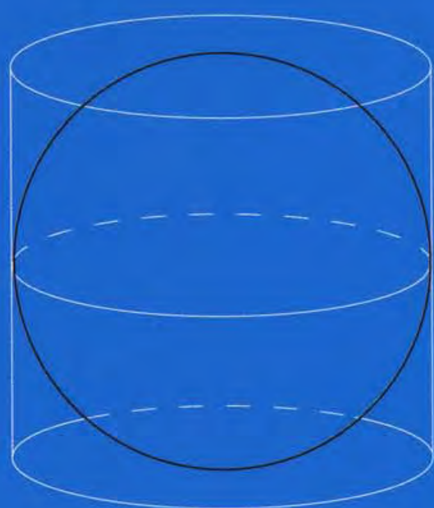
COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP //// Mathématiques

L3M1

Calcul intégral

Jacques Faraut



EDP SCIENCES

CALCUL INTÉGRAL

CALCUL INTÉGRAL

Jacques Faraut

Collection dirigée par Daniel Guin

EDP SCIENCES

17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

ISBN : 2-86883-912-6

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

La théorie de l'intégration s'est développée à partir du calcul des aires et des volumes. L'aire d'un rectangle est égale au produit $a \cdot b$ des longueurs des côtés, et, l'aire d'une réunion de deux parties disjointes étant égale à la somme des aires, l'aire d'un triangle est égale à la demi-somme du produit de la longueur d'un côté par la longueur de la hauteur correspondante. Ensuite l'aire d'un polygone s'obtient en le décomposant en une réunion disjointe de triangles. Pour mesurer l'aire d'un disque de rayon r on le considère comme une réunion d'une suite infinie croissante de polygones, et c'est ainsi qu'on montre que son aire est égale à πr^2 (r étant le rayon, et le nombre π étant défini comme le demi-périmètre d'un cercle de rayon 1). Une question se pose alors : peut-on mesurer l'aire d'une partie quelconque du plan ? Nous devons préciser la question : peut-on attribuer à chaque partie A du plan un nombre $\mu(A)$, l'aire de A, nombre réel positif ou nul, ou $+\infty$? Cette application μ doit posséder les propriétés qu'on attend de la mesure des aires :

(1) Si A est un rectangle dont les longueurs des côtés sont égales à a et b, alors $\mu(A) = a \cdot b$.

(2) Si $\{A_n\}$ est une suite de parties disjointes deux à deux, alors

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(3) Si A et B sont deux parties « égales », c'est-à-dire s'il existe une isométrie qui transforme A en B, alors $\mu(A) = \mu(B)$.

La réponse à cette question est négative, comme cela a été démontré par Vitali. Ceci conduit à modifier le problème posé. On n'exige plus de pouvoir mesurer l'aire de toute partie du plan, mais seulement celle d'une famille $\mathfrak{M}$ contenant les rectangles et stable par réunion dénombrable. Les ensembles de la famille $\mathfrak{M}$ sont appelés ensembles mesurables. Ainsi posé le problème admet une solution. Avant d'étudier la mesure des aires, nous considérerons la mesure de Lebesgue qui est la solution d'un problème analogue posé en dimension un. L'étape suivante est la construction de l'intégrale par approximation à partir de l'intégrale de fonctions étagées. Dans le cas de l'intégrale de Riemann, les fonctions étagées considérées sont les fonctions en escalier. En revanche, dans le cas de l'intégrale de Lebesgue, ce sont des fonctions étagées d'un type plus général : les fonctions mesurables étagées. Cette généralisation est essentielle car elle conduit aux énoncés fondamentaux de la théorie de l'intégration comme le théorème de convergence dominée de Lebesgue et celui de Riesz-Fischer, qui n'ont pas d'analogue dans le cas de l'intégrale de Riemann.

La présentation que nous avons choisie des éléments de base de la théorie de la mesure et de l'intégrale est proche de celle de l'excellent ouvrage de W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*. Le chapitre I est une présentation ensembliste aboutissant aux théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée de Lebesgue. C'est au chapitre II qu'il est montré qu'il existe une mesure sur la droite réelle pour laquelle la mesure d'un intervalle est égale à sa longueur. Les espaces fonctionnels L^p sont étudiés au chapitre III. Le théorème de Riesz-Fischer dit que ce sont des espaces normés complets, et ce résultat est fondamental pour les applications à l'analyse fonctionnelle. Le théorème de Fubini que nous voyons au chapitre IV permet le calcul des intégrales multiples considérées au chapitre V.

Dans la présentation fonctionnelle de la théorie de l'intégration, la définition de base est la mesure de Radon qui est une forme linéaire positive sur l'espace des fonctions continues à support compact. Le théorème de Riesz permet de relier les deux points de vue : ensembliste et fonctionnel. Nous présentons cette relation au chapitre VI dans le cas particulier de la droite réelle.

Nous avons particulièrement développé le chapitre VII sur les fonctions définies par des intégrales, car nous estimons que son contenu est important par ses applications à l'analyse. Nous étudions en particulier le comportement asymptotique d'intégrales par la méthode de Laplace et par celle de la phase stationnaire dans le cas des intégrales simples.

Les trois chapitres suivants, VIII, IX et X, contiennent les éléments de base de l'analyse harmonique en une variable : convolution sur le groupe additif des nombres réels et analyse de Fourier.

Le calcul intégral est un outil essentiel de l'analyse mathématique et du calcul des probabilités. Nous l'avons illustré en choisissant sept applications qui sont présentées dans le dernier chapitre. L'équation de la chaleur est importante historiquement. Ce sont en effet les travaux de Fourier sur cette équation qui sont à l'origine de l'analyse qui porte son nom. Les polynômes orthogonaux interviennent dans de nombreuses questions de physique mathématique, et leur étude fait appel à des domaines variés des mathématiques : algèbre linéaire, analyse complexe, théorie spectrale, analyse combinatoire. La solution du problème de l'isopérimètre est une belle application de l'analyse de Fourier à la géométrie.

Nous ne parlons pas dans ce livre des relations qui existent entre le calcul intégral et les notions de base du calcul des probabilités. Nous les avons cependant illustrées dans deux des compléments du chapitre XI : le jeu de pile ou face et la mesure de Lebesgue, et le théorème de la limite centrale.

Chacun des chapitres est suivi d'exercices. Certains d'entre eux constituent des compléments présentés sous forme de problèmes. La bibliographie est loin d'être exhaustive. Nous avons seulement indiqué quelques ouvrages classiques de la théorie de la mesure et de l'intégration. En plusieurs occasions, nous utilisons des résultats d'analyse fonctionnelle pour lesquels nous faisons référence au livre de C. Albert, *Topologie*, et aussi à celui de V. Avanissian, *Initiation à l'analyse fonctionnelle*. Les termes nouveaux sont définis dans le texte à leur première occurence et sont alors écrits en caractères italiques. L'index placé à la fin du livre permet de retrouver cette première occurence.

Ce livre s'adresse aux étudiants de licence de mathématiques. Il a été rédigé à partir des notes d'un cours donné à la faculté des sciences de Tunis, et de celles d'un cours donné à l'université Louis Pasteur de Strasbourg. Je tiens à remercier Daniel Guin de m'avoir encouragé à tirer de ces notes la matière de ce livre.

I

MESURE ET INTÉGRALE

L'un des principaux objectifs de ce cours de calcul intégral est la construction de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue. Nous commençons par dire ce qu'est une mesure. C'est une fonction d'ensemble. À une partie A d'un ensemble X on associe un nombre $\mu(A)$, la mesure de A. Immédiatement, une difficulté se présente car, en général, $\mu(A)$ n'est définie que pour certaines parties de X, appelées ensembles mesurables. On définit ensuite l'intégrale d'une fonction. Ce chapitre contient deux théorèmes fondamentaux du calcul intégral : le théorème de convergence monotone et le théorème de convergence dominée.

I.1. Mesure

Si X est un ensemble, une famille $\mathfrak{A}$ de parties de X est appelée *algèbre de Boole* si

- $\emptyset$ et X appartiennent à $\mathfrak{A}$;

- si A appartient à $\mathfrak{A}$, alors son complémentaire A^c aussi ;

- si A et B appartiennent à $\mathfrak{A}$, alors leur réunion $A \cup B$ et leur intersection $A \cap B$ aussi.

Un ensemble $\mathfrak{M}$ de parties de X est appelé *tribu* (ou σ-algèbre de Boole) si $\mathfrak{M}$ est une algèbre de Boole telle que, si $\{A_n\}$ est une suite d'éléments de $\mathfrak{M}$, alors leur réunion $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ appartient également à $\mathfrak{M}$. Le couple $(X, \mathfrak{M})$ d'un ensemble X et d'une tribu $\mathfrak{M}$ de parties de X est appelé *espace mesurable* et les parties appartenant à $\mathfrak{M}$ sont appelés *ensembles mesurables.*

De la définition d'une tribu on déduit immédiatement les propriétés suivantes.

Soit $(X, \mathfrak{M})$ un espace mesurable.

- Si A et B sont deux ensembles mesurables, alors leur différence $A \setminus B = A \cap (B^c)$ est aussi mesurable.

- Si $\{A_n\}$ est une suite d'ensembles mesurables, leur intersection est aussi mesurable car

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c.$$

Sur un ensemble X non vide, il existe toujours au moins deux tribus : la tribu constituée des deux parties $\emptyset$ et X, et la tribu $\mathfrak{P}(X)$ de toutes les parties de X. On dit qu'une tribu $\mathfrak{M}$ est plus petite qu'une tribu $\mathfrak{M}'$ si tout élément de $\mathfrak{M}$ appartient à $\mathfrak{M}'$. La tribu $\{\emptyset, X\}$ est la plus petite des tribus sur X, et $\mathfrak{P}(X)$ la plus grande. Une intersection quelconque de tribus est une tribu. Si $\mathcal{D}$ est un ensemble de parties de X, il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{D}$, à savoir l'intersection $\mathfrak{M}$ des tribus contenant $\mathcal{D}$. (Il en existe au moins une : $\mathfrak{P}(X)$.) On dit que $\mathfrak{M}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{D}$.

Si X est un espace topologique, on notera $\mathfrak{B}(X)$ la *tribu borélienne* de X, c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de X. Ses éléments sont appelés *ensembles boréliens*. Notons que tout ouvert, tout fermé est un ensemble borélien. Si $X = \mathbb{R}$, la tribu borélienne $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles, car tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts. Soit en effet Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et considérons les intervalles ouverts $I =]a, b[$ contenus dans Ω pour lesquels les extrémités a et b sont des nombres rationnels. Ces intervalles constituent une famille dénombrable et leur réunion est égale à Ω. Si $X = \mathbb{R}^2$, la tribu borélienne $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendrée par les rectangles car tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est une réunion dénombrable de rectangles ouverts. En effet tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ est la réunion des rectangles $R =]a, b[\times]c, d[$ contenus dans Ω pour lesquels les coordonnées a, b, c, d des sommets sont des nombres rationnels, et ces rectangles constituent une famille dénombrable. Plus généralement la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ est engendrée par les pavés. Rappelons qu'un *pavé* est un produit d'intervalles.

Si $(X, \mathfrak{M})$ est un espace mesurable, une fonction f définie sur X à valeurs dans $[-\infty, \infty]$ est dite *mesurable* si l'image réciproque par f de tout intervalle de $[-\infty, \infty]$ est mesurable. Pour que f soit mesurable il faut et suffit que, pour tout nombre réel α, l'ensemble

$$f^{-1}(]\alpha, \infty]) = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \tag{$*$}$$

soit mesurable. En effet, si f possède cette propriété, l'ensemble

$$f^{-1}([\alpha, \infty]) = \{x \mid f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \mid f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\}$$

est aussi mesurable. Par passage au complémentaire on montre que $f^{-1}([-\infty,\alpha])$ et $f^{-1}([-\infty,\alpha[)$ sont mesurables et par intersection que l'image réciproque par f de tout intervalle de $[-\infty,\infty]$ est mesurable. Notons que dans $(*)$ on peut remplacer $]\alpha,\infty]$ par $[\alpha,\infty]$, ou $[-\infty,\alpha[$, ou $[-\infty,\alpha]$.

Si f et g sont deux fonctions mesurables sur X à valeurs réelles, et si Φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles, alors la fonction h définie par

$$h(x)=\Phi\big(f(x),g(x)\big)$$

est mesurable. En effet, pour tout nombre réel α, l'ensemble

$$\Omega_\alpha=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid \Phi(u,v)>\alpha\}$$

est un ouvert, et est donc égal à une réunion dénombrable de rectangles ouverts

$$\Omega_\alpha=\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n,\qquad R_n=]a_n,b_n[\times]c_n,d_n[.$$

Les ensembles

$$\{x \mid \big(f(x),g(x)\big)\in R_n\}=\{x \mid a_n<f(x)<b_n\}\bigcap\{x \mid x<g(x)<d_n\}$$

sont mesurables, et de même l'ensemble

$$\{x \mid h(x)>\alpha\}=\{x \mid \big(f(x),g(x)\big)\in\Omega_\alpha\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \mid \big(f(x),g(x)\big)\in R_n\}$$

est mesurable. On en déduit que la somme et le produit de deux fonctions mesurables sont mesurables.

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $[-\infty,\infty]$. Alors la fonction $g=\sup_{n\geq 0} f_n$ est mesurable. En effet

$$\{x \mid g(x)>\alpha\}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\{x \mid f_n(x)>\alpha\}.$$

De même la fonction $g=\limsup_{n\to\infty} f_n$ est mesurable. En effet

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x)=\inf_{m\geq 0}\Big(\sup_{n\geq m} f_n(x)\Big).$$

Si pour tout x la suite $\{f_n(x)\}$ a une limite $f(x)$, alors la fonction f est mesurable.

Une fonction f à valeurs complexes est dite mesurable si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont mesurables.

Si X est un espace topologique et si $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$ est la tribu borélienne de X, une fonction mesurable est appelée *fonction borélienne*. Notons que les fonctions continues sont boréliennes.

Une fonction est dite *étagée* si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Une fonction mesurable étagée f sur un espace mesurable $(X, \mathfrak{M})$ est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables,

$$f = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i} \qquad (A_i \in \mathfrak{M}).$$

Rappelons que la *fonction caractéristique* χ_A d'une partie $A \subset X$ est la fonction qui est égale à 1 sur A et à 0 sur le complémentaire de A.

Proposition I.1.1. *Soit $(X, \mathfrak{M})$ un espace mesurable et soit f une fonction mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$. Il existe une suite croissante $\{u_n\}$ de fonctions mesurables étagées à valeurs dans $[0, \infty[$ telle que, pour tout $x \in X$,*

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = f(x).$$

Démonstration. Pour tout entier $n > 0$, et pour $1 \leq i \leq n2^n$, posons

$$A_{n,i} = \left\{ x \;\middle|\; \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\},$$
$$B_n = \{x \mid f(x) \geq n\}.$$

Ces ensembles sont mesurables. Soit u_n la fonction mesurable étagée définie par

$$u_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{A_{n,i}} + n\chi_{B_n}.$$

Montrons que $u_n(x) \leq u_{n+1}(x)$. Pour cela on remarque que, quand on passe de n à $n+1$, chaque ensemble $A_{n,i}$ est partagé en deux,

$$A_{n,i} = A_{n+1,2i-1} \cup A_{n+1,2i}.$$

Si $x \in A_{n,i}$, $u_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$, et

$$\text{si } x \in A_{n+1,2i-1}, \;\; u_{n+1}(x) = \frac{2i-2}{2^{n+1}} = \frac{i-1}{2^n},$$
$$\text{si } x \in A_{n+1,2i}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{2i-1}{2^{n+1}} > \frac{i-1}{2^n}.$$

D'autre part, B_n est la réunion de B_{n+1} et des ensembles $A_{n+1,i}$, i variant de $n2^{n+1}+1$ à $(n+1)2^{n+1}$. Si $x \in B_n$, $u_n(x) = n$, et

$$\begin{aligned} &\text{si } x \in B_{n+1}, \quad u_{n+1}(x) = n+1 > n, \\ &\text{si } x \in A_{n+1,i}, \ u_{n+1}(x) = \frac{i-1}{2^{n+1}} \geq n \qquad (n2^{n+1}+1 \leq i \leq (n+1)2^{n+1}). \end{aligned}$$

Montrons maintenant qu'en tout point x la suite $\{u_n(x)\}$ converge vers $f(x)$. En effet, si $f(x) < \infty$, pour $n > f(x)$,

$$f(x) - u_n(x) \leq \frac{1}{2^n},$$

et, si $f(x) = \infty$, $u_n(x) = n$. □

Remarquons que si la fonction f est bornée ($f(x) \leq M < \infty$), la suite $\{u_n\}$ converge vers f uniformément.

Une *mesure* sur un espace mesurable $(X, \mathfrak{M})$ est une application μ de $\mathfrak{M}$ dans $[0, \infty]$ vérifiant
- $\mu(\emptyset) = 0$,
- si A et B sont deux ensembles mesurables disjoints,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

- si $\{A_n\}$ est une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints,

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

La somme du second membre peut être égale à $+\infty$, si l'un des nombres $\mu(A_n)$ est égale à $+\infty$, ou si la série est divergente.

Le nombre $\mu(A)$ est appelé la mesure de l'ensemble mesurable A. La mesure $\mu(X)$ de X est appelée la *masse totale* de la mesure μ. Un *espace mesuré* est un triplet $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ où μ est une mesure définie sur l'espace mesurable $(X, \mathfrak{M})$.

Soit X un ensemble et $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}(X)$ la tribu de toutes les parties de X. Pour $x_0 \in X$, la *mesure de Dirac* δ_{x_0} est définie par

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{matrix} 1 \text{ si } x_0 \in E \\ 0 \text{ sinon.} \end{matrix}$$

La *mesure de comptage* μ est définie par $\mu(E) = \#(E)$, où $\#(E)$ désigne le nombre d'éléments de E.

Soit $\{x_n\}$ une suite de points de X et $\{\alpha_n\}$ une suite de nombres ≥ 0. Posons

$$\mu(E) = \sum_{\{n|x_n \in E\}} \alpha_n.$$

Ce nombre est bien défini,

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_E(x_n),$$

et μ est une mesure sur $(X, \mathfrak{M})$. Pour le vérifier considérons une suite $\{A_k\}$ d'ensembles deux à deux disjoints, et soit E leur réunion. Alors

$$\chi_E(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}(x),$$

et

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}(x) \Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{A_k}(x) \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait suivant : si $\{u_{pq}\}$ est une suite double de nombres ≥ 0, alors

$$\sum_{p=1}^{\infty} \Big(\sum_{q=1}^{\infty} u_{pq} \Big) = \sum_{q=1}^{\infty} \Big(\sum_{p=1}^{\infty} u_{pq} \Big) \ (\leq +\infty).$$

Cette égalité signifie que soit les deux membres sont finis et égaux, soit ils sont tous les deux infinis. Une telle mesure est appelée *mesure discrète*.

Si X est un espace topologique et $\mathfrak{B}$ est la tribu borélienne de X, une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathfrak{B})$ est appelée *mesure borélienne*.

Soient $X = \mathbb{R}$ et $\mathfrak{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Nous montrerons au chapitre II qu'il existe une unique mesure λ sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ telle que, si I est un intervalle d'extrémités a et b,

$$\lambda(I) = b - a.$$

Cette mesure s'appelle la *mesure de Lebesgue* de $\mathbb{R}$. Nous verrons d'autres exemples importants de mesures au chapitre V.

I.2. Intégrale des fonctions positives

Nous aurons à considérer des fonctions prenant la valeur $+\infty$ et des ensembles de mesure infinie. Nous adoptons les conventions suivantes :

$$\begin{aligned}
&a+\infty=\infty+a=\infty, \text{ si } a\in[0,\infty],\\
&a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty, \text{ si } a\in]0,\infty],\\
&0\cdot\infty=\infty\cdot 0=0.
\end{aligned}$$

Fixons un espace mesuré $(X,\mathfrak{M},\mu)$. Nous définissons d'abord l'intégrale d'une fonction mesurable étagée, puis cette définition sera étendue au cas d'une fonction mesurable positive par passage à la borne supérieure.

Soit f une fonction mesurable étagée à valeurs dans $[0,\infty]$, soient $\alpha_1,\dots,\alpha_N$ les valeurs prises par f et

$$E_j=\{x\in X \mid f(x)=\alpha_j\} \quad (j=1,\dots,N).$$

L'intégrale de f est définie par

$$\int_X f\,d\mu=\sum_{j=1}^N \alpha_j\mu(E_j).$$

Si f est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables,

$$f=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i},$$

alors

$$\int_X f\,d\mu=\sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i).$$

Il existe en effet des ensembles mesurables disjoints C_k tels que tout ensemble A_i soit une réunion de certains des ensembles C_k,

$$\chi_{A_i}=\sum_{k=1}^p \varepsilon_{ik}\chi_{C_k},$$

où les nombres ε_{ik} sont égaux à 0 ou 1. Par suite

$$\mu(A_i)=\sum_{k=1}^p \varepsilon_{ik}\mu(C_k).$$

La fonction f s'écrit

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \Big(\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_{ik} \chi_{C_k} \Big) = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{ik} \Big) \chi_{C_k}.$$

Si x appartient à l'ensemble C_k, alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{ik}.$$

L'ensemble E_j est donc égal à la réunion des ensembles C_k pour lesquels $\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{ik} = \alpha_j$. Par suite l'intégrale de f s'écrit

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \mu(E_j) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \Big(\sum_{\{k \mid \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{ik} = \alpha_j\}} \mu(C_k) \Big) = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{ik} \Big) \mu(C_k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \Big(\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_{ik} \mu(C_k) \Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i). \end{aligned}$$

Soit maintenant f une fonction mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$; l'*intégrale* de f est définie par

$$\int_X f \, d\mu = \sup \Big\{ \int_X u \, d\mu \;\Big|\; u \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{M}),\ 0 \leq u \leq f \Big\},$$

où $\mathcal{E}(X, \mathfrak{M})$ désigne l'espace des fonctions mesurables étagées définies sur X. C'est un nombre réel positif ou nul, ou $+\infty$.

On vérifie facilement les propriétés suivantes de l'intégrale. Si f et g sont deux fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$, et si $f \leq g$, alors

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

Si f est une fonction mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$ et si λ est un nombre réel ≥ 0,

$$\int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu.$$

Si E est un ensemble mesurable et si f est une fonction mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$, on note

$$\int_E f \, d\mu = \int_X f \chi_E \, d\mu.$$

Si $\mu(E) = 0$, alors $\int_E f \, d\mu = 0$.

En revanche, l'additivité de l'intégrale n'est pas évidente. Elle sera démontrée en utilisant le théorème fondamental suivant.

Théorème I.2.1 **(Théorème de convergence monotone (ou théorème de Beppo-Levi)).** *Soit $\{f_n\}$ une suite croissante de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$:*

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \qquad (x \in X, \; n \in \mathbb{N}).$$

Posons

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Alors la fonction f est mesurable et

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme I.2.2. *Soit u une fonction mesurable étagée à valeurs dans $[0, \infty]$. Pour un ensemble mesurable E, on pose*

$$\nu(E) = \int_E u \, d\mu.$$

Alors ν est une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathfrak{M})$.

Démonstration. La fonction u s'écrit

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i},$$

avec $a_i \geq 0$, $A_i \in \mathfrak{M}$. Soit $\{E_k\}$ une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints et soit E leur réunion, alors

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_k) \Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap E_k) \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k). \end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème I.2.1. Comme limite simple de la suite des fonctions mesurables f_n, la fonction f est mesurable. La suite des intégrales $\int_X f_n d\mu$ est croissante ; soit a sa limite. Puisque $f_n \leq f$,

$$\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu,$$

et par suite

$$a \leq \int_X f \, d\mu.$$

Soit u une fonction mesurable étagée telle que $0 \leq u \leq f$. Nous allons montrer que

$$\int_X u \, d\mu \leq a,$$

ce qui implique

$$\int_X f \, d\mu \leq a,$$

et le théorème sera démontré. Soit c un nombre réel, $0 < c < 1$. Posons

$$E_n = \{x \in X \mid f_n(x) \geq cu(x)\}.$$

Les ensembles E_n sont mesurables, $E_n \subset E_{n+1}$, et

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X.$$

D'autre part

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq c \int_{E_n} u \, d\mu.$$

D'après le lemme

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_n} u \, d\mu = \int_X u \, d\mu,$$

et par suite

$$a \geq c \int_X u \, d\mu.$$

Cette inégalité a lieu pour tout c, $0 < c < 1$, donc $a \geq \int_X u \, d\mu$ et $a \geq \int_X f \, d\mu$. $\square$

Il existe un énoncé relatif à une suite décroissante de fonctions mesurables. Voir à ce sujet l'exercice 1.

Corollaire I.2.3 (Lemme de Fatou). *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$, alors*

$$\int_X \big(\liminf_{n\to\infty} f_n\big)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Démonstration. La suite des fonctions

$$g_k = \inf_{n \geq k} f_n$$

est croissante, de limite $\liminf_{n\to\infty} f_n$. La suite des nombres

$$a_k = \inf_{n\geq k} \int_X f_n \, d\mu$$

est croissante de limite $\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$. Pour $n \geq k$, $g_k \leq f_n$, donc

$$\int_X g_k \, d\mu \leq a_k,$$

et d'après le théorème de convergence monotone (I.2.1)

$$\lim_{k\to\infty} \int_X g_k d\mu = \int_X \big(\liminf_{n\to\infty} f_n\big)\, d\mu.$$

Nous obtenons finalement

$$\int_X \big(\liminf_{n\to\infty} f_n\big)\, d\mu \leq \lim_{k\to\infty} a_k = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu. \qquad \square$$

L'inégalité peut être stricte comme le montre l'exemple suivant : soient $X =]0, \infty[$, et $f_n(x) = ne^{-nx}$, alors

$$\int_0^\infty f_n(x)dx = 1, \quad \forall x > 0, \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Nous pouvons maintenant montrer l'additivité de l'intégrale.

Proposition I.2.4. *Soient f et g deux fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$. Alors*

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

Démonstration. Si f et g sont étagées,

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{p} b_j \chi_{B_j} \quad (A_i, B_j \in \mathfrak{M}),$$

alors

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)\, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (a_i + b_j)\mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{p} b_j \mu(B_j) = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.\end{aligned}$$

Si f et g sont mesurables, il existe des suites croissantes de fonctions mesurables étagées u_n et v_n telles que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} v_n(x) = g(x).$$

Pour tout n,

$$\int_X (u_n + v_n)\, d\mu = \int_X u_n\, d\mu + \int_X v_n\, d\mu,$$

et d'après le théorème de convergence monotone, quand n tend vers l'infini,

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu. \qquad \square$$

Cette propriété d'additivité se généralise comme suit.

Théorème I.2.5. *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$. La fonction F définie par*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

est mesurable et

$$\int_X F d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Démonstration. Posons

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

D'après la proposition précédente,

$$\int_X F_n d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k d\mu.$$

La suite des fonctions F_n est croissante de limite F, donc, d'après le théorème de convergence monotone (I.2.1),

$$\int_X F\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X F_n\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k\, d\mu. \qquad \square$$

Soient μ une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathfrak{M})$ et h une fonction mesurable ≥ 0 sur X. Pour un ensemble mesurable E, posons

$$\nu(E) = \int_E h\, d\mu.$$

Alors ν est une mesure sur $(X, \mathfrak{M})$. On dit que ν est la mesure de *densité* h par rapport à μ.

I.3. Fonctions intégrables

Soit $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace mesuré. Une fonction f définie sur X à valeurs complexes est dite *intégrable* si elle est mesurable et si

$$\int_X |f|\, d\mu < \infty.$$

Si f est à valeurs réelles, l'*intégrale* de f est par définition le nombre

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu,$$

et si f est à valeurs complexes, $f = u + \mathrm{i}v$, où u et v sont des fonctions à valeurs réelles,

$$\int_X f\, d\mu = \int_X u\, d\mu + \mathrm{i} \int_X v\, d\mu.$$

L'ensemble $\mathcal{L}(X, \mathfrak{M}, \mu)$ des fonctions intégrables est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et, si f et g sont intégrables, $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu,$$
$$\int_X (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu.$$

Si $(X, \mathfrak{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue que nous étudierons en II.2, et quand il sera nécessaire de le préciser, on dira *intégrable au sens de Lebesgue*, pour distinguer cette notion de celle de fonction intégrable au sens de Riemann. Nous verrons en II.3 qu'une fonction intégrable au sens de Riemann est intégrable au sens de Lebesgue. S'agissant de l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$, nous nous permettrons d'utiliser la notation classique

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx,$$

au lieu de

$$\int_{]\alpha,\beta[} f d\lambda.$$

Proposition I.3.1. *Si f est une fonction intégrable,*

$$\Big|\int_X f\,d\mu\Big| \leq \int_X |f|\,d\mu.$$

Démonstration. Il existe un nombre complexe α de module un tel que

$$\int_X f\,d\mu = \alpha\Big|\int_X f\,d\mu\Big|.$$

Notons que la partie réelle de $\bar{\alpha}f$, notée $\Re(\bar{\alpha}f)$, vérifie l'inégalité $\Re(\bar{\alpha}f) \leq |f|$, et par suite

$$\begin{aligned}\Big|\int_X f\,d\mu\Big| &= \bar{\alpha}\int_X f\,d\mu = \int_X \bar{\alpha}f\,d\mu \\ &= \int_X \Re(\bar{\alpha}f)\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu.\end{aligned}$$ □

Voici le deuxième théorème fondamental de la théorie de l'intégration, le théorème de convergence dominée. Nous en donnons d'abord un premier énoncé provisoire.

Théorème I.3.2. *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions intégrables vérifiant :*
- en tout point x la suite $\{f_n(x)\}$ a une limite $f(x)$,
- il existe une fonction positive intégrable g telle que, pour tout n et tout x,

$$|f_n(x)| \leq g(x).$$

Alors la fonction f est intégrable et

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

Démonstration. La fonction f, étant limite simple d'une suite de fonctions mesurables, est mesurable, et, puisque $|f| \leq g$, la fonction f est intégrable. Nous allons montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

L'énoncé s'en déduira puisque

$$\left| \int_X f_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f|\, d\mu.$$

En appliquant le lemme de Fatou à la suite des fonctions

$$h_n = 2g - |f_n - f|,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_X 2g\, d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|)\, d\mu \\ &= \int_X 2g\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu. \end{aligned}$$

Donc

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0. \qquad \square$$

Un ensemble N est dit *négligeable* s'il est mesurable et s'il est de mesure nulle. Une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable. On dit qu'une propriété P a lieu *presque partout* sur un ensemble E s'il existe un ensemble négligeable N tel que la propriété ait lieu en tout point de $E \setminus N$. Par exemple on dit que deux fonctions f et g sont égales presque partout, et on note

$$f(x) = g(x) \qquad p.p.,$$

s'il existe un ensemble négligeable N tel que $f(x) = g(x)$ en tout point du complémentaire de N. Si f et g sont deux fonctions intégrables égales presque partout, leurs intégrales sont égales. De même on dit qu'une suite de fonctions $\{f_n\}$ converge vers f presque partout, et on note

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad p.p.,$$

s'il existe un ensemble négligeable N tel que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

en tout point x du complémentaire de N.

Proposition I.3.3. *Soit f une fonction mesurable à valeurs dans $[0,\infty]$.*
(i) *Pour tout nombre $\alpha > 0$,*

$$\mu\big(\{x \mid f(x) \geq \alpha\}\big) \leq \frac{1}{\alpha}\int_X f\,d\mu.$$

(ii) *Si $\int_X f d\mu = 0$, alors f est nulle presque partout.*

Démonstration. Posons

$$E_\alpha = \{x \mid f(x) \geq \alpha\},$$

alors $f \geq \alpha\chi_{E_\alpha}$, et donc

$$\int_X f\,d\mu \geq \alpha\mu(E_\alpha).$$

Si $\int_X f\,d\mu = 0$, alors pour tout $\alpha > 0$, $\mu(E_\alpha) = 0$, et l'ensemble

$$\{x \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\frac{1}{n}}$$

est négligeable. □

Si f est une fonction mesurable à valeurs dans $[0,\infty]$ telle que

$$\int_X f\,d\mu < \infty,$$

alors f est finie presque partout, c'est-à-dire que l'ensemble

$$N = \{x \mid f(x) = \infty\}$$

est négligeable.

Dans la suite nous serons amenés à considérer des fonctions f qui ne sont définies que presque partout, c'est-à-dire dans le complémentaire d'un ensemble négligeable. Une fonction f définie dans le complémentaire d'un ensemble négligeable N est dite mesurable si la fonction $\hat{f}$, définie par

$$\hat{f}(x) = f(x) \text{ si } x \notin N,\ \ \hat{f}(x) = 0 \text{ si } x \in N,$$

est mesurable. De même f est dite intégrable si $\hat{f}$ est intégrable, et on pose alors $\int_X f d\mu = \int_X \hat{f} d\mu$.

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue peut être reformulé de la façon suivante.

Théorème I.3.4 **(Théorème de convergence dominée).** *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions intégrables vérifiant*

- pour presque tout x la suite $\{f_n(x)\}$ a une limite $f(x)$,

- il existe une fonction positive intégrable g telle que, pour tout n et presque tout x,

$$|f_n(x)| \leq g(x).$$

Alors la fonction f (qui en général n'est définie que presque partout) est intégrable et

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Théorème I.3.5 **(Intégration terme à terme d'une série).** *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables.*

(i) *Alors*

$$\int_X \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \Big) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu.$$

Ou bien les deux membres sont égaux à un nombre réel fini ≥ 0, ou bien ils sont tous deux infinis.

(ii) *Si les deux membres sont finis, chaque fonction f_n est intégrable, et la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge presque partout. Sa somme est une fonction intégrable et

$$\int_X \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Démonstration. (a) Posons

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

D'après le théorème sur l'intégration terme à terme d'une série de fonctions positives (I.2.5),

$$\int_X G d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu.$$

(b) Si G est intégrable, $G(x)$ est fini presque partout, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

converge presque partout, et il en est de même de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Notons $F(x)$ la somme de cette série. La fonction F est définie presque partout. Posons

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Pour presque tout x,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

et

$$|F_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leq G(x).$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée (I.3.4) :

$$\begin{aligned}\int_X F d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X F_n d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu.\end{aligned}$$ □

En général, il se peut qu'une partie d'un ensemble négligeable ne soit pas mesurable. Si cependant c'est le cas, on dit que l'espace mesuré $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ est *complet*. S'il n'est pas complet il est possible de le compléter. On définit la *tribu complétée* comme suit : une partie $E \subset X$ appartient à $\mathfrak{M}'$ s'il existe $A, B \in \mathfrak{M}$ tels que

$$A \subset E \subset B,\ \mu(B \setminus A) = 0,$$

et on pose $\mu'(E) = \mu(A)$. Alors $\mathfrak{M}'$ est une tribu, et μ' est une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathfrak{M}')$. Pour le montrer considérons une suite $\{E_n\}$ d'ensembles de $\mathfrak{M}'$. Pour tout n il existe des ensembles A_n et B_n de $\mathfrak{M}$ tels que

$$A_n \subset E_n \subset B_n, \quad \mu(B_n \setminus A_n) = 0.$$

Alors
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$
et
$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = 0$$
puisque
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n).$$
On montre aussi que $(X, \mathfrak{M}', \mu')$ est un espace mesuré complet.

Exercices

Exercice I.1. Soit $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Soit $\{A_n\}$ une suite décroissante d'ensembles mesurables. Montrer que, si $\mu(A_1) < \infty$, alors
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$
Est-ce encore vrai sans faire l'hypothèse $\mu(A_1) < \infty$?

b) Soit $\{f_n\}$ une suite décroissante de fonctions mesurables ≥ 0. Montrer que, si f_1 est intégrable,
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \big(\lim_{n\to\infty} f_n\big) \, d\mu.$$
Est-ce encore vrai sans faire l'hypothèse que f_1 est intégrable ?

Exercice I.2. Soit $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace mesuré et soit $\{A_n\}$ une suite d'ensembles mesurables. Pour un entier $m \geq 1$ on note B_m l'ensemble des $x \in X$ qui appartiennent à au moins m des ensembles A_n. Montrer que B_m est mesurable et que
$$\mu(B_m) \leq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Exercice I.3. Soit $(X, \mathfrak{M})$ un espace mesurable, et soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles ou complexes. Montrer que l'ensemble des points $x \in X$ où la suite $\{f_n(x)\}$ est convergente et mesurable.

Indication : on pourra montrer que l'ensemble des points $x \in X$ où la suite $\{f_n(x)\}$ est de Cauchy et mesurable.

Exercice I.4. Montrer que, pour $\alpha, \beta > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{x\mathrm{e}^{-\alpha x}}{1-\mathrm{e}^{-\beta x}} dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(\alpha+\beta n)^2}.$$

Exercice I.5. Soient $\alpha, \beta > 0$.

a) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\beta} dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{\alpha+\beta n}.$$

Indication : on pourra utiliser l'identité

$$\frac{1}{1-t} = 1 + \cdots + t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

En déduire que

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2, \qquad \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

b) Montrer que, si $0 < \alpha < 1$,

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

Exercice I.6. Le but de cet exercice est d'évaluer l'*intégrale de Gauss*

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

a) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \Big(1 - \frac{x^2}{n}\Big)^n dx = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\, dx.$$

Vérifier que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \Big(1 - \frac{x^2}{n}\Big)^n dx = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta\, d\theta.$$

b) L'*intégrale de Wallis* I_m est définie par

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \theta\, d\theta,$$

et on établit que

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{\pi}{2}, \qquad I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}.$$

Montrer que

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{2n},$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1,$$

et que

$$I_m \sim \sqrt{\frac{\pi}{m}} \quad (m \to \infty).$$

c) En déduire que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Exercice I.7. Soient $\alpha > -1$, $\beta \geq 0$. Montrer que

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^m x^\alpha (\ln x)^\beta \Big(1 - \frac{x}{m}\Big)^m dx = \int_0^\infty x^\alpha (\ln x)^\beta \mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

En déduire que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \ln x \, dx = -\gamma,$$

où γ est la constante d'Euler définie par

$$\gamma = \lim_{m \to \infty} \Big(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln m \Big).$$

II

MESURE DE LEBESGUE

Nous allons montrer dans ce chapitre qu'il existe une mesure sur la tribu borélienne de la droite réelle telle que la mesure d'un intervalle soit égale à sa longueur. C'est la mesure de Lebesgue de la droite réelle. Pour cela nous établirons d'abord un théorème de prolongement qui sera aussi utilisé ultérieurement pour la construction du produit de deux mesures au chapitre IV.

II.1. Un théorème de prolongement

Soit X un ensemble et $\mathfrak{A}$ une algèbre de Boole de parties de X. Dans cette section les ensembles de $\mathfrak{A}$ seront appelés ensembles élémentaires, et une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles élémentaires sera appellée fonction élémentaire.

Théorème II.1.1. *Soit μ une application*

$$\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty],$$

telle que, si $\{A_n\}$ est une suite d'ensembles de $\mathfrak{A}$ deux à deux disjoints dont la réunion A est aussi un ensemble élémentaire, alors

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

On suppose que μ est σ-finie, c'est-à-dire qu'il existe une suite d'ensembles X_n de $\mathfrak{A}$ tels que, pour tout n, $\mu(X_n) < \infty$, et dont la réunion est égale à X. Alors μ se prolonge de façon unique en une mesure sur la tribu $\mathfrak{M}$ engendrée par $\mathfrak{A}$.

Ce prolongement, que nous noterons μ aussi, possède les propriétés suivantes.

(1) *Soit E un ensemble mesurable. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite $\{A_n\}$ d'ensembles élémentaires telle que*

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(E) + \varepsilon.$$

(2) *Soit f une fonction intégrable, relativement à l'espace mesuré $(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions élémentaires intégrables telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

Démonstration. L'unicité résulte de la remarque suivante : si μ et ν sont deux mesures sur l'espace mesurable $(X, \mathfrak{M})$, les ensembles mesurables E pour lesquels $\mu(E) = \nu(E)$ constituent une sous-tribu de $\mathfrak{M}$. Ainsi, si les mesures μ et ν coïncident sur une famille d'ensembles qui engendre $\mathfrak{M}$, elles sont égales.

La démonstration de l'existence se fait en plusieurs étapes.

(a) *Soit $\{A_n\}$ une suite d'ensembles élémentaires dont la réunion contient un ensemble élémentaire A, alors*

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Posons

$$B_n = A \bigcap A_n,$$
$$C_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \setminus \bigcap_{k=1}^{n-1} B_k, \quad C_1 = B_1.$$

Les ensembles C_n sont élémentaires, deux à deux disjoints, et

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \quad C_n \subset B_n \subset A_n,$$

donc

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

On définit la *mesure extérieure* $\mu^*(E)$ d'une partie E de X par

$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_n) \;\middle|\; A_n \in \mathfrak{A},\ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

D'après ce qui précède, si E est un ensemble élémentaire, alors $\mu^*(E) = \mu(E)$.

(b) *Si $\{E_n\}$ est une suite de parties de X, de réunion E, alors*

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Si $\mu^*(E_n) = \infty$ pour un certain n, c'est évident. Supposons que $\mu^*(E_n) < \infty$ pour tout n. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout n il existe une suite d'ensembles élémentaires $A_{n,k}$ telle que

$$E_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) \leq \mu^*(E) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Puisque

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k},$$

il en résulte que

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Cette inégalité ayant lieu pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

(c) La *différence symétrique* de deux parties A et B de X est l'ensemble $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, ce qui peut se traduire par $\chi_{A\Delta B} = |\chi_A - \chi_B|$. Définissons l'*écart* de A et B par

$$\delta(A, B) = \mu^*(A\Delta B).$$

On établit sans peine les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned}
\delta(A,B) &\leq \delta(A,C)+\delta(C,B),\\
\delta(A_1\cup A_2, B_1\cup B_2) &\leq \delta(A_1,B_1)+\delta(A_2,B_2),\\
\delta(A_1\cap A_2, B_1\cap B_2) &\leq \delta(A_1,B_1)+\delta(A_2,B_2),\\
\delta(A_1\setminus A_2, B_1\setminus B_2) &\leq \delta(A_1,B_1)+\delta(A_2,B_2),\\
|\mu^*(A)-\mu^*(B)| &\leq \delta(A,B).
\end{aligned}$$

Une partie E de X est dite *intégrable* s'il existe une suite d'ensembles élémentaires A_n tels que $\mu(A_n)<\infty$ pour tout n, et

$$\lim_{n\to\infty}\delta(A_n,E)=0.$$

Si E et F sont des ensembles intégrables, alors $E\cup F$, $E\cap F$ et $E\setminus F$ sont intégrables. Soit E une partie de X. S'il existe une suite $\{E_n\}$ d'ensembles intégrables telle que

$$\lim_{n\to\infty}\delta(E_n,E)=0,$$

alors E est intégrable.

Notons $\mathfrak{M}'$ l'ensemble des parties de X qui sont réunions de suites d'ensembles intégrables. Nous allons montrer que $\mathfrak{M}'$ est une tribu, et que la restriction de μ^* à $\mathfrak{M}'$ est une mesure sur l'espace mesurable $(X,\mathfrak{M}')$.

(d) *Si A et B sont deux ensembles intégrables, alors*

$$\mu^*(A)+\mu^*(B)=\mu^*(A\cup B)+\mu^*(A\cap B).$$

Il existe deux suites $\{A_n\}$ et $\{B_n\}$ d'ensembles élémentaires telles que, pour tout n, $\mu(A_n)<\infty$, $\mu(B_n)<\infty$, et

$$\lim_{n\to\infty}\delta(A_n,A)=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\delta(B_n,B)=0.$$

Des propriétés de l'écart δ il résulte que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\delta(A_n\cup B_n, A\cup B)&=0,\\
\lim_{n\to\infty}\delta(A_n\cap B_n, A\cap B)&=0,
\end{aligned}$$

et, pour tout n,

$$\mu^*(A_n)+\mu^*(B_n)=\mu^*(A_n\cup B_n)+\mu^*(A_n\cap B_n).$$

La relation annoncée s'en déduit par passage à la limite.

(e) *Si* $\{E_n\}$ *est une suite d'ensembles intégrables deux à deux disjoints de réunion* E*,*

$$\mu^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

D'après (b),

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

D'après (d), pour tout N,

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(E_n),$$

donc

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{N} \mu^*(E_n),$$

et par suite

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

(f) *Soit* E *un ensemble de* $\mathfrak{M}'$ *tel que* $\mu^*(E) < \infty$*, alors* E *est intégrable.*

L'ensemble E est une réunion d'une suite d'ensembles intégrables E_n que l'on peut supposer deux à deux disjoints, donc, d'après (e),

$$\mu^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n),$$

et par suite

$$\lim_{n\to\infty} \delta\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E_n, E\Big) = 0,$$

donc E est intégrable.

On déduit de (e) et (f) que si $\{E_n\}$ est une suite d'ensembles de $\mathfrak{M}'$ deux à deux disjoints de réunion E,

$$\mu^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

(g) $\mathfrak{M}'$ *est une tribu.*

Il est clair qu'une réunion d'une suite d'ensembles de $\mathfrak{M}'$ appartient à $\mathfrak{M}'$. Montrons que le complémentaire E^c d'un ensemble de $\mathfrak{M}'$ appartient aussi à $\mathfrak{M}'$. L'ensemble E est réunion d'une suite d'ensembles intégrables E_k. D'autre part nous savons qu'il existe une suite $\{X_n\}$ d'ensembles élémentaires intégrables dont la réunion est égale à X. De la relation

$$X_n \cap E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X_n \cap E_k)$$

on déduit que $X_n \cap E$ est intégrable. De même

$$X_n \setminus E = X_n \setminus (X_n \cap E)$$

est intégrable. Par suite

$$E^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \setminus E)$$

appartient à $\mathfrak{M}'$.

Remarquons que la tribu $\mathfrak{M}'$ contient la tribu $\mathfrak{M}$.

(h) Soit f une fonction intégrable relativement à l'espace mesuré $(X, \mathfrak{M}', \mu)$, et soit $\varepsilon > 0$. De la proposition I.1.1 et du théorème de convergence dominée (I.3.4) il résulte qu'il existe une fonction intégrable étagée g telle que

$$\int_X |f - g| \; d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et de la définition des ensembles intégrables il résulte qu'il existe une fonction intégrable élémentaire h telle que

$$\int_X |g - h| \; d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite

$$\int_X |f - h| \; d\mu \leq \varepsilon. \qquad \square$$

Dans la suite nous aurons besoin de la propriété suivante qui se déduit directement de la partie (2) de l'énoncé du théorème de prolongement (II.1.1).

Proposition II.1.2. *Soit f une fonction intégrable relativement à l'espace mesuré $(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Il existe une suite $\{u_k\}$ de fonctions élémentaires intégrables telles que*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \qquad p.p., \\ \sum_{k=1}^{\infty} \int_X &|u_k| \, d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Démonstration. Il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions élémentaires intégrables telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

On peut extraire de la suite $\{f_n\}$ une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \, d\mu < \infty.$$

Posons

$$u_1 = f_{n_1}, \; u_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}} \; (k \geq 2).$$

La suite u_k convient. □

II.2. Mesure de Lebesgue sur ℝ

Soit $\mathfrak{A}$ l'algèbre de Boole engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$: un ensemble de $\mathfrak{A}$ est une réunion finie d'intervalles (que l'on peut supposer deux à deux disjoints). Soit λ l'application définie sur $\mathfrak{A}$ à valeurs dans $[0, \infty]$ de la façon suivante : si

$$E = \bigcup_{n=1}^{N} I_n,$$

où les ensembles I_n sont des intervalles deux à deux disjoints d'extrémités a_n et b_n,

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{N} \lambda(I_n) = \sum_{n=1}^{N} (b_n - a_n).$$

Théorème II.2.1. *Soit $\{E_n\}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{A}$ deux à deux disjoints dont la réunion E appartient aussi à $\mathfrak{A}$, alors*

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

Avant de le démontrer, notons que le théorème de prolongement (II.1.1) nous permet d'en déduire

Théorème II.2.2. (i) *Il existe une mesure unique λ sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ telle que, si I est un intervalle d'extrémités a et b,*

$$\lambda(I) = b - a.$$

(ii) *De plus, si E est un ensemble borélien de mesure finie, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite $\{I_n\}$ d'intervalles telle que*

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leq \lambda(E) + \varepsilon.$$

(iii) *Si f est une fonction intégrable, il existe une suite de fonctions intégrables en escalier telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \, d\lambda = 0.$$

Rappelons qu'une *fonction en escalier* définie sur un intervalle d'extrémités α et β ($-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$) est une fonction f pour laquelle il existe une subdivision

$$\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \beta,$$

et des nombres $A_0, \dots A_{n-1}$ tels que

$$f(x) = A_i \text{ si } x \in]x_i, x_{i+1}[.$$

Démonstration du théorème II.2.1. Elle se fait en plusieurs étapes.

(a) *Si $I_1, \dots, I_n$ sont des intervalles deux à deux disjoints, tous contenus dans un intervalle I, alors*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(I_k) \leq \lambda(I).$$

Notons a_k et b_k les extrémités de I_k, a et b celles de I. Nous pouvons supposer que

$$a \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_n \leq b,$$

et alors

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \leq b - a.$$

(b) *Si $K = [a, b]$ est un intervalle fermé borné contenu dans la réunion des intervalles ouverts $U_k =]a_k, b_k[$ $(k = 1, \cdots, n)$, alors*

$$\lambda(K) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda(U_k).$$

L'extrémité a appartient à l'un des intervalles U_k, soit U_{k_1}. Si $b_{k_1} \leq b$, il existe k_2 tel que b_{k_1} appartienne à U_{k_2}. Nous construisons ainsi une suite d'indices k_i jusqu'à ce que $b_{k_m} > b$. Ainsi

$$a_{k_1} < a < b_{k_1}, \quad a_{k_m} < b < b_{k_m}, \quad a_{k_{i+1}} < b_{k_i} < b_{k_{i+1}},$$

et par suite

$$\lambda(K) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda(U_{k_i}).$$

(c) *Si $\{I_n\}$ est une suite d'intervalles dont la réunion contient l'intervalle I, alors*

$$\lambda(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n).$$

Nous pouvons supposer que $\lambda(I_n) < \infty$ pour tout n. Considérons d'abord le cas où $\lambda(I) < \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un intervalle fermé borné $K \subset I$ tel que

$$\lambda(I) \leq \lambda(K) + \varepsilon,$$

et des intervalles ouverts U_n tels que $I_n \subset U_n$, et

$$\lambda(U_n) \leq \lambda(I_n) + \varepsilon 2^{-n}.$$

Les intervalles ouverts U_n recouvrent le compact K, on peut donc en extraire un recouvrement fini, et, d'après (b),

$$\lambda(K) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n).$$

Par suite

$$\lambda(I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_n) + 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, le résultat annoncé s'en déduit.

Si $\lambda(I) = \infty$, pour tout $A > 0$ il existe un intervalle compact K contenu dans I tel que $\lambda(K) \geq A$. La démonstration se poursuit comme précédemment.

(d) *Si $\{I_n\}$ est une suite d'intervalles deux à deux disjoints dont la réunion est un intervalle I, alors*

$$\lambda(I) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n).$$

De (a) il résulte que pour tout N

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda(I_n) \leq \lambda(I),$$

et d'après (c)

$$\lambda(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n).$$

(e) *Si $\{E_n\}$ est une suite d'ensembles élémentaires deux à deux disjoints dont la réunion est aussi un ensemble élémentaire, alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \lambda(E).$$

Nous pouvons supposer que les ensembles E_n sont des intervalles. L'ensemble E est la réunion d'intervalles I_k $(k = 1, \cdots, K)$ que l'on peut supposer deux à deux disjoints. D'après (d)

$$\lambda(I_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_k \cap E_n),$$

et aussi

$$\lambda(E_n) = \sum_{k=1}^{K} \lambda(I_k \cap E_n),$$

et le résultat annoncé s'en déduit. $\square$

L'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$ est invariant par translation, c'est-à-dire que si E est un ensemble borélien et a est un nombre réel, l'ensemble $E + a$ est aussi borélien et

$$\lambda(E + a) = \lambda(E).$$

En effet la tribu borélienne est la plus petite tribu contenant les intervalles, et le translaté d'un intervalle est un intervalle, par suite le translaté d'un ensemble borélien est aussi un ensemble borélien. Soit a un nombre réel. Pour tout borélien E, posons

$$\mu(E) = \lambda(E + a).$$

Ceci définit une mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, et pour tout intervalle I

$$\mu(I) = \lambda(I),$$

donc $\mu = \lambda$.

Proposition II.2.3. *Si μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ qui est invariante par translation et pour laquelle la mesure d'un intervalle borné est finie, alors il existe une constante c telle que $\mu = c\lambda$.*

Démonstration. Posons $c = \mu([0, 1[)$. Soit $I = [a, b[$ un intervalle dont les extrémités a et b sont des nombres rationnels. Des propriétés d'additivité et d'invariance de la mesure μ on déduit que

$$\mu([a, b[) = c(b - a).$$

La proposition résulte alors du fait que les intervalles de ce type engendrent la tribu borélienne $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}$. $\square$

Dans cette section nous appelerons *mesurable* une partie de $\mathbb{R}$ appartenant à la tribu complétée de la tribu borélienne $\mathfrak{B}$ relativement à la mesure de Lebesgue λ, c'est-à-dire qu'un ensemble E est mesurable s'il existe deux ensembles boréliens A et B tels que

$$A \subset E \subset B, \qquad \lambda(B \setminus A) = 0.$$

La mesure de E est alors par définition

$$\lambda(E) = \lambda(A).$$

Proposition II.2.4. *Soit E un ensemble mesurable.*

(i) $\lambda(E) = \inf\{\lambda(U) \mid U \text{ ouvert}, \ E \subset U\}$.

(ii) $\lambda(E) = \sup\{\lambda(K) \mid K \text{ compact}, \ K \subset E\}$.

Démonstration. (a) Si $\lambda(E) = \infty$ c'est évident. Supposons $\lambda(E) < \infty$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe une suite d'intervalles I_n telle que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leq \lambda(E) + \varepsilon,$$

et, pour tout n, il existe un intervalle ouvert U_n contenant I_n tel que

$$\lambda(U_n) \leq \lambda(I_n) + \varepsilon 2^{-n}.$$

Soit U la réunion des intervalles U_n. C'est un ouvert qui contient E et

$$\lambda(U) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) + \varepsilon \leq \lambda(E) + 2\varepsilon.$$

(b) Supposons d'abord que $\lambda(E) < \infty$, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe un intervalle compact I tel que

$$\lambda(E \cap I) \geq \lambda(E) - \varepsilon.$$

Posons $F = I \setminus E$. D'après (a) il existe un ouvert U contenant F tel que

$$\lambda(U) \leq \lambda(F) + \varepsilon.$$

Puis posons $K = I \setminus U$. C'est un compact contenu dans E et

$$\lambda(I) = \lambda(K) + \lambda(U \cap I) \leq \lambda(K) + \lambda(F) + \varepsilon,$$

donc

$$\lambda(K) \geq \lambda(I) - \lambda(F) - \varepsilon = \lambda(E \cap I) - \varepsilon,$$

et par suite

$$\lambda(K) \geq \lambda(E) - 2\varepsilon.$$

Si $\lambda(E) = \infty$, pour tout $A > 0$ il existe un intervalle compact I tel que $\lambda(E \cap I) \geq A$, et la démonstration se poursuit comme précédemment . $\square$

II.3. Intégrales au sens de Riemann et au sens de Lebesgue

Rappelons d'abord la définition de l'intégrale au sens de Riemann sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Soit u une fonction en escalier définie sur $[a, b]$. Il existe une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

et des nombres $A_0, \ldots, A_{n-1}$ tels que

$$u(x) = A_i \text{ si } x \in]x_i, x_{i+1}[.$$

L'intégrale de u est définie par

$$\int_a^b u(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(x_{i+1} - x_i).$$

On vérifie que cette définition est indépendante du choix de la subdivision et que l'intégrale est une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{E}_0(a, b)$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Si f est une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et bornée, on pose

$$\mathcal{U}_0(f) = \sup\Big\{\int_a^b u(x)dx \,\Big|\, u \in \mathcal{E}_0(a, b),\ u \leq f\Big\},$$
$$\mathcal{V}_0(f) = \inf\Big\{\int_a^b v(x)dx \,\Big|\, v \in \mathcal{E}_0(a, b),\ v \geq f\Big\}.$$

La fonction f est dite *intégrable au sens de Riemann* si $\mathcal{U}_0(f) = \mathcal{V}_0(f)$. L'*intégrale au sens de Riemann* de f est alors le nombre

$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{U}_0(f) = \mathcal{V}_0(f).$$

Pour qu'une fonction bornée f soit intégrable au sens de Riemann il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $u, v \in \mathcal{E}_0(a, b)$ telles que

$$u \leq f \leq v, \quad \int_a^b (v - u)dx \leq \varepsilon.$$

Considérons maintenant un espace mesuré complet $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ et supposons que la masse totale de la mesure μ soit finie : $\mu(X) < \infty$. Pour une fonction f

définie sur X à valeurs réelles et bornée, posons

$$\mathcal{U}(f) = \left\{ \int_X u \; d\mu \,\middle|\, u \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{M}),\ u \leq f \right\},$$
$$\mathcal{V}(f) = \left\{ \sum_X v \; d\mu \,\middle|\, v \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{M}),\ v \geq f \right\}.$$

(Rappelons que $\mathcal{E}(X, \mathfrak{M})$ désigne l'espace des fonctions mesurables étagées définies sur X.) Si f est mesurable alors $\mathcal{U}(f) = \mathcal{V}(f)$, et

$$\int_X f \; d\mu = \mathcal{U}(f) = \mathcal{V}(f).$$

Réciproquement nous allons voir que si $\mathcal{U}(f) = \mathcal{V}(f)$, alors f est mesurable. En effet si c'est le cas, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u, v \in \mathcal{E}(X, \mathfrak{M})$ telles que

$$u \leq f \leq v, \quad \int_X (v - u) \; d\mu \leq \varepsilon.$$

Ainsi il existe des suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ de fonctions mesurables étagées telles que

$$u_n \leq f \leq v_n, \quad \int_X (v_n - u_n) \; d\mu \leq \frac{1}{n}.$$

Posons

$$U_n = \sup_{k \leq n} u_k, \quad V_n = \inf_{k \leq n} v_k.$$

Les fonctions U_n et V_n sont mesurables étagées, la suite $\{U_n\}$ est croissante, la suite $\{V_n\}$ est décroisante et

$$\int_X (V_n - U_n) \; d\mu \leq \frac{1}{n}.$$

De plus

$$\lim_{n \to \infty} \int_X U_n \; d\mu = \mathcal{U}(f), \quad \lim_{n \to \infty} \int_X V_n \; d\mu = \mathcal{V}(f).$$

Posons

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} U_n(x), \quad h(x) = \lim_{n \to \infty} V_n(x).$$

Les fonctions g et h sont mesurables, et $g \leq f \leq h$. Du théorème de convergence monotone (I.2.1) il résulte que

$$\int_X (h - g) \; d\mu = \mathcal{V}(f) - \mathcal{U}(f) = 0,$$

donc $f = g = h$ presque partout, et

$$\int_X f\, d\mu = \mathcal{U}(f) = \mathcal{V}(f).$$

Ainsi f est intégrable relativement à l'espace mesuré $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ si et seulement si $\mathcal{U}(f) = \mathcal{V}(f)$.

Considérons le cas où $X = [a, b]$, $\mathfrak{M}$ est la tribu complétée de la tribu borélienne relativement à la mesure de Lebesgue, et $\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue. Pour toute fonction f définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et bornée,

$$\mathcal{U}_0(f) \leq \mathcal{U}(f) \leq \mathcal{V}(f) \leq \mathcal{V}_0(f).$$

Ainsi, si f est intégrable au sens de Riemann elle est intégrable au sens de Lebesgue, et les deux définitions d'intégrale coïncident. Par contre une fonction f peut être intégrable au sens de Lebesgue sans être intégrable au sens de Riemann, c'est-à-dire que $\mathcal{U}(f) = \mathcal{V}(f)$, mais que $\mathcal{U}_0(f) < \mathcal{V}_0(f)$. C'est en effet le cas pour la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas $\mathcal{U}_0(f) = 0$, $\mathcal{V}_0(f) = 1$, $\mathcal{U}(f) = \mathcal{V}(f) = 0$.

Exercices

Exercice II.1. *Ensemble triadique de Cantor.* Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha \leq 1$. On va définir une suite décroissante de fermés $F_n \subset [0, 1]$. L'ensemble de Cantor K_α sera défini par

$$K_\alpha = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n.$$

La suite F_n est définie par récurrence de la façon suivante. On pose $F_0 = [0, 1]$. L'ensemble F_1 est le complémentaire dans F_0 de l'intervalle ouvert de centre $\frac{1}{2}$ et de longueur $\frac{\alpha}{3}$:

$$F_1 = I_1^1 \cup I_1^2, \quad I_1^1 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6}\right], \; I_1^2 = \left[\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{6}, 1\right].$$

On effectue sur chacun des intervalles I_1^1 et I_1^2 la même opération en remplaçant α par $\frac{\alpha}{3}$. Ainsi, si

$$F_n = I_n^1 \cup \ldots \cup I_n^{2^n}, \quad I_n^k = [a_n^k, b_n^k] \quad (1 \leq k \leq 2^n),$$

alors

$$F_{n+1} = I^1_{n+1} \cup \ldots \cup I^{2^{n+1}}_{n+1},$$

avec

$$I^{2k-1}_{n+1} = \left[a^k_n, \frac{a^k_n + b^k_n}{2} - \frac{\alpha}{2 \cdot 3^{n+1}}\right], \quad I^{2k}_{n+1} = \left[\frac{a^k_n + b^k_n}{2} + \frac{\alpha}{2 \cdot 3^{n+1}}, b^k_n\right].$$

a) Montrer que

$$\lambda(F_n) = 1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{2\alpha}{9} - \cdots - \frac{2^{n-1}\alpha}{3^n}.$$

b) Montrer que K_α est un ensemble compact d'intérieur vide, et que $\lambda(K_\alpha) = 1 - \alpha$.

c) Considérons les développements triadiques infinis des nombres de $[0, 1]$. Tout nombre $x \in [0, 1]$ s'écrit

$$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots,$$

où $\{a_n\}$ est une suite de nombres égaux à 0, 1 ou 2, c'est-à-dire

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}.$$

L'écriture n'est pas unique lorsque x est un nombre triadique, c'est-à-dire si

$$x = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{3^n} \qquad (a_N \neq 0),$$

qui s'écrit $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_N$, car x est aussi égal à

$$x = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_N}{3^n} + \frac{a_{N-1}}{3^N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^n},$$

c'est-à-dire qu'il s'écrit aussi

$$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_{N-1} a'_N \ldots a'_n \ldots,$$

où $a'_N = a_N - 1$, et $a'_n = 2$ si $n \geq N + 1$.

Montrer que l'ensemble de Cantor K_1 est égal à l'ensemble des nombres qui s'écrivent

$$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

où $\{a_n\}$ est une suite de nombres égaux à 0 ou 2. Montrer que K_1 n'est pas dénombrable. Ainsi K_1 est un ensemble compact non dénombrable de mesure nulle.

***Exercice II.2* (Théorème d'Egoroff).** Soit $\mathfrak{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, et soit E un ensemble borélien de mesure finie, $\lambda(E) < \infty$. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables définies sur E à valeurs réelles, convergeant en tout point de E vers une fonction f.

a) Pour ε fixé, et pour tout entier n on pose

$$F_n = \{x \in E \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}, \quad G_n = \bigcup_{k \geq n} F_k.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(G_n) = 0.$$

b) Montrer que, pour tous $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, il existe un borélien $A \subset E$, de mesure $\lambda(A) < \delta$, et un entier N tel que

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in E \setminus A,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

c) Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, il existe un borélien $A \subset E$, de mesure $\lambda(A) \leq \alpha$, tel que la suite $\{f_n\}$ converge uniformément sur $E \setminus A$.
Indication : appliquer le résultat de b) à des suites $\{\varepsilon_k\}$ et $\{\delta_k\}$ convenables.

***Exercice II.3* (Théorème de Lusin).** Soit $\mathfrak{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, et soit E un ensemble borélien de mesure finie, $\lambda(E) < \infty$.

a) Soit f une fonction mesurable étagée à valeurs réelles définie sur E. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset E$ tel que $\lambda(E \setminus K) \leq \varepsilon$ et que f soit continue sur K.
Indication : on utilisera le fait suivant ; soit A un borélien de mesure finie. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K \subset A$ tel que $\lambda(A \setminus K) \leq \varepsilon$.

b) Soit f une fonction mesurable définie sur E à valeurs réelles. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un borélien A tel que $\lambda(A) \leq \varepsilon$ et que f soit continue sur $E \setminus A$.
Indication : on considèrera une suite $\{f_n\}$ de fonctions mesurables étagées telles que $|f_n| \leq |f_{n+1}|$ qui converge vers f en tout point de E, et on appliquera le théorème d'Egoroff (exercice II.2).

III

ESPACES L^p

Les espaces L^p jouent un rôle important en analyse fonctionnelle. Nous verrons dans ce chapitre que L^p est un espace de Banach, c'est-à-dire un espace normé complet. C'est le théorème de Riesz-Fischer. En particulier L^2 est un espace de Hilbert. C'est un résultat important par ses applications à l'analyse. Il n'y a pas d'énoncé analogue pour l'intégrale de Riemann, et nous avons ici l'une des principales justifications de l'introduction de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

III.1. Inégalités de Hölder et de Minkowski, espaces $\mathcal{L}^p$

Soit $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $1 \leq p < \infty$, on note $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables f à valeurs complexes telles que

$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty,$$

et, pour une telle fonction, on pose

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = 1$ il est clair que $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ est un espace vectoriel, c'est l'espace des fonctions intégrables, et $f \mapsto \|f\|_1$ est une semi-norme. Pour $p > 1$ ce sont les inégalités de Hölder et de Minskowski qui permettent de montrer que $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ est un espace vectoriel et que $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi-norme sur cet espace. Nous allons d'abord établir le lemme de convexité suivant.

Lemme III.1.1. *Soient α et $\beta \geq 0$, tels que $\alpha + \beta = 1$, et soient $u, v \in [0, \infty]$. Alors*
$$u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v.$$

Démonstration. On peut supposer que $0 < u, v < \infty$, sinon l'inégalité est évidente, et donc poser $u = e^s$, $v = e^t$. La fonction exponentielle étant convexe,
$$e^{\alpha s + \beta t} \leq \alpha e^s + \beta e^t,$$
c'est-à-dire
$$u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v. \qquad \square$$

Deux nombres réels positifs p et q sont appelés *exposants conjugués* s'ils vérifient la relation
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
Cette relation implique que p et q sont supérieurs à 1. Notons que $p = 2$ est égal à son conjugué $q = 2$. Si p tend vers 1 alors q tend vers l'infini. On dira que 1 et ∞ sont conjugués.

Théorème III.1.2 (Inégalités de Hölder et de Minkowski). *Soient p et q deux exposants conjugués, $1 < p, q < \infty$, et soient f et g deux fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$. L'inégalité de Hölder s'écrit*
$$\int_X fg \; d\mu \leq \left(\int_X f^p \; d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q \; d\mu \right)^{\frac{1}{q}},$$
et l'inégalité de Minkowski
$$\left(\int_X (f+g)^p \; d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p \; d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p \; d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. (a) *Inégalité de Hölder.* Posons
$$A = \left(\int_X f^p \; d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad B = \left(\int_X g^q \; d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$
Si $A = 0$, alors $f = 0$ *p.p.*, donc $\int_X fg \; d\mu = 0$. Si $A = \infty$, l'inégalité est évidente. On peut donc supposer que $0 < A, B < \infty$. Posons alors
$$F = \frac{f}{A}, \quad G = \frac{g}{B}.$$

D'après le lemme III.1.1,

$$F(x)G(x) \leq \frac{1}{p}F(x)^p + \frac{1}{q}G(x)^q,$$

et en intégrant,

$$\int_X FG\ d\mu \leq \frac{1}{p}\int_X F^p\ d\mu + \frac{1}{q}\int_X G^q\ d\mu = 1,$$

qui est l'inégalité à démontrer.

(b) *Inégalité de Minkowski.* Si $\int_X f^p\ d\mu = \infty$, ou si $\int_X g^p\ d\mu = \infty$, ou si $\int_X (f+g)^p\ d\mu = 0$, l'inégalité est évidente. On peut donc supposer que

$$\int_X f^p\ d\mu < \infty, \quad \int_X g^p\ d\mu < \infty, \quad \int_X (f+g)^p\ d\mu > 0.$$

Puisque, pour $p > 1$, la fonction $t \mapsto t^p$ est convexe,

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \leq \tfrac{1}{2}\,(f^p + g^p),$$

et donc

$$\int_X (f+g)^p\ d\mu < \infty.$$

Appliquons l'inégalité de Hölder au produit $f(f+g)^{p-1}$,

$$\int_X f(f+g)^{p-1}\ d\mu \leq \Big(\int_X f^p\ d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_X (f+g)^p\ d\mu\Big)^{\frac{1}{q}},$$

car $(p-1)q = p$. De même avec le produit $g(f+g)^{p-1}$,

$$\int_X g(f+g)^{p-1}\ d\mu \leq \Big(\int_X g^p\ d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_X (f+g)^p\ d\mu\Big)^{\frac{1}{q}},$$

et additionnons ces deux inégalités,

$$\int_X (f+g)^p\ d\mu \leq \bigg(\Big(\int_X f^p\ d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_X g^p\ d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\bigg)\Big(\int_X (f+g)^p\ d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

L'inégalité à démontrer s'en déduit. $\square$

Corollaire III.1.3. *Pour $1 \leq p < \infty$ l'ensemble $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et l'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi-norme sur cet espace vectoriel.*

Démonstration. C'est une conséquence de l'inégalité de Minkowski. □

Soient p et q deux exposants conjugués, $1 < p,\, q < \infty$, soient f une fonction de $\mathcal{L}^p$ et g une fonction de $\mathcal{L}^q$. De l'inégalité de Hölder on déduit que le produit fg est intégrable et que

$$\left|\int_X fg\; d\mu\right| \leq \left(\int_X |f|^p\; d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\pi\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Cette inégalité est aussi appelé inégalité de Hölder. Lorsque $p = q = 2$, c'est l'*inégalité de Schwarz.*

Une fonction mesurable à valeurs complexes est dite *essentiellement bornée* s'il existe un nombre M tel que

$$\mu(\{x \mid |f(x)| > M\}) = 0.$$

La borne inférieure des nombres M pour lesquels ceci a lieu est appelée la *borne supérieure essentielle* de f, et est notée $\|f\|_\infty$. On note $\mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs complexes essentiellement bornées. L'ensemble $\mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est une semi-norme sur cet espace vectoriel.

Si $f \in \mathcal{L}^1$ et $g \in \mathcal{L}^\infty$ alors fg est intégrable, et

$$\left|\int_X fg\; d\mu\right| \leq \|g\|_\infty \int_X |f|\; d\mu.$$

En effet, pour presque tout x,

$$|f(x)g(x)| \leq \|g\|_\infty |f(x)|.$$

III.2. Espaces L^p, théorème de Riesz-Fischer

Soient $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace mesuré et $1 < p < \infty$. L'application $f \mapsto \|f\|^p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ mais en général ce n'est pas une norme. En effet $\|f\|_p = 0$ si et seulement si f est nulle presque partout. La relation

$$f = g \quad p.p.$$

est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ et l'espace quotient, noté $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$, est un espace vectoriel normé. Nous allons voir que cet espace est complet, c'est-à-dire que $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ est un espace de Banach. Pour cela nous allons montrer que toute série normalement convergente est convergente. En effet, pour qu'un espace vectoriel normé soit complet il faut et il suffit que toute série normalement convergente soit convergente. Nous verrons au début de la démonstration du théorème III.2.2 comment s'établit ce résultat.

Théorème III.2.1. *Supposons $1 \leq p < \infty$, et soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty.$$

Alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge presque partout. Sa somme F, qui est définie presque partout, appartient à $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ et

$$\lim_{N\to\infty} \|\sum_{n=1}^{N} f_n - F\|_p = 0.$$

Démonstration. Posons

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p, \quad G_N(x) = \sum_{n=1}^{N} |f_n(x)|, \quad G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\|G_N\|_p \leq \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_p \leq M,$$

et d'après le théorème de convergence monotone (I.2.1),

$$\int_X G^p \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X G_N^p \, d\mu \leq M^p.$$

Ainsi la fonction G^p est intégrable, donc finie presque partout, et par suite la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge presque partout. Posons

$$F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x).$$

Puisque

$$|F_N(x)| \leq G(x), \quad |F(x)| \leq G(x),$$

la fonction F appartient à $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$, et d'après le théorème de convergence dominée (I.3.4)

$$\lim_{N\to\infty} \int_X |F_N - F|^p \, d\mu = 0. \qquad \square$$

Théorème III.2.2 **(Théorème de Riesz-Fischer).** *Supposons* $1 \leq p < \infty$. *L'espace* $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *est complet. Plus précisément, soit* $\{f_n\}$ *une suite de Cauchy de fonctions de* $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$. *Alors*

(i) *il existe une fonction* f *de* $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0,$$

(ii) *il existe une sous-suite* $\{f_{n_k}\}$ *telle que*

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad p.p.$$

Démonstration. D'après le théorème III.2.1, toute série normalement convergente de $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ est convergente. Il en résulte que $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ est complet. Pour obtenir la conclusion (ii) de l'énoncé nous allons reprendre la démonstration de ce résultat. On montre d'abord par récurrence qu'il existe une suite croissante d'entiers n_k telle que

$$\forall n, m \geq n_k, \ \|f_n - f_m\| \leq \frac{1}{k^2}.$$

Posons

$$u_0 = f_{n_1}, \ u_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}.$$

Puisque

$$\|u_k\|_p \leq \frac{1}{k^2},$$

la série $\sum u_k$ est normalement convergente,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|_p < \infty.$$

D'après le théorème III.2.1 il existe une fonction f de $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ telle que

$$\lim_{K\to\infty} \|\sum_{k=0}^{K} u_k - f\|_p = 0, \qquad \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} u_k(x) = f(x) \quad p.p.,$$

ce qui se traduit par

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_p = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad p.p.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que

$$\forall n, m \geq N, \quad \|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon,$$

et soit k tel que $n_k \geq N$, alors

$$\forall n \geq N, \quad \|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p \leq 2\varepsilon,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0. \qquad \square$$

Proposition III.2.3. *L'espace $L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ est complet.*

Démonstration. Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy de l'espace $\mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Les ensembles $E_{n,m}$ définis par

$$E_{n,m} = \{x \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

sont négligeables, et leur réunion E l'est aussi. Sur le complémentaire de E la suite $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy pour la norme uniforme, donc la suite $\{f_n\}$ converge sur le complémentaire de E vers une fonction f. Pour $x \in E$ on pose $f(x) = 0$. La fonction ainsi définie f appartient à $\mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$, et

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty. \qquad \square$$

Rappelons qu'une fonction intégrale étagée est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles intégrables. Supposons $1 \leq p < \infty$. Si $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$, il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions intégrables élémentaires qui converge vers f au sens de $\mathcal{L}^p$, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

En effet, si f est positive, il existe d'après I.1.1 une suite $\{f_n\}$ de fonctions mesurables étagées telle que

$$0 \leq f_n \leq f, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Puisque $(f - f_n)^p \leq f^p$, il résulte du théorème de convergence dominée (I.3.4), que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (f - f_n)^p \, d\mu = 0.$$

Le résultat annoncé s'en déduit.

Sous les hypothèses du théorème II.1.1, si $1 \leq p < \infty$, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$, il existe une suite de fonctions élémentaires intégrables qui converge vers f au sens de $\mathcal{L}^p$. Pour $p = 1$ c'est la dernière partie de l'énoncé du théorème II.1.1. La démonstration s'étend au cas $1 \leq p < \infty$.

Pour terminer cette section nous allons énoncer un théorème d'approximation très utile en analyse. Lorsque $X =]\alpha, \beta[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ $(-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty)$, que $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$ est la tribu borélienne de X et que $\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue, nous noterons $\mathcal{L}^p(X)$ et $L^p(X)$ au lieu de $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{B}, \lambda)$ et $L^p(X, \mathfrak{B}, \lambda)$. On note $\mathcal{C}_c(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à support compact contenu dans X. Rappelons que le *support* d'une fonction f est l'adhérence de l'ensemble des points où cette fonction est non nulle,

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Théorème III.2.4. *Supposons $1 \leq p < \infty$. Soit f une fonction de $\mathcal{L}^p(X)$. Il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions de $\mathcal{C}_c(X)$ qui converge vers f au sens de $\mathcal{L}^p$.*

Démonstration. Considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions f de $\mathcal{L}^p(X)$ possédant cette propriété, c'est-à-dire pour lesquelles il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions de $\mathcal{C}_c(X)$ qui converge vers f au sens de $\mathcal{L}^p$. Notons que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel, et que, si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{F}$ qui converge vers une fonction f au sens de $\mathcal{L}^p$, alors f appartient à $\mathcal{F}$. Nous devons montrer que $\mathcal{F} = \mathcal{L}^p(X)$. Soit f la fonction caractéristique d'un intervalle borné d'extrémités a et b, et soit f_n la fonction trapèze définie comme suit : elle est nulle si $x \leq a - \frac{1}{n}$ ou si $x \geq b + \frac{1}{n}$, et

$$f_n(x) = \begin{cases} n(x-a)+1 & \text{si } a - \frac{1}{n} \leq x \leq a, \\ 1 & \text{si } a \leq x \leq b, \\ n(b-x)+1 & \text{si } b \leq x \leq b + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

La fonction f_n appartient à $\mathcal{C}_c(X)$, et

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n - f|^p d\lambda = 0.$$

Ceci montre que f appartient à $\mathcal{F}$. Par suite toute fonction intégrable élémentaire appartient à $\mathcal{F}$, et de ce qui précède il résulte que $\mathcal{F} = \mathcal{L}^p(X)$. □

III.3. L'espace de Hilbert L^2

Si f et g sont deux fonctions de carré intégrable, alors leur produit est intégrable. C'est une conséquence de l'inégalité de Schwarz. L'intégrale

$$(f|g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x)$$

ne dépend que des classes d'équivalence de f et g (rappelons que f_1 et f_2 sont équivalentes si f_1 et f_2 sont égales presque partout). On définit ainsi un produit scalaire sur $L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ qui en fait un espace préhilbertien. Si la mesure μ est concentrée sur un ensemble fini, l'espace $L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ est de dimension finie (on dit qu'une mesure μ est *concentrée* sur un ensemble E si la mesure $\mu(E^c)$ du complémentaire de E est nulle). Nous supposerons dans la suite que ce n'est pas le cas. On dit qu'une suite $\{f_n\}$ de fonctions de $\mathcal{L}^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *converge en moyenne quadratique* vers une fonction f si

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|^2\, d\mu(x) = 0.$$

L'espace $L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ est complet d'après le théorème de Riesz-Fischer (III.2.2), ce qui s'énonce :

Théorème III.3.1. *$L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ est un espace de Hilbert.*

Ce théorème a des conséquences importantes. Rappelons les principales propriétés des systèmes orthogonaux et des bases hilbertiennes (*cf.* par exemple Albert, chapitre V, ou Avanissian, chapitre 13).

Un *système orthogonal* $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(X, \mathfrak{M}, \mu)$ est une suite d'éléments telle que, pour tout n, $\varphi_n \neq 0$, et, si $m \neq n$,

$$(\varphi_m|\varphi_n) = 0.$$

C'est un système orthonormé si de plus, pour tout n,

$$\|\varphi_n\| = 1.$$

Soit $\{\varphi_n\}$ un système orthonormé. Notons $\mathcal{F}$ le plus petit sous-espace fermé contenant $\{\varphi_n\}$, et P le projecteur orthogonal sur $\mathcal{F}$. Pour toute suite $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de $\ell^2(\mathbb{N})$, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$$

est convergente en moyenne quadratique, et sa somme est un élément de $\mathcal{F}$.

Rappelons que $\ell^2(\mathbb{N})$ désigne l'espace des suites $a = \{a_n\}_{\geq 0}$ de nombres complexes qui sont de carré sommable, c'est-à-dire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Muni du produit scalaire

$$(a|b) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n},$$

c'est un espace de Hilbert. (Remarquons que $\ell^2(\mathbb{N}) = L^2(Y, \mathfrak{N}, \nu)$, où $Y = \mathbb{N}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ et ν est la mesure de comptage.)

Pour tout $f \in \mathcal{H}$, posons

$$a_n = (f|\varphi_n).$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \|Pf\|^2 \leq \|f\|^2,$$

c'est l'*inégalité de Bessel*, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n = Pf$$

en moyenne quadratique. Le système $\{\varphi_n\}$ est dit total s'il engendre un sous-espace dense de $\mathcal{H}$. Une *base hilbertienne* est un système orthonormé total. Pour qu'un système orthogonal soit une base hilbertienne il faut et il suffit que, pour tout $f \in \mathcal{H}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(f|\varphi_n)|^2 = \|f\|^2.$$

(Il suffit en fait que ce soit vrai pour un ensemble total de fonctions f.) Dans ce cas l'application de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans $\mathcal{H}$ définie par

$$a = \{a_n\}_{n \geq 0} \mapsto f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$$

est un isomorphisme isométrique.

Exercices

Dans tous les exercices qui suivent, on considère un espace mesuré $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

Exercice III.1. Soient $p, q, r \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, et soient f et g deux fonctions mesurables ≥ 0. Montrer que

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Exercice III.2. Soient $p, q, r \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, et soient f, g et h des fonctions mesurables ≥ 0. Montrer que

$$\int_X f(x)g(x)h(x)\ d\mu(x) \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

Exercice III.3. Soient $p, q \geq 1$, et soient f et g des fonctions mesurables positives telles que

$$\int_X f(x)g(x)\ d\mu(x) = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Montrer qu'il existe des constantes a et b telles que

$$af(x)^p = bg(x)^q \quad p.p.$$

Indication : on montrera d'abord que, si $\alpha, \beta \geq 0$ et $\alpha + \beta = 1$, et si $u, v > 0$ sont tels que

$$u^\alpha v^\beta = \alpha u + \beta v,$$

alors $u = v$.

Exercice III.4. Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. À une fonction g de $\mathcal{L}^q(X, \mathfrak{M}, \mu)$ on associe la forme linéaire L sur $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ définie par

$$L(f) = \int_X f(x)g(x)\ d\mu(x).$$

Montrer que L définit une forme linéaire sur $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$, et montrer que sa norme,

$$\|L\| = \sup_{\{f \in L^p \mid \|f\|_p \leq 1\}} |L(f)|,$$

est égale à $\|g\|_q$.

Exercice III.5. Soit f une fonction mesurable à valeurs complexes. On pose

$$\varphi(p) = \int_X |f(x)|^p\ d\mu(x),$$

et

$$I = \{p \geq 1 \mid \varphi(p) < \infty\}.$$

a) Montrer que I est un intervalle, c'est-à-dire que, si $p_1, p_2 \in I$, alors $[p_1, p_2] \subset I$.

b) On suppose que f n'est pas nulle presque partout. Montrer que la fonction $\ln \varphi$ est convexe sur I.

c) Soient $p, q, r \geq 1$ tels que $q < p < r$. Montrer que

$$\mathcal{L}^q(X, \mathfrak{M}, \mu) \cap \mathcal{L}^r(X, \mathfrak{M}, \mu) \subset \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu),$$

et que, si $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$,

$$\|f\|_p \leq \max(\|f\|_q, \|f\|_r).$$

Exercice III.6. Soit $q \geq 1$, et soit f une fonction de $\mathcal{L}^q(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

a) Montrer que, pour $p \geq 1$ et $\alpha > 0$,

$$\mu\big(\{x \in X \mid |f(x)| \geq \alpha\}\big)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_p.$$

En déduire que, pour $\alpha < \|f\|_\infty$,

$$\liminf_{p \to \infty} \|f\|_p \geq \alpha.$$

b) On suppose que $\|f\|_\infty < \infty$. Montrer que, si $p > q$,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty^{1-\frac{q}{p}} \|f\|_q^{\frac{q}{p}}.$$

En déduire que

$$\limsup_{p \to \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

***Exercice III.7* (Inégalité de Hardy).** On suppose que $X =]0, \infty[$, que $\mathfrak{M}$ est la tribu borélienne, et que μ est la mesure de Lebesgue. On suppose que $1 < p < \infty$. Soit f une fonction de $\mathcal{L}^p(]0, \infty[)$. On pose

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt.$$

Montrer que

$$\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

Indication : on supposera d'abord que f est une fonction continue à support compact, et on montrera par une intégration par parties que

$$\int_0^\infty F(x)^p dx = -p\int_0^\infty F^{p-1}(x)F'(x)x\ dx.$$

Exercice III.8 **(Critère de Vitali).** Soit $\{\varphi_n\}_{n\ge 0}$ un système orthonormé de fonctions de $\mathcal{L}^2([0,1])$. On pose

$$\Phi_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t)dt \quad (0 \le x \le 1).$$

a) Montrer que

$$\sum_{n=0}^\infty |\Phi_n(x)|^2 \le x.$$

b) Montrer que $\{\varphi_n\}$ est une base hilbertienne de $L^2([0,1])$ si et seulement si il y a égalité pour tout x.

Exercice III.9 **(Fonctions de Rademacher et de Walsh).** Considérons le développement dyadique infini d'un nombre $x \in [0,1]$,

$$x = 0, a_1a_2\dots a_n\dots = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{2^n},$$

où les nombres $a_n = a_n(x)$ sont égaux à 0 ou 1. L'écriture n'est pas unique lorsque x est un nombre dyadique,

$$x = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{2^n} \qquad (a_N = 1),$$

ce qui s'écrit $x = 0, a_1\dots a_N$. En effet x s'écrit aussi

$$x = \sum_{n=1}^{N-1}\frac{a_n}{2^n} + \sum_{n=N+1}^\infty \frac{1}{2^n},$$

c'est-à-dire

$$x = 0, a_1\dots a_{N-1}a'_N\dots a'_n\dots,$$

avec $a'_N = 0$ et $a'_n = 1$ si $n \geq N+1$. Pour un tel nombre dyadique x nous conviendrons d'utiliser la première écriture. Autrement dit on suppose que le développement dyadique de x contient une infinité de zéros.

La fonction de Rademacher φ_n est définie sur $[0,1]$: $\varphi_0(x) = 1$, et, si $n \geq 1$,

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_n(x) = 0, \\ -1 & \text{si } a_n(x) = 1. \end{cases}$$

a) Montrer que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ est un système orthonormé.

b) Montrer que $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ n'est pas une base hilbertienne de $L^2([0,1])$.
Indication : on pourra montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$\int_0^1 \varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_n(x)dx = 0.$$

c) La fonction de Walsh ψ_k est définie sur $[0,1]$ par : $\psi_0(x) = 1$, et, si la décomposition dyadique de l'entier k s'écrit

$$k = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_p} \quad (n_1 > n_2 > \cdots n_p \geq 0),$$

alors

$$\psi_k(x) = \varphi_{n_1+1}(x)\varphi_{n_2+1}(x)\ldots\varphi_{n_p+1}(x).$$

Montrer que les fonctions ψ_k constituent un système orthonormé.
Indication : on montrera que, si $n_1 > n_2 > \cdots n_P \geq 1$, alors

$$\int_0^1 \varphi_{n_1}(x)\varphi_{n_2}(x)\ldots\varphi_{n_p}(x)\ dx = 0.$$

d) Soit f une fonction de $\mathcal{L}^2([0,1])$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 f(t)\ dt.$$

Montrer que la fonction F est continue et que, si $F \equiv 0$, alors f est nulle presque partout.

On suppose que, pour tout $k \geq 0$,

$$\int_0^1 f(x)\psi_k(x)\ dx = 0.$$

Montrer que

$$F\Big(\frac{k}{2^n}\Big) = 0 \quad (n \geq 0,\ k = 0, 1, \ldots, 2^n).$$

En déduire que $\{\psi_k\}_{k\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2([0,1])$.

IV

INTÉGRATION SUR UN ESPACE PRODUIT

Nous verrons au chapitre suivant comment l'évaluation d'une intégrale multiple peut se ramener à des évaluations successives d'intégrales simples. Ce sera une conséquence des résultats généraux établis dans ce chapitre sur le produit de deux espaces mesurés et l'intégration sur un espace produit : ce sont les théorèmes de Fubini et de Fubini-Tonelli.

IV.1. Produit de deux espaces mesurés

Soient $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ et $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ deux espaces mesurés. On appelle *rectangle mesurable* une partie du produit $X \times Y$ de la forme $R = A \times B$, où $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{N}$. Nous allons montrer qu'il existe une mesure unique λ sur la tribu $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ engendrée par les rectangles mesurables telle que si $R = A \times B$ est un tel rectangle,

$$\lambda(R) = \mu(A)\nu(B).$$

Une réunion finie de rectangles mesurables sera appelée dans cette section ensemble élémentaire. Les ensembles élémentaires constituent une algèbre de Boole, que nous noterons $\mathfrak{A}$. En effet, si $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$, $B_1, B_2 \in \mathfrak{N}$,

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$

et, si $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{N}$,

$$(A \times B)^c = (A^c) \times Y \cup A \times B^c.$$

Proposition IV.1.1.
(i) *Soit $Q \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$, alors, pour $x \in X$, l'ensemble*

$$Q_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in Q\}$$

appartient à $\mathfrak{N}$.
(ii) *Soit f une fonction définie sur $X \times Y$ à valeurs dans $[-\infty, \infty]$, mesurable pour la tribu $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$. Pour tout $x \in X$ la fonction f_x, définie par*

$$f_x(y) = f(x, y),$$

est mesurable pour la tribu $\mathfrak{N}$.

Démonstration. (a) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties Q de $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ telles que, pour tout $x \in X$, l'ensemble Q_x appartienne à $\mathfrak{N}$. L'ensemble $\mathcal{S}$ contient les rectangles mesurables. Ainsi, pour montrer (i), il suffit de montrer que $\mathcal{S}$ est une tribu. Cela provient du fait que l'application $Q \mapsto Q_x$ commute avec les opérations élémentaires sur les ensembles :

$$(Q^c)_x = (Q_x)^c, \quad (P \cap Q)_x = P_x \cap Q_x,$$
$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q_n)_x.$$

(b) La propriété (ii) résulte de la relation

$$\{y \mid f_x(y) > \alpha\} = \{(x, y) \mid f(x, y) > \alpha\}_x. \qquad \square$$

Rappelons que l'espace mesuré $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ est dit σ-fini s'il existe une suite d'ensembles mesurables X_n tels que

$$\mu(X_n) < \infty, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Théorème IV.1.2. *Soient $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ et $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Il existe une mesure unique λ sur l'espace mesurable $(X \times Y, \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N})$ telle que, pour tout rectangle mesurable $R = A \times B$,*

$$\lambda(R) = \mu(A)\nu(B).$$

La mesure λ est notée $\mu \otimes \nu$.

Démonstration. Soit Q un ensemble élémentaire. Il peut être décomposé en une réunion finie de rectangles mesurables deux à deux disjoints,

$$Q = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i) \qquad (A_i \in \mathfrak{M}, B_i \in \mathfrak{N}).$$

Si une telle mesure λ existe, nécessairement

$$\lambda(Q) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\nu(B_i).$$

On vérifie que ce nombre ne dépend pas de la décomposition choisie, et ainsi cette formule définit une application $\lambda : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$. Notons que, si Q est un ensemble élémentaire,

$$\lambda(Q) = \int_X \nu(Q_x) d\mu(x).$$

D'après le théorème de prolongement (II.1.1), il suffit d'établir le fait suivant : si $\{Q_n\}$ est une suite croissante d'ensembles élémentaires dont la réunion Q est aussi un ensemble élémentaire, alors

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(Q_n) = \lambda(Q).$$

Pour $x \in X$ fixé, les ensembles $(Q_n)_x$ constituent une suite croissante de réunion Q_x, donc

$$\lim_{n\to\infty} \nu\big((Q_n)_x\big) = \nu(Q_x),$$

et, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \nu\big((Q_n)_x\big) d\mu(x) = \int_X \nu(Q_x) d\mu(x),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(Q_n) = \lambda(Q). \qquad \square$$

IV.2. Intégration sur un espace produit

Considérons deux espaces mesurés $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ et $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$. Nous supposons qu'ils sont tous deux σ-finis et notons λ la mesure produit, $\lambda = \mu \otimes \nu$. Si A

et B ($A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{N}$) sont de mesure finie nous dirons que $R = A \times B$ est un rectangle intégrable. Une combinaison linéaire

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i \times B_i}$$

de fonctions caractéristiques de rectangles intégrables sera appelée fonction intégrable élémentaire. Pour x fixé dans X,

$$f_x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x) \chi_{B_i}$$

est une fonction mesurable étagée sur Y et la fonction F définie sur X par

$$F(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(B_i) \chi_{A_i}(x)$$

est mesurable étagée sur X. De plus

$$\int_X F(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \nu(B_i) = \int_{X \times Y} f d\lambda.$$

Ainsi, pour toute fonction intégrable élémentaire,

$$\int_{X \times Y} f d\lambda = \int_X \Big(\int_Y f_x d\nu \Big) d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X f_y d\mu \Big) d\nu(y).$$

Nous allons voir que cette propriété a lieu pour toute fonction intégrable sur $X \times Y$.

Lemme IV.2.1. *Soit E un ensemble négligeable de $X \times Y$, c'est-à-dire que E est mesurable et que $\lambda(E) = 0$. Alors, pour presque tout x de X,*

$$\nu(E_x) = 0.$$

Démonstration. Nous devons montrer que l'ensemble

$$S = \{x \in X \mid \nu(E_x) > 0\}$$

est négligeable. Puisque S est la réunion des ensembles

$$S_n = \left\{ x \in X \;\middle|\; \nu(E_x) \geq \frac{1}{n} \right\} \qquad (n \in \mathbb{N}^*),$$

il suffit de montrer que l'ensemble S_n est négligeable. Fixons n, et soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lambda(E) = 0$, il existe une suite $\{R_k\}$ de rectangles mesurables telle que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(R_k) \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

(théorème II.1.1). Pour $x \in S_n$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu\big((R_k)_x\big) \geq \nu(E_x) \geq \frac{1}{n},$$

donc, par intégration sur x,

$$\frac{1}{n}\mu(S_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \nu\big((R_k)_x\big) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(R_k) \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mu(S_n) \leq \varepsilon$, et S_n est négligeable. □

***Théorème IV.2.2* (Théorème de Fubini).** *Soit f une fonction intégrable sur $X \times Y$. Pour presque tout x de X la fonction f_x est intégrable sur Y. La fonction F définie sur X par*

$$F(x) = \int_Y f_x d\nu$$

est intégrable sur X et

$$\int_{X \times Y} f d\lambda = \int_X F d\mu.$$

Démonstration. D'après la proposition II.1.2 il existe une suite $\{u_k\}$ de fonctions intégrables élémentaires sur $X \times Y$ telle que

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y) \qquad \lambda - p.p.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{X \times Y} |u_k| d\lambda < \infty.$$

D'après le théorème I.2.5 sur l'intégration terme à terme d'une série de fonctions positives,

$$\begin{aligned}\int_X \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \int_Y |u_k(x,y)| d\nu(y)\Big) d\mu(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \Big(\int_Y |u_k(x,y)| d\nu(y)\Big) d\mu(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X \times Y} |u_k| d\lambda < \infty.\end{aligned}$$

Donc, pour presque tout x,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_Y |u_k(x,y)| d\nu(y) < \infty.$$

De plus, d'après le lemme V.2.1, pour presque tout x,

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y) \qquad \nu - p.p.$$

Nous pouvons appliquer le théorème I.3.5 sur l'intégration terme à terme d'une série : pour presque tout x la fonction f_x est intégrable et, pour un tel x,

$$\int_Y f(x,y) d\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_Y u_k(x,y) d\nu(y).$$

Posons

$$F(x) = \int_Y f(x,y) d\nu(y),$$
$$U_k(x) = \int_Y u_k(x,y) d\nu(y).$$

La fonction F est définie presque partout, et, pour presque tout x,

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x).$$

De plus

$$|U_k(x)| \le \int_Y |u_k(x,y)| d\nu(y),$$
$$\int_X |U_k| d\mu \le \int_{X\times Y} |u_k| d\lambda,$$

donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k| d\mu < \infty.$$

Nous appliquons encore une fois le théorème I.3.5 sur l'intégration terme à terme d'une série,

$$\int_X F d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X U_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X\times Y} u_k d\lambda.$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{X\times Y} u_k d\lambda = \int_{X\times Y} f d\lambda,$$

nous avons bien montré que

$$\int_{X\times Y} f d\lambda = \int_X \Big(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \Big) d\mu(x). \qquad \square$$

***Théorème IV.2.3* (Théorème de Fubini-Tonelli).** *Soit f une fonction mesurable sur $X \times Y$ à valeurs dans $[0, \infty]$. La fonction F définie par*

$$F(x) = \int_Y f(x,y) d\nu(y)$$

est mesurable, et

$$\int_X F(x) d\mu(x) = \int_{X\times Y} f d\lambda.$$

Démonstration. Il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions intégrables sur $X \times Y$ telles que

$$0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f,$$

et, pour tout $(x,y) \in X \times Y$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y).$$

Posons

$$F_n(x) = \int_Y f_n(x,y) d\nu(y).$$

D'après le théorème de Fubini (V.2.2),

$$\int_X F_n d\mu = \int_{X\times Y} f_n d\lambda,$$

et, d'après le théorème de convergence monotone (I.2.1), pour tout x,

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x).$$

En appliquant une nouvelle fois le théorème de convergence monotone on en déduit que

$$\int_X F_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X F_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} f_n d\lambda = \int_{X\times Y} f d\lambda. \qquad \square$$

Dans la pratique on combine les théorèmes de Fubini (IV.2.2) et de Fubini-Tonelli (IV.2.3) de la façon suivante :

Corollaire IV.2.4. *Soit f une fonction mesurable sur $X \times Y$ à valeurs complexes.*

(i) $$\int_X \Big(\int_Y |f(x,y)| d\nu(y) \Big) d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X |f(x,y)| d\mu(x) \Big) d\nu(y).$$

Ou bien les deux membres sont égaux à un nombre réel fini ≥ 0, ou bien ils sont tous les deux infinis.

(ii) *S'ils sont finis, pour presque tout x de X, la fonction f_x est intégrable sur Y. La fonction F définie sur X par*

$$F(x) = \int_Y f_x d\nu$$

est intégrable sur X et

$$\int_{X \times Y} f d\lambda = \int_X F d\mu.$$

Il faut remarquer que le théorème I.3.5 en est un cas particulier. C'est le cas où $Y = \mathbb{N}$ et ν est la mesure de comptage,

$$\nu(\{k\}) = 1 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Dans le cas où $X = Y = \mathbb{N}$ et $\mu = \nu$ est la mesure de comptage, on obtient l'énoncé suivant sur les séries doubles :

Soit $\{u_{pq}\}$ une série double à termes complexes.

(i) $$\sum_{p=0}^{\infty} \Big(\sum_{q=0}^{\infty} |u_{pq}| \Big) = \sum_{q=0}^{\infty} \Big(\sum_{p=0}^{\infty} |u_{pq}| \Big).$$

Ou bien les deux membres sont égaux à un nombre réel fini, ou bien ils sont tous les deux infinis.

(ii) *S'ils sont finis,*

$$\sum_{p=0}^{\infty} \Big(\sum_{q=0}^{\infty} u_{pq} \Big) = \sum_{q=0}^{\infty} \Big(\sum_{p=0}^{\infty} u_{pq} \Big).$$

Les séries qui interviennent dans chacun des deux membres sont toutes absolument convergentes.

Exercices

Exercice IV.1. Soit $(X, \mathfrak{M})$ un espace mesurable et soit f une fonction mesurable sur X à valeurs réelles. Montrer que l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y\}$$

est mesurable relativement à l'espace mesurable produit $(X \times \mathbb{R}, \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{B})$, où $\mathfrak{B}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Exercice IV.2. a) En calculant l'intégrale de la fonction f

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{-xy},$$

sur un domaine convenable de $\mathbb{R}^2$, montrer que, pour $\alpha, \beta > 0$,

$$\int_0^\infty (\mathrm{e}^{\alpha x} - \mathrm{e}^{\beta x}) \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

b) De même en considérant la fonction f,

$$f(x, y) = \sin xy,$$

montrer que

$$\lim_{A \to \infty} \int_0^A (\cos \alpha x - \cos \beta x) \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Exercice IV.3. Soit f la fonction

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{-xy} \sin x.$$

a) Montrer que, pour $A > 0$, la fonction f est intégrable sur $[0, A] \times [0, \infty[$.
b) Montrer que

$$\lim_{A \to \infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice IV.4. Soit $D = \{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0\}$. Calculer l'intégrale

$$\int_D \frac{dx\, dy}{(1 + y)(1 + x^2 y)}.$$

En déduire que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice IV.5. Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que, si les fonctions f et g sont de carré intégrable sur $]0, \infty[$,

$$\Big| \int_D \frac{f(x)\overline{g(y)}}{x+y} dx\, dy \Big| \leq A \|f\|_2 \|g\|_2,$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$.
Indication : on pourra montrer que

$$\int_D \frac{f(x)\overline{g(y)}}{x+y} dx\, dy = \int_0^\infty \frac{1}{1+t} \Big(\int_0^\infty f(ty)\overline{g(y)} dy \Big) dt,$$

puis appliquer l'inégalité de Schwarz.

V

INTÉGRATION SUR $\mathbb{R}^n$

La théorie de la mesure trouve son origine dans le calcul des aires et des volumes. Nous y arrivons maintenant après avoir développé la théorie de la mesure de Lebesgue. Nous considérons dans ce chapitre des questions qui font intervenir, outre le calcul intégral, l'algèbre linéaire et le calcul différentiel. Nous introduirons dans ce chapitre la fonction gamma d'Euler car elle permet d'évaluer de nombreuses intégrales.

V.1. Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Il existe une unique mesure borélienne λ_n sur $\mathbb{R}^n$ telle que la mesure du pavé $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$, produit des n intervalles $I_1, \ldots I_n$ soit égale à

$$\lambda_n(Q) = \lambda(I_1) \cdots \lambda(I_n),$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. L'existence d'une telle mesure est une conséquence du théorème IV.1.2, et l'unicité vient du fait que la tribu borélienne $\mathfrak{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$ est engendrée par les pavés. La mesure λ_n s'appelle *mesure de Lebesgue* de $\mathbb{R}^n$. Elle est invariante par translation, c'est-à-dire que, pour tout ensemble borélien E, et tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$,

$$\lambda_n(E + a) = \lambda_n(E).$$

Proposition V.1.1. *Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ qui est invariante par translation et pour laquelle tout ensemble compact est de mesure finie. Il existe une constante* c *telle que*

$$\mu = \mathrm{c}\lambda_n.$$

Démonstration. C'est une simple généralisation de la proposition II.2.3. Soit $Q_0 = [0,1[\times\cdots\times[0,1[$, cube unité produit de n intervalles de longueur 1, et posons $\mathrm{c} = \mu(Q_0)$. Si $Q = [a_1, b_1[\times\cdots\times[a_n, b_n[$ est un pavé pour lequel les nombres a_i et b_i sont rationnels, des propriétés d'additivité et d'invariance par translation de la mesure μ on déduit que

$$\mu(Q) = \mathrm{c}(b_1 - a_1)\cdots(b_n - a_n).$$

La proposition résulte alors du fait que les pavés de ce type engendrent la tribu $\mathfrak{B}_n$. $\square$

Proposition V.1.2. *Soit T une transformation affine de $\mathbb{R}^n$,*

$$T : x \mapsto Ax + b,$$

où A est un transformaion linéaire inversible et b est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Pour tout borélien E de $\mathbb{R}^n$,

$$\lambda_n(\big(T(E)\big) = |\det A|\lambda_n(E).$$

Démonstration. La mesure μ définie sur la tribu $\mathfrak{B}_n$ par

$$\mu(E) = \lambda_n\big(T(E)\big)$$

est invariante par translations, et, si E est compact, $\mu(E)$ est fini. D'après la proposition précédente (VI.1.1), la mesure μ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue, $\mu = c\lambda_n$, avec $c = \lambda_n\big(T(Q_0)\big) = \lambda_n\big(A(Q_0)\big)$. Nous allons montrer que $c = |\det A|$. Notons que $c = c(A)$ vérifie

$$c(A_1A_2) = c(A_1)c(A_2), \quad c(I) = 1$$

(A_1 et A_2 sont deux transformations linéaires inversibles de $\mathbb{R}^n$, et I est la transformation identique). Si D est une matrice diagonale,

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n, \end{pmatrix}$$

alors $D(Q_0)$ est un pavé dont les longueurs des côtés sont les nombres $|d_1|, \ldots, |d_n|$, donc

$$c(D) = |d_1\cdots d_n| = |\det D|.$$

Supposons que U soit une transformation orthogonale et soit B_n la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},$$

pour la norme euclidienne,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Puisque $U(B_n) = B_n$, de la relation

$$\lambda_n\big(U(B_n)\big) = c(U)\lambda_n(B_n)$$

on déduit que $c(U) = 1$. Le résultat s'en déduit car toute transformation linéaire A de $\mathbb{R}^n$ peut être décomposée en

$$A = U_1 D U_2,$$

où D est une matrice diagonale, U_1 et U_2 sont orthogonales. □

Corollaire V.1.3. *Soit T une transformation affine de $\mathbb{R}^n$,*

$$Tx = Ax + b.$$

Si f est une fonction positive mesurable sur $\mathbb{R}^n$, ou si f est une fonction à valeurs complexes intégrable sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)d\lambda_n(y) = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Tx)d\lambda_n(x).$$

V.2. Mesure superficielle sur la sphère

Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

L'application

$$]0, \infty[\times S \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (r, u) \mapsto ru,$$

est un homéomorphisme. Il lui correspond un isomorphisme des tribus boréliennes de $]0, \infty[\times S$ et de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Proposition V.2.1. *Pour un borélien E de S posons*

$$\sigma(E) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon} \lambda_n \big(\{ x = ru \mid u \in E,\ 1 < r < 1 + \varepsilon \} \big).$$

Cette limite existe et σ est une mesure borélienne sur S.

Démonstration. Si E est un borélien de S, notons

$$E' = \{ x = ru \mid u \in E,\ 0 < r < 1 \},$$

et posons

$$\mu(E) = \lambda_n(E').$$

Alors μ est une mesure borélienne sur S et

$$\lambda_n \big(\{ x = ru \mid u \in E,\ a < r < b \} \big) = (b^n - a^n) \mu(E).$$

Par suite

$$\sigma(E) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{1}{\varepsilon} \big((1+\varepsilon)^n - 1 \big) \mu(E) = n \mu(E). \qquad \square$$

La mesure σ est invariante par les transformations orthogonales : si U est une transformation orthogonale et si E est un borélien de S,

$$\sigma\big(U(E) \big) = \sigma(E).$$

La mesure de Lebesgue λ_n sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq]0, \infty[\times S$ est égale au produit des mesures $r^{n-1} dr$ sur $]0, \infty[$ et σ sur S. En effet, si $F = \{ x = ru \mid a < r < b,\ u \in E \}$, où E est un borélien de S,

$$\lambda_n(F) = \frac{1}{n} (b^n - a^n) \sigma(E) = \Big(\int_a^b r^{n-1} dr \Big) \sigma(E),$$

et les ensembles de ce type engendrent la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Posons $\omega_n = \sigma(S)$. En particulier $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$. Nous évaluerons ω_n pour tout n un peu plus loin, et retrouverons les valeurs annoncées pour ω_2 et ω_3. D'après le théorème de Fubini (IV.2.2), si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$, pour presque tout $r > 0$, la fonction $u \mapsto f(ru)$ est intégrable sur S et

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda_n(x) = \int_0^\infty \Big(\int_S f(ru) d\sigma(u) \Big) r^{n-1} dr.$$

En particulier, si f est radiale : $f(x) = F\big(\|x\|\big)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda_n(x) = \omega_n \int_0^\infty F(r) r^{n-1} dr.$$

Nous en déduisons les conditions suffisantes suivantes d'intégrabilité. Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles ou complexes et soit $R > 0$.

- Si, pour $\|x\| \leq R$, $|f(x)| \leq C\|x\|^{-\alpha}$, avec $\alpha < n$, alors f est intégrable dans la boule de centre 0 et de rayon R.

- Si, pour $\|x\| \geq R$, $|f(x)| \leq C\|x\|^{-\alpha}$, avec $\alpha > n$, alors f est intégrable dans le complémentaire de la boule de centre 0 et de rayon R.

Comme application nous allons évaluer l'*intégrale de Gauss*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx.$$

Pour cela calculons l'intégrale sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$

D'après le théorème de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2} dy = I^2,$$

et, d'après la formule ci-dessus,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda_2 = 2\pi \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2} r \, dr = \pi.$$

On a ainsi montré que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Il est utile d'introduire maintenant la *fonction gamma* d'Euler car elle permet d'évaluer de nombreuses intégrales. C'est la fonction d'une variable complexe z définie pour $\Re z > 0$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} dt.$$

Par une intégration par parties on obtient, pour $0 < \alpha < \beta \leq \infty$,

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-t} t^z dt = -\mathrm{e}^{-t} t^z \Big|_\alpha^\beta + z \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} dt,$$

et, lorsque α tend vers 0, et β vers l'infini,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Puisque $\Gamma(1) = 1$, il en résulte que

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ainsi la fonction $x \mapsto \Gamma(x+1)$ est une interpolation de la fonction factorielle.

En posant $t = x^2$ on voit qu'elle s'écrit aussi

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} x^{2z-1}\,dx,$$

et que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Pour évaluer la constante ω_n nous calculons de deux façons différentes l'intégrale

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\|x\|^2}\,d\lambda_n(x).$$

D'une part

$$I_n = \Big(\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x_1^2}dx_1\Big)\cdots\Big(\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x_n^2}dx_n\Big) = \big(\sqrt{\pi}\big)^n,$$

et d'autre part

$$I_n = \omega_n \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2} r^{n-1}dr = \omega_n \tfrac{1}{2}\,\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big).$$

On en déduit que

$$\omega_n = 2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}.$$

V.3. La formule de changement de variables

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et $\varphi : U \to V$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Nous supposons que φ est bijective, et que le déterminant jacobien $J\varphi(x)$ de φ ne s'annule en aucun point x de U. Alors φ^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^1$, et, sous ces conditions, on dit que φ est un *difféomorphisme* de U sur V. L'application $E \mapsto \varphi(E)$ est un isomorphisme de la tribu borélienne de U sur celle de V, et $E \mapsto \lambda_n\big(\varphi(E)\big)$ est une mesure borélienne sur U.

Théorème V.3.1.

(i) *Pour tout borélien E de U,*

$$\lambda_n\big(\varphi(E)\big) = \int_E |J\varphi(x)| d\lambda_n(x).$$

(ii) *Pour toute fonction f mesurable sur V à valeurs dans $[0, \infty]$,*

$$\int_V f(y) d\lambda_n(y) = \int_U f\big(\varphi(x)\big) |J\varphi(x)| d\lambda_n(x).$$

(iii) *Pour toute fonction f intégrable sur V à valeurs réelles ou complexes, la fonction $(f \circ \varphi)|J\varphi|$ est intégrable sur U et*

$$\int_V f(y) d\lambda_n(y) = \int_U f\big(\varphi(x)\big) |J\varphi(x)| d\lambda_n(x).$$

Démonstration. Avant de commencer la démonstration remarquons que si les propriétés (i), (ii) et (iii) sont vraies pour des difféomorphismes

$$\varphi : U \to V, \quad \psi : V \to W,$$

alors elles sont vraies pour $\theta = \psi \circ \varphi : U \to W$.

C'est une conséquence de la relation

$$J(\psi \circ \varphi)(x) = J\psi\big(\varphi(x)\big) J\varphi(x) \qquad (x \in U).$$

(a) Montrons d'abord que la propriété (i) implique les propriétés (ii) et (iii). Si f est la fonction caractéristique du borélien F de V, alors $f \circ \varphi$ est la fonction caractéristique du borélien $E = \varphi^{-1}(F)$, donc

$$\int_V f(y) d\lambda_n(y) = \lambda_n\big(\varphi(E)\big) = \int_E |J\varphi(x)| d\lambda_n(x)$$

d'après (i), c'est-à-dire

$$\int_V f(y) d\lambda_n(y) = \int_U f\big(\varphi(x)\big) |J\varphi(x)| d\lambda_n(x).$$

Si f est une fonction mesurable étagée, c'est-à-dire une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles boréliens, la propriété a encore lieu par linéarité.

Soit f une fonction mesurable sur V à valeurs dans $[0,\infty]$. Il existe une suite croissante de fonctions mesurables étagées $\{f_k\}$ qui converge vers f (I.1.1). D'après ce qui précède, pour tout k,

$$\int_V f_k(y)d\lambda_n(y) = \int_U f_k\big(\varphi(x)\big)|J\varphi(x)|d\lambda_n(x).$$

Le théorème de convergence monotone (I.2.1) permet de passer à la limite,

$$\int_V f(y)d\lambda_n(y) = \int_U f\big(\varphi(x)\big)|J\varphi(x)|d\lambda_n(x).$$

Nous avons montré que (i) implique (ii).

Soit f une fonction intégrable sur V à valeurs complexes. D'après la propriété (ii),

$$\int_V |f(y)|d\lambda_n(y) = \int_U |f\big(\varphi(x)\big)||J\varphi(x)|d\lambda_n(x),$$

donc la fonction $x \mapsto f\big(\varphi(x)\big)|J\varphi(x)|$ est intégrable sur U. En décomposant f en

$$f = f_1 + if_2 = (f_1^+ - f_1^-) + i(f_2^+ - f_2^-),$$

où $f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^-$ sont des fonctions positives, on en déduit la propriété (iii).

(b) Nous allons démontrer le théorème par récurrence sur la dimension. Supposons d'abord $n = 1$. Si E est un intervalle d'extrémités α et β, $\varphi(E)$ est un intervalle d'extrémités $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$, donc

$$\lambda_n\big(\varphi(E)\big) = |\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)| = \Big|\int_\alpha^\beta \varphi'(x)dx\Big|.$$

Puisque φ' garde un signe constant sur $[\alpha,\beta]$,

$$\lambda_n\big(\varphi(E)\big) = \int_\alpha^\beta |\varphi'(x)|dx.$$

La tribu borélienne de U étant engendrée par les intervalles contenus dans U, la propriété (i) est démontrée, et par suite, d'après (a), les propriétés (i) et (ii) aussi.

Supposons que l'énoncé soit vrai pour $n-1$.

(c) Supposons d'abord que φ est un difféomorphisme de la forme

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1,\ldots,x_n), \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n), \\ y_n &= x_n. \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x = (x', t)$, avec $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$. Si E est un ensemble de $\mathbb{R}^n$, on notera

$$E_t = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x', t) \in E\}.$$

Soient E un borélien de U, et $F = \varphi(E)$. Alors

$$F_t = \varphi_t(E_t),$$

où φ_t est le difféomorphisme de U_t dans V_t défini par

$$\varphi_t(x') = \varphi(x', t),$$

et $J\varphi_t(x') = J\varphi(x', t)$. D'après l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}\lambda_{n-1}(F_t) &= \lambda_{n-1}\big(\varphi_t(E_t)\big)\\ &= \int_{E_t} |J\varphi_t(x')| d\lambda_n(x')\\ &= \int_{E_t} |J\varphi(x', t)| d\lambda_{n-1}(x').\end{aligned}$$

Puisque la mesure λ_n est égale au produit des mesures λ_{n-1} et $\lambda_1 = \lambda$,

$$\begin{aligned}\lambda_n\big(\varphi(E)\big) = \lambda_n(F) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(F_t) dt\\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{E_t} |J\varphi(x', t)| d\lambda_n(x')\Big) dt = \int_E |J\varphi(x)| d\lambda_n(x).\end{aligned}$$

La propriété (i) est ainsi démontrée pour un tel difféomorphisme, et par suite, d'après (a), les propriétés (ii) et (iii) le sont aussi.

(d) Supposons maintenant que U est un pavé ouvert et que φ est un difféomorphisme de U sur un ouvert V tel que $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$ ne s'annule pas. Soit ψ l'application définie par, si $z = \psi(x)$,

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi_1(x_1, \dots, x_n),\\ z_2 &= x_2,\\ &\vdots\\ z_n &= x_n. \end{aligned}$$

L'application ψ est un difféomorphisme de U sur un ouvert W. En effet ψ est injective et $J\psi = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \neq 0$. L'application $\theta = \varphi \circ \psi^{-1}$ est un difféomorphisme de W sur V qui conserve la première coordonnée. Les difféomorphismes ψ et θ sont du type étudié en (c), donc l'énoncé du théorème est vrai pour ψ et θ, et par suite pour $\varphi = \theta \circ \psi$.

Soit φ un difféomorphisme de U sur V. En tout point x de U l'une des dérivées $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}$ ne s'annule pas, et il existe un pavé ouvert U_x contenant x sur lequel cette dérivée ne s'annule pas. Si E est un pavé contenu dans U_x la propriété (i) a lieu d'après ce qui précède. On en déduit que, si E est une réunion finie de pavés contenue dans U,

$$\lambda_n\big(\varphi(E)\big) = \int_E |J\varphi(x)| d\lambda_n(x).$$

Cette égalité se prolonge à la tribu borélienne (c'est une conséquence du théorème de prolongement II.1.1). Ainsi la propriété (i) est démontrée, et nous avons vu qu'elle implique les propriétés (ii) et (iii). □

Comme application du théorème de changement de variables nous allons établir les formules d'intégration en coordonnées polaires et en coordonnées sphériques.

Soient $U =]0, \infty[\times] - \pi, \pi[$, et $V = \mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite $\{(x, y) \mid y = 0, x \leq 0\}$, et soit φ l'application de U sur V définie par

$$\varphi : (r, \theta) \mapsto (r \cos\theta, r \sin\theta).$$

L'application φ est un difféomorphisme et $J\varphi(r, \theta) = r$. Puisqu'une demi-droite est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue λ_2, si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^2$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta.$$

Rappelons que la fonction gamma peut s'écrire

$$\Gamma(p) = 2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} x^{2p-1} dx \quad (\Re p > 0).$$

Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0\}.$$

Si $\Re p > 0$ et $\Re q > 0$,

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} d\lambda_2(x, y) \\
&= 4 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r^2} (r\cos\theta)^{2p-1} (r\sin\theta)^{2q-1} r\, dr\, d\theta \\
&= 2\Gamma(p+q) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2p-1} (\sin\theta)^{2q-1} d\theta.
\end{aligned}$$

Définissons la *fonction bêta* d'Euler comme étant la fonction de deux variables suivante
$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$
Nous avons obtenu, pour $\Re p > 0$, $\Re q > 0$,
$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1} d\theta,$$
qui s'écrit aussi, en posant $\cos^2\theta = t$,
$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt.$$
Remarquons que $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$, et nous retrouvons que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Soient maintenant
$$U = \{(r,\theta,\varphi) \mid r > 0,\ 0 < \theta < \pi,\ -\pi < \varphi < \pi\},$$
et
$$V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid y = 0, x \leq 0\},$$
et soit φ l'application de U sur V définie par
$$\varphi : (r,\theta,\varphi) \mapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$
L'application φ est un difféomorphisme et $J\varphi(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\theta$. Le demi-plan $\{(x,y,z) \mid y = 0,\ x \leq 0\}$ étant de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue λ_3, si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^3$,
$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)d\lambda_3(x,y,z)\\ &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.\end{aligned}$$

On en déduit une formule d'intégration pour la mesure superficielle sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^3$. Considérons l'application ψ de $]0,\pi[\times]-\pi,\pi[$ dans S définie par
$$\psi : (\theta,\varphi) \mapsto (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$
Cette application est injective, mais n'est pas surjective. Le complémentaire de son image est un demi-cercle qui est de mesure nulle pour la mesure superficielle σ. Si f est une fonction intégrable sur S par rapport à la mesure σ,
$$\int_S f d\sigma = \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \tilde{f}(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$
où on a posé $\tilde{f} = f \circ \psi$.

Exercices

Exercice V.1. a) Quel est le volume $\lambda_3(D)$ du domaine D de $\mathbb{R}^3$ intersection de la boule de centre 0 et de rayon $a > 0$, et du cylindre défini par $x^2+y^2-ax \leq 0$?

b) Quelle est l'aire $\sigma(A)$ de la portion A de la sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre 0 et de rayon $a > 0$ contenue dans le cylindre défini par $x^2 + y^2 - ax \leq 0$?

Exercice V.2. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique $n \times n$ définie positive, et soit q la forme quadratique définie positive associée,

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j .$$

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-q(x)} d\lambda_n(x) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}} .$$

Exercice V.3. Soit C le cône de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$C = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 < x_3^2,\ x_3 > 0 \} .$$

Pour $y \in \mathbb{R}^3$ on pose

$$F(y) = \int_C \mathrm{e}^{-(x|y)} d\lambda_3(x),$$

où $(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

a) Calculer $F(y)$ pour $y = (0, 0, y_3)$, $y_3 > 0$.

b) Montrer que F est invariante par les transformations linéaires définies par les matrices

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & 0 & \operatorname{sh} t \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}.$$

c) Montrer que, pour $y \in C$,

$$F(y) = \frac{2\pi}{(y_3^2 - y_1^2 - y_2^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Exercice V.4. a) Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$, et soit φ un isomorphisme holomorphe de U sur V. Soit f une fonction intégrable sur V par rapport à la mesure de Lebesgue λ_2 sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\int_V f(z) d\lambda_2(z) = \int_U f\big(\varphi(w)\big) |\varphi'(w)|^2 d\lambda_2(w).$$

b) Soit U le demi-plan supérieur

$$U = \{z = x + \mathrm{i}y \mid y > 0\},$$

et soit μ la mesure définie sur U de densité y^{-2} par rapport à la mesure de Lebesgue λ_2. La transformation φ,

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$, est un automorphisme holomorphe de U. Montrer que, pour toute fonction f définie sur U intégrable par rapport à la mesure μ,

$$\int_U (f \circ \varphi)(z) d\mu(z) = \int_U f(z) d\mu(z).$$

Exercice V.5. Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, et soit

$$S_+ = \{u \in S \mid u_1 > 0, \dots, u_n > 0\}.$$

Montrer que, pour $\Re p_1 > 0, \dots, \Re p_n > 0$,

$$\int_{S_+} u_1^{2p_1-1} \dots u_n^{2p_n-1} d\sigma(u) = 2^{1-n} \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n)}.$$

Indication : considérer l'intégrale

$$\int_D \mathrm{e}^{-\|x\|^2} x_1^{2p_1-1} \cdots x_n^{2p_n-1} d\lambda_n(x),$$

où

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}.$$

Exercice V.6. On note D le domaine de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0, \dots, x_n > 0\},$$

et Δ l'ensemble défini par

$$\Delta = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u_1 > 0, \dots, u_n > 0, u_1 + \dots + u_n = 1\}.$$

Montrer qu'il existe une mesure μ sur Δ telle que, si f est une fonction intégrable sur D,

$$\int_D f(x) d\lambda_n(x) = \int_0^\infty \Big(\int_\Delta f(tu) d\mu(u) \Big) t^{n-1} dt,$$

et que la masse totale de la mesure μ est égale à $(n-1)!$.

a) Soit D_1 le domaine de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0,\ \dots,\ x_n > 0,\ x_1 + \cdots + x_n < 1\}.$$

Quel est le volume de D_1 ?

b) Soient $p_1, \dots, p_n$ des nombres complexes de partie réelle positive. On note $q = p_1 + \cdots + p_n$. Montrer que

$$\int_\Delta u_1^{p_1-1} \dots u_n^{p_n-1} d\mu(u) = \frac{\Gamma(p_1)\dots\Gamma(p_n)}{\Gamma(q)},$$

et que,

$$\int_{D_1} x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} d\lambda_n(x) = \frac{\Gamma(p_1)\dots\Gamma(p_n)}{\Gamma(q+1)}.$$

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels positifs. Montrer que

$$\int_\Delta (a_1u_1 + \cdots + a_nu_n)^{-q} u_1^{p_1-1} \dots u_n^{p_n-1} d\mu(u)$$
$$= a_1^{-p_1} \dots a_n^{-p_n} \frac{\Gamma(p_1)\dots\Gamma(p_n)}{\Gamma(q)}.$$

c) Soit F une fonction mesurable ≥ 0 sur $]0, \infty[$. On considère l'intégrale suivante (appelée *intégrale de Dirichlet*)

$$I(F; p_1, \dots, p_n) = \int_D F(x_1 + \cdots + x_n) x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} d\lambda_n(x).$$

Montrer que

$$I(F; p_1, \dots, p_n) = \frac{\Gamma(p_1)\dots\Gamma(p_n)}{\Gamma(q)} \int_0^\infty F(t)t^{q-1}dt.$$

d) Pour $p \geq 1$ on considère sur $\mathbb{R}^n$ la norme définie par

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Calculer le volume $\lambda_n(B)$ de la boule unité

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_p < 1\}.$$

e) Déterminer pour quelles valeurs des nombres complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ l'intégrale suivante est définie,

$$\int_D \frac{d\lambda_n(x)}{1 + x_1^{\alpha_1} + \cdots + x_n^{\alpha_n}},$$

et évaluer cette intégrale à l'aide de la fonction gamma.

***Exercice* V.7.** Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, et soit F la fonction définie dans $\mathbb{R}^3$ par

$$F(x) = \int_S \frac{d\sigma(u)}{\|x-u\|}.$$

Montrer que

$$F(x) = 4\pi \text{ si } \|x\| \leq 1, \text{ et } F(x) = \frac{4\pi}{\|x\|} \text{ si } \|x\| \geq 1.$$

VI
MESURES DE LEBESGUE-STIELTJES

Les mesures de Lebesgue-Stieltjes constituent une large classe de mesures sur la droite réelle. Ce sont celles pour lesquelles la mesure d'un ensemble compact est finie. Dans la présentation de la théorie de la mesure nous avons adopté le point de vue ensembliste. Il existe un autre point de vue, c'est le point de vue fonctionnel des mesures de Radon sur un espace topologique localement compact, suivant lequel on considère au départ une forme linéaire positive sur l'espace des fonctions continues à support compact. Le théorème de Riesz établit le lien qui existe entre ces deux points de vue. Le point de vue fonctionnel permet de définir une notion de convergence pour une suite de mesures.

VI.1. Intégrale de Riemann-Stieltjes

Soit $X =]\alpha, \beta[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ($-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$), et soit σ une fonction définie sur X croissante et continue à gauche. Nous allons définir l'*intégrale de Riemann-Stieltjes* d'une fonction définie sur un intervalle $[a, b] \subset X$ relativement à la fonction croissante σ. On considère d'abord le cas d'une fonction f en escalier. Supposons qu'il existe une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

de l'intervalle $[a, b]$, et des nombres $A_0, \ldots, A_n$ tels que

$$f(x) = A_i \text{ sur } [x_i, x_{i+1}[, \;\; f(b) = A_n.$$

L'intégrale de f est alors définie par

$$\int_a^b f d\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \big(\sigma(x_{i+1}) - \sigma(x_i)\big) + A_n \big(\sigma(b+) - \sigma(b)\big).$$

(On note $\sigma(b+)$ la limite à droite de la fonction σ en b.) On vérifie que cette définition est indépendante du choix de la subdivision, que l'intégrale est une forme linéaire positive sur l'espace $\mathcal{E}_0([a,b])$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ du type précédent, et vérifie

$$\left|\int_a^b f d\sigma\right| \leq \int_a^b |f| d\sigma.$$

Si f est une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs réelles et bornée on pose

$$\mathcal{U}_0(f) = \sup\left\{\int_a^b u d\sigma \;\middle|\; u \in \mathcal{E}_0([a,b]),\ u \leq f\right\},$$
$$\mathcal{V}_0(f) = \inf\left\{\int_a^b v d\sigma \;\middle|\; v \in \mathcal{E}_0([a,b]),\ v \geq f\right\}.$$

Nous dirons que la fonction f est *intégrable au sens de Riemann-Stieltjes* si $\mathcal{U}_0(f) = \mathcal{V}_0(f)$. L'intégrale est alors le nombre

$$\int_a^b f d\sigma = \mathcal{U}_0(f) = \mathcal{V}_0(f).$$

Remarquons que, si $\sigma(x) = x$, nous obtenons la notion usuelle de fonction intégrable au sens de Riemann (voir II.3). Pour qu'une fonction f soit intégrable au sens de Riemann-Stieltjes il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $u, v \in \mathcal{E}_0([a,b])$ telles que

$$u \leq f \leq v, \quad \int_a^b (v-u) d\sigma \leq \varepsilon.$$

Si une fonction f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions f_n intégrables au sens de Riemann-Stieltjes, alors f est intégrable au sens de Riemann-Stieltjes et

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n d\sigma = \int_a^b f d\sigma.$$

En particulier une fonction f continue sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann-Stieltjes car, étant uniformément continue, f est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

L'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann-Stieltjes est un espace vectoriel, l'intégrale est une forme linéaire sur cet espace vectoriel et

$$\left|\int_a^b f d\sigma\right| \leq \int_a^b |f| d\sigma.$$

VI.2. Mesures de Lebesgue-Stieltjes

Nous allons généraliser la construction de la mesure de Lebesgue que nous avons présentée en II.2 et associer à une fonction croissante σ sur un intervalle $X =]\alpha, \beta[$ $(-\infty \le \alpha < \beta \le \infty)$ une mesure μ sur l'espace mesurable $(X, \mathfrak{B})$ ($\mathfrak{B}$ est la tribu borélienne de X) telle que la mesure de l'intervalle semi-fermé $[a, b[$ $(\alpha < a < b < \beta)$ soit égale à $\sigma(b) - \sigma(a)$,

$$\mu([a, b[) = \sigma(b) - \sigma(a).$$

Puisque

$$[a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}[,$$

on doit avoir

$$\sigma(b) - \sigma(a) = \lim_{n\to\infty} \left(\sigma\big(b - \frac{1}{n}\big) - \sigma(a)\right),$$

donc la fonction σ doit être continue à gauche, ce que nous supposerons dans la suite.

Théorème VI.2.1. *Soit σ une fonction croissante sur X continue à gauche. Il existe une unique mesure μ sur l'espace mesurable $(X, \mathfrak{B})$ telle que, pour tout intervalle semi-fermé $[a, b[$,*

$$\mu([a, b[) = \sigma(b) - \sigma(a).$$

Démonstration. La démonstration est semblable à celle du théorème II.2.2 (qui traite le cas particulier où $\sigma(x) = x$). Pour abréger, un intervalle $[a, b[$ fermé à gauche et ouvert à droite sera dit *semi-fermé*. Soit $\mathfrak{A}$ l'algèbre de Boole engendrée par les intervalles semi-fermés. Un ensemble de $\mathfrak{A}$ sera appelé dans cette section ensemble élémentaire. C'est une réunion finie d'intervalles semi-fermés. Un tel ensemble E peut s'écrire

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} I_k,$$

où $I_1, \ldots, I_n$ sont des intervalles semi-fermés disjoints,

$$I_k = [a_k, b_k[, \quad A \le a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n \le B.$$

On pose

$$\mu(E) = \sum_{k=1}^{n} \big(\sigma(b_k) - \sigma(a_k)\big).$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de prolongement (II.1.1) on doit établir les propriétés suivantes :

(1) Si $\{E_n\}$ est une suite d'ensembles élémentaires deux à deux disjoints dont la réunion E est aussi un ensemble élémentaire, alors

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

(2) Il existe une suite $\{X_n\}$ d'ensembles élémentaires telle que, pour tout n, $\mu(X_n) < \infty$, et

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

La démonstration de la propriété (1) est tout à fait semblable à celle que nous avons exposée dans le cas de la mesure de Lebesgue. Pour vérifier la propriété (2) on peut prendre $X_n = [\alpha_n, \beta_n[$, où $\{\alpha_n\}$ est une suite strictement décroissante de limite α, et $\{\beta_n\}$ une suite strictement croissante de limite β. $\square$

Soit $\mathfrak{M}$ la tribu complétée de la mesure borélienne $\mathfrak{B}$ relativement à la mesure μ. Une fonction f définie sur X est dite *intégrable au sens de Lebesgue-Stieltjes* si elle est intégrable relativement à l'espace mesuré $(X, \mathfrak{M}, \mu)$. On montre comme en II.3 qu'une fonction définie sur $[a, b] \subset X$ et bornée qui est intégrable au sens de Riemann-Stieltjes est intégrable au sens de Lebesgue-Stieltjes.

Si μ est la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à une fonction croissante σ, alors tout intervalle I d'extrémités a et b telles que $\alpha < a < b < \beta$, c'est-à-dire relativement compact dans X, est de mesure finie : $\mu(I) < \infty$. Réciproquement, si μ est une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathfrak{B})$ telle que la mesure de tout intervalle relativement compact dans X soit finie, alors μ est la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à une fonction croissante σ.

VI.3. Théorème de Riesz

Notons $\mathcal{C}_c(X)$ l'espace des fonctions continues sur $X =]\alpha, \beta[$ à valeurs réelles et à support compact contenu dans X. Rappelons que le *support* d'une fonction f, noté $\operatorname{supp}(f)$ est défini par

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

À une mesure de Lebesgue-Stieltjes μ sur X on associe la forme linéaire L sur $\mathcal{C}_c(X)$ définie par

$$L(f) = \int_X f \, d\mu.$$

C'est une forme linéaire positive dans le sens suivant : si $f \geq 0$ alors $L(f) \geq 0$. La forme linéaire L détermine la mesure μ. En effet, soient μ et ν deux mesures de Lebesgue-Stieltjes telles que, pour toute fonction f de $\mathcal{C}_c(X)$,

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f \, d\nu.$$

Alors, pour tout intervalle ouvert borné U,

$$\mu(U) = \nu(U),$$

et par suite $\mu = \nu$. Nous allons établir la réciproque suivante.

Théorème VI.3.1 (Théorème de Riesz). *Soit L une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(X)$. Il existe une mesure de Lebesgue-Stieltjes μ unique telle que, pour toute fonction f de $\mathcal{C}_c(X)$,*

$$L(f) = \int_X f \, d\mu.$$

Démonstration. Nous savons déjà que si une telle mesure μ existe, alors elle est unique.

(a) Nous allons prolonger la forme linéaire L à un espace vectoriel $\mathcal{F}$ de fonctions définies sur X contenant $\mathcal{C}_c(X)$ et les fonctions caractéristiques d'intervalles relativement compacts dans X. Soit $\{f_n\}$ une suite croissante de fonctions de $\mathcal{C}_c(X)$ vérifiant

$$0 \leq f_n \leq h,$$

où h est une fonction de $\mathcal{C}_c(X)$, et posons

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

La suite $L(f_n)$ est croissante et majorée par $L(h)$, donc a une limite que nous noterons $L(f)$. Nous devons nous assurer que cette limite ne dépend que de f et non du choix de la suite $\{f_n\}$. Ce sera une conséquence du lemme suivant.

Lemme VI.3.2. *Soient $\{f_n\}$ et $\{g_k\}$ deux suites croissantes de $\mathcal{C}_c(X)$ vérifiant*

$$0 \leq f_n \leq h, \quad 0 \leq g_k \leq h,$$

où h est une fonction de $\mathcal{C}_c(X)$. Posons

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x).$$

Si $f \leq g$, alors

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n) \leq \lim_{k\to\infty} L(g_k).$$

Démonstration. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné contenant le support de h, et soit u une fonction de $\mathcal{C}_c(X)$ égale à 1 sur $[a, b]$. Pour n fixé la suite

$$\varphi_k(x) = \big(f_n(x) - g_k(x)\big)_+$$

est décroissante et tend vers 0. Donc, d'après le théorème de Dini (*cf.* Albert (1997), p. 73, ou Avanissian (1996) corollaire 14.4.3, p. 350), elle tend vers 0 uniformément sur $[a, b]$: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe k_0 (dépendant de n) tel que, si $k \geq k_0$,

$$\big(f_n(x) - g_k(x)\big)_+ \leq \varepsilon u(x),$$

et aussi

$$L\big((f_n - g_k)_+\big) \leq \varepsilon L(u).$$

Donc

$$\lim_{k\to\infty} L\big((f_n - g_k)_+\big) = 0.$$

Puisque

$$f_n - g_k \leq (f_n - g_k)_+,$$

alors

$$L(f_n) - L(g_k) \leq L\big((f_n - g_k)_+\big).$$

Quand k tend vers l'infini,

$$L(f_n) \leq \lim_{k\to\infty} L(g_k),$$

et quand n tend vers l'infini

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n) \leq \lim_{k\to\infty} L(g_k). \qquad \square$$

Notons $\mathcal{F}_+$ l'ensemble des fonctions f pour lesquelles il existe une telle suite convergeant vers f. Si f_1 et f_2 appartiennent à $\mathcal{F}_+$, alors $f_1 + f_2$ aussi et il résulte du lemme que

$$L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2).$$

De même si $f \in \mathcal{F}_+$ et si $\lambda \geq 0$, alors $\lambda f \in \mathcal{F}_+$ et

$$L(\lambda f) = \lambda L(f).$$

Remarquons que $\mathcal{F}_+$ contient $\mathcal{C}_c(X)_+$ et les fonctions caractéristiques d'intervalles ouverts relativement compacts dans X. Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par $\mathcal{F}_+$. Une fonction $f \in \mathcal{F}$, s'écrit $f = f_1 - f_2$ avec $f_1, f_2 \in \mathcal{F}^+$, et nous poserons

$$L(f) = L(f_1) - L(f_2).$$

Le nombre $L(f)$ ne dépend pas de la décomposition choisie et L est une forme linéaire sur $\mathcal{F}$. D'après le lemme, cette forme linéaire est positive, c'est-à-dire que $L(f) \geq 0$ si $f \geq 0$. L'espace vectoriel $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{C}_c(X)$ et les fonctions en escalier à support compact contenu dans X.

(b) Fixons $x_0 \in X$ et soit σ la fonction définie sur X par

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= L\big(\chi_{[x_0,x[}\big) \text{ si } x \geq x_0, \\ &= -L\big(\chi_{[x,x_0[}\big) \text{ si } x < x_0. \end{aligned}$$

La fonction σ est croissante et, si $[a,b[$ est relativement compact dans X,

$$L\big(\chi_{[a,b[}\big) = \sigma(b) - \sigma(a).$$

Nous allons voir que σ est continue à gauche. Puisque, si $a < x_0$,

$$\chi_{[x_0,x[} = \chi_{]a,x[} - \chi_{]a,x_0[},$$

ce sera une conséquence du lemme suivant.

Lemme VI.3.3. *Soient $I =]a,b[$ un intervalle ouvert relativement compact dans X, et $I_n =]a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}[$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} L\big(\chi_{I_n}\big) = L\big(\chi_I\big).$$

Démonstration. Soit $\{f_n\}$ une suite croissante de fonctions de $\mathcal{C}_c(X)$ vérifiant

$$0 \leq f_n \leq 1, \ \operatorname{supp}(f_n) \subset I_n, \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_I(x).$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n) = L\big(\chi_I\big),$$

et, puisque $f_n \leq \chi_{I_n} \leq \chi_I$,

$$L(f_n) \leq L\big(\chi_{I_n}\big) \leq L\big(\chi_I\big).$$

Par suite

$$\lim_{n\to\infty} L\big(\chi_{I_n}\big) = L\big(\chi_I\big). \qquad \square$$

Soit μ la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à la fonction croissante σ. Nous allons montrer que, si $f \in \mathcal{C}_c(X)$, alors

$$\int_X f \, d\mu = L(f).$$

Si f est une fonction en escalier sur $[a, b] \subset X$, les intégrales de f au sens de Lebesgue et au sens de Riemann-Stieltjes sont égales :

$$\int_{[a,b]} f\ d\mu = L(f) = \int_a^b f d\sigma.$$

Soit f une fonction continue à support contenu dans $[a, b]$. Il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions en escalier à support dans $[a, b]$ qui converge uniformément vers f. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que, si $n \geq N$, $|f_n - f| \leq \varepsilon$. alors

$$|L(f_n) - L(f)| \leq \varepsilon L(\chi_{[a,b]}).$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n) = L(f).$$

D'autre part,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\ d\mu = \int_X f\ d\mu. \qquad \square$$

VI.4. Convergence des mesures

Nous notons $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures de Lebesgue-Stieltjes sur $X =]\alpha, \beta[$. Cet ensemble a une structure de cône convexe : si μ et ν sont deux mesures de $\mathcal{M}(X)$, et si a et b sont deux nombres ≥ 0, alors $a\mu + b\nu$ est aussi une mesure de $\mathcal{M}(X)$. D'après le théorème de Riesz (VI.3.1), $\mathcal{M}(X)$ est en correspondance bijective avec l'ensemble des formes linéaires positives sur $\mathcal{C}_c(X)$.

Nous dirons qu'une suite $\{\mu_n\}$ de mesures de $\mathcal{M}(X)$ converge *vaguement* vers une mesure μ de $\mathcal{M}(X)$ si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(X)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f\ d\mu_n = \int_X f\ d\mu.$$

Pour qu'une suite $\{\mu_n\}$ soit vaguement convergente il suffit que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(X)$, la suite $\{\int_X f\ d\mu_n\}$ soit convergente.

Proposition VI.4.1. *Soit $\{\mu_n\}$ une suite de mesures de $\mathcal{M}(X)$ qui converge vaguement vers une mesure μ. Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert relativement compact dans X tel que*

$$\mu(]a, b[) = \mu([a, b]).$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(]a, b[) = \mu(]a, b[).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux fonctions f et g continues à support compact contenu dans X telles que

$$f \leq \chi_{]a,b[} \leq g, \qquad \int_X (g-f)\,d\mu \leq \varepsilon,$$

et il existe N tel que, si $n \geq N$,

$$\Big| \int_X f\,d\mu_n - \int_X f\,d\mu \Big| \leq \varepsilon, \quad \Big| \int_X g\,d\mu_n - \int_X g\,d\mu \Big| \leq \varepsilon.$$

Pour $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \mu_n(]a,b[) - 2\varepsilon &\leq \int_X g\,d\mu_n - 2\varepsilon \leq \int_X g\,d\mu - \varepsilon \leq \mu(]a,b[) \\ &\leq \int_X f\,d\mu + \varepsilon \leq \int_X f\,d\mu_n + 2\varepsilon \leq \mu_n(]a,b[) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$|\mu_n(]a,b[) - \mu(]a,b[)| \leq 2\varepsilon. \qquad \square$$

Remarquons que la condition $\mu(]a,b[) = \mu([a,b])$ est nécessaire comme le montre l'exemple suivant (pour lequel $]\alpha,\beta[= \mathbb{R}$) :

$$]a,b[=]0,1[, \quad \mu_n = \delta_{\frac{1}{n}}, \quad \mu = \delta_0.$$

Nous notons $\mathcal{M}^1(X)$ l'ensemble des mesures μ de $\mathcal{M}(X)$ qui sont *bornées*, c'est-à-dire que la masse totale $\mu(X)$ est finie.

Nous dirons qu'une suite $\{\mu_n\}$ de mesures de $\mathcal{M}^1(X)$ converge *étroitement* vers une mesure μ de $\mathcal{M}^1(X)$ si elle converge vaguement vers μ et si la masse totale de μ_n converge vers la masse totale de μ. Par exemple la suite des mesures

$$\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \delta_{\frac{k}{n}}$$

converge étroitement vers la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$: si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à support compact

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Proposition VI.4.2. *Soit $\{\mu_n\}$ une suite de mesures de $\mathcal{M}^1(X)$ qui converge étroitement vers une mesure μ. Soit f une fonction continue bornée sur X. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f\ d\mu_n = \int_X f\ d\mu.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction g de $\mathcal{C}_c(X)$ telle que

$$0 \leq g \leq 1, \qquad \int_X g\ d\mu \geq \int_X\ d\mu - \varepsilon.$$

Nous pouvons écrire

$$f = fg + (1-g)f.$$

Il existe N tel que, si $n \geq N$,

$$\Big|\int_X fg\ d\mu_n - \int_X fg\ d\mu\Big| \leq \varepsilon,$$

$$\Big|\int_X (1-g)\ d\mu_n - \int_X (1-g)\ d\mu\Big| \leq \varepsilon.$$

Par suite

$$\Big|\int_X (1-g)f\ d\mu_n\Big| \leq \|f\|_\infty \int_X (1-g)\ d\mu_n \leq 2\varepsilon\|f\|.$$

Le résultat annoncé se déduit de ces inégalités. □

Nous pouvons parler d'une série de mesures vaguement convergente, ou étroitement convergente. Soient $\{x_n\}$ une suite de nombres réels, et $\{\alpha_n\}$ une suite de nombres réels ≥ 0. Si la suite $\{x_n\}$ n'a pas de point d'accumulation, ou si $\sum_n \alpha_n < \infty$, la série

$$\sum_n \alpha_n \delta_{x_n}$$

est vaguement convergente et définit une mesure μ : si f est une fonction continue à support compact,

$$\int_{\mathbb{R}} f\ d\mu = \sum_n \alpha_n f(x_n).$$

Exercices

Exercice VI.1. Soit $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace mesuré, et soit φ une fonction intégrable à valeurs réelles définie sur X. Pour un nombre réel t on pose

$$\sigma(t) = \mu(\{x \in X \mid \varphi(x) < t\}).$$

Montrer que la fonction σ est croissante et continue à gauche.

On note ν la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à la fonction σ. Soit E un ensemble borélien de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\nu(E) = \mu\big(\varphi^{-1}(E)\big).$$

Soit f une fonction borélienne ≥ 0 définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f \; d\nu = \int_X (f \circ \varphi) \; d\mu.$$

Exercice VI.2. Soit μ une mesure de Lebesgue-Stieltjes sur $X =]\alpha, \beta[$. Montrer que la mesure μ admet une décomposition unique en

$$\mu = \mu_1 + \mu_2,$$

où μ_1 est une mesure discrète, c'est-à-dire de la forme

$$\sum \alpha_n \delta_{x_n},$$

et μ_2 est une mesure telle que, pour tout x, $\mu_2(\{x\}) = 0$.

***Exercice VI.3* (Intégrale de Jackson).** Pour $0 < q < 1$ on définit la mesure μ_q par

$$\mu_q = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \delta_{q^n}.$$

Montrer que, quand q tend vers 1, la mesure μ_q converge vers la mesure de Lebesgue de $[0, 1]$, c'est-à-dire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$,

$$\lim_{q \to 1} \int_{\mathbb{R}} f(x) \; d\mu_q(x) = \int_0^1 f(x)dx.$$

***Exercice VI.4* (Fonction singulière de Cantor).** Cette fonction sera définie sur le complémentaire de l'ensemble triadique de Cantor (*cf.* exercice 1, chap. II, avec $\alpha = 1$), puis sera prolongée à l'intervalle $[0, 1]$ par continuité. Les intervalles fermés I_n^k et ouverts J_n^k sont de longueur 3^{-n} ; ils sont définis par récurrence comme suit :

$$I_1^1 = \left[0, \frac{1}{3}\right], \ I_1^2 = \left[\frac{2}{3}, 1\right], \ J_1^1 = \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[.$$

L'intervalle $I_n^k = [a_n^k, b_n^k]$ $(1 \leq k \leq 2^n)$ est partagé en trois intervalles de même longueur :

$$\begin{aligned} I_{n+1}^{2k-1} &= \left[a_n^k, \frac{a_n^k + b_n^k}{2} - \frac{1}{2.3^{n+1}}\right], \\ I_{n+1}^{2k} &= \left[\frac{a_n^k + b_n^k}{2} + \frac{1}{2.3^{n+1}}, b_n^k\right], \\ J_{n+1}^{k} &= \left]\frac{a_n^k + b_n^k}{2} - \frac{1}{2.3^{n+1}}, \frac{a_n^k + b_n^k}{2} + \frac{1}{2.3^{n+1}}\right[. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} F_n &= I_n^1 \cup \ldots \cup I_n^{2^n}, \\ K &= \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n. \end{aligned}$$

Alors $[0,1] \setminus K$ est un ouvert dense dans $[0,1]$ qui peut s'écrire comme réunion disjointe des intervalles ouverts J_n^k :

$$[0,1] \setminus K = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n+1}^k \right).$$

On définit la fonction φ sur $[0,1] \setminus K$ par

$$\varphi(x) = \frac{2k-1}{2^{n+1}} \text{ si } x \in J_{n+1}^k.$$

Montrer que la fonction φ est croissante, qu'elle est uniformément continue, et se prolonge en une fonction croissante continue $\tilde{\varphi}$ sur $[0,1]$, que $\tilde{\varphi}(0) = 0$, $\tilde{\varphi}(1) = 1$.

On prolonge la fonction $\tilde{\varphi}$ à $\mathbb{R}$ en posant

$$\tilde{\varphi}(x) = 0 \text{ si } x \leq 0, \ \tilde{\varphi}(x) = 1 \text{ si } x \geq 1.$$

Soit μ la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à la fonction croissante $\tilde{\varphi}$. Montrer que

$$\mu(J_{n+1}^k) = 0,$$

et que $\mu(K^c) = 0$, $\mu(K) = 1$.

VII

FONCTIONS DÉFINIES PAR DES INTÉGRALES

Nous avons particulièrement développé ce chapitre d'applications du calcul intégral. La plupart des résultats présentés ne relève pas de la théorie de l'intégration à proprement parler, mais ils sont très utiles en analyse. La représentation intégrale des fonctions est un outil puissant pour l'étude des propriétés des fonctions, comme par exemple l'étude de leur comportement asymptotique.

VII.1. Continuité, dérivabilité, analyticité

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et Λ un intervalle de $\mathbb{R}$ ou un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur $X \times \Lambda$ à valeurs complexes telle que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $x \mapsto f(x, \lambda)$ soit intégrable. Posons

$$F(\lambda) = \int_X f(x, \lambda)\, d\mu(x).$$

Nous étudierons dans cette section les propriétés de F : continuité, dérivabilité, analyticité.

Théorème VII.1.1 **(Continuité).** *Supposons que*

(i) *pour presque tout x la fonction $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ est continue sur Λ ;*

(ii) *pour tout compact $K \subset \Lambda$ il existe une fonction intégrable positive g_K sur X telle que, pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in K$,*

$$|f(x, \lambda)| \leq g_K(x).$$

Alors la fonction F est continue sur Λ.

Démonstration. Soient $\lambda_0 \in \Lambda$ et $\{\lambda_n\}$ une suite de nombres de Λ qui converge vers λ_0. Nous devons montrer que

$$\lim_{n\to\infty} F(\lambda_n) = F(\lambda_0).$$

Posons

$$f_n(x) = f(x, \lambda_n).$$

Par hypothèse

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x, \lambda_0) \quad p.p.$$

Soit K un voisinage compact de λ_0. Il existe un entier N tel que, si $n \geq N$, alors $\lambda_n \in K$, et donc

$$|f_n(x)| \leq g_K(x).$$

Nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée (I.3.4) :

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x, \lambda_0)\, d\mu(x),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} F(\lambda_n) = F(\lambda_0).$$ □

Dans l'énoncé suivant nous supposons que Λ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

***Théorème VII.1.2* (Dérivabilité).** *Supposons que*

(i) *pour presque tout x la fonction $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ est dérivable sur Λ,*

(ii) *pour tout compact $K \subset \Lambda$ il existe une fonction intégrable positive g_K sur X telle que, pour tout x pour lequel $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ est dérivable et pour tout $\lambda \in K$,*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\right| \leq g_K(x).$$

Alors la fonction F est dérivable sur Λ, de dérivée

$$F'(\lambda) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\, d\mu(x).$$

Démonstration. Soient $\lambda_0 \in \Lambda$ et $\{h_n\}$ une suite de nombres réels non nuls qui tend vers 0 et telle que, pour tout n, $\lambda_0 + h_n \in \Lambda$. Posons

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{h_n}\big(f(x, \lambda_0 + h_n) - f(x, \lambda_0)\big).$$

Pour presque tout x,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x, \lambda_0).$$

Il en résulte que la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_0)$ est mesurable. Soit $\delta > 0$, et posons $K = [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$. Il existe un entier N tel que, si $n \geq N$, alors $|h_n| < \delta$. Du théorème des accroissements finis on déduit que, si $n \geq N$, et pout presque tout x,

$$|\varphi_n(x)| \leq \sup_{\lambda \in K} \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right| \leq g_K(x).$$

D'après le théorème de convergence dominée (I.3.4),

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x)\, d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_0)\, d\mu(x),$$

ce qui s'écrit aussi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(\lambda_0 + h_n) - F(\lambda_0)}{h_n} = \int_X \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_0)\, d\mu(x). \qquad \square$$

Dans l'énoncé suivant nous supposons que Λ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Rappelons la définition d'une fonction *analytique*. Une fonction f définie sur un ouvert $\Lambda \subset \mathbb{C}$ à valeurs complexes est dite analytique si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de Λ : pour tout $\lambda_0 \in \Lambda$ il existe $r > 0$ tel que, si $|\lambda - \lambda_0| < r$,

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n.$$

On montre qu'une fonction est analytique dans Λ si et seulement si elle est *holomorphe* dans Λ, c'est-à-dire dérivable sur $\mathbb{C}$. C'est le théorème fondamental de la théorie de Cauchy.

Théorème VII.1.3 **(Analyticité).** *Suposons que*

(i) *pour tout x la fonction $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ est analytique dans Λ,*

(ii) *pour tout compact $K \subset \Lambda$ il existe une fonction intégrable positive g_K telle que, pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in K$,*

$$|f(x, \lambda)| \leq g_K(x).$$

Alors la fonction F est analytique dans Λ, et de plus, pour tout entier n,

$$F^{(n)}(\lambda) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial \lambda^n}(x, \lambda)\, d\mu(x).$$

Démonstration. Soit $\lambda_0 \in \Lambda$ et soit $r > 0$ tel que le disque fermé de centre λ_0 et de rayon r soit contenu dans Λ. Pour $|\lambda - \lambda_0| \leq r$,

$$f(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)(\lambda - \lambda_0)^n,$$

avec

$$r^n a_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, \lambda_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-in\theta} d\theta.$$

Les fonctions a_n sont mesurables car ce sont des dérivées par rapport au paramètre λ de fonctions mesurables en x,

$$a_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial \lambda^n}(x, \lambda).$$

Soit K un voisinage compact de λ_0 et supposons que le disque fermé de centre λ_0 et de rayon r soit contenu dans K. Alors

$$r^n |a_n(x)| \leq g_K(x).$$

Ainsi, si $|\lambda - \lambda_0| < r$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^n \int_X |a_n(x)| \, d\mu(x) \leq \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \Big| \frac{\lambda - \lambda_0}{r} \Big|^n \Big) \int_X g_K(x) \, d\mu(x).$$

Nous pouvons appliquer le théorème sur l'intégration terme à terme d'une série (I.3.5), et nous obtenons

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\lambda - \lambda_0)^n,$$

avec

$$A_n = \int_X a_n(x) \, d\mu(x). \qquad \square$$

Si l'hypothèse « Λ est un ouvert de $\mathbb{C}$ » est remplacée par « Λ est un ouvert de $\mathbb{R}$ », alors, l'énoncé devient faux : comme le montre l'exemple suivant ($X = \mathbb{R}$, $\Lambda = \mathbb{R}$)

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{1 + x^2} dx = \pi \mathrm{e}^{-|\lambda|}.$$

Nous avons introduit la fonction gamma en V.2. Elle est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} dt,$$

où z est un nombre complexe. Nous avions vu que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(n+1) = n!\ (n \in \mathbb{N}).$$

À l'aide du théorème sur l'analyticité d'une fonction définie par une intégrale (VII.1.3), on montre que la fonction Γ est définie et analytique pour $\Re z > 0$, et que

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}(\ln t)t^{z-1}dt.$$

Pour $\Re z > 0$, on déduit du théorème sur l'intégration terme à terme d'une série (I.3.5) que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}dt &= \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!}\Big)t^{z-1}dt\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n},\end{aligned}$$

et par suite

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} + \int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}dt.$$

Cette dernière expression a un sens pour tous les nombres complexes z qui ne sont pas des entiers ≤ 0, et permet de prolonger la fonction Γ en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ ayant des pôles simples aux entiers ≤ 0.

VII.2. Intégrales semi-convergentes

Soit f une fonction mesurable sur $[\alpha, \infty[$ intégrable sur tout intervalle borné $[\alpha, \beta]$. On dit que f est *semi-intégrable* sur $[\alpha, \infty[$ si

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

existe, et on pose

$$\int_\alpha^\infty f(x)dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Une fonction peut être semi-intégrable sans être intégrable, c'est le cas de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Le critère de Cauchy s'exprime comme suit : pour que f soit semi-intégrable sur $[\alpha, \infty[$ il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe β tel que

$$\forall \gamma, \delta \geq \beta, \quad \left| \int_\gamma^\delta f(x)dx \right| \leq \varepsilon.$$

Théorème VII.2.1 (Théorème d'Abel). *Soit f une fonction définie sur $[\alpha, \infty[$, qui s'écrit*

$$f(x) = a(x)b(x),$$

où

(i) *a est une fonction positive de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et qui tend vers 0 à l'infini,*

(ii) *b est une fonction continue et il existe une constante M telle que*

$$\forall \gamma, \delta \geq \alpha, \quad \left| \int_\gamma^\delta b(x)dx \right| \leq M.$$

Alors la fonction f est semi-intégrable sur $[\alpha, \infty[$. De plus, pour $\beta \geq \alpha$,

$$\left| \int_\beta^\infty f(x)dx \right| \leq Ma(\beta).$$

Démonstration. En intégrant par parties nous obtenons

$$\int_\gamma^\delta a(x)b(x)dx = B(\delta)a(\delta) - \int_\gamma^\delta B(x)a'(x)dx,$$

où

$$B(x) = \int_\gamma^x b(t)\ dt.$$

Puisque $a'(x) \leq 0$ et $|B(x)| \leq M$,

$$\left| \int_\gamma^\delta a(x)b(x)dx \right| \leq Ma(\gamma).$$

Cette inégalité montre que le critère de Cauchy est vérifié, et, en faisant tendre δ vers l'infini, nous obtenons

$$\left| \int_\gamma^\infty a(x)b(x)dx \right| \leq Ma(\gamma). \qquad \square$$

Le théorème d'Abel s'applique en particulier aux *intégrales de Fourier* de la forme

$$F(\lambda) = \int_{\alpha}^{\infty} a(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}dx,$$

où a est une fonction positive de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et qui tend vers 0 à l'infini. En effet, pour $\lambda \neq 0$,

$$\Big|\int_{\gamma}^{\delta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}dx\Big| \leq \frac{2}{|\lambda|},$$

et on déduit du théorème d'Abel que F est définie et continue pour $\lambda \neq 0$.

Par exemple, pour $0 < s < 1$, la fonction

$$F_1(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^s}dx$$

est définie et continue pour $\lambda \neq 0$. De même, pour $0 < s < 2$,

$$F_2(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x^s}dx.$$

Nous verrons plus loin que ces fonctions s'expriment à l'aide de la fonction gamma.

L'intégrale semi-convergente

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$$

intervient en analyse de Fourier. Pour la calculer, nous considérons la fonction F définie pour $\lambda \geq 0$ par

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Nous pouvons appliquer le théorème d'Abel en posant

$$a(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{x}, \qquad b(x) = \sin x,$$

et nous obtenons, pour $\lambda \geq 0$, $\gamma \geq 0$,

$$\Big|\int_{\gamma}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\frac{\sin x}{x}dx\Big| \leq 2\frac{\mathrm{e}^{-\lambda\gamma}}{x} \leq \frac{2}{\gamma}.$$

On en déduit que F est continue sur $[0,\infty[$. De plus, pour $\lambda \geq \lambda_0 > 0$,

$$\Big|\frac{d}{d\lambda}\Big(\mathrm{e}^{-\lambda x}\frac{\sin x}{x}\Big)\Big| \leq \mathrm{e}^{-\lambda x} \leq \mathrm{e}^{\lambda_0 x}.$$

Par suite F est dérivable sur $]0, \infty[$, et

$$F'(\lambda) = -\int_0^\infty e^{-\lambda x} \sin x dx.$$

Cette intégrale se calcule facilement à l'aide d'une primitive :

$$F'(\lambda) = -\frac{1}{1+\lambda^2}.$$

Donc

$$F(\lambda) = -\mathrm{arctg}\lambda + C.$$

Puisque $|\frac{\sin x}{x}| \leq 1$,

$$|F(\lambda)| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \leq \frac{1}{\lambda},$$

et par suite $C = \frac{\pi}{2}$:

$$F(\lambda) = -\mathrm{arctg}\lambda + \frac{\pi}{2} = \mathrm{arctg}\frac{1}{\lambda}.$$

Finalement

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = F(0) = \lim_{\lambda \to 0} F(\lambda) = \frac{\pi}{2}.$$

L'*intégrale de Fresnel*

$$\int_0^\infty \cos(u^2) du$$

est semi-convergente. On peut le voir en posant $u^2 = t$,

$$\int_0^\beta \cos(u^2) du = \tfrac{1}{2} \int_0^{\beta^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

Pour l'évaluer nous allons étudier quelques fonctions qui s'expriment à l'aide de la fonction gamma. Soit z un nombre complexe, $\Re z > 0$, et soit $\alpha > 0$. Alors

$$\int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{z^\alpha},$$

où z^α est défini par

$$z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta} \quad \left(z = re^{i\theta},\ r > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right).$$

Pour démontrer cette formule considérons la fonction holomorphe f définie pour $\Re w > 0$ par

$$f(w) = e^{-w} w^{\alpha-1}.$$

Pour $0 < \varepsilon < R$, soit γ le bord orienté du compact de $\mathbb{C}$ défini par

$$\{w = \rho e^{i\varphi} \mid \varepsilon \le \rho \le R,\ 0 \le \varphi \le \theta\}.$$

D'après le théorème de Cauchy,

$$\int_\gamma f(w)dw = 0.$$

On en déduit que, quand ε tend vers 0 et R vers l'infini,

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt = e^{i\alpha\theta} \int_0^\infty e^{te^{i\theta}} t^{\alpha-1} dt.$$

La formule annoncée s'en déduit facilement.

Pour $y > 0$, $0 < \alpha < 1$, au sens des intégrales semi-convergentes,

$$\int_0^\infty e^{-iyt} t^{\alpha-1} dt = \Gamma(\alpha) e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}} \frac{1}{y^\alpha}.$$

Cette formule s'obtient à partir de la précédente par un passage à la limite quand $z = x + iy$ tend vers iy (x tend vers 0). La formule précédente s'écrit, pour $x > 0$,

$$\int_0^\infty e^{-iyt} e^{-xt} t^{\alpha-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{(x+iy)^\alpha}.$$

La fonction $t \mapsto a(t) = e^{-xt} t^{\alpha-1}$ est, pour $x \ge 0$, décroissante et tend vers 0 à l'infini. Le théorème d'Abel permet de passer à la limite quand x tend vers 0. En séparant parties réelles et parties imaginaires, nous obtenons :

$$\int_0^\infty \cos(yt) t^{\alpha-1} dt = \Gamma(\alpha) \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{y^\alpha},$$
$$\int_0^\infty \sin(yt) t^{\alpha-1} dt = \Gamma(\alpha) \sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{y^\alpha}.$$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $y = 1$,

$$\int_0^\infty e^{it} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\pi}\frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

et, en posant $t = u^2$, nous obtenons l'évaluation de l'intégrale de Fresnel,

$$\int_0^\infty e^{iu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

et aussi

$$\int_0^\infty \cos(u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \qquad \int_0^\infty \sin(u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

VII.3. Intégrales de Laplace

Nous allons étudier le comportement, lorsque λ tend vers l'infini, d'intégrales du type suivant :

$$F(\lambda) = \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-\lambda\varphi(x)} f(x)dx \quad (-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty),$$

où φ est une fonction à valeurs réelles. Nous supposons que cette intégrale est définie pour $\lambda \geq \lambda_0$:

$$\forall \lambda \geq \lambda_0, \ \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-\lambda\varphi(x)} |f(x)|dx < \infty.$$

La contribution la plus importante à une telle intégrale pour les grandes valeurs de λ est celle du voisinage du ou des points où la fonction φ atteint son minimum. Nous supposerons que φ est de classe $\mathcal{C}^1$, croissante sur $[\alpha, \beta[$, et étudierons deux cas. Dans le premier cas $\varphi'(x) > 0$ sur $[\alpha, \beta[$, et dans le deuxième $\varphi'(\alpha) = 0$, $\varphi'(x) > 0$ sur $]\alpha, \beta[$.

Théorème VII.3.1. *Supposons que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta[$, $\varphi'(x) > 0$ sur $[\alpha, \beta[$, que f est continue en α, $f(\alpha) \neq 0$. Alors*

$$F(\lambda) \sim \frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \frac{1}{\lambda} \mathrm{e}^{-\lambda\varphi(\alpha)} \quad (\lambda \to \infty).$$

Démonstration. (a) Supposons d'abord que $\varphi(x) = x$, $\alpha = 0$:

$$F(\lambda) = \int_0^\beta \mathrm{e}^{-\lambda x} f(x)dx.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, si $0 \leq x \leq \eta$, alors $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$. Décomposons l'intégale,

$$F(\lambda) = f(0)\int_0^\eta \mathrm{e}^{-\lambda x}dx + \int_0^\eta \mathrm{e}^{-\lambda x}\big(f(x) - f(0)\big)dx + \int_\eta^\beta \mathrm{e}^{-\lambda x} f(x)dx.$$

Le résultat annoncé se déduit des estimations suivantes

$$\int_0^\eta \mathrm{e}^{-\lambda x}dx = \frac{1-\mathrm{e}^{\lambda\eta}}{\lambda},$$

$$\Big|\int_0^\eta \mathrm{e}^{-\lambda x}\big(f(x) - f(0)\big)dx\Big| \leq \varepsilon \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}dx = \frac{\varepsilon}{\lambda},$$

$$\Big|\int_\eta^\beta \mathrm{e}^{-\lambda x} f(x)dx\Big| \leq \mathrm{e}^{-\eta(\lambda-\lambda_0)} \int_\eta^\beta \mathrm{e}^{-\lambda_0 x}|f(x)|dx.$$

(b) La fonction $x \mapsto \varphi(x) - \varphi(\alpha)$ est une bijection de $[\alpha, \beta[$ sur $[0, \beta_0[$ ($\beta_0 = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$). Soit ψ la fonction réciproque. En effectuant le changement de variable défini par $x = \psi(u)$ nous obtenons

$$F(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda\varphi(\alpha)} \int_0^{\beta_0} \mathrm{e}^{-\lambda u} f\big(\psi(u)\big)\psi'(u)\ du,$$

et nous trouvons la situation étudiée en (a). Remarquons que

$$\psi'(0) = \frac{1}{\varphi'(\alpha)}. \qquad \square$$

Comme application nous allons étudier le comportement à l'infini de la fonction F définie par

$$F(x) = \int_x^\infty \mathrm{e}^{-t^2} dt.$$

En posant $t = xu$ nous obtenons

$$F(x) = x \int_1^\infty \mathrm{e}^{-x^2u^2} du.$$

En appliquant le théorème VII.3.1 à la fonction G définie par

$$G(\lambda) = \int_1^\infty \mathrm{e}^{-\lambda u^2} du,$$

nous obtenons

$$G(\lambda) \sim \frac{1}{2\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda} \qquad (\lambda \to \infty),$$

et par suite

$$F(x) \sim \frac{1}{2x}\mathrm{e}^{-x^2} \qquad (x \to \infty).$$

Théorème VII.3.2. *Supposons que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\alpha, \beta[$, que $\varphi'(x) > 0$ sur $]\alpha, \beta[$, $\varphi'(\alpha) = 0$, $\varphi''(\alpha) \neq 0$, que f est continue en α, $f(\alpha) \neq 0$. Alors*

$$F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi''(\alpha)}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \mathrm{e}^{-\varphi(\alpha)} \qquad (\lambda \to \infty).$$

Démonstration. (a) Supposons d'abord que $\varphi(x) = x^2$ et que $\alpha = 0$;

$$F(\lambda) = \int_0^\beta \mathrm{e}^{-\lambda x^2} f(x) dx.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, si $0 \leq x \leq \eta$, alors $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$. Cette intégrale peut se décomposer en

$$F(\lambda) = f(0) \int_0^\eta \mathrm{e}^{-\lambda x^2} dx + \int_0^\eta \mathrm{e}^{-\lambda x^2} \big(f(x) - f(0)\big) dx + \int_\eta^\beta \mathrm{e}^{-\lambda x^2} f(x) dx.$$

De l'évaluation suivante de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

nous déduisons l'estimation suivante de la première intégrale :

$$\int_0^\eta \mathrm{e}^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\eta\sqrt{\lambda}} \mathrm{e}^{-u^2} du \sim \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

D'autre part,

$$\Big| \int_0^\eta \mathrm{e}^{-\lambda x^2} \big(f(x) - f(0)\big) dx \Big| \leq \varepsilon \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x^2} dx = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},$$

$$\begin{aligned} \Big| \int_\eta^\beta \mathrm{e}^{-\lambda x^2} f(x) dx \Big| &= \Big| \int_\eta^\beta \mathrm{e}^{-(\lambda - \lambda_0) x^2} \mathrm{e}^{-\lambda_0 x^2} f(x) dx \Big| \\ &\leq \mathrm{e}^{-(\lambda - \lambda_0)\eta^2} \int_\eta^\beta \mathrm{e}^{-\lambda_0 x^2} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Le résultat annoncé est ainsi démontré dans ce cas.

(b) La fonction Φ définie sur $[\alpha, \beta[$ par

$$\Phi(x) = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(\alpha)}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x) - \varphi(\alpha)}} \text{ si } x \neq \alpha, \\ \Phi'(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\varphi''(\alpha)}, \end{aligned}$$

et est une bijection de $[\alpha, \beta[$ sur $[0, \beta_0[$ ($\beta_0 = \sqrt{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}$). Soit ψ la fonction réciproque. En effectuant le changement de variable défini par $x = \psi(u)$, nous obtenons

$$F(\lambda) = \mathrm{e}^{-\varphi(\alpha)} \int_0^{\beta_0} \mathrm{e}^{-\lambda u^2} f\big(\psi(u)\big) \psi'(u)\ du.$$

Nous nous retrouvons dans la situation considérée en (a). Remarquons que

$$\psi'(0) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varphi''(\alpha)}}.$$ □

Corollaire VII.3.3. *Supposons que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]\alpha, \beta[$, et qu'il existe γ, $\alpha < \gamma < \beta$, tel que $\varphi'(\gamma) = 0$, $\varphi'(x) < 0$ si $x < \gamma$, $\varphi'(x) > 0$ si $x > \gamma$, et que $\varphi''(\gamma) \neq 0$. Supposons aussi que f est continue en γ, et que $f(\gamma) \neq 0$. Alors*

$$F(\lambda) = \sqrt{2\pi}\frac{f(\gamma)}{\sqrt{\varphi''(\gamma)}}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{e}^{-\lambda\varphi(\gamma)}.$$

Comme application nous allons établir la *formule de Stirling* :

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-x} \qquad (x \to \infty).$$

Nous partons de la représentation intégrale

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^x dt.$$

En posant $t = ux$, nous obtenons

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x(u-\ln u)}du.$$

Cette intégrale est du type que nous venons d'étudier avec $\varphi(u) = u - \ln u$. La fonction φ vérifie

$$\varphi'(u) = 1 - \frac{1}{u},\ \varphi'(1) = 0,$$
$$\varphi'(u) < 0 \text{ si } u < 1,\ \varphi'(u) > 0 \text{ si } u > 1,\ \varphi''(1) = 1.$$

Nous pouvons donc appliquer le corollaire VII.3.3 :

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x(u-\ln u)}du \sim \sqrt{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} \qquad (x \to \infty).$$

VII.4. Intégrales de Fourier

Nous allons étudier dans cette dernière section le comportement à l'infini d'intégrales de la forme

$$F(\lambda) = \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\varphi(x)}f(x)dx,$$

où φ est une fonction à valeurs réelles. Nous supposons que f est intégrable sur $]\alpha, \beta[$, si bien que F est définie pour tout réel λ. Le comportement de F pour les grandes valeurs de λ dépend de la rapidité avec laquelle la fonction φ varie.

Nous étudierons d'abord le cas où la dérivée de φ ne s'annule pas.

Proposition VII.4.1. *On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\alpha, \beta[$ ($-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$) et que φ' ne s'annule pas sur $]\alpha, \beta[$. Alors*

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} F(\lambda) = 0.$$

Lemme VII.4.2 (Lemme de Riemann-Lebesgue). *C'est le cas particulier où $\varphi(x) = x$: la foncion F est définie par*

$$F(\lambda) = \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} f(x) dx,$$

où f est une fonction intégrable sur $]\alpha, \beta[$. Alors

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} F(\lambda) = 0.$$

Démonstration. Si f est la fonction caractéristique de l'intervalle borné $[\alpha_0, \beta_0] \subset]\alpha, \beta[$,

$$F(\lambda) = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} dx = \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\beta_0} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\alpha_0}),$$

et

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} F(\lambda) = 0.$$

Ainsi la propriété est vraie si f est la fonction caractéristique d'un intervalle borné, et par suite si f est une fonction intégrable élémentaire, c'est-à-dire une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'intervalles bornés.

Soit f une fonction intégrable sur $]\alpha, \beta[$. Il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions intégrables élémentaires telle que

$$\lim_{n \to \infty} \int_\alpha^\beta |f(x) - f_n(x)| dx = 0.$$

Posons

$$F_n(\lambda) = \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} f_n(x) dx.$$

Puisque

$$|F(\lambda) - F_n(\lambda)| \leq \int_\alpha^\beta |f(x) - f_n(x)| dx,$$

la suite $\{F_n\}$ converge vers F uniformément. Comme, pour tout n, la fonction F_n tend vers 0 à l'infini, il en est de même de F. □

La proposition VII.4.1 se déduit du lemme de Riemann-Lebesgue en effectuant le changement de variable défini par $\varphi(x) = u$.

Proposition VII.4.3. *Supposons que $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\alpha, \beta]$. Supposons de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$. Alors*

$$F(\lambda) = \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\Big(\frac{f(\beta)}{\varphi'(\beta)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\varphi(\beta)} - \frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\varphi(\alpha)}\Big) + o(\frac{1}{\lambda}) \qquad (\lambda \to \pm\infty).$$

Démonstration. (a) Supposons d'abord que $\varphi(x) = x$,

$$F(\lambda) = \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} f(x)dx,$$

et effectuons une intégration par parties,

$$F(\lambda) = \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\big(f(\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\beta} - f(\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\alpha}\big) - \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} f'(x)dx.$$

Le résultat annoncé se déduit alors du lemme de Riemann-Lebesgue.

(b) Le cas général se déduit de (a) par le changement de variable défini par $\varphi(x) = u$. □

Nous étudions maintenant le cas d'une fonction φ dont la dérivée s'annule en un point, mais telle que φ'' ne s'annule pas en ce point.

Théorème VII.4.4 (Théorème de la phase stationnaire). *On suppose que $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, que*

(i) *φ est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[\alpha, \beta]$, et*

$$\varphi'(\alpha) = 0,\ \ \varphi'(x) \neq 0 \ \textit{sur}\ ]\alpha, \beta],\ \ \varphi''(\alpha) \neq 0,$$

(ii) *f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\alpha, \beta]$.*

Alors

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\alpha)}{\sqrt{|\varphi''(\alpha)|}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\lambda\varphi(\alpha) + \sigma\frac{\pi}{4}\right)}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + O\big(\frac{1}{\lambda}\big),$$

où $\sigma = 1$ si $\varphi''(\alpha) > 0$, $\sigma = -1$ si $\varphi''(\alpha) < 0$.

Démonstration. (a) Nous commençons par traiter un cas particulier : $\alpha = 0$, $\varphi(x) = x^2$, $f(x) = 1$, c'est-à-dire

$$F(\lambda) = \int_0^\beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x^2} dx.$$

Nous allons montrer que

$$F(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big).$$

En posant $\lambda x^2 = u$, nous obtenons

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{\lambda\beta^2} e^{iu} \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Nous avons établi que

$$\int_0^{\infty} e^{iu} \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}},$$

si bien que

$$F(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{\lambda\beta^2}^{\infty} e^{iu} \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

En utilisant le théorème d'Abel (VII.2.1), on obtient la majoration suivante

$$\Big| \int_{\lambda\beta^2}^{\infty} e^{iu} \frac{du}{\sqrt{u}} \Big| \leq \frac{2}{\beta\sqrt{\lambda}}.$$

(b) Supposons $\alpha = 0$, $\varphi(x) = x^2$. La fonction f, qui est supposée de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \beta]$, peut s'écrire

$$f(x) = f(0) + x f_1(x),$$

où f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$. Par suite

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_0^{\beta} e^{i\lambda x^2} f(x) dx \\ &= f(0) \int_0^{\beta} e^{i\lambda x^2} dx + \int_0^{\beta} e^{i\lambda x^2} x f_1(x) dx. \end{aligned}$$

En effectuant une intégration par parties nous obtenons

$$\int_0^{\beta} e^{i\lambda x^2} x f_1(x) dx = \frac{1}{2i\lambda} \Big[e^{i\lambda x^2} f_1(x) \Big]_0^{\beta} - \frac{1}{2i\lambda} \int_0^{\beta} e^{i\lambda x^2} f_1'(x) dx,$$

et ceci montre qu'il existe une constante C telle que

$$\Big| \int_0^{\beta} e^{i\lambda x^2} x f_1(x) \Big| \leq \frac{C}{\lambda}.$$

En utilisant (a) nous obtenons bien le résultat dans ce cas.

(c) Supposons $\varphi'(x) > 0$ sur $]\alpha, \beta]$. La fonction Φ définie sur $[\alpha, \beta]$ par

$$\Phi(x) = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(\alpha)}$$

est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^3$. Comme dans la démonstration du théorème VII.3.2, effectuons le changement de variable défini par $\Phi(x) = u$, $x = \psi(u)$,

$$F(\lambda) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\varphi(\alpha)} \int_0^{\beta_0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u^2} f\big(\psi(u)\big)\psi'(u)du,$$

et nous sommes ramenés au cas traité en (b).

Si $\varphi'(x) < 0$ sur $]\alpha, \beta]$ nous posons

$$\Phi(x) = \sqrt{\varphi(\alpha) - \varphi(x)}$$

et la démonstration se poursuit de la même façon. □

Corollaire VII.4.5. *Supposons $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, et*

(i) *φ est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[\alpha, \beta]$, et qu'il existe γ, $\alpha < \gamma < \beta$, tel que*

$$\varphi'(\gamma) = 0,\ \ \varphi'(x) \neq 0 \text{ si } x \neq \gamma,\ \ \varphi''(\gamma) \neq 0,$$

(ii) *f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\alpha, \beta]$.*

Alors

$$F(\lambda) = \sqrt{2\pi}\frac{f(\gamma)}{\sqrt{|\varphi''(\gamma)|}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\lambda\varphi(\gamma)+\sigma\frac{\pi}{4}\right)}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

avec $\sigma = 1$ si $\varphi''(\gamma) > 0$, $\sigma = -1$ si $\varphi''(\gamma) < 0$.

Comme exemple d'application nous allons déterminer le comportement à l'infini de la *fonction de Bessel* J_0. Cette fonction est définie par

$$J_0(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\cos x}dx.$$

D'après le théorème de la phase stationnaire (VII.4.4),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\cos x}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\lambda-\frac{\pi}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\cos x}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\lambda+\frac{\pi}{4}\right)}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Finalement

$$J_0(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\lambda - \frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Exercices

Exercice VII.1. Pour $\alpha, \beta > 0$ on considère la fonction F définie par

$$F(\lambda) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda x} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

a) Montrer que la fonction F est développable en série entière,

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n.$$

Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? Exprimer les coefficients à l'aide de la fonction gamma.

c) Quelle est la limite de $F(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$? Montrer que $\lambda^{-\alpha}F(\lambda)$ a une limite quand λ tend vers $+\infty$, et calculer cette limite.
Indication : on pourra effectuer un changement de variable en posant $x = \frac{u}{\lambda}$.

Exercice VII.2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x(x^2+1)} dx.$$

a) Montrer que F est dérivable et que

$$F'(\lambda) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|\lambda|}.$$

b) Montrer que

$$F(\lambda) = \operatorname{sgn}(\lambda)\frac{\pi}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-|\lambda|}\right).$$

Exercice VII.3. a) Soit f une fonction continue bornée sur $[0, \infty[$. On suppose que $f(0) \neq 0$. On considère la suite $\{a_n\}$ définie par

$$a_n = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-nt} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} dt.$$

Montrer que

$$a_n \sim \sqrt{\pi} f(0) \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (n \to \infty).$$

b) Soit $\{b_n\}$ la suite définie par

$$b_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx.$$

Montrer que

$$b_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (n \to \infty).$$

Indication : on pourra effectuer le changement de variable défini par $x = \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-t}}$.

c) Soit $\{c_n\}$ définie par

$$c_n = \int_0^{\infty} (1 + x^2)^{-n} dx.$$

Montrer que

$$c_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (n \to \infty).$$

Indication : poser $x = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$.

VIII
CONVOLUTION

Les trois derniers chapitres de ce cours traitent de l'analyse harmonique. On y étudie des questions où le groupe des translations joue un rôle. Celles-ci opèrent dans les espaces $L^p(\mathbb{R})$, et les opérateurs définis par un produit de convolution commutent aux translations. Ce produit de convolution permet de régulariser les fonctions, c'est-à-dire de les approcher par des fonctions très régulières, par exemple de classe $\mathcal{C}^\infty$.

VIII.1. Convolution et invariance par translation. Exemples

Le groupe $\mathbb{R}$ agit par translation sur les fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Si a est un nombre réel, la translatée $\tau_a f$ d'une fonction f est définie par

$$\tau_a f(x) = f(x-a).$$

Considérons une transformation linéaire T qui à une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ associe une fonction $g = Tf$ définie également sur $\mathbb{R}$. Supposons que la transformation T commute aux translations :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ T \circ \tau_a = \tau_a \circ T,$$

c'est-à-dire que, si T transforme f en g, alors T transforme $\tau_a f$ en $\tau_a g$. Supposons de plus que la transformation T soit de la forme

$$Tf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y) f(y)dy$$

(sans nous préoccuper pour le moment de savoir si l'intégrale est bien définie). Le fait que la transformation T commute aux translations se traduit par

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)f(y-a)dy = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-a,y)f(y)dy,$$

ce qui s'écrit aussi, puisque la mesure de Lebesgue est invariante par translation,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y+a)f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-a,y)f(y)dy.$$

Cette relation sera vérifiée si le *noyau* K de la transformation T est de la forme

$$K(x,y) = k(x-y),$$

et alors

$$Tf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)f(y)dy.$$

Ceci conduit à la définition suivante : le *produit de convolution* de deux fonctions f et g est défini par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy,$$

(à condition bien sûr que cette intégrale soit bien définie). Le produit de convolution est commutatif, $f * g = g * f$, et, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$(\tau_a f) * g = f * (\tau_a g) = \tau_a(f * g).$$

On peut aussi considérer que $f * g$ est une combinaison linéaire généralisée des translatées de la fonction f :

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\tau_a f)(x)g(a)da.$$

Dans ce chapitre nous allons étudier sous quelles hypothèses sur les fonctions f et g le produit de convolution $f*g$ existe, et étudier à quelle espace la fonction $f*g$ appartient.

Mais avant d'énoncer les propriétés de la convolution, considérons quelques exemples.

Exemple 1. Soient f la fonction caractéristique de l'intervalle $[a,b]$, et g celle de $[c,d]$. Alors

$$f * g(x) = \lambda([x-a, a-b] \cap [c,d]),$$

et le graphe de $f * g$ a la forme d'un trapèze (d'un triangle si $b - a = d - c$). Si $d - c < b - a$,

$$f * g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a + c, \\ x - (a + c) & \text{si } a + c < x < a + d, \\ d - c & \text{si } a + d < x < b + c, \\ (b + d) - x & \text{si } b + c < x < b + d, \\ 0 & \text{si } x > b + d. \end{cases}$$

Exemple 2. Pour $\alpha > 0$ posons

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\alpha}}.$$

La fonction G_α est la densité de la loi de probabilité de Gauss centrée de variance α,

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_\alpha(x) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x G_\alpha(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 G_\alpha(x) dx = \alpha.$$

En effet nous avons vu en V.2 que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du = \sqrt{\pi},$$

et la valeur de la troisième intégrale s'obtient à l'aide d'une intégration par parties.

Pour $\alpha, \beta > 0$,

$$G_\alpha * G_\beta(x) = G_{\alpha+\beta}.$$

En effet

$$G_\alpha * G_\beta(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2\alpha}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\beta}} dy.$$

L'intégrant est l'exponentielle d'un trinôme du second degré en y que nous écrivons sous forme canonique

$$\frac{(x-y)^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\left(y - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 + \frac{1}{\alpha+\beta} x^2.$$

Le résultat s'en déduit facilement en utilisant à nouveau la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Exemple 3. Pour $\alpha > 0$ posons

$$Y_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \text{ si } x > 0, \\ 0 \text{ si } x \leq 0. \end{cases}$$

Alors
$$Y_\alpha * Y_\beta = Y_{\alpha+\beta}.$$
En effet
$$Y_\alpha * Y_\beta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_\alpha(x-y)Y_\beta(y)dy,$$
l'intégrant est nul si $]0,\infty[\cap]-\infty,x[$ est vide, donc si $x \leq 0$, et, si $x > 0$,
$$Y_\alpha * Y_\beta(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}dy.$$
En posant $y = tx$, nous obtenons
$$Y_\alpha * Y_\beta(x) = \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}dt.$$
L'intégrale est la fonction bêta d'Euler (*cf.* V.3),
$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$
donc finalement
$$Y_\alpha * Y_\beta = Y_{\alpha+\beta}.$$

Soit f une fonction continue nulle pour $x \leq 0$. Alors, pour $\alpha = 1$, $F = Y_1 * f$ est la primitive de f qui s'annule en 0 :
$$F(x) = Y_1 * f(x) = \int_0^x f(y)dy,$$
et, si $\alpha = n$ est un entier ≥ 1, $F_n = Y_n * f$ est la primitive d'ordre n de f qui s'annule en 0 ainsi que ses $n-1$ premières dérivées,
$$F_n^{(n)} = f, \;\; F_n^{(k)}(0) = 0 \quad (0 \leq k \leq n-1).$$

VIII.2. Convolution et espaces $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$

Considérons d'abord l'action des translations sur les fonctions. Rappelons que $\tau_a f$ désigne la translatée de la fonction f par le nombre réel a,
$$(\tau_a f)(x) = f(x-a).$$
Si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, alors $\tau_a f$ aussi et
$$\|\tau_a f\|_p = \|f\|_p.$$
C'est en effet une conséquence immédiate de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue.

Proposition VIII.2.1. *Supposons* $1 \leq p < \infty$. *Si* $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, *alors*

$$\lim_{a \to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0.$$

Cette propriété n'a pas lieu pour $p = \infty$. En effet si f est la fonction caractéristique d'un intervalle d'extrémités α et β ($-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$), alors

$$\forall a \neq 0,\ \|\tau_a f - f\|_\infty = 1.$$

Démonstration. Supposons d'abord que f soit la fonction caractéristique d'un intervalle borné. Si $|a|$ est inférieur à la longueur de l'intervalle,

$$\|\tau_a f - f\|_p = (2|a|)^{\frac{1}{p}},$$

donc

$$\lim_{a \to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0.$$

Par suite la propriété a lieu si f est une fonction intégrable en escalier. Soit f une fonction de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction intégrable en escalier g telle que

$$\|f - g\|_p = \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'après ce qui précède il existe $\eta > 0$ tel que, si $|a| \leq \eta$,

$$\|\tau_a g - g\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Finalement, pour $|a| \leq \eta$,

$$\begin{aligned}\|\tau_a f - f\|_p &\leq \|\tau_a f - \tau_a g\|_p + \|\tau_a g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Théorème VIII.2.2. *Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Pour presque tout x l'application*

$$y \mapsto f(x-y)g(y)$$

est intégrable. La fonction $f * g$, qui est définie presque partout par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy,$$

est intégrable, et

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

La loi de composition interne ainsi définie sur l'espace de Banach $L^1(\mathbb{R})$ en fait une algèbre de Banach commutative.

Rappelons qu'une algèbre normée A (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une algèbre munie d'une norme d'espace vectoriel vérifiant de plus l'inégalité

$$\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|,$$

pour tous $a, b \in A$, et qu'une algèbre de Banach est une algèbre normée complète.

Démonstration. (a) D'après le théorème de Fubini-Tonelli (IV.2.3),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)||g(y)|dx \Big) dy = \|f\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|dy = \|f\|_1 \|g\|_1,$$

donc l'application $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. D'après le théorème de Fubini (IV.2.2), pour presque tout x la fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus

$$|f * g(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)||g(y)|dy,$$

donc

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

(b) Montrons que le produit de convolution est associatif. Si f, g, h sont trois fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \big(f * (g * h)\big)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z)(g * h)(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y-z)h(z)dz \Big) dy. \end{aligned}$$

Or, pour presque tout x,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)||g(y-z)||h(z)| \; dy \; dz < \infty,$$

donc, d'après le théorème de Fubini, pour un tel x,

$$\big(f * (g * h)\big)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x-z)h(z)dz = \big((f * g) * h\big)(x).$$

Donc les fonctions $f * (g * h)$ et $(f * g) * h$ sont égales presque partout. □

Théorème VIII.2.3. *Soient f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et g une fonction de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Pour presque tout x la fonction*

$$y \mapsto f(y)g(x-y)$$

est intégrable, et la fonction $f * g$, définie pour presque tout x par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy,$$

appartient à $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. De plus

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Démonstration. Le cas où $p = 1$ a déjà été traité (VIII.2.2). Supposons $p > 1$ et soit q l'exposant conjugué : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit φ la fonction caractéristique d'un intervalle borné $[a, b]$. D'après le théorème de Fubini-Tonelli (IV.2.3), et l'inégalité de Hölder (III.1.2)

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)||g(x-y)|\varphi(x)\ dy\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-y|\varphi(x)dx \Big) dy \leq \|f\|_1 \|g\|_p (b-a)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de Fubini (IV.2.2), pour presque tout x la fonction $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est intégrable et l'application

$$x \mapsto \varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

est intégrable. Par suite la fonction $f * g$, qui est définie presque partout, est mesurable.

D'après l'inégalité de Hölder (III.1.2),

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^{\frac{1}{p}} |g(x-y)||f(y)|^{\frac{1}{q}} dy \\
&\leq \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)||g(x-y)|^p dy \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|dy \Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Après une intégration en x nous en déduisons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f * g|^p dx \leq \|g\|_p^p \|f\|_1^{1+\frac{p}{q}},$$

c'est-à-dire

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p. \qquad \square$$

On montre également que, si $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, et si $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, alors

$$f_1 * (f_2 * g) = (f_1 * f_2) * g.$$

On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes qui tendent vers 0 à l'infini. Muni de la norme uniforme,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|,$$

c'est un espace de Banach.

Théorème VIII.2.4. *Soient f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et g une fonction de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. La fonction $f * g$ appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et*

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Démonstration. La fonction g, étant continue et tendant vers 0 à l'infini, est uniformément continue : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x'| \leq \eta$, alors $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$. Par suite, si $|x - x'| \leq \eta$,

$$|f * g(x) - f * g(x')| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)||g(x-y) - g(x'-y)|dy \leq \varepsilon \|f\|_1.$$

La fonction $f*g$ est donc uniformément continue. D'autre part, on montre à l'aide du théorème de convergence dominée que la fonction $f * g$ tend vers 0 à l'infini. □

Si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, alors, pour tout x, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable. Le produit de convolution $f * g$ est donc défini en tout point. C'est vrai plus généralement si f appartient à $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et g à $\mathcal{L}^q(\mathbb{R})$, lorsque p et q sont deux exposés conjugués.

Théorème VIII.2.5. *Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. La fonction $f * g$ appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et*

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Démonstration. (a) Suposons d'abord que f et g sont les fonctions caractéristiques de deux intervalles bornés. La fonction $f * g$ est alors une fonction continue à support compact dont le graphe a la forme d'un trapèze ou d'un triangle (*cf.* exemple 1 au début du chapitre). Par suite, si f et g sont deux fonctions intégrables en escalier, la fonction $f * g$ est continue à support compact.

(b) Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, et soient $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ deux suites de fonctions intégrables en escalier telles que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_2 = 0.$$

En écrivant

$$f_n * g_n - f * g = f_n * (g_n - g) + (f_n - f) * g,$$

nous obtenons pour tout x, à l'aide de l'inégalité de Schwarz,

$$|f_n * g_n(x) - f * g(x)| \leq \|f_n\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \|g\|_2.$$

La suite $f_n * g_n$ converge donc uniformément vers $f * g$. Il en résulte que $f * g$ est continue et tend vers 0 à l'infini. □

VIII.3. Approximation de l'identité et régularisation

Soit A une algèbre normée commutative. Une *approximation de l'identité* est une suite $\{a_n\}$ d'éléments de A telle que, pour tout élément b de A,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b = b.$$

Nous allons considérer le cas où A est l'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R})$ (*cf.* VIII.2.2). Soit φ une fonction intégrable positive d'intégrale égale à 1. Posons

$$\varphi_n(x) = n\varphi(nx).$$

Théorème VIII.3.1. *La suite $\{\varphi_n\}$ est une approximation de l'identité de $L^1(\mathbb{R})$. Plus généralement, si f est une fonction de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$,*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0.$$

Lemme VIII.3.2. *Si g est une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}$, continue en 0,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) g(x) dx = g(0).$$

Démonstration. Notons d'abord que, pour tout $\eta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n\eta}^{n\eta} \varphi(x) dx = 1,$$

et donc
$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|>\eta}\varphi_n(x)dx = 0.$$
Soit $\varepsilon > 0$. La fonction g étant continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que, si $|x| \leq \eta$,
$$|g(x) - g(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
Ainsi, pour $|x| \leq \eta$,
$$\begin{aligned}\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(x)g(x)dx - g(0)\Big| &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(x)|g(x) - g(0)|dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\sup|g|\int_{|x|\geq\eta}\varphi_n(x)dx.\end{aligned}$$
Il existe N tel que, si $n \geq N$,
$$2\sup|g|\int_{|x|>\eta}\varphi_n(x)dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
Le résultat annoncé est établi. □

Démonstration de VIII.3.1. Soit f une fonction de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Posons
$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y) - f(x)|^p dx = \|\tau_y f - f\|_p^p.$$
La fonction g est bornée et continue en 0,
$$g(y) \leq 2^p\|f\|_p^p, \text{ et } \lim_{y\to 0} g(y) = 0,$$
d'après VIII.2.1. Pour presque tout x,
$$\varphi_n * f(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(y)\big(f(x-y) - f(x)\big)dy.$$
Nous allons montrer que, pour un tel x,
$$|\varphi_n * f(x) - f(x)|^p \leq \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(y)|f(x-y) - f(x)|^p dy.$$
Si $p = 1$ c'est évident. Si $p > 1$, notons q l'exposant conjugué de p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En écrivant
$$|\varphi_n * f(x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(y)^{\frac{1}{q}}\varphi_n(y)^{\frac{1}{p}}|f(x-y) - f(x)|dy,$$

nous obtenons grâce à l'inégalité de Hölder (III.1.2)

$$|\varphi_n * f(x) - f(x)| \leq \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(y)|f(x-y) - f(x)|^p dy\Big)^{\frac{1}{p}},$$

et, après une intégration en x,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n * f(x) - f(x)|^p dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(y) g(y) dy.$$

Le résultat annoncé est une conséquence du lemme VIII.3.2. □

Proposition VIII.3.3. *Si f est une fonction de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$,*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n * f - f\|_\infty = 0.$$

La démonstration est laissée au lecteur.

Citons deux approximations de l'identité qui jouent un rôle important en analyse :

1. Approximation de Gauss.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2}, \qquad \varphi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-n^2x^2}.$$

2. Approximation de Poisson.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \qquad \varphi_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}.$$

Nous allons étudier la dérivée d'un produit de convolution et montrer, à l'aide de la convolution, que pour $1 \leq p < \infty$, toute fonction de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ est limite, au sens de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition VIII.3.4. *Soient f une fonction de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à support compact. Alors $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et*

$$(f * \varphi)' = f * \varphi'.$$

Démonstration. Le support de φ étant compact il existe $A > 0$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-A, A]$. Nous allons appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre (VII.1.2) à l'intégrale

$$f * \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi(x-y) dy.$$

Fixons $K = [a, b]$. Pour $x \in K$, $y \in \mathbb{R}$,

$$|f(y)\varphi'(x-y)| \leq g_K(y),$$

avec

$$g(y) = \sup |\varphi'||f(y)|\chi_{[a-A,b+A]}(y).$$

La fonction g est intégrable et nous pouvons appliquer le théorème VII.1.2 :

$$(f * \varphi)'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi'(x-y)dy = f * \varphi'(x). \qquad \square$$

Remarquons que si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact,

$$(f * g)' = f' * g = f * g'.$$

On note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de clase $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Notons que l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est pas réduit à la fonction nulle. Il contient en effet la fonction ψ définie par

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \text{ si } -1 < x < 1, \\ 0 \text{ si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Corollaire VIII.3.5. *Soient f une fonction de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et φ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors la fonction $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et*

$$(f * \varphi)^{(n)} = f * \varphi^{(n)}.$$

On dit que $f * \varphi$ est la *régularisée* de f par φ.

Théorème VIII.3.6. *Si $1 \leq p < \infty$, toute fonction f de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ est limite, au sens de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, d'une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit φ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, positive et d'intégrale égale à 1. On peut prendre par exemple

$$\varphi(x) = \frac{1}{A}\psi(x),$$

où ψ est la fonction décrite ci-dessus et

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx.$$

Posons $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$. Si f est une fonction de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ à support compact, la fonction $\varphi_n * f$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et, d'après le théorème VIII.2.1,

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0.$$

Le résultat annoncé s'en déduit car toute fonction de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ est limite, au sens de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, d'une suite de fonctions intégrables en escalier. $\square$

VIII.4. Convolution des mesures bornées

Soient μ et ν deux mesures bornées sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. La mesure $\mu \otimes \nu$ est une mesure bornée sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2)$. Le produit de convolution $\mu * \nu$ est la mesure définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ par, si E est un ensemble borélien de $\mathbb{R}$,

$$\mu * \nu(E) = \mu \otimes \nu\big(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \in E\}\big).$$

C'est une mesure bornée. Sa masse totale est égale au produit $\mu(\mathbb{R})\nu(\mathbb{R})$ des masses totales des mesures μ et ν. On obtient ainsi une loi de composition interne sur l'ensemble $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ des mesures bornées sur $\mathbb{R}$ qui est associative, distributive par rapport à l'addition et commutative. La mesure de Dirac δ en 0 est un élément neutre. Si δ_a désigne la mesure de Dirac en a,

$$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}.$$

Si f est une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x + y) d\mu(x) d\nu(y).$$

Si ν a une densité g par rapport à la mesure de Lebesgue, $d\nu(x) = g(x)dx$, alors $\mu * \nu$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue qui est notée $\mu * g$ et qui est donnée par

$$\mu * g(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x - y) d\mu(y).$$

En particulier, si $\mu = \delta_a$,

$$\delta_a * g(x) = g(x - a) = \tau_a g(x).$$

Si μ et ν ont des densités f et g, alors $\mu * \nu$ a pour densité $f * g$, produit de convolution de deux fonctions intégrables qui a été défini à la section VIII.2.

Si μ est une mesure bornée, et si $\{\varphi_n\}$ est une approximation de l'identité, alors la suite des mesures $\mu * (\varphi_n dx)$ converge étroitement vers μ. En effet, si f est une fonction continue bornée,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\big(\mu * \varphi_n\big)(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\varphi_n(u) du,$$

avec

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}} f(u + y) d\mu(y).$$

La fonction F est continue et bornée. La continuité se montre à l'aide du théorème de convergence dominée (I.3.4). Donc

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\varphi_n(u)du = F(0),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(\mu*\varphi_n)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

Exercices

Exercice VIII.1. Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $f * g$ est partout définie, que

$$\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p\|g\|_q,$$

et que $f * g$ appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Exercice VIII.2. Soit $\alpha > 0$ et soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution bornée de l'équation différentielle

$$-u'' + \alpha^2 u = f.$$

Soit $p \geq 1$. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, alors u aussi et qu'il existe une constante C telle que

$$\|u\|_p \leq C\|f\|_p.$$

Exercice VIII.3. Soient A et B deux ensembles mesurables de mesure finie pour la mesure de Lebesgue : $\lambda(A) < \infty$, $\lambda(B) < \infty$. Montrer que l'ensemble $A + B$ est d'intérieur non vide.
Indication : considérer le produit de convolution des fonctions caractéristiques de A et B.

Exercice VIII.4. Soit $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\lim_{a\to 0}\|\tau_a f - f\|_\infty = 0.$$

Montrer que f est presque partout égale à une fonction uniformément continue.
Indication : considérer la suite $g_n = f * \varphi_n$, où $\{\varphi_n\}$ est une approximation de l'identité. Montrer que la suite $\{g_n\}$ converge vers f presque partout, et en tout point vers une fonction uniformément continue.

Exercice VIII.5. Pour $\alpha > 0$ on pose

$$\mu_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \delta_n.$$

Montrer que $\mu_\alpha * \mu_\beta = \mu_{\alpha+\beta}$.

IX

TRANSFORMATION DE FOURIER

La transformation de Fourier intervient dans de nombreuses questions d'analyse, aussi bien théoriques que pratiques. Cette transformation a été introduite par Fourier pour l'étude de l'équation de la chaleur. C'est une équation aux dérivées partielles qui décrit l'évolution de la température au cours du temps. Elle s'écrit, pour un choix convenable des unités de temps et de longueur,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur est le suivant : étant donnée une fonction continue u_0 sur $\mathbb{R}$, déterminer une fonction u continue sur $[0, T[\times\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, T[\times\mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t, x) \in]0, T[\times\mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(0, x) = u_0(x). \tag{2}$$

On remarque que les fonctions suivantes sont des solutions particulières de l'équation de la chaleur,

$$v_\lambda(t, x) = \mathrm{e}^{-\lambda^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$; posons

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} f(\lambda)d\lambda.$$

On vérifie que u est une solution de l'équation de la chaleur sur $]0, \infty[\times\mathbb{R}$, qu'elle est continue sur $[0, \infty[\times\mathbb{R}$, et que

$$u(0, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} f(\lambda)d\lambda.$$

Le problème de Cauchy sera résolu s'il est possible de trouver une fonction f telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} f(\lambda) d\lambda = u_0(x).$$

Ainsi apparaît la transformation de Fourier. Nous verrons plus loin comment le problème de Cauchy peut être résolu lorsque u_0 est une fonction continue bornée (*cf.* XI.4).

IX.1. Transformées de Fourier des fonctions intégrables

La *transformée de Fourier* d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue) est la fonction $\hat{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} f(x) dx.$$

La fonction $\hat{f}$ est continue et tend vers 0 à l'infini. La continuité résulte du théorème sur la continuité d'une fonction définie par une intégrale (VII.1.1), et nous avons déjà vu que $\hat{f}$ tend vers 0 à l'infini (lemme de Riemann-Lebesgue, VII.4.2). De plus

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Ainsi la transformation de Fourier est une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Sa norme est égale à 1. En effet, si $f \geq 0$, alors

$$\|\hat{f}\|_\infty = \hat{f}(0) = \|f\|_1.$$

Exemples. Soit α un nombre réel positif.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \tfrac{1}{2\alpha}\chi_{[-\alpha,\alpha]}(x), & \hat{f}(t) &= \tfrac{\sin \alpha t}{\alpha t}.\\
f(x) &= \tfrac{1}{\alpha}\left(1 - \tfrac{|x|}{\alpha}\right)\chi_{[-\alpha,\alpha]}(x), & \hat{f}(t) &= \left(\tfrac{\sin \frac{\alpha t}{2}}{\frac{\alpha t}{2}}\right)^2.\\
f(x) &= \mathrm{e}^{-\alpha|x|}, & \hat{f}(t) &= \tfrac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}.\\
f(x) &= \mathrm{e}^{-\alpha x^2}, & \hat{f}(t) &= \sqrt{\tfrac{\pi}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4\alpha}}.
\end{aligned}$$

Démontrons la dernière formule. Calculons l'intégrale

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} dx.$$

L'intégrant est une exponentielle dont l'exposant est un trinôme du second degré. Nous l'écrivons sous forme canonique

$$\alpha x^2 + \mathrm{i}tx = \alpha\left(\left(x+\frac{\mathrm{i}t}{2\alpha}\right)^2 + \frac{t^2}{4\alpha^2}\right),$$

et nous obtenons

$$\hat{f}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha\left(x+\frac{\mathrm{i}t}{2\alpha}\right)^2} dx.$$

On montre à l'aide du théorème VII.1.2 que la fonction $\hat{f}$ est dérivable et que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\hat{f}(t)\mathrm{e}^{\frac{t^2}{4\alpha}}\right) &= -\frac{\mathrm{i}}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha\left(x+\frac{\mathrm{i}t}{2\alpha}\right)^2} 2\alpha\left(x+\frac{\mathrm{i}t}{2\alpha}\right)dx \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\mathrm{e}^{-\alpha\left(x+\frac{\mathrm{i}t}{2\alpha}\right)^2} dx = 0.\end{aligned}$$

Il existe donc une constante C telle que

$$\hat{f}(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4\alpha}}.$$

Pour $t = 0$, nous obtenons

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Notons que la transformée de Fourier de $\tau_a f$ est égale à $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ta}\hat{f}$ ($\tau_a f(x) = f(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$), et que celle de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f$ est égale à $\tau_a \hat{f}$.

Théorème IX.1.1. *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, $\hat{f}$ et $\hat{g}$ leurs transformées de Fourier. La transformée de Fourier du produit de convolution $f * g$ est égale au produit ordinaire $\hat{f}(t)\hat{g}(t)$.*

Démonstration. Posons $h = f * g$. La transformée de Fourier $\hat{h}$ de h est égale à

$$\hat{h}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy\right)dx.$$

D'après le théorème de Fubini (IV.2.2),

$$\begin{aligned}\hat{h}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} f(x-y)dy\right)g(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ty}\hat{f}(t)g(y)dy = \hat{f}(t)\hat{g}(t).\end{aligned}$$

□

Théorème IX.1.2. *Soient f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier.*

(i) *Si xf est intégrable, alors $\hat{f}$ est dérivable et sa dérivée $\hat{f}'$ est la transformée de Fourier de $-\mathrm{i}xf$.*

(ii) *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, et si sa dérivée f' est intégrable, alors la transformée de Fourier de f' est égale à $\mathrm{i}t\hat{f}$.*

Démonstration. L'assertion (i) est une conséquence immédiate du théorème sur la dérivation d'une fonction définie par une intégrale (VII.1.2).

Pour démontrer (ii), écrivons

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y)dy.$$

Puisque f' est intégrable, f a une limite quand x tend vers $+\infty$. La fonction f étant intégrable, cette limite est nulle. Il en est de même en $-\infty$. En intégrant par parties nous obtenons

$$\int_{-A}^{A} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}dx = -\mathrm{i}tf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\Big|_{-A}^{A} + \mathrm{i}t\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}dx,$$

et nous obtenons (ii) en faisant tendre A vers l'infini. □

Nous allons donner deux théorèmes d'inversion pour la transformation de Fourier. Considérons l'approximation de Poisson

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2},$$

et posons

$$\Phi_n(t) = \mathrm{e}^{-\frac{|t|}{n}}.$$

Alors

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\Phi_n(t)dt.$$

Lemme IX.1.3. *Soient f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier. Alors*

$$\varphi_n * f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\Phi_n(t)\hat{f}(t)dt.$$

Démonstration. En effet, d'après le théorème de Fubini (IV.2.2),

$$\varphi_n * f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)t} f(y)dy\Big)\Phi_n(t)dt$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\hat{f}(t)\Phi_n(t)dt.$$ □

Théorème IX.1.4. *Soient f une fonction intégrable et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier. Si $\hat{f}$ est intégrable, alors, pour presque tout x,*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\hat{f}(t)dt.$$

Démonstration. Posons $f_n = \varphi_n * f$. Alors, d'après le théorème VIII.3.1,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0,$$

et d'après le lemme IX.1.3,

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\hat{f}(t)\Phi_n(t)dt.$$

Du théorème de convergence dominée (I.3.4) nous déduisons que, pour tout x, $f_n(x)$ a pour limite

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\hat{f}(t)dt.$$

Puisque

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0,$$

il en résulte que f est presque partout égale à la fonction continue g. □

Corollaire IX.1.5. *Soient f une fonction intégrable et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier. Si $\hat{f} \equiv 0$, alors f est nulle presque partout.*

Ainsi la transformation de Fourier est une application injective de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. On verra en exercice qu'elle n'est pas surjective. Mais son image est dense. En effet, d'après le lemme IX.1.3, son image contient les fonctions de la forme $\varphi_n * f$, où f est une fonction continue à support compact.

Pour établir le deuxième théorème d'inversion nous aurons besoin d'un résultat préliminaire sur l'*intégrale de Dirichlet* qui s'écrit

$$I(\lambda) = \int_0^T f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}dx.$$

Théorème IX.1.6. *Soit f une fonction intégrable sur $[0, T]$ admettant une limite à droite en 0 notée $f(0+)$. Supposons qu'il existe K et x_0 tels que, pour $0 < x < x_0$,*

$$|f(x) - f(0+)| \leq Kx.$$

Alors

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^T f(x)\frac{\sin \lambda x}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(0+).$$

Démonstration. Nous utiliserons la valeur de l'intégrale semi-convergente suivante (*cf.* VII.2)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Pour démontrer le théorème nous écrivons, pour $0 < \eta < T$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T f(x)\frac{\sin \lambda x}{x} dx - \frac{\pi}{2} f(0+) \\
&= \int_0^\eta \big(f(x) - f(0+)\big)\frac{\sin \lambda x}{x} dx + \int_\eta^T \frac{f(x)}{x} \sin \lambda x \, dx \\
&- f(0+) \int_\eta^\infty \frac{\sin \lambda x}{x} dx.
\end{aligned}$$

Si $0 < \eta < x_0$,

$$\Big| \int_0^\eta \big(f(x) - f(0+)\big)\frac{\sin \lambda x}{x} dx \Big| \leq K\eta.$$

Du lemme de Riemann-Lebesgue (VII.4.2) appliqué à la fonction $\frac{f(x)}{x}$ il résulte que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_\eta^T \frac{f(x)}{x} \sin \lambda x \, dx = 0.$$

De plus

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_\eta^\infty \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\lambda\eta}^\infty \frac{\sin \lambda x}{x} dx = 0.$$

Le théorème s'en déduit. □

Nous en déduisons le théorème d'inversion ponctuelle suivant.

Théorème IX.1.7. *Soient f une fonction intégrable et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier. Supposons que f admette en un point x une limite à gauche $f(x-)$ et une limite* *à droite $f(x+)$. Supposons de plus qu'il existe $\eta > 0$ et $M > 0$ tels que, pour $0 < h < \eta$,*

$$|f(x+h) - f(x+)| \leq Mh, \quad |f(x-h) - f(x-)| \leq Mh.$$

Alors

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt} \hat{f}(t)dt = \tfrac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big).$$

Démonstration. D'après le théorème de Fubini (IV.2.2),

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt} \hat{f}(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)t} dt\Big) f(y)dy \\ &= 2\int_{0}^{\infty} \frac{\sin Ay}{y} \big(f(x+y) + f(x-y)\big)dy.\end{aligned}$$

On applique le théorème sur l'intégrale de Dirichlet (IX.1.6) à la fonction $y \mapsto f(x+y) + f(x-y)$. $\square$

L'*espace de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions f de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs complexes qui sont à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, c'est-à-dire que, pour tous les entiers p et $k \geq 0$, la fonction $x^p f^{(k)}(x)$ est bornée. Par exemple la fonction de Gauss

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \quad (\alpha > 0)$$

appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est contenu dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour tout p ($1 \leq p \leq \infty$), et, pour $1 \leq p < \infty$, s'identifie à un sous-espace dense de $L^p(\mathbb{R})$.

Théorème IX.1.8. *La transformation de Fourier est une bijection de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et soit $\hat{f}$ sa transformée de Fourier. De la relation

$$(\mathrm{i}t)^k \hat{f}^{(p)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \big((-\mathrm{i}x)^p f(x)\big)^{(k)} dx,$$

on déduit que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En particulier $\hat{f}$ est intégrable, et, d'après le théorème IX.1.4,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \hat{f}(t)dt.$$

Ainsi la transformation de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. $\square$

IX.2. Transformées de Fourier des fonctions de carré intégrable

Une propriété importante de la transformation de Fourier est la *formule de Plancherel* qui s'énonce comme suit.

Théorème IX.2.1. *Soit f une fonction intégrable et de carré intégrable. Sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est de carré intégrable et*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2 dt.$$

Démonstration. Posons $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, $g = f * \tilde{f}$. Alors

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\overline{f(y)} dy, \quad g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy.$$

La transformée de Fourier de $\tilde{f}$ est égale à $\overline{\hat{f}(t)}$ et celle de g à $|\hat{f}(t)|^2$. La fonction g est intégrable, continue et bornée. D'après le lemme IX.1.3,

$$\varphi_n * g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(t) |\hat{f}(t)|^2 dt.$$

Par suite

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n * g(0) = g(0).$$

D'autre part

$$\Phi_n(t) \leq \Phi_{n+1}(t), \quad \lim_{n\to\infty} \Phi(t) = 1,$$

donc, d'après le théorème de convergence monotone (I.2.1),

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2 dt. \qquad \square$$

Pour une fonction f intégrable et de carré intégrable posons

$$\mathcal{P}f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(t).$$

La transformation $\mathcal{P}$ s'appelle *transformation de Fourier-Plancherel*. Elle vérifie

$$\|\mathcal{P}f\|_2 = \|f\|_2.$$

Théorème IX.2.2 **(Théorème de Plancherel).** *La transformation de Fourier-Plancherel se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration. (a) Soit f une fonction de carré intégrable. Il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

La suite $\{\mathcal{P} f_n\}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ puisque

$$\|\mathcal{P} f_m - \mathcal{P} f_n\|_2 = \|f_m - f_n\|_2.$$

Elle est donc convergente dans $L^2(\mathbb{R})$ qui est complet (III.2.2). Posons

$$\mathcal{P} f = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P} f_n.$$

C'est un élément de $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une classe de fonctions de carré intégrable. Cette classe est indépendante de la suite $\{f_n\}$ choisie, et

$$\|\mathcal{P} f\|_2 = \|f\|_2.$$

(b) La transformation de Fourier-Plancherel est une application linéaire isométrique. Son image est fermée. En effet si, pour une suite $\{f_n\}$ de $L^2(\mathbb{R})$, la suite $\{\mathcal{P} f_n\}$ est convergente, alors la suite $\{f_n\}$ est aussi convergente. Soit f la limite de la suite $\{f_n\}$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P} f_n = \mathcal{P} f.$$

(c) L'image de la transformation de Fourier-Plancherel est dense. Elle contient en effet l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

L'image de $\mathcal{P}$ étant fermée et dense est égale à $L^2(\mathbb{R})$. □

La transformation inverse est donnée par ($f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$) :

$$\bar{\mathcal{P}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(t) dt.$$

On peut noter que $(\mathcal{P} \circ \mathcal{P}) f(x) = f(-x)$, $\mathcal{P}^4 = \mathrm{Id}$.

IX.3. Transformées de Fourier des mesures bornées

La *transformée de Fourier* d'une mesure bornée μ est la fonction $\hat{\mu}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} d\mu(x).$$

Si μ a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue ($f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $f \geq 0$), alors $\hat{\mu} = \hat{f}$. La fonction $\hat{\mu}$ est bornée,

$$|\hat{\mu}(t)| \leq \hat{\mu}(0) = \int_{\mathbb{R}} d\mu,$$

et uniformément continue. En effet

$$|\hat{\mu}(t+h) - \hat{\mu}(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}th} - 1| d\mu(x),$$

et le second membre tend vers 0 quand h tend vers 0 d'après le théorème de convergence dominée (I.3.2). La transformée de Fourier du produit de convolution $\mu * \nu$ de deux mesures bornées μ et ν est égale au produit ordinaire des transformées de Fourier de μ et ν,

$$\widehat{\mu * \nu} = \hat{\mu} \cdot \hat{\nu}.$$

En effet

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu * \nu}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+y)} d\mu(x) d\nu(y), \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} d\mu(x) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ty} d\nu(y) \\
&= \hat{\mu}(t) \hat{\nu}(t).
\end{aligned}$$

Si μ est une mesure bornée et f une fonction intégrable,

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\mu}(t) f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) d\mu(x).$$

En effet, d'après le théorème de Fubini (IV.2.2), les deux membres sont égaux à

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} f(t) dt d\mu(x).$$

Il en résulte que si deux mesures bornées μ et ν ont même transformée de Fourier, alors elles sont égales. En effet, si $\hat{\mu} = \hat{\nu}$, alors, pour toute fonction f de $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu(x).$$

Puisque $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, l'égalité a encore lieu pour toute fonction f de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, et par suite les mesures μ et ν sont égales.

Rappelons qu'une suite de mesures bornées μ_n converge étroitement vers une mesure bornée μ si, pour toute fonction continue bornée f,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu.$$

La suite des transformées de Fourier $\hat{\mu}_n(t)$ converge alors vers $\hat{\mu}(t)$ en tout point t. On peut montrer que la convergence est uniforme sur tout compact. La réciproque suivante de cette propriété est importante de par ses applications au calcul des probabilités.

***Théorème IX.3.1* (Théorème de Lévy).** *Soit $\{\mu_n\}$ une suite de mesures bornées telle que la suite $\{\hat{\mu}_n\}$ converge en tout point vers une fonction φ continue en 0. Alors φ est la transformée de Fourier d'une mesure bornée μ, et la suite $\{\mu_n\}$ converge étroitement vers μ.*

Démonstration. Posons

$$M = \sup_n \int_{\mathbb{R}} d\mu_n = \sup_n \hat{\mu}_n(0),$$

et remarquons que

$$|\hat{\mu}_n(t)| \leq \hat{\mu}_n(0) \leq M, \quad |\varphi(t)| \leq \varphi(0) \leq M.$$

Soit L_n la forme linéaire sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ définie par

$$L_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu_n.$$

Cette forme linéaire vérifie

$$|L_n(f)| \leq M\|f\|_\infty.$$

Soit g une fonction intégrable. Sa transformée de Fourier $\hat{g}$ appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$,

$$L_n(\hat{g}) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x)d\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\hat{\mu}_n(t)dt,$$

et, d'après le théorème de convergence dominée (I.3.4),

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\hat{g}) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\varphi(t)dt.$$

Puisque $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R})$ est un sous-espace dense de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, il en résulte que, pour toute fonction f de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, la suite $L_n(f)$ a une limite. Notons $L(f)$ cette limite. Ainsi L est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ qui contient $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. D'après le théorème de Riesz (VI.3.1) il existe une mesure de Lebesgue-Stieltjes μ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

Considérons l'approximation de Poisson

$$f_k(t) = \frac{1}{\pi} \frac{k}{1 + k^2 t^2}, \quad \hat{f}_k(x) = \mathrm{e}^{-\frac{|x|}{k}}.$$

Pour $g = f_k$, nous obtenons

$$L(\hat{f}_k) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_k(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f_k(t)\varphi(t)dt.$$

D'une part, grâce au théorème de convergence monotone (I.3.4),

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_k(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} d\mu(x),$$

et, d'autre part, φ étant bornée et continue en 0, d'après le lemme VIII.2.2,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(t)\varphi(t)dt = \varphi(0).$$

Il en résulte que la mesure μ est bornée, et que

$$\int_{\mathbb{R}} d\mu = \varphi(0) = \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n(0) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} d\mu_n,$$

c'est-à-dire que la suite μ_n converge étroitement vers μ. $\square$

Une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes est dite *de type positif* si, quels que soient les nombres réels $x_1, \ldots, x_N$ et les nombres complexes $c_1, \ldots, c_N$,

$$\sum_{j,k=1}^{N} \varphi(x_j - x_k) c_j \bar{c}_k \geq 0.$$

Une fonction φ de type positif vérifie

$$\varphi(-x) = \overline{\varphi(x)}, \quad |\varphi(x)| \leq \varphi(0).$$

C'est une conséquence du fait que, pour tout x, la matrice

$$\begin{pmatrix} \varphi(0) & \varphi(x) \\ \varphi(-x) & \varphi(0) \end{pmatrix}$$

est hermitienne positive. Le produit de deux fonctions de type positif est de type positif. C'est une conséquence du lemme d'algèbre linéaire suivant.

Lemme IX.3.2. *Soient (a_{jk}) et (b_{jk}) deux matrices hermitiennes positives, alors la matrice (c_{jk}) définie par*

$$c_{jk} = a_{jk} b_{jk}$$

est aussi hermitienne positive.

Démonstration. Puisque toute forme hermitienne positive est une somme de carrés de modules de formes linéaires, il suffit d'établir la propriété lorsque la matrice (b_{jk}) est de rang un :

$$b_{jk} = \beta_j \bar{\beta}_k.$$

Alors

$$\sum_{j,k} a_{jk} b_{jk} c_j \bar{c}_k = \sum_{j,k} a_{jk} (\beta_j c_j) \overline{(\beta_k c_k)} \geq 0. \qquad \square$$

La transformée de Fourier d'une mesure bornée est une fonction de type positif. Soit en effet μ une mesure bornée et posons

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} d\mu(t).$$

Alors

$$\sum_{j,k=1}^{N} \varphi(x_j - x_k) c_j \bar{c}_k = \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{j=1}^{N} c_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_j} \right|^2 d\mu(t) \geq 0.$$

Cette propriété admet une réciproque.

***Théorème IX.3.3* (Théorème de Bochner).** *Soit φ une fonction continue de type positif. Alors φ est la transformée de Fourier d'une mesure bornée μ. La mesure μ est unique.*

Nous avons déjà vu que si μ existe elle est unique.

Lemme IX.3.4. *Soit φ une fonction continue de type positif. Alors, pour toute fonction f intégrable,*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-y)f(x)\overline{f(y)}\;dx\;dy \geq 0.$$

Démonstration. Si f est une fonction continue à support compact $\subset [a,b]$, cette intégrale est limite de sommes de Riemann du type

$$h^2\sum_{j,k=1}^{N}\varphi(x_j-x_k)f(x_j)\overline{f(x_k)}\quad\Big(x_j=a+(j-1)h,\; h=\frac{b-a}{N}\Big)$$

qui sont positives. La propriété est donc établie pour une telle fonction. Si f est intégrable, alors f est limite au sens de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ d'une suite de fonctions f_n continues à support compact,

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_1=0,$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-y)f_n(x)\overline{f_n(y)}\;dx\;dy$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-y)f(x)\overline{f(y)}\;dx\;dy,$$

puisque

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-y)f_n(x)\overline{f_n(y)}\;dx\;dy-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty}\varphi(x-y)f(x)\overline{f(y)}\;dx\;dy\Big|$$
$$\leq \varphi(0)\big(\|f_n\|_1+\|f\|_1\big)\|f_n-f\|_1.$$
□

Démonstration du théorème X.3.3. (a) Supposons d'abord que φ est intégrable et posons

$$\gamma(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{itx}\varphi(x)dx.$$

Si g une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(t)g(-t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\hat{g}(x)dx.$$

Soit $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$; posons

$$g(t)=|\hat{f}(t)|^2,$$

alors g est intégrable et

$$\hat{g}(x) = 2\pi(f * \tilde{f})(-x).$$

Par suite,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t)|\hat{f}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y) f(x)\overline{f(y)}\, dx\, dy.$$

En particulier, si

$$f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0 x} \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2,$$

le support de $\hat{f}$ est égal à $[t_0 - a, t_0 + a]$. Ceci permet d'établir que $\gamma(t) \geq 0$ pour tout t.
Prenons maintenant

$$g_n(t) = \mathrm{e}^{-\frac{|t|}{n}}, \quad \hat{g}_n(x) = \frac{2n}{1+n^2x^2}.$$

Pour tout n,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t) \mathrm{e}^{-\frac{|t|}{n}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2x^2} dx.$$

Quand n tend vers l'infini, le premier membre a pour limite $\int \gamma(t)dt$ en vertu du théorème de convergence monotone (I.2.1), et le deuxième membre a pour limite $\varphi(0)$ car φ est continue et bornée (VIII.3.2). Ceci montre que γ est intégrable, et par suite

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} d\mu(t),$$

avec $d\mu(t) = \gamma(t)dt$.

(b) Soit φ une fonction continue de type positif. Pour tout n la fonction φ_n,

$$\varphi_n(x) = \mathrm{e}^{-\frac{|x|}{n}} \varphi(x),$$

est de type positif, étant le produit de deux fonctions de type positif. De plus la fonction φ_n est intégrable. D'après (a) φ_n est la transformée de Fourier d'une mesure bornée μ_n. Quand n tend vers l'infini, $\varphi_n(x)$ tend vers $\varphi(x)$. Donc φ est la transformée de Fourier d'une mesure bornée d'après le théorème de Lévy (IX.3.1). $\square$

Exercices

Exercice IX.1. Soient f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier.

a) Montrer que, pour $t \neq 0$,

$$2|\hat{f}(t)| \leq \|f - \tau_{\frac{\pi}{t}} f\|_1.$$

Indication : on établira que

$$2\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(f(x) - f(x - \frac{\pi}{t})\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} dx.$$

b) En déduire que $\hat{f}(t)$ tend vers 0 à l'infini.

Exercice IX.2. Pour $\alpha > 0$ on considère la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_\alpha(x) = Y(x)\mathrm{e}^{-x}x^{\alpha-1}.$$

($Y(x) = 1$ si $x \geq 0$, et 0 si $x < 0$.)

a) Calculer la transformée de Fourier de f_α.

b) Montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha} = 2^{2-2\alpha}\pi\frac{\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)^2}.$$

Exercice IX.3. Pour $a \neq 0$ on pose

$$g_a(x) = \frac{1}{x + \mathrm{i}a}.$$

a) Montrer que g_a est de carré intégrable et déterminer sa transformée de Fourier-Plancherel (*cf.* l'exercice précédent).

b) Pour $a, b \neq 0$ déterminer le produit de convolution $g_a * g_b$.

Exercice IX.4. Pour $\alpha > 0$, on pose

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{\alpha^2 + x^2}.$$

Déterminer, pour $\alpha, \beta > 0$, le produit de convolution $\varphi_\alpha * \varphi_\beta$.
Indication : considérer la transformée de Fourier de φ_α.

Exercice IX.5. Pour $\alpha > 0$ on pose

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^\alpha}.$$

a) Montrer que

$$\hat{f}_\alpha(t) = 2^{1-\alpha} \frac{\left|\Gamma\left(\frac{\alpha+\mathrm{i}t}{2}\right)\right|^2}{\Gamma(\alpha)}.$$

Indication : on fera le changement de variable défini par $u = \mathrm{e}^{2x}$, et on utilisera la relation

$$\int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (\Re p,\ \Re q > 0).$$

b) Évaluer les intégrales

$$\int_{-\infty}^\infty \left|\Gamma\left(\frac{\alpha+\mathrm{i}t}{2}\right)\right|^2 dt, \quad \int_{-\infty}^\infty \left|\Gamma\left(\frac{\alpha+\mathrm{i}t}{2}\right)\right|^4 dt.$$

Exercice IX.6. Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|\mathrm{e}^{\alpha|x|} dx < \infty,$$

et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)x^n dx = 0.$$

Montrer que $f(x) = 0$ presque partout.
Indication : considérer la fonction de la variable complexe λ définie par

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} f(x) dx.$$

Exercice IX.7. Le but de cet exercice est de montrer que la transformation de Fourier n'est pas une bijection de $L^1(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ qui n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, impaire.

a) Montrer que

$$\int_0^A \frac{\hat{f}(t)}{t} dt = 2\mathrm{i} \int_0^\infty \left(\int_0^A \frac{\sin tx}{t} dt\right) f(x) dx.$$

et que

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\hat{f}(t)}{t} dt = \mathrm{i}\pi \int_0^\infty f(x) dx.$$

Indication : on rappelle que

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_0^{\alpha} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

On montrera qu'il existe une constante M telle que, pour tout $\alpha > 0$,

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin x}{x} dx \leq M.$$

b) Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ impaire telle que l'intégrale

$$\int_0^{A} \frac{g(t)}{t} dt$$

n'ait pas de limite quand A tend vers l'infini. Conclure.

X

SÉRIES DE FOURIER

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes est dite *périodique* de période T si, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x+T) = f(x).$$

Les fonctions trigonométriques cosinus et sinus sont périodiques de période 2π et les fonctions $\cos \frac{2\pi}{T} nx$ et $\sin \frac{2\pi}{T} nx$, pour un entier $n \geq 1$, sont périodiques de période T. Par suite une combinaison linéaire

$$p(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(\alpha_n \cos \frac{2\pi}{T} nx + \beta_n \sin \frac{2\pi}{T} nx \right)$$

est aussi périodique de période T. Une telle fonction p est appelé *polynôme trigonométrique* de période T. Nous allons étudier dans ce chapitre sous quelles conditions il est possible d'approximer une fonction périodique f de période T par un polynôme trigonométrique de période T, ou de représenter f par une série de Fourier, c'est-à-dire une série de la forme

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos \frac{2\pi}{T} nx + \beta_n \sin \frac{2\pi}{T} nx \right).$$

Au lieu des fonctions cosinus et sinus il sera commode d'utiliser les fonctions exponentielles complexes

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i} \frac{2\pi}{T} nx} = \cos \frac{2\pi}{T} nx + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi}{T} nx.$$

Une série de Fourier s'écrit donc aussi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nx}.$$

On dit que cette série de Fourier converge en x si la suite des sommes partielles

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nx}$$

est convergente.

X.1. Coefficients de Fourier

Supposons que f soit périodique de période T et intégrable sur tout intervalle borné (par rapport à la mesure de Lebesgue). Les *coefficients de Fourier* de f sont définis par

$$a_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nx}dx \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

et la *série de Fourier* de f est la série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nx}.$$

On note $S_N f$ la somme partielle définie par

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nx}.$$

Posons, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$e_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nx}.$$

Les fonctions e_n vérifient

$$e_n(x)e_k(x) = e_{n+k}(x), \qquad \overline{e_n(x)} = e_{-n}(x),$$
$$\frac{1}{T}\int_0^T e_n(x)\overline{e_k(x)} = \begin{cases} 1 \text{ si } & n = k, \\ 0 \text{ si } & n \neq k. \end{cases}$$

Notons $\mathcal{L}^2_T(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions périodiques de période T et de carré intégrable sur tout intervalle borné, et, pour deux fonctions f et g de $\mathcal{L}^2_T(\mathbb{R})$,

$$(f|g) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Alors le coefficient de Fourier $a_n(f)$ s'écrit

$$a_n(f) = (f|e_n),$$

et la série de Fourier de f est son développement dans le système orthonormé $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Notons que, si f est périodique de période T, l'intégrale

$$\int_a^{a+T} f(x)dx$$

est indépendante du nombre a. Ainsi les coefficients de Fourier de f peuvent aussi s'écrire

$$a_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{e_n(x)}dx.$$

Si, au lieu du système orthonormé $\{e_n\}$, on considère le système orthogonal constitué des fonctions

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{T}nx,\ \sin\frac{2\pi}{T}nx \qquad (n \geq 1),$$

la série de Fourier d'une fonction f s'écrit

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\alpha_n\cos\frac{2\pi}{T}nx + \beta_n\sin\frac{2\pi}{T}nx\Big),$$

avec

$$\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\ dx,$$

$$\alpha_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2\pi}{T}nx\ dx,$$

$$\beta_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2\pi}{T}nx\ dx.$$

Il est avantageux d'utiliser cette forme de la série de Fourier si f est paire (et alors $\beta_n = 0$), ou si f est impaire (et alors $\alpha_n = 0$).

X.2. Convergence en moyenne quadratique

On dit qu'une suite de fonctions $\{f_n\}$ de l'espace $\mathcal{L}_T^2(\mathbb{R})$ converge en moyenne quadratique vers une fonction f de $\mathcal{L}_T^2(\mathbb{R})$ si

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

Théorème X.2.1. *Soit f une fonction de l'espace $\mathcal{L}^2_T(\mathbb{R})$. La série de Fourier de f converge vers f en moyenne quadratique, c'est-à-dire que*

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^T |S_Nf(x)-f(x)|^2dx = 0.$$

De plus

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(f)|^2.$$

C'est la formule de Parseval.

Le système $\{1, \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right), \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\}$ est orthogonal, mais n'est pas orthonormé :

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx = \frac{1}{2}.$$

Avec les notations précédentes, la formule de Parseval s'écrit aussi

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2dx = |\alpha_0|^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^2.$$

Le théorème X.2.1 est une conséquence du théorème III.3.1 et du théorème suivant. (*Cf.* à ce sujet III.3, et aussi Albert (1997), chapitre V, section 4, ou Avanissian (1996), chapitre 13, section 3.)

Théorème X.2.2. *Les fonctions e_n $(n\in\mathbb{Z})$ constituent une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2_T(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Un polynôme trigonométrique p s'écrit

$$p(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n(x).$$

Pour démontrer le théorème X.2.2 il suffit de montrer que, pour toute fonction f de l'espace $\mathcal{L}^2_T(\mathbb{R})$, il existe une suite p_n de polynômes trigonométriques de période T qui converge vers f en moyenne quadratique. Notons $\mathcal{F}$ le sous-espace de $\mathcal{L}^2_T(\mathbb{R})$ des fonctions qui possèdent cette propriété : une fonction f appartient à $\mathcal{F}$ si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un polynôme trigonométrique p tel que

$$\int_0^T |f(x)-p(x)|^2dx \le \varepsilon.$$

Notons que si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{F}$ qui converge vers f en moyenne quadratique, alors f appartient aussi à $\mathcal{F}$.

Nous admettrons provisoirement le résultat suivant qui est une version « périodique » du théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue périodique de période T est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques de période T (*cf.* corollaire X.5.3). L'espace $\mathcal{F}$, qui contient les polynômes trigonométriques de période T, contient donc aussi les fonctions continues périodiques de périodique T car

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)-p(x)|^2 dx \leq \sup |f-p|^2.$$

L'application qui à une fonction f de $\mathcal{L}^2_T(\mathbb{R})$ associe sa restriction f_0 à $]0,T[$ est une isométrie de $\mathcal{L}^2_T(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{L}^2(]0,T[)$. Soit f une fonction de $\mathcal{L}^2_T(\mathbb{R})$. D'après III.2.5 il existe une suite $\{\varphi_n\}$ de fonctions continues sur $[0,T]$ nulles en 0 et T qui converge vers f_0 en moyenne quadratique. Chaque fonction φ_n peut être prolongée à $\mathbb{R}$ en une fonction f_n continue et périodique de période T ($f_n^0 = \varphi_n$), et

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T |f_n(x)-f(x)|^2 dx = 0.$$

Le théorème est ainsi démontré. □

Exemple 1. Soit f la fonction périodique de période 2π, paire, définie par

$$\begin{aligned} &f(x) = 1, \text{ si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2},\\ &f(\frac{\pi}{2}) = 0,\\ &f(x) = -1, \text{ si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{aligned}$$

Alors $\beta_n = 0$, $\alpha_n = 0$ si n est pair, et

$$\alpha_{2k+1} = (-1)^k \frac{4}{\pi}\frac{1}{2k+1}.$$

De la formule de Parseval,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2,$$

on déduit que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exemple 2. Soit f la fonction périodique de période 2π, impaire, définie par

$$f(x) = x - \pi, \text{ si } 0 < x < \pi.$$

Alors $\alpha_n = 0$, et $\beta_n = -\frac{2}{n}$. La formule de Parseval s'écrit ici,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2,$$

et on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exemple 3. Soit f la fonction périodique de période 2π, paire, définie par

$$f(x) = |x|, \text{ si } -\pi \leq x \leq \pi.$$

Alors $\beta_n = 0$,

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{2k} = 0 \text{ si } k \geq 1, \quad \alpha_{2k+1} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

De la formule de Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = |\alpha_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2,$$

on déduit que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

X.3. Convergence uniforme

Du théorème X.2.1 sur la convergence en moyenne quadratique, il est possible de déduire simplement un énoncé de convergence uniforme.

Théorème X.3.1. *Si f est une fonction continue périodique de période T et si*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(f)| < \infty,$$

alors

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) e_n(x),$$

et la convergence est uniforme.

Démonstration. Posons
$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f)e_n(x).$$
Puisque
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(f)| < \infty,$$
la convergence de la série est uniforme, la fonction g est continue et, en calculant $a_n(g)$ par une intégration terme à terme, on montre que
$$a_n(f) = a_n(g).$$
Par suite, d'après la formule de Parseval,
$$\int_0^T |f(x) - g(x)|^2 dx = 0,$$
et, puisque $f - g$ est continue, $f(x) = g(x)$ pour tout x. □

Exemple. Ce théorème s'applique à la fonction de l'exemple 3 de la section 2 : pour $-\pi \leq x \leq \pi$,
$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_0^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x.$$

Corollaire X.3.2. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ périodique de période T, la série de Fourier de f converge vers f uniformément et absolument.*

Démonstration. En intégrant par parties, nous obtenons la relation suivante entre les coefficients de Fourier de la dérivée f' de f et ceux de f :
$$a_n(f') = \mathrm{i}\frac{2\pi}{T} n a_n(f).$$
D'après la formule de Parseval,
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(f')|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f'(x)|^2 dx.$$
Nous en déduisons que
$$\begin{aligned}\sum_{n\neq 0} |a_n(f)| &= \frac{T}{2\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{|n|}|a_n(f')| \\ &\leq \Big(\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n\neq 0}|a_n(f')|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty,\end{aligned}$$
d'après l'inégalité de Schwarz. □

X.4. Convergence ponctuelle

Nous allons étudier la convergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction à l'aide d'une représentation intégrale des sommes partielles. Dans la formule

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n(f) e_n(x),$$

en remplaçant les coefficients $a_n(f)$ par leurs expressions

$$a_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(y) e_n(-y) dy,$$

nous obtenons

$$S_N f(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(y) \sum_{n=-N}^{N} e_n(x-y) dy.$$

En posant

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e_n(x),$$

les sommes partielles s'écrivent

$$S_N(x) = \frac{1}{T} \int_0^T D_N(x-y) f(y) dy.$$

La fonction D_N s'appelle *noyau de Dirichlet.*

Lemme X.4.1.

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e_n(x) = \frac{\sin 2\pi \big(N+\frac{1}{2}\big)\frac{x}{T}}{\sin \pi \frac{x}{T}}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} D_N(x) &= e_{-N}(x)\big(1 + e_1(x) + \cdots + e_{2N}(x)\big) \\ &= e_{-N}(x) \frac{e_{2N+1}(x) - 1}{e_1(x) - 1} \\ &= \frac{e_{N+\frac{1}{2}}(x) - e_{-N-\frac{1}{2}}(x)}{e_{\frac{1}{2}}(x) - e_{-\frac{1}{2}}(x)}. \\ &= \frac{\sin 2\pi \big(N+\frac{1}{2}\big)\frac{x}{T}}{\sin \pi \frac{x}{T}}. \end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant démontrer un théorème de convergence ponctuelle qui est une version simplifiée d'un *théorème de Dirichlet*. Nous utiliserons à nouveau le théorème IX.1.6 sur l'intégrale de Dirichlet.

Théorème X.4.2. *Soit f une fonction périodique de période T, intégrable sur tout intervalle borné. On suppose que f admette en un nombre réel x des limites à droite et à gauche $f(x+)$ et $f(x-)$, et qu'il existe K et $h_0 > 0$ tels que, pour $0 < h < h_0$,*

$$|f(x+h) - f(x+)| \leq Kh, \quad |f(x-h) - f(x-)| \leq Kh.$$

Alors

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \tfrac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big).$$

Notons que les hypothèses de ce théorème sont vérifiées en tout point x si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Démonstration. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} D_N(y) f(x-y)dy \\ &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} D_N(y)\frac{f(x-y)+f(x+y)}{2}dy \\ &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\sin\frac{2\pi}{T}(N+\frac{1}{2})y}{y}\,\frac{y}{\sin\frac{\pi}{T}y}\,\frac{f(x-y)+f(x+y)}{2}dy. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème IX.1.6 à la fonction

$$g(y) = \frac{y}{\sin\frac{\pi}{T}y}\,\frac{f(x-y)+f(x+y)}{2}$$

nous obtenons

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}. \qquad \square$$

Le théorème précédent s'applique aux fonctions des exemples 1 et 2 de la section 2.

La continuité ne suffit pas pour assurer la convergence ponctuelle. Il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge (*cf.* XI.5). Dans la section suivante nous verrons cependant que la série de Fourier d'une fonction périodique continue converge au sens de Cesaro, c'est-à-dire dans un sens généralisé.

X.5. Convergence au sens de Cesaro

Considérons une suite $\{a_n\}$ de nombres réels ou complexes et posons

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad (n \geq 1).$$

Si la suite $\{a_n\}$ est convergente de limite ℓ, alors la suite $\{A_n\}$ est aussi convergente de même limite ℓ. En effet, la suite $\{a_n\}$, étant convergente, est bornée,

$$|a_n| \leq M.$$

En écrivant

$$A_n - \ell = \frac{(a_1 - \ell) + (a_2 - \ell) + \cdots + (a_n - \ell)}{n},$$

nous obtenons, pour $k \leq n$,

$$|A_n - \ell| \leq \frac{2kM}{n} + \frac{|a_{k+1} - \ell| + \cdots + |a_n - \ell|}{n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons k tel que, si $j \geq k$,

$$|a_j - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

puis N tel que $\frac{2kM}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, si $n \geq N$,

$$|A_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Par contre la suite $\{A_n\}$ peut converger sans que la suite $\{a_n\}$ converge, par exemple si $a_n = (-1)^n$. Si la suite $\{A_n\}$ converge, on dit que la suite $\{a_n\}$ converge *au sens de Cesaro.*

Nous allons étudier la convergence au sens de Cesaro de la série de Fourier d'une fonction f. La somme de Cesaro $\Sigma_N f(x)$ est définie par

$$\Sigma_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n f(x).$$

Elle s'écrit aussi

$$\begin{aligned} \Sigma_N f(x) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \Big(\sum_{k=-n}^{n} a_k(f) e_k(x) \Big) \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \frac{N - |k|}{N} a_k(f) e_k(x). \end{aligned}$$

Pour étudier la convergence des sommes de Cesaro $\Sigma_N f(x)$ nous allons, comme dans la section précédente, utiliser une représentation intégrale :

$$\Sigma_N f(x) = \frac{1}{T}\int_0^T F_N(x-y)f(y)dy,$$

où

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{N-|k|}{N} e_k(x).$$

La fonction F_N s'appelle *noyau de Fejer*.

***Lemme** X.5.1.*

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\Big(\frac{\sin\frac{\pi}{T}Nx}{\sin\frac{\pi}{T}x}\Big)^2.$$

Démonstration. Rappelons que (X.4.1) :

$$D_n(x) = \frac{\sin\frac{2\pi}{T}(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{\pi}{T}x}.$$

La méthode de calcul est classique :

$$\sin\frac{2\pi}{T}(n+\tfrac{1}{2})x = \Im\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\right),$$

et

$$\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}(n+\frac{1}{2})x} = \frac{\left(\cos\frac{2\pi}{T}Nx - 1\right) + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{T}Nx}{2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{T}x}.$$

Ainsi

$$\Im\Big(\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}(n+\frac{1}{2})x}\Big) = \frac{\left(\sin\frac{\pi}{T}nx\right)^2}{\sin\frac{\pi}{T}x}.$$

Le résultat annoncé s'en déduit. □

***Théorème** X.5.2* **(Théorème de Fejer).** *Soit f une fonction périodique de période T, intégrable sur tout intervalle borné.*

(i) *Si f admet en x une limite à droite $f(x+)$ et une limite à gauche $f(x-)$, la série de Fourier de f converge en x au sens de Cesaro vers $\frac{1}{2}\big(f(x+)+f(x-)\big)$:*

$$\lim_{N\to\infty}\Sigma_N f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

(ii) *Si f est continue en tout point, la série de Fourier de f converge au sens de Cesaro en tout point vers $f(x)$ et la convergence est uniforme.*

Démonstration. Le noyau de Fejer possède les propriétés suivantes :

$$F_N(x) \geq 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T F_N(x)dx = 1, \tag{2}$$

$$F_N(x) \leq \frac{1}{T}\frac{1}{\left(\sin \frac{\pi}{T}\eta\right)^2}, \text{ si } \eta \leq t \leq \frac{T}{2},\ 0 < \eta < \frac{T}{2}. \tag{3}$$

(a) Nous pouvons écrire

$$\Sigma_N f(x) = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} F_N(y)\frac{f(x+y)+f(x-y)}{2}dy.$$

La fonction g, définie sur $[0, \frac{T}{2}]$ par

$$g(0) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2},$$

$$g(y) = \frac{f(x+y)+f(x-y)}{2}, \text{ si } 0 < y \leq \frac{T}{2},$$

est continue en 0. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, si $0 \leq y \leq \eta$,

$$|g(y) - g(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et, puisque

$$\Sigma_N f(x) - g(0) = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} F_N(y)\big(g(y)-g(0)\big)dy,$$

nous en déduisons que

$$\begin{aligned}|\Sigma_N f(x) - g(0)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{N}\frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{T}\eta\right)^2}\int_\eta^{\frac{T}{2}} |g(y)-g(0)|dy \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{N}C(\eta).\end{aligned}$$

Si $N > 2\frac{C(\eta)}{\varepsilon}$, alors

$$|\Sigma_N f(x) - g(0)| \leq \varepsilon.$$

(b) Si f est continue, elle est uniformément continue, et, pour $\varepsilon > 0$ donné, η peut être choisi indépendemment de x. Cela démontre que $\Sigma_N f$ converge vers f uniformément. □

Remarquons que les sommes de Cesaro $\Sigma_N f$ sont des polynômes trigonométriques de période T. Nous pouvons donc déduire du théorème de Fejer la « version périodique » suivante du théorème de Stone-Weierstrass :

Corollaire X.5.3. *Si f est une fonction continue périodique de période T il existe une suite de polynômes trigonométriques de période T qui converge uniformément vers f.*

Exercices

Exercice X.1. Montrer que, pour α réel, $-\pi < x < \pi$,

$$\mathrm{e}^{\alpha x} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sh} \alpha\pi}{\alpha - in} \mathrm{e}^{inx}.$$

$$\operatorname{ch} \alpha x = \frac{\operatorname{sh} \alpha\pi}{\alpha\pi} + 2\frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} \cos nx.$$

$$\operatorname{sh} \alpha x = -2\frac{\operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\alpha^2 + n^2} \sin nx.$$

En déduire que

$$\frac{\pi}{\operatorname{sh} \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2},$$

$$\coth \alpha\pi = \frac{1}{\alpha\pi} + \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + n^2}.$$

Exercice X.2. a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}.$$

b) Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |\sin \lambda x| dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Exercice X.3. Du développement en série entière

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (|z| < 1),$$

déduire, à l'aide du théorème d'Abel (VII.2.1), que, si $-\pi < x < \pi$,

$$\ln\Big(2\cos\frac{x}{2}\Big) + \mathrm{i}\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

En déduire les développements

$$\ln\cos\frac{x}{2} = -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cos nx,$$
$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$

***Exercice X.4* (Formule sommatoire de Poisson).** Soit φ une fonction de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et soit $T > 0$. On pose

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x - kT).$$

a) Montrer que cette série définit une fonction f périodique de période T et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b) Montrer que

$$a_n(f) = \frac{1}{T}\hat{\varphi}\Big(n\frac{2\pi}{T}\Big),$$

où $\hat{\varphi}$ désigne la transformée de Fourier de φ.

c) Montrer que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}\Big(n\frac{2\pi}{T}\Big).$$

d) En considérant la fonction de Gauss

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\pi t x^2} \quad (t > 0),$$

montrer que la fonction θ définie par

$$\theta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi t n^2},$$

vérifie la relation

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\Big(\frac{1}{t}\Big).$$

Exercice X.5. Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité D de $\mathbb{C}$. C'est la somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

On suppose que f est injective. On note $\mathcal{A}$ l'aire de l'image $f(D)$ de D par f :

$$\mathcal{A} = \lambda_2\big(f(D)\big).$$

Montrer que

$$\mathcal{A} = \int_D |f'(z)|^2 d\lambda_2(z),$$

et que

$$\mathcal{A} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2.$$

(Voir l'exercice 4 du chapitre V.)

XI

APPLICATIONS ET COMPLÉMENTS

Nous avons choisi sept questions qui constituent des compléments ou qui illustrent les applications du calcul intégral à l'analyse et au calcul des probabilités.

XI.1. Polynômes orthogonaux

Soit w une fonction continue > 0 sur un intervalle $X =]a, b[$ telle que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\int_X |x|^n w(x)dx < \infty.$$

Sur l'espace $\mathcal{L}^2\big(X, w(x)dx\big)$ des fonctions mesurables sur X pour lesquelles

$$\int_X |f(x)|^2 w(x)dx < \infty,$$

on considère le produit scalaire

$$(f|g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}w(x)dx.$$

Les polynômes appartiennent à $\mathcal{L}^2\big(X, w(x)dx\big)$ et définissent des éléments de l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2\big(X, w(x)dx\big)$. Les monômes $f_n(x) = x^n$ constituent un système libre de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Le procédé d'orthogonalisation de Schmidt permet de construire une suite de polynômes p_n deux à deux orthogonaux : si $m \neq n$,

$$\int_X p_m(x)p_n(x)w(x)dx = 0.$$

Pour cela on pose

$$\begin{aligned}
p_0 &= f_0, \\
p_1 &= f_1 + a_1^0 p_0, \\
p_2 &= f_2 + a_2^1 p_1 + a_2^0 p_0, \\
&\dots \\
p_n &= f_n + a_n^{n-1} p_{n-1} + \dots + a_n^0 p_0, \\
&\dots
\end{aligned}$$

Les nombres a_n^k $(k < n)$ sont déterminés de proche en proche par les conditions

$$(p_n|p_k) = 0 \quad (k < n).$$

Une question se pose : le système $\{f_n\}$ est-il total dans $\mathcal{H}$? Autrement dit, les polynômes constituent-ils un sous-espace dense de $\mathcal{H}$? Si c'est le cas, le procédé d'orthogonalisation de Schmidt permet de construire une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ (*cf.* III.3).

Si $X =]a, b[$ est un intervalle borné, alors l'espace $\mathcal{C}([a, b])$ des fonctions continues sur $[a, b]$ est dense dans $\mathcal{H}$ et il résulte du théorème de Weierstrass que l'espace des polynômes est dense dans $\mathcal{H}$ (*cf.* Albert (1997), chapitre III, proposition 9, p. 77, ou Avanissian (1996), chapitre 12, section 3).

Supposons X non borné. S'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$\int_X \mathrm{e}^{\alpha|x|} w(x)dx < \infty,$$

alors l'espace des polynômes est dense dans $\mathcal{H}$. Soit en effet une fonction $f \in \mathcal{L}^2(X, w(x)dx)$ telle que, pour tout $n \geq 0$,

$$\int_X f(x)x^n w(w)dx = 0.$$

Posons

$$F(z) = \int_X f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} w(x)dx.$$

La fonction $f(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha|x|}$ étant intégrable par rapport à la mesure $w(x)dx$, la fonction F est définie et holomorphe pour $|\Im z| < \frac{1}{2}\alpha$. De plus

$$F^{(n)}(0) = (-\mathrm{i})^n \int_X f(x)x^n w(x)dx = 0.$$

Par suite la transformée de Fourier de la fonction fw, qui est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, est nulle, donc f est nulle presque partout.

Soit $\{p_n\}_{n\geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux, c'est-à-dire que $\deg p_n = n$, et que, si $m \neq n$,

$$\int_X p_m(x)p_n(x)w(x)dx = 0.$$

Notons que le polynôme p_n est orthogonal au sous-espace des polynômes de degré $< n$. Posons

$$d_n = \int_X p_n(x)^2 w(x)dx.$$

Si le sous-espace des polynômes est dense dans $\mathcal{H}$, alors les fonctions

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{d_n}} p_n(x)$$

constituent une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Si f est une fonction de $\mathcal{L}^2\big(X, w(x)dx\big)$, on pose

$$a_n(f) = \int_X f(x)p_n(x)w(x)dx.$$

Alors la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d_n} a_n(f)p_n(x)$$

converge vers f en moyenne quadratique, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \Big| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{d_n} a_n(f)p_n(x) - f(x) \Big|^2 w(x)dx = 0.$$

Exemples

a) *Polynômes de Legendre.* Considérons le produit scalaire

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Dans ce cas $X =]-1, 1[$, et $w(x) = 1$. En orthogonalisant la suite des monômes $\{f_n\}$ suivant le procédé de Schmidt, on obtient une suite de polynômes p_n tels que $p_n(x) = x^n +$ termes de degré $< n$, et

$$\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)\ dx = 0 \text{ si } m \neq n.$$

Nous allons montrer que

$$p_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n (x^2 - 1)^n.$$

Considérons la primitive F_n d'ordre n de p_n qui s'annule en $x = -1$ ainsi que ses $n-1$ premières dérivées,

$$F_n^{(n)} = p_n,\ F_n(-1) = F_n'(-1) = \cdots = F_n^{(n-1)}(-1) = 0.$$

Pour $n > 0$,

$$0 = (p_n|f_0) = \int_{-1}^{1} p_n(x)dx = F_n^{(n-1)}(1) - F_n^{(n-1)}(-1),$$

donc $F_n^{(n-1)}(1) = 0$. En utilisant successivement l'orthogonalité de p_n à $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$, et par des intégrations par parties nous obtenons

$$F_n^{(n-1)}(1) = \cdots = F_n'(1) = F_n(1) = 0.$$

Il en résulte que F_n est proportionnel au polynôme $(x^2-1)^n$. Pour établir la formule annoncée il suffit de noter que le coefficient de x^n dans la dérivée n-ième de $(x^2-1)^n$ est égal à $\frac{(2n)!}{n!}$.

Les polynômes de Legendre P_n sont définis par les conditions

(1) P_n est de degre n,

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$ si $m \neq n$,

(3) $P_n(1) = 1$.

On déduit de ce qui précède que

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n.$$

Nous allons montrer que

$$d_n = \int_{-1}^{1} |P_n(x)|^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Posons $G_n(x) = (x^2-1)^n$. Par des intégrations par parties nous obtenons

$$\begin{aligned}
2^{2n}(n!)^2 \int_{-1}^{1} |P_n(x)|^2 dx &= \int_{-1}^{1} G_n^{(n)}(x)G_n^{(n)}(x)dx \\
&= -\int_{-1}^{1} G_n^{(n-1)}(x)G_n^{(n+1)}(x)dx \\
&= (-1)^n \int_{-1}^{1} G_n(x)G_n^{(2n)}(x)dx \\
&= (-1)^n(2n)! \int_{-1}^{1} (x-1)^n(x+1)^n dx,
\end{aligned}$$

et, en effectuant à nouveau n intégrations par parties, nous obtenons le résultat annoncé. En conséquence les fonctions φ_n définies par

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x),$$

constituent une base hilbertienne de $L^2(]-1,1[)$.

Nous allons obtenir une représentation intégrale des polynômes de Legendre en utilisant la formule de Cauchy. Soient f une fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$, D un disque fermé contenu dans U et γ le bord orienté de D. Si z est intérieur à D, alors

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

Appliquons cette formule à la fonction $f(z) = (z^2-1)^n$. Soient $x \in]-1,1[$, et γ le cercle de centre x et de rayon $\sqrt{1-x^2}$:

$$w = x + \sqrt{1-x^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Nous obtenons la formule intégrale de Laplace :

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(x + \mathrm{i}\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right)^n d\varphi.$$

On en déduit que, si $-1 \leq x \leq 1$,

$$|P_n(x)| \leq 1.$$

b) *Polynômes de Laguerre.* Considérons le produit scalaire

$$(f|g) = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\mathrm{e}^{-x} dx.$$

Ici $X =]0,\infty[$, et $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Soit $\{p_n\}$ le système orthogonal obtenu par orthogonalisation de la suite des monômes f_n. Par une démarche analogue à celle que nous avons suivie dans le cas des polynômes de Legendre, on montre que

$$p_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n \mathrm{e}^{-x}).$$

Les polynômes de Laguerre L_n sont définis par

$$L_n(x) = \mathrm{e}^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n \mathrm{e}^{-x}).$$

On montre que

$$d_n = \int_0^\infty |L_n(x)|^2 \mathrm{e}^{-x} dx = (n!)^2.$$

Ainsi les fonctions φ_n définies par

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n!} L_n(x),$$

constituent une base hilbertienne de $L^2(]0, \infty[, \mathrm{e}^{-x} dx)$.

c) *Polynômes d'Hermite.* Nous considérons maintenant le produit scalaire défini par

$$(f|g) = \int_{-\infty}^\infty f(x)\overline{g(x)} \mathrm{e}^{-x^2} dx.$$

Cas où $X = \mathbb{R}$, et $w(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Dans ce cas, avec les mêmes notations que précedemment,

$$p_n(x) = (-1)^n 2^{-n} \mathrm{e}^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Les polynômes d'Hermite H_n sont définis par

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{e}^{-x^2},$$

et on montre que

$$d_n = \int_{-\infty}^\infty |H_n(x)|^2 \mathrm{e}^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Les fonctions φ_n définies par

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x),$$

constituent une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x^2} dx)$.

Relation de récurrence. Soit $\{p_n\}$ une suite de polynômes orthogonaux relativement à la mesure $w(x)dx$. On note a_n le coefficient de x^n dans le polynôme p_n, et b_n celui de x^{n-1} :

$$p_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \cdots$$

Proposition XI.1.1. *Les polynômes p_n vérifient la relation de récurrence suivante : pour $n \geq 1$,*

$$x p_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x),$$

avec

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, \quad \gamma_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d_n}{d_{n-1}}.$$

Démonstration. Le polynôme $xp_n(x)$ est une combinaison linéaire des polynômes $p_0, \dots, p_{n+1}$:

$$xp_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{nk} p_k(x),$$

et

$$c_{nk} = \frac{1}{d_k} \int_X xp_n(x)p_k(x)w(x)dx.$$

Les coefficients c_{nk} définis par cette intégrale pour $n, k \geq 0$ vérifient $d_k c_{nk} = d_n c_{kn}$, et donc $c_{nk} = 0$ si $k \leq n-1$. En identifiant les coefficients de x^{n+1} et x^n on obtient

$$a_n = \alpha_n a_{n+1}, \quad b_n = \alpha_n b_{n+1} + \beta_n a_n,$$

et de plus, puisque $\gamma_n = c_{n,n-1}$, $\alpha_{n-1} = c_{n-1,n}$,

$$d_{n-1}\gamma_n = d_n \alpha_{n-1}.$$

Les relations annoncées s'en déduisent immédiatement. □

Formule de Christoffel-Darboux. Remarquons que la somme partielle

$$S_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{d_k} a_k(f) p_k(x)$$

s'écrit sous forme intégrale

$$S_n f(x) = \int_X K_n(x,y) f(y) w(y) dy,$$

avec

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{d_k} p_k(x) p_k(y).$$

Proposition XI.1.2.

$$K_n(x,y) = \frac{\alpha_n}{d_n} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y}.$$

Démonstration. De la relation de récurrence on déduit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{d_k}(x-y)p_k(x)p_k(y) = {} & \frac{\alpha_k}{d_k}\big(p_{k+1}(x)p_k(y) - p_k(x)p_{k+1}(y)\big) \\ & - \frac{\alpha_{k-1}}{d_{k-1}}\big(p_k(x)p_{k-1}(y) - p_{k-1}(x)p_k(y)\big).\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}(x-y)K_n(x,y) &= \frac{\alpha_n}{d_n}\big(p_{n+1}(x)p_n(y)-p_n(x)p_{n+1}(y)\big)\\ &\quad -\frac{\alpha_0}{d_0}\big(p_1(x)p_0(y)-p_0(x)p_1(y)\big)+\frac{1}{d_0}(x-y)p_0(x)p_0(y).\end{aligned}$$

La dernière ligne est nulle car $p_0(x)=a_0$, $p_1(x)-p_1(y)=a_1(x-y)$, et $\alpha_0=\frac{a_0}{a_1}$. □

Zéros des polynômes orthogonaux.

Proposition XI.1.3. *Les zéros du polynôme p_n sont réels, simples, et appartiennent à l'intervalle $X=]a,b[$.*

Démonstration. Soient $x_1,\dots x_r$ les zéros de p_n qui sont d'ordre impair et qui appartiennent à $]a,b[$. Nous allons montrer que $r=n$. Nous pouvons écrire

$$p_n(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_r)q(x),$$

où q est un polynôme de degré $n-r$ qui ne change pas de signe sur $]a,b[$. Si $r<n$, alors

$$\int_X (x-x_1)\cdots(x-x_r)p_n(x)w(x)dx=0,$$

ou

$$\int_X (x-x_1)^2\cdots(x-x_r)^2q(x)w(x)dx=0,$$

d'où la contradiction. □

Formules de quadrature de Gauss-Jacobi. Notons $\mathcal{P}_n$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$. Soient $x_1,\dots,x_n$ n nombres distincts de l'intervalle $x=]a,b[$. Puisque l'application

$$p\mapsto \big(p(x_k)\big) \qquad (1\leq k\leq n),$$

est un isomorphisme de $\mathcal{P}_{n-1}$ sur $\mathbb{R}^n$, il existe des constantes $w_1,\dots,w_n$ uniques telles que, pour tout polynôme p de $\mathcal{P}_{n-1}$,

$$\int_X p(x)w(x)dx=\sum_{k=1}^n w_kp(x_k). \qquad (*)$$

Nous allons voir que, si nous choisissons pour $x_1,\dots,x_n$ les zéros du polynôme p_n, la formule $(*)$ est valable pour tout polynôme p de $\mathcal{P}_{2n-1}$. Nous verrons de plus qu'alors, les nombres $w_1, \dots, w_n$ sont positifs. (Ils sont parfois appelés *nombres de Christoffel*.)

Soit p un polynôme de $\mathcal{P}_{2n-1}$ et soit q le polynôme de $\mathcal{P}_{n-1}$ qui prend les mêmes valeurs que p en $x_1, \dots, x_n$. Il est obtenu par l'interpolation de Lagrange :

$$q(x) = \sum_{k=1}^{n} p(x_k) L_k(x),$$

avec

$$L_k(x) = \frac{p_n(x)}{(x - x_k)p'_n(x_k)}.$$

Le polynôme q est aussi le reste de la division euclidienne de p par p_n :

$$p(x) = p_n(x)h(x) + q(x),$$

et le polynôme h est de degré $\leq n - 1$, par suite

$$\int_X p_n(x)h(x)w(x)dx = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_X p(x)w(x)dx &= \int_X q(x)w(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} p(x_k) \int_X L_k(x)w(x)dx. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi établi le résultat annoncé, et

$$w_k = \int_X L_k(x)w(x)dx.$$

En appliquant la relation $(*)$ au polynôme $p(x) = L_k(x)^2$ qui est de degré $2n - 2$, nous obtenons

$$w_k = \int_X L_k(x)^2 w(x)dx > 0,$$

et aussi, en l'appliquant au polynôme $p(x) = L_k(x)$,

$$w_k = \frac{1}{p'_n(x_k)} \int_X \frac{p_n(x)}{x - x_k} w(x)dx.$$

On peut évaluer cette intégrale en utilisant la formule de Christoffel-Darboux. En effet, pour tout y,

$$1 = \int_X K_{n-1}(x, y)w(x)dx = \sum_{j=1}^{n} w_j K_{n-1}(x_j, y).$$

D'autre part,

$$K_{n-1}(x, x_k) = \frac{\alpha_{n-1}}{d_{n-1}} \frac{p_n(x)p_{n-1}(x_k)}{(x - x_k)},$$

et

$$K_{n-1}(x_j, x_k) = \begin{cases} \frac{\alpha_{n-1}}{d_{n-1}} p'(x_k)p_{n-1}(x_k), & \text{si } j = k, \\ 0, & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Ainsi, en prenant $y = x_k$, nous obtenons

$$w_k = \frac{d_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \frac{1}{p_{n-1}(x_k)p'_n(x_k)} = \frac{1}{K_{n-1}(x_k, x_k)}.$$

Exemple.

Reprenons l'exemple des polynômes de Legendre. Pour $n = 3$,

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$
$$-x_1 = x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}, \; x_2 = 0,$$
$$w_1 = w_3 = \frac{5}{9}, \; w_2 = \frac{8}{9}.$$

Pour $n = 4$,

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$
$$-x_1 = x_4 = 0{,}861\,136\,3, \; -x_2 = x_3 = 0{,}339\,981\,0,$$
$$w_1 = w_4 = 0{,}347\,854\,8, \; w_2 = w_3 = 0{,}652\,145\,2.$$

Application au calcul approché des intégrales. Supposons $-\infty < a < b < \infty$.

Théorème XI.1.4 **(Théorème de Markoff).** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[a, b]$. Alors*

$$\int_X f(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) + R_n(f),$$

avec

$$|R(f)| \leq \frac{M}{(2n)!} \frac{d_n}{a_n^2},$$

où

$$M = \sup |f^{(2n)}(x)|.$$

Démonstration. La démonstration utilise l'interpolation d'Hermite. Il existe un polynôme q de degré $\leq 2n-1$ qui coïncide avec f en $x_1, \dots, x_n$ ainsi que sa dérivée q' avec f' :

$$q(x_k) = f(x_k), \quad q'(x_k) = f'(x_k) \quad (k = 1, \dots, n).$$

Fixons y dans $]a, b[$, $y \neq x_k$ $(k = 1, \dots, n)$, et posons

$$\varphi(x) = f(x) - q(x) - \frac{f(y) - q(y)}{p_n(y)^2} p_n(x)^2.$$

La fonction φ s'annule à l'ordre 2 en $x_1, \dots, x_n$, et au premier ordre en y. Donc sa dérivée φ' s'annule au moins $2n$ fois sur $]a, b[$, et $\varphi^{(2n)}$ s'annule au moins une fois : il existe $z \in]a, b[$ pour lequel $\varphi^{(2n)}(z) = 0$. Puisque

$$\varphi^{(2n)}(x) = f^{(2n)}(x) - \frac{f(y) - q(y)}{p_n(y)^2} (2n)! a_n^2,$$

nous obtenons, pour $x = z$,

$$f(y) - q(y) = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(z) \frac{1}{a_n^2} p_n(y)^2.$$

Donc

$$|f(y) - q(y)| \leq \frac{M}{(2n)!} \frac{1}{a_n^2} p_n(y)^2,$$

et aussi

$$\int_X |f(y) - q(y)| \leq \frac{M}{(2n)!} \frac{d_n}{a_n^2}.$$

La résultat annoncé s'en déduit puisque

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) = \int_X q(x) w(x) dx. \qquad \square$$

XI.2. Équation de la chaleur

L'équation de la chaleur décrit l'évolution de la température d'une barre homogène au cours du temps. Elle s'écrit, pour un choix convenable des unités de temps et de longueur,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur est le suivant : étant donnée une fonction continue f sur $\mathbb{R}$, déterminer une fonction u continue sur $[0,T[\times\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,T[\times\mathbb{R}$ vérifiant

$$(1)\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R},$$
$$(2)\ u(0,x) = f(x).$$

Comme nous l'avons déjà fait remarquer au chapitre IX, les fonctions suivantes sont des solutions particulières de l'équation de la chaleur :

$$v_\lambda(t,x) = \mathrm{e}^{-\lambda^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

La méthode de Fourier consiste à chercher une solution du problème de Cauchy comme superposition de solutions particulières du type précédent.

Supposons d'abord que f soit la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, ce que nous écrivons

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\varphi(\lambda)d\lambda,$$

où φ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction u définie par

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\varphi(\lambda)d\lambda,$$

est solution du problème de Cauchy. En effet, pout $t > 0$, nous pouvons appliquer le théorème de dérivation d'une fonction définie par une intégrale (VII.1.2), et

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\varphi(\lambda)d\lambda.$$

Si nous supposons de plus que f est intégrable, alors

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}f(x)dx,$$

et, d'après le théorème IX.1.1, la fonction $u(t,\cdot)$ est égale au produit de convolution

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t,x-y)f(y)dy,$$

où $g(t,\cdot)$ est la fonction dont la transformée de Fourier est égale à $\mathrm{e}^{-\lambda^2 t}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}g(t,x)dx = \mathrm{e}^{-\lambda^2 t}.$$

D'après les calculs faits en IX.1,

$$g(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

La fonction $g(t,x)$ s'appelle le *noyau de Gauss* de $\mathbb{R}$.

Théorème XI.2.1. *Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$, et soit u la fonction définie pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ par*

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, x-y) f(y) dy.$$

Alors u est solution de l'équation de la chaleur, et

$$\lim_{t \to 0} u(t,x) = f(x)$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

On démontre à l'aide du théorème de dérivation d'une fonction définie par une intégrale (VII.1.2) que u est solution de l'équation de la chaleur, et que

$$\lim_{t \to 0} u(t,x) = f(x)$$

par une démonstration analogue à celle du lemme VIII.3.2.

Supposons que f soit périodique de période 2π et soit développable en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) \mathrm{e}^{inx},$$

et que $\sum |a_n(f)| < \infty$ (c'est le cas si f est de classe $\mathcal{C}^1$, voir la démonstration du corollaire X.3.2), alors la fonction u définie sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}$ par

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) \mathrm{e}^{-n^2 t} \mathrm{e}^{inx},$$

est solution du problème de Cauchy.

Si f est une fonction continue périodique de période 2π, il existe au plus une solution du problème de Cauchy qui soit périodique en x de période 2π. Soit en effet u une telle solution. Pour $t \geq 0$ posons

$$E(t) = \int_0^{2\pi} u(t,x)^2 dx.$$

La fonction E est continue. Pour $t > 0$, elle est dérivable et

$$E'(t) = 2\int_0^{2\pi} u(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)dx$$
$$= 2\int_0^{2\pi} u(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)dx.$$

En intégrant par parties nous obtenons

$$E'(t) = -2\int_0^{2\pi} \big(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\big)^2 dx \leq 0.$$

Ainsi la fonction E est décroissante.

Soient maintenant u_1 et u_2 deux solutions du même problème de Cauchy,

$$u_1(0,x) = u_1(0,x).$$

La fonction $u = u_1 - u_2$ est solution du problème de Cauchy avec 0 pour donnée initiale,

$$u(0,x) = 0.$$

La fonction E correspondante est nulle en $t = 0$. Puisqu'elle est positive ou nulle et décroissante, elle est identiquement nulle, et par suite u est identiquement nulle.

La solution du problème de Cauchy s'écrit, pour $t > 0$,

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(t, x-y)f(y)dy,$$

avec

$$G(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$
$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2 t}\cos nx.$$

La fonction $G(t,x)$ s'appelle *noyau de Gauss du cercle*. Nous allons voir qu'elle peut aussi s'écrire

$$G(t,x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{4t}}.$$

Rappelons que, pour $\alpha > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}}.$$

Posons

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha(x-2n\pi)^2}.$$

La fonction φ est périodique de période 2π. La série converge uniformément sur tout intervalle borné, ainsi que la série dérivée. La fonction φ est donc de classe $\mathcal{C}^1$. Calculons sa série de Fourier,

$$a_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\mathrm{e}^{-inx}dx.$$

Puisque la série qui définit la fonction φ est uniformément convergente sur $[0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\alpha(x-2n\pi)^2}\mathrm{e}^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{e}^{-inx}dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{n^2}{4\alpha}}. \end{aligned}$$

Puisque la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est égale à la somme de sa série de Fourier (X.3.2),

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n^2}{4\alpha}}\mathrm{e}^{inx}.$$

En posant $\alpha = \frac{1}{4t}$, nous obtenons

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2t}\mathrm{e}^{inx} = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{4t}}.$$

Des résultats précédents, on déduit que le noyau de Gauss vérifie les propriétés suivantes :

(1) $G(t, x) \geq 0$,

(2) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(t, x)dx = 1$,

(3) $\forall \eta > 0,\ \displaystyle\lim_{t\to 0}\sup_{\eta\leq|x|\leq\pi} G(t, x) = 0$.

Théorème XI.2.2. *Soit f une fonction continue périodique de période 2π, et soit u la fonction définie pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, par*

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(t, x-y)f(y)dy.$$

Alors la fonction u est solution de l'équation de la chaleur, et

$$\lim_{t \to 0} u(t,x) = f(x),$$

uniformément.

Démonstration. Pour montrer que u est solution de l'équation de la chaleur, écrivons

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2 t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny} f(y) dy.$$

Pour $t > 0$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2 t} < \infty.$$

La série est donc uniformément convergente en y et nous pouvons intégrer terme à terme,

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) \mathrm{e}^{-n^2 t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Pour $\alpha > 0$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \mathrm{e}^{-n^2 \alpha} < \infty.$$

Il est donc possible de dériver la série terme à terme, et on vérifie que u est solution de l'équation de la chaleur.

La démonstration de la deuxième partie de l'énoncé est semblable à celle du théorème de Fejer (X.5.2). □

XI.3. Problème de l'isopérimètre

Soit γ une courbe plane fermée rectifiable de longueur L, frontière d'un domaine borné D, d'aire A.

Théorème XI.3.1.

$$A \leq \frac{1}{4\pi} L^2.$$

Il y a égalité si et seulement la courbe est un cercle.

Démonstration. La démonstration que nous allons présenter utilise les séries de Fourier. Elle est due à Hurwitz. On supposera que la courbe γ est de classe $\mathcal{C}^2$, et qu'elle est paramétrée par son abscisse curviligne. Les coordonnées x et y sont des fonctions périodiques de période L développables en série de Fourier :

$$x(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi}{L} ns + b_n \sin \frac{2\pi}{L} ns \right),$$
$$y(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos \frac{2\pi}{L} ns + d_n \sin \frac{2\pi}{L} ns \right).$$

Puisque les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^2$, on peut dériver leurs développements de Fourier une fois terme à terme,

$$x'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{L} n \left(-a_n \sin \frac{2\pi}{L} ns + b_n \cos \frac{2\pi}{L} ns \right),$$
$$y'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{L} n \left(-c_n \sin \frac{2\pi}{L} ns + d_n \cos \frac{2\pi}{L} ns \right).$$

Puisque s est l'abscisse curviligne,

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1,$$
$$\int_0^L \big(x'(s)^2 + y'(s)^2 \big) ds = L.$$

En appliquant la formule de Parseval on obtient

$$\int_0^L x'(s)^2 ds = \frac{L}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2),$$

donc

$$\frac{L^2}{2\pi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2).$$

D'autre part, si la courbe γ est parcourue dans le sens direct, l'aire de D est donnée par

$$A = \frac{1}{2} \int_0^L \big(x(s) y'(s) - y(s) x'(s) \big) ds.$$

On utilise encore l'égalité de Parseval,

$$\int_0^L x(s) y'(s) ds = \frac{L}{2} \frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n d_n - b_n c_n).$$

Ainsi

$$A = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n).$$

Par suite

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}L^2 - A &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n)\\ &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big((na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + (n^2-1)(c_n^2 + d_n^2)\Big) \geq 0,\end{aligned}$$

ce qui démontre l'inégalité isopérimétrique.
S'il y a égalité, alors pour $n > 1$, $c_n = 0$, $d_n = 0$, $a_n = 0$, $b_n = 0$, et pour $n = 1$, $a_1 = d_1$, $b_1 = -c_1$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}x(s) &= a_1 \cos\frac{2\pi}{L}s + b_1 \sin\frac{2\pi}{L}s,\\ y(s) &= -b_1 \sin\frac{2\pi}{L}s + a_1 \cos\frac{2\pi}{L}s,\end{aligned}$$

et alors la courbe γ est un cercle,

$$x(s)^2 + y(s)^2 = a_1^2 + b_1^2. \qquad \square$$

XI.4. Phénomène de Gibbs

J.W. Gibbs (1898) remarque qu'au voisinage d'une discontinuité d'une fonction périodique f, l'amplitude d'oscillation des sommes partielles de la série de Fourier de f est supérieure à la discontinuité.

Considérons l'exemple suivant : soit f la fonction périodique de période 2π, impaire, égale à $\frac{\pi}{2}$ sur l'intervalle $]0, \pi[$, $f(\pi) = 0$. On calcule facilement sa série de Fourier, et d'après le théorème X.4.2, elle converge vers f en tout point,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1}\sin(2k+1)x.$$

Considérons les sommes partielles

$$f_n(x) = S_{2n-1}f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2k+1}\sin(2k+1)x.$$

Calculons la dérivée de f_n,

$$f_n'(x) = 2\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k+1)x = \frac{\sin 2nx}{\sin x},$$

et, puisque $f_n(0) = 0$,

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{\sin 2nu}{\sin u} du.$$

D'une étude simple de f_n', on déduit que le maximum de f_n est atteint en $x = \frac{\pi}{2n}$ et qu'il vaut

$$\max(f_n) = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nu}{\sin u} du.$$

Le maximum de f est égal à $\frac{\pi}{2}$. Nous allons montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \max(f_n) > \frac{\pi}{2}.$$

On peut écrire

$$\max(f_n) = \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{2n \sin \frac{v}{2n}} dv.$$

Du résultat classique

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

on déduit que l'intégrant converge vers $\frac{\sin v}{v}$ uniformément sur $[0, \pi]$. Par suite,

$$\lim_{n\to\infty} \max(f_n) = \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{v} dv.$$

Cette dernière intégrale ne peut pas être évaluée simplement car les primitives de la fonction $\frac{\sin v}{v}$ ne s'expriment pas à l'aide des fonctions élémentaires. On peut cependant en calculer une valeur approchée :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin v}{v} dv \simeq 1{,}851\,9 > \frac{\pi}{2}.$$

On peut montrer que le même phénomène se produit au voisinage d'une discontinuité d'une fonction périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

XI.5. La série de Fourier d'une fonction continue converge-t-elle ?

En 1876, Du Bois Reymond a montré qu'il existe une fonction continue périodique dont la série de Fourier diverge. On peut effectivement construire explicitement un exemple d'une telle fonction. On peut aussi montrer ce résultat sans construction explicite en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus sous la forme suivante.

Soit E un espace de Banach, F un espace normé, et soit $\{T_\alpha\}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Si pour tout v de E

$$\sup_\alpha \|T_\alpha(v)\| < \infty,$$

alors

$$\sup_\alpha \|T_\alpha\| < \infty.$$

(Voir par exemple Albert (1997), chapitre IV, p. 108, ou Avanissian (1997), chapitre 10, section 4.)

Appliquons ce théorème dans la situation suivante : E est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ périodiques de période 2π muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|,$$

et $F = \mathbb{C}$. On considère la famille des formes linéaires T_n définies sur E par

$$T_n(f) = S_n f(0).$$

($S_n f$ est la n-ième somme partielle de la série de Fourier de f.) Nous allons montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = \infty.$$

Il en résultera qu'il existe une fonction f de E telle que

$$\sup_n |S_n f(0)| = \infty.$$

La forme linéaire T_n s'écrit

$$T_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) f(x)dx,$$

et on montre que $\|T_n\| = L_n$, où

$$L_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|dx.$$

Ces nombres L_n, appelés *constantes de Lebesgue*, s'écrivent

$$L_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x|}{\sin\frac{x}{2}}dx.$$

Puisque la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{2}{x}$$

est bornée sur $]0,\pi]$,

$$L_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x|}{x}dx + A_n,$$

où A_n est une suite bornée. On peut aussi écrire

$$L_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx + A'_n,$$

où A'_n est une autre suite bornée. Puisque

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx = \infty,$$

il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \infty.$$

Plus précisément,

$$L_n \sim \frac{4}{\pi^2}\ln(n) \quad (n\to\infty).$$

En effet,

$$\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|dx \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \leq \frac{1}{k\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|dx.$$

Comme

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|dx = 2,$$

il en résulte que

$$\frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\Big) \leq \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \leq \frac{2}{\pi}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\Big).$$

Le résultat s'en déduit puisque

$$\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \sim 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1} \sim \ln(n) \quad (n\to\infty).$$

XI.6. Jeu de pile ou face et mesure de Lebesgue

Une partie de jeu de pile ou face peut être représentée par une suite de N nombres égaux à 0 ou 1, que nous pouvons considérer comme une application ω de $\{1,2,\ldots,N\}$ dans $\{0,1\}$, ou comme un élément de $\Omega_N = \{0,1\}^N$. Si les probabilités d'obtenir pile et face sont égales à $\frac{1}{2}$, la probabilité d'obtenir la suite ω est égale à 2^{-N}. On obtient ainsi une mesure de probabilité P_N sur l'ensemble fini Ω_N, c'est-à-dire une mesure de masse totale égale à 1 :

$$P_N\big(\{\omega\}\big) = \frac{1}{2^N}$$

pour tout élément ω de Ω_N. Considérons maintenant l'ensemble Ω des parties de pile ou face infinies, c'est-à-dire l'ensemble des applications ω de $\mathbb{N}^*$ dans $\{0,1\}$. Nous allons construire une mesure de probabilité P sur l'ensemble infini Ω comptatible avec les mesures de probabilité P_N dans un sens que nous allons expliquer. Si $\omega\in\Omega$, on note ω_N sa restriction à $\{1,2,\ldots,N\}$. Nous dirons que $E\subset\Omega$ est un ensemble élémentaire s'il existe un entier N, et $F\subset\Omega_N$, tels que

$$E = \{\omega \mid \omega_N \in F\}.$$

Les ensembles élémentaires constituent une algèbre de Boole $\mathfrak{A}$. Soit en effet $\mathfrak{A}_N$ l'algèbre de Boole des parties $E\subset\Omega$ de la forme

$$E = \{\omega \mid \omega_N \in F\} \quad (F\subset\Omega_N).$$

Alors $\mathfrak{A}$ est la réunion de la suite croissante des algèbres de Boole $\mathfrak{A}_N$. Si $E\in\mathfrak{A}_N$,

$$E = \{\omega \mid \omega_N \in F\} \quad (F\in\Omega_N),$$

on pose

$$P_0(E) = P_N(F).$$

(On vérifie que ce nombre ne dépend pas du choix de N.) Nous allons montrer que P_0 se prolonge en une mesure de probabilité sur l'espace mesurable $(\Omega,\mathfrak{M})$, où $\mathfrak{M}$

est la tribu engendrée par l'algèbre de Boole $\mathfrak{A}$. Pour cela nous allons utiliser la mesure de Lebesgue de $[0,1]$. Soit φ la fonction définie sur Ω par

$$\varphi(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega(n)}{2^n}.$$

Notons que la suite $\omega(n)$ est un développement dyadique infini du nombre réel $x = \varphi(\omega)$, et que l'image de φ est égale à $[0,1]$. Le développement dyadique n'est pas toujours unique, mais l'ensemble des x pour lesquels ce développement n'est pas unique est contenu dans $\mathbb{Q}$, donc dénombrable. Soient $\alpha \in \Omega_N$ et E l'ensemble élémentaire défini par

$$E = \{\omega \mid \omega_N = \alpha\}.$$

Alors

$$\varphi(E) = \Big[x, x + \frac{1}{2^N}\Big],$$

où

$$x = \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha(n)}{2^n}.$$

On en déduit que, pour tout $E \in \mathfrak{M}$, $\varphi(E)$ est un ensemble borélien. Posons

$$P(E) = \lambda\big(\varphi(E)\big),$$

où λ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$. Alors P est une mesure sur Ω, et, puisque

$$P\big(\{\omega \mid \omega_N = \alpha\}\big) = \lambda\Big(\Big[x, x + \frac{1}{2^N}\Big]\Big) = \frac{1}{2^N},$$

la mesure P prolonge P_0.

Cette construction permet de retrouver la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à la fonction singulière de Cantor (*cf.* exercice 4, chapitre VI). Soit ψ la fonction définie sur Ω par

$$\psi(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega(n)}{3^n}.$$

Son image est égale à l'ensemble de Cantor K, et l'image par ψ de la la mesure de probabilité P est égale à la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à la fonction singulière de Cantor.

Pour illustrer cette relation qui existe entre la mesure de probabilité P sur Ω et la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, nous allons présenter un résultat classique sur la convergence presque sûre d'une série aléatoire, et un théorème de convergence presque partout pour les développements en série de fonctions de Rademacher.

Théorème XI.6.1. *Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres réels de carré sommable :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

Alors, pour presque tout ω, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon(n) a_n$$

est convergente, où $\varepsilon(n) = 2\omega(n) - 1$, c'est-à-dire que $\varepsilon(n) = 1$ si $\omega(n) = 1$, et $\varepsilon(n) = -1$ si $\omega(n) = 0$.

Pour le démontrer nous allons utiliser l'inégalité suivante, qui est un cas particulier d'une inégalité de Kolmogoroff. Posons

$$S_k(\omega) = \sum_{n=1}^{k} \varepsilon(n) a_n.$$

Lemme XI.6.2. *Pour $\alpha > 0$, et $N \geq 1$,*

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \max_{1\leq k\leq N} |S_k(\omega)| \geq \alpha\right\}\right) \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{N} a_n^2.$$

Avant d'en donner la démonstration remarquons que, si f est une fonction définie sur Ω qui ne dépend que de $\omega(1), \ldots \omega(k)$, et si g ne dépend que de $\omega(k+1), \omega(k+2), \ldots$, alors

$$\int_\Omega f(\omega) g(\omega) dP(\omega) = \int_\Omega f(\omega) dP(\omega) \int_\Omega g(\omega) dP(\omega).$$

Démonstration. Pour $1 \leq k \leq N$, soit E_k l'ensemble des éléments $\omega \in \Omega$ pour lesquels

$$|S_j(\omega)| < \alpha \text{ si } 1 \leq j \leq k-1, \ |S_k(\omega)| \geq \alpha.$$

Les ensembles E_k sont disjoints et leur réunion $E = \cup_{k=1}^N E_k$ est égale à

$$\{\omega \in \Omega \mid \max_{1\leq k\leq N} |S_k(\omega)| \geq \alpha\}.$$

Notons d'abord que

$$\int_E S_N(\omega)^2 dP(\omega) \leq \int_\Omega S_N(\omega)^2 dP(\omega) = \sum_{n=1}^{N} a_n^2.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
&\int_{E_k} S_N(\omega)^2 dP(\omega) \\
&= \int_{E_k} S_k(\omega)^2 dP(\omega) + \int_{E_k} \sum_{n=k+1}^{N} a_n^2 dP(\omega) \\
&+ \int_{E_k} \Big(2 \sum_{n=k+1}^{N} S_k(\omega)\varepsilon(n)a_n + \sum_{m,n=k+1, m\neq n}^{N} a_m a_n \varepsilon(m)\varepsilon(n)\Big) dP(\omega).
\end{aligned}$$

Il résulte de la remarque ci-dessus que la dernière intégrale est nulle. Par suite,

$$\int_{E_k} S_N(\omega)^2 dP(\omega) \geq \alpha^2 P(E_k).$$

Puisque $P(E) = P(E_1) + \cdots + P(E_N)$, il en résulte que

$$P(E) \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{N} a_n^2,$$

ce qui est le résultat annoncé. $\square$

Démonstration du théorème. Nous allons montrer que l'ensemble des éléments $\omega \in \Omega$ pour lesquels la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon(n) a_n$$

ne vérifie pas le critère de Cauchy est de mesure nulle, ce qui s'écrit

$$\exists\, \alpha > 0,\ \forall N,\ \exists\, q \geq p \geq N,\ \Big|\sum_{n=p}^{q} \varepsilon(n)a_n\Big| \geq \alpha,$$

ou encore

$$\exists\, \alpha > 0,\ \lim_{N\to\infty} \sup_{q\geq p\geq N} \Big|\sum_{n=p}^{q} \varepsilon(n)a_n\Big| \geq \alpha.$$

Du lemme il résulte que,

$$P\Big(\{\omega \in \Omega \mid \sup_{q\geq p\geq N} \Big|\sum_{n=p}^{q} \varepsilon(n)a_n\Big| \geq \alpha\}\Big) \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{n=N}^{\infty} a_n^2,$$

et donc

$$P\big(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{N\to\infty} \sup_{q\geq p\geq N} \big|\sum_{n=p}^{q} \varepsilon(n)a_n\big| \geq \alpha\}\big) = 0.$$

Le résultat annoncé s'en déduit. □

Rappelons la définition des fonctions de Rademacher (exercice 9, chapitre 3). Considérons le développement dyadique infini d'un nombre $x \in [0,1]$,

$$x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},$$

où les nombres $a_n = a_n(x)$ sont égaux à 0 ou 1. La fonction de Rademacher φ_n ($n \geq 1$) est définie sur $[0,1]$ par :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_n(x) = 0, \\ -1 & \text{si } a_n(x) = 1. \end{cases}$$

Le théorème précédent peut aussi s'exprimer de la façon suivante :

Corollaire XI.6.3. *Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres réels de carré sommable,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

Alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

converge sur $[0,1]$ presque partout (relativement à la mesure de Lebesgue).

XI.7. Théorème de la limite centrale

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu(x) < \infty.$$

La *moyenne* M de μ est définie par

$$M = \int_{\mathbb{R}} x d\mu(x),$$

et sa *dispersion* par

$$D = \int_{\mathbb{R}} (x-M)^2 d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu(x) - M^2.$$

Nous allons étudier le comportement asymptotique de la suite des puissances de convolution

$$\mu_n = \mu^{*n} = \mu * \cdots * \mu \quad (n \text{ facteurs}).$$

En application du théorème de Lévy (IX.3.1) nous allons établir le résultat suivant, qui est fondamental en calcul des probabilités.

***Théorème XI.7.1* (Théorème de la limite centrale (ou de Gauss-Laplace)).**

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n\Big(\Big\{x \;\Big|\; \alpha < \frac{x-nM}{\sqrt{nD}} < \beta\Big\}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Démonstration. Soit φ la transformée de Fourier de la mesure μ,

$$\varphi(t) = \hat{\mu}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} d\mu(x).$$

De l'hypothèse

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu(x) < \infty,$$

on déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^2$. Notons que

$$\varphi'(0) = -\mathrm{i}M, \;\; \varphi''(0) = -D - M^2.$$

La transformée de Fourier de la mesure μ_n est égale à φ^n. Soit ν_n la mesure définie par

$$\nu_n(]\alpha,\beta[) = \mu_n\Big(\Big\{x \;\Big|\alpha < \frac{x-nM}{\sqrt{nD}} < \beta\Big\}\Big).$$

Pour une fonction mesurable bornée f,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f\Big(\frac{x-nM}{\sqrt{nD}}\Big) d\mu_n(x),$$

et la transformée de Fourier ψ_n de la mesure ν_n est égale à

$$\psi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\frac{x-nM}{\sqrt{nD}}\right)} d\mu_n(x) = \big(\theta_n(t)\big)^n,$$

où
$$\theta_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\frac{M}{\sqrt{nD}}}\varphi\Big(\frac{t}{\sqrt{nD}}\Big).$$
Nous allons montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$
Le résultat annoncé découlera alors du théorème de Lévy puisque la transformée de Fourier de la fonction
$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$
est égale à $\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$. Pour le calcul de cette limite nous utiliserons le logarithme d'un nombre complexe défini par, si $|z-1|<1$,
$$\ln(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n.$$
On montre, sous la condition $|z-1|<1$, que
$$\mathrm{e}^{\ln(z)} = z.$$
En effectuant le produit des développements limités
$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\frac{M}{\sqrt{nD}}} &= 1 + \mathrm{i}t\frac{M}{\sqrt{nD}} - \frac{t^2}{2}\frac{M^2}{nD} + o\Big(\frac{1}{n}\Big),\\ \varphi\Big(\frac{t}{\sqrt{nD}}\Big) &= 1 + t\varphi'(0)\frac{1}{\sqrt{nD}} + \frac{t^2}{2}\varphi''(0)\frac{1}{nD} + o\Big(\frac{1}{n}\Big),\end{aligned}$$
nous obtenons
$$\theta_n(t) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$
Par suite,
$$\ln\theta_n(t) = -\frac{t^2}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$
et
$$\psi_n(t) = \mathrm{e}^{n\ln\theta_n(t)} = \mathrm{e}^{\left(-\frac{t^2}{2}+o(1)\right)},$$
ce qui s'écrit aussi
$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}. \qquad \square$$

Pour $p,q>0$, $p+q=1$, considérons la mesure
$$\mu = p\delta_1 + q\delta_0.$$

Nous pouvons lui appliquer le théorème de la limite centrale. Notons que $M = p$, $D = pq$. Les puissances de convolution de la mesure μ se calculent à l'aide de la formule du binôme :

$$\mu_n = \mu^{*n} = (p\delta_1 + q\delta_0)^{*n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k,$$

et

$$\varphi(t) = \hat{\mu}(t) = p\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + q.$$

***Théorème XI.7.2* (Théorème de Moivre-Laplace).**

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n\left(\left\{x \;\middle|\; \alpha < \frac{x - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

BIBLIOGRAPHIE

C. Albert (1997). *Topologie*. Belin.

G. Alexits (1961). *Convergence problems of orthogonal series*. Pergamon.

V. Avanissian (1996). *Initiation à l'analyse fonctionnelle*. Presses Universitaires de France.

H.S. Carslaw (1950). *Introduction to the Fourier series and integrals*. Dover.

J. Dieudonné (1963-67). *Fondements de l'analyse moderne*. Gauthier-Villars.

J.L. Doob (1994). *Measure theory*. Springer-Verlag.

H. Dym, H.P. McKean (1972). *Fourier series and integrals*. Academic Press.

P.R. Halmos (1974). *Measure theory*. Springer-Verlag.

G.H. Hardy, W.W. Rogosinski (1968). *Fourier series*. Cambridge University Press.

J.R. Higgens (1977). *Completeness and basis properties of sets of special functions*. Cambridge University Press.

D. Jackson (1941). *Fourier series and orthogonal polynomials*. The Mathematical Association of America.

S. Lang (1969). *Real analysis*. Addison-Wesley.

F. Riesz, B.S. Nagy (1972). *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Gauthier-Villars.

W. Rudin (1975). *Analyse réelle et complexe*. Masson.

W. Rudin (1995). *Principes d'analyse mathématique*. Ediscience international.

S. Saks (1964). *Theory of the integral*. Dover.

R. Seeley (1966). *An introduction to Fourier series and integrals*. Benjamin.

G.P. Tolstov (1976). *Fourier series*. Dover.

A. Zygmund (1959). *Trigonometric series*. Cambridge University Press.

INDEX