text{ avec } R = +\infty,$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}\left(\frac{e^{na} + e^{-na}}{2}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{\cosh na}{n!}z^n.$$

Ainsi f est le produit de deux séries entières de somme $e^{z\cosh a}$ et $\cosh(z\sinh a)$ de rayons respectifs $R_1 = +\infty$ et $R_2 = +\infty$. Comme $R_f \geq \min(R_1, R_2)$, $R_f = +\infty$.

d) $f'(x) = \dfrac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et on utilise le développement du binôme :

$$(1+u)^{\alpha} = 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n, \quad R = 1.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-(2n-1))}{n!}x^{2n} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n},\ R = 1,$$

et $f(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$, $R = 1$ (série primitive).

e) On cherche une équation différentielle vérifiée par f. En calculant sa dérivée

$$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,dt + e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}}) = -xf(x) + 1$$

on cherche les solutions séries entières de $y' + xy = 1$, avec $y(0) = f(0) = 0$ et $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. On a $y'(0) = f'(0) = 1 = a_1$.

$\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} - 1 \equiv 0 = \sum_{n\geq 0} A_n x^n$, série entière dont tous les coefficients A_n sont nuls, en particulier, on a $0 = A_n = (n+1)a_{n+1} + a_{n-1}$. D'où la relation de récurrence $a_{n+1} = -\dfrac{a_{n-1}}{n+1}$ valable pour tout $n \geq 1$. Selon la parité de n on obtient :

$$a_{2p} = -\frac{a_{2p-2}}{2p}, \text{ comme } a_0 = 0,\ a_2 \text{ est nul et par récurrence } a_{2p} = 0\ ;$$

$$a_{2p+1} = -\frac{a_{2p-1}}{2p+1} = (-1)^p\frac{a_1}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3} = (-1)^p\frac{(2^p p!)}{(2p+1)!}.$$

D'où $f(x) = \displaystyle\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!}x^{2p+1}$ de rayon de convergence $+\infty$, car f est le produit de $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ (de rayon $R_1 = +\infty$) par la primitive de $e^{\frac{1}{2}x^2}$ (de rayon $R_2 = +\infty$); donc $R_f \geq \min(R_1, R_2) = +\infty$; On remarquera que l'imparité de f était prévisible puisque f est le produit d'une fonction paire par une fonction impaire, à savoir la primitive d'une fonction paire.

f) $f'(x) = \dfrac{2x+1}{1+x+x^2} = \dfrac{1}{x-j} + \dfrac{1}{x-j^2}$, avec $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \exp\left(2i\dfrac{\pi}{3}\right)$.
On utilise $\dfrac{1}{1-u} = \sum\limits_{n\geq 0} u^n$, $R = 1$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{-j(1-\frac{x}{j})} + \frac{1}{-j^2(1-\frac{x}{j^2})} = -\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{j^{n+1}} + \frac{1}{j^{2(n+1)}}\right)x^n \\
&= -\sum_{n\geq 0}(e^{-\frac{2i\pi}{3}(n+1)} + e^{\frac{2i\pi}{3}(n+1)})x^n = -2\sum_{n\geq 0}\cos\left(\frac{2\pi}{3}(n+1)\right)x^n
\end{aligned}$$

D'où $f(x) = -2\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{\cos\frac{2\pi}{3}(n+1)}{n+1}x^{n+1}$, car $f(0) = 0$. $R_{f'} \geq \min(1,1) = 1$, comme $\dfrac{1}{x-j}$ n'est pas continue au point $x = j$, $R_{f'} \leq 1$ et finalement $R_{f'} = 1 = R_f$.

g) f_α est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$$\begin{aligned}
f'_\alpha(x) &= \frac{\frac{2}{(x+1)^2}\tan\alpha}{1+(\frac{x-1}{x+1})^2\tan^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1+2x\cos 2\alpha + x^2} = \frac{\sin 2\alpha}{(1+xe^{2i\alpha})(1+xe^{-2i\alpha})} \\
&= \sin 2\alpha\left[\frac{1}{(1-e^{-4i\alpha})(1+xe^{2i\alpha})} + \frac{1}{(1-e^{4i\alpha})(1+xe^{-2i\alpha})}\right] \\
&= \sin 2\alpha\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n\left[\frac{e^{2in\alpha}}{1-e^{-4i\alpha}} + \frac{e^{-2in\alpha}}{1-e^{4i\alpha}}\right] \\
&= \sin 2\alpha\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n\frac{e^{2i(n+1)\alpha}(e^{-2i\alpha}-e^{2i\alpha}) + e^{-2i(n+1)\alpha}(e^{2i\alpha}-e^{-2i\alpha})}{2-2\cos 4\alpha} \\
&= \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n \sin 2(n+1)\alpha \text{ et } R_{f'} = 1
\end{aligned}$$

ainsi :

$$f_\alpha(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\sin 2(n+1)\alpha}{n+1}x^{n+1}, \quad \text{car } f_\alpha(0) = 0 \text{ et } R_f = R_{f'} = 1.$$

h) $f(x) = \dfrac{1}{4}(1-\cos 2\alpha)(\cosh 2x - 1) = \dfrac{1}{4}(-1+\cos 2x + \cosh 2x - \cos 2x\cosh 2x)$.

On a :
$\cos 2x + \cosh 2x = \sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}((-1)^n+1) = 2\sum\limits_{p\geq 0}\dfrac{2^{4p}x^{4p}}{(4p)!}$;

$$\begin{aligned}
\cos 2x\cosh 2x &= \frac{1}{4}(e^{2ix}+e^{-2ix})(e^{2x}+e^{-2x}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{2x(1+i)} + e^{2x(1-i)} + e^{-2x(1+i)} + e^{-2x(1-i)}) \\
&= \frac{1}{4}\left\{\sum_{n\geq 0}\frac{2^n x^n}{n!}[(1+i)^n+(1-i)^n] + \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{2^n x^n}{n!}[(1+i)^n+(1-i)^n]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{2^{2p}x^{2p}}{(2p)!}\left[(1+i)^{2p}+(1-i)^{2p}\right].
\end{aligned}$$

Compte tenu que $(1+i)^{2p}+(1-i)^{2p}=2^p i^p(1+(-1)^p)$, on a :

$$\cos 2x \cosh 2x = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{2^{4q}x^{4q}}{(4q)!}(-1)^q 2^{2q} = \sum_{q\geq 0}(-1)^q \frac{2^{6q}x^{4q}}{(4q)!}.$$

D'où

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}\left(-1+\sum_{k=0}^{\infty}[2^{4k+1}+(-1)^{k+1}2^{6k}]\frac{x^{4k}}{(4k)!}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^{4k+1}+(-1)^{k+1}2^{6k}\right)\frac{x^{4k}}{(4k)!}. \end{aligned}$$

Comme f est le produit des fonctions $\sin^2 x$ et $\cosh^2 x$, dont les développements en série entière ont un rayon infini, on a : $R_f \geq \min(R_1, R_2) = +\infty$; donc $R_f = +\infty$.

Exercice II.4 a) $f'_\alpha(x) = \dfrac{\alpha(x+\sqrt{1+x^2})^\alpha}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\alpha f_\alpha}{\sqrt{1+x^2}}$;
$f''_\alpha(x) = \dfrac{\alpha f'_\alpha}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{\alpha x f_\alpha(x)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. Ainsi : $(1+x^2)f''_\alpha + xf'_\alpha - \alpha^2 f_\alpha = 0$ et $f_\alpha(x) = y = \sum_0^\infty a_n x^n$.
b) On a : $(1+x^2)\sum_{n=2}^\infty n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^\infty n a_n x^{n-1} - \alpha^2 \sum_{n=0}^\infty a_n x^n = 0$. Ce qui entraîne que tous les coefficients de cette série sont nuls. C'est-à-dire $(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + na_n - \alpha^2 a_n = 0$, soit $a_{n+2} = \dfrac{\alpha^2 - n^2}{(n+2)(n+1)}a_n$ $(n \geq 0)$.

On en déduit : $a_0 = f_\alpha(0) = 1$, $a_1 = \dfrac{1}{1!}f'_\alpha(0) = \alpha$ et suivant la parité de n :

▷ pour n pair, $n = 2p-2$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ on trouve

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{\alpha^2-(2p-2)^2}{2p(2p-1)}a_{2p-2} = \frac{(\alpha^2-(2p-2)^2)(\cdots)(\alpha^2-2^2)}{(2p)(2p-1)\cdots\times 3}a_2 \\ &= \frac{\alpha^2}{2(2p)!}\prod_{k=1}^{p-1}[\alpha^2-(2p-2k)^2] \ ; \end{aligned}$$

▷ pour n impair, $n = 2p-1$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ on trouve

$$\begin{aligned} a_{2p+1} &= \frac{\alpha^2-(2p-1)^2}{(2p+1)(2p)}a_{2p-1} = \frac{(\alpha^2-(2p-1)^2\cdots(\alpha^2-1)}{(2p+1)(2p\cdots 2}a_1 \\ &= \frac{\alpha}{(2p+1)!}\prod_{k=1}^{p}(\alpha^2-(2p-2k+1)^2). \end{aligned}$$

c) $f_\alpha(x) = 1 + \alpha x + \sum_{n=2}^\infty a_n x^n$ avec les a_n ci-dessus. Puisque $\left|\dfrac{a_{2p}}{a_{2p-2}}\right|$ et $\left|\dfrac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}}\right|$ convergent vers 1, on déduit que la suite $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ converge et a pour limite 1 ; donc $R = 1$.

Exercice II.5 **a)** On cherche une équation différentielle linéaire. En calculant :

$$f'(x) = \frac{2\,\mathrm{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}} \ ; \ f''(x) = \frac{2}{1-x^2} + \frac{x\,\mathrm{Arcsin}\, x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2}f'(x),$$

on obtient l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y''-xy'=2\,,\quad \text{avec } y(0)=f(0)=0,\ y'(0)=f'(0)=0.$$

b) On pose $y=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ et on remplace, dans l'équation différentielle, y' et y'' par les séries dérivées. On obtient :

$$(1-x^2)\sum_{n\geq 2}n(n-1)a_nx^{n-2}-x\sum_{n\geq 1}na_nx^{n-1}-2=0\;;$$

$$\sum_{n\geq 0}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n\geq 2}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n\geq 1}na_nx^n-2=\sum_{n\geq 0}A_nx^n=0.$$

Il s'en suit que tous les coefficients A_n sont nuls. C'est–à–dire :

$$A_0=2a_2-2=0\quad \text{et ,pour tout } n\geq 1,\ A_n=(n+2)(n+1)a_{n+2}-n^2a_n=0.$$

Ce qui donne la relation de récurrence : $a_{n+2}=\dfrac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n\ (n\geq 1)$.

Puisque $a_1=\dfrac{f'(0)}{1!}=0$, on obtient par récurrence $a_{2p+1}=0$, pour tout $p>0$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}a_{2p+2}&=\frac{(2p)^2}{(2p+2)(2p+1)}a_{2p}=\frac{(2p)^2(2p-2)^2\cdots(2)^2}{(2p+2)(2p+1)\cdots 3}a_2\\&=\frac{2}{(2p+2)!}(2^pp!)^2\quad(\text{pour tout } p\geq 0).\end{aligned}$$

Ainsi $f(x)=\sum_{p\geq 0}\dfrac{2(2^pp!)^2}{(2p+2)!}x^{2p+2}$. En effectuant le quotient de deux termes consécutifs dans cette série, on trouve $x^2\left|\dfrac{a_{2p+2}}{a_{2p}}\right|$; de limite x^2, donc le rayon est 1 ($R^2=1$).

Exercice II.6 a) On cherche les pôles dans $\mathbb{C}$ de f. En posant $u=e^{iz}$, l'équation $\cos z=-2$ devient $\dfrac{u^2+1}{2u}=-2$. Les racines du trinôme u^2+4u+1 sont $\begin{cases}u_1=-2+\sqrt{3}\\ u_2=-2-\sqrt{3}\end{cases}$. D'où $\begin{cases}e^{iz}=u_1\iff z'_k=(2k+1)\pi-i\ln(2-\sqrt{3}),\ k\in\mathbb{Z}\\ e^{iz}=u_2\iff z''_k=(2k+1)\pi-i\ln(2+\sqrt{3}),\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

On a $\min_{k\in\mathbb{Z}}\{|z'_k|,|z''_k|\}=|z'_0|=\sqrt{\pi^2+\ln^2(2-\sqrt{3})}$. La fonction f est dérivable dans le disque $D(0,|z'_0|)$, donc holomorphe; elle est par conséquent analytique dans ce disque et développable en série entière au voisinage de 0.

On peut aussi invoquer que $2+\cos z=2+\sum_{n\geq 0}(-1)^n\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$ est une série entière qui ne s'annule pas en 0, donc $\dfrac{1}{2+\cos z}$ est développable en série entière.

b) $a_0=f(0)=\frac{1}{3}$; on a, si on suppose que $f(z)=\sum_{n\geq 0}a_nz^n$,

$$\Big(\sum_{n\geq 0}a_nz^n\Big)\Big(2+\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\Big)=1$$

le terme constant dans ce produit est $a_0(2+1)=1$; on retrouve $a_0=\frac{1}{3}$.
Le coefficient de z est $2a_1=0$ donc $a_1=0$.
Le coefficient de z^2 est $2a_2-\frac{a_0}{2!}=0$ donc $a_2=\frac{1}{18}$. Le coefficient de z^{2n-1} est :

$$\frac{a_1(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}+\frac{a_2(-1)^{n-2}}{(2n-4)!}+\cdots+3a_{2n-1}=0.$$

On voit donc sur cette relation de récurrence que a_1 étant nul, a_3 est nul et par récurrence $a_{2n-1}=0$, ce qui était prévisible puisque f est une fonction paire.

c) Le coefficient de z^{2n} est $\dfrac{(-1)^n a_0}{(2n)!}+\dfrac{(-1)^{n-1}a_2}{(2n-2)!}+\cdots+3a_{2n}=0$.
Cette relation de récurrence permet de calculer de proche proche les coefficients, en particulier $3a_4=\frac{1}{2}a_2-\frac{1}{24}a_0=\frac{1}{72}$ et $a_4=\frac{1}{216}$.
d) On a $R=|z_0'|$ pour des raisons de continuité.

Exercice II.7 a) et **c)** f est le produit de deux fonctions développables en série entière donc est développable en série entière et le rayon de convergence R_f est supérieur ou égal au minimum de celui de la série représentant $e^{-x\sqrt{\frac{3}{2}}}$, soit $+\infty$, et celui de la série représentant $\cos(\frac{x}{2})$, soit $+\infty$; par conséquent $R_f=+\infty$.

b) $f(x)=e^{-x\sqrt{\frac{3}{2}}}\Re e(\exp\{i\frac{x}{2}\})=\Re e(\exp\{x(-\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{i}{2})\})=\Re e(\exp\{xe^{i\frac{5\pi}{6}}\})$, avec $\exp\{xe^{i\frac{5\pi}{6}}\}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\exp\{\frac{5}{6}i\pi n\}\,x^n$, d'où les coefficients (a_n) de f sont données par $a_n=\Re e(\exp\{\frac{i5\pi n}{6}\})$, soit en détaillant :

$$a_{6p}=\frac{(-1)^p}{(6p)!}\ ;\ a_{6p+1}=\frac{(-1)^{p+1}\frac{\sqrt{3}}{2}}{(6p+1)!}\ ;\ a_{6p+2}=\frac{(-1)^p}{2(6p+2)!}\ ;$$
$$a_{6p+3}=0\ ;\ a_{6p+4}=\frac{(-1)^{p+1}}{2(6p+4)!}\ ;\ a_{6p+5}=\frac{(-1)^p\frac{\sqrt{3}}{2}}{(6p+5)!}.$$

Exercice II.8 a) $(1+x+x^2)\sum\limits_{n\geq 1}na_nx^{n-1}+(1+2x)\sum\limits_{n\geq 0}a_nx^n=0$. Et

$$\sum_{n\geq 1}na_nx^{n-1}+\sum_{n\geq 1}na_nx^n+\sum_{n\geq 1}na_nx^{n+1}+\sum_{n\geq 0}a_nx^n+2\sum_{n\geq 0}a_nx^{n+1}\sum_{n\geq 0}A_nx^n=0$$

En écrivant que tous les coefficients A_n $(n=0,\ldots,6)$ sont nuls, on obtient :

$A_0=a_1+a_0=0$	donne $a_1=-1$, car $a_0=y(0)=1$;
$A_1=2a_2+2a_1+2a_0=0$	donne $a_2=0$;
$A_2=3a_3+2a_2+a_1+a_2+2a_1=0$	donne $a_3=1$;
$A_3=4a_4+3a_3+2a_2+a_3+2a_2=0$	donne $a_4=-1$;
$A_4=5a_5+4a_4+3a_3+a_4+2a_3=0$	donne $a_5=0$;
$A_5=6a_6+5a_5+4a_4+a_5+2a_4=0$	donne $a_6=1$.

b) $A_n=0=(n+1)a_{n+1}+na_n+(n-1)a_{n-1}+a_n+2a_{n-1}$, soit :
$$a_{n+1}=-(a_n+a_{n-1})\ (n\geq 1).$$
Les résultats du a) montrent qu'il faut envisager les cas $n=3k+p$ ($k\in\mathbb{N}$ et $p=0,1,2$) et en déduire les coefficients par récurrence.

Connaissant les coefficients $a_{3k} = 1$, $a_{3k+1} = -1$ et $a_{3k+2} = 0$, pour tout $k = 0, 1, \cdots p$, on calcule :

$$\begin{aligned} a_{3p+1} &= -(a_{3p} + a_{3p-1}) = -1 \ ; \\ a_{3p+2} &= -(a_{3p+1} + a_{3p}) = 0 \ ; \\ a_{3p+3} &= -(a_{3p+2} + a_{3p+1}) = 1. \end{aligned}$$

c) $\dfrac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$; donc $R = 1$.

d) L'équation différentielle :

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2x+1}{1+x+x^2} \text{ a comme solution } y = \frac{k}{1+x+x^2}, \text{ avec } k = y(0) = 1.$$

D'où $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2} = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, avec rayon de convergence $R = 1$.

Exercice II.9 a) $(1-x^4)\displaystyle\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} - 4x \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0.$

$$\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} - \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n+3} - 4\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} = \sum_{n\geq 0} A_n x^n = 0.$$

Tous les coefficients A_n étant nuls :

$$\begin{array}{ll} A_0 = a_1 = 0 \ ; & \\ A_1 = 2a_2 - 4a_0 = 0 & \text{donc } a_2 = 2a_0 \ ; \\ A_2 = 3a_3 - 4a_1 = 0 & \text{donc } a_3 = 0 \ ; \\ A_3 = 4a_4 - 4a_2 = 0 & \text{donc } a_4 = a_2 \ ; \\ A_4 = 5a_5 - a_1 - 4a_3 = 0 & \text{donc } a_5 = 0. \end{array}$$

b) $A_n = (n+1)a_{n+1} - (n-3)a_{n-3} - 4a_{n-1} = 0$, pour tout $n \geq 4$. Ce qui donne :

$$(n+1)a_{n+1} = 4a_{n-1} + (n-3)a_{n-3}.$$

c) Suivant la parité de n :

- ▷ Pour $n = 2p$, on a $(2p+1)a_{2p+1} = 4a_{2p+1} + (2p-3)a_{2p-3}$. Par récurrence comme $a_1 = a_3 = 0$, on en déduit que $a_5 = 0$ et facilement que $a_{2p+1} = 0$.
- ▷ Pour $n = 2p-1$, on a $2pa_{2p} = 4a_{2p-2} + (2p-4)a_{2p-4}$. D'après l'hypothèse de récurrence entre les coefficients $a_{2k} = 2a_0$ $(k = 1, \ldots, p-1)$ on obtient la relation $2pa_{2p} = 4(2a_0) + (2p-4)(2a_0) = 2p(2a_0)$ d'où $a_{2p} = 2a_0$.

$\dfrac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_{2p}|^{\frac{1}{2p}} = 1$ en supposant $a_0 \neq 0$. (si $a_0 = 0$, tous les coefficients sont nuls et $y = 0$.)

d) $y = a_0(1 + 2\sum_{p\geq 0} x^{2p}) = a_0(1 + \dfrac{2x^2}{1-x^2}) = a_0\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

On peut aussi intégrer l'équation différentielle :

$$\frac{y'}{y} = \frac{4x}{1-x^4} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = \ln\frac{1}{|1-x|} + \ln\frac{1}{|1+x|} + \ln(1+x^2) = \ln\frac{1+x^2}{|1-x^2|} \ ;$$

d'où pour $|x| < 1$, $y = k\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ avec $k = y(0) = a_0$.

Exercice II.10 **a)** (E) devient, en remplaçant y, y' et y'' par les séries :

$$\sum_{n\geq 1} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n\geq 1} na_n x^n + 2\sum_{n\geq 0} a_n x^n - \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+2} = \sum_{n\geq 0} A_n x^n = 0.$$

Par hypothèse $a_0 = y(0) = 0$ et $a_1 = \frac{y'(0)}{1!} = 1$. Comme les coefficients sont nuls :

$$A_2 = 2a_2 - 4a_2 + 2a_2 - a_0 = 0 \quad \text{donc } a_2 \text{ est indéterminé ;}$$

$$A_3 = 6a_3 - 6a_3 + 2a_3 - a_1 = 0 \quad \text{donc } a_3 = \frac{1}{2}\cdot$$

b) $A_n = n(n-1)a_n - 2na_n + 2a_n - a_{n-2} = 0$ donc $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{(n-1)(n-2)}$ $(n \geq 3)$.

c) Suivant la parité de n :

$$a_{2p+1} = \frac{a_{2p-1}}{(2p)(2p-1)} = \frac{a_3}{(2p)(2p-1)\cdots 3} = \frac{1}{(2p)!} \quad (p \geq 0)\ ;$$

$$a_{2p} = \frac{a_{2p-2}}{(2p-1)(2p-\cancel{3}\,2)} = \frac{a_2}{(2p-1)(2p-2)\cdots 2} = \frac{a_2}{(2p-1)!} \quad (p \geq 1).$$

Si on suppose que $a_2 \neq 0$, on a $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ donc $R = +\infty$

Si $a_2 = 0$, on a $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{p\to\infty} |a_{2p+1}|^{\frac{1}{2p+1}} = 0$ et $R = +\infty$.

d) $f(x) = \displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{x^{2p+1}}{(2p)!} + a_2 \sum_{p\geq 1} \frac{x^{2p}}{(2p-1)!} = x\cosh x + a_2 x \sinh x.$

Exercice II.11 L'équation (E) s'écrit :

$$\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} - \sum_{n\geq 0} na_n x^{n+3} - 2\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+3} = \sum_{n\geq 0} A_n x^n = 0.$$

a) Tous les coefficients étant nuls :

$$A_0 = 0 = 1a_1\ ;$$
$$A_1 = 2a_2 = 0\ ;$$
$$A_2 = 3a_3 = 0\ ;$$
$$A_4 = 4a_4 - 2a_0 = 0 \qquad \text{donc } a_4 = \frac{a_0}{2} = 0\cdot$$

b) $A_n = (n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-3}$; donc $a_{n+1} = \dfrac{n-1}{n+1}a_{n-3}$ $(n \geq 3)$.
On considère les cas $n = 4p, 4p+1, 4p+2, 4p+3$ et on utilise un raisonnement par récurrence. Connaissant a_1, a_2, a_3 et a_4 on trouve :

$$(4p+1)a_{4p+1} - (4p-1)a_{4p-3} = 0 \quad \text{donne } a_{4p+1} = 0\ ;$$
$$(4p+2)a_{4p+2} - 4pa_{4p-2} = 0 \quad \text{donne } a_{4p+2} = 0\ ;$$
$$(4p+3)a_{4p+3} - (4p+1)a_{4p-1} = 0 \quad \text{donne } a_{4p+3} = 0\ ;$$
$$(4p+4)a_{4p+4} - (4p+2)a_{4p} = 0 \quad \text{donne } a_{4(p+1)} = \frac{4p+2}{4p+4}a_{4p} = \frac{2p+1}{2p+2}a_{4p}.$$

D'où $a_{4n} = \dfrac{2n-1}{2n}a_{4(n-1)} = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\times 3}{(2n)(2n-2)\cdots 4\times 2}a_0 = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}a_0.$

c) $\dfrac{1}{R^4} = \lim_{p\to\infty}\left|\dfrac{a_{4(p+1)}}{a_{4p}}\right| = 1$; donc $R = 1$.

On peut aussi écrire $\dfrac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}|a_{4n}|^{\frac{1}{4n}} = 1$.

d) On intègre (E) :

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x^3}{1-x^4}\ ; \qquad \text{d'où } y = \frac{a_0}{\sqrt{1-x^4}}\,, \quad \text{pour } |x|<1\,.$$

Exercice II.12 (E) devient $x(x+2)\sum_{n\geq 1} na_nx^{n-1} + (x+1)\sum_{n\geq 0} a_nx^n - 1 = 0$.

$$\sum_{n\geq 1} na_nx^{n+1} + 2\sum_{n\geq 1} na_nx^n + \sum_{n\geq 0} a_nx^{n+1} + \sum_{n\geq 0} a_nx^n - 1 = \sum_{n\geq 0} A_nx^n = 0.$$

Le calcul donne :

$$A_0 = a_0 - 1 = 0 \text{ donc } a_0 = 1\ ;$$
$$A_1 = 2a_1 + a_0 + a_1 = 0 \text{ donc } a_1 = -\frac{1}{3}\ ;$$
$$A_n = (n-1)a_{n-1} + 2na_n + a_{n-1} + a_n = 0\,.$$

D'où u $\quad a_n = -\dfrac{n}{2n+1}a_{n-1} \quad (n\geq 1)$. On en déduit que

$$a_n = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3.1} = \frac{(-1)^n 2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \quad (n\geq 0)$$

et $\dfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{2}$; donc $R = 2$.

Il faut trouver l'expression des solutions dans l'intervalle $]-2,+2[$. Pour $x = 0$, on trouve une solution particulière $y = 1$. Dans le cas général on intègre l'équation homogène $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{x+1}{x(x+2)}$; ce qui donne $y = \dfrac{c}{\sqrt{|x(x+2)|}}$,pour $x \neq 0$.

La méthode de variation de la constante conduit à :

$$\frac{x(x+2)}{\sqrt{|x(x+2)|}}c'(x) = 1 \text{ d'où } c(x) = \lambda + \int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{|t(t+2)|}}{t(t+2)}\,dt\,.$$

▷ Si $-2 < x < 0$, on a $c(x) = \lambda + \displaystyle\int_{-1}^{x}\frac{-dt}{\sqrt{-t(t+2)}} = \lambda - \operatorname{Arcsin}(x+1)$ et $y = \dfrac{\lambda - \operatorname{Arcsin}(x+1)}{\sqrt{-x(x+2)}}\cdot$ Pour avoir $y(0) = 1$, nécessairement $\lambda = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

▷ Si $0 < x < 2$, on a $c(x) = \mu + \displaystyle\int_{0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{t(t+2)}} = \mu + \ln(x+1+\sqrt{x(x+2)})$ et $y = \dfrac{\mu + \ln(x+1+\sqrt{x(x+2)})}{\sqrt{x(x+2)}}\cdot$ Pour avoir $y(0) = 1$, il faut prendre $\mu = 0$.

Exercice II.13 **a)** L'équation (E) devient

$$(1+x^2)\sum_{n\geq 1} na_nx^n - 2(1+x^2)\sum_{n\geq 0} a_nx^n = \sum_{n\geq 0} A_nx^n = 0.$$

On calcule :

$$A_0 = -2a_0 = 0$$
$$A_1 = 1a_1 - 2a_1 = 0 \quad \text{donc } a_1 = 0\ ;$$
$$A_2 = 2a_2 - 2a_2 - 2a_0 \quad \text{donc } a_0 = 0,\ \text{mais } a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = 0\ ;$$
$$A_3 = 3a_3 + a_1 - 2a_3 - 2a_1 - 1 = 0 \quad \text{donc } a_3 = 1\ ;$$
$$A_4 = 4a_4 + 2a_2 - 2a_4 - 2a_2 = 0 \quad \text{donc } a_4 = 0\ ;$$
$$A_5 = 5a_5 + 3a_3 - 2a_5 - 2a_3 = 0 \quad \text{donc } a_5 = -\frac{1}{3}a_3 = -\frac{1}{3}.$$

b) $A_n = na_n + (n-2)a_{n-2} - 2a_n - 2a_{n-2} = 0$; d'où $a_n = -\dfrac{n-4}{n-2}a_{n-2} \qquad (n \geq 4)$.
Comme a_2, a_4 sont nuls, par récurrence : $a_{2p} = 0$. Pour n impair :

$$a_{2p+1} = -\frac{2p-3}{2p-1}a_{2p-1} = (-1)^{p-1}\frac{(2p-3)(2p-5)\cdots 3\times 1}{(2p-1)(2p-3)(2p-5)\times 3}a_3$$
$$= \frac{(-1)^{p-1}a_3}{2p-1} = \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1} \quad (p \geq 1).$$

c) $\dfrac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{p\to\infty} |a_{2p+1}|^{\frac{1}{2p+1}} = 1$; donc $R = 1$.

d) $y = x^3 + \displaystyle\sum_{p\geq 2} \frac{(-1)^{p-1}x^{2p+1}}{2p-1} = x^2 \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{2p+1} = x^2 \operatorname{Arctan} x$. On peut aussi intégrer l'équation différentielle, en commençant par l'équation homogène : $xy' - 2y = 0$. Pour $x \neq 0$, $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x}$ de solution $y = cx^2$ prolongeable sur $\mathbb{R}$. Par la méthode de variation de la constante, on obtient $x(1+x^2)c'x^2 = x^3$; donc $c'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $c(x) = \operatorname{Arctan} x + k$ $y = x^2(\operatorname{Arctan} x + k)$, avec $y''(0) = 0$. Ce qui donne $k = 0$.

Exercice II.14 **a)** L'équation (E) devient :

$$\sum_{n\geq 1} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n\geq 0} n(n-1)a_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} - 2\sum_{n\geq 1} na_n x^{n+1} + 2\pi x$$
$$= \sum_{n\geq 0} A_n x^n = 0.$$

On calcule :

$$A_0 = a_1 = 0\ ;$$
$$A_1 = 2a_2 + 2a_2 + 2\pi = 0 \quad \text{donc } a_2 = -\frac{\pi}{2}\ ;$$
$$A_2 = 6a_3 + 3a_3 - 2a_1 = 0 \quad \text{donc } a_3 = \frac{2}{9}a_1\ ;$$
$$A_3 = 12a_4 - 2a_2 + 4a_4 - 4a_2 = 0 \quad \text{donc } a_4 = \frac{3}{8}a_2 = -\frac{3\pi}{16}.$$

b) $A_n = (n+1)na_{n+1} - (n-1)(n-2)a_{n-1} + (n+1)a_{n+1} - 2(n-1)a_{n-1} = 0.$

D'où
$$a_{n+1} = \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}a_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

c) Comme $a_1 = 0$, a_3 est nul et par récurrence $a_{2p+1} = 0$. Pour n pair :

$$a_{2p}=\frac{(2p-1)(2p-2)}{(2p)^2}a_{2p-2}=\frac{(2p-1)(2p-2)\cdots 3.2a_2}{(2p)^2(2p-2)^2\cdots 4^2}=-2\pi\frac{(2p-1)!}{(2^pp!)^2}\quad (p\geq 1).$$

$\dfrac{1}{R^2}=\lim\limits_{p\to\infty}\left|\dfrac{a_{2p}}{a_{2p-2}}\right|=1$; donc : $R=1$ ou bien $\dfrac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}$.

Soit $\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{p\to\infty}|a_{2p}|^{\frac{1}{2p}}=1$.

d) Si $x=0$, on a $y=0$.

Si x appartient à $]-1,0[\cup]0,1[=D$, on a $\dfrac{y''}{y'}=\dfrac{2x^2-1}{x(1-x^2)}=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{1-x^2}$.

Cela donne $\ln\left|\dfrac{y'}{c}\right| = -\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|$; d'où la solution de l'équation homogène : $y=\dfrac{c}{x\sqrt{1-x^2}}$ sur D.

La méthode de variation de la constante donne $x(1-x^2)\dfrac{c'}{x\sqrt{1-x^2}}=-2\pi x$, soit $c'=-\dfrac{2\pi x}{\sqrt{1-x^2}}$. D'où on déduit $c=2\pi(\sqrt{1-x^2}+k)$ et

$$y'=\frac{2\pi\sqrt{1-x^2}+2\pi k}{x\sqrt{1-x^2}}\text{ avec } y'(0)=0 \text{ nécessite } k=-1.$$

Ainsi : $$y'=\frac{2\pi}{x}-\frac{2\pi}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

On obtient $y=\displaystyle\int_0^x\frac{2\pi}{t}\left(1-\frac{2\pi}{t\sqrt{1-t^2}}\right)dt$, car $y(0)=0$.

En effectuant le changement de variable $u=\sqrt{1-t^2}$ on a :

$$y(x)=\int_1^{\sqrt{1-x^2}}2\pi\left(1-\frac{1}{u}\right)\frac{u\,du}{u^2-1}=2\pi\int_1^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{u+1}\,du=2\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

Exercice II.15 $\boxed{\text{A}}$ **a)** • $a_{2n}=\dfrac{(-1)^nw^{2n}}{(2n)!2^{2n-1}}$ et $a_{2n+1}=0$.

On a $\dfrac{1}{R^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{w^2}{4(2n+1)(2n+2)}=0$; donc $R=+\infty$.

• $a_{2n}=\dfrac{(-1)^nw^{2n}(n!)^2}{(2n)!2^{2n-1}}$ et $a_{2n+1}=0$.

Donc $\dfrac{1}{R^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{w^2}{4}\dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\dfrac{w^2}{16}$ donc $R=\dfrac{4}{w}$.

b) L'étude aux bornes de l'intervalle de convergence ne concerne que la seconde série entière. Posons $x=\varepsilon\dfrac{4}{w}$,avec $\varepsilon=\{-1,1\}$.

$$u_n(x)=\frac{(-1)^nw^{2n}(n!)^2}{(2n)!2^{2n-1}}\times\frac{\varepsilon^{2n}4^{2n}}{w^{2n}}=2(-1)^n4^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

on utilise la formule de Stirling $n!\sim n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}$, pour n très grand :

$$|u_n(x)|\sim\frac{2.4^nn^{2n}e^{-2n}2\pi n}{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}=2\sqrt{\pi n}\,;$$

donc $|u_n|\longrightarrow+\infty$ et la série ne converge pas aux bornes de l'intervalle.

$\boxed{\text{B}}$ **a)** $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $y'' = \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2}$,

$$\cos^2 \frac{wx}{4} = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos\frac{wx}{2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n w^{2n}}{(2n)!2^{2n}} x^{2n}\Big).$$

(E) devient : $\displaystyle\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n\geq 0} w^2 a_n x^n - \frac{3w^2}{2}\Big(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n w^{2n} x^{2n}}{(2n)!2^{2n}}\Big) = 0.$
Ainsi $y(0) = 4 = a_0$ et $y'(0) = 1!a_1 = 0$. Le terme constant A_0 de la série qui représente (E), $\sum_{n\geq 0} A_n x^n = 0$, est nul.

$$A_0 = 2a_2 + w^2 a_0 - 3w^2, \text{ où } a_2 = -\frac{w^2}{2},$$

et
$$A_1 = 6a_3 + w^2 a_1, \text{ où } a_3 = 0.$$

b) Deux cas, suivant la parité de n :

$$A_{2n-2} = 2n(2n-1)a_{2n} + w^2 a_{2n-2} - \frac{3(-1)^{n-1} w^{2n}}{(2n-2)!2^{2n-1}} = 0 \quad (n > 1)\ ;$$
$$A_{2n-1} = (2n+1)(2n)a_{2n+1} + w^2 a_{2n-1} = 0 \quad (n \geq 1).$$

Par récurrence, comme $a_1 = 0 = a_3$, on obtient $a_{2n+1} = 0$. On a :

$$\begin{cases} 2n(2n-1)a_{2n} + w^2 a_{2n-2} = \dfrac{3(-1)^{n-1} w^{2n}}{(2n-2)!2^{2n-1}} \\ (2n-2)(2n-3)a_{2n-2} + w^2 a_{2n-4} = \dfrac{3(-1)^n w^{2n-2}}{(2n-4)!2^{2n-3}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 4\times 3\, a_4 + w^2 a_2 = -\dfrac{3w^4}{2!2^3} \end{cases}$$

D'où : $\displaystyle\frac{1}{2}(2n)!a_{2n} - (-1)^n w^{2n-2} a_2 = 3(-1)^{n-1} w^{2n}\Big(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}}\Big)$
et $\displaystyle\quad \frac{1}{2}(2n)!a_{2n} - \frac{(-1)^n}{2} w^{2n} = (-1)^{n-1} w^{2n}\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{2n}}\Big).$

Ainsi $\displaystyle a_{2n} = (-1)^n \frac{w^{2n}}{(2n)!}\Big(\frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2}\Big) \quad (n \geq 1).$

c) D'après l'étude faite au 1 a, on a $R = +\infty$.

d) On a :

$$\begin{aligned} y &= 4 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n w^{2n}}{(2n)!}\Big(\frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2}\Big) x^{2n} \\ &= 4 + 2\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\Big(\frac{wx}{2}\Big)^{2n} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(wx)^{2n} \\ &= 4 + 2\Big(\cos\frac{wx}{2} - 1\Big) + \frac{1}{2}(\cos wx - 1) = \frac{3}{2} + 2\cos\frac{wx}{2} + \frac{1}{2}\cos wx \\ &= 1 + 2\cos\frac{wx}{2} + \cos^2\frac{wx}{2} = \Big(1 + \cos\frac{wx}{2}\Big)^2 = 4\cos^4\frac{wx}{4}. \end{aligned}$$

e) L'équation $y'' + w^2 y = 0$ donne $y_0 = A\cos wx + B\sin wx$. On cherche une solution particulière de (E) de la forme $y_1 = C\cos\frac{wx}{2} + D$. Donc $y_1'' = -C\frac{w^2}{4}\cos\frac{wx}{2}$; d'où $-C\frac{w^2}{4}\cos\frac{wx}{2} + w^2(C\cos\frac{wx}{2} + D) = \frac{3}{2}w^2 + \frac{3}{2}w^2\cos\frac{wx}{2}$, pour tout réel x. On en tire $C = 2$ et $D = \frac{3}{2}$. La solution générale est donnée par $y = y_0 + y_1$, avec $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$. Cela conduit à $A = \frac{1}{2}$ et $B = 0$; d'où $y = \frac{1}{2}\cos wx + 2\cos\frac{wx}{2} + \frac{3}{2}$.

f) Pour $x = \dfrac{\pi}{w}$, on a $g\left(\dfrac{\pi}{w}\right) = 4\cos^4\dfrac{\pi}{4} = 1 = 4 + \displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}\left(\frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2}\right)$;

d'où
$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}b_n = -3.$$

Pour $x = \dfrac{2\pi}{w}$, on a $y\left(\dfrac{2\pi}{w}\right) = 4\cos^4\dfrac{\pi}{2} = 0 = 4 + \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{(2n)!}2^{2n}\pi^{2n}\left(\frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2}\right)$;

d'où
$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{2^{2n}\pi^{2n}}{(2n)!}b_n = -4.$$

Exercice II.16 $\boxed{\text{A}}$ **a)** Appelons $\alpha = u - (u^2-1)^{\frac{1}{2}}$ et $\beta = u + (u^2-1)^{\frac{1}{2}}$ les racines de l'équation $z^2 - 2uz + 1 = 0$. On a :

$$f(u,z) = \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{\frac{1}{\alpha-\beta}}{z-\alpha} + \frac{\frac{1}{\beta-\alpha}}{z-\beta} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{1}{-\alpha(1-\frac{z}{\alpha})} + \frac{1}{\beta(1-\frac{z}{\beta})}\right]$$

et compte tenu de $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n\geq 0}u^n$, $|u| < 1$, il vient :

$$f(u,z) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\beta}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{\beta}\right)^n - \frac{1}{\alpha}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^n\right),$$

pour $|z| < \min(|\alpha|, |\beta|)$. Ainsi $R(u) = \min(|\alpha|, |\beta|)$, si les deux racines sont distinctes, car f est la somme de deux séries entières.
Le cas $\alpha = \beta$ équivaut à $u^2 = 1$. Et :

▷ si $u = 1$, on a $f(1,z) = \dfrac{1}{(z-1)^2} = \displaystyle\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$ et $R = 1$;

▷ si $u = -1$, on a $f(-1,z) = \dfrac{1}{(z+1)^2} = \displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n(n+1)z^n$ et $R = 1$.

b) Le calcul donne :

$$f(u,z) = \frac{1}{(1+z^2) - 2uz} = \frac{1}{(1+z^2)(1-\frac{2z}{1+z^2}u)} \quad (\text{pour } 1+z^2 \neq 0)$$
$$= \frac{1}{1+z^2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2z}{1+z^2}u\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(2z)^n}{(1+z^2)^{n+1}}u^n,$$

avec $R(z) = \left|\dfrac{1+z^2}{2z}\right|$, $z \neq 0$ et $z \neq \pm i$. Deux cas particuliers :

▷ si $z = 0$, on a $f(u,0) = 1$ et on peut convenir que $R(0) = +\infty$;

▷ si $z = \pm i$, on a $f(u,\pm i) = \dfrac{\varepsilon}{2ui}$ non dérivable en 0.

$\boxed{\text{B}}$ **a)** La fonction g est le produit d'un polynôme en z par une fonction f développable en série entière ; donc g est développable en série entière. En posant $g(u,z) = \sum_{n\geq 0} c_n(u) z^n$, on aura

$$1 - z^2 = (1 - 2uz + z^2) \sum_{n\geq 0} c_n(u) z^n = \sum_0^{\infty} D_n z^n,$$

avec :

$$\begin{aligned}
1 &= D_0 = c_0 \ ; \\
0 &= D_1 = -2uc_0 + c_1, \quad \text{d'où } c_1 = 2u = \alpha + \beta \ ; \\
-1 &= D_2 = c_0 - 2uc_1 + c_2, \quad \text{d'où } c_2 = 4u^2 - 2 \ ; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= D_n = c_n - 2uc_{n-1} + c_{n-2}, \quad \text{d'où } c_n = 2uc_{n-1} - c_{n-2} \quad (n \geq 3).
\end{aligned}$$

c_1 et c_2 sont des polynômes en u à coefficients entiers ; il en est de même avec c_3 et par récurrence, si c_{n-1} et c_{n-2} sont de tels polynômes, c_n est aussi un polynôme en u à coefficients entiers.

b) La définition de g s'écrit aussi $\sum_{n\geq 0} c_n z^n = (1 - z^2) \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, ou encore :

$$\sum_{n\geq 0} c_n z^n = \sum_{n\geq 0} a_n z^n - \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+2}.$$

On retrouve $c_0 = a_0 = 1$, $c_1 = a_1 = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta$. De même :

$$c_2 = a_2 - a_0 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 1 = \alpha^2 + \beta^2, \text{ car } \alpha\beta = 1,$$

et

$$\begin{aligned}
c_n = a_n - a_{n-2} &= \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha}\left(\frac{1 - (\frac{\beta}{\alpha})^{n+1}}{1 - \frac{\beta}{\alpha}}\right) - \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha}\left(\frac{1 - (\frac{\beta}{\alpha})^{n-1}}{1 - \frac{\beta}{\alpha}}\right) \\
&= \alpha^n\left(1 + \frac{\beta}{\alpha} + \cdots + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right) - \alpha^{n-2}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha} + \cdots + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-2}\right) \\
&= \alpha^n + \beta^n, \text{ en remarquant que } \beta = \frac{1}{\alpha}\cdot
\end{aligned}$$

Le cas $\alpha = \beta$ se prolonge sans difficulté.

c) D'après a) $R_g \geq \min\{\infty, R(u)\} = R(u)$ et, comme g n'est pas continue si $|z| > \min\{|\alpha|, |\beta|\}$, on a nécessairement $R_g = R(u)$. Ce résultat peut être obtenu directement par la formule $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$ en considérant l'un des cas : $|\alpha| > |\beta|$ ou $|\alpha| < |\beta|$.

Si $\alpha = \beta$, on obtient $R = 1$.

Exercice II.17 $\boxed{\text{A}}$ **a)** Le calcul donne :

$$a_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\, du = \Big[\operatorname{Arc}\tan u\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

et

$$a_1 = \int_0^1 \frac{u}{1+u^2}\, du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+u^2)}{1+u^2} = \frac{1}{2}\Big[\ln(1+u^2)\Big]_0^1 = \ln\sqrt{2}.$$

b) $$a_n = \int_0^1 \frac{u^{n-2}(u^2+1-1)}{1+u^2}\,du = \int_0^1 u^{n-2}\,du - \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+u^2}\,du$$
$$= \frac{1}{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

c) On écrit successivement :

$$a_{2p} = \frac{1}{2p-1} - a_{2p-2},\ a_{2p-2} = \frac{1}{2p-3} - a_{2p-4}, \ldots,\ a_4 = \frac{1}{3} - a_2 \text{ et } a_2 = 1 - a_0.$$

D'où $a_{2p} = (-1)^p \left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{2p-1}\right)\right]$ $(p \geq 1)$. De même on obtient $a_{2p+1} = (-1)^p \left[\ln\sqrt{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{2p}\right)\right]$ $(p \geq 2)$.

d) Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0}(n+1)a_n x^n$ est le même que celui de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, car $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |(n+1)a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}} \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$.
Donc $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$.
De $a_n \leq \int_0^1 u^n\,du$ on déduit que $a_n \leq \frac{1}{n+1}\cdot$ Comme $\frac{1}{1+u^2} \geq \frac{1}{2}$ sur $[0,1]$, on déduit que $\frac{1}{2}\int_0^1 u^n\,du \leq a_n$; donc finalement $\frac{1}{2(n+1)} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$ donc $R = 1$.

$\boxed{\text{B}}$ **a)** Il faut et il suffit que, pour $u \in [0,1]$, $1 - xu \neq 0$. Soit $x \neq \frac{1}{u}$ avec $\frac{1}{u} \in [1, +\infty[$; ce qui donne $x \in]-\infty, 1[$.
b) On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(1-xu)^2(1+u^2)} = \frac{x^2}{1+x^2}\frac{1}{(1-xu)^2} + \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\frac{1}{1-xu} + \frac{2x}{(1+x^2)^2}\frac{u}{1+u^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\frac{1}{1+u^2}.$$

D'où $F(x) = \frac{x^2}{1+x^2}\frac{1}{1-x} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}\ln(1-x) + \frac{x}{(1+x^2)^2}\ln 2 + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\frac{\pi}{4}\cdot$

c) $S(x) = \sum\limits_{n\geq 0}(n+1)\left(\int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2}\,du\right)x^n.$
Admettons provisoirement que l'on peut intervertir $\sum$ et $\int$. Avec cette hypothèse : $S(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\Big(\sum\limits_{n\geq 0}(n+1)(ux)^n\Big)\,du$. On rappelle que, pour $|t| < 1$, on a $\frac{1}{1-t} = \sum\limits_{n\geq 0} t^n$. Par dérivation on obtient $\frac{1}{(1-t)^2} = \sum\limits_{n\geq 1} nt^{n-1} = \sum\limits_{n\geq 0}(n+1)t^n$;

d'où : $$S(x) = \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)(1-ux)^2}\,du = F(x).$$

Pour justifier l'intégration terme à terme de la série (en u), il suffit de prouver qu'elle converge uniformément (par rapport à u) sur $[0,1]$; ce qui est immédiat puisque $|(n+1)(ux)^n| \leq (n+1)\,|x|^n$ et $\sum_{n\geq 0}(n+1)\,|x|^n$ converge pour $|x|<1$.

Exercice II.18 **a)** On rappelle que $e^u = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!}$, avec $R=+\infty$.

Les trois fonctions f_1, f_2 et f_3 sont continues en 0, puisque $\lim_{z\to 0} f_1(z) = x-1$, $\lim_{z\to 0} f_2(z) = 1$, et $f_3 = f_1 f_2$.
Il suffit de prouver leur dérivabilité en 0 pour conclure que, étant holomorphes, elles sont analytiques et donc développables en série entière. Ainsi :

$$\lim_{z\to 0} \frac{f_1(z)-(x-1)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{zx}-e^z-(x-1)z}{z^2} = \frac{x^2-1}{2} = f_1'(0)\ ;$$
$$\lim_{z\to 0} \frac{f_2(z)-1}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{z-(e^z-1)}{z(e^z-1)} = -\frac{1}{2} = f_2'(0) :$$

et
$$f_3'(0) = f_1'(0)f_2(0) + f_1(0)f_2'(0) = \frac{x}{2}(x-1).$$

b) On a $f_1(z) = \frac{1}{z}\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n-1}{n!} z^n$.

Supposons que $f_2(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ et $f_3(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$; comme $f_3 = f_1 f_2$, on a :

$$f_3(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0}(\sum_{p=0}^{n} \frac{x^{p+1}-1}{(p+1)!} b_{n-p}) z^n.$$

On voit clairement que a_n est un polynôme en x de degré $(n+1)$.

c) On pose $a_n = \frac{Q_n}{n!}$ $\cdot$ Si $x = p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f_3(z) = \frac{e^{pz}-e^z}{e^z-1} = \sum_{k=1}^{p-1} e^{kz} = \sum_{k=1}^{p-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n z^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{p-1} k^n\right)\frac{z^n}{n!}\ ;$$

donc
$$Q_n(p) = \sum_{k=1}^{p-1} k^n.$$

Exercice II.19 **a)** $S^2(z) = (\sum_{n\geq 0} u_n z^n)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}) z^n$ et

$$zS^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}\Big) z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} u_k u_{n-k}\Big) z^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{\alpha} z^n = \frac{S(z)-1}{\alpha}.$$

D'où : $\alpha z S^2(z) - S(z) + 1 = 0$.

b) Pour $|u|<1$ et β non entier, on a $(1+u)^\beta = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta-1)(\beta-n+1)}{n!} u^n$; d'où pour $|4\alpha z| < 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}(1-4\alpha z)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-1)^n 4^n \alpha^n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)(-1)^{n-1}}{n!2^n} 4^n\alpha^n z^n(-1)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{n!} 2^n\alpha^n z^n.\end{aligned}$$

Donc : $\quad T(z) = 2\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{(n+1)!}(2\alpha)^{n+1} z^n, \quad$ avec $R = \frac{1}{4\alpha}\cdot$

c) S est solution de l'équation $\alpha z S^2 - S + 1 = 0$, cela conduit à deux possibilités : $S_1(z) = \frac{1-(1-4\alpha z)^{\frac{1}{2}}}{z}$ et $S_2(z) = \frac{1+(1-4\alpha z)^{\frac{1}{2}}}{z}$. Mais S est continue en 0 et $S(0) = 1$; donc S_2 est exclue.

On a donc $S(z) = S_1(z) = \frac{T(z)}{2\alpha}$; donc $R = \frac{1}{4\alpha}$, en remarquant que, d'après l'unicité du développement, les deux séries coïncident dans le disque de convergence.

d) On conclut : $\quad u_n(\alpha) = \frac{1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n-1)}{(n+1)!}(2\alpha)^n.$

e) $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si, et seulement si, $S(1)$ existe ; cela est réalisé si $1 < \frac{1}{4\alpha}$, soit $\alpha < \frac{1}{4}$ et on a $S(1) = \frac{T(1)}{2\alpha} = \frac{1-\sqrt{1-4\alpha}}{2\alpha}\cdot$ La série $\sum u_n$ diverge si $\alpha > \frac{1}{4}\cdot$

Il reste le cas $\alpha = \frac{1}{4}\cdot$ $u_n(\alpha)$ est une fonction continue positive, croissante pour $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$ et on a, pour tout $\alpha < \frac{1}{4}$:

$$\sum_{n=0}^{p} u_n(\alpha) < \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\alpha) = \frac{1-\sqrt{1-4\alpha}}{2\alpha} \leq 2.$$

Donc $\sum_{n=0}^{p} u_n(\frac{1}{4}) \leq 2$ et la série converge donc normalement sur $[0, \frac{1}{4}]$ car $u_n(\alpha) \leq u_n(\frac{1}{4})$; d'où :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\frac{1}{4}) = \lim_{\alpha \to \frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\alpha) = \lim_{\alpha \to \frac{1}{4}} \frac{1-\sqrt{1-4\alpha}}{2\alpha} = 2.$$

Exercice II.20 a) On a $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ dans le disque $D = D(0,R)$; f est alors analytique en tout point $z_0 \in D$ et, pour tout $z \in D$, s'écrit $f(z) = \sum_{n\geq 0} b_n(z_0)(z-z_0)^n$.

On a $$z^n = (z - z_0 + z_0)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (z-z_0)^k z_0^{n-k}$$

et $$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \Big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (z-z_0)^k z_0^{n-k}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}\,,$$

où on a posé
$$u_{n,k} = \begin{cases} a_n C_n^k (z-z_0)^k z_0^{n-k} & \text{si} \quad k \leq n \\ 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases}.$$

Pour intervertir les $\sum$ de la double sommation, on vérifie la convergence absolue de

$$\sum_{n\geq 0} |a_n| \sum_{k=0}^{n} C_n^k |z-z_0|^k |z_0|^{n-k} = \sum_{n\geq 0} |a_n| \left(|z-z_0| + |z_0|\right)^n,$$

série qui converge si $|z-z_0| + |z_0| < R$; donc si $|z-z_0| < R - |z_0|$. On a alors

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z_0^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k,$$

pour $z \in D(0,R) \cap D(z_0, R(z_0))$, où $R(z_0)$ désigne le rayon de convergence de cette série entière.
D'après ce qui précède on a convergence si $|z - z_0| < R(z_0)$; d'où $R - |z_0| < R(z_0)$.
▷ Si $R(z_0) \leq |z_0|$, à fortiori on a $R(z_0) \leq R + |z_0|$.
▷ Si $R(z_0) > |z_0|$, alors 0 appartient à $D(0,R) \cap D(z_0, R(z_0))$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(0) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{(k-n)!}(-z_0)^{k-n}.$$

En écrivant :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{k} C_k^n z^n (-z_0)^{k-n}.$$

On procède comme précédemment pour intervertir les deux sommations en vérifiant la convergence absolue :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \sum_{n=0}^{k} C_k^n \, |z|^n \, |z_0|^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \left(|z| + |z_0|\right)^k,$$

série qui converge pour $|z| + |z_0| < R(z_0)$, soit pour $|z| < R(z_0) - |z_0|$. Donc $R(z_0) - |z_0| \leq R$, ce qui donne bien l'inégalité$R(z_0) \leq R + |z_0|$.
Si l'on considère les cercles $C_1(z_0, R - |z_0|)$ et $C_2(z_0, R + |z_0|)$, ces cercles sont tangents intérieurement et extérieurement au cercle $C(0,R)$; appelons D_1 et D_2 les disques de bords C_1 et C_2 ; alors le disque de convergence $D(z_0, R(z_0))$ est inclus dans $D_2 \setminus D_1$.

b) Supposons qu'il n'existe aucun point z_0 de D tel que $R - |z_0| = R(z_0)$; c'est-à-dire, pour tout point z_0 de D, on a $R(z_0) > R - |z_0|$. Les disques $D(z_0, R(z_0))$ constituent une famille d'ouverts qui recouvrent le compact $C = \{z \; ; \; |z| = R\}$. Il existe donc une sous-famille finie $(D(z_k, R(z_k))_{k=1,\cdots m}$ qui recouvre C et $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge alors dans le disque de centre 0 et de rayon $R' = \min_{k=1,\cdots,m}(R(z_k) + |z_k|) > R$; ce qui contredit la définition de R.
Cela montre qu'il existe au moins un point z_0 pour lequel f n'est pas prolongeable à l'extérieur de D, c'est-à-dire que z_0 est un point singulier.

Exercice II.21 On prendra $R = 1$ pour simplifier les calculs. On peut toujours poser $f(1) = \sum_{n \geq 0} a_n$. Il reste à prouver que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$. On rappelle que pour $|x| < 1$, on a $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$. Ainsi :

$$f(x)\frac{1}{1-x} = \Big(\sum_{n \geq 0} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n \geq 0} x^n\Big) = \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{p=0}^{n} a_p\Big) x^n.$$

Posant $c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) - f(1) &= (\sum_{n \geq 0} c_n x^n)(1-x) - \sum_{n \geq 0} a_n \\ &= (1-x)[\sum_{n \geq 0} (c_n - f(1)) x^n] \text{ puisque } (1-x) \sum_{n \geq 0} x^n = 1. \end{aligned}$$

Par hypothèse, on a $\lim_{n\to\infty} c_n = f(1)$; donc :
$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N$ tel que $\forall n \geq N,\ |c_n - f(1)| < \varepsilon$.

$$f(x) - f(1) = (1-x)\sum_{n=0}^{N-1}[c_n - f(1)]x^n + (1-x)\sum_{n\geq N}[c_n - f(1)]x^n$$

En appelant $M = \max_{n=0,1,\cdots,N-1}|c_n - f(1)|$, on obtient

$$|f(x) - f(1)| \leq (1-x)N.M + (1-x)\varepsilon.\sum_{n\geq N} x^n$$

$$|f(x) - f(1)| \leq (1-x)N.M + \varepsilon.x^N$$

On en déduit que $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ puisque ε est arbitraire.

CHAPITRE III
INTEGRALES MULTIPLES

1. Intégrale d'une fonction en escalier sur un pavé

1.1 Définitions

Définition III.1. — *On appelle pavé ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^n$ le sous–ensemble $P = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ a_i < x_i < b_i$ pour $i = 1, \cdots, n$ (resp. $a_i \leq x_i \leq b_i)\}$ où les a_i, b_i sont des nombres réels tels que $a_i < b_i$ pour tout i. On notera qu'un pavé fermé est compact puisque borné.*

Définition III.2. — *On appelle mesure du pavé P le nombre réel positif $\mu(P) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$. Pour $n = 2$ la mesure de P est l'aire du rectangle.*

Définition III.3. — *On appelle subdivision δ du pavé P, une suite réelle $(c_{i,j})$ telle que :*

$$c_{i,0} = a_i < c_{i,1} < \cdots < c_{i,p_i} = b_i \, , \quad \text{pour } i = 1, \cdots, n \, .$$

Définition III.4. — *On appelle cellule du pavé P relative à la subdivision δ, le pavé défini par*

$$P_k = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \ ; \ c_{i,k_i} < x < c_{i,k_i+1}, \quad \text{pour } i = 1, \cdots, n\}.$$

Si le pavé P est formé de N cellules P_k, alors $\mu(P) = \sum_{k=1}^N \mu(P_k)$.

Définition III.5. — *On dira qu'une fonction f définie sur le pavé P à valeurs réelles, ou complexes, est en escalier sur P si elle est bornée et s'il existe une subdivision δ de P telle que f soit constante sur chaque cellule de δ.*

1.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Lemme III.6. — *Soit $f : P \longrightarrow \mathbb{C}$ en escalier; si δ est une subdivision de P en cellule $P_1 \cdots, P_\alpha, \cdots, P_N$, telles que $f(x) = f_\alpha$ constante si $x \in P_\alpha$, alors $I(\delta, f) = \sum_{\alpha=1}^N f_\alpha \mu(P_\alpha)$ ne dépend que de f et non pas de δ.*

Preuve : Soit $\delta' = (Q_1, \cdots, Q_\beta, \cdots, Q_M)$ une autre subdivision de P en cellules telle que $f(x) = g_\beta$ si $x \in Q_\beta$; si $P_\alpha \cap Q_\beta = \emptyset$ alors $\mu(P_\alpha \cap Q_\beta) = 0$; sinon on considère la nouvelle subdivision $\delta'' = \{\cdots, P_\alpha \cap Q_\beta, \cdots\}$ $\alpha = 1, \cdots, N$; $\beta = 1, \cdots, M$.

$$I(\delta'', f) = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^M f_\alpha \mu(P_\delta \cap Q_\beta) = \sum_{\beta=1}^M \sum_{\alpha=1}^N g_\beta \mu(P_\alpha \cap Q_\beta)$$

$$\text{(car } f_\alpha = g_\beta \text{ sur } P_\alpha \cap Q_\beta)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^N f_\alpha \sum_{\beta=1}^M \mu(P_\alpha \cap Q_\beta) = \sum_{\alpha=1}^N f_\alpha \mu(\bigcup_{\beta=1}^M P_\alpha \cap Q_\beta C$$

$$= \sum_{\alpha=1}^N f_\alpha \mu(P_\alpha) = I(\delta, f) = I(\delta', f) \quad \text{(de la même façon).}$$

Définition III.7. — *La valeur commune de $I(\delta', f)$ et de $I(\delta'', f)$ s'appelle l'intégrale de f et l'on écrit :*

$$I(\delta, f) = \int_P f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad I(\delta, f) = \underbrace{\int \cdots \int_P}_{n \text{ fois}} f(x)\,dx\,.$$

Propriétés III.8. — **1)** *Pour une subdivision $\delta = (P_1, \cdots, P_\alpha, \cdots, P_N)$ du pavé, on a :*

$$\int_P f(x)\,dx = \sum_{\alpha=1}^{N} \int_{P_\alpha} f(x)\,dx.$$

2) *L'intégrale est une application linéaire, ce qui s'écrit :*

$$\int_P [af(x) + bg(x)]\,dx = a \int_P f(x)\,dx + b \int_P g(x)\,dx.$$

3) *Si $f(x) \geq 0$ sur P, son intégrale est positive : $\int_P f(x)\,dx \geq 0$. Par conséquent si f et g sont deux fonctions en escalier sur le même pavé P telles que $f(x) \leq g(x)$, on aura $\int_P f(x)\,dx \leq \int_P g(x)\,dx$, car $g - f$ est positive sur P. En particulier, si f est bornée sur P par une constante M, alors $\left|\int_P f(x)\,dx\right| \leq M\mu(P)$.*

2. Intégrale d'une fonction quelconque sur un pavé

2.1 Définitions

Définition III.9. — *La fonction f est intégrable sur le pavé P si et seulement s'il existe une suite de couples (ϕ_n, θ_n) de fonctions en escalier sur P, où θ_n est à valeurs réelles, telles que :*

- i) *pour chaque n et pour tout $x \in P$, on a $|f(x) - \phi_n(x)| \leq \theta_n(x)$;*
- ii) *$\int_P \theta_n(x)\,dx = \varepsilon_n$ tend vers 0, quand $n \to \infty$.*

Propriété III.10. — *La suite $u_n = \int_P \phi_n(x)\,dx$ est une suite de* Cauchy.

Preuve : On a :

$$\begin{aligned}
|u_n - u_m| &= \left|\int_P (\phi_n(x) - \phi_m(x)\,dx\right| \\
&\leq \int_P |\phi_n(x) - \phi_m(x)|\,dx \\
&\leq \int_P |\phi_n(x) - f(x)|\,dx + \int_P |\phi_m(x) - f(x)|\,dx \\
&\leq \int_P \theta_n(x)\,dx + \int_P \theta_m(x)\,dx = \varepsilon_n + \varepsilon_m < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

dès que $n > N$ et $n > N$. □

Définition III.11. — *On appelle intégrale de f, notée $\int_P f(x)\,dx$, la limite de la suite u_n qui existe puisque $\mathbb{C}$ est complet.*

2.2 Cas d'une fonction à valeurs réelles

La condition (i) peut alors s'interpréter autrement en choisissant ϕ_n, elle aussi, à valeurs réelles; f est alors encadrée par deux fonctions en escalier. On obtient immédiatement le résultat suivant.

Théorème III.12. — *Soit $\mathcal{E}_+(f)$ l'ensemble des fonctions numériques ϕ en escalier sur le pavé P qui sont au–dessus de f (i.e. $\phi(x) \geq f(x)$ sur P) et $\mathcal{E}_-(f)$ l'ensemble des fonctions ϕ en escalier sur P qui sont en–dessous de f (i.e. $\phi(x) \leq f(x)$ sur P). Alors f est intégrable si, et seulement si :*

$$\inf_{\phi\in\mathcal{E}_+(f)} \int_P \phi(x)\,dx = \sup_{\phi\in\mathcal{E}_-(f)} \int_P \phi(x)\,dx\,.$$

Cette égalité définit alors l'intégrale de f au sens déjà donné précédemment.

Si f n'est pas intégrable, on pose $I_+(f) = \sup_{\phi\in\mathcal{E}_+(f)} \int_P \phi(x)\,dx$ et on appelle ce nombre réel l'intégrale supérieure de f. On définit de façon analogue l'intégrale inférieure $I_-(f)$; on a toujours $I_-(f) \leq I_+(f)$.

Exemples III.13. — **1)** Si f est une *fonction réglée* sur le pavé P, elle est intégrable ; par définition f est réglée si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier ϕ sur P vérifiant $|f(x) - \phi(x)| < \varepsilon$.

2) Si f est continue, elle est intégrable, car elle est réglée.

3. Intégrale d'une fonction sur un borné

3.1 Définitions

Lemme III.14. — *Soit X un borné de $\mathbb{R}^n$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$. Pour chaque pavé fermé $P \supset X$ on définit, pour $x \in X$ et $f_P(x) = 0$ pour $x \in P - X$, une fonction $f_P : P \longrightarrow \mathbb{C}$ par $f_P(x) = f(x)$. Si pour un pavé P, f_P est intégrable, il en est de même pour tout autre choix de P et $\int_P f_P(x)\,dx$ ne dépend pas du choix de P.*

Preuve : Si Q est un autre pavé contenant X, $P \cap Q \supset X$ aussi, et la fonction f_Q nulle sur $Q - X$, est égale à f_P sur $P \cap Q$ d'où

$$\int_P f_P(x)\,dx = \int_{P\cap Q} f_P(x)\,dx = \int_{P\cap Q} f_Q(x)\,dx = \int_Q f_Q(x)\,dx. \qquad \square$$

Définition III.15. — *On appelle intégrale de f sur X, la valeur commune des intégrales* $\int_P f_P(x)\,dx$, *notée* $\int_X f(x)\,dx$.

Définition III.16. — *Une partie bornée A de $\mathbb{R}^n$ est quarrable si sa fonction caractéristique χ_A définie par $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n - A \end{cases}$ est intégrable. On peut alors définir la mesure de A comme étant l'intégrale de sa fonction caractéristique :*

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)\,dx = \int_A dx\,.$$

Définition III.17. — *Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est négligeable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille finie de pavés fermés (Q_α) recouvrant A et dont la somme des mesures est inférieure à ε.*

Théorème III.18. — *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ à support compact ; pour que f soit intégrable il suffit qu'elle soit bornée et que l'ensemble D de ses points de discontinuité soit négligeable.*

Preuve : On rappelle que le support $S(f)$ de f est l'adhérence des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) \neq 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille finie de pavés Q_α recouvrant D telle que $\sum \mu(Q_\alpha) \leq \frac{1}{2}\varepsilon \cdot$ Par homothétie on peut remplacer Q_α par un pavé Q'_α tel que $Q'^\circ \supset Q_\alpha$ et $\mu(Q'_\alpha) \leq 2\mu(Q_\alpha)$; alors $D \subset Q^\circ \subset Q = \bigcup_\alpha Q'_\alpha$ et $\mu(Q) \leq \varepsilon$. Soit un pavé $P \supset S(f)$; $R = P - Q^\circ$ est pavable, car $R = \bigcap_\alpha (P - Q_\alpha{}^\circ)$. Il existe donc une famille finie de pavés fermés disjoints telle que $R = \bigcup_{\lambda=1}^N R_\lambda$ et $R \cap D = \emptyset$; ce qui implique que la restriction de f à R_λ est continue, d'où l'existence de fonctions en escalier $\phi_\lambda : R_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $|f(x) - \phi_\lambda(x)| \leq \varepsilon$ sur R_λ.
On définit une fonction en escalier $\phi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ par $\phi(x) = 0$, si $x \in Q^\circ$, $\phi(x) = \phi_\lambda(x)$, si $x \in R_\lambda{}^\circ$ et $\phi(x) = f(x)$, si $x \in R - \cup R_\lambda{}^\circ$. Soit M un majorant de $|f(x)|$ sur P. On a $|f(x) - \phi(x)| \leq M$ sur Q° et $|f(x) - \phi(x)| \leq \varepsilon$ sur $P - Q^\circ$. En posant $\theta(x) = M$, pour $x \in Q^\circ$, et $\theta(x) = \varepsilon$, pour $x \in P - Q^\circ$, la fonction θ est en escalier sur P et $|f(x) - \phi(x)| \leq \theta(x)$ sur P. On en déduit : $\int_P \theta(x)\,dx = M\mu(Q) + \varepsilon\mu(P - Q^\circ) \leq M\mu(Q) + \varepsilon\mu(P) \leq \varepsilon[M + \mu(P)]$. □

Corollaire III.19. — *Si f est une fonction continue et bornée sur une partie bornée X de $\mathbb{R}^n$, f sera intégrable si la frontière de X est négligeable.*

Preuve : On prolonge f en f', définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f'(x) = 0$ si $x \in Y = \mathbb{R}^n - X$. La fonction f' est continue sur $X^\circ \cup Y^\circ$ et $D(f') \subset \overline{X} \cap \overline{Y} = \partial X$ (frontière de X); donc $D(f')$ est négligeable. □

Corollaire III.20. — *Si f est bornée sur X négligeable, f est intégrable sur X et son intégrale est nulle.*

Preuve : Il existe un pavé P et un ensemble pavable Q, avec $\mu(Q) < \varepsilon$, tel que $P \supset Q \supset X$. On prolonge f en f' sur P par $f'(x) = 0$ si $x \in P - X$. Si M est un majorant de f, on a $|f'(x)| \leq M\chi_Q(x)$ sur P et $\int_P \chi_Q(x)\,dx \leq \varepsilon$. □

3.2 Propriétés de l'intégrale

Propriétés III.21. — **1)** $\displaystyle\int_X [af(x) + bg(x)]\,dx = a\int_X f(x)\,dx + b\int_X g(x)\,dx.$

2) *Soit $f : X \cup Y \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que les restrictions $f_{|X}$, $f_{|Y}$ soient intégrables et $X \cap Y$ soit négligeable, alors f est intégrable sur $X \cup Y$ et on a*

$$\int_{X\cup Y} f(x)\,dx = \int_X f(x)\,dx + \int_Y f(x)\,dx\,.$$

(Cela résulte de $f_{X\cup Y} = f_X + f_Y - f_{X\cap Y}$, où f_X désigne la fonction égale à f sur l'ensemble X ...).

3) *L'intégrale d'une fonction numérique positive intégrable sur un borné X est positive; si X est un ouvert et si f est continue, cette intégrale est nulle si, et seulement si, f est nulle.*

Preuve : Sinon, il existe $a \in X$ tel que $f(a) \neq 0$; par continuité, X étant ouvert, f est différente de 0 dans un voisinage de a, c'est-à-dire il existe un pavé Q de centre a, de mesure non nulle, contenu dans X sur lequel $f(x) \geq \frac{1}{2}f(a)$. Soit $g(x) = \frac{1}{2}f(a)$ sur Q et $g(x) = 0$ sur $X - Q$; $f - g$ est positive sur X donc $\int_X f(x)\,dx \geq \int_X g(x)\,dx = \frac{1}{2}f(a)\mu(Q) > 0$. □

4) *Le produit de deux fonctions intégrables est une fonction intégrable, et on a l'inégalité de* Schwarz :

$$\boxed{\left|\int_X f(x)g(x)\,dx\right|^2 \leq \left(\int_X |f(x)|^2\,dx\right)\left(\int_X |g(x)|^2\,dx\right).}$$

5) *Si f est intégrable sur X, alors $|f|$ est intégrable et on a :*

$$\boxed{\left|\int_X f(x)\,dx\right| \leq \int_X |f(x)|\,dx.}$$

En particulier si X est quarrable et f bornée par M on a :

$$\left|\int_X f(x)\,dx\right| \leq M\mu(X).$$

6) *Si f est limite uniforme d'une suite (f_n) de fonctions intégrables sur un même borné X, alors f est intégrable et on a :*

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,dx.$$

Théorème III.22. — *Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est quarrable si, et seulement si, la borne inférieure $\mu_+(A)$ des mesures des ensembles pavables contenant A est égale à la borne supérieure $\mu_-(A)$ des mesures des ensembles pavables contenus dans A. On appelle alors mesure de A ce nombre noté $\mu(A)$.*

Preuve : Soit P un pavé fermé contenant A. En désignant par $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions en escalier sur P majorant χ_A, on a $I_+(\chi_A) = \inf_{\phi\in\mathcal{E}_+} \int_P \phi(x)\,dx$.
Soit Q pavable tel que $P \supset Q \supset A$. La fonction caractéristique $\chi_Q \in \mathcal{E}_+$ et $I_+(\chi_A) \leq \int_P \chi_Q(x)\,dx = \mu(Q)$; donc $I_+(\chi_A) \leq \mu_+(A) = \inf_{Q\supset A} \mu(Q)$.
Soit, pour $\phi \in \mathcal{E}_+$, la fonction ψ définie par $\psi(x) = 1$, si $\phi(x) \geq 1$, et $\psi(x) = 0$, si $\phi(x) < 1$. La fonction ψ est en escalier sur P ; c'est la fonction caractéristique d'un ensemble pavable Q contenu dans P et contenant A, car $\psi(x) = 1$ sur A. On a :

$$\mu_+(A) \leq \mu(Q) = \int_P \psi(x)\,dx \leq \int_P \phi(x)\,dx\,.$$

D'où $\mu_+(A) \leq I_+(\chi_A)$ et finalement $\mu_+(A) = I_+(\chi_A)$.
On démontre de même que $\mu_-(A) = I_-(\chi_A)$; d'où le résultat d'après les Théorèmes III.12 et III.16. □

Corollaire III.23. — *La partie A, bornée de $\mathbb{R}^n$, est quarrable si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe Q pavable, tel que $Q \supset A$, et Q' pavable, tel que $Q' \subset A$, avec $\mu(Q) - \mu(Q') \leq \varepsilon$.*

Corollaire III.24. — *Pour que la partie A soit quarrable et de mesure nulle, il faut et il suffit que A soit négligeable.*

Corollaire III.25. — *Pour que la partie A bornée soit quarrable, il faut et il suffit que sa frontière ∂A soit négligeable.*

Preuve : Si ∂A est négligeable, alors χ_A est intégrable ; donc A est quarrable. Si A est quarrable, soit Q et Q' pavables , $Q' \subset A \subset Q$ et $\mu(Q) - \mu(Q') \leq \varepsilon$. La partie Q est fermée donc $\partial A \subset Q$ et $\partial A \cap Q'^\circ = \emptyset$; donc $\partial A \subset Q - Q'^\circ \Rightarrow \mu(\partial A) \leq \varepsilon$. □

Corollaire III.26. — *Si la partie A est quarrable, A° et $\overline{A}$ le sont aussi et ont même mesure que A.*

Preuve : Les frontières ∂A° et $\partial \overline{A}$ de A° et de $\overline{A}$ sont incluses dans ∂A ; donc A° et $\overline{A}$ sont quarrables , mais $\overline{A} - A$ et $A - A^\circ$ étant négligeables, on a :

$$\mu(\overline{A}) = \mu(A) + \mu(\overline{A} - A) = \mu(A)\,, \text{ de même } \mu(A^\circ) = \mu(A)\,. \qquad \square$$

Corollaire III.27. — *Si la fonction f est continue et bornée sur A quarrable, alors f est intégrable.*

Preuve : Si A et B sont quarrables, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ sont quarrables et on a $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$, ce qui résulte des relations suivantes $\chi_{A \cup B} = \sup(\chi_A, \chi_B)$, $\chi_{A \cap B} = \inf(\chi_A, \chi_B) = \chi_A \chi_B$, $\chi_{A-B} = \chi_A - \chi_{A \cap B}$ et $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$. □

Exemple III.28. — Soit f une fonction intégrable sur le borné X de $\mathbb{R}^n$, alors son graphe est une partie négligeable de $\mathbb{R}^{n+1}$.

4. Théorème de Fubini et applications

4.1 Cas général

Théorème III.29 [Fubini]. — *Soit P un pavé de $\mathbb{R}^p$, Q un pavé de $\mathbb{R}^q$ et f une application de $P \times Q$ dans $\mathbb{C}$. Si f est intégrable sur $P \times Q$ et si l'ensemble des $x \in P$, pour lesquels la fonction $f_x : y \in Q \longrightarrow f(x,y)$ n'est pas intégrable dans Q est négligeable dans P, alors la fonction $F : x \longmapsto \int_Q f(x,y)\,dy$ est intégrable sur P et on a :*

$$\boxed{\int_{P\times Q} f(x,y)\,dx\,dy = \int_P \left(\int_Q f(x,y)\,dy\right)\,dx.}$$

Preuve : **a)** Supposons f en escalier. Alors il existe une subdivision (P_α) de P et une subdivision (Q_β) de Q, telles que f prenne une valeur constante $f_{\alpha\beta}$ sur l'intérieur de chaque pavé $P_\alpha \times Q_\beta$, les $P_\alpha \times Q_\beta$ constituent une subdivision de $P \times Q$. Si $x \in P_\alpha{}^\circ$, la fonction $f_x : y \longmapsto f(x,y)$ vaut $f_{\alpha\beta}$ sur chaque $Q_\beta{}^\circ$, donc est en escalier, d'où $F(x) = \int_Q f_x(y)\,dy = \sum_\beta f_{\alpha\beta}\mu(Q_\beta)$, F est aussi défini sur $\bigcup_\alpha P_\alpha{}^\circ$ et prend une valeur constante sur chaque $P_\alpha{}^\circ$; on la prolonge de façon quelconque en une fonction bornée sur P ; la fonction en escalier ainsi obtenue, notée encore F vérifie :

$$\int_P F(x)\,dx = \sum_\alpha \mu(P_\alpha) \sum_\beta f_{\alpha\beta}\mu(Q_\beta) = \sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha,\beta}\mu(P_\alpha \times Q_\beta) = \int_{P\times Q} f(x,y)\,dx\,dy.$$

L'ensemble des $x \in P$, pour lesquels f_x n'est pas intégrable, est contenu dans $P - \bigcup P_\alpha{}^\circ$; donc est négligeable dans P.

b) Dans le cas général, il existe un couple (ϕ, θ) de fonctions en escalier sur $P \times Q$ telles que :

$$|f(x,y) - \phi(x,y)| \le \theta(x,y) \quad \text{sur} \quad P \times Q \quad \text{et} \quad \int_{P\times Q} \theta(x,y)\,dx\,dy \le \varepsilon.$$

Il existe une partie négligeable N de P, telle que pour tout $x \in P - N$, les fonctions $f_x : y \longmapsto f(x,y)$, $\phi_x : y \longmapsto \phi(x,y)$ et $\theta_x : y \longmapsto \theta(x,y)$ soient intégrables sur Q ; on pose alors, pour tout $x \in P - N$:

$$F(x) = \int_Q f(x,y)\,dy \ ; \ \ \Phi(x) = \int_Q \phi(x,y)\,dy \ ; \ \ \Theta(x) = \int_Q \theta(x,y)\,dy,$$

ces fonctions étant prolongées par 0 sur N. On a :

$$|F(x) - \Phi(x)| \le \Theta(x) \ ; \quad \int_P \Theta(x)\,dx = \int_{P\times Q} \theta(x,y)\,dx\,dy \le \varepsilon$$

et
$$\int_P \Phi(x)\,dx = \int_{P\times Q} \phi(x,y)\,dx\,dy.$$

D'où :

$$\left|\int_P F(x)\,dx - \int_{P\times Q} f(x,y)\,dx\,dy\right| =$$
$$= \left|\int_P (F(x)-\Phi(x))\,dx - \int_{P\times Q} (f(x,y)-\phi(x,y)\,dx\,dy\right| \leq 2\varepsilon\,. \qquad \square$$

Remarque III.30. — On peut permuter x et y dans l'énoncé de ce théorème.

Corollaire III.31. — *Avec les hypothèses du Théorème III.29, si f s'exprime sous la forme $f(x,y) = g(x)h(y)$, on aura :*

$$\int_{P\times Q} g(x)h(y)\,dx\,dy = \left(\int_P g(x)\,dx\right)\left(\int_Q h(y)\,dy\right).$$

Corollaire III.32. — *Si P est le pavé de $\mathbb{R}^n$ défini par $a_1 \leq x_i \leq b_i$ $i = 1,\cdots,n$ si f est intégrable sur P, on a*

$$\int_P f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\cdots dx_2\,dx_1\,.$$

Théorème III.33. — *Soit D une partie quarrable de $\mathbb{R}^n$ et Δ la partie de $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par*

$$\Delta=\{(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\ ;\ (x_1,\cdots,x_n)\in D,\ \phi(x_1,\cdots,x_n)\leq x_{n+1}\leq\phi_2(x_1,\cdots,x_n)\}$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont deux fonctions bornées et continues sur D, avec $\phi_1 \leq \phi_2$. Si f est une fonction continue et bornée sur Δ, alors f est intégrable et vérifie

$$\int_\Delta f(x_1,\cdots,x_{n+1})\,dx_1\cdots dx_{n+1} = \int_D \left[\int_{\phi_1(x_1,\cdots,x_n)}^{\phi_2(x_1,\cdots,x_n)} f(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\,dx_{n+1}\right] dx_1\cdots dx_n.$$

Preuve : La partie Δ est bornée, sa frontière $\partial\Delta$ comprend les points de $\overline{\Delta}$ qui se projettent sur ∂D et les graphes des fonctions ϕ_1 et ϕ_2. La partie D est quarrable donc ∂D est négligeable, ainsi que toute partie de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont la projection sur $\mathbb{R}^n$ est dans ∂D. Les graphes de ϕ_1 et ϕ_2, fonctions continues, sont négligeables; donc $\partial\Delta$ est négligeable et, par suite, quarrable et f est intégrable sur Δ. Pour un pavé P de $\mathbb{R}^n$ contenant D, on choisit un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ tel que le pavé $Q = P\times[a,b]$ contienne Δ; on prolonge alors f à Q par 0 sur $Q-\Delta$. Si $\overline{f}$ est ce prolongement, pour chaque $x = (x_1,\cdots,x_n) \in P$,

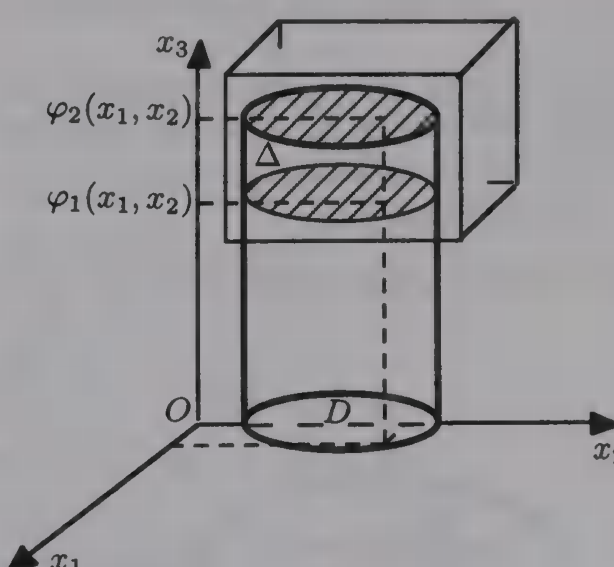

Figure III.1

la fonction $\overline{f_x} : x_{n+1} \longmapsto \overline{f}(x_1,\cdots,x_{n+1})$ est continue par morceaux sur $[a,b]$, donc intégrable et $\int_\Delta f = \int_{P\times[a,b]}\overline{f} = \int_P F$, où

$$F(x_1,\cdots,x_n) = \int_a^b \overline{f}(x_1,\cdots,x_{n+1})\,dx_{n+1} = \int_{\phi_1}^{\phi_2}\overline{f}\,dx_{n+1}. \qquad \square$$

Corollaire III.34. — *Sous les hypothèses précédentes, Δ est quarrable et sa mesure est*

$$\mu(\Delta) = \int_D [\phi_2(x_1, \cdots, x_n) - \phi_1(x_1, \cdots, x_n)]\, dx_1 \cdots dx_n \,.$$

4.2 Intégrales doubles et triples

a) *Aire de l'ellipse :*

On utilise le Théorème III.33, cela demande de déterminer ϕ_1 et ϕ_2, sachant que $x \in [-a, +a]$. L'ellipse E a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. L'intérieur est défini par $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, soit $y^2 \leq b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. On en déduit l'encadrement suivant :

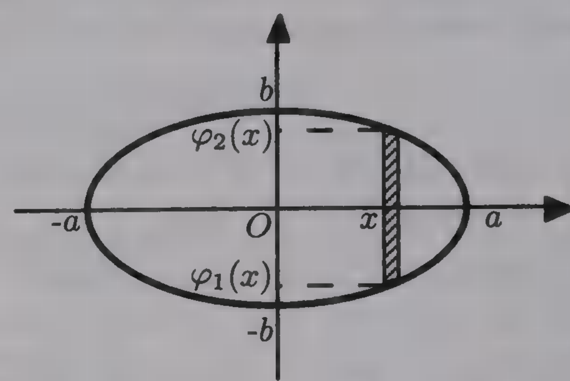

Figure III.2

$\phi_1(x) = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \phi_2(x)$ et on a :

$$\text{Aire}\,(E) = \int_{E^\circ} 1\, dx\, dy = \int_{-a}^{+a} \left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy\right] dx = \int_{-a}^{+a} 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx.$$

On est ramené au calcul d'une intégrale simple qui s'écrit , grâce à la parité $\text{Aire}\,(E) = 2\int_0^a 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$. Comme $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$, posons $x = a\cos\alpha$; d'où $dx = -a\sin\alpha\, d\alpha$ et

$$\text{Aire}\,(E) = 4ba\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} |\sin\alpha| \sin\alpha\, d\alpha = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha\, d\alpha = \pi ab.$$

Remarque III.35. — On aurait pu considérer $y \in [-b, +b]$ et faire varier x entre les deux fonctions $\phi_1(y)$ et $\phi_2(y)$; ce qui revient à prendre une aire élémentaire "parallèle" à l'axe des x.

b) *Intégrales triples :*

On considère l'ellipsoïde (Σ) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. Pour déterminer

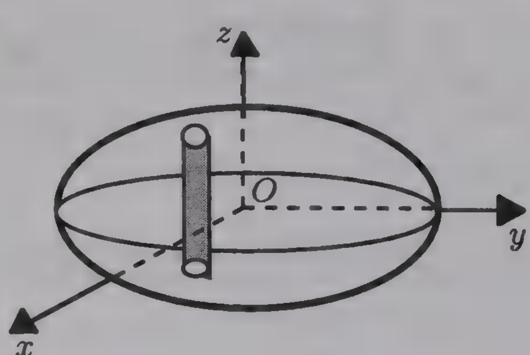

Figure III.3

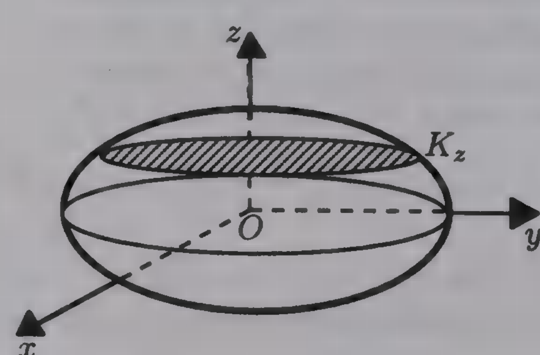

Figure III.4

son volume, on peut procéder comme dans l'exemple précédent en définissant les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 ; ce qui revient à calculer le volume d'un cylindre élémentaire (*Figure III.3*). On peut utiliser une autre méthode, en considérant non plus des cylindres élémentaires, mais des "tranches" parallèles qui seront des sections par des plans de cote z (*Figure III.4*). On utilise le théorème suivant dont la démonstration est immédiate.

Théorème III.36. — *Soit f intégrable sur un compact K et, pour chaque z, K_z la section de K par le plan de cote z. Si, pour chaque z fixé, la fonction $f_z : (x,y) \longmapsto f(x,y,z)$ est intégrable sur la section K_z, alors la fonction $F : z \longmapsto \iint_{K_z} f(x,y,z)\,dx\,dy$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a :*

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_\alpha^\beta \left[\iint_{K_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\right] dz.$$

Exemple III.37. — Le volume de l'ellipsoïde est $V(\Sigma) = \int_{-c}^{+c} \left(\iint_{K_z} dx\,dy\right) dz$, où $\iint_{K_z} dxdy$ est l'aire de l'ellipse obtenue comme section de l'ellipsoïde par un plan de cote z ; donc d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{z^2}{c^2}$, d'où cette aire vaut πAB, avec $A = a\sqrt{1 - \dfrac{z^2}{c^2}}$ et $B = b\sqrt{1 - \dfrac{z^2}{c^2}}$. Finalement :

$$V(\Sigma) = \int_{-c}^{+c} \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = 2\pi ab \int_0^c \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{4}{3}\pi abc.$$

5. Changement de variables

Le changement de variables dans les intégrales multiples s'appuie sur le théorème suivant que l'on admettra.

Théorème III.38. — *Soit ϕ un difféomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$. On définit le jacobien de la fonction ϕ par l'application $J_\phi : x \longmapsto \dfrac{D(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \det\left(\dfrac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x)\right)$. Si la fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable sur V et si la fonction $g = (f \circ \phi)\,|J_\phi|$ est intégrable sur U, on a :*

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\phi(x))\,|J_\phi(x)|\,dx.$$

On utilise couramment les trois changements de variables qui suivent.

5.1 Passage en coordonnées polaires

On utilise le changement de variables ϕ dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (\phi_1(r,\theta), \phi_2(r,\theta)),$$

dont le jacobien est $J_\phi = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$.

Si K est le rectangle compact $\{r_1 \leq r \leq r_2 \ ;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, ϕ est un difféomorphisme de $U = K^\circ$ sur $\phi(U)$ et $\phi(K) = \Delta = \{(x,y),\ r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2\}$.

D'où $$\boxed{\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta.}$$

Exemple III.39. — Soit D le disque de rayon unité centré à l'origine; c'est un cas particulier de couronne Δ avec $r_1 = 0$ et $r_2 = 1$. On calcule l'intégrale de la fonction $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2} = \dfrac{1}{1+r^2}$ dans D :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{1+r^2}\,dr\,d\theta = \pi \log 2.$$

5.2 Passage en coordonnées semi–polaires

On utilise le changement de variables ϕ dans $\mathbb{R}^3$ défini par

$$(r,\theta,z) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,,$$

dont le jacobien est $J_\phi = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$

Soit g est une fonction continue sur $[z_1, z_2]$ et on définit une partie compacte de $\mathbb{R}^3$ par $K = \{0 \le r \le g(z),\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ z_1 \le z \le z_2\}$. L'image $\phi(K)$ est le solide de révolution d'axe $0z$ délimité par la surface S d'équation $x^2 + y^2 = g(z)$ et les plans $z = z_1$ et $z = z_2$. On obtient :

$$\boxed{\iiint_{\phi(K)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{g(z)} \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,dz\,dr\,d\theta.}$$

5.3 Passage en coordonnées sphériques

On utilise le changement de variables ϕ dans $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\phi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta),$$

dont le jacobien est $J_\phi = r^2\sin\theta$.

Soit $K = \{r_1 \le r \le r_2\ ;\ 0 \le \theta \le \pi\ ;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ le compact de $\mathbb{R}^3$ et l'image $\phi(K) = \{r_1^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le r_2^2\}$. On obtient :

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint_{\phi(K)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \\ &\qquad \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.\end{aligned}}$$

6. Intégrales généralisées

6.1 Définitions

Définition III.40. — *Une partie X de $\mathbb{R}^n$ est dite réunion d'une suite exhaustive de compacts (K_p) si la suite (K_p) est croissante, avec $X = \bigcup_p K_p$, et telle que, pour tout compact K de X, il existe p_0 tel que $K \subset K_{p_0}$.*

Définition III.41. — *Une fonction numérique définie sur une partie X de $\mathbb{R}^n$ est dite localement intégrable sur X s'il existe une suite exhaustive de compacts (K_p) sur lesquels f est intégrable.*

Définition III.42. — *Soit $I_p = \int_{K_p} f(x)\,dx$. On dit que l'intégrale de f est convergente si la suite (I_p) est convergente.*

6.2 Critères de convergence

Théorème III.43. — *Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ localement intégrable. Pour que l'intégrale de f soit convergente, il faut et il suffit qu'il existe une suite exhaustive de compacts (K_p) sur lesquels f soit intégrable et tels que la suite $\int_{K_p} |f(x)|\,dx$ soit majorée. Alors $I = \lim_{p\to\infty} \int_{K_p} f(x)\,dx$ est indépendant de la suite de compacts.*

Exemple III.44. — Soit, pour tout $n \geq 1$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$, $K_n = \{x \geq 0\ y \geq 0\ ;\ x^2 + y^2 \leq n^2\}$ une suite exhaustive de X et, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x,y) = (1 + x^2 + y^2)^{-\alpha}$. On a :

$$\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\,dr\,d\theta}{(1+r^2)^\alpha} = \frac{\pi}{2} \int_0^n \frac{r\,dr}{(1+r^2)^\alpha}\,.$$

On est ramené à la convergence d'une intégrale simple; on voit ainsi que f est localement intégrable et la convergence de l'intégrale dépend de la valeur de α.

$$\int_0^n \frac{r\,dr}{(1+r^2)^\alpha} = \frac{1}{2} \int_0^n \frac{d(1+r^2)}{(1+r^2)^\alpha} = \frac{1}{2} \int_1^N \frac{du}{u^\alpha}$$

donc il y aura convergence si $\alpha > 1$, divergence si $\alpha \leq 1$.

7. Formule de Green–Riemann

7.1 Intégrale curviligne

Définition III.45. — *Le plan complexe $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$, avec $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. On appelle chemin de $\mathbb{C}$ toute application continue γ d'un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ qui à $t \in [a,b]$ associe $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. L'image de γ est une courbe dans $\mathbb{R}^2$. Le chemin γ est différentiable si x et y sont des fonctions de classe C^1.*

Définition III.46. — *De même, le chemin γ est différentiable par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ de $[a,b]$, telle que la restriction de γ à chaque intervalle $[t_{k-1}, t_k]$ soit de classe C^1, mais les dérivées à gauche et à droite de γ aux points t_k peuvent être différentes.*

Le point $\gamma(a)$ est l'origine du chemin et le point $\gamma(b)$ son extrémité. Le chemin est fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Le chemin est orienté positivement s'il est parcouru de $\gamma(a)$ vers $\gamma(b)$.

Définition III.47. — *Soit f une fonction continue sur D contenant l'image de γ. On appelle intégrale curviligne de f sur γ, l'intégrale définie par*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Soit ϕ est une application bijective de l'intervalle $[a_1, b_1]$ sur $[a,b]$ de classe C^1, telle que $\phi(a_1) = a$ et $\phi(b_1) = b$. En posant $\gamma_1 = \gamma\circ\phi$, le chemin γ_1 est un chemin paramétré par $[a_1, b_1]$ et on a :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(\phi(t))).\gamma'(t).\phi'(t)\,dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma f(z)\,dz\,.\end{aligned}$$

Les intégrales curvilignes sont dites égales et les chemins γ, γ_1 sont dits équivalents. En particulier si γ se décompose en une somme finie de chemins γ_j on a :

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_m, \qquad \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{p=1}^{m} \int_{\gamma_p} f(z)\,dz.$$

Exemples III.48. — **1)** Soit $[a,b]=[0,1]$ et, pour $t\in[0,1]$, $\gamma_1(t)=\gamma(1-t)$. Le chemin γ_1 s'appelle le chemin opposé à γ et on a :

$$\int_{\gamma_1} f = \int_0^1 f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt = -\int_0^1 f(\gamma(1-t))\gamma'(1-t)\,dt$$
$$= -\int_0^1 f(\gamma(u))\gamma'(u)\,du = -\int_\gamma f.$$

2) Soit $[a,b]=[0,2\pi]$ et $\gamma(t)=a+re^{it}$ le cercle de centre a et de rayon r. On a

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,d(a+re^{it}) = ir\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{it}\,dt.$$

3) Soit $[a,b]=[0,2\pi]$ et $\gamma(t)=e^{it}$ le cercle de centre 0 et de rayon 1. On a, pour $n\in\mathbb{Z}$:

$$I_n = \int_\gamma z^n\,dz = i\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}\,d(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } n\neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } n=-1 \end{cases}.$$

Donc $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2i\pi.$

7.2 Cas d'un rectangle

On va établir la formule de Green–Riemann dans le cas d'un rectangle K dont les côtés sont parallèles aux axes.

Théorème III.49 [Formule de Green–Riemann]. — *Soit $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ des fonctions définies et continues dans un voisinage $V(K)$, admettant dans $V(K)$ des dérivées partielles $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ continues alors :*

$$\boxed{\int_{\partial K} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy\,.}$$

Preuve :

Il suffit de prouver que

$$\int_{\partial K} Q(x,y)\,dy = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy.$$

Utilisant le Théorème de Fubini, on calcule l'intégrale double :

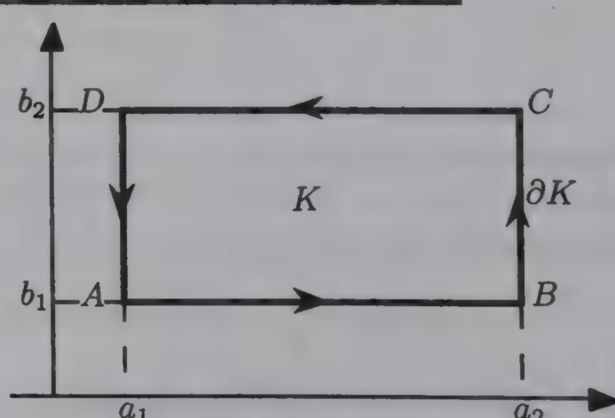

Figure III.5

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{b_1}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\right)dy = \int_{b_1}^{b_2}\left[Q(a_2,y)-Q(a_1,y)\right]dy$$
$$= \int_{b_1}^{b_2} Q(a_2,y)\,dy - \int_{b_1}^{b_2} Q(a_1,y)\,dy$$
$$= \int_{BC} Q(a_2,y)\,dy + \int_{DA} Q(a_1,y)\,dy = \int_{\partial K} Q(x,y)\,dy. \qquad \square$$

Remarques III.50. — La formule de Green–Riemann est valable pour des compacts plus généraux, à condition que leurs bords aient une certaine régularité. On admettra, une fois de plus, ce résultat dont la démonstration consiste à découper le compact en compacts élémentaires qui sont soit des rectangles soit des triangles.

Exemple III.51. — Soit K le compact dont la frontière ∂K est constituée les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $y^2 = x$, inscrits dans le carré de côté 1 et de sommets :

$$(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1).$$

Pour calculer l'intégrale curviligne

$$I = \int_{\partial K} (2xy - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$$

on peut, soit procéder directement, soit utiliser la Formule de Green–Riemann.

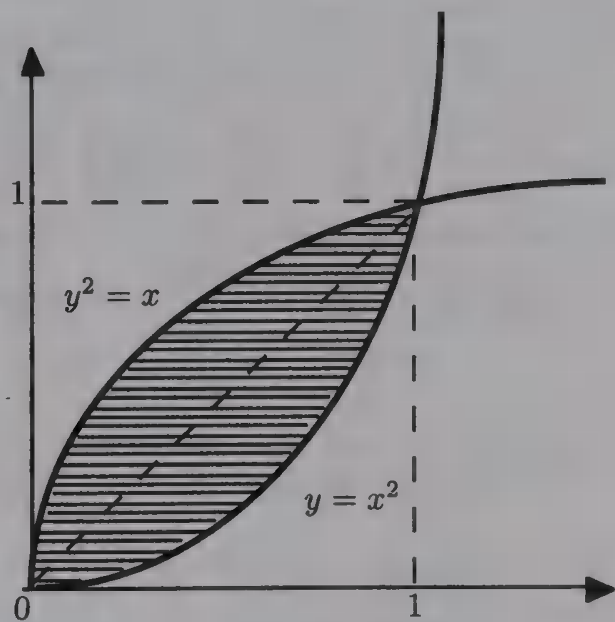

Figure III.6

1) Par le calcul direct on a :

$$\int_{\partial K} (2xy - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy =$$
$$= \int_0^1 (2x^3 - x^2)\,dx + (x + (x^2)^2)\,d(x^2) \quad \text{le long de l'arc } y = x^2$$
$$= \int_0^1 (2x^3 + x^2 + 2x^5)\,dx = \frac{7}{6}\cdot$$

Le long de l'arc $y^2 = x$ convenablement orienté, on a :

$$\int_0^1 (2(y^2)y - (y^2)^2(dy^2) + (y^2 + y^2)\,dy = \int_1^0 (4y^4 - 2y^5 + 2y^2)\,dy = -\frac{17}{15}\cdot$$

D'où $I = \dfrac{1}{30}\cdot$

2) Par la Formule de Green–Riemann le calcul donne :

$$I = \iint_K \left[\frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x^2)\right]dx\,dy = \iint_K (1 - 2x)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} (1 - 2x)\,dy\right)dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - x^2 + 2x^3)\,dx = \frac{1}{30}\cdot$$

8. Formules de Stokes et Ostrogradski

8.1 Formule de Stokes

Théorème III.52 [Formule de Stokes]. — *Soit une surface S de frontière fermée ∂S. Si $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ sont trois fonctions continues à dérivées partielles premières continues, alors on a :*

$$\boxed{\int_{\partial S} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\gamma\right]dS}$$

où α,β,γ sont les composantes du vecteur unitaire normal N à la surface S et dS est l'élément d'aire.

Preuve : Supposons que la surface S est définie paramétriquement, c'est–à–dire que x, y et z sont des fonctions de deux paramètres u et v, ainsi que les fonctions P, Q, R. Appelons I l'intégrale curviligne :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\partial S}\left[P\frac{\partial x}{\partial u}+Q\frac{\partial y}{\partial u}+R\frac{\partial z}{\partial u}\right]du+\left[P\frac{\partial x}{\partial v}+Q\frac{\partial y}{\partial v}+R\frac{\partial z}{\partial v}\right]dv\\
&= \iint_S\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}+Q\frac{\partial y}{\partial v}+R\frac{\partial z}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}+Q\frac{\partial y}{\partial u}+R\frac{\partial z}{\partial u}\right)\right]du\,dv
\end{aligned}$$

d'après la Formule de Green–Riemann. Calculons l'expression entre crochets

$$\begin{aligned}
[\cdots] &= \frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}+P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+Q\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+R\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\\
&\qquad -\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial Q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}-P\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}-Q\frac{\partial^2 y}{\partial v\partial u}-R\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}+\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial v}\\
&\quad +\left(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial v}-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\\
&\quad -\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial Q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial u}-\left(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial u}\\
&= -\frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\\
&\qquad +\frac{\partial Q}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)-\frac{\partial Q}{\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\\
&\qquad -\frac{\partial R}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\frac{\partial R}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\\
&\qquad +\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)N_1+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)N_2+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)N_3
\end{aligned}$$

où N_1, N_2, N_3 sont les composantes du vecteur normal N à la surface S dont l'élément d'aire est $dS = \sqrt{N_1^2+N_2^2+N_3^2}\,du\,dv$. Les composantes du vecteur normal unitaire sont

$$\alpha=\frac{N_1}{\sqrt{N_1^2+N_2^2+N_3^2}},\quad \beta=\frac{N_2}{\sqrt{N_1^2+N_2^2+N_3^2}},\quad \gamma=\frac{N_3}{\sqrt{N_1^2+N_2^2+N_3^2}}\ ;$$

d'où :

$$I=\Big[\iint_S\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\alpha+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\beta+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\gamma\Big]\sqrt{N_1^2+N_2^2+N_3^2}\,du\,dv. \ \square$$

REMARQUE III.53. — Si $U(x,y,z)$ est le champ de vecteurs de composantes P,Q,R, alors les composantes de $\operatorname{rot} U$ sont $\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}$ et, en utilisant le produit scalaire, la Formule de STOKES peut s'écrire

$$\boxed{I=\iint_S <\operatorname{rot} U, N> dS\,.}$$

8.2 Formule d'OSTROGRADSKI

Théorème III.54 [Formule d'OSTROGRADSKI]. — *Soit V le volume ayant pour frontière ∂V une surface fermée "régulière". Si $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ et $R(x,y,z)$ sont des fonctions continues à dérivées partielles premières continues dans un voisinage de $V\cup\partial V$, en appelant α,β,γ les composantes d'un vecteur unitaire normal (extérieur) à la surface, on a :*

$$\boxed{\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint_{\partial V}(P\alpha+Q\beta+R\gamma)\,dS}$$

où dS est l'élément d'aire de ∂V.

REMARQUE III.55. — Surface "régulière" signifie que toute parallèle aux axes de coordonnées ne coupe la surface frontière qu'en deux points au plus.

Preuve : Il suffit de prouver que $\displaystyle\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\iint_V R\gamma\,dS$. Soit $z_1(x,y)$ et $z_2(x,y)$ les troisièmes coordonnées des points d'intersection de ∂V avec une parallèle à l'axe Oz. On obtient :

$$\begin{aligned}\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz&=\iint_{P(\partial V)}dx\,dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\,dz\\&=\iint_{P(\partial V)}R(x,y,z_2)\,dx\,dy-\iint_{P(\partial V)}R(x,y,z_1)\,dx\,dy\end{aligned}$$

où $P^{\partial V}$ est la projection sur le plan (x,y) de la surface ∂V. Au point (x,y,z_1), γ est négatif, tandis qu'il est positif au point (x,y,z_2). Comme $dS=\frac{1}{\gamma}\,dx\,dy$, si $\gamma>0$, et $dS=-\frac{1}{\gamma}\,dx\,dy$, si $\gamma<0$, on a :

$$\begin{aligned}\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz&=\iint_{(\partial V)_2}R(x,y,z_2)\gamma\,dS+\iint_{(\partial V)_1}R(x,y,z_1)\gamma\,dS\\&=\iint_{\partial V}R\gamma\,dS\,,\end{aligned}$$

où $(\partial V)_2$ et $(\partial V)_1$ désignent les portions de la surface ∂V, avec $\gamma>0$ ou $\gamma<0$. $\square$

REMARQUE III.56. — En introduisant le divergent du champ de vecteurs U de composantes P,Q,R, la Formule d'OSTROGRADSKI peut encore s'écrire

$$\iiint_V\operatorname{div} U\,dV=\iint_{\partial V}<U,N>dS.$$

En application on obtient la formule suivante.

Théorème III.57 [Formule de Green]. — *Soit ϕ, ψ des fonctions de classe C^2 et Δ l'opérateur laplacien. On a*

$$\boxed{\iiint_V (\phi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\phi)\,dx\,dy\,dz = \iint_V \left(\phi\,\frac{d\psi}{dn} - \psi\,\frac{d\phi}{dn}\right)\,dS}$$

où $\dfrac{d\phi}{dn} = \alpha\dfrac{\partial\phi}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial\phi}{\partial y} + \gamma\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$ *est la dérivée normale de* ϕ.

Preuve : Il suffit de prendre dans la formule précédente

$$P = \phi\,\frac{\partial\psi}{\partial x},\ Q = \phi\,\frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ et } R = \phi\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot$$

D'où :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \phi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},\quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \phi\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2},\quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z} + \phi\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

et

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\,dx\,dy\,dz = \iint_V \phi\Delta\psi\,dx\,dy\,dz$$
$$+ \iiint_V \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial V} \phi\frac{d\psi}{dn}\,dS.$$

En permutant ϕ et ψ et en retranchant les deux expressions, on obtient la formule annoncée. □

9. Exercices

Exercice III.1 Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy$$

$$J = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx$$

et expliquer le résultat.

Exercice III.2 Calculer

$$I = \iint_\Delta \frac{dx\, dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

avec $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x+y>1, x^2+y^2<1,\ y<x\}$.

Exercice III.3 Calculer

$$I = \iiint_\Delta \frac{z^3\, dx\, dy\, dz}{(y+z)(x+y+z)},$$

avec $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x>0, y>0, z>0 \text{ et } x+y+z \leq 1\}$.

Exercice III.4 Calculer

$$I = \iint_\Delta \frac{y}{\sqrt{x}} \ln(1-x-y)\, dx\, dy,$$

avec $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x>0\ ;\ y>0\ ;\ x+y<1\}$.

Exercice III.5 Considérons l'ensemble $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, avec :

$$\Delta_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ 0 < x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\right\}$$

et $\qquad \Delta_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x = 0,\ y \geq 0\}$.

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\quad I_1 = \iint_\Delta dx\, dy$;

b) $\quad I_2 = \iint_\Delta x\, dx\, dy$;

c) $\quad I_3 = \iint_\Delta \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx\, dy$;

d) $\quad I_4 = \iint_\Delta \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$.

Exercice III.6 Considérons l'ensemble :

$$\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x \geq 0\ ;\ y \geq 0\ ;\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$

Démontrer que

$$I = \iiint_\Delta x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1}\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{8}\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\beta}{2})\Gamma(\frac{\gamma}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}+1)},$$

où $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$.

On pourra utiliser la relation $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

10. Solutions des exercices

Exercice III.1 $I = \int_0^1 dx \int_0^1 \left[\frac{2x}{(x+y)^3} - \frac{1}{(x+y)^2}\right] dy = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = \frac{1}{2}$.
Pour des raisons de symétrie, on a $J = -I$ (changer x en y); donc $J = -\frac{1}{2}$, le théorème de FUBINI est en défaut. La fonction $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ est continue sur $\Delta - \{(0,0)\}$, où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq x \leq 1 \ ; \ 0 \leq y \leq 1\}$. La fonction f n'est ni continue, ni bornée au voisinage de $(0,0)$. On aurait $I = J$, si $\iint_\Delta f(x,y)\, dx\, dy$ converge; donc si $\iint_\Delta |f(x,y)|\, dx\, dy$ converge. Or, le passage en coordonnées polaires donne :

$$\iint_\Delta \left|\frac{x-y}{(x+y)^3}\right| dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos\theta - \sin\theta|}{(\cos\theta + \sin\theta)^3}\, d\theta \int_0^{r_1(\theta)} \frac{dr}{r} \text{ et } \int_0 \frac{dr}{r} \text{ diverge.}$$

Exercice III.2 On passe en coordonnées polaires, Δ devient :

$$\Delta' = \{(r,\theta) \ ; \ 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \ ; \ \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} < r < 1\}$$

et l'intégrale se transforme en

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta'} \frac{r\, dr\, d\theta}{r^3} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}}^1 \frac{dr}{r} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\theta + \sin\theta - 1)\, d\theta \\ &= 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

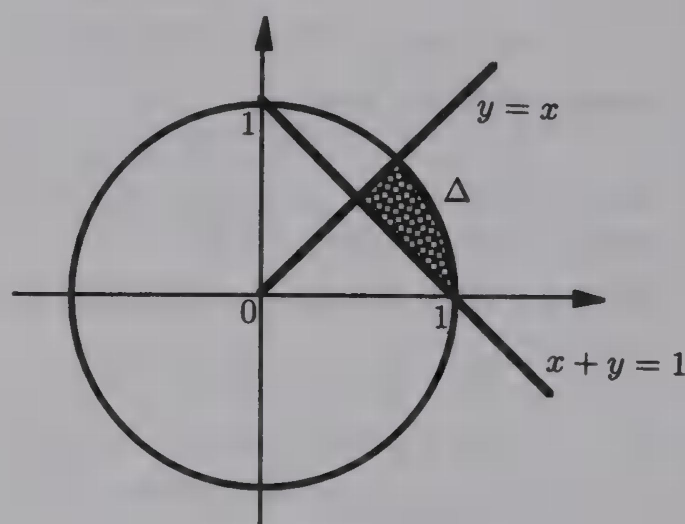

Figure III.7

Exercice III.3 On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} u = x + y + z \\ v = y + z \\ w = z \end{cases}$$

dans l'intégrale à calculer.

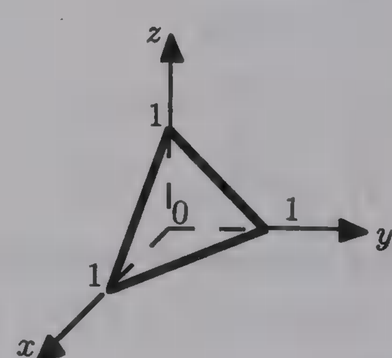

Figure III.8

Le domaine Δ devient $\Delta' = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 0 < w < v \leq 1\}$, le jacobien $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = 1$ et $I = \iiint_{\Delta'} \dfrac{w^3}{uv}\, du\, dv\, dw = \int_0^1 \dfrac{du}{u} \int_0^u \dfrac{dv}{v} \int_0^v w^3\, dw = \dfrac{1}{64}$.

Exercice III.4 $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x}} \ln(1 - x - y)$ n'est pas bornée au voisinage des points (x,y) tels que $\{x = 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$ ou $\{x + y = 1\}$.

On pose $\begin{cases} u = x \\ v = 1 - x - y \end{cases}$, le jacobien est $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = -1$ et le domaine Δ devient $\Delta' = \{(u,v)\ ;\ u > 0\ v > 0\ ;\ u+v < 1\}$; d'où :

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta'} \frac{1-u-v}{\sqrt{u}} \ln v\, du\, dv = \int_0^1 \ln v\, dv \int_0^{1-u} \frac{1-u-v}{\sqrt{u}}\, du \\ &= \frac{4}{3}\int_0^1 (\ln v)(1-v)^{\frac{3}{2}}\, dv \end{aligned}$$

et
$$I_\varepsilon = \frac{4}{3}\left\{\left[-\frac{2}{5}(1-v)^{\frac{5}{2}} \ln v\right]_\varepsilon^1 + \frac{2}{5}\int_\varepsilon^1 \frac{(1-v)^{\frac{5}{2}}}{v}\, dv\right\}.$$

On pose $(1-v)^{\frac{1}{2}} = t$, dans la seconde intégrale :

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \frac{4}{3}\left\{\frac{2}{5}(1-\varepsilon)^{\frac{5}{2}} \ln \varepsilon + \frac{2}{5}\left(\int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \frac{2t^6}{1-t^2}\, dt\right)\right\} \\ &= \frac{4}{3}\left\{\frac{2}{5}(1-\varepsilon)^{\frac{5}{2}} \ln \varepsilon + \frac{4}{5}\int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \left[(-t^4 - t^2 - 1) + \frac{\frac{1}{2}}{1+t} + \frac{\frac{1}{2}}{1-t}\right] dt\right\} \end{aligned}$$

On en déduite : $$I = \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon \quad \text{et} \quad I = \frac{16}{15}\left(\ln 2 - \frac{23}{15}\right).$$

Exercice III.5 a) L'intégrale

$$I_1 = \iint_\Delta \chi_\Delta\, dx\, dy = \mu(\Delta),$$

mesure de Δ ; donc

$$I_1 = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\right) dx = \frac{1}{3}.$$

La convergence de l'intégrale est immédiate.

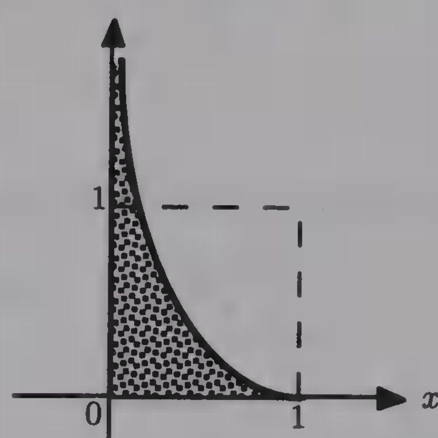

Figure III.9

b) I_2 converge si, et seulement si, $\iint_\Delta |x|\, dx\, dy$ converge. Or $I_2 \leq I_1$; donc I_2 converge.

c) La fonction à intégrer n'est pas bornée au voisinage de $(0,0)$ mais est continue dans $\Delta - \{0,0\}$. Or Δ n'est pas borné. Soit $K = \{(x,y)\ ;\ 0 \leq x \leq 1\ ;\ 0 \leq y \leq 1\}$. On pose $\Delta_1 = \Delta \cap K$ et $\Delta_2 = \Delta - \Delta_1$. L'intégrale I_3 converge si, et seulement si, les deux intégrales $I_3' = \displaystyle\iint_{\Delta_1} \frac{|x-y|}{(x+y)^2}\, dx\, dy$ et $I_3'' = \displaystyle\iint_{\Delta_2} \frac{|x-y|}{(x+y)^2}\, dx\, dy$ convergent.

Dans Δ_2, on a $0 \leq x \leq 1$ et $y \geq 1$. Donc $\dfrac{|x-y|}{(x+y)^2} \leq \dfrac{y}{(x+y)^2} < \dfrac{1}{y} \leq 1$ et par suite I_3'' converge. Pour I_3', on passe en coordonnées polaires, Δ_1 devient $\Delta_1' = \{(r,\theta)\ ;\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\ ;\ 0 \leq r \leq r_2(\theta)\}$. On calcule

$$I_3' = \iint_{\Delta_1'} \frac{r\,|\cos\theta - \sin\theta|}{r^2(\cos\theta + \sin\theta)^2} r\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos\theta - \sin\theta|}{(\cos\theta + \sin\theta)^2}\, d\theta \int_0^{r_2(\theta)} dr$$

et donc I_3' converge.

d) On procède comme ci-dessus en décomposant l'intégrale $I_4 = I_4' + I_4''$, avec

$$I_4' = \iint_{\Delta'} \frac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r^4} r\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \int_0^{r_2(\theta)} \frac{dr}{r}$$

qui diverge; donc I_4 diverge.

Exercice III.6 On effectue le changement de variables $x^2 = u$, $y^2 = v$, $z^2 = w$. Le domaine Δ devient $\Delta' = \{(u, v, w)\ ;\ u > 0, v > 0, w > 0, u + v + w \leq 1\}$ et

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Delta'} u^{\frac{(\alpha-1)}{2}} v^{\frac{(\beta-1)}{2}} w^{\frac{(\gamma-1)}{2}} \frac{du}{2\sqrt{u}} \frac{dv}{2\sqrt{v}} \frac{dw}{2\sqrt{w}} \\ &= \frac{1}{8} \iiint_{\Delta'} u^{(\frac{\alpha}{2})-1} v^{(\frac{\beta}{2})-1} w^{(\frac{\gamma}{2})-1}\, du\, dv\, dw \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \int_0^{1-u-v} u^{(\frac{\alpha}{2})-1} v^{(\frac{\beta}{2})-1} w^{(\frac{\gamma}{2})-1}\, dw \\ &= \frac{1}{4\gamma} \int_0^1 u^{(\frac{\alpha}{2})-1} du \int_0^{1-u} v^{(\frac{\beta}{2})-1} (1-u-v)^{\frac{\gamma}{2}}\, dv\,. \end{aligned}$$

En posant $v = (1-u)t$, avec u fixé, dans la seconde intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{1-u} v^{(\frac{\beta}{2})-1} (1-u-v)^{\frac{\gamma}{2}}\, dv &= (1-u)^{\frac{(\beta+\gamma)}{2}} \int_0^1 t^{(\frac{\beta}{2})-1} (1-t)^{\frac{\gamma}{2}}\, dt \\ &= (1-u)^{\frac{(\beta+\gamma)}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\beta}{2})\Gamma(\frac{\gamma}{2}+1)}{\Gamma(\frac{\beta+\gamma}{2}+1)}\,. \end{aligned}$$

On sait que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$; d'où :

$$I = \frac{1}{4\gamma} \int_0^1 u^{(\frac{\alpha}{2})-1} (1-u)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\, du \times \frac{\gamma}{2} \frac{\Gamma(\frac{\beta}{2})\Gamma(\frac{\gamma}{2})}{\Gamma(\frac{\beta+\gamma}{2}+1)} = \frac{1}{8} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\beta}{2})\Gamma(\frac{\gamma}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}+1)}\,.$$

Annexes

1 **Chapitre IV** – **Calcul d'intégrales par la méthode des résidus**

2 **Formulaire de trigonométrie**

CHAPITRE IV
CALCUL D'INTÉGRALES PAR LES RÉSIDUS

1. Analycité des fonctions holomorphes

1.1 Les lemmes de JORDAN

Théorème IV.1. — *Si γ est un chemin C^1 compact et f continue sur $D \supset \mathrm{im}(\gamma)$ et si L est la longueur de γ, alors on a* $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \sup_\gamma |f(z)|\ L$.

Preuve : On suppose que $[a,b]$ définit une paramétrisation de γ

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t)).\gamma'(t)\,dt\right| \le \sup_{[a,b]} |f(\gamma(t)|\,.\int_a^b \left|\gamma'(t)\right|\,dt.$$

Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $|\gamma'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ et $\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = L$

Lemme IV.2 [JORDAN]. — *Soit S le secteur plan défini par l'ensemble des z tels que $0 \le |z - z_0| \le R$ et $\theta_1 \le \arg(z) \le \theta_2$. Pour chaque $r \in]0, R]$, on appelle γ_r l'arc de cercle orienté positivement défini par $z = z_0 + re^{i\theta}$ avec $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$. Si f est définie sur S et continue sur $S - \{z_0\}$ et si $\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in S}}(z - z_0)f(z) = \alpha$ existe, alors $\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = i(\theta_2 - \theta_1)\alpha$.*

Preuve : $\displaystyle\int_{\gamma_r} f(z)\,dz - i(\theta_2 - \theta_1)\alpha = i\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(z_0 + re^{i\theta})re^{i\theta}\,d\theta -$
$\displaystyle i\int_{\theta_1}^{\theta_2}\alpha\,d\theta = i\int_{\theta_1}^{\theta_2}(f(z_0 + re^{i\theta})(z - z_0) - \alpha)\,d\theta$

Figure IV.1

$\left[\forall\varepsilon > 0,\ \exists r(\varepsilon) \text{ tel que } |z - z_0| \le r \text{ et } z \in S\right]$ entraîne $\left[|f(z)(z - z_0) - \alpha| < \varepsilon\right]$;
d'où $\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz - i(\theta_2 - \theta_1)\alpha\right| \le \int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(z)(z - z_0) - \alpha|\,d\theta \le \varepsilon(\theta_2 - \theta_1) = \varepsilon'$.

Cas particulier : Si S est le disque de centre z_0, avec les mêmes hypothèses on aura $\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 2i\pi\alpha$ où γ_r est le cercle de centre z_0 et de rayon r.

Lemme IV.3. — *Soit $S' = \{|z - z_0| \ge R$ et $\theta_1 \le \arg(z) < \theta_2\}$. Si $\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ z\in S}} zf(z) = \beta$, alors $\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = i(\theta_2 - \theta_1)\beta$.*

1.2 Formule de CAUCHY

Définition IV.4. — *On dira qu'un compact K dans $\mathbb{C}$ est régulier si le bord orienté de K, noté ∂K, est formé de chemins différentiables par morceaux.*

Théorème IV.5 [CAUCHY]. — *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert D de $\mathbb{C}$. Pour tout compact régulier K on a $\int_{\partial K} f(z)\,dz = 0$.*

Preuve : La démonstration générale de ce résultat est délicate et passe par une partition de K en triangles ou en rectangles. On simplifie ici la preuve en ajoutant une hypothèse supplémentaire : f est de classe C^1.
Soit $f(z) = f(x,y) = (P + iQ)(dx + idy)$ et $\omega = f(z)\,dz = P(x,y) + iQ(x,y)$. On calcule :

$$\omega = P(x,y)\,dx - Q(x,y)\,dy + i(Q(x,y)\,dx + P(x,y)\,dy) = \omega_1 + i\omega_2\,.$$

Et, en utilisant la formule de GREEN–RIEMANN, on a :

$$\int_{\partial K} \omega_1 = -\iint_K (Q'_x + P'_y)\,dxdy = 0 \text{ car } f \text{ est différentiable et } P'_y = -Q'_x$$

et $$\int_{\partial K} \omega_2 = -\iint_K (-Q'_y + P'_x)\,dxdy = 0 \text{ car } f \text{ est différentiable et } P'_x = Q'_y\,.$$

Donc $\int_{\partial K} \omega = 0$.

Théorème IV.6 [Formule de CAUCHY]. — . *Si f est holomorphe dans D, alors pour tout compact régulier $K \subset D$ et pour tout $z_0 \in \overset{\circ}{K}$, on a* $f(z_0) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz\,.$

Preuve : Soit Δ le disque de centre z_0 et de rayon r tel que $\Delta \subset \overset{\circ}{K}$. La fonction $g(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ est holomorphe sur $K - \Delta$ et $\int_{\partial(K-\Delta)} g(z)\,dz = 0$, d'après le théorème de CAUCHY. Cela s'écrit $\displaystyle\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 0$ et, quand $r \to 0$, $\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z - z_0} = 2i\pi f(z_0)$. D'où $2i\pi f(z_0) = \displaystyle\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$

1.3 Analycité des fonctions holomorphes

Théorème IV.7. — *Toute fonction holomorphe dans le disque $D = \{|z| < R\}$ est développable en série entière de manière unique dans D ayant comme coefficients*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta\,, \quad \text{avec } \gamma_r = \{|z| = r\} \subset D.$$

Preuve : Pour tout $r < R$, f est holomorphe dans $K_r = \{|z| \leq r\}$; donc pour tout z tel que $|z| < r$, on a $f(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{f(t)}{t - z}\,dt$. Pour $|z| < |t|$, on écrit $\dfrac{1}{t-z} = \dfrac{1}{t(1 - \frac{z}{t})} = \dfrac{1}{t}\displaystyle\sum_0^{\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^n = \sum_0^{\infty}\frac{z^n}{t^{n+1}}\,.$
En choisissant r' tel que $|z| \leq r' < |t| = r$, la série géométrique converge normalement car $\left|\dfrac{z}{t}\right| \leq \dfrac{r'}{r} < 1$ et on peut l'intégrer terme à terme :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{t^{n+1}}\,dt = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(t)}{t^{n+1}}\,dt\right)z^n = \sum_{n\geq 0} a_n z^n.$$

Il suffit de poser $t = e^{i\theta}$ pour obtenir l'autre expression des coefficients qui sont uniques car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)$.

Corollaire IV.8. — *De façon analogue, on peut développer f en série entière en tout point z_0 de D en écrivant :* $\dfrac{1}{t-z} = \displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(z - z_0)^n}{(t - z_0)^{n+1}}$ et $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'_r}\frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}}\,dt\right)(z - z_0)^n$
où $\gamma'_r = \{|z - z_0| = r\}$.

Corollaire IV.9. — *Si f est holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$, f est analytique dans U ; il suffit de prendre z_0 quelconque dans U et D un disque contenant z_0 et inclus dans U.*

Corollaire IV.10. — *Si $f(z)$ est dérivable une fois, alors f est de classe C^∞ car f holomorphe est analytique donc de classe C^∞.*

1.4 Quelques applications.

Théorème IV.11 [Inégalités de CAUCHY]. — *Si f est holomorphe dans $D = \{|z| < R\}$ et est bornée par M sur $D = \{|z| \leq R\}$, alors, pour tout $n \geq 0$, on a $|a_n| \leq \dfrac{M}{r^n}$, quel que soit $r \in]0, R[$.*

Preuve : Pour tout $r<R$, $a_n=\dfrac{1}{2\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$; d'où $|a_n|\leq\dfrac{1}{2\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|\,d\theta\leq\dfrac{M}{r^n}$.

Théorème IV.12 [LIOUVILLE]. — *Si f est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier et est bornée, alors f est constante.*

Preuve : Pour tout $r\in]0,+\infty[$, $|a_n|\leq\dfrac{M}{r^n}$. En faisant $r\to\infty$, on trouve $a_n=0$, pour tout $n>0$ et $f(z)=a_0$.

Théorème IV.13 [Égalité de PARSEVAL]. — *Si f est holomorphe dans $D=\{|z|<R\}$, pour tout $r<R$, on a :* $\sum_{n\geq 0}|a_n|^2 r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta$.

2. Série de Laurent

2.1 Fonction holomorphe dans une couronne

Théorème IV.14. — *Soit f une fonction holomorphe dans une couronne circulaire $C(R_1,R_2)=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ 0<R_1<|z|<R_2\}$ et $\gamma_r=\{|z|=R\}$. Alors f admet dans $C(R_1,R_2)$ un développement en série entière de la forme $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n z^n$ avec*

$$a_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta,\quad \text{où } r\in]R_1,R_2[.$$

Preuve : On introduit quatre nombres r_1, r_1', r_2 et r_2' tels que $R_1<r_1'<r_1<r_2<r_2'<R_2$. Soit z dans la couronne compacte $K=\{r_1'\leq|z|\leq r_2'\}$ et $\gamma_2=\{|z|=r_2'\}$. D'après la formule de CAUCHY on a $f(z)=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\partial K}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{f(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{f(t)}{t-z}\,dt$.

▷ Si $t\in\gamma_2$, $|t|=r_2'$ et si $|z|\leq r_2<r_2'$, $\dfrac{1}{t-z}=\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{t^{n+1}}$ est une série géométrique normalement convergente , car $\left|\dfrac{z}{t}\right|\leq\dfrac{r_2}{r_2'}<1$; d'où $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_2}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=+\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{f(t)}{t^{n+1}}\,dt\right)z^n$.

▷ Si $t\in\gamma_1$ et $|z|\geq r_1>r_1'$, on a $\dfrac{1}{t-z}=-\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\frac{t}{z}}=-\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{z^{n+1}}=-\sum_{n<0}\frac{z^n}{t^{n+1}}$ qui est une série géométrique normalement convergente $\left|\dfrac{t}{z}\right|\leq\dfrac{r_1'}{r_1}<1$; d'où l'égalité : $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_1}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=-\sum_{n<0}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{f(t)}{t^{n+1}}\,dt\right)z^n$ et finalement, avec $\gamma_r\subset C(R_1,R_2)$, on a :

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{f(t)}{t^{n+1}}\,dt\right)z^n+\sum_{n<0}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{f(t)}{t^{n+1}}\,dt\right)z^n=\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(t)}{t^{n+1}}\,dt\right)z^n.$$

REMARQUE IV.15. — On a une décomposition de f en $f=f_1+f_2$ où $f_1(z)=\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ est holomorphe dans $|z|<R_2$ et $f_2=\sum_{n=-1}^{-\infty}a_n z^n$ est holomorphe dans $|z|>R_1$.

Définition IV.16. — *Avec les données précédentes, on appelle $\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n z^n$ la série de* LAURENT *de f dans la couronne $C(R_1,R_2)$. On dit que la fonction holomorphe f dans la couronne est développable en série de* LAURENT*, de façon unique puisque les coefficients sont explicitement déterminés ci–dessus. En particulier une fonction holomorphe dans le disque pointé $D^*=\{0<|z|<R\}$ est développable en série de Laurent dans ce disque, $f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n z^n$ avec $a_n=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_r}\frac{f(t)}{t^{n+1}}\,dt$ pour $n\in\mathbb{Z}$ et $0<r<R$. Plus généralement si f est holomorphe*

dans la couronne de centre z_0 et de rayons (R_1, R_2) (ou dans le disque pointé de centre z_0 de rayon R) la fonction f y est développable en série de LAURENT $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *avec*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\substack{|z-z_0|=r\\ R_1<r<R_2}} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta,\ n\in\mathbb{Z}.$$

2.2 Résidus

Définition IV.17. — *Un point z_0 appartenant à un ouvert D de $\mathbb{C}$ est une singularité isolée de la fonction f si elle est holomorphe dans $D-\{z_0\}$.*

Définition IV.18. — *Si f est prolongeable en une fonction holomorphe dans D, on dit que z_0 est une singularité artificielle.*

Théorème IV.19. — *Le point z_0 est une singularité artificielle de f si, et seulement si, f est bornée au voisinage de z_0.*

Preuve : Supposons $z_0 = 0$ et f holomorphe dans le disque $D(0,R)-\{0\}$; f admet un développement en série de LAURENT dans le disque pointé en 0. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ avec $|a_n| \leq Mr^{-n}$ pour $0<r<R$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$. Pour les entiers $n<0$, en considérant $r\to 0$, on en déduit que $a_n = 0$. Il reste $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ qui est holomorphe en 0.
La condition nécessaire est immédiate.

Définition IV.20. — *Soit z_0 une singularité de f et $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ le développement en série de* LAURENT *au voisinage de z_0.*

S'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers négatifs n tels que $a_n \neq 0$, z_0 est un pôle d'ordre $p = \max\{-n\in\mathbb{N}\ ;\quad a_n\neq 0\}$.

S'il existe une infinité d'entiers négatifs n tels que $a_n\neq 0$, z_0 est une singularité essentielle.

EXEMPLE IV.21. — Soit, dans $\mathbb{C}^*$, $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!z^n}$. Le point $z=0$ est un point singulier essentiel car $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=-\infty}^{0} \dfrac{z^n}{(-n)!}$.

Définition IV.22. — *Soit $z_0\in D$, un point singulier d'une fonction f holomorphe dans $D-\{z_0\}$; on appelle résidu de la fonction f au point z_0, noté $\mathrm{Res}\,(f\ ;\ z_0)$ le coefficient a_{-1} du développement de f en série de* LAURENT $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *au voisinage de z_0.*

2.3 Calcul des résidus dans le cas d'un pôle.

1) Si z_0 est un pôle simple de f, on a :

$$\boxed{\mathrm{Res}\,(f\ ;\ z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)}$$

Le développement en série de LAURENT de f au voisinage de z_0 s'écrit

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots = \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + g(z)$$

où g est holomorphe au point z_0.
D'où $(z-z_0)f(z) = a_{-1} + (z-z_0)g(z)$ et comme $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)g(z) = 0$, la formule est établie.

2) Cas particulier d'une fraction rationnelle $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$.

Dans ce cas $\mathrm{Res}\left(\dfrac{P}{Q}\ ;\ z_0\right) = \dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$. Comme $Q(z_0)=0$, on a $(z-z_0)\dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}$ et $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0} = Q'(z_0)$; enfin P est continue en z_0 d'où la formule.

3) Si z_0 est un pôle d'ordre p de f, on a :

$$\boxed{\operatorname{Res}(f\ ;\ z_0) = \frac{1}{(p-1)!}\Big[(z-z_0)^p f(z)\Big]^{(p-1)}_{(z=z_0)}}$$

Ainsi $f(z) = \dfrac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{z-z_0} + g(z)$ où $g(z)$ est holomorphe au point z_0 ; d'où $(z-z_0)^p f(z) = a_{-p} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{p-1} + (z-z_0)^p g(z)$.
En dérivant $(p-1)$ fois, on trouve $[(z-z_0)^p f(z)]^{(p-1)} = (p-1)!a_{-1} + (z-z_0)[h(z)]$, où h est holomorphe. Il suffit alors de faire tendre z vers z_0 pour trouver a_{-1}.

4) Remarquons que par les formules donnant les coefficients de la série de Laurent on a :

$$a_{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} f(t)\,dt.$$

5) Une méthode générale consiste à poser $t = z - z_0$ et de chercher le coefficient de $\dfrac{1}{t}$ dans le développement en série de Laurent de f au voisinage de 0.

3. Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

3.1 Théorème des résidus

Lemme IV.23. — *Soit f une fonction holomorphe dans le disque pointé $\{0 < |z-z_0| < R\}$, admettant z_0 comme point singulier et γ_r le cercle de centre z_0 et de rayon r. Alors, pour tout $r \in]0, R[$, on a :*

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f\ ;\ z_0)\,.$$

Preuve : On suppose que z_0 est un pôle d'ordre p. Donc

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

En posant $z - z_0 = re^{i\theta}$, on a $dz = ire^{i\theta}\,d\theta$ et

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = a_{-p}\int_0^{2\pi} ir^{1-p}e^{i(1-p)\theta}\,d\theta + \cdots + a_{-1}\int_0^{2\pi} i\,d\theta +$$
$$+ a_0\int_0^{2\pi} ire^{i\theta}\,d\theta + \cdots + a_n\int_0^{2\pi} ir^{n+1}e^{i(n+1)\theta}\,d\theta + \cdots = 2i\pi a_{-1}.$$

Si z_0 est un point singulier essentiel, on écrit $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \dfrac{a_{-1}}{z-z_0} + g(z)$, où g est holomorphe dans le disque pointé. Donc $\int_{\gamma_r} g(z)\,dz = 0$, car g admet une primitive dans ce disque, $\displaystyle\sum_{n\neq -1} \frac{a_n(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$ et il reste $\displaystyle\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = a_{-1}\int_{\gamma_r}\frac{dz}{z-z_0} = 2i\pi a_{-1}$.

Théorème IV.24 [Des résidus]. — *Soit K un compact régulier de $\mathbb{C}$ et $P = \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ les pôles inclus dans $\mathring{K}$ d'une fonction f holomorphe dans $K - P$. On a*

$$\boxed{\int_{\partial K} f(z)\,dz = 2i\pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f\ ;\ z_k)\,.}$$

Preuve : On choisit $r > 0$ tels que les disques $\Delta_k = \{|z - z_k| < r\}$ soient inclus dans $\mathring{K}$ et disjoints. On appelle $\Delta = K - \bigcup_{k=1}^{n}\Delta_k$ qui est un compact dont le bord se compose de

∂K, bord de K, et des cercles $\gamma_k = \{|z - z_k| = r\}$ parcourus dans le sens rétrograde. La fonction f étant holomorphe sur Δ, on a $\int_\Delta f(z)\,dz = 0 = \int_{\partial K} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz$, avec $\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f\ ;\ z_k)$; d'où la formule annoncée.

3.2 Calcul d'intégrales

$\boxed{\textbf{1er type}}$ $I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,dt$, où R est une fraction rationnelle sans pôle sur le cercle unité. On pose $z = e^{it}$; donc $dz = iz\,dt$, $\cos t = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ et $\sin t = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$. Calculons

$$I = \int_{|z|=1} R\left[\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right] \frac{dz}{iz} = 2i\pi \sum \operatorname{Res}\left\{\frac{1}{iz} R\left[\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{2z}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\right]\right\}$$

la somme étant étendue au pôles contenus dans le disque unité

Exemple IV.25. — $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = 2\pi \sum \operatorname{Res}\left(\frac{2i}{z^2 + 4iz - 1}\right)$. Il n'y a qu'un pôle contenu dans le disque unité $z_1 = -2i + i\sqrt{3}$; le résidu vaut $\dfrac{i}{z_1 + 2i} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

$\boxed{\textbf{2ème type}}$ $I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$, où R est une fraction rationnelle sans pôle réel (pour la convergence de l'intégrale). Pour que l'intégrale converge à l'infini, il suffit que $R(x) \sim \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \geq 2$ à l'infini ; ce qui donne $\lim_{|x|\to\infty} xR(x) = 0$. On intègre la fonction $R(z)$ sur le bord γ du demi-disque de centre 0 et de rayon r dans le demi-plan $y \geq 0$. Pour r assez grand, la fraction rationnelle $R(z)$ est holomorphe sur le bord γ et on calcule l'intégrale $\int_\gamma R(z)\,dz = 2i\pi \sum \operatorname{Res}\left[R(z)\right] = \int_{-r}^{+r} R(x)\,dx + \int_{\gamma_r} R(z)\,dz$, la somme étant étendue aux pôles de $R(z)$ contenus dans le demi-disque, γ_r étant le demi-cercle $|z| = r$. Lorsque $r \longrightarrow \infty$, la première intégrale donne I. Comme $\lim_{|z|\to\infty} zR(z) = 0$, d'après le lemme de JORDAN, on a $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 2i\pi\, 0 = 0$. Finalement $I = 2i\pi \sum \operatorname{Res}\left[R(z)\right]$, la somme étant étendue aux pôles dans le demi-plan supérieur.

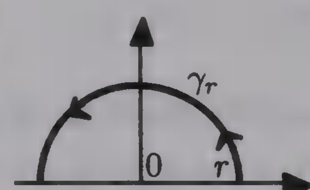

Figure IV.2

Exemple IV.26. — $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4}$. La fonction $R(z) = \dfrac{1}{1 + z^4}$ a quatre pôles sur le cercle unité, dont deux dans le demi-plan supérieur $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$. On a $\operatorname{Res}\left[R(z)\ ;\ z_k\right] = \dfrac{1}{4z_k^3} = \dfrac{z_k}{4z_k^4} = -\dfrac{z_k}{4}$ et $|zR(z)| = \left|\dfrac{z}{1 + z^4}\right| \to 0$, quand $|z| \to +\infty$, et

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{2i\pi}{2}\left[-\frac{1}{4}(z_1 + z_2)\right] = -\frac{i\pi}{4}(i\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$\boxed{\textbf{3ème type}}$ $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\,dx$ où $f(z)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $y \geq 0$, sauf en un nombre fini de points (en particulier $f(x)$ peut être une fraction rationnelle).

▷ **1er cas** : Si f n'a pas de points singuliers sur l'axe réel, alors $\int_{-r}^{+r} f(x)\,dx$ tend vers $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, si cette intégrale est convergente. En particulier, si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est absolument convergente, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\,dx$ converge elle aussi absolument (mais on peut n'avoir qu'une semi-convergence). Si $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2i\pi \sum \operatorname{Res}\left[f(z)e^{iz}\right]$, la somme étant étendue aux pôles de $f(z)e^{iz}$ dans le demi-plan supérieur.

Lemme IV.27 [JORDAN]. — *Soit $f(z)$ définie dans le demi-plan $y \geq 0$ et γ_r le demi-cercle de rayon r et de centre 0. Si $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$ alors $\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}\,dz = 0$.*

Preuve : Si $z = re^{i\theta}$, $iz = -r\sin\theta + ir\cos\theta$ et $\left|e^{iz}\right| = e^{-r\sin\theta}$, avec $M(r) = \sup_{\gamma_r}|f(z)|$, on a

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}\,dz\right| \le M(r)\int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta}r\,d\theta = 2M(r)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin\theta}r\,d\theta\,.$$

Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a l'encadrement suivant $\dfrac{2}{\pi} \le \dfrac{\sin\theta}{\theta} \le 1$. Donc $-\sin\theta \le -\dfrac{2}{\pi}\theta$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin\theta}r\,d\theta \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}r\theta}r\,d\theta = \frac{\pi}{2}$; d'où $\left|\displaystyle\int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}\,dz\right| \le \pi M(r) \to 0$, quand $r \to +\infty$.

On en déduit que $\displaystyle\int_\gamma f(z)e^{iz}\,dz = 2i\pi\sum \mathrm{Res}\left[f(z)e^{iz}\right] = \int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}\,dz + \int_{-r}^{+r} f(x)e^{ix}\,dx$;

d'où, en faisant tendre r vers $+\infty$, on $I = 2i\pi\sum \mathrm{Res}\left[f(z)e^{iz}\right]$, la somme étant faite pour tous les pôles dans le demi–plan supérieur.

Remarque IV.28. — On aurait de même $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-iz}\,dz = 2i\pi\mathrm{Res}\left\{f(z)e^{-iz}\right\}$, la somme étant étendue à tous les pôles dans le demi–plan inférieur.

Exemple IV.29. — $\displaystyle I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\Re e\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,dx.$

L'intégrale est absolument convergente; les pôles de $\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ sont $z = \pm i$ et seul $z = +i$ est dans le demi–plan supérieur. Comme $\lim_{|z|\to\infty} \dfrac{1}{1+z^2} = 0$, on a $I = \dfrac{2i\pi}{2}\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^{iz}}{1+z^2}\ ;\ i\right)$, avec $\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}\ ;\ i\right) = \lim_{z\to i}\dfrac{(z-i)e^{iz}}{z^2+1} = \dfrac{e^{-1}}{2i}$ et $I = \dfrac{\pi}{2e}$.

▷ **2nd cas :** On suppose que $f(z)$ a des points singuliers sur l'axe réel, par exemple que $f(z)$ a un pôle simple à l'origine; on modifie alors le chemin d'intégration en contournant 0 par un demi cercle γ_ε de centre 0 et de rayon ε. Si γ est le nouveau chemin, on a :

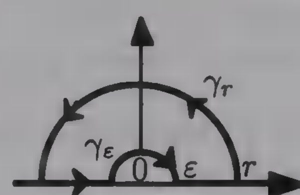

Figure IV.3

$$\int_\gamma f(z)e^{iz}\,dz = 2i\pi\sum \mathrm{Res}\left\{f(z)e^{iz}\right\}$$
$$= \int_\varepsilon^r f(x)e^{ix}\,dx + \int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}\,dz + \int_{-r}^{-\varepsilon} f(x)e^{ix}\,dx + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)e^{iz}\,dz\,.$$

On sait que, si $|f(z)| \to 0$ quand $|z| \to +\infty$, on a $\lim\limits_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}\,dz = 0$. Lorsque $\varepsilon \to 0$ et $r \to \infty$, on a $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to\infty}}\left[\int_\varepsilon^r f(x)e^{ix}\,dx + \int_{-r}^{-\varepsilon} f(x)e^{ix}\,dx\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\,dx = I$ et, d'après le lemme de Jordan, $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)e^{iz}\,dz = -i\pi\,\mathrm{Res}\left\{f(z)e^{iz}\ ;\ 0\right\}$.

Finalement $I = 2i\pi\sum \mathrm{Res}\left\{f(z)e^{iz}\right\} + i\pi\,\mathrm{Res}\left\{f(z)e^{iz}\ ;\ 0\right\}$, la première somme étant étendue aux pôles de $f(z)e^{iz}$ dans le demi–plan $y > 0$.

Exemple IV.30. — $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\Im m\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$. La fonction $\dfrac{e^{iz}}{z}$ n'a pas de pôles pour $y > 0$, donc $I = \dfrac{1}{2}\Im m\left[i\pi\left(\mathrm{Res}\,\dfrac{e^{iz}}{z}\ ;\ 0\right)\right] = \Im m\left(\dfrac{i\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{\textbf{4ème type}}$ $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha}\,dx$ $\quad 0 < \alpha < 1$, où R est une fraction rationnelle sans pôle sur le demi–axe réel $x \ge 0$. Cette intégrale converge toujours en 0. À l'infini, la convergence sera réalisée si $R(x) \sim \frac{1}{x^n}$, avec $n \geq 1$, soit si $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$. On considère $f(z) = \frac{R(z)}{z^\alpha}$ dans le plan privé du demi–axe réel $x \geq 0$. Comme $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ il faut préciser la détermination choisie pour $\ln z$, donc pour $\arg(z)$; on prendra$0 < \arg(z) < 2\pi$. On intègre $f(z)$ sur le contour γ tracé dans la *Figure V.4*. En se rappelant que l'argument de z passe de 0 à 2π, quand on parcourt le cercle γ_r, sur le segment $[r, \varepsilon]$ et sous l'axe Ox, on a $z^\alpha = e^{2i\pi\alpha} |z|^\alpha = x^\alpha e^{2i\pi\alpha}$. Et

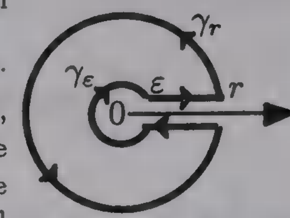

Figure IV.4

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum \text{Res}\left[\frac{R(z)}{z^\alpha}\right] = \int_\varepsilon^r \frac{R(x)}{x^\alpha}\,dx + \int_{\gamma_r} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,dz + \int_r^\varepsilon \frac{R(x)}{e^{2i\pi\alpha}x^\alpha}\,dx + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{R(z)}{e^{2i\pi\alpha}z^\alpha}\,dz.$$

D'après les lemmes de JORDAN, on a $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,dz = 0$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,dz = 0$; d'où

$2i\pi \sum \text{Res}\left[\frac{R(z)}{z^\alpha}\right] = (1 - e^{-2i\pi\alpha})I$, la somme étant étendue à tous les pôles dans $\mathbb{C} - \{x \geq 0\}$.

EXEMPLE IV.31. — Soit $\alpha \in]0,1[$ et $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$ · La fraction $R(z) = \frac{1}{1+z}$ a un seul pôle $z = -1$ et $\text{Res}\left[\frac{R(z)}{z^\alpha}\ ;\ -1\right] = \frac{1}{e^{2i\pi}}$, car $\arg(-1) = \pi$. D'où

$$I = \frac{2i\pi\, e^{-i\pi\alpha}}{1 - e^{-2i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\frac{e^{+i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2i}} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

$\boxed{\textbf{5ème type}}$ $I = \int_0^\infty R(x) \ln x\,dx$, où R est une fraction rationnelle sans pôle sur $\{x \geq 0\}$ telle que $\lim_{x\to\infty} xR(x) = 0$ (pour assurer la convergence de l'intégrale). On reprend le contour précédent sur lequel on intègre la fonction $f(z) = R(z)(\ln z)^2$. En effet si on intégrait $R(z)\ln z$, on aurait sur le segment $[r, \varepsilon]$ sous l'axe réel $R(x)(\ln x + 2i\pi)$ et les intégrales $\int_\varepsilon^r R(x) \ln x\,dx$ et $\int_r^\varepsilon R(x)(\ln x + 2i\pi)\,dx$ se neutraliseraient, ainsi on ne pourrait pas calculer I. On a :

$$\begin{aligned} 2i\pi \sum \text{Res}\left[R(z)(\ln z)^2\right] &= \int_\gamma f(z)\,dz \\ &= \int_\varepsilon^r R(x)(\ln x)^2\,dx + \int_{\gamma_r} R(z)(\ln z)^2\,dz \\ &\quad + \int_r^\varepsilon R(x)(\ln x + 2i\pi)^2\,dx + \int_{\gamma_\varepsilon} R(z)(\ln z + 2i\pi)^2\,dz \end{aligned}$$

Les lemmes de JORDAN donnent $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} R(z)(\ln z)^2\,dz = 0$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} R(z)(\ln z + 2i\pi)^2\,dz = 0$.
D'où $2i\pi \sum \text{Res}\left[R(z)(\ln z)^2\right] = -4i\pi I - 4\pi^2 \int_0^\infty R(x)\,dx$.
Si $R(x)$ est une fonction réelle, on aura $I = -\frac{1}{2}\Re e\left\{\sum \text{Res}\left[R(z)(\ln z)^2\right]\right\}$.

EXEMPLE IV.32. — Soit $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$. On intègre $\frac{(\ln z)^2}{1+z^2}$ sur le contour précédent. Il y a deux pôles simples $z = +i$ et $z = -i$, avec pour résidus :

$$\text{Res}\left[\frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\ ;\ z = +i\right] = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{(\ln z)^2}{1+z^2} = \frac{(\ln i)^2}{2i} = \frac{(i\frac{\pi}{2})^2}{2i} = -\frac{\pi^2}{4i}, \text{ car } \arg(i) = \frac{\pi}{2}\ ;$$

$$\text{Res}\left[\frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\ ;\ z = -i\right] = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{(\ln z)^2}{1+z^2} = \frac{(\ln -i)^2}{-2i} = \frac{(i\frac{3\pi}{2})^2}{-2i} = -\frac{9\pi^2}{4i}, \text{ car } \arg(-i) = \frac{3\pi}{2}.$$

On a $\lim \left|z\frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\right| = 0$, quand $|z| \to +\infty$ ou $|z| \to 0$. Les lemmes de JORDAN s'appliquent ; il reste $I = -\frac{1}{2}\Re e\left[i\frac{\pi^2}{4} - i\frac{9\pi^2}{4}\right] = 0$, ce que l'on savait déjà puisque $\int_0^1 f(x)dx = -\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Formulaire de trigonométrie

1) Fonctions circulaires

- $e^{it} = \cos t + i \sin t\,;\quad e^{-it} = \cos t - i \sin t$
  En particulier $\quad e^{i\pi} = -1\,;\quad e^{\frac{i\pi}{2}} = i$
  $\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right);\quad \sin t = \frac{1}{2}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$
  $(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + \sin nt,\quad$ où $n \in \mathbb{Z}$
  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
  $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
  $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$
  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin b \sin a$
  $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin b \sin a$
  $2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$
  $2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$
  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

- $\sin a + \sin b = 2 \sin \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$
  $\sin a - \sin b = 2 \sin \dfrac{a-b}{2} \cos \dfrac{a+b}{2}$
  $\cos a + \cos b = 2 \cos \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$
  $\cos a - \cos b = -2 \sin \dfrac{a+b}{2} \sin \dfrac{a-b}{2}$
  $\cos a + \sin a = \sqrt{2} \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - a\right) = \sqrt{2} \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + a\right)$
  $\cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + a\right) = \sqrt{2} \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - a\right)$

- $\sin^3 a = \dfrac{3}{4} \sin a - \dfrac{1}{4} \sin 3a\,;\quad \cos^3 a = \dfrac{3}{4} \cos a + \dfrac{1}{4} \cos 3a$

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}\,;\quad \tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
  $\sin 2a = \dfrac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}\,;\quad \cos 2a = \dfrac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$
  $\tan 2a = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}\,;\quad \tan a = \dfrac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} = \dfrac{1 - \cos 2a}{\sin 2a}$

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a\,;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a\,;\quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \dfrac{1}{\tan a}$

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a\,;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a\,;\quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\dfrac{1}{\tan a}$

- $\sin(\pi - a) = \sin a\,;\quad \cos(\pi - a) = -\cos a\,;\quad \tan(\pi - a) = -\tan a$

- $\sin(\pi + a) = -\sin a\,;\quad \cos(\pi + a) = -\cos a\,;\quad \tan(\pi + a) = \tan a$

a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin a$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos a$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan a$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0

2) Fonctions hyperboliques

- $e^t = \cosh t + \sinh t\,;\qquad e^{-t} = \cosh t - \sinh t$
  $\cosh t = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right);\quad \sinh t = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$
  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

- $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a$
  $\sinh(a-b) = \sinh a \cosh b - \sinh b \cosh a$
  $2\sinh a \cosh b = \sinh(a+b) + \sinh(a-b)$
  $\sinh 2a = 2\sinh a \cosh a$

- $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh b \sinh a$
  $\cosh(a-b) = \cosh a \cosh b - \sinh b \sinh a$
  $2\cosh a \cosh b = \cosh(a+b) + \cosh(a-b)$
  $2\sinh a \sinh b = \cosh(a-b) - \cosh(a-b)$
  $\cosh 2a = \cosh^2 a + \sinh^2 a = 2\cosh^2 a - 1 = 1 + 2\sinh^2 a$

- $\sinh a + \sinh b = 2\sinh\frac{a+b}{2}\cosh\frac{a-b}{2}$
  $\sinh a - \sinh b = 2\sinh\frac{a-b}{2}\cosh\frac{a+b}{2}$
  $\cosh a + \cosh b = 2\cosh\frac{a+b}{2}\cosh\frac{a-b}{2}$
  $\cosh a - \cosh b = -2\sinh\frac{a+b}{2}\sinh\frac{a-b}{2}$

- $\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}\,;$
  $\tanh(a-b) = \dfrac{\tanh a - \tanh b}{1 - \tanh a \tanh b}$
  $\sinh 2a = \dfrac{2\tanh a}{1 - \tanh^2 a}\,;\qquad \cosh 2a = \dfrac{1 + \tanh^2 a}{1 - \tanh^2 a}\,;$
  $\tanh 2a = \dfrac{2\tanh a}{1 + \tanh^2 a}$

Index terminologique

Après chaque terme figure le numéro de la page où il apparait dans le cours, le lecteur trouvera lui-même les applications dans les exercices.

Aubin Imprimeur
LIGUGÉ, POITIERS

Achevé d'imprimer en février 1996
N° d'impression L 50722
Dépôt légal février 1996
Imprimé en France

Cette collection est un ensemble de manuels de Mathématiques destinés aux étudiants en DEUG-Sciences. Chaque volume comprend le cours sous la forme la plus dépouillée — tout en gardant la rigueur mathématique —, des exercices en application du cours et leurs solutions détaillées, fruit de plusieurs années d'expérience d'enseignement en premier cycle.
Ainsi, l'étudiant peut travailler seul en s'entraînant à la résolution des exercices ou en complétant ses notes de cours.

Ce volume traite plus particulièrement de l'Analyse du second niveau ; on y trouvera les séries de Fourier, les séries entières, les intégrales multiples et, en annexe, le calcul d'intégrales par la méthode des résidus.

ISBN 2-7298-9659-7