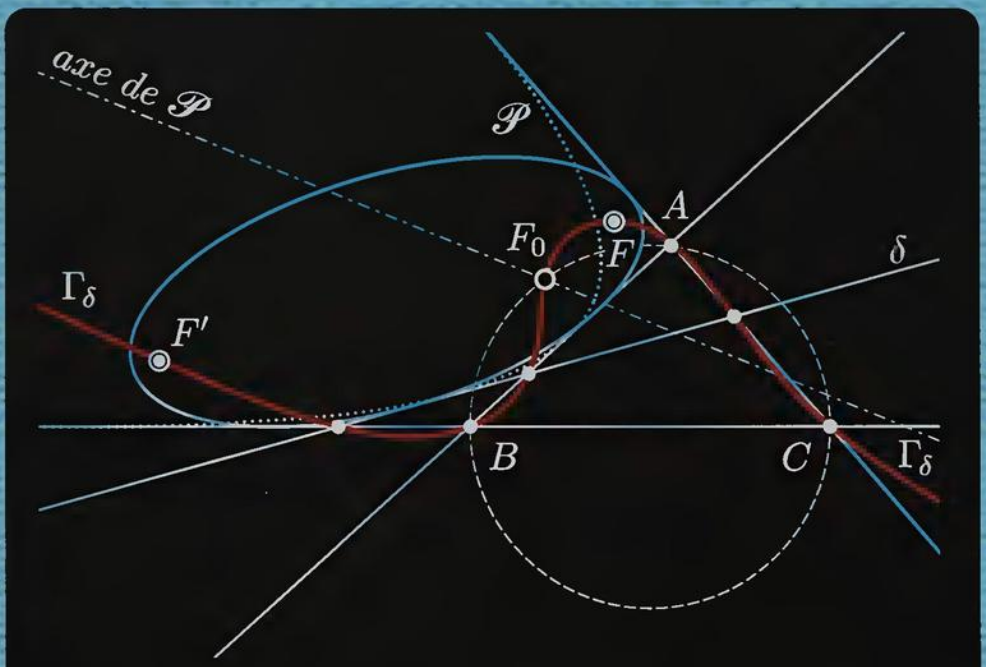


géométrie analytique classique

Tableau Noir – Calvage & Mounet

- CALCUL BARYCENTRIQUE
- INVERSION ISOTOMIQUE, INVERSION ISOGONALE
- CONIQUES AFFINES, PROJECTIVES ET EUCLIDIENNES
- NOMBRES COMPLEXES EN GÉOMÉTRIE
- FAISCEAUX DE CERCLES – FAISCEAUX DE CONIQUES

Jean-Denis Eiden

C&M

TABLEAU NOIR

Tableau Noir

101. — Rached Mneimné. *Réduction des endomorphismes*

102. — Marc Hindry. *Arithmétique*

103. — Jean-Denis Eiden. *Géométrie analytique classique*

104. — Denis Choimet, Hervé Queffélec. *Analyse mathématique. Grands théorèmes du vingtième siècle*

Jean-Denis Eiden

Géométrie analytique classique

Calvage & Mounet

JEAN-DENIS EIDEN est ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud et agrégé de l'Université. Il est professeur en mathématiques spéciales (MP*) au lycée Fabert de Metz, et auteur de nombreux sujets de concours. On lui doit la traduction, avec Gabrielle et Jean-Marie Arnaudiès, du monumental traité de Pierre Gabriel, Matrices, Géométrie, Algèbre linéaire.

Mathematics Subject **Classification (2000)** :

14-XX Algebraic **geometry**
  14H-XX Curves
    14.20 Algebraic **curves, surfaces** and special varieties
51-XX Geometry
  51F-XX Metric **geometry**
  51N-XX Analytic **and descriptive geometry**
    51N10 Affine **analytic geometry**
    51N15 Projective **analytic geometry**
    51N20 Euclidean **analytic geometry**
    51N25 Analytic **geometry with other** transformation groups
    51N30 Geometry **of classical groups**
    51A05 General **theory and projective** geometries

ISBN 978-2-91-635208-4

♾ Imprimé sur papier permanent

© Calvage & Mounet, Paris, 2009

En mémoire de Xavier Eiden,
décédé dans un accident d'avion à l'âge de vingt-quatre ans.

Table des matières

Avant-propos xv
Présentation 1

I. Le calcul barycentrique
1. Rappels et conventions 5
2. Généralités 7
   2.1. Notion de coordonnées barycentriques 7
   2.2. Lien avec les coordonnées cartésiennes 8
   2.3. Interprétation de l'égalité $x + y + z = 0$ 9
3. Interprétation géométrique des coordonnées barycentriques . . . 11
   3.1. Aires et coordonnées barycentriques 11
   3.2. Un cas particulier 13
   3.3. Le point de LEMOINE 13
   3.4. Les coordonnées trilinéaires 14
4. Les équations barycentriques 15
   4.1. Notion d'équation barycentrique 15
   4.2. Équations barycentriques des droites 16
   4.3. Les équations barycentriques de degré supérieur à 2 : un avant-goût 18
   4.4. Parallélisme de droites 18
5. Alignement et concours 19
   5.1. Condition d'alignement de trois points 19
   5.2. Équations paramétriques de droites 21
      5.2.1. Cas de la droite passant par deux points 21
      5.2.2. Cas des droites d'un faisceau linéaire 21
   5.3. Condition de concours de trois droites 23
6. Cas particuliers 24
7. Matrice d'une application affine 26
   7.1. La formule matricielle 26
   7.2. Vecteurs propres et points fixes 27
   7.3. Les symétries centrales 28

7.4. Les homothéties-translations 28
7.5. Application : le cercle d'EULER 30
7.5.1. Définition du cercle d'EULER. 30
7.5.2. L'équation barycentrique du cercle d'EULER 32
8. Changement de triangle de référence 32
9. Un exemple d'homographie : l'inversion harmonique 34
10. Coordonnées barycentriques de quelques points remarquables . . 39
10.1. Les (!) centres de gravité 39
10.2. Le centre du cercle circonscrit 41
10.3. L'orthocentre 41
10.4. Le centre du cercle d'EULER 44
10.5. Les centres des cercles (ex)inscrits 45
10.6. Pour ne pas en rester là 46

II. Les coniques
1. Introduction 49
2. Étude des coniques circonscrites 50
2.1. Les coniques circonscrites 51
2.2. Cinq points définissent une conique 52
2.3. Un petit Nullstellensatz 55
2.4. Le centre d'une conique circonscrite 59
2.5. Le genre d'une conique circonscrite 63
2.6. Les tangentes à une conique circonscrite 63
2.7. La conjugaison (harmonique) par rapport à une conique . . 65
2.8. Les asymptotes d'une hyperbole circonscrite 70
2.9. Directions conjuguées d'une conique 72
2.9.1. Milieux de cordes 72
2.9.2. Conjugaison et bilinéarité 75
2.9.3. Conjugaison et polarité 76
2.9.4. Le cas particulier des cercles 77
2.10. L'équation barycentrique du cercle circonscrit 78
2.11. Du côté de chez LEIBNIZ 79
2.12. Les cercles du plan 79
2.13. L'axe radical de deux cercles. Version algébrique 80
2.14. Cercles possédant un triangle autopolaire donné 86
3. Autour du théorème de PASCAL 89
3.1. Le théorème de PASCAL 89
3.2. Un déterminant impressionnant... en apparence 94
4. Quelques résultats sur les coniques générales 96
4.1. Le théorème de CARNOT 96
4.2. Alignement de trois images affines 100
4.2.1. Généralités 100
4.2.2. Des configurations particulières 102

4.2.3. La droite de SIMSON et l'hypocycloïde de STEINER 102
4.2.4. Deux constructions préparatoires 107
4.2.5. Le H_3 par la face Nord : le problème P_1 110
4.2.6. Le H_3 par la face Sud : le problème P_2 113
4.2.7. En guise de conclusion 117

III. Correspondances remarquables liées à un triangle
1. L'inversion isotomique 121
1.1. Définition 121
1.2. Cas particuliers 123
2. Droites, coniques et inversion isotomique 126
2.1. L'inverse isotomique d'une droite cévienne 127
2.2. L'inverse isotomique d'une droite non cévienne 128
3. Application à des constructions géométriques 130
3.1. Combien de paraboles par quatre points 130
3.2. Secrets de fabrication. Les triangles autopolaires 132
3.3. Le quatrième point commun à deux coniques 133
4. Triangles et polarisation 134
4.1. La polaire triangulaire (ou trilinéaire) 134
4.2. La dualité, ou polarisation, « formelle » 139
4.2.1. Préliminaires 139
4.2.2. Dualité et constructions géométriques 139
4.2.3. Propriétés de la dualité 140
5. Définition de l'inversion isogonale 141
5.1. La preuve géométrique 142
5.2. La preuve par les homographies 143
5.3. Premières propriétés 144
6. Des couples célèbres 146
7. Droites, coniques et inversion isogonale 149
7.1. L'inverse isogonal d'une droite cévienne 149
7.2. L'inverse isogonal d'une droite non cévienne 150
8. Hyperboles équilatères circonscrites à un triangle 152
8.1. Propriétés générales 152
8.2. Théorème de PASCAL et hyperboles équilatères 157
9. Deux exercices de révision 158
9.1. Les deux inversions 158
9.2. Des triangles d'aires égales 162

IV. Les familles de coniques
1. Faisceaux linéaires de coniques circonscrites 165
1.1. Les faisceaux à quatre points de base 166
1.1.1. Faisceaux et inversion isogonale 166
1.1.2. La conique des neuf points 167
1.2. Les faisceaux de coniques tangentes 173
1.3. Coniques remarquables d'un faisceau 177
1.4. Le point de FRÉGIER 180
1.5. Une belle figure 182
2. Applications des faisceaux linéaires 188
2.1. Discussion de l'existence d'un triangle autopolaire commun 188
2.2. Le cas des cercles et le théorème de FEUERBACH 191
2.3. Faisceaux linéaires et conjugaison isogonale 199
2.3.1. Faisceaux et involutions quadratiques 199
2.3.2. Application à l'inversion isogonale 202
3. Points cycliques et foyers d'une conique inscrite 204
3.1. Une brève présentation des points cycliques 204
3.2. Coordonnées barycentriques des points cycliques 205
3.3. Foyers d'une conique inscrite 207
3.4. Foyers des coniques tangentes à quatre droites 209

V. Utilisation des nombres complexes en Géométrie
1. Introduction 219
1.1. Présentation du chapitre 219
1.2. Conventions et rappels de notations 220
2. Généralités 221
3. Application des complexes à la Géométrie du triangle 223
3.1. L'aire d'un triangle 223
3.2. Quelques points et une configuration remarquables 224
3.3. Symétries et projections orthogonales 226
4. Deux exemples et des exercices 227
4.1. Intersection de droites et polarité 227
4.2. L'astuce de MORLEY 228
4.3. Un peu de théorie de GALOIS 230
4.4. Huit exercices 231
5. Homographies du plan complexe 235
5.1. Généralités 235
5.2. Homographies stabilisant le cercle-unité 238
5.3. Le groupe $\mathrm{PO}(\mathbb{U})$ 239
5.4. Les involutions de FRÉGIER de $\mathbb{U}$ 239
5.5. Génération de $\mathrm{PO}(\mathbb{U})$ par les involutions de FRÉGIER . . . 241
5.5.1. Le cas $\beta \neq 0$ 241
5.5.2. Le cas $\beta = 0$ 242

6. Le théorème de PASCAL 242
7. L'inversion 244
7.1. Définition 245
7.2. Le théorème de PTOLÉMÉE 246
8. Les triangles équilatéraux 247
8.1. Caractérisation des triangles équilatéraux par les affixes des sommets 247
8.2. Les centres isodynamiques 248
8.3. Quelques propriétés 248
8.4. La configuration de FERMAT–TORRICELLI 250
8.5. Annexe 255
8.5.1. La fonction de FERMAT 255
8.5.2. L'orthologie 258
8.5.3. Orthologie et isogonalité 259
9. Homographies, conformité et birapport 261
9.1. Les homographies en tant qu'applications conformes 261
9.2. Interprétation géométrique des homographies 263
9.3. Homographies, droites et cercles 263
9.4. Arcs capables et cercles d'APOLLONIUS 267
9.5. Le birapport 269
9.5.1. Définition et formules 269
9.5.2. Birapport et permutations 271
9.5.3. Birapport et homographies 276
9.5.4. Les homographies, les involutions et leurs points fixes 277
9.5.5. Birapport, droites et cercles 281
9.5.6. Les quadrangles harmoniques 282
9.5.7. Harmonie, formes quadratiques et trace 288
9.5.8. Les quadrangles équiharmoniques 294
9.5.9. Formule des six birapports et applications 295
10. Corrigé des exercices 297
10.1. Les exercices du paragraphe V-4 297
10.2. Les exercices du paragraphe V-9 303
10.3. L'exercice du paragraphe V-9.5.6 307
10.4. L'exercice du paragraphe V-9.5.9 309

VI. Les cercles du plan euclidien
1. Les équations formelles des cercles-droites 312
1.1. Polynômes et équations formelles 312
1.2. La forme quadratique fondamentale 313
1.3. Interprétation projective 316
1.4. Orthogonalité, contact, intersection, équation tangentielle . 318
1.5. Homographies et forme quadratique fondamentale 324
1.6. La démonstration en suspens 328

1.7. Résumé des principaux résultats de ce paragraphe 330
2. L'axe radical. Version géométrique 331
2.1. Puissance d'un point par rapport à un cercle 332
2.2. Cercles laissés stables par une inversion 334
2.3. L'axe radical de deux cercles 337
3. Faisceaux de cercles 339
3.1. Définition et classification 339
3.2. Propriétés algébriques des faisceaux 345
3.3. Quelques constructions relatives aux faisceaux 350
3.3.1. Cercle d'un faisceau passant par un point 350
3.3.2. Cercle d'un faisceau ayant un centre donné 352
3.3.3. Cercles d'un faisceau tangents à une droite donnée . 353
3.3.4. Centres d'homothétie et faisceaux 359
3.4. Action du groupe de MÖBIUS sur les faisceaux 361
3.4.1. Prolégomènes algébriques 361
3.4.2. Étude géométrique 362
3.4.3. Applications 365
4. L'alternative de STEINER 367
4.1. Les coniques reviennent 367
4.2. Un détour par les enveloppes de cercles 372
4.3. Une chaîne de cercles 374
4.4. Et si la chaîne se refermait 376
4.4.1. La preuve classique 376
4.4.2. Une preuve algébrique 378
4.4.3. Pour aller plus loin 381
5. Voyage dans l'espace (des cercles-droites) 385
5.1. Exposé du problème 385
5.2. Les trois faisceaux d'APOLLONIUS 385
5.3. Trois faisceaux concourants 388
5.4. Pour terminer en beauté 388
6. Corrigé des exercices 394
6.1. L'exercice du VI-2.3 394
6.2. L'exercice du VI-3.1 397
6.3. Les exercices du VI-3.3.3 399
6.4. L'exercice du VI-3.4.2 401

Annexe A. Compléments de calcul barycentrique
1. Vecteurs et coordonnées barycentriques 405
2. Nombre de droites de SIMSON passant par un point donné . . . 408
3. Intersection d'une conique et d'une droite 410
3.1. Retour vers la classification des coniques 410
3.2. Caractérisation des hyperboles et de leurs asymptotes . . . 411
4. Intersection d'une conique et d'une courbe algébrique 414

4.1. Représentation paramétrique d'une conique circonscrite . . 414
4.2. Un cas particulier du théorème de BEZOUT 415
4.3. Le théorème de PASCAL 417
5. Tangentes à une courbe algébrique 419
5.1. L'identité d'EULER 419
5.2. L'équation d'une tangente 419
5.3. Tangentiel et inversion isogonale 421
5.4. L'équation tangentielle d'une conique 425
5.4.1. Généralités 425
5.4.2. Dualité, équations barycentriques et équations tangentielles 428
5.4.3. Dualité et théorème de BRIANCHON 429
5.4.4. Le cas des coniques inscrites 430
5.4.5. Retour sur un exercice 432
5.4.6. Équations tangentielles et lieux orthoptiques 433
5.5. Un mot sur les faisceaux tangentiels de coniques 436
5.5.1. Introduction 436
5.5.2. Les faisceaux tangentiels 438
6. Étude de la famille F de la section VI-5.4 438
7. Un exercice : hyperboles équilatères et faisceaux tangentiels . . . 445
7.1. Énoncé 445
7.2. Corrigé 447
7.3. Remarques et compléments 452
7.3.1. La question de l'angle obtus 452
7.3.2. Le cas des cercles tangents 453
7.3.3. La circonscription harmonique 457
7.3.4. Le cas du parallélisme de BB' et de CC' 459

Annexe B. Axiomatisation des Géométries affine et projective
1. Notion d'espace affine 461
1.1. Espaces affines 461
1.2. Sous-espaces affines 462
1.3. Notion de bipoint 463
1.4. Applications affines 464
1.5. Formes affines 465
1.6. Bijections affines 465
1.7. L'espace des applications affines 467
1.8. Les espaces affines, canal historique 468
2. Bases affines 473
2.1. Notions de base et de repère affines 473
2.2. Coordonnées d'un point 474
2.3. Équations d'un sous-espace affine 474
3. Barycentres 475

3.1. Barycentre d'une famille finie de points massiques 475
3.2. Coordonnées barycentriques 477
3.3. Condition d'alignement 477
3.4. Équations barycentriques de droites 478
4. Complétion projective et complexification 479
4.1. Complétion projective d'un espace affine 479
4.2. Homographies 482
4.3. Extraction d'un espace affine d'un espace projectif 483
4.3.1. Les supplémentaires d'un sous-espace vectoriel . . . 483
4.3.2. Faisons le point grâce à deux exercices 486
4.3.3. Un transport de structure 487
4.3.4. Principe d'utilisation de ces constructions 488
4.4. Complexification d'un espace vectoriel réel 489
4.5. Complexification d'un espace affine réel 490
4.6. Complexification d'un espace quadratique réel 491
4.7. Espaces affines réels euclidiens 491
4.8. Complétion projective complexe d'un espace affine euclidien 492
4.9. Retour sur le cercle circonscrit et les points cycliques . . . 494
4.10. Coniques affines et coniques projectives 497
4.11. À quoi bon 499

Bibliographie **501**
Notations **503**
Index **505**

« Le traditionnel et ennuyeux chapitre
sur les espaces affines et les espaces projectifs,
qui ne consiste qu'en simples traductions de l'Algèbre linéaire,
aurait aussi gagné à être considérablement allégé. »

JEAN DIEUDONNÉ, *préface du livre Algèbre linéaire*
et Géométrie élémentaire, Hermann, 1968

Avant-propos

Singulier destin que celui de la Géométrie élémentaire dans toutes ses formes, depuis les petites classes de Lycée[1] jusqu'aux premières années de l'Enseignement supérieur !

Un coup d'œil sur des sujets du baccalauréat, de l'agrégation ou de l'École polytechnique montre à quel point la Géométrie a occupé une position dominante, voire hégémonique, dans l'enseignement jusqu'aux alentours de la Seconde guerre mondiale.

Pourtant, à partir des années cinquante et soixante, l'Enseignement, même élémentaire, ne put rester sourd aux exigences d'une rigueur accrue et d'un *aggiornamento* qui allait bien au-delà d'un simple toilettage. Ce mouvement de fond qui s'était mis en œuvre semblait devoir renforcer les assises de la Géométrie classique mais, en réalité, lui a assené un coup fatal. Parmi les reproches qui étaient faits à cette discipline, l'un d'eux, et non des moindres, consistait à en contester la pertinence des bases : une axiomatique floue, des objets définis sans toute la précision nécessaire.

Il n'est pas faux de dire qu'avec la complicité bienveillante des manuels scolaires et des professeurs eux-mêmes, le géomètre en herbe était invité à passer allégrement de l'affine au projectif, puis du projectif à l'euclidien et, pour terminer, du cadre réel au cadre complexe sans la rassurante protection des garde-fous les plus élémentaires[2].

Il est vrai qu'un banal plan affine réel peut être considéré à l'envi comme une droite affine complexe, mais la différence n'est pas du tout anodine ! Le groupe des transformations de la forme $z \longmapsto az + b$[3], (avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$), est bien pauvre, comparé au groupe des applications affines (bijectives) d'un plan réel : un élément du premier dépend *grosso modo* de

[1] Par *Lycée* nous entendons ici les classes de la Sixième à la Terminale.

[2] Au fond, les auteurs faisaient déjà implicitement la distinction entre ces différents cadres en évoquant les *propriétés affines des coniques* à l'occasion d'un titre de paragraphe, mais c'était peut-être davantage pour satisfaire le taxinomiste qui sommeillait en eux que pour rendre manifestes et transparentes ces propriétés fondamentales.

[3] C'est donc le groupe des transformations affines bijectives de la droite complexe.

deux paramètres complexes, c'est-à-dire de quatre paramètres réels, tandis qu'un élément du second dépend, lui, de six paramètres réels. La différence est suffisamment notable pour que l'image d'un cercle par un élément bien choisi du groupe affine réel soit une ellipse donnée à l'avance, alors que l'image d'un cercle par un élément de $\mathbf{A}^1_{\mathbb{C}}$, le groupe affine de la droite complexe, reste un cercle [4].

Un ouvrage de « Math Élém » comme le LEBOSSÉ–HÉMERY, qui a accompagné des générations de lycéens depuis l'immédiat après-guerre jusqu'à la fin des années soixante, reste et restera sans doute encore pour longtemps un ouvrage cité en exemple, aussi bien pour la richesse de son contenu que pour une présentation et une iconographie à la limite de l'austérité, typiques de l'époque.

Pourtant, on sent bien que la préoccupation essentielle n'était pas, loin s'en faut, la précision quant au cadre retenu : en fait, le contexte affine, euclidien, voire projectif lorsqu'il était question du birapport, n'apparaissait clairement en fait que pour le mathématicien professionnel, mais rarement pour l'élève [5]. Souvent même, seul un coup d'œil jeté sur le titre du chapitre en cours pouvait renseigner sur la dimension de l'espace ambiant : droite, plan ou espace de dimension 3.

Cela n'était pas forcément très gênant (tant que l'on savait ce que l'on faisait), mais ne concourait pas à conférer à l'exposition de la Géométrie toute la rigueur souhaitée [6].

Or, c'est aussi de cela qu'il s'agissait : depuis le XIX^{e} siècle déjà, des mathématiciens comme GAUSS ou BOLYAI s'interrogeaient sur le cinquième postulat d'EUCLIDE, le *postulat des parallèles*. Il devenait urgent, cent cinquante ans plus tard, de fonder rigoureusement la matière, ce d'autant plus que des exigences nouvelles s'étaient fait jour dans l'intervalle et que les ustensiles requis étaient à portée de main.

Bien sûr, on disposait d'axiomatisations précises et irréfutables, telle celle de HILBERT [7], mais l'heure de la Géométrie pour la Géométrie, *ars gratia artis*, était déjà passée.

La Géométrie avait contribué historiquement au développement de l'Algèbre, et il n'est pas jusqu'à l'Algèbre commutative qui ne lui doive une partie de ses concepts : si la notion d'*idéal* a été favorisée par les recherches sur le « Grand » théorème de FERMAT, les constructions algébriques au-

[4] D'ailleurs, nous élargirons notre vision de ce plan en le « plongeant » dans la droite projective complexe, qui admet cette fois un groupe de transformations naturelles plus étoffé que $\mathbf{A}^1_{\mathbb{C}}$.

[5] Dans la leçon sur le *birapport*, l'inévitable intervention des éléments à l'infini est d'abord éludée, puis introduite par un passage à la limite.

[6] Ce n'est pas seulement une question de rigueur, mais aussi d'efficacité. Nous dirons quelques mots à ce sujet dans les pages qui suivent.

[7] Voir **[13]** par exemple.

tour des surfaces de RIEMANN l'ont enrichie à leur tour, comme elles l'ont fait pour la théorie des valuations discrètes. De même, l'Algèbre bilinéaire a indiscutablement trouvé ses premières justifications dans l'étude et la généralisation des coniques et des quadriques[8].

On a pu, en toute bonne foi, penser que l'introduction d'une bonne dose de rigueur dans l'exposé géométrique allait lui conférer une légitimité indiscutable et définitive. À la fin des années soixante, des articles de la Revue de Mathématiques Spéciales s'enorgueillissaient de redonner par le biais de l'Algèbre bilinéaire une nouvelle jeunesse aux notions de *coniques harmoniquement circonscrites* ou de *conique harmoniquement attachée à deux coniques*[9]. Derrière la notion de *conjugaison harmonique* se cachent en effet des propriétés des formes quadratiques et nous en donnons un aperçu succinct au **V-9.5.7.**

Favorisée par une base axiomatique plutôt simple, et profitant de la vague des Mathématiques modernes, l'Algèbre[10] prit en peu de temps une place prépondérante et on atteignit vite des sommets : certains manuels de Terminale C du début des années soixante-dix allaient même jusqu'à présenter la réduction des endomorphismes en petite dimension !

De ce point de vue, la Géométrie a été bien mal payée de ses efforts historiques de promotion de l'Algèbre : puisque l'on pouvait énoncer, démontrer et interpréter la plupart des résultats géométrique en termes algébriques, la Géométrie se retrouva vite reléguée au rang de simple faire-valoir de l'Algèbre, avec tout l'appauvrissement que cela impliquait ; la Géométrie projective, avec l'espace projectif comme objet quotient, se prêtait mal au dogme du « tout vectoriel » : elle disparut la première et, avec elle, tout un pan de la riche théorie des coniques.

Plutôt que de s'intéresser aux configurations, on prit un malin plaisir à disséquer les objets géométriques, en les stérilisant au passage : le brave potache pour qui un angle était une orbite sous l'action d'un groupe de similitudes avait-il encore envie d'étudier une droite de SIMSON[11] ? Les iso-

[8] Au surplus, on notera avec quelle économie de moyens la Géométrie a su jeter ses propres bases : les points cycliques, pour ne citer qu'eux, n'ont pas été introduits au terme de spéculations abstraites mais se sont imposés d'eux-mêmes lorsque l'on a cherché à caractériser les équations cartésiennes des cercles parmi celles des coniques. Ainsi portés sur les fonts baptismaux, ces points s'étaient déjà garanti au moins un succès d'estime, mais c'est PLÜCKER qui leur apporta la gloire en les « reliant » aux foyers d'une conique euclidienne.

[9] Voir par exemple l'article **[7]** de Jacques BOUTELOUP, cité en bibliographie.

[10] Il s'agissait là de l'Algèbre abstraite, celle des structures, et de l'Algèbre linéaire. De nos jours, la première est abandonnée en Terminale, et réduite à la portion congrue au début des études supérieures.

[11] Outre le fait qu'elle laisse son sujet dans un triste état, la dissection méthodique, même dans les cas où elle est justifiée, est coûteuse en temps. Dans beaucoup de cursus universitaires initiaux, elle ne laisse guère que la latitude d'établir le concours des hauteurs d'un triangle. On peut rêver, pour un cours de Géométrie, d'un couronnement

métries elles-mêmes, soigneusement désossées comme composées de symétries hyperplanes, étaient-elles moins pitoyables qu'un réveille-matin dont on aurait aligné les rouages sans savoir le refaire fonctionner ensuite ?

Le lecteur est invité à se reporter au *Rapport d'étape sur l'enseignement de la Géométrie*[12], un état des lieux lucide agrémenté de propositions réalistes. Nous en avons extrait la phrase suivante, dans laquelle nous nous reconnaissons pleinement : *« (...) en contrepartie, tous ceux qui, stimulés par l'enthousiasme de leurs professeurs et la beauté des figures, ont goûté à cette discipline savent bien quelle source de plaisir elle peut être (et pas seulement les mathématiciens professionnels qui lui doivent souvent leur vocation) »*.

Nous espérons nous aussi, au niveau auquel nous nous sommes placé, parvenir à redonner de la chair à la Géométrie, en postulant que cette chair est précisément le côté, n'ayons pas peur des mots, *esthétique* des figures que nous chercherons à échafauder patiemment, pièce par pièce. Nous aurons au passage l'occasion de mettre à contribution les techniques de calcul acquises lors des deux premières années de l'Enseignement supérieur, l'Algèbre linéaire et la bilinéaire, déjà citées, mais aussi les calculs en nombres complexes, puisque nous donnerons en particulier la part belle à la géométrie plane euclidienne.

L'hexagone de PASCAL, *hexagrammum mysticum*, donne l'exemple d'une situation assez complexe mais qui se traite bien par le calcul et il en va de même de la configuration de FEUERBACH ; nous ne tirerons pourtant aucune gloire d'établir des résultats qui étaient à la portée des potaches de « Math Élém » il y a encore quelques décennies[13].

Certes, nous ne chercherons pas à reproduire ces démonstrations, souvent purement géométriques, mais les preuves que nous en donnons iront souvent plus loin dans les résultats. Nous affichons enfin un objectif un peu plus ambitieux : domestiquer l'hypocycloïde de STEINER, enveloppe de la droite de SIMSON du point générique du cercle circonscrit à un triangle.

Dans cette étude précise, mais aussi dans plus d'une autre, nous mesurerons l'apport précieux de l'outil informatique, non pas en ce qui concerne les logiciels de calcul formel dont nous n'avons pas ici eu l'utilité[14], mais

---

plus exaltant !

[12] Essentiellement dû à Daniel PERRIN. Voir en bibliographie nos références « sur Internet ».

[13] Au prix toutefois de quelques propriétés admises, dont nous verrons d'ailleurs qu'elles sont tout autant analytiques qu'algébriques.

[14] Les calculs sont souvent eux-mêmes instructifs, surtout lorsqu'ils mettent en œuvre des principes universels, tels l'utilisation des polynômes symétriques, l'élimination, la discussion des systèmes linéaires. Méditons cette phrase d'Alain CONNES : « Quand on effectue un long calcul algébrique, la durée nécessaire est souvent très propice à l'élaboration dans le cerveau de la représentation mentale des concepts utilisés. C'est pourquoi l'ordinateur, qui donne le résultat d'un tel calcul en supprimant la durée, n'est

tout particulièrement dans le domaine de ceux de Géométrie dynamique qui autorisent, en quelques « clics » de souris, l'élaboration des figures les plus complexes avec toujours la possibilité de déplacer quelques-uns des points aux fins d'une lisibilité optimale. Presque toutes les figures de cet ouvrage ont été composées avec CABRI, qui joint aux fonctionnalités précédentes la latitude de définir des macros personnelles.

Notamment, à partir de la macro « pré-installée » autorisant le tracé d'une conique à partir de cinq points, nous avons pu généraliser cette construction aux cas d'une conique connue par trois points et un élément de contact, ou un point et deux éléments de contact, *et cetera*[15].

Bien qu'il soit de bon ton de clore tout avant-propos par de chaleureux remerciements destinés à tous ceux qui ont apporté leur pierre aux édifices TEX et LATEX, nous profitons de l'évocation de l'outil informatique pour le faire dès à présent : le traitement de texte scientifique et la qualité des manuscrits ne seraient pas ce qu'ils sont sans les contributions de D.KNUTH, L.LAMPORT, mais aussi des concepteurs de GHOSTSCRIPT, d'ASYMPTOTE ou de METAPOST pour ne citer que les plus remarquables[16].

Venons-en à présent au dessein de cet ouvrage. Nous avons retenu le titre de *Géométrie analytique classique* afin d'en situer le propos sans ambiguïté : la Géométrie algébrique est une théorie mathématique puissante, mais qui présuppose des notions approfondies d'Algèbre commutative ; la Géométrie analytique était, elle, la Géométrie avec des calculs... algébriques, et elle s'est développée comme telle depuis l'époque de DESCARTES : nous l'avons qualifiée de *classique* pour ne pas tromper le lecteur en lui faisant croire que nous allions nous attaquer aux variétés analytiques complexes !

En outre, nous avons souhaité nous limiter à des prérequis aussi élémentaires que possible : essentiellement, nous aurons besoin des Mathématiques de L1 et de L2, dont nous utiliserons surtout les chapitres d'Algèbre linéaire et bilinéaire, jusques et y compris la notion de *signature* (d'une forme quadratique réelle) et nous verrons que l'intérêt de cet invariant ne se limite pas au catalogue des coniques ou les quadriques : il permet aussi de classifier agréablement les faisceaux linéaires de cercles dans un plan affine euclidien et explique à lui seul l'impossibilité de plusieurs configurations

---

pas nécessairement un progrès. On croit gagner du temps, mais le résultat brut d'un calcul sans la représentation mentale de sa signification n'est pas un progrès ».

[15]Nous saurions gré aux concepteurs de CABRI de faciliter le placement d'étiquettes en LATEX, ainsi que la sauvegarde des figures au format POSTSCRIPT : ce n'est en effet qu'au prix d'acrobaties et d'une perte de temps certaine que l'on parvient à pallier l'absence de ces possibilités. Cela étant, ces petites imperfections ne remettent pas en cause les services inestimables que ce logiciel nous a rendus !

[16]Le rendu typographique peut être à ce point conforme aux exigences d'un auteur qu'il peut même laisser passer des fautes de frappe, ébloui qu'il est par la qualité de ses épreuves. Nous espérons qu'avec l'aide de l'éditeur et des relecteurs, le plus grand nombre en aura été expurgé !

géométriques, telles les sextuples harmoniques réels.

On s'aperçoit d'ailleurs très vite que le désir de passer à l'étage supérieur se paie par la nécessité impérieuse de l'outillage d'une Géométrie algébrique infiniment plus compliquée [17].

Notre ambition est de rappeler aux spécialistes du domaine que même les simples coniques peuvent apporter des moments d'émerveillement, charge à eux de nous apporter grâce à leurs acquis techniques la résolution de problèmes qui, il y a encore cent cinquante ans, semblaient inabordables.

Malgré ces apparentes limitations, nous pourrons aller assez loin dans l'étude des objets « linéaires » (les droites) ou « quadratiques » (les coniques, et en particulier les cercles). Nous apprécierons à l'usage, à plus d'un titre, la souplesse des « coordonnées barycentriques » ; en effet, à la différence du système de coordonnées affines qui fait jouer un rôle privilégié à un seul point, l'origine du repère, le système barycentrique va nous fournir des relations et formules *symétriques* et *homogènes*.

De la symétrie nous tirerons surtout des satisfactions esthétiques, mais l'homogénéité nous livrera une approche *en douceur* de la complétion projective d'un plan affine. Alors que l'introduction des coordonnées homogènes requiert une adaptation « culturelle », les coordonnées barycentriques, qui sont après tout elles aussi des coordonnées homogènes, parviennent au même résultat tout en se déduisant naturellement de formules vectorielles [18].

Le calcul barycentrique est rarement enseigné comme une fin en soi : les cours des deux premières années de faculté certes définissent les coordonnées barycentriques, mais vont rarement au-delà des conditions de concours de droites ou d'alignement de points. Pourtant, beaucoup de problèmes affines ou métriques liés à un triangle se traitent très bien par le calcul barycentrique, pourvu que l'on se soit constitué un formulaire adapté.

Il n'est pas dans notre propos de comparer les capacités du calcul barycentrique avec celles d'autres techniques, mais de montrer qu'il mérite mieux que les quelques banalités auxquelles on le confine ainsi généralement.

L'idée même de *comparer*, ou de ne pas comparer, les techniques barycentriques avec les techniques affines ou projectives, qui sont à certains plus

[17] Une des raisons en est que l'on s'éloigne vite des rivages rassurants des applications linéaires ou quadratiques, avec toute la complexité que cela comporte, ne serait-ce qu'en matière de degré, ou de multiplication des cas dégénérés. En revanche, les propriétés tangentielles d'une conique dégénérant en une droite double sont l'une des premières et des plus évidentes illustrations pratiques de l'absconse théorie des schémas.

[18] Dès que l'on a manipulé tant soit peu les coordonnées barycentriques dans le plan, on trouve naturel qu'elles soient au nombre de trois, et seulement définies à un coefficient multiplicatif non nul près. En revanche, l'introduction d'une troisième coordonnée pour *homogénéiser* les coordonnées affines a, du moins au début, toujours un petit goût de surnaturel quoiqu'elles répondent elles aussi à la même nécessité de prendre en compte les points à l'infini.

coutumières, nous donne l'occasion d'évoquer un point essentiel quant au principe de toute technique de calculs.

En effet, la nature même d'une situation mathématique est intrinsèque et ne dépend pas du mode de calcul choisi. Toutefois, la simplicité des calculs est très liée à l'adéquation de ce mode avec la situation en question.

Il n'y a plus lieu de débattre, et cela deux siècles après PONCELET, sur le fait qu'il existe plusieurs géométries et non une seule. Même si nous nous bornons au plan, reconnaître la *nature* d'une situation revient essentiellement à savoir à quelles transformations du plan elle survit. Si c'est le cas pour toutes les applications du groupe affine, on la qualifiera de situation *affine*, et on parlera *mutatis mutandis* de situations *euclidiennes* ou *projectives*[19].

Le *programme d'Erlangen*, énoncé par Felix KLEIN, a ainsi mis l'accent sur les groupes de transformations et nous a appris à rechercher avant tout **la** Géométrie à laquelle appartient un problème donné et d'adapter en conséquence le type de calcul analytique qui lui convient. Ainsi, la notion de *sommet* d'une parabole appartient à la Géométrie euclidienne, alors que la notion de *direction* de l'axe d'une parabole est affine, comme d'ailleurs la notion elle-même de parabole.

Cette idée a sans doute mis du temps à s'imposer : dans les années soixante, on redoutait d'avoir à envisager un repère qui ne fût pas orthonormé, car « il se prêtait mal aux calculs d'angles ou de distances ». Pourtant, un problème de nature affine ne requiert précisément pas ces notions et, du fait qu'il doit satisfaire à moins de conditions qu'un repère orthonormé, il est plus facile de l'adapter judicieusement au problème considéré[20].

La Géométrie affine offre une passerelle commode vers sa grande sœur projective, et nous avons choisi de développer tout particulièrement le calcul barycentrique pour mettre en valeur la première, tout en préparant le terrain pour la seconde. Le but de notre premier chapitre sera donc de traduire en termes barycentriques les méthodes et les objets que l'on rencontre en Géométrie plane : changements de repère, transformations affines, en plus des concours et alignements déjà évoqués.

Vedettes jadis incontestées des sujets d'Algèbre des concours, y compris de ceux de l'agrégation, les coniques ont été par la suite logées à la même

[19]Et nous rencontrerons même au chapitre **V** la Géométrie *circulaire*, qui ressortit au *groupe de Möbius*. Dans cette géométrie, les outils adéquats sont fournis par les homographies, épaulées par les antihomographies, et le birapport.

[20]Si l'on tient à tout prix à vérifier par le calcul que les médianes du triangle ABC concourent, le plus *judicieux* est de choisir (A, B, C) comme base affine du plan. Les équations cartésiennes des médianes sont alors $X = Y$, $X + 2Y = 1$ et $2X + Y = 1$ et on est soulagé de constater que le point de coordonnées $(1/3, 1/3)$ appartient effectivement aux trois. La récompense, si minime soit-elle, de notre choix a été l'absence de tout paramètre dans notre calcul.

enseigne que le reste de la Géométrie. De nos jours, on se limite habituellement à en donner les définitions classiques et à les classifier. Notre ambition est d'en dévoiler aussi quelques belles propriétés, sans pour autant viser à l'érudition attendue d'un taupin ou d'un agrégatif des années cinquante.

L'étude de ces objets présente l'immense avantage de rester élémentaire, alors que celle des courbes algébriques de degré supérieur requiert souvent le rouleau compresseur de la Géométrie algébrique.

Comme nous désirons parvenir aux approches projectives de la Géométrie et non pas les supposer connues, nous ne pouvions nous permettre de définir le centre d'une conique comme le pôle de la droite à l'infini, ni les asymptotes d'une hyperbole comme les tangentes en leurs points à l'infini : ces approches sont bien entendu les plus fructueuses mais elles ont dû, historiquement, résulter d'une lente maturation. Les définitions affines que nous mettrons en œuvre demandent chaque fois un peu plus de calculs, mais ont l'avantage d'utiliser les généralités du chapitre précédent, et, en cela, de les légitimer.

Quoique l'on puisse donner à la *tangente* en un point d'une conique une définition algébrique, il nous sera plus commode de l'envisager analytiquement, par le biais du théorème des fonctions implicites, quitte à la relier ensuite à des notions purement algébriques telles que la conjugaison ou la polarité.

Les connaisseurs pourront encore, à ce stade, penser que le calcul barycentrique est certes joli, mais peut-être un peu superflu à côté du calcul affine, qui est parfaitement rodé et documenté dans la littérature mathématique française. Cependant, les barycentres trouvent une application éclatante lorsqu'il s'agit de certaines transformations liées à un triangle : l'isotomie, l'isogonalité et la polarisation triangulaire. Ces transformations sont suffisamment riches pour que nous leur consacrions tout un chapitre.

L'étude des *faisceaux de coniques* clora la première moitié de cet ouvrage, avec comme récompense une preuve algébrique du théorème de FEUERBACH. Pourquoi d'ailleurs une preuve algébrique alors qu'il en existe qui soient purement géométriques [21] ? Un résultat obtenu algébriquement est sans intérêt s'il n'a mis en œuvre que la force brute du calcul. Il se justifie au contraire s'il met en évidence un principe général, et que ce principe soit réutilisable dans d'autres circonstances. Dans le cas qui nous occupe, nous relierons la notion de *contact* à la duplicité d'une valeur propre d'une certaine matrice dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ [22].

[21] Par exemple, dans **[17]**, pour citer un ouvrage récent.

[22] Cette préoccupation s'efforce en même temps de répondre à un reproche adressé à l'exposé classique de la Géométrie : ne pas dégager suffisamment une théorie. Ici, l'intérêt n'est pas de faire sentir que la démonstration illustre la notion de *valeur propre*, notion qui ne nous a pas attendu pour avoir d'éclatantes justifications, mais de montrer *en quoi* l'existence d'une valeur propre double nous fait sortir du cas général.

Nous verrons aussi comment les foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère donnent naissance à une cubique des plus intéressantes. Là, nous avons cherché à laisser transparaître la démarche qui conduit à pressentir telle ou telle configuration, avec par là même le plaisir de voir cette courbe se dessiner sous nos yeux, point par point.

Le chapitre **V**, comme le suivant d'ailleurs, fait la part belle au plan euclidien identifié à $\mathbb{C}$, en tant que cadre, et aux droites et cercles en tant qu'objets d'étude. Toutefois, nous ne nous restreindrons pas aux banales similitudes pour établir des liens entre ces objets : en effet, il existe un groupe de transformations bien plus riche, celui des *homographies*, qui conserve globalement ces familles de parties. Certes, il faudra adjoindre à $\mathbb{C}$ le symbole ∞ pour manipuler convenablement ces applications, mais cette infime complication... n'en sera pas une et se révélera particulièrement fructueuse.

Une fois que nous aurons étudié ces homographies pour elles-mêmes, nous en tirerons de beaux résultats géométriques : encore une fois le théorème de PASCAL, décidément un des *leitmotive* de cet ouvrage, mais aussi la configuration de FERMAT–TORRICELLI, où se mêlent principes d'Analyse et de Géométrie.

Là encore, c'est sur des notions projectives que déboucheront nos nouvelles acquisitions. Invariant omniprésent de la Géométrie projective, le *birapport* éclairera d'une lumière différente les concepts d'harmonie (de quadrangles) ou de cocyclicité. La jolie, et en même temps élémentaire, *formule des six birapports* nous offrira un bouquet d'applications géométriques, par lesquelles nous terminerons ce chapitre.

Le tout dernier chapitre est consacré aux cercles ; non pas à l'étude géométrique de ceux-ci, indéniablement un peu limitée et sans surprise, ni aux configurations de points cocycliques, que l'on aura abondamment rencontrées depuis le début de cet ouvrage, mais plutôt à l'espace des cercles-droites, dans lequel la *forme quadratique fondamentale* joue un rôle central, et aux familles privilégiées de celui-ci.

Les situations que nous étudierons sont suffisamment riches tout en restant élémentaires : les faisceaux de cercles, l'alternative de STEINER. Il est bien entendu trop tôt pour expliquer l'origine de la complexité de ces configurations, mais on pourra remarquer à la lecture des chapitres **IV** et **VI** notamment que, en relation avec son équation cartésienne ou barycentrique, la propriété pour un cercle de passer par des points donnés est *linéaire* alors que celle d'être tangent à des droites données est *quadratique*[23]

[23] Parmi les coniques, les cercles sont des coniques ayant une propriété *ponctuelle*, celle de passer par les points cycliques. Les paraboles, elles, ont une propriété *tangentielle*, celle d'être tangentes à la droite de l'infini. Ces deux types de propriétés se mélangent mal ! Ainsi, il y a en général *quatre* cercles tangents à trois droites — penser au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits d'un triangle— et au plus *deux* paraboles passant par quatre points. Dans chacun de ces cas, cela revient pourtant à fixer le *même* nombre

En d'autres termes, autant il est vrai que la codimension de l'espace affine des solutions d'un système linéaire compatible est égale au rang de ce système, autant sont hasardeuses les généralisations *qualitatives* de ce résultat aux systèmes algébriques. Cela se constate déjà au niveau des problèmes quadratiques suscités par les coniques, et prend une ampleur toute particulière lorsque l'on monte en degré, à tel point que certains phénomènes sont restés longtemps au niveau de paradoxes inexpliqués.

Ce seul fait suffit souvent à rendre non trivial le moindre problème de contact[24]. La palme de la difficulté revient d'ailleurs à l'alternative de PONCELET, à propos de laquelle nous avons dû nous restreindre à donner un simple énoncé. En fait, une compréhension profonde de ce problème pourtant si simple à énoncer passe par l'acquisition de concepts qui dépassent le niveau de ce livre, et pour lesquels nous renverrons le lecteur à la bibliographie.

En revanche, nous étudierons par le menu les configurations géométriques suscitées par l'alternative de STEINER, évoquée plus haut. Une des façons possibles d'aborder le problème (mais nous en verrons d'autres) est de se ramener au moyen de l'inversion au cas de deux cercles concentriques donnés, parce qu'il appartient à la Géométrie circulaire. Cette latitude n'existe pas en des termes aussi simples avec l'alternative de PONCELET et au contraire nécessite beaucoup plus de matériel et de travail.

Après ces six chapitres, le lecteur trouvera deux annexes : la première revient sur le calcul barycentrique et propose notamment des démonstrations un peu longues, ou un peu techniques, qui nous auraient donné un faux rythme dans le cours du texte. La seconde annexe aurait pu au contraire faire office de préliminaires, mais nous avons estimé qu'elle intéresserait plutôt le lecteur désireux de donner un tour axiomatique aux procédés de complétion projective que l'on n'aura pas manqué de rencontrer par endroit dans cet ouvrage.

À de rares exceptions près, les résultats énoncés dans cet ouvrage seront démontrés[25] : en effet, une démonstration n'a pas que l'utilité de graver un théorème dans le marbre ; elle peut aussi être intéressante en soi

---

de conditions, *cinq*, sur ces coniques : ces conditions ne sont donc pas équivalentes à des systèmes linéaires puisque l'on sait très bien qu'un système linéaire peut avoir zéro ou une solution, ou une infinité de solutions, mais jamais deux ou quatre.

C'est toutefois bien la notion de *dimension* qui sous-tend toutes ces remarques : les équations des coniques forment un espace projectif de dimension 5, et il ne faut pas s'étonner de devoir imposer cinq conditions algébriques pour obtenir une partie finie de celui-ci.

[24]Par exemple, la construction d'un cercle passant par deux points donnés et tangent à une droite donnée est un problème à la fois ponctuel et tangentiel. On le résout commodément grâce aux *faisceaux de cercles*, et cette question nous donnera l'occasion d'évoquer dans son contexte l'*involution de Désargues*.

[25]Souvent même de plusieurs façons ! Chaque fois que cela présentera de l'intérêt, nous veillerons à proposer une preuve analytique et une preuve synthétique, c'est-à-dire sans

simplement parce qu'elle est belle, ou instructive, ou encore parce qu'elle illustre un principe général. Ainsi, nous espérons *en particulier* être utile aux candidats aux concours de recrutement en leur proposant des illustrations géométriques de principes ou de techniques algébriques.

Nous ne pouvions pas à la fois constater l'appauvrissement du contenu géométrique des programmes scolaires et universitaires et exiger de nos lecteurs des prérequis exorbitants. Essentiellement, nous ne supposerons connues que la classification affine des coniques ainsi que les propriétés immédiates de celles-ci. Nous supposerons connues également l'existence et la construction des points les plus classiques attachés à un triangle : l'isobarycentre, le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et les centres des cercles (ex)inscrits[26].

Rached MNEIMNÉ a joué un rôle tout particulier dans l'élaboration de ce livre : en effet, il nous a encouragé à l'entreprendre, nous a suggéré de développer davantage certains points qui auraient pu sembler ardus à un étudiant d'aujourd'hui, et a enrichi le contenu par des exercices d'application. Nous l'en remercions chaudement !

On ne soulignera par ailleurs jamais assez l'amour du beau livre qui animait les typographes de naguère. Notre livre est passé entre les mains expertes d'Alberto ARABIA, qui s'est toujours effacé derrière les très nombreuses contributions qui ont tant embelli nombre d'ouvrages récents de mathématiques. Ce n'est pas sans quelque insistance que nous lui avons arraché cet hommage volontairement appuyé. Qu'il en soit pour tout chaudement remercié, et à travers lui également les éditions CALVAGE ET MOUNET qui ont à cœur de perpétuer la tradition typographique de qualité.

Nous remercions vivement également tous ceux qui, par leurs conseils, leurs remarques ou la détection d'inévitables fautes de frappe, auront apporté leur contribution au résultat final.

Espérant n'avoir oublié personne, nous témoignons toute notre gratitude à Saab ABOU-JAOUDÉ, René CORI, Aurore EIDEN, Bernadette EIDEN, Pascal GUELFI, Bruno INGRAO, encore une fois Rached MNEIMNÉ, Arnaud MORTIER, François RIDEAU, Dominique ROUX, Eric VAN DER OORD.

Je ne voudrais pas clore cet avant-propos sans évoquer les professeurs de Mathématiques, tous épris de leur matière, et qui ont toujours eu à cœur d'en faire partager la beauté. Parmi eux, Maurice SCHIRTZINGER, trop tôt en allé, ainsi que le Père Michel ROUGÉ, qui avaient su prendre le tournant de la rigueur mathématique sans renier leur profonde culture géométrique.

---

calculs. Les démonstrations purement géométriques sont longtemps apparues comme plus *nobles*, mais l'efficacité des méthodes algébriques n'est plus à démontrer.

[26] Que l'on qualifie aussi de cercles *tritangents au triangle*, lorsqu'il n'est pas nécessaire de faire jouer un rôle particulier au cercle inscrit par rapport aux cercles exinscrits.

Présentation

Nous donnons dans ces pages d'introduction les thèmes qui font l'ossature de l'ouvrage, ainsi que le bestiaire que l'on va y côtoyer.

Quelques principes d'Algèbre

Vecteurs propres et points fixes ..... I-7.2, p. 27
Valeurs propres et théorème de FEUERBACH ..... IV-2.2, p. 191
Le Nullstellensatz ..... II-2.3, p. 55
Coniques et théorème de BEZOUT ..... A-4.2, p. 415
Densité algébrique ..... II-3.2, p. 94
Autopolarité et diagonalisabilité ..... IV-2.1, p. 188
Théorie de GALOIS et configurations ..... V-4.3, p. 230
Le birapport ..... V-9.5, p. 269
Birapport et permutations ..... V-9.5.2, p. 271
Birapport, orbites et corps finis ..... V-9.5.2, p. 276
La formule des six birapports ..... V-9.5.9, p. 295
Harmonie, formes quadratiques et trace ..... V-9.5.7, p. 288
Lien entre $GL_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Sim}(3,1)$ ..... VI-1.5, p. 324
La signature
Signature et dégénérescence d'une conique ..... II-2.2, p. 54
Signature et cercles-points ..... II-2.13, p. 85
Signature et sextangles harmoniques ..... V-9.5.7, p. 293
Signature et orhogonalité de cercles ..... VI-1.4, p. 318
Signature et faisceaux de cercles ..... VI-3.2, p. 345
Signature et réseaux de cercles ..... VI-6.4, p. 401
Signature et théorème de WITT ..... VI-3.4.1, p. 362

Les grands théorèmes

Le théorème de FEUERBACH ..... IV-2.2, p. 191
Le théorème de PASCAL pour le cercle ..... V-6, p. 242
Le théorème de PASCAL barycentrique ..... II-3.1, p. 89
Théorème de PASCAL et Géométrie algébrique ..... A-4.3, p. 417
Le théorème de BRIANCHON ..... A-5.4.2, p. 428
Le théorème de CARNOT ..... II-4.1, p. 96
Le théorème de PTOLÉMÉE ..... V-7.2, p. 246

Les monstres sacrés

Points liés à un triangle, et autres vedettes

Coordonnées barycentriques des points O, G, Ω, H ..... I-10, p. 39
Coordonnées barycentriques des points I, I_A, I_B, I_C ..... I-10, p. 39
Coordonnées barycentriques des points cycliques ..... IV-3.2, p. 205
Affixes des points O, G, Ω, H ..... V-3.2, p. 224
Les points de LUCAS ..... III-6, p. 146
Le point de LEMOINE ..... I-3.3, p. 13
Les centres isodynamiques ..... V-8.2, p. 248
Le point de FERMAT ..... V-8.4, p. 250
Le point de NAPOLÉON ..... V-8.4, p. 254
Le point de GERGONNE ..... A-5.4.5, p. 432

Lieux et ensembles définis géométriquement

Cinq points définissent une conique ..... II-2.2, p. 52
L'axe radical de deux cercles, version algébrique ..... II-2.13, p. 80
L'axe radical de deux cercles, version géométrique ..... VI-2.3, p. 337
Équation barycentrique du cercle circonscrit ..... II-2.10, p. 78
Le cercle d'EULER ..... I-7.5.1, p. 30
L'axe d'EULER ..... I-7.5.1, p. 30
Équation barycentrique du cercle d'EULER ..... I-7.5.2, p. 32
Équation complexe du cercle d'EULER ..... V-4.4, p. 232
L'axe radical des cercles circonscrit et d'EULER ..... IV-3.3, p. 209
La droite de STEINER ..... V-4.4, p. 232
L'ellipse circonscrite de STEINER ..... III-1.2, p. 123
L'ellipse inscrite de STEINER ..... IV-1.1.2, p. 170
L'axe orthique ..... III-4.1, p. 134

L'hyperbole de KIEPERT ..... V-8.4, p. 254
Arcs capables et cercles d'APOLLONIUS ..... V-9.4, p. 267
Équations tangentielles et lieux orthoptiques ..... A-5.4.6, p. 433

Les transformations remarquables
L'inversion, analytique ou géométrique ..... V-7.1, p. 245
L'inversion (ou homologie) harmonique ..... I-9, p. 34
L'isogonalité ..... III-5, p. 141
Comment elle agit sur les foyers ..... III-5.3, p. 144
L'isotomie ..... III-1, p. 121
La dualité, ou polarisation, « formelle » ..... III-4.2, p. 139
Le point de FRÉGIER ..... IV-1.4, p. 180
Les involutions de FRÉGIER d'un cercle ..... V-5.4, p. 239
Application au théorème de PASCAL ..... V-6, p. 242

Les courbes remarquables
Les hyperboles équilatères ..... III-8, p. 152
Hyperboles équilatères et isogonalité ..... III-7.2, p. 150
Hyperboles équilatères et théorème de PASCAL ..... III-8.2, p. 157
Hyperboles équilatères dans un faisceau tangentiel .... A-7, p. 445
À la gloire des cercles du plan euclidien ..... VI, p. 311

Les familles de coniques
Les faisceaux linéaires de coniques ..... IV-1, p. 165
La conique des « neuf » points ..... IV-1.1.2, p. 167
Les faisceaux tangentiels de coniques ..... A-5.5, p. 436
Foyers des coniques d'un faisceau tangentiel ..... IV-3.4, p. 209
Les faisceaux (linéaires) de cercles ..... VI-3, p. 339
Quelques constructions relatives aux faisceaux ..... VI-3.3, p. 350
L'involution de DÉSARGUES ..... VI-3.3.3, p. 357
Les faisceaux concourants ..... VI-5, p. 385
Les réseaux de cercles ..... VI-3.4.2, p. 364

Les configurations remarquables
La droite de SIMSON et l'H_3 de STEINER ..... II-4.2.3, p. 102
Droites de SIMSON passant par un point ..... II-4.2.4, p. 109
Une belle figure ..... IV-1.5, p. 182
Une riche cubique ..... IV-3.4, p. 209

Les trois faisceaux d'APOLLONIUS ..... VI-5.2, p. 385
Hyperboles équilatères dans un faisceau tangentiel ..... A-7, p. 445
L'astuce de MORLEY ..... V-4.2, p. 228
La configuration de FERMAT-TORRICELLI ..... V-8.4, p. 250
L'orthologie ..... V-8.5.2, p. 258
Les quadrangles harmoniques ..... V-9.5.6, p. 282
Les quadrangles équiharmoniques ..... V-9.5.8, p. 294
L'alternative de STEINER ..... VI-4, p. 367
Les faisceaux concourants ..... VI-5, p. 385
La circonscription harmonique ..... A-7.3.3, p. 457

Constructions géométriques

Paraboles passant par quatre points ..... III-3.1, p. 130
Quatrième point d'intersection de deux coniques ..... III-3.3, p. 133
Tangentes menées d'un point à une conique ..... III-3.2, p. 132
Droites de SIMSON passant par un point ..... II-4.2.4, p. 109
Les faisceaux de cercles
Cercle d'un faisceau passant par un point ..... VI-3.3.1, p. 350
Cercle d'un faisceau ayant un centre donné ..... VI-3.3.2, p. 352
Cercles d'un faisceau tangents à une droite donnée ..... VI-3.3.3, p. 353

Chapitre I

Le calcul barycentrique

1. Rappels et conventions

Nous supposons connues un minimum de notions d'Algèbre linéaire (nous ne verrons apparaître que des espaces vectoriels de petite dimension, finie en tout cas), d'Algèbre bilinéaire (notamment le vocabulaire et les techniques de base concernant formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques), et enfin de Géométrie, aussi bien affine qu'euclidienne, et, pourquoi pas, projective. Toutefois, le lecteur qui voue à la Géométrie affine un amour exclusif pourra sans inconvénient passer les quelques extensions ressortissant à l'aspect projectif des choses.

Nous chercherons d'ailleurs à sensibiliser progressivement le lecteur aux notions projectives, un peu comme le lycéen des années soixante s'habituait au maniement des points à l'infini au moyen des cas d'exception des théorèmes qu'on lui présentait : le concours à l'infini de deux droites parallèles, ou le conjugué harmonique du milieu d'un segment par rapport aux extrémités du segment. Quoiqu'une axiomatisation ne soit jamais nocive, ces notions s'imposaient de façon naturelle et concouraient à l'acquisition de la vision géométrique. Nous n'avons pas voulu esquiver cette nécessaire axiomatisation : on la trouvera dans l'Annexe **B**.

Nous supposons connues également les relations métriques les plus courantes dans le triangle.

Enfin, un peu d'Algèbre linéaire de première année ne sera pas superflu. Au fil des chapitres à venir, nous serons même (agréablement ?) surpris des contributions des formes bilinéaires ou quadratiques et constaterons que la notion de *signature* ne sert pas qu'à classifier les coniques par leur genre.

Le choix des notations est toujours délicat en Mathématiques : malgré la variété des polices de caractères, et le recours à l'alphabet grec, on a tôt

fait de se retrouver à court de munitions à moins de céder à la tentation des lettres grasses ou gothiques, au grand dam du lecteur qui souhaiterait effectuer des calculs sur une feuille. Que l'on se rassure, ces affres lui seront épargnées.

Dans tout ce chapitre, lorsque nous envisagerons un triangle ABC d'un plan affine euclidien, nous désignerons selon l'usage par a, b et c les mesures des longueurs des côtés BC, CA et AB, et par $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ des mesures en radians des angles aux sommets A, B et C respectivement [1].

Toutefois, nous pourrons difficilement réserver les noms a, b et c à ce seul usage, et nous aurons aussi à les utiliser comme coefficients dans diverses équations et, encore plus souvent, pour désigner les affixes des sommets d'un triangle ABC. De même, la lettre P pourra servir à désigner un point, un plan, ou une parabole, la lettre R un (autre) point, ou un rayon !

En revanche, il sera toujours commode, si un triangle ABC (non aplati) est fixé dans un plan affine, et si un point M est donné dans ce plan, de désigner par M_A l'intersection de la droite AM et de la droite BC. Cette définition a toujours un sens, sauf lorsque M appartient à la parallèle à BC menée de A. Les points M_B et M_C sont définis de manière analogue.

Par exemple, puisque les médianes du triangle ABC concourent au point G, *isobarycentre*, ou *centre de gravité* du triangle, le point G_A n'est autre que le milieu du segment BC : on voit donc que cette convention permet de lui attribuer un nom « automatique ». Pour la même raison, dans le plan affine euclidien, à partir de l'orthocentre H du triangle ABC on pourra désigner par H_A le pied de la hauteur issue de A, c'est-à-dire le projeté orthogonal de A sur BC [2].

Il y a une notation traditionnelle qui nous obligera à faire une autre entorse à la règle générale édictée *supra* : si ABC est un triangle d'un plan affine euclidien, on désigne par I le centre du cercle inscrit, point de concours des bissectrices intérieures ; toutefois, I_A ne désigne pas traditionnellement le point d'intersection de AI et de BC, mais le centre du cercle exinscrit « dans l'angle $\widehat{A}$ », c'est-à-dire le point de concours de la bissectrice intérieure issue

[1] Précisons cette notion d'*angle* d'un triangle : sauf convention contraire, lorsque nous partirons d'un triangle de référence ABC d'un plan affine euclidien, nous supposerons que ce plan est orienté de telle sorte que le repère affine $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ soit *direct*. Les mesures des angles (orientés, de demi-droites) $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ ont alors chacune un représentant dans l'intervalle ouvert $]\,0\,,\pi\,[$, que l'on peut appeler la *mesure principale* de ces angles, mais que nous appellerons pour simplifier *angles aux sommets*.

[2] Au prix d'une petite entorse au règlement : nous appellerons ce point H_A même lorsque H appartient à la parallèle à BC menée de A, ce qui se produit si, et seulement si, le triangle est rectangle en A. Dans ce cas, $H = A$ et les points A, H et H_A sont malgré tout alignés.

de A et des bissectrices extérieures issues de B et de C. Il en va de même pour les points I_B et I_C, définis de façon analogue.

Qu'entend-on par le *côté* d'un triangle ? Si on parle du milieu du côté BC, ce sera bien sûr le milieu du **segment** BC. Si on parle de l'intersection d'une droite Δ avec le côté BC, il s'agira cette fois de la **droite** BC. En général, les formulations à venir ne seront pas ambiguës, mais, par précaution, nous évoquerons souvent les *droites portant les côtés du triangle* ABC pour faire allusion aux droites BC, CA et AB.

Les conditions d'alignement de trois points, de concours ou de parallélisme de trois droites sont en général présentées comme des exercices dans les manuels pour lesquels le calcul barycentrique n'est pas une fin en soi. Nous en aurons besoin, bien entendu, mais ne pourrons en rester là : il est nécessaire aussi de disposer des mêmes outils que dans la manipulation « classique » des coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire essentiellement l'utilisation de formules matricielles à propos d'applications affines, ou de changement de triangle de référence. Nous le verrons, cela conduit à des formulations tout à fait analogues, dans lesquelles le calcul barycentrique se montre lui aussi efficace.

C'est après nous être familiarisés avec cet outil que nous pourrons en apprécier la puissance et la généralité.

2. Généralités

2.1. Notion de coordonnées barycentriques

Ce chapitre ayant le **plan** affine pour cadre[3], nous nous limiterons à des coordonnées barycentriques relatives à un système de *trois* points non alignés, les généralisations à un espace de dimension finie quelconque étant aisées.

Soit donc un triplet de points non alignés donnés (A, B, C) d'un plan affine Π, que nous appellerons *triangle de référence* ou *triangle fondamental*[4] ; si M est un point de ce plan, il existe alors un triplet (x, y, z) de réels[5] tel que $x + y + z \neq 0$ et que M soit le barycentre du système massique $(A, x), (B, y), (C, z)$.

[3] Quoique nous soyons assez souvent amenés à la supposer euclidien. En revanche, la valeur de la dimension ne sera pas remise en cause.

[4] À noter que l'*ordre* des trois points est important, même si le terme de *triangle* peut laisser planer le doute à ce sujet.

[5] Nous avons fait le choix de désigner ce triplet par un vecteur-ligne, et non par une colonne, de peur que la moindre phrase ne crée inutilement des interlignes démesurés. Cela ne nous empêchera pas d'utiliser, comme c'est l'usage, la notation des triplets sous forme de vecteurs-colonnes dans les formules matricielles.

On a alors $x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{BM} + z\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$ et, pour tout point O du plan, $x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = (x + y + z)\overrightarrow{OM}$. Cette toute dernière formule est vraie pour *tout* point O du plan dès qu'elle est vérifiée pour *au moins* un tel point. Cela résulte d'une vérification immédiate.

Bien que le triplet (x, y, z) ne soit défini qu'à un scalaire multiplicatif non nul près, on l'appellera le (triplet de) *coordonnées barycentriques* de M (relativement au triangle de référence, s'il y a ambiguïté). Il sera souvent commode de considérer le cas où x, y et z sont tels que $x+y+z = 1$, quitte à diviser ces trois réels par leur somme : on parlera alors de *coordonnées barycentriques normalisées* du point M. *Pour un point donné, le triplet de coordonnées barycentriques normalisées est unique.*

2.2. Lien avec les coordonnées cartésiennes

Si (A, B, C) est une base affine du plan, c'est-à-dire un triplet formé de trois points non alignés, alors, pour tout point M du plan, il existe un unique couple (u, v) de réels tel que

$$\overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}.$$

Ce couple est appelé le couple de *coordonnées cartésiennes* ou de *coordonnées affines* du point M, ou plus simplement « les » coordonnées cartésiennes (ou affines).

Il est utile de savoir passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées barycentriques, et *vice-versa*.

Pour commencer, si $\overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$, alors

$$\overrightarrow{AM} = (1 - u - v)\overrightarrow{AA} + u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC},$$

de sorte que le triplet de coordonnées barycentriques normalisées de M est $(1 - u - v, u, v)$.

Réciproquement, si (x, y, z) sont des coordonnées barycentriques de M, alors on a

$$\overrightarrow{AM} = \underbrace{\frac{y}{x+y+z}}_{u}\overrightarrow{AB} + \underbrace{\frac{z}{x+y+z}}_{v}\overrightarrow{AC}$$

(les scalaires u et v obtenus dans cette dernière formule sont donc les coordonnées affines de M relatives au repère affine $\mathscr{R} = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, via la décomposition de $\overrightarrow{AM}$ sur la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan vectoriel Π_0 associé à notre plan affine[6]).

[6] Voir si nécessaire l'Annexe B pour une définition de l'espace vectoriel *associé* à un espace affine.

Pour ne pas compliquer les énoncés dans l'exposé qui suit, nous supposerons souvent que les points A, B et C sont déjà donnés, et les coordonnées barycentriques d'un point M feront référence à *ce* système, que nous noterons pour simplifier ABC, la notation habituelle pour un triangle. En particulier, l'ordre des points est spécifié, et nous ne considérerons pas les « triangles » ABC et ACB comme identiques[7].

Remarque. Bien que les coordonnées barycentriques soient d'essence *affine*, nous avons déjà signalé, et nous aurons l'occasion de le constater assez souvent, que le calcul barycentrique se révèle efficace également dans un cadre *euclidien*.

Si le plan Π est euclidien, la donnée d'un triangle de référence ABC conserve en soi toute l'information de la métrique euclidienne. Rappelons-nous par exemple que

$$\left(u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}\,\middle|\,u'\overrightarrow{AB}+v'\overrightarrow{AC}\right)= uu'\|\overrightarrow{AB}\|^2+(uv'+vu')\left(\overrightarrow{AB}\,\middle|\,\overrightarrow{AC}\right)+vv'\|\overrightarrow{AC}\|^2.$$

Comme $\|\overrightarrow{AB}\|^2=c^2$, $\|\overrightarrow{AC}\|^2=b^2$ et $\left(\overrightarrow{AB}\,\middle|\,\overrightarrow{AC}\right)=bc\cos\widehat{A}$, cette expression prend la forme plus simple

$$\left(u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}\,\middle|\,u'\overrightarrow{AB}+v'\overrightarrow{AC}\right)=c^2uu'+bc\cos\widehat{A}\,(uv'+vu')+b^2vv'.$$

2.3. Interprétation de l'égalité $x+y+z=0$

Si les points du plan affine rapporté à un triangle de référence ABC se repèrent par des coordonnées barycentriques (x,y,z) vérifiant $x+y+z\neq 0$, nous allons décrire les vecteurs *du plan vectoriel dirigeant cet espace affine à l'aide de la condition opposée $x+y+z=0$.*

Il est en effet à noter que, si on a un triplet non nul (x,y,z) de réels tel que $x+y+z=0$, alors le vecteur $\vec{v}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}$ est *indépendant* du point M du plan. En effet, pour tout point M', on a $x\overrightarrow{M'A}+y\overrightarrow{M'B}+z\overrightarrow{M'C}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}+\underbrace{(x+y+z)}_{=0}\overrightarrow{MM'}$.

Réciproquement, si on a décomposé un vecteur $\vec{v}$ sous la forme $\vec{v}=y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}$, on pourra écrire aussi $\vec{v}=x\overrightarrow{AA}+y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}$, avec $x=-y-z$ et donc aussi $\vec{v}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}$ pour tout point M.

Ainsi, l'application qui à un vecteur $\vec{v}$ associe le triplet (x,y,z) vérifiant $\vec{v}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}$ pour tout point M **et** $x+y+z=0$ est bijective.

[7] Pour être tout à fait rigoureux, nous convenons que la donnée d'un *triangle de référence*, ou *triangle fondamental*, est celle du repère affine $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

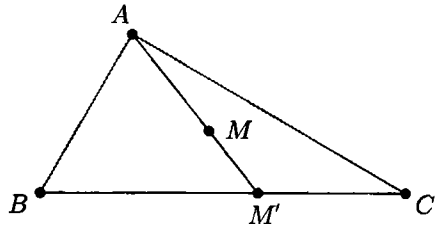
On pourra appeler ce triplet le *triplet de composantes barycentriques* du vecteur $\overrightarrow{v}$ par rapport au triangle ABC.

Il est commode de considérer qu'un vecteur $\overrightarrow{v} \neq 0$ définit une direction de droites du plan, c'est-à-dire de le considérer comme un point à l'infini du complété projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ du plan. En effet, deux droites dirigées par $\overrightarrow{v}$ sont alors parallèles et « se coupent à l'infini ». On appellera coordonnées barycentriques d'un point à l'infini n'importe quel triplet de composantes barycentriques d'un vecteur non nul définissant la direction de droites correspondante.

Toutefois, il faut bien noter plusieurs choses : le triplet de composantes barycentriques (x, y, z) d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ est unique (et on ne pourra donc lui appliquer la convention de normalisation, ce d'autant plus que la somme des composantes barycentriques est nulle !) En revanche, un point à l'infini est déterminé par une direction de droites et donc par une famille de vecteurs non nuls et colinéaires : les coordonnées barycentriques d'un point à l'infini restent définies seulement à un facteur multiplicatif non nul près, et on ne peut pas non plus les normaliser.

On trouvera quelques compléments sur les vecteurs à l'Annexe **A**. *En outre, dans l'Annexe* **B** *en général, et au* **B-4.1** *en particulier, une approche plus rigoureuse de cet aspect sera abordée.*

Exercice pratique. On donne un triangle de référence ABC, et le point M de coordonnées barycentriques (x, y, z) avec $x + y + z \neq 0$ et $y + z \neq 0$. Quelles sont les masses α et β que l'on doit affecter à A et M respectivement pour que le point M' de coordonnées barycentriques $(0, y, z)$ soit le barycentre du système $\big((A, \alpha); (M, \beta)\big)$ [8] ?



Partant de

$$(x+y+z)\overrightarrow{MM'} = x\overrightarrow{AM'} + \underbrace{y\overrightarrow{BM'} + z\overrightarrow{CM'}}_{=\overrightarrow{0}} = x\overrightarrow{AM'}$$

et des formules $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$, on a tout de suite

$$(y+z)\overrightarrow{AM'} = -x\overrightarrow{AA} + (x+y+z)\overrightarrow{AM},$$

d'où suit que M' est le barycentre de $\big((A, -x); (M, x+y+z)\big)$.

[8] Notons que les hypothèses $x + y + z \neq 0$ et $y + z \neq 0$ garantissent que les points M et M' ont bien un sens. D'ailleurs, la condition $y + z \neq 0$ équivaut précisément au fait que la droite AM coupe BC.

On peut aussi partir de $\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{y+z}\left(y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}\right)$, sachant que l'on veut que $\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{AA} + \beta\overrightarrow{AM}\right)$.

Cela étant, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{x+y+z}\left(y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}\right)$ et il suffit donc de faire en sorte que $\frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{x+y+z}{y+z}$, c'est-à-dire par exemple $\beta = \frac{x+y+z}{y+z}$ et $\alpha = -\frac{x}{y+z}$ ou, mieux, $\alpha = -x$ et $\beta = x+y+z$.

On peut d'ailleurs remarquer que M' est sur le côté BC puisque c'est le barycentre de $\big((B,y);(C,z)\big)$, en effet le poids de A est nul, et que M' est aussi sur la droite AM puisque c'est le barycentre de $\big((A,\alpha);(M,\beta)\big)$. Ainsi, c'est le point d'intersection de ces deux droites ; à ce titre, nous disposons aussi pour lui de la notation automatique $M' = M_A$.

La résolution de cet exercice peut sembler laborieuse. Heureusement, nous disposerons bientôt de moyens moins rustiques pour déterminer les coordonnées barycentriques du point d'intersection de deux droites.

3. Interprétation géométrique des coordonnées barycentriques

3.1. Aires et coordonnées barycentriques

*Il est bien entendu que l'on pourrait définir la notion d'*aire *d'un triangle dans un cadre affine, de telle sorte qu'une application affine inversible respecte le rapport des aires de deux triangles non aplatis. Toutefois, les applications utilisant la notion d'aire interviendront toutes dans un cadre* euclidien *et nous nous dispenserons donc de ce raffinement, surtout si Daniel* PERRIN *n'écoute pas*[9]*. Il en sera de même, dans cette même section, à propos de la notion de* longueur orientée.

Supposons notre plan affine $\mathscr{P}$ euclidien et orienté. Désignons par $[v,w]$ le produit mixte[10] des deux vecteurs v et w du plan vectoriel attaché à $\mathscr{P}$. Nous savons que l'aire (orientée) d'un triangle MNP (même aplati) est

[9] L'allusion est volontaire. L'intéressé comprendra le clin d'œil.

[10] Rappelons qu'il s'agit de la fonction *déterminant* relativement à une base orthonormée directe du plan vectoriel associé à $\mathscr{P}$.

égale à $\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right]$ [11].

En d'autres termes, l'aire du triangle $A'B'C'$ est à compter *positivement* si ce triangle est *direct*, c'est-à-dire si une mesure (modulo 2π) de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$ est comprise entre 0 et π, et négativement dans le cas contraire.

Nous énonçons alors : *soit un triangle de référence ABC d'un plan affine euclidien orienté. Le triplet (x, y, z) des coordonnées barycentriques d'un point M est proportionnel à celui des aires* **orientées**

$$\big(\text{aire}(BCM), \text{aire}(CAM), \text{aire}(ABM)\big)\,.$$

Si M admet des coordonnées barycentriques (x, y, z) relativement à un triangle de référence ABC, nous avons vu que $x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{BM} + z\overrightarrow{CM} = 0$. De cela suit que

$$\left[\overrightarrow{AM}, x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{BM} + z\overrightarrow{CM}\right] = 0\,,$$

soit encore

$$y\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right] - z\left[\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AM}\right] = 0$$

ainsi que deux formules analogues obtenues par permutation des sommets du triangle. Il s'ensuit que le triplet (x, y, z) est effectivement proportionnel à celui des aires **orientées** $\big(\text{aire}(BCM), \text{aire}(CAM), \text{aire}(ABM)\big)$.

En particulier, caractérisons les points M dont les coordonnées barycentriques sont de la forme (x, y, z), avec des scalaires x, y et z *de même signe*. Pour que ce soit le cas, il faut et il suffit que les trois aires orientées précédentes soient de même signe, c'est-à-dire que M appartienne à l'intersection des trois demi-plans limités par les côtés du triangle et contenant le sommet opposé, intersection que l'on appelle l'« intérieur » [12] du triangle ABC.

---

[11] En effet, on a par exemple $\text{aire}(BCM) = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}\right]$ pour tout point M, l'aire figurant dans le membre de gauche étant comptée négativement lorsque le triangle BCM est orienté dans le sens négatif. Les deux membres sont nuls lorsque M est sur la droite BC. Lorsque le plan affine n'est pas muni d'une structure euclidienne, on peut encore définir $[v, v']$ comme le déterminant du couple de vecteurs (v, v') par rapport à la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et les formules qui suivent restent valables. Toutefois, leur interprétation en terme d'*aire* n'est plus intrinsèque.

[12] On précisera l'intérieur **géométrique** si on craint la confusion avec l'intérieur au sens topologique.

On précisera de même intérieur *au sens large* ou *au sens strict* selon que l'on inclura, ou exclura, les segments BC, CA et AB.

Les aires $\mathscr{A}_A$, $\mathscr{A}_B$ et $\mathscr{A}_C$ des triangles KBC, KCA et KAB valent respectivement $ad_A/2$, $bd_B/2$ et $cd_C/2$ [13] et la somme de ces trois aires est égale à l'aire S du triangle ABC, puisque K est *intérieur* au triangle :

$$a\,d_A + b\,d_B + c\,d_C = 2S.$$

Inversement, si trois scalaires positifs d_A, d_B et d_C sont liés par cette relation, il existe un (unique) point intérieur au triangle dont les distances aux côtés soient respectivement ces scalaires : il s'agit du point de coordonnées barycentriques (ad_A, bd_B, cd_C).

En d'autres termes, nous avons à résoudre le problème $\mathscr{P}$ suivant : rendre minimal $x^2 + y^2 + z^2$, sachant que

$$x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, ax + by + cz = 2S\,.$$

Or, l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant l'équation $aX + bY + cZ = 2S$ est un plan affine, et le minimum de $x^2+y^2+z^2$ est obtenu lorsque ce triplet est la projection orthogonale de l'origine sur ce plan [14].

Du fait qu'un vecteur directeur de la normale à ce plan a pour composantes (a, b, c), on trouve par un petit calcul le triplet-solution $\dfrac{2S}{a^2+b^2+c^2}(a, b, c)$. Comme ce triplet est formé de réels $\geqslant 0$ (et même > 0), il fournit aussi la solution (unique) de $\mathscr{P}$.

En conclusion, le minimum est atteint lorsque

$$(d_A, d_B, d_C) = \frac{2S}{a^2+b^2+c^2}(a, b, c)\,,$$

et le point K cherché est celui qui possède les coordonnées barycentriques $(ad_A, bd_B, cd_C) = \dfrac{2S}{a^2+b^2+c^2}(a^2, b^2, c^2)$.

Un système plus simple de coordonnées barycentriques est alors (a^2, b^2, c^2). Le point K est le *point de Lemoine* du triangle ABC. Nous en entendrons parler de nouveau au **III-6.**

Nous aurons encore l'occasion d'utiliser l'interprétation des coordonnées barycentriques d'un point par les aires au **III-5.1.**

3.4. Les coordonnées trilinéaires

Nous venons en fait de déduire les coordonnées barycentriques du point K de la valeur de ses distances aux côtés du triangle. Jadis, à côté des coordonnées barycentriques, existait le système des *coordonnées trilinéaires* : étant donné un plan affine *euclidien* muni d'un triangle de référence ABC,

[13] Base × hauteur divisé par 2 !

[14] En effet, $x^2 + y^2 + z^2$ représente le carré scalaire canonique du triplet réel (x, y, z).

on définit, pour un point M du plan, le triplet (d_A, d_B, d_C) des distances *algébriques* de M aux côtés BC, CA et AB, où la distance d_A est nulle si M est sur la droite AB, et comptée positivement ou négativement selon que M est ou non dans le demi-plan de frontière BC et contenant A. On convient alors de ne définir le triplet de ces coordonnées qu'à un facteur multiplicatif non nul près. C'est par ces coordonnées que nous sommes passés pour notre étude du point de LEMOINE.

Les coordonnées trilinéaires (x', y', z') sont liées aux coordonnées barycentriques (x, y, z) par la relation entrevue *supra*, c'est-à-dire (à un scalaire multiplicatif non nul près)

$$x = ax', \qquad y = by', \qquad z = cz'.$$

Intérieur au triangle et équidistant des trois côtés, le centre I du cercle inscrit a donc des coordonnées trilinéaires proportionnelles à $(1, 1, 1)$, ce que confirme la formule ci-dessus.

Les coordonnées barycentriques ont eu *in fine* raison de ce redoutable concurrent, sans doute grâce à leur portée affine, donc plus universelle.

4. Les équations barycentriques

Les équations barycentriques sont l'équivalent des équations cartésiennes. Nous nous intéresserons d'abord ici à celles des droites, avant de nous attaquer plus loin aux coniques.

4.1. Notion d'équation barycentrique

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ est *homogène* s'il existe un entier naturel n tel que, dans $\mathbb{R}[X, Y, Z, T]$, on ait l'égalité

$$P(TX, TY, TZ) = T^n P(X, Y, Z).$$

Si, en outre, ce polynôme est non nul, l'entier n est alors unique et s'appelle le *degré d'homogénéité* de P. L'intérêt de cette notion est que, avec ces notations, si $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$, on a $P(tx, ty, tz) = 0 \iff P(x, y, z) = 0$. On en conclut que l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M de coordonnées barycentriques (x, y, z) vérifiant $P(x, y, z) = 0$ est bien défini, puisque la nullité de $P(x, y, z)$ ne dépend pas du choix d'un triplet de coordonnées barycentriques parmi tous les triplets possibles. Nous dirons que $\mathscr{E}$ admet $P(X, Y, Z) = 0$ pour *équation barycentrique*.

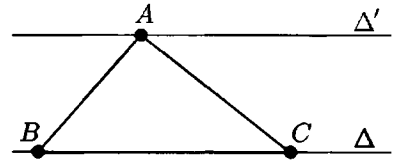
Il est important de savoir passer des équations *cartésiennes* aux équations *barycentriques*, et *vice-versa*. Si un ensemble $\mathscr{E}$ admet une équation cartésienne $f(U, V) = 0$, les formules du **I-2** montrent qu'une équation barycen-

trique de $\mathscr{E}$ est $f\Big(\dfrac{Y}{X+Y+Z}, \dfrac{Z}{X+Y+Z}\Big) = 0$, formule que l'on pourra améliorer ensuite en en chassant les dénominateurs.

Inversement, si $F(X,Y,Z) = 0$ est l'équation barycentrique de $\mathscr{E}$, alors une équation cartésienne en est $F(1-U-V,U,V) = 0$.

Illustrons cette dernière remarque par quelques exemples pratiques : la droite Δ d'équation cartésienne $U+V = 1$ a comme équation barycentrique $\dfrac{Y}{X+Y+Z} + \dfrac{Z}{X+Y+Z} = 1$. Nous chassons donc les dénominateurs : une équation équivalente est alors $Y+Z = X+Y+Z$, soit encore $X = 0$.

De même, la droite Δ' d'équation cartésienne $U+V = 0$ admet pour équation barycentrique $Y+Z = 0$. Du fait des équations cartésiennes, on reconnaît en la première droite la droite BC[15] et dans la seconde la parallèle à BC passant par A.



Inversement, la conique[16] d'équation barycentrique $YZ + ZX + XY = 0$ a aussi pour équation cartésienne $UV + V(1-U-V) + (1-U-V)U = 0$, soit encore $U^2 + V^2 + UV - U - V = 0$.

4.2. Équations barycentriques des droites

Soit maintenant une équation barycentrique de degré 1, de la forme $aX + bY + cZ = 0$ où a, b, c sont non tous nuls. Quel ensemble $\mathscr{E}$ représente-t-elle ? Déjà, si $a = b = c$, elle équivaut à $X+Y+Z = 0$, ce qu'aucun point à distance finie ne vérifie. *En fait, dans le complété projectif du plan affine, on a là l'équation barycentrique de la droite de l'infini.*

Excluons donc ce cas. Alors, $\mathscr{E}$ admet une équation cartésienne de la forme $a(1-U-V) + bU + cV = (b-a)U + (c-a)V + a = 0$, vu **I-4.1.** C'est bien là l'équation cartésienne d'une droite, puisque $b-a$ et $c-a$ ne sont pas tous les deux nuls.

De même, si une droite D admet une équation cartésienne de la forme $\alpha U + \beta V + \gamma = 0$, avec α et β non tous les deux nuls, on obtient pour équation barycentrique $\alpha\dfrac{Y}{X+Y+Z} + \beta\dfrac{Z}{X+Y+Z} + \gamma = 0$, soit encore

[15] C'est normal : les points de la droite BC ont des coordonnées barycentriques de la forme $(0, y, z)$.

[16] Pourquoi une conique ? Nous justifierons la nature de cette courbe au **II-2.1.** Pour l'instant, on se satisfera de la remarque que l'équation cartésienne est de degré 2. Au reste, le degré de l'équation cartésienne que l'on obtient montre bien qu'il s'agit d'une conique, d'ailleurs non vide puisqu'elle passe par les trois sommets du triangle de référence.

$\gamma X + (\alpha+\gamma)Y + (\beta+\gamma)Z = 0$. Les trois coefficients de cette équation sont non tous nuls, et plus précisément ne sont pas tous les trois égaux. Nous concluons donc par ce qui suit.

L'ensemble des droites (affines) est exactement l'ensemble des parties ayant une équation barycentrique de la forme $aX + bY + cZ = 0$ *où* a, b, c *sont non tous égaux.*

On constate ici que les rôles joués par les coefficients respectifs en X, Y et Z dans une équation barycentrique d'une droite sont symétriques, alors que cela n'est pas le cas des coefficients α, β et γ de l'équation cartésienne. La raison en est que les rôles joués par les sommets du triangle de référence sont « plus symétriques » que ceux joués par les éléments constitutifs d'un repère affine : un point, puis deux vecteurs. Cela donne aux formules barycentriques un aspect esthétique certain !

Si l'on se donne deux points distincts, M de coordonnées barycentriques (x, y, z) et M' de coordonnées barycentriques (x', y', z'), alors une équation barycentrique de la droite MM' est $pX + qY + rZ = 0$, avec par exemple

$$p = yz' - y'z, \quad q = zx' - xz', \quad r = xy' - x'y.$$

Tout se passe comme si l'on effectuait le « produit vectoriel formel » des vecteurs ${}^t(x, y, z)$ et ${}^t(x', y', z')$. Pour vérifier ce résultat, il suffit de remarquer que le triplet (p, q, r) est non nul (sinon, on aurait $M = M'$) et que $px + qy + rz = px' + qy' + rz' = 0$.

Le produit vectoriel formel trouve une application dans un domaine analogue : si une droite Δ a une équation barycentrique de la forme $pX + qY + rZ = 0$, avec p, q, r non tous les trois égaux[17], alors un vecteur directeur de Δ a pour coordonnées barycentriques le triplet ${}^tW$, où W est le produit vectoriel formel $W = U \wedge L$ des vecteurs $U = {}^t(1,1,1)$ et $L = {}^t(p, q, r)$.

En effet, si un point M de Δ a pour coordonnées barycentriques $\xi = (x, y, z)$, il suffit de vérifier que le point M' de coordonnées barycentriques $\xi + {}^tW$ est aussi sur Δ. Or, $(\xi + {}^tW) \cdot L = \xi \cdot L + {}^tW \cdot L$ et chacun de ces deux scalaires est nul[18].

En particulier, on a donc ${}^tWU = {}^tWL = 0$; cette remarque nous sera utile par la suite, notamment au **II-2.9.3.**

Cette analogie découle du rôle symétrique joué par le vecteur des coefficients (u, v, w) et le vecteur des coordonnées barycentriques (x, y, z) dans la relation « d'incidence » : $uX + vY + wZ = 0$. On n'a pas tout à fait cela avec les équations cartésiennes !

Une autre application de cette dualité entre points et droites est à découvrir au **A-5.4.2.**

[17] Nous excluons donc la droite de l'infini.

[18] En effet, $\xi \cdot L = 0$ par hypothèse, et ${}^tW \cdot L = 0$ du fait des propriétés du produit vectoriel (formel ou non).

4.3. Les équations barycentriques de degré supérieur à 2 : un avant-goût

De la même façon, on établit que les coniques du plan ont une équation barycentrique de la forme $P(X,Y,Z)=0$, où P est homogène de degré 2 : nous en verrons des cas particuliers au **II-2**. Pour un polynôme homogène de degré 3, on parlera de *cubiques*, mais nous ne ferons qu'effleurer le sujet, qui est plus que considérable.

4.4. Parallélisme de droites

Dans cette section, nous énonçons en termes de déterminants *une condition nécessaire et suffisante pour que deux droites, données par leurs équations barycentriques, soient parallèles.*

Si D est une droite d'équation barycentrique $aX+bY+cZ=0$, où les coefficients (a,b,c) ne sont pas tous égaux, les droites D' parallèles à D sont exactement celles d'équation $aX+bY+cZ+\lambda(X+Y+Z)=0$, où λ est un réel quelconque [19].

En effet, si $D'\neq D$ a pour équation barycentrique $a'X+b'Y+c'Z=0$, dire que D et D' sont parallèles revient à dire qu'elles ne se coupent pas en un point à distance finie et donc qu'il n'existe aucun triplet (x,y,z) de réels vérifiant

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \\ x+y+z\neq 0. \end{cases}$$

Cela revient à dire que les deux systèmes linéaires suivants :

$$(S)\qquad \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}$$

et

$$(S')\qquad \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ x+y+z\overset{!}{=}0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}$$

ont les mêmes ensembles de solutions. Comme le rang de (S) est 2, et que (S) implique (S'), le parallélisme équivaut à dire que la troisième ligne de (S') est combinaison linéaire des deux premières, ce qui conduit bien à la condition annoncée. La réciproque est laissée en exercice.

Dans la pratique, pour vérifier un parallélisme avec les notations *supra*, on pourra chercher un λ, mais on pourra aussi vérifier que le déterminant

[19] En d'autres termes, c'est l'équation barycentrique de la droite générique du faisceau contenant D et la droite à l'infini.

suivant est nul :

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 0 .$$

Avec ces notations, si D et D' ne sont pas parallèles, leur point d'intersection a pour coordonnées barycentriques

$$(bc' - b'c, ca' - c'a, ab' - a'b) .$$

Tout se passe comme si l'on effectuait le « produit vectoriel formel » des vecteurs ${}^t(a, b, c)$ et ${}^t(a', b', c')$. Cette remarque est à rapprocher de celle de la section **I-4.2** ; c'est une manifestation de la dualité entre la notion de point (*grosso modo*, un élément de $\mathbb{R}^3$) et de droite (*grosso modo*, un élément du dual de $\mathbb{R}^3$) et cette dualité est favorisée par la symétrie de la forme bilinéaire qui à ${}^t(x, y, z)$ et à ${}^t(p, q, r)$ associe $px + qy + rz$.

5. Alignement et concours

5.1. Condition d'alignement de trois points

Nous continuons à établir pas à pas les règles élémentaires du calcul barycentrique. À présent, nous nous intéressons aux problèmes d'alignement et, en corollaire, à l'équation barycentrique d'une droite passant par deux points (distincts) donnés.

Donnons-nous un système de référence (ABC), et trois points M_i, avec $1 \leqslant i \leqslant 3$, de coordonnées barycentriques respectives (x_i, y_i, z_i) ; alors, ces trois points sont alignés si, et seulement si, on a

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Pour la démonstration, supposons que $M_1 \neq M_2$, n'y ayant rien à démontrer dans le cas contraire.

Considérons l'ensemble D d'équation barycentrique

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 ,$$

où l'on a remplacé les coordonnées barycentriques de M_3 par celles du point courant M du plan. Il est clair que D contient M_1 et M_2. Cette équation

équivaut en outre à

$$X(y_1z_2 - y_2z_1) + Y(x_2z_1 - x_1z_2) + Z(x_1y_2 - x_2y_1) = 0\,.$$

Si nous montrons que D est une droite (affine), alors nous aurons montré que c'est la droite M_1M_2 et la preuve sera achevée. Vu le **I-4.2**, il suffit de montrer que les trois coefficients $y_1z_2 - y_2z_1$, $x_2z_1 - x_1z_2$ et $x_1y_2 - x_2y_1$ ne sont pas tous les trois égaux. Il faut envisager deux étapes :

1. Puisque $M_1 \neq M_2$, les coordonnées barycentriques de ces deux points sont non proportionnelles, de sorte que la matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

est de rang 2. Ainsi, l'un au moins des trois coefficients est non nul.

2. Sachant cela, on montre que ces trois coefficients ne sont pas tous les trois égaux. Sinon, en effet, l'équation de D équivaudrait à $X+Y+Z = 0$, ce qui est faux puisque par exemple M_1 ne vérifie pas cette équation.

Ce qu'il fallait établir. Au passage, nous avons démontré que, si on donne deux points distincts M_1 et M_2, une équation barycentrique de la droite M_1M_2 est fournie par

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0\,.$$

Comme il se doit, on vérifie sans trop de mal que le résultat énoncé ici reste vrai lorsque l'on se place dans le cadre d'un plan projectif.

Nous aurons souvent besoin de déterminer les coordonnées barycentriques du **milieu** de deux points M et M'. Si l'on en connaît les coordonnées barycentriques normalisées respectives (x, y, z) et (x', y', z'), alors le point M'' de coordonnées barycentriques normalisées $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$ ou, plus simplement, de coordonnées non normalisées $(x+x', y+y', z+z')$, est le milieu de MM'.

On vérifie en effet trivialement que l'on a bien $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM''}$.

Toutefois, si les deux points sont connus par des coordonnées barycentriques (normalisées ou non) respectives (x, y, z) et (x', y', z'), alors le milieu M'' a pour coordonnées barycentriques le triplet

$$(x' + y' + z')(x, y, z) + (x + y + z)(x', y', z')\,.$$

On le vérifie sans peine en introduisant provisoirement les coordonnées barycentriques normalisées $\dfrac{1}{x+y+z}(x, y, z)$ de M, les coordonnées barycentriques normalisées $\dfrac{1}{x'+y'+z'}(x', y', z')$ de M' et en réduisant au même

dénominateur dans l'expression

$$\frac{1}{x+y+z}(x,y,z)+\frac{1}{x'+y'+z'}(x',y',z').$$

[*Voir aussi la section qui suit.*]

5.2. Équations paramétriques de droites

5.2.1. Cas de la droite passant par deux points

Nous généralisons ici la formule donnant le milieu *d'un segment : si deux points M_1 et M_2 distincts ont pour coordonnées barycentriques normalisées respectives (x_1,y_1,z_1) et (x_2,y_2,z_2), alors un point M appartient à la droite $\mathscr{D}=M_1M_2$ si, et seulement si, il a des coordonnées barycentriques de la forme $(t_1x_1+t_2x_2,t_1y_1+t_2y_2,t_1z_1+t_2z_2)$, où les réels t_1 et t_2 vérifient $t_1+t_2\neq 0$.*

En effet, dire que $M\in\mathscr{D}$ équivaut à dire qu'il existe un couple (t_1,t_2) de réels tel que $t_1+t_2\neq 0$ et que M soit le barycentre du système massique $\big((M_1,t_1),(M_2,t_2)\big)$. Le résultat découle alors d'un calcul trivial.

L'on retrouve le cas du milieu de M_1M_2 avec $t_1=t_2\neq 0$, par exemple $t_1=t_2=\dfrac{1}{2}$.

5.2.2. Cas des droites d'un faisceau linéaire

Nous nous proposons de montrer dans cette section que, si M_1 est le point de coordonnées barycentriques (x_1,y_1,z_1), alors on obtient toutes les droites du faisceau linéaire (de droites) de base M_1, *c'est-à-dire toutes les droites passant par M_1, comme images de $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ par les applications Δ de la forme $(t,u)\longmapsto\Delta(t,u)$, où $\Delta(t,u)$ est le point de coordonnées barycentriques $(x=tx_1+u\alpha,y=ty_1+u\beta,z=tz_1+u\gamma)$ et où le triplet (variable) de réels non tous nuls (α,β,γ) vérifie $\alpha+\beta+\gamma=0$.*

Le triplet ainsi défini est bien le triplet de coordonnées barycentriques d'un point du plan puisque $tx_1+u\alpha+ty_1+u\beta+tz_1+u\gamma=t(x_1+y_1+z_1)+u\times 0$ est non nul chaque fois que $t\neq 0$.

Établissons ensuite que, si l'application Δ est de cette forme, alors $D=\Delta(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R})$ est bien une droite. Or, pour tout (t,u), le déterminant

$$\delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ \alpha & \beta & \gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

est nul, puisque la dernière ligne est combinaison linéaire des deux premières. L'ensemble D est donc *inclus* dans la droite D' d'équation bary-

centrique $\underbrace{(\gamma y_1 - \beta z_1)}_{a}X + \underbrace{(\alpha z_1 - \gamma x_1)}_{b}Y + \underbrace{(\beta x_1 - \alpha y_1)}_{c}Z = 0$ [20].

Inversement, D' est incluse dans D : si le point M de coordonnées barycentriques (x, y, z) vérifie l'équation barycentrique de D', alors le déterminant δ est nul. Puisque les deux premières lignes de δ sont non colinéaires, cela prouve que la troisième est combinaison linéaire des deux autres ; donc, (x, y, z) est de la forme $\Delta(t, u)$, avec $t \neq 0$ puisque $x + y + z \neq 0$.

Établissons enfin que toute droite D passant par M_1 admet bien une représentation de cette forme. Choisissons pour cela un point $M_2 \neq M_1$, de coordonnées barycentriques (x_2, y_2, z_2), sur D. La section **I-5.1** montre qu'une équation barycentrique de D est

$$\delta(X, Y, Z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0\,.$$

Nous pouvons bien sûr supposer normalisées les coordonnées barycentriques de M_1 et de M_2. Dans le déterminant δ, soustrayons la première ligne à la seconde, ce qui n'en change pas la valeur. On a donc encore comme équation barycentrique de D :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0\,,$$

avec $\alpha = x_2 - x_1$, $\beta = y_2 - y_1$ et $\gamma = z_2 - z_1$, réels non tous nuls pour lesquels on a bien $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Remarque 1. Lorsque le point M_1 est un des sommets du triangle de référence, par exemple le point A, il peut être tout aussi avantageux de caractériser les droites passant par A par leurs équations barycentriques : la droite $\mathscr{D}$ d'équation barycentrique $uX + vY + wZ = 0$ passe par A si, et seulement si, $u = 0$. Cela équivaut à dire qu'elle a une équation barycentrique de la forme $vY + wZ = 0$.

Remarque 2. Dans les deux formes de représentation de cette section **I-5.2**, le mot *paramétrique* s'explique par le fait que l'on n'a pas caractérisé les points appartenant à telle ou telle droite par une équation barycentrique, mais par des expressions de leurs coordonnées barycentriques dépendant de paramètres. À noter que les expressions en question dépendent *linéairement* des paramètres.

[20] Il reste toutefois à vérifier que cette équation est « admissible », c'est-à-dire que l'on n'a pas $a = b = c$. Or, si on avait $a = b = c$, alors $a(x_1 + y_1 + z_1) = ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$ montrerait que $a = b = c = 0$; ce dernier cas est aussi impossible puisque cela signifierait que les vecteurs lignes (x_1, y_1, z_1) et (α, β, γ) sont colinéaires.

5.3. Condition de concours de trois droites

Un des grands intérêts d'une figure géométrique est de mettre en évidence des alignements de points, des concours ou des parallélismes de droites. Nous venons de traduire algébriquement ces propriétés pour les points, et nous abordons maintenant le cas des droites.

Donnons-nous toujours un système de référence (ABC), et, cette fois, trois droites distinctes D_i, pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, d'équations barycentriques respectives $a_iX + b_iY + c_iZ = 0$, où, pour tout i, les coefficients a_i, b_i et c_i ne sont pas tous les trois égaux. Nous allons établir que ces trois droites sont concourantes ou parallèles si, et seulement si, la condition ci-contre est vérifiée.

$$d \overset{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour utiliser pleinement cette formule, nous distinguerons soigneusement les cas de *concours* et ceux de *parallélisme*.

Supposons dans un premier temps que les D_i concourent en le point M de coordonnées barycentriques (x, y, z). Le système linéaire S en (X, Y, Z) :

$$\begin{cases} a_1X + b_1Y + c_1Z = 0 \\ a_2X + b_2Y + c_2Z = 0 \\ a_3X + b_3Y + c_3Z = 0 \end{cases}$$

admet donc une solution non triviale, savoir (x, y, z) et, de ce fait, *n'est pas* de CRAMER. La nullité du déterminant du système donne exactement le résultat attendu.

Supposons ensuite que les D_i sont parallèles. Vu le résultat énoncé au **I-4.4**, on a des scalaires λ et μ tels que

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 + \lambda & b_1 + \lambda & c_1 + \lambda \\ a_1 + \mu & b_1 + \mu & c_1 + \mu \end{vmatrix}.$$

De cela suit immédiatement que $d = 0$.

Maintenant, supposons que $d = 0$. Alors, le système linéaire

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + c''z = 0 \end{cases}$$

admet une solution non triviale (x, y, z). Supposons-la choisie.

Si $x + y + z \neq 0$, cela signifie que le point M de coordonnées barycentriques (x, y, z) appartient aux trois droites, et donc qu'elles concourent. Si, au contraire, $x + y + z = 0$, une discussion analogue à celle faite au **I-4.4** établit le parallélisme des trois droites.

6. Cas particuliers

À ce stade, nous avons à notre disposition assez de matériel pour retrouver par le calcul des résultats tels que les théorèmes de MENELAÜS *et de* CEVA. *Pour ce faire, nous avons besoin de considérer pour commencer les équations barycentriques des droites passant par un sommet du triangle de référence ABC. Ces droites sont appelées des* céviennes. *La symétrie des rôles joués par les trois sommets nous autorise à nous limiter au cas d'une cévienne passant par A.*

Donnons-nous toujours un système de référence (ABC). Une équation barycentrique de la droite (BC) est $X = 0$: on peut le voir en remarquant que la droite d'équation $X = 0$ contient le point B, de coordonnées barycentriques $(0, 1, 0)$ et de même le point C ; c'est donc bien la droite (BC). Plus simplement, on remarque qu'un point M est sur (BC) si, et seulement si, il existe un scalaire λ tel que $\overrightarrow{AM} = (1-\lambda)\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire si, et seulement si, il a des coordonnées barycentriques de la forme $(0, 1-\lambda, \lambda)$, et on peut conclure.

Avec ces notations, on a aussi $\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{BC}$, de sorte que $\lambda = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{BC}}$: un triplet de coordonnées barycentriques de M est donc aussi $(0, -\overline{CM}, \overline{BM})$.

Une équation de la droite (AM) est donnée par

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\overline{CM} & \overline{BM} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0. \qquad (\mathscr{F})$$

Développer ce déterminant donne l'équation $Y\overline{BM} + Z\overline{CM} = 0$ pour cette droite.

De ces considérations, nous pouvons déduire des démonstrations de théorèmes classiques. Supposons donnés trois points A', B' et C' situés respectivement sur les côtés (BC), (CA) et (AB). Alors, ces trois points sont alignés si, et seulement si, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & -\overline{CA'} & \overline{BA'} \\ \overline{CB'} & 0 & -\overline{AB'} \\ -\overline{BC'} & \overline{AC'} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Un développement de ce déterminant donne l'égalité équivalente

$$\overline{CA'} \cdot \overline{AB'} \cdot \overline{BC'} = \overline{BA'} \cdot \overline{CB'} \cdot \overline{AC'}.$$

On retrouve là le théorème de MENELAÜS : la relation *supra* caractérise l'alignement de trois points situés respectivement sur les trois côtés d'un triangle.

De même, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles si, et seulement si, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{BA'} & \overline{CA'} \\ \overline{AB'} & 0 & \overline{CB'} \\ \overline{AC'} & \overline{BC'} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est une conséquence de la formule $(\mathscr{F})$, étendue au cas des côtés (CA) et (AB). Développer ce déterminant donne l'égalité équivalente

$$\overline{CA'}\cdot\overline{AB'}\cdot\overline{BC'} = -\overline{BA'}\cdot\overline{CB'}\cdot\overline{AC'}.$$

On retrouve là le théorème de CEVA : la relation *supra* caractérise le concours de trois droites passant respectivement par les trois sommets d'un triangle [21].

Exercice. Quelle est l'équation barycentrique $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$ de la parallèle à BC passant par A ?

Une première façon est de remarquer qu'une équation barycentrique de la droite BC est $X = 0$. Vu le **I-4.4**, une équation barycentrique de la parallèle cherchée est de la forme $X + \lambda(X + Y + Z) = 0$. Il reste à écrire qu'elle passe par A : cela équivaut à $\lambda = -1$, et l'équation barycentrique cherchée est donc $-Y - Z = 0$, c'est-à-dire encore $Y + Z = 0$.

Une seconde manière est de remarquer que l'on doit avoir $\alpha = 0$ afin que A vérifie cette équation barycentrique. En outre, la condition de parallélisme avec BC, dont l'équation barycentrique est $X = 0$, équivaut à

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire à $\gamma = \beta$. L'équation barycentrique est donc bien $Y + Z = 0$.

Étant donné un point $M \neq A$ de coordonnées barycentriques (x, y, z), nous aurons souvent besoin des coordonnées barycentriques du point M_A où la droite AM coupe BC. Or, l'équation barycentrique de la droite AM est

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire $zY - yZ = 0$. Comme les coordonnées barycentriques de M_A doivent être de la forme $(0, y', z')$, elles ne peuvent qu'être proportionnelles à $(0, y, z)$. Si $y + z \neq 0$, nous avons bien les coordonnées barycentriques du point M_A et, sinon, la droite AM est parallèle à BC [22] et le point M_A est à l'infini.

[21] Une droite passant par un sommet d'un triangle s'appelle une *cévienne*.

[22] C'est une conséquence de l'exercice.

7. Matrice d'une application affine

Dans cette section, nous allons établir des relations matricielles semblables à celles correspondant à un endomorphisme d'un espace vectoriel. Rien que de très normal : après avoir étudié les objets élémentaires de la Géométrie affine, nous envisageons les applications affines du plan. Nous n'en resterons pas là, puisque le paragraphe **I-9** *nous donnera un aperçu des propriétés d'une application* homographique *(ou* projective*).*

7.1. La formule matricielle

On donne ici un triangle de référence ABC ainsi que trois points, A', B' et C'. On sait alors qu'il existe une unique application affine f qui envoie respectivement A, B et C sur A', B' et C'. Introduisons les coordonnées barycentriques normalisées de A', B' et C', respectivement (a,b,c), (a',b',c') et (a'',b'',c'') et, pour un point quelconque M du plan et son image $M' = f(M)$, les coordonnées barycentriques respectives (x,y,z) et (x',y',z').

Nous allons établir que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}}_{F} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

En effet, supposons normalisées les coordonnées barycentriques (x,y,z) ; alors on a aussi

$$x' + y' + z' = (a+b+c)x + (a'+b'+c')y + (a''+b''+c'')z = 1 .$$

Établir la relation annoncée revient donc à montrer que (y',z') est le couple des coordonnées de M' dans le repère affine $\mathscr{R} = (A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Appelons g l'application affine qui à un point M associe le point M'' dont les coordonnées vérifient

$$\begin{cases} y'' = b(1-y-z) + b'y + b''z \\ z'' = c(1-y-z) + b'y + b''z . \end{cases}$$

Il nous reste à établir que $g = f$ et, pour cela, que A, B et C ont les mêmes images par f et g. Par exemple, c'est le cas pour le point A, de coordonnées $(y=0, z=0)$, car on a alors $y' = y'' = b$ et $z' = z'' = c$. La même vérification s'effectue ensuite pour B et C.

Bien sûr, l'hypothèse que les coordonnées barycentriques de M sont normalisées n'a servi que pour cette démonstration, le cas général s'en déduisant grâce à la multiplication de (x,y,z) par un scalaire idoine. Toutefois, on aura bien noté que si les coordonnées barycentriques (x,y,z) de M sont normalisées, celles de $f(M)$, savoir (x',y',z'), le sont aussi.

Si $\mathscr{R}$ est un repère affine *d'un plan affine, une application affine f associe au point M de coordonnées cartésiennes (x, y) le point de coordonnées cartésiennes (x', y'), ces coordonnées étant liées par une relation matricielle de la forme*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}}_{F_0} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} .$$

Les coordonnées (x, y) des éventuels points fixes de f sont donc obtenues par la résolution du système non homogène

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} .$$

Il est facile de voir que ce système est de CRAMER[23] *si, et seulement si, le scalaire* 1 n'est pas *valeur propre de la matrice F_0. En revanche, les vecteurs ${}^t(x, y)$ solutions de ce système n'ont rien à voir avec les vecteurs propres de cette matrice, du fait de la présence du terme ${}^t(a_3, b_3)$.*

Dans les exemples qui suivent, nous allons voir que, au contraire, une telle interprétation en termes de vecteurs propres est possible pour l'expression barycentrique que nous venons d'établir.

7.2. Vecteurs propres et points fixes

Gardons les notations de la section précédente; si on pose $U = (1, 1, 1)$, on notera que $UF = U$. Cette relation correspond à la propriété qu'a f de « laisser stable la droite à l'infini » ; en effet, du fait que $UF = U$, on a l'implication $X + Y + Z = 0 \Longrightarrow X' + Y' + Z' = 0$. En d'autres termes, si on désigne par ξ le vecteur-colonne courant de $\mathbb{R}^3$, l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $U\xi = X + Y + Z = 0$ est laissé stable par l'endomorphisme $\xi \longmapsto F\xi$ et c'est précisément ce que nous dit le fait que ${}^tU$ est vecteur propre de ${}^tF$.

Comme une matrice carrée a même polynôme caractéristique que sa transposée, nous savons donc maintenant que 1 est toujours valeur propre de F. Un point M de coordonnées barycentriques (x, y, z) est point fixe de l'application f si, et seulement si, le vecteur-colonne $\xi = {}^t(x, y, z)$ est vecteur propre de F **associé à la valeur propre** 1. En effet, cela équivaut à dire que les coordonnées barycentriques de $f(M)$ sont aussi (x, y, z).

[23] Si ce système est de CRAMER, f possède un point fixe unique. Dans le cas contraire, l'ensemble des points fixes est vide, est une droite affine, ou est le plan tout entier, cette dernière possibilité se produisant si, et seulement si, f est l'application identique.

Tout cela est la conséquence des propriétés générales de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Attention ! La matrice F peut avoir des vecteurs propres ξ associés à la valeur propre 1, mais vérifiant $U\xi = 0$; ces vecteurs ne correspondent pas aux coordonnées barycentriques de points du plan et ne fournissent donc pas de points fixes. Nous verrons des exemples de ce phénomène dans la section **I-7.4.**

Que dire des autres valeurs propres ? Si on a $F\xi = \lambda\xi$, avec $\lambda \neq 1$, alors $UF\xi = \lambda U\xi$; or, $UF = F$, et on a donc $U\xi = 0$: les composantes de ξ ne sont pas les coordonnées barycentriques d'un point du plan affine.

[*Il est naturel de se demander ce que représente une transformation* $\xi \longmapsto F\xi$ *lorsque* F *ne vérifie plus l'hypothèse* $UF = F$. *En réalité, il s'agit là d'une* transformation projective *: elle peut envoyer des points à l'infini, ou envoyer à distance finie des points à l'infini.*]

7.3. Les symétries centrales

Prenons un premier exemple d'application affine du plan : *si I est le point de coordonnées barycentriques normalisées (α, β, γ) relativement au triangle ABC, alors la matrice F correspondant à la symétrie centrale par rapport à I peut être écrite de l'une des deux manières suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 2\alpha - 1 & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & 2\beta - 1 & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & 2\gamma - 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \times (1, 1, 1) - \mathrm{Id}_3 ,$$

où Id_3 désigne la matrice-unité réelle d'ordre 3 [24]. En effet, on vérifie aisément par exemple que, si A' est le point de coordonnées barycentriques normalisées $(2\alpha - 1, 2\beta, 2\gamma)$, alors $\overrightarrow{IA'} = -\overrightarrow{IA}$.

Si un point M a pour coordonnées barycentriques normalisées (x, y, z), alors son image a pour coordonnées barycentriques normalisées $(2\alpha - x, 2\beta - y, 2\gamma - z)$: la formule n'est pas plus compliquée que la formule affine.

Le polynôme caractéristique de F est $(X - 1)(X + 1)^2$, et le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $\mathbb{R}\,{}^t(\alpha, \beta, \gamma)$; cela confirme l'existence (et l'unicité) du point fixe d'une symétrie centrale.

Nous retrouverons les symétries centrales à propos du centre d'une conique.

7.4. Les homothéties-translations

Dans cette section, nous étudions un sous-groupe important du groupe affine du plan affine P, le groupe *des homothéties-translations*. Fixons un

[24] Dans la formule *supra*, on notera que le produit d'une matrice de format 3×1 par une de format 1×3 est bien une matrice carrée de format 3×3, en cohérence avec la matrice scalaire qui lui est soustraite.

triangle de référence ABC du plan, de centre de gravité G ; pour tout scalaire $\lambda \neq 0$ et tout vecteur $\vec{a}$ donnés, nous considérons l'application $\mathscr{H}$ qui à M associe M' défini par $\overrightarrow{GM'} = \lambda\overrightarrow{GM} + \vec{a}$.

Pour $\lambda = 1$, on obtient la translation de vecteur $\vec{a}$ (et on obtient donc ainsi *toutes* les translations).

Pour $\lambda \neq 0 \neq 1$, nous obtenons une homothétie de rapport λ ; en effet, soit G' le point défini par $\mathscr{H}(G') = G'$, c'est-à-dire $\overrightarrow{GG'} \overset{(1)}{=} \lambda\overrightarrow{GG'} + \vec{a}$, c'est-à-dire encore $G' = G + \dfrac{\vec{a}}{1-\lambda}$. On a, pour tout M, la formule $\overrightarrow{GM'} \overset{(2)}{=} \lambda\overrightarrow{GM} + \vec{a}$; si nous soustrayons (1) de (2), nous obtenons $\overrightarrow{G'M'} = \lambda\overrightarrow{G'M}$ et cela établit le résultat annoncé. Encore une fois, nous obtenons de cette façon *toutes* les homothéties de rapport $\neq 1$ (si on donne le centre G' d'une homothétie, et son rapport $\lambda \neq 1$, on a pour tout M la relation $\overrightarrow{GM'} = \lambda\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GG'}$). « Les » homothéties de rapport 1 ne manquent qu'en apparence : une homothétie de rapport 1 est l'identité, et nous l'avons déjà comptée comme translation.

Le lecteur vérifiera sans peine que l'ensemble H des applications affines ainsi définies est un sous-groupe du groupe affine, c'est-à-dire que

1. Tout élément $\mathscr{H} \in H$ est une bijection affine de P sur P.
2. Si $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ sont dans H, alors $\mathscr{H}' \circ \mathscr{H} \in H$.
3. Si $\mathscr{H}$ est dans H, alors sa bijection réciproque $\mathscr{H}^{-1}$ l'est aussi.

Les matrices de ces homothéties-translations ont une expression intéressante. Soit une homothétie-translation $\mathscr{H}$; désignons par A', B' et C' les images de A, B et C, et par (α, β, γ) les coordonnées barycentriques normalisées de $G'' = \mathscr{H}(G)$. De la formule $\overrightarrow{G''A'} = \lambda\overrightarrow{GA}$ on déduit les coordonnées barycentriques normalisées de A' : $\left(\alpha + \frac{2}{3}\lambda, \beta - \frac{1}{3}\lambda, \gamma - \frac{1}{3}\lambda\right)$, et des expressions analogues pour celles de B' et C'. Une expression de la matrice F est donc

$$F = \begin{pmatrix} \alpha + \frac{2}{3}\lambda & \alpha - \frac{1}{3}\lambda & \alpha - \frac{1}{3}\lambda \\ \beta - \frac{1}{3}\lambda & \beta + \frac{2}{3}\lambda & \beta - \frac{1}{3}\lambda \\ \gamma - \frac{1}{3}\lambda & \gamma - \frac{1}{3}\lambda & \gamma + \frac{2}{3}\lambda \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de F est $\Pi(X) = (X-1)(X-\lambda)^2$. Il faut donc distinguer deux cas principaux :

- Si $\lambda \neq 1$, le sous-espace propre E_1 de F associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 puisque 1 est zéro simple de Π. Plus précisément, un petit

calcul montre qu'un vecteur directeur de E_1 est

$$\xi = {}^t(\alpha - \lambda/3, \beta - \lambda/3, \gamma - \lambda/3)\,,$$

avec $U\xi \neq 0$. Comme f est une homothétie, cela confirme l'existence et l'unicité de son point fixe. Le sous-espace propre E_λ associé à la valeur propre $\lambda \neq 1$ ne peut, lui, donner de points fixes, voir **I-7.2**.

- Si $\lambda = 1$, la valeur propre 1 est triple, et le sous-espace E_1 associé est de dimension 2, sauf lorsque $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$ où $E_1 = \mathbb{R}^3$ tout entier. Dans le premier cas, E_1 a pour équation $X + Y + Z = 0$ et il n'y a donc pas de points fixes (ce qui est prévisible, puisque f est une translation distincte de l'identité). Dans le second, f est l'identité puisque $f(G) = G$ et que $\lambda = 1$: elle laisse fixe tout point du plan.

7.5. Application : le cercle d'EULER

7.5.1. Définition du cercle d'EULER. Dans cette section, le cadre est celui d'un plan affine euclidien, dans lequel on donne un triangle $\mathscr{T} = ABC$.

Nous établissons l'existence d'un cercle, noté Γ' sur la figure, passant par les neuf points suivants : les trois milieux des côtés, les pieds des trois hauteurs, et les milieux des trois segments joignant l'orthocentre H aux sommets du triangle.

Le cercle Γ' s'appelle le *cercle d'Euler*, ou le *cercle des neuf points*, du triangle ABC ; le centre de ce cercle est noté Ω sur la figure.

Nous allons établir en outre que ce cercle se déduit du cercle circonscrit Γ par l'homothétie h de centre G, le centre de gravité du triangle, et de rapport $-1/2$, mais aussi par l'homothétie h' de centre H et de rapport $+1/2$.

En particulier, le rayon du cercle d'EULER est la moitié de celui du cercle circonscrit, et on a les relations vectorielles [25]

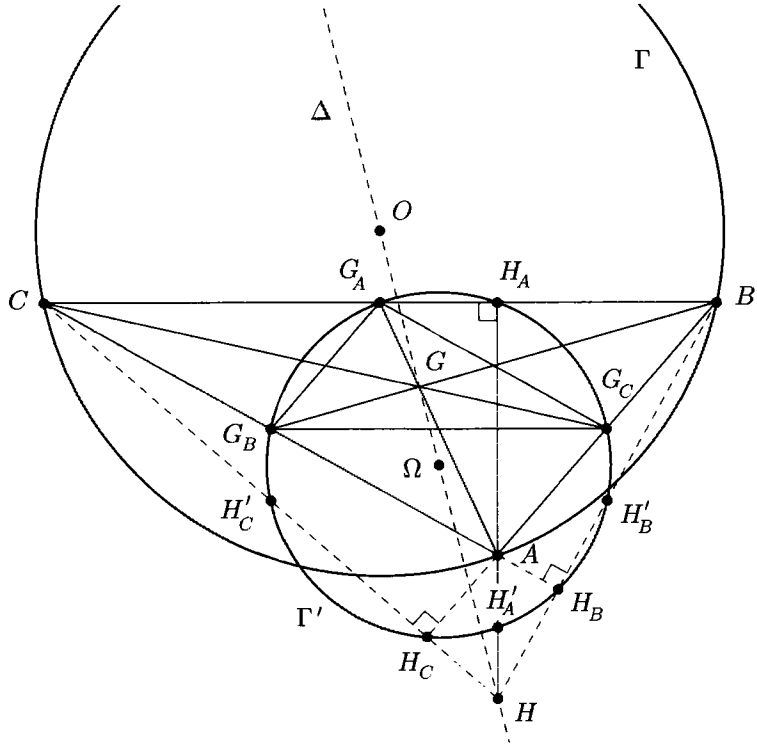
$$\overrightarrow{G\Omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}\,, \quad \overrightarrow{H\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}\,, \quad \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}\,.$$

Il est immédiat que ces points O, G, Ω, H sont tous distincts sauf si, et seulement si, le triangle $\mathscr{T}$ est équilatéral. Dans le cas contraire, les relations vectorielles précédentes montrent que ces quatre points sont alignés ; la droite Δ qui les porte s'appelle l'*axe d'Euler* du triangle $\mathscr{T}$.

Introduisons les milieux G_A, G_B, G_C des côtés du triangle : ils forment un triangle $\mathscr{T}'$; du fait des relations telles que $\overrightarrow{AG} = 2/3\overrightarrow{AG_A}$, on voit tout de suite que $\mathscr{T}'$ se déduit de $\mathscr{T}$ par l'homothétie h.

[25] Voir aussi au **V-3.2** des interprétations de ces relations par les nombres complexes.

Appelons Γ' le cercle $h(\Gamma)$: ce cercle passe par les points G_A, G_B, G_C et son centre Ω vérifie $\overrightarrow{G\Omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$. En outre, on voit que les médiatrices du triangle $\mathscr{T}$ coïncident avec les hauteurs du triangle $\mathscr{T}'$; l'orthocentre de ce dernier triangle est donc le point O, mais c'est aussi le point $h(H)$. On en déduit que $\overrightarrow{GO} = -1/2\overrightarrow{GH}$, et toutes les relations vectorielles annoncées se déduisent des deux précédentes.



Puisque, maintenant, $\overrightarrow{H\Omega} = 1/2\overrightarrow{HO}$ et que le rayon du cercle d'EULER est la moitié de celui du cercle circonscrit, on en déduit bien que $\Gamma' = h'(H)$.

Le cercle Γ' passe donc aussi par les images par h' des points A, B, C, c'est-à-dire par les points H'_A, H'_B, H'_C.

Enfin, nous établirons au **V-3.3** que les trois symétriques orthogonaux de H par rapport aux côtés du triangle $\mathscr{T}$ appartiennent au cercle circonscrit Γ. Leurs images par h' sont les pieds des hauteurs, notés H_A, H_B, H_C, et ils appartiennent donc à $\Gamma' = h'(\Gamma)$.

Cela achève la démonstration des propriétés annoncées.

*Comme application de la section précédente, supposons toujours le plan euclidien et déterminons à présent une équation barycentrique du cercle d'*EULER *du triangle ABC.*

7.5.2. L'équation barycentrique du cercle d'EULER

Nous venons d'établir que le cercle d'EULER d'un triangle est l'image du cercle circonscrit par l'homothétie h de centre G de rapport $-1/2$; il doit être désormais facile d'en déterminer une équation barycentrique, à partir d'une équation barycentrique du cercle circonscrit.

Dans la section **II-2.10**, nous établirons qu'une équation barycentrique du cercle circonscrit est $a^2YZ + b^2ZX + c^2XY = 0$, où a, b et c désignent les longueurs des côtés BC, CA et AB. Comme $h^{-1}(G) = G$[26], les formules matricielles du **I-7.4** donnent pour h^{-1}

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} .$$

Ainsi, le point M de coordonnées barycentriques (X, Y, Z) appartient au cercle d'EULER si, et seulement si, le point $M' = h^{-1}(M)$ appartient au cercle circonscrit. Cela donne comme équation barycentrique du cercle d'EULER

$$a^2(X - Y + Z)(X + Y - Z) + b^2(X + Y - Z)(-X + Y + Z) + \\ + c^2(-X + Y + Z)(X - Y + Z) = 0 .$$

Dans cette formule, on développe les produits en tenant compte des relations telles que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$. Après simplification par -2, on obtient l'équation barycentrique cherchée

$$bc\cos\widehat{A}\,X^2 + ca\cos\widehat{B}\,Y^2 + ab\cos\widehat{C}\,Z^2 - a^2YZ - b^2ZX - c^2XY = 0 .$$

8. Changement de triangle de référence

Il nous arrivera de temps en temps de devoir changer de triangle de référence[27], ne serait-ce qu'au numéro **IV-1.1** ; les formules liant les coordonnées barycentriques relatives à deux triangles sont très proches, bien sûr, des formules de changement de repère dans le cadre affine.

[26] On remarquera que, le cercle circonscrit étant connu à l'aide d'une équation, il est plus commode d'écrire que c'est lui qui est l'image du cercle d'EULER par une certaine application, c'est-à-dire ici h^{-1}, et non le contraire.

[27] Nous rappelons que, par convention, la donnée d'un *triangle de référence* ABC est celle du repère affine $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Si notre « ancien » triangle de référence est ABC (non aplati) et le nouveau $A'B'C'$ (non aplati), nous devons connaître les coordonnées barycentriques des nouveaux sommets par rapport aux anciens. Supposons-les normalisées : celles de A', B' et C' sont respectivement (a'_1, a'_2, a'_3), (b'_1, b'_2, b'_3) et (c'_1, c'_2, c'_3).

Dans ces conditions, si les coordonnées barycentriques d'un point M relativement à ABC et $A'B'C'$ sont respectivement (x, y, z) et (x', y', z'), on a la formule

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a'_3 & b'_3 & c'_3 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Cette formule est *contravariante* : par le biais de la matrice de passage P, elle exprime les « anciennes » coordonnées barycentriques en fonction des « nouvelles ».

L'hypothèse de normalisation simplifie la vérification, il nous sera toujours loisible de chasser *in fine* les incongrus dénominateurs : voir l'exemple qui suit.

Supposons aussi normalisées les coordonnées barycentriques de M par rapport aux deux triangles ; nous avons donc $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$. En outre,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= x'\overrightarrow{AA'} + y'\overrightarrow{AB'} + z'\overrightarrow{AC'} \\ &= x'(a'_2\overrightarrow{AB} + a'_3\overrightarrow{AC}) + y'(b'_2\overrightarrow{AB} + b'_3\overrightarrow{AC}) + z'(c'_2\overrightarrow{AB} + c'_3\overrightarrow{AC}) \\ &= (a'_2x' + b'_2y' + c'_2z')\overrightarrow{AB} + (a'_3x' + b'_3y' + c'_3z')\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Cela nous donne déjà les formules attendues pour y et z. Enfin,

$$\begin{aligned} x = 1 - y - z &= x' + y' + z' - y - z \\ &= (1 - a'_2 - a'_3)x' + (1 - b'_2 - b'_3)y' + (1 - c'_2 - c'_3)z' \\ &= a'_1x' + b'_1y' + c'_1z'. \end{aligned}$$

Prenons l'exemple du passage au *triangle médian*, c'est-à-dire à celui dont les sommets sont les milieux respectifs de BC, CA et AB. Les coordonnées barycentriques normalisées de $A' = G_A$ sont $(0, 1/2, 1/2)$ et celles de $B' = G_B$ et de $C' = G_C$ s'obtiennent par permutation circulaire. On a alors les formules de passage

$$x = \frac{y' + z'}{2}, \quad y = \frac{z' + x'}{2}, \quad z = \frac{x' + y'}{2}$$

et nous pourrons également supprimer les dénominateurs si la normalisation des coordonnées barycentriques n'est pas notre souci premier.

Un autre exemple de changement de triangle pourra être rencontré à propos des coordonnées barycentriques de l'orthocentre, dans la section **I-10**.

Note. Les formules de passage qui viennent d'être établies sont de la forme

$$x = \ell_1(x', y', z') \quad y = \ell_2(x', y', z') \quad z = \ell_3(x', y', z'),$$

où (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une famille libre [28] de formes linéaires. Mais ces formes linéaires sont telles que, de plus, $x + y + z = x' + y' + z'$ pour tout point M ; cela résulte en effet des conditions de normalisation imposées *supra*.

Inversement, soit un triangle de référence ABC donné et une famille libre de trois formes linéaires (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) telles que l'on ait toujours la relation (RN) suivante :

$$\ell_1(x', y', z') + \ell_2(x', y', z') + \ell_3(x', y', z') = x' + y' + z'.$$

Alors, il existe un triangle (non aplati) $A'B'C'$ tel que les formules de passage soient de la forme précédente.

En effet, formons la matrice inversible $P \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dont les lignes sont les listes des coefficients respectifs $a'_1, a'_2, \ldots, c'_3$ de nos trois formes. Soit alors les points A', B' et C' de coordonnées barycentriques respectives (a'_1, a'_2, a'_3), (b'_1, b'_2, b'_3) et (c'_1, c'_2, c'_3). Vu la relation (RN), ces coordonnées sont normalisées, et nos trois nouveaux points sont non alignés puisque P est inversible. Ils forment donc un nouveau triangle de référence, relativement auquel les formules de passages sont celles annoncées.

En revanche, si la famille libre (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) ne vérifie pas (RN), elle forme tout de même une base du dual de $\mathbb{R}^3$, car elle est libre et comporte trois éléments. Il existe donc des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que l'on ait toujours la relation de normalisation « affaiblie » (RN') suivante :

$$\lambda_1\ell_1(x', y', z') + \lambda_2\ell_2(x', y', z') + \lambda_3\ell_3(x', y', z') = x' + y' + z'.$$

Si les scalaires λ_i sont tous non nuls, on pourra se ramener au cas précédent en remplaçant ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 par $\ell'_1 = \lambda_1\ell_1$, $\ell'_2 = \lambda_2\ell_2$ et $\ell'_3 = \lambda_3\ell_3$.

Au contraire, si par exemple $\lambda_3 = 0$, alors, vu le **I-4.4**, les droites d'équations barycentriques respectives $\ell_1(X, Y, Z) = 0$ et $\ell_2(X, Y, Z) = 0$ sont parallèles ; notre point C' est rejeté à l'infini et notre manipulation est cette fois impossible.

9. Un exemple d'homographie : l'inversion harmonique

Dans ce paragraphe, nous mettons en pratique nos premiers acquis concernant les équations de droites et les questions d'alignement traduites en termes de coordonnées barycentriques. À cette occasion, nous présentons un exemple d'application non affine mais qui conserve l'alignement.

[28] En effet, la matrice P définie *supra* est inversible, puisque les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

Étant donné un triangle de référence ABC, nous étudions plus précisément l'*inversion harmonique*[29] relative à ce triangle, c'est-à-dire l'application $\mathscr{I}$ qui au point M de coordonnées barycentriques (x, y, z) associe le point M' de coordonnées barycentriques $(x, -y, -z)$[30].

La première chose à remarquer est que cette définition de M' est cohérente, puisqu'elle ne dépend pas du choix de (x, y, z) parmi tous les triplets de coordonnées barycentriques de M possibles. Il est aussi à remarquer que $\mathscr{I}$ n'est pas définie pour *tout* point M du plan affine. En effet, si M appartient à la droite D_0 d'équation barycentrique $X - Y - Z = 0$, c'est-à-dire celle qui joint les milieux G_C et G_B des côtés AB et AC respectivement, alors la somme des coordonnées barycentriques de M' est nulle. Autrement dit, l'application $\mathscr{I}$ envoie à l'infini les points de la droite D_0[31]. Loin d'être une lacune, cette propriété se révélera en fait bien utile pour certains types de constructions. Remarquons que $\mathscr{I}$ a d'ores et déjà perdu toute chance d'être une application affine ; c'est toutefois une homographie du fait de la **linéarité** de la correspondance entre coordonnées barycentriques : une telle application transforme les droites en droites ; c'est d'ailleurs cela qui inspire les constructions géométriques qui suivent.

Si on complète le plan affine en un plan projectif, $\mathscr{I}$ est une involution une fois qu'on l'a étendue au plan projectif entier. Si on se limite au domaine de définition « affine » de $\mathscr{I}$, c'est-à-dire le plan privé de D_0, alors $\mathscr{I}$ réalise également une involution de ce domaine sur lui-même. Tout cela découle des formules on ne peut plus simples définissant $\mathscr{I}$.

Comme on le voit tout de suite grâce à sa définition, $\mathscr{I}$ laisse fixes le point A ainsi que tout point de la droite BC. En outre, l'application $\mathscr{I}$ laisse stables toutes les droites passant par A : une telle droite a une équation barycentrique de la forme $pY + qZ = 0$ et son image par $\mathscr{I}$ a alors pour équation barycentrique $-pY - qZ = 0$, c'est-à-dire « la même ». Enfin, l'image d'une droite D parallèle à D_0 (mais distincte de celle-ci) est encore une droite parallèle à D_0 ; en effet D a une équation barycentrique de la forme $X + \lambda(Y + Z) = 0$, avec $\lambda \neq -1 \neq 1$ et une équation barycentrique de $\mathscr{I}(D)$ est alors $X - \lambda(Y + Z) = 0$.

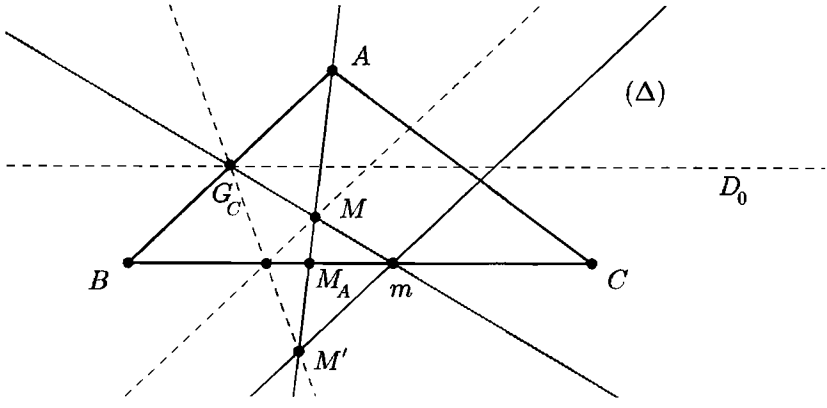
Pour pouvoir effectuer certaines constructions géométriques, nous devons

[29] On parle aussi d'*homologie harmonique*.

[30] C'est l'intervention des coordonnées barycentriques de M et de son image M' qui nous incite à parler d'inversion *par rapport à un triangle*. Voir toutefois la première des deux remarques achevant cette section.

[31] En même temps, $\mathscr{I}$ envoie dans D_0 les points à l'infini.

disposer d'une construction effective de M' à partir de M. En voici une :



Supposons que le point M n'est situé ni sur AB ni sur D_0 ; la droite $G_C M$ coupe BC en un point m et le point M' est le point d'intersection de AM avec la parallèle Δ à AB menée de m[32]. Les pointillés illustrent le caractère involutif de la construction.

Justifions cela par le calcul. Supposons que M a pour coordonnées barycentriques le triplet (x, y, z), avec $z \neq 0$ et $x - y - z \neq 0$, la droite $G_C M$ a pour équation barycentrique

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire $yZ - zY + zX - xZ = 0$. Le point m a donc pour coordonnées barycentriques $(0, y - x, z)$ (il n'est pas à l'infini). La droite Δ a pour équation barycentrique

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & y - x & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire $-zX - zY + (y - x)Z = 0$. Le point de coordonnées barycentriques $(x, -y, -z)$ appartient bien à cette droite, ainsi qu'à la droite AM, d'équation barycentrique $yZ - zY = 0$. Cela achève la vérification.

La propriété essentielle qui préside à cette construction est la ***conservation de l'alignement*** : si trois points M_1, M_2 et M_3 sont alignés, leurs images par $\mathscr{I}$ le sont aussi. Vu la condition d'alignement de trois points vue au **I-5.1**, elle découle

[32] Si $M \in AB$, la droite $G_B M$ coupe BC en un point m et le point M' est le point d'intersection de AM avec la parallèle Δ à AB menée de m.

de la relation suivante entre déterminants :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} x_1 & -y_1 & -z_1 \\ x_2 & -y_2 & -z_2 \\ x_3 & -y_3 & -z_3 \end{vmatrix}.$$

Du fait que $\mathscr{I}$ envoie G_C sur le point à l'infini C_∞ de la droite AB et que G_C, M et m sont alignés, leurs images par $\mathscr{I}$ le sont aussi, savoir C_∞, M' et m (ce dernier étant fixé par $\mathscr{I}$). Il faut donc chercher M' sur la droite mC_∞, ainsi que sur la droite AM, et c'est bien ce que nous avons fait.

Alors, pourquoi *inversion harmonique* ? *Inversion* parce cette application est une involution et *harmonique* parce que le point M' est le *conjugué harmonique* de M par rapport à la paire (A, M_A), où M_A est le point d'intersection de AM et de BC [33]. Cette propriété traduit la formule que l'on pourra vérifier grâce aux coordonnées barycentriques des différents points [34] :

$$\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'M_A}} : \frac{\overline{MA}}{\overline{MM_A}} = -1.$$

Nous verrons au gré de ce livre que, si les possibilités de construire des coniques sont légion [35], il est plus difficile d'obtenir des coniques qui soient à coup sûr des **paraboles** [36]. L'inversion harmonique va nous y aider.

Partons d'une conique $\mathscr{C}$ qui passe par A, B et C et soit tangente à la droite D_0 [37]. Son image par $\mathscr{I}$ est alors une parabole. Elle pourra par exemple être définie par les images par $\mathscr{I}$ de cinq points de $\mathscr{C}$. Intuitivement, cela résulte du fait que $\mathscr{C}$ ne coupe D_0 qu'en un point et que son image, également une conique, n'a de ce fait qu'un point à l'infini.

Anticipons les résultats des sections **II-2** et **A-5.4**. La conique $\mathscr{C}$ a une équation barycentrique de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$ du fait qu'elle passe par A, B et C, et on a la relation $(p+q+r)^2 - 4qr = 0$ parce qu'elle est tangente à D_0. Son image par $\mathscr{I}$ a pour équation barycentrique $pYZ - qZX - rXY = 0$ [38]. C'est une parabole, car, si l'on pose $p' = p$, $q' = -q$ et $r' = -r$, on a maintenant $p'^2 + q'^2 + r'^2 - 2q'r' - 2r'p' - 2p'q' = 0$.

[33] Lorsque $AM \parallel BC$, le point M_A est rejeté à l'infini. Voir dans ce cas la seconde remarque à la fin de cette section.

[34] Ou grâce aux résultats généraux du **II-2.7**. En effet, on vérifiera que M et M' sont barycentres du système (A, M_A) avec les masses respectives $(x, y+z)$ et $(x, -(y+z))$.

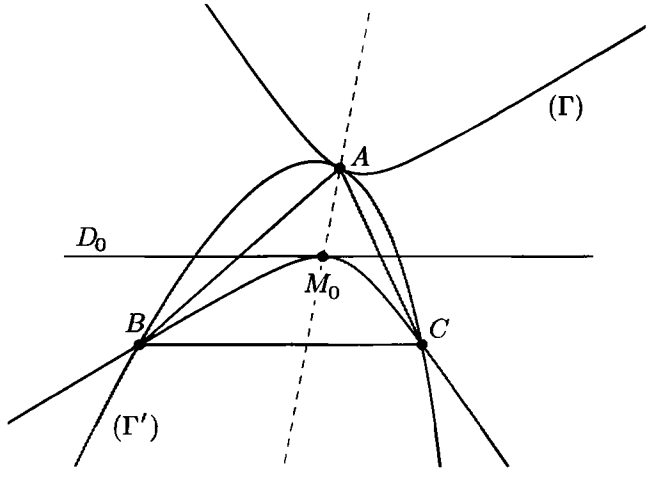
[35] Grâce notamment au logiciel CABRI qui sait en faire passer une par cinq points « génériques » donnés.

[36] Voir aussi **IV-1.1**.

[37] Heureusement pour nous, il y en a suffisamment. On peut en fait accepter toutes les coniques tangentes à D_0, même celles qui ne passent pas par les trois sommets du triangle, cela ne faisant que compliquer un peu la démonstration donnée ici.

[38] C'est une conique. Pas de miracle en cela, car une homographie conserve le degré des courbes algébriques. Elle est circonscrite au triangle : c'est normal là aussi, puisque les sommets sont des points fixes de $\mathscr{I}$.

Voici l'exemple d'une hyperbole Γ passant par A, tangente à D_0, et de son image Γ' par $\mathscr{I}$:



Comme Γ est tangente en M_0 à D_0, la droite AM_0 ne coupe Γ' qu'en A : cette droite est donc parallèle à l'axe de la parabole Γ'. La figure suggère aussi que Γ et Γ' sont tangentes en A. C'est effectivement le cas : d'après une formule que nous verrons au **II-2** que l'équation barycentrique de la tangente en A à Γ et à Γ' est $rY+qZ=0$. Les deux courbes ont bien même tangente.

C'est prévisible aussi puisque la tangente en A à Γ est la limite de la droite AA', lorsque $A' \in \Gamma$ tend vers A. Or, cette droite est invariante par $\mathscr{I}$ et coïncide avec la corde AA'', où $A'' = \mathscr{I}(A')$, dont la limite est la tangente en A à Γ'.

Remarques. Nous conseillons d'examiner la dernière en seconde lecture, après avoir pris connaissance de **II-2.7** et de l'Annexe **B**.

- C'est par commodité que nous avons fait référence au triangle ABC pour qualifier l'inversion harmonique. En réalité, cela suggère peut-être que les rôles des sommets A, B et C sont analogues. Comme nous l'avons vu tout au long de cette section, il n'en est rien : le sommet A joue un rôle privilégié, et l'inversion n'est pas modifiée si on remplace les sommets B et C par deux points (distincts) sur la droite BC.
  En d'autres termes, l'inversion est bien définie dès que l'on se donne un point A et une droite ne passant pas par A. Le choix de deux points B et C sur cette droite est utile seulement pour les calculs de coordonnées barycentriques.
- Si $M \neq A$ appartient à la parallèle D_0' à BC menée de A, il a des coordonnées barycentriques de la forme (x,y,z), avec $y+z=0$. Comme les coordonnées barycentriques de son image M' sont $(-x,y,z)$, on constate que le milieu de MM' est A, c'est-à-dire aussi que M' est le symétrique de M par rapport à A.

Dans ce cas, la division $MM'AM_A$ est effectivement harmonique, puisque le point M_A est à l'infini sur la droite AMM'.

- Notons V le vectorialisé de notre plan affine. Il est de dimension 3. La droite affine (BC) et le point A y engendrent linéairement un plan et une droite, respectivement, que l'on désignera par (OBC) et (OA). L'espace projectif $\widetilde{V}$ associé à V est le complété projectif de notre plan affine. Le lecteur vérifiera que l'application projective qui prolonge $\mathscr{I}$ provient d'une *symétrie vectorielle* de V, en l'occurrence la symétrie par rapport au plan (OBC) parallèlement à la droite OA.

10. Coordonnées barycentriques de quelques points remarquables

Dans ce court paragraphe, nous déterminons les triplets de coordonnées barycentriques des points remarquables les plus connus d'un triangle, ceux qui nous accompagneront tout au long de cet ouvrage. Nous ne recherchons pas systématiquement ici les coordonnées barycentriques normalisées, *souvent moins élégantes, du fait de la présence d'un dénominateur rendu nécessaire par la normalisation.*

Notre dessein est également de mettre en œuvre les principes généraux du paragraphe précédent et non d'établir un catalogue de coordonnées barycentriques. Les calculs d'autres coordonnées barycentriques suivront dans les paragraphes prochains, mais ce sera toujours en relation avec les problèmes qui nous occuperont à ce moment-là.

Enfin, nous n'hésiterons pas à déterminer de plusieurs manières les coordonnées barycentriques des points les plus intéressants lorsque cela revêt un intérêt géométrique.

Dans tout ce paragraphe, nous supposerons le plan affine muni d'une structure euclidienne.

10.1. Les (!) centres de gravité

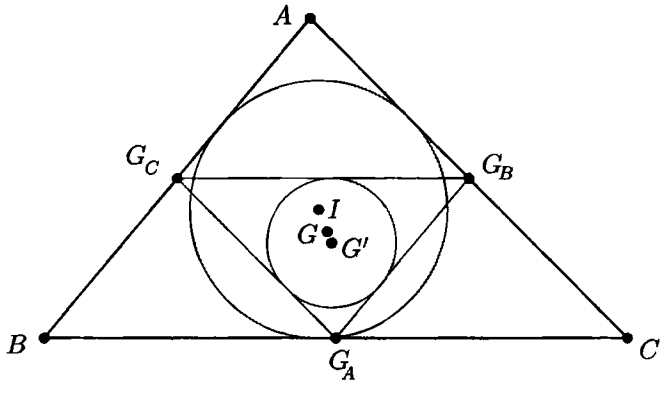
Si on veut mettre en évidence la signification physique du centre de gravité d'un triangle, il est conseillé d'en découper un soigneusement dans du carton ou dans un feuillard de tôle, de le poser sur une pointe à l'endroit ad hoc *et de constater que l'objet tient en équilibre.*

Fort bien ! Mais est-ce ainsi que nous entendons l'isobarycentre d'un triangle ? Certainement non, puisque, dans cette définition, seuls les sommets se voient affecter une masse.

Nous avons donc la possibilité de considérer de trois façons cette question du centre de gravité « physique » d'un triangle.

Par définition, G, l'isobarycentre, ou centre de gravité, du triangle a pour coordonnées barycentriques $(1,1,1)$. Cela montre au passage, voir **I-3**, que les aires des triangles GAB, GBC et GCA sont égales.

Puisque c'est également notre propos, on vérifie facilement que G est *aussi* le centre de gravité du triangle *plein* ABC considéré comme une « plaque homogène » [39].



Si l'on considérait en revanche le centre de gravité G' du « périmètre », c'est-à-dire de la réunion des trois **côtés** du triangle (considérée comme un « fil homogène »), on trouverait le barycentre des milieux G_A, G_B, G_C des trois côtés affectés des masses a, b, c respectivement.

Comme les longueurs des côtés du triangle $G_AG_BG_C$ sont $a/2, b/2$ et $c/2$, cela montre que G' est le centre du cercle inscrit de ce triangle (voir plus bas, dans cette section) ; de ce fait, il se déduit du centre I du cercle inscrit à ABC par l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$.

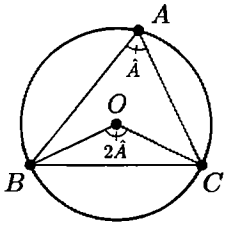
Enfin, l'associativité de la barycentration montre que G' est aussi le barycentre de A, B, C, affectés des masses $b+c, c+a, a+b$.

[39] Cela résulte de calculs d'intégrales doubles, entre autres méthodes. On peut aussi faire sienne la remarque suivante de Jean-Pierre EHRMANN : on considère l'application affine qui conserve A et permute B et C. Cette application est une involution et on l'appelle la *symétrie oblique* par rapport à la médiane issue de A parallèlement au côté BC. Rappelons que nous désignons par G_A la milieu de BC ; les deux demi-triangles ABG_A et AG_AC ont alors même aire orientée, la moitié de celle de ABC. Comme une application affine « conserve » les barycentres, les barycentres des deux demi-plaques triangulaires se déduisent donc l'un de l'autre par cette symétrie oblique, et le centre de gravité de la plaque triangulaire « complète » ABC, le milieu des deux précédents, se situe donc sur la médiane issue de A. En considérant de même les deux autres médianes, on constate alors que le centre de gravité de la plaque triangulaire ABC appartient aux trois médianes et coïncide de ce fait avec G. La même remarque ne s'applique pas en général au centre de gravité du « périmètre » du triangle, car nos symétries obliques ne conservent pas toutes les trois les distances, à moins que le triangle ABC ne soit équilatéral.

Toutefois, pour éviter des circonlocutions[40] et se conformer à l'usage, nous appellerons pour la suite de cet ouvrage *centre de gravité* du triangle ABC l'isobarycentre G.

10.2. Le centre du cercle circonscrit

Continuons avec les coordonnées barycentriques du centre du cercle circonscrit. L'aire orientée du triangle BOC est $\frac{1}{2}R^2 \sin 2\widehat{A}$: en effet, l'angle au centre $\widehat{BOC}$ vaut le double de l'angle inscrit $\widehat{BAC}$. Il s'ensuit qu'un triplet de coordonnées barycentriques de O est $(\sin 2\widehat{A}, \sin 2\widehat{B}, \sin 2\widehat{C})$. Puisque $a = 2R \sin \widehat{A}$, un autre triplet possible est $(a \cos \widehat{A}, b \cos \widehat{B}, c \cos \widehat{C})$.



Exercice. Si on désigne par R le rayon du cercle circonscrit, et (α, β, γ) les coordonnées barycentriques normalisées de O, déterminer ce triplet en introduisant la fonction f qui à un point M du plan associe $\alpha AM^2 + \beta BM^2 + \gamma CM^2$. La solution est dans la note en bas de page : [41].

10.3. L'orthocentre

Parmi les points remarquables d'un triangle, l'orthocentre est un de ceux dont les coordonnées barycentriques se présentent avec le plus de variantes : ce n'est pas tant le fait que les coordonnées barycentriques de ce point ne sont pas uniques (c'est le cas de n'importe quel point du plan !), mais cela résulte des nombreuses relations qui existent entre les paramètres caractéristiques a, b, c (les longueurs des côtés) et $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ (les angles aux sommets).

Les coordonnées barycentriques normalisées de l'orthocentre H sont

$$(\operatorname{cotg}\widehat{B} \cdot \operatorname{cotg}\widehat{C}, \operatorname{cotg}\widehat{C} \cdot \operatorname{cotg}\widehat{A}, \operatorname{cotg}\widehat{A} \cdot \operatorname{cotg}\widehat{B}) .$$

[40] Il est piquant de constater que la lecture de SAN–ANTONIO a fini par faire croire à tout le monde que l'on dit *circonvolutions*, y compris à des journalistes de quotidiens nationaux !

[41] En remplaçant dans l'expression de f le carré de distance AM^2 par le carré scalaire de $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, et les deux autres termes à l'avenant, on voit que, pour tout M,

$$f(M) = OM^2 + \alpha OA^2 + \beta OB^2 + \gamma OC^2 = OM^2 + R^2.$$

Faire successivement $M = A$, $M = B$ et $M = C$ donne le système

$$\begin{cases} \beta c^2 + \gamma b^2 &= 2R^2 \\ \alpha c^2 + \gamma a^2 &= 2R^2 \\ \alpha b^2 + \beta a^2 &= 2R^2. \end{cases}$$

La résolution de ce système de CRAMER donne alors pour (α, β, γ) la valeur

$$(2R^2/bc \times \cos \widehat{A}, 2R^2/ca \times \cos \widehat{B}, 2R^2/ab \times \cos \widehat{C}) ,$$

qui est bien proportionnelle à celle que nous avons obtenue.

Lorsque le triangle n'est pas rectangle, nous montrerons auparavant que les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H sont aussi $(\mathrm{tg}\widehat{A}, \mathrm{tg}\widehat{B}, \mathrm{tg}\widehat{C})$, ou encore $(a/\cos\widehat{A}, b/\cos\widehat{B}, c/\cos\widehat{C})$.

Réglons d'abord le cas particulier d'un triangle rectangle, en A par exemple. On a alors $\widehat{A} = \pi/2$ et $\widehat{B} + \widehat{C} = \pi/2$, de sorte que $\mathrm{cotg}\widehat{B} \cdot \mathrm{cotg}\widehat{C} = 1$. Ainsi, notre résultat est établi.

Excluons donc ce cas ; avec les notations de la figure **III-6** de la page **146**, il suffit de montrer par exemple que $\dfrac{\overline{H_AB}}{\overline{H_AC}} = -\dfrac{\mathrm{tg}\widehat{C}}{\mathrm{tg}\widehat{B}}$ pour établir la deuxième formule, celle portant sur les *tangentes*[42].

Or, par exemple dans le cas où le triangle est **acutangle**, c'est-à-dire a ses trois angles aigus, cela résulte immédiatement de l'égalité

$$-\frac{\overline{H_AB}}{\overline{H_AC}} = \frac{H_AB : H_AA}{H_AC : H_AA} = \frac{\mathrm{cotg}\widehat{B}}{\mathrm{cotg}\widehat{C}}\,.$$

Puisque l'on a $a = 2R\sin\widehat{A}$, etc., un autre triplet de coordonnées barycentriques est effectivement $(a/\cos\widehat{A}, b/\cos\widehat{B}, c/\cos\widehat{C})$.

Dans le cas où le triangle est rectangle en A, on a $H = A$: si on veut inclure ce cas, on peut aussi adopter comme coordonnées barycentriques de H le triplet

$$(a\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}, b\cos\widehat{C}\cos\widehat{A}, c\cos\widehat{A}\cos\widehat{B})\,,$$

qui convient dans tous les cas.

Reste donc à obtenir les coordonnées barycentriques normalisées de H. Une formule de trigonométrie est là pour nous aider : puisque $\widehat{B} + \widehat{C} = \pi - \widehat{A}$, on a

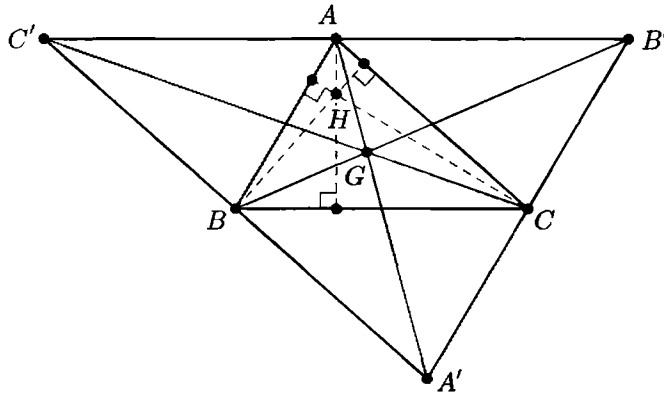
$$\frac{\mathrm{tg}\widehat{B} + \mathrm{tg}\widehat{C}}{1 - \mathrm{tg}\widehat{B}\cdot\mathrm{tg}\widehat{C}} = -\mathrm{tg}\widehat{A}\,.$$

Ainsi, $\mathrm{tg}\widehat{A} + \mathrm{tg}\widehat{B} + \mathrm{tg}\widehat{C} = \mathrm{tg}\widehat{A}\cdot\mathrm{tg}\widehat{B}\cdot\mathrm{tg}\widehat{C}$, de sorte que la division du triplet $(\mathrm{tg}\widehat{A}, \mathrm{tg}\widehat{B}, \mathrm{tg}\widehat{C})$ par $\mathrm{tg}\widehat{A}+\mathrm{tg}\widehat{B}+\mathrm{tg}\widehat{C}$ donne bien le premier résultat annoncé.

Il était d'ailleurs possible de déduire les coordonnées barycentriques de H de celles de O : nous pouvons en effet « doubler » le triangle ABC en menant par chaque sommet la parallèle au côté opposé. Ces trois droites forment un triangle, image de ABC par l'homothétie de centre G et de rapport -2, dont nous nommons les sommets A', B' et C' afin qu'ils se

[42] Ainsi, du fait de la symétrie des rôles joués par les trois sommets et les trois angles, on a aussi $\dfrac{\overline{H_BC}}{\overline{H_BA}} = -\dfrac{\mathrm{tg}\widehat{A}}{\mathrm{tg}\widehat{C}}$ et $\dfrac{\overline{H_CA}}{\overline{H_CB}} = -\dfrac{\mathrm{tg}\widehat{B}}{\mathrm{tg}\widehat{A}}$.

correspondent par cette homothétie.



Les hauteurs de ABC sont les médiatrices de $A'B'C'$ et l'orthocentre H de ABC est donc le centre du cercle circonscrit de $A'B'C'$ [43]. Comme les longueurs des côtés de ce dernier triangle sont $2a, 2b$ et $2c$ et les angles aux sommets $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$, les coordonnées barycentriques de H relatives à $A'B'C'$ sont donc $(a\cos\widehat{A}, b\cos\widehat{B}, c\cos\widehat{C})$. En outre, les coordonnées barycentriques normalisées des points A', B', C' relatives à ABC sont respectivement $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$ et $(1,1,-1)$, de sorte que les formules du **I-8** montrent que les coordonnées barycentriques de H relatives à ABC sont (x,y,z), où $x = -a\cos\widehat{A} + b\cos\widehat{B} + c\cos\widehat{C}$ et où y et z s'en déduisent par permutation circulaire.

On a donc aussi $x = 2R(-\sin\widehat{A}\cos\widehat{A} + \sin\widehat{B}\cos\widehat{B} + \sin\widehat{C}\cos\widehat{C})$ puis aussi $x = -R(-\sin 2\widehat{A} + \sin 2\widehat{B} + \sin 2\widehat{C}) = -R(-\sin 2\widehat{A} + 2\sin(\widehat{B}+\widehat{C})\cos(\widehat{B}-\widehat{C}))$ puis encore $x = -2R\sin\widehat{A}(-\cos\widehat{A} + \cos(\widehat{B}-\widehat{C}))$ [44]. Enfin, nous obtenons

$$x = 4R\sin\widehat{A}\,\sin\frac{\widehat{B}+\widehat{A}-\widehat{C}}{2}\,\sin\frac{\widehat{B}-\widehat{C}-\widehat{A}}{2} = \\ = -4R\sin\widehat{A}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\widehat{C}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\widehat{B}\right),$$

ce qui est bien $x = -2a\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}$. Au coefficient -2 près, c'est ce que nous savions déjà.

Nous calculerons ces coordonnées barycentriques encore d'une autre façon, dans la section **III-6**.

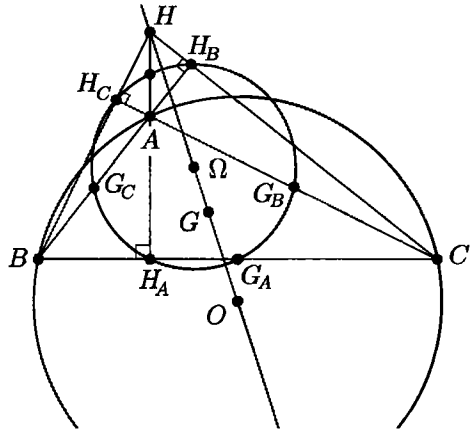
[43] Rappelons que cette construction fournit un moyen très simple de prouver le concours des hauteurs du triangle ABC : si H est le point d'intersection des hauteurs issues de A et de B, on a les égalités de longueurs $HB' = HC'$ et $HC' = HA'$; ainsi, on a aussi $HA' = HB'$ et H appartient également à la hauteur issue de C.

[44] Puisque $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.

Lorsque le triangle est rectangle en A, le point A est le pied des hauteurs issues de B et de C. Les coordonnées barycentriques du pied H_A de la troisième hauteur, celle issue de A, sont $(0, b^2, c^2)$. Pour l'établir, il suffit de montrer que $\overrightarrow{BH_A} = \dfrac{c^2}{b^2+c^2}\overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2}{a^2}\overrightarrow{BC}$. Comme H_A appartient au segment BC, il suffit d'établir la relation suivante sur les longueurs : $BH_A = \dfrac{c^2}{a^2}BC = \dfrac{c^2}{a}$. C'est en effet le cas puisque $BH_A = BA\cos\widehat{B} = BA\sin\widehat{C} = \dfrac{BA^2}{BC} = \dfrac{c^2}{a}$. Ces coordonnées barycentriques nous seront utiles au **IV-1**.

10.4. Le centre du cercle d'EULER

Dans la figure qui suit, nous avons fait en sorte que l'orthocentre H du triangle ABC lui soit *extérieur*. Cela permet d'avoir un cercle d'EULER moins étriqué.



Puisque Ω est le barycentre de (G, O) affectés des masses $(3, -1)$ [45], il admet pour coordonnées barycentriques le triplet

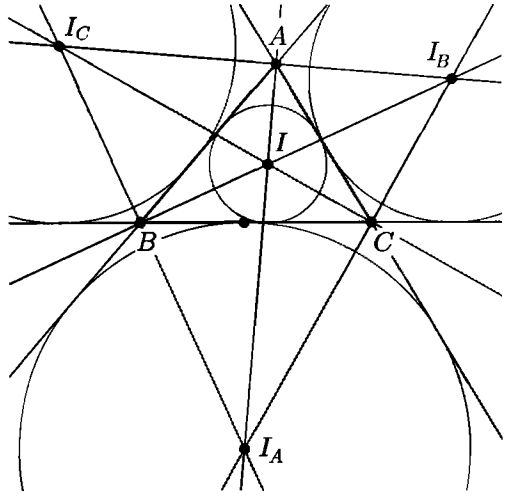
$$(b\cos\widehat{B} + c\cos\widehat{C}, c\cos\widehat{C} + a\cos\widehat{A}, a\cos\widehat{A} + b\cos\widehat{B})\,.$$

Le même résultat découle des formules du **I-8** lorsque l'on passe du triangle médian $G_AG_BG_C$ au triangle ABC. En effet, du fait de l'homothétie qui fait passer de l'un de ces triangles à l'autre, les coordonnées barycentriques de Ω par rapport à $G_AG_BG_C$ sont les mêmes que celles de O par rapport à ABC. Ensuite, il ne reste plus qu'à écrire les formules de changement de triangle de référence.

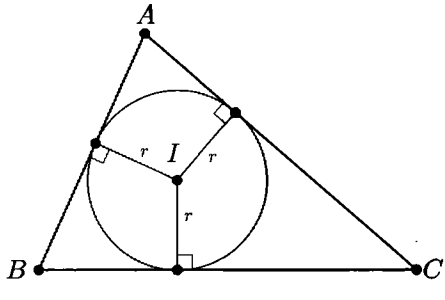
[45] Pour voir cela, on peut partir de la relation d'EULER $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ et du fait que Ω est le milieu de OH.

10.5. Les centres des cercles (ex)inscrits

Mais oui, il y en a quatre : les trois bissectrices intérieures d'un triangle ABC se coupent au centre I du cercle inscrit. De même, la bissectrice intérieure issue de A coupe les bissectrices extérieures issues de B et de C au centre I_A du cercle exinscrit dans l'angle A. *Ensuite, on définit* mutatis mutandis *les centres I_B et I_C.*



Le centre I du cercle inscrit a pour coordonnées barycentriques (a, b, c). En effet, l'aire orientée du triangle BIC est $\frac{1}{2}ra$, et les coordonnées barycentriques que l'on obtient par ce calcul sont bien proportionnelles à (a, b, c). On vérifie tout aussi facilement que les coordonnées barycentriques du centre I_A du cercle exinscrit *dans l'angle* $\widehat{BAC}$, c'est-à-dire centré sur la bissectrice intérieure de (AB, AC) sont $(-a, b, c)$. Voir au **IV-1.1** une propriété intéressante de la figure formée par le centre du cercle inscrit et les trois centres des cercles exinscrits.



Dans un triangle ABC, le point I a-t-il droit de cité dans la prestigieuse droite d'EULER, qui regroupe déjà O, G, Ω et H ?

Exercice corrigé. Soit un triangle ABC ; alors les points H, I et O sont alignés [46] si, et seulement si, ce triangle est isocèle.

Si ABC est rectangle en A, $H = A$ et O est le milieu de $[BC]$. Donc, H, I et O sont alignés si, et seulement si, la médiane issue de A coïncide avec la bissectrice, c'est-à-dire si, et seulement si, le triangle est isocèle (en A, ici). Si ABC n'est pas rectangle, l'alignement équivaut à la nullité de

$$\Delta = \begin{vmatrix} a/\cos\widehat{A} & b/\cos\widehat{B} & c/\cos\widehat{C} \\ a & b & c \\ a\cos\widehat{A} & b\cos\widehat{B} & c\cos\widehat{C} \end{vmatrix}.$$

Cela étant, on a

$$\Delta = \frac{abc}{\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos\widehat{A} & \cos\widehat{B} & \cos\widehat{C} \\ \cos^2\widehat{A} & \cos^2\widehat{B} & \cos^2\widehat{C} \end{vmatrix}.$$

Cela nous ramène à un déterminant de VANDERMONDE, de sorte que

$$\Delta = \frac{abc}{\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}}(\cos\widehat{C} - \cos\widehat{A})(\cos\widehat{C} - \cos\widehat{B})(\cos\widehat{B} - \cos\widehat{A}).$$

On en déduit donc que Δ est nul si, et seulement si, encore une fois, le triangle est isocèle.

Exercice. Étudier de même l'appartenance du centre I_A du cercle exinscrit dans l'angle CAB à cette Voie lactée du triangle.

[*Cette fois, on écrira que H, I_A et O sont alignés, ce qui conduira encore une fois à un déterminant de* VANDERMONDE. *On trouvera comme condition nécessaire et suffisante*

$$(\cos\widehat{C} + \cos\widehat{A})(\cos\widehat{B} + \cos\widehat{A})(\cos\widehat{C} - \cos\widehat{B}) = 0.$$

Comme on ne peut avoir ni $\cos\widehat{B} = -\cos\widehat{A}$, ni $\cos\widehat{C} = -\cos\widehat{A}$, la propriété équivaut à dire que le triangle ABC est isocèle en A.]

Nous déterminerons par la suite les coordonnées barycentriques de plusieurs autres points remarquables d'un triangle ABC : le point de LEMOINE au **III-6**, le point de FEUERBACH au **IV-2.2**, le point de GERGONNE au **A-5.4.5** pour ne citer que les plus connus.

10.6. Pour ne pas en rester là

Les points dont nous avons déterminé les coordonnées barycentriques sont les plus classiques en matière de Géométrie du triangle. D'autres suivront

[46] Pour un triangle non équilatéral, cela revient effectivement à dire que I appartient à la droite d'EULER de ce triangle.

dans ce livre, en relation avec des problèmes géométriques plus particuliers, mais notre dessein n'est pas d'épuiser le sujet. Le lecteur désireux d'approfondir trouvera *ad nauseam* des listes de coordonnées barycentriques sur le site de Clark KIMBERLING :

`http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/`

« (...) APOLLONIUS en savait plus que nous dans ce domaine, tandis que nous n'avons fait que grimper en dimension... »

PIERRE GABRIEL, *Matrices, géométrie, algèbre linéaire*

Chapitre II

Les coniques

1. Introduction

Longtemps qualifiées de *sections coniques*, les coniques tirent leur appellation des Grecs, qui voyaient en elles les sections planes d'un cône de révolution.

D'un point de vue strictement pragmatique, cette définition est quasiment satisfaisante sur le plan de l'exhaustivité : en effet, si l'on se donne un cône de révolution d'un espace affine euclidien de dimension 3, presque toutes les coniques euclidiennes, mis à part les formes dont nous allons discuter, peuvent être « réalisées » comme intersection de ce cône avec un certain plan affine.

On peut en effet obtenir les trois types de coniques *non dégénérées*, ellipses, paraboles, hyperboles[1], ainsi que les cas *dégénérés* des hyperboles (la réunion de deux droites sécantes), de paraboles (une droite « double ») ou d'ellipses (un singleton). Comme on le voit, ne manquent à l'appel que les ellipses vides et les paraboles dégénérées, réunions de deux droites parallèles.

Avec le recul, le puriste trouvera toujours à chipoter : on n'a certes pas besoin de la notion de cône de révolution, qui est *euclidienne*, pour accéder à

[1] Il est utile de préciser en quoi l'on obtient *toutes* ces courbes : on peut, par exemple, ne pas se contenter de décréter que l'intersection du cône avec un plan doit être une hyperbole, mais on peut en outre en imposer les longueurs des axes.

Un joli exercice consiste d'ailleurs à déterminer le lieu des sommets des cônes de révolution contenant une hyperbole donnée $\mathscr{H}$ d'un plan $\mathscr{P}$. Il s'agit de l'ellipse incluse dans le plan orthogonal à $\mathscr{P}$ contenant l'axe focal de $\mathscr{H}$, dont les foyers sont les sommets de $\mathscr{H}$ et les sommets les foyers de $\mathscr{H}$, privée toutefois de ses deux points d'intersection avec $\mathscr{P}$. Des exercices analogues partent d'une parabole ou d'une ellipse donnée.

celle de conique, dont nous savons à présent qu'elle est *affine*. En revanche, regretter le recours à un espace de dimension 3 pour définir un objet *plan* serait un grief facile à battre en brèche : il est de l'intérêt bien compris du Géomètre affine d'envisager le plan affine comme plongé dans un espace (vectoriel) de dimension « un de plus ». C'est ce que nous faisons implicitement depuis le début de cet ouvrage par l'intermédiaire des coordonnées barycentriques, et en discuterons plus avant, notamment dans l'Annexe **B**.

Au reste, les définitions des coniques en tant que lieux[2] ne manquent pas. Certaines sont euclidiennes, comme la définition grecque déjà entrevue, la définition par foyer et directrice, pour ne pas citer la définition bifocale qui a le tort d'oublier les paraboles et les cercles.

À l'autre bout de la chaîne, une définition projective caractérise les coniques comme lieux des points d'intersection des droites de deux faisceaux liés par une relation homographique[3].

Fort heureusement, tout le monde se réconciliera en constatant que l'essentiel est sauf, en ceci que les coniques non dégénérées obéissent à toutes les définitions, et que ces dernières ne diffèrent que par leurs formes dégénérées.

Dans ce chapitre, nous avons donc pu adopter un moyen terme, en définissant les coniques comme des ensembles de points satisfaisant une équation du second degré, comme cela sera envisagé dès le paragraphe **II-2.1**. Ce point de vue ne devrait pas hérisser les Mathématiciens de l'Académie de PLATON, même s'il est formulé en des termes pour eux inhabituels ; en effet, au terme de l'Annexe **B**, nous verrons que cela revient à couper par un plan le cône isotrope d'une forme quadratique (d'un espace vectoriel de dimension 3) et nous ne paierons pas cette généralisation[4] au prix fort, tout au plus par l'apparition de coniques très dégénérées, telles les coniques vides ou réduites à un point. Nous n'aurons d'ailleurs pas de mal à ignorer ces cas peu intéressants, comme nous allons le voir dès à présent.

Nous n'aurons guère à supposer connues que les classifications des coniques, qu'elles soient affines ou euclidiennes, ainsi que les propriétés les plus élémentaires de celles-ci, c'est-à-dire celles qui figurent au programme des deux premières années d'Enseignement supérieur.

2. Étude des coniques circonscrites

Dans cette section, nous donnons la forme générale de l'équation barycentrique d'une conique passant par les trois sommets d'un triangle de ré-

[2] C'est-à-dire en tant que parties d'un plan satisfaisant telle ou telle propriété.

[3] Ou comme enveloppes des familles de droites joignant les points de deux droites liés homographiquement.

[4] L'abandon de l'hypothèse de *révolution* nous permet de ne pas sortir d'un cadre affine.

férence d'un plan affine et, en guise de première conséquence, en déduisons que, moyennant des hypothèses très générales, cinq points permettent de définir une unique conique.

2.1. Les coniques circonscrites

Soit un triangle ABC, et le repère affine $\mathscr{R} = (A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ correspondant. Nous rappelons qu'un point M de coordonnées barycentriques (x,y,z) possède comme coordonnées cartésiennes le couple

$$\left(u = \frac{y}{x+y+z}\,, v = \frac{z}{x+y+z}\right).$$

Nous partons de l'équation affine (cartésienne) générale des coniques du plan, sous la forme d'une équation polynomiale du second degré :

$$\alpha_1 U^2 + \alpha_2 UV + \alpha_3 V^2 + \beta_1 U + \beta_2 V + \gamma = 0\,,$$

où les coefficients $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ sont non tous les trois nuls[5].

Vu les formules de transformation établies au **I-2.2**, on obtient pour les coniques une équation barycentrique générale de la forme $\mathscr{Q}(X,Y,Z) = 0$, où $\mathscr{Q}$ est une forme quadratique en le triplet (X,Y,Z), dans laquelle on suppose que l'on ne peut pas factoriser[6] $(X+Y+Z)$.

En effet, la substitution $\big(U = Y/(X+Y+Z), V = Z/(X+Y+Z)\big)$ dans l'équation cartésienne *supra* donne, une fois que l'on s'est débarrassé des dénominateurs, l'équation barycentrique suivante, qui est bien de la forme annoncée :

$$\alpha_1 Y^2 + \alpha_2 YZ + \alpha_3 Z^2 + (\beta_1 Y + \beta_2 Z)(X+Y+Z) + \gamma(X+Y+Z)^2 = 0.$$

Inversement, on passe de $\mathscr{Q}(X,Y,Z) = 0$ à la première forme en divisant membre à membre par $(X+Y+Z)^2$, puis en remplaçant respectivement $\dfrac{X}{X+Y+Z}$, $\dfrac{Y}{X+Y+Z}$ et $\dfrac{Z}{X+Y+Z}$ par $1-U-V$, U et V.

Comme notre dessein est d'étudier de *vraies* coniques, c'est-à-dire possédant une infinité de points, et non pas des coniques vides, ou réduites à un point, dont le seul mérite est d'avoir une équation, nous nous limiterons très souvent au cas particulier largement suffisant qui est celui d'une conique $\mathscr{C}$ *circonscrite*, c'est-à-dire passant par les trois sommets du triangle de référence. En d'autres termes, nous choisirons très souvent un triangle dont les trois sommets soient sur la conique.

---

[5] Avec ces hypothèses, cette conique a toujours des points dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$; en revanche, dans le cadre affine réel, elle peut être vide (penser à la conique $X^2+Y^2+1=0$) ou encore dégénérée en une droite double ou en la réunion de deux droites.

[6] Faute de quoi la condition sur les α_i ne serait pas vérifiée et, d'ailleurs, la conique dégénérerait en la réunion de la droite de l'infini et d'une autre droite.

Soit donc un triangle de référence ABC ; une condition nécessaire et suffisante pour que la conique d'équation barycentrique $\mathscr{Q}(X,Y,Z) = 0$, avec les notations *supra*, passe par les trois sommets est que

$$\mathscr{Q}(1,0,0) = \mathscr{Q}(0,1,0) = \mathscr{Q}(0,0,1) = 0\,.$$

L'équation générale de ces coniques est donc $pYZ+qZX+rXY = 0$ [7]. À noter qu'un calcul simple montre que, si p, q et r ne sont pas tous nuls, on ne peut y factoriser $(X+Y+Z)$. Cependant, la conique peut dégénérer en la réunion de l'un des côtés et d'une droite passant par le sommet opposé. Cela se produit si, et seulement si, $pqr = 0$.

On dispose d'ailleurs d'une formule matricielle, plus simple si on fait intervenir $\mathscr{Q}_0 = 2\mathscr{Q}$, puisque le membre de gauche de notre équation barycentrique est une forme quadratique en le triplet (X,Y,Z) :

$$\mathscr{Q}_0(X,Y,Z) = 2(pYZ+qZX+rXY) = (X,Y,Z)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix}}_{F}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Ici, la matrice F porte une bonne partie de l'information ; par exemple, $\det F = 2pqr$ dont la nullité équivaut à la dégénérescence de la conique.

Dans la suite de ce chapitre, nous ferons souvent usage de la latitude de multiplier par 2 « la » matrice de la formule précédente, ce afin d'éviter la présence inutile de facteurs 1/2, une équation barycentrique n'étant de toute façon définie qu'à un coefficient multiplicatif non nul près.

2.2. Cinq points définissent une conique

À ce stade, il va nous être facile de montrer que **cinq** points distincts définissent « en général » une unique conique. Si quatre d'entre eux sont alignés sur une droite Δ, toute conique réunion de Δ et d'une droite contenant le cinquième point convient ; ce cas est sans intérêt : excluons-le et énonçons : *par cinq points distincts A,B,C,D,E dont quatre quelconques ne sont pas alignés passe une unique conique $\mathscr{C}$. En outre, la conique $\mathscr{C}$ est non dégénérée si, et seulement si, trois* quelconques *de ces cinq points sont non alignés.*.

Vu ces hypothèses, il existe trois parmi ces cinq qui forment un triangle (non aplati) [8] et nous supposerons que c'est par exemple ABC, que nous prenons comme triangle de référence.

[7] On notera bien que, dès qu'une conique a une équation barycentrique de cette forme, elle passe par les trois sommets du triangle de référence et que cela exclut *de facto* les formes les plus dégénérées de coniques, telles que les coniques vides, ou réduites à un point, ou constituées d'une droite « double ».

[8] Si cela n'était pas le cas, les cinq points seraient sur la droite AB.

Appelons (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) les coordonnées barycentriques respectives de D et E. Une conique $\mathscr{C}$ passe donc par ces cinq points si, et seulement si, elle a une équation de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$, où (p, q, r) est solution du système linéaire homogène

$$(\mathscr{S}) : \quad \begin{cases} py_1z_1 + qz_1x_1 + rx_1y_1 = 0 \\ py_2z_2 + qz_2x_2 + rx_2y_2 = 0. \end{cases}$$

Ce système est de rang 2 ; en effet, il est de rang $\leqslant 2$, et il n'est pas de rang $\leqslant 1$, sinon les trois scalaires suivants seraient nuls :

$$d_1 = x_1x_2(z_1y_2 - z_2y_1), d_2 = y_1y_2(x_1z_2 - x_2z_1), d_3 = z_1z_2(y_1x_2 - y_2x_1)$$

Or, si ni le point D ni le point E ne sont sur BC, alors l'on a $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$ de sorte que $d_1 = 0$ si, et seulement si, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$: si tel est le cas, alors A, D, E sont alignés et il est facile de montrer que d_2 et d_3 sont non nuls. Au contraire, si par exemple D est sur BC, alors $x_1 = 0$, et donc $x_2 \neq 0$ et $y_1z_1 \neq 0$; comme $d_2 = -y_1z_1x_2y_2$ et $d_3 = y_1z_1x_2z_2$, il suffit de vérifier que y_2 ou z_2 est non nul, ce qui est le cas (puisque, sinon, $E = A$).

En conclusion, notre système $(\mathscr{S})$ est de rang 2 et admet une droite vectorielle de solutions. Les équations de coniques obtenues étant toutes *proportionnelles*, nous avons bien établi qu'une conique $\mathscr{C}$ et une seule convient.

On vérifiera à titre d'exercice que la conique est non dégénérée si, et seulement si, trois points quelconques parmi les cinq donnés sont non alignés [9].

Remarque 1. Nous pouvons déduire de ce qui précède que l'intersection de deux coniques distinctes consiste en au plus quatre points, sauf si ces deux coniques contiennent une droite commune [10].

Ce résultat est d'ailleurs immédiat si l'une des deux coniques dégénère en la réunion de deux droites, ou en une droite double, car toute droite incluse dans cette conique coupe l'autre en au plus deux points, sauf précisément si la seconde conique contient elle aussi cette droite.

Si l'une des deux coniques contient moins de trois points, alors le résultat est, là aussi, immédiat, faute de combattants.

[9] Voici des indications.
- Pour la condition nécessaire : *remarquer qu'une droite qui coupe une conique en trois points distincts est incluse dans cette conique.*
- Pour la condition suffisante : *remarquer que si une conique consiste la réunion de deux droites, ou en une droite double, on ne peut placer sur celle-ci cinq points sans que trois d'entre eux soient alignés.*

[10] Et, dans ce cas, leur intersection est de cardinal infini.

Supposons à présent en toute généralité que deux coniques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent en cinq points au moins. Si trois d'entre eux sont alignés sur une droite Δ, alors les deux coniques ont la droite Δ en commun. Sinon, la démonstration précédente établit qu'il ne passe qu'une conique par ces cinq points, de sorte que les deux coniques coïncident.

Ce résultat est un cas particulier d'un énoncé beaucoup plus général, le théorème de BEZOUT, selon lequel le nombre de points d'intersection de deux courbes algébriques sans composante[11] commune, de degrés respectifs p et q, est inférieur ou égal à pq[12]. Ici, on a $p = q = 2$, d'où la majoration du cardinal de l'intersection de deux coniques[13].

Remarque 2. Dans tout ce chapitre, nous privilégierons les coniques circonscrites et ce d'autant plus volontiers que, dès qu'une conique contient trois points non alignés, on peut prendre ces trois points pour former le triangle de référence et se ramener à une équation barycentrique de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$. Toutefois, une équation barycentrique de la forme $\mathscr{Q}(X, Y, Z) = 0$, où $\mathscr{Q}$ est une forme quadratique non nulle, peut représenter l'ensemble vide, ou un seul point, ou une droite double. Cela dépend essentiellement de la *signature* de $\mathscr{Q}$.

Si elle est égale à $(3, 0)$, $\mathscr{Q}$ est définie positive et ne s'annule que pour le triplet nul, qui ne représente aucun point, même à l'infini. Le cas de la signature $(0, 3)$ est analogue (remplacer $\mathscr{Q}$ par $-\mathscr{Q}$).

Si elle est égale à $(2, 0)$, alors $\mathscr{Q}$ est la somme de deux carrés de formes linéaires indépendantes : $\mathscr{Q} = \ell_1^2 + \ell_2^2$ et la conique d'équation barycentrique $\mathscr{Q} = 0$ se réduit au point d'intersection des droites d'équations barycentriques $\ell_1(X, Y, Z) = 0$ et $\ell_2(X, Y, Z) = 0$, éventuellement à l'infini si ces droites sont parallèles. Le cas de la signature $(0, 2)$ est analogue.

Si elle est égale à $(1, 0)$, alors $\mathscr{Q}$ est le carré d'une forme linéaire non nulle : $\mathscr{Q} = \ell^2$ et la conique dégénère en la droite « double » d'équation barycentrique $\ell(X, Y, Z) = 0$. Le cas de la signature $(0, 1)$ est analogue.

Voilà pour les cas où $\mathscr{Q}$ est positive, ou négative ; ils ne se produisent jamais dans le cas d'une conique circonscrite.

Si la signature de $\mathscr{Q}$ est $(1, 1)$, alors $\mathscr{Q}$ est la différence de deux carrés de formes linéaires indépendantes : $\mathscr{Q} = \ell_1^2 - \ell_2^2$. Ainsi, la conique est la réunion des droites

[11] On pourra également regarder le **A-4.2** dans ce livre. Pour la notion générale de composante, ainsi que pour une démonstration claire du théorème de BEZOUT, voir par exemple **[22]**.

[12] Il est même égal à pq dans le cas de deux courbes de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, à condition que l'on compte les points d'intersection avec leur multiplicité, y compris les points à l'infini. Cette notion de multiplicité peut se définir algébriquement, mais se révèle compliquée dès lors que des points d'intersection peuvent eux-mêmes être des points singuliers d'une, voire des deux, courbes. Notre limitation au cas des coniques nous permet au contraire de ne pas sortir du cadre élémentaire de cet ouvrage.

[13] Dire que deux coniques sont *sans composante commune* revient précisément à dire qu'elles ne contiennent pas une droite commune, et c'est bien ce que nous avons fait pour garantir une intersection finie.

d'équations barycentriques $\ell_1(X,Y,Z) = 0$ et $\ell_2(X,Y,Z) = 0$. Ce cas peut se rencontrer dans le cas des coniques circonscrites dégénérées.

Enfin, si la signature de $\mathscr{Q}$ est $(2,1)$, $\mathscr{Q}$ est de la forme $\ell_1^2 + \ell_2^2 - \ell_3^2$, où la famille de formes linéaires (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est libre. Nous pouvons considérer un changement de triangle de référence tel que les formules de passage soient de la forme

$$X' = \ell_1'(X,Y,Z) \quad Y' = \ell_2'(X,Y,Z) \quad Z' = \ell_3'(X,Y,Z)\,,$$

où les relations $\ell_1 = \lambda_1\ell_1'$, $\ell_2 = \lambda_2\ell_2'$ et $\ell_3 = \lambda_3\ell_3'$, avec $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$[14], vérifient la relation de normalisation (RN′) du **I-8.** La nouvelle équation barycentrique devient alors $\lambda_1^2X'^2 + \lambda_2^2Y'^2 - \lambda_3^2Z'^2 = 0$; étant du second degré, elle représente bien une conique, et cette conique contient cette fois trois points non alignés, par exemple ceux de coordonnées barycentriques $(\lambda_3, 0, \lambda_1)$, $(\lambda_3, 0, -\lambda_1)$ et $(0, \lambda_3, \lambda_2)$. Si on prend un troisième triangle de référence ayant ces trois points pour sommets, on obtient cette fois une équation barycentrique du type $pY''Z'' + qZ''X'' + rX''Y'' = 0$.

Le cas de la signature $(1,2)$ est analogue : remplacer $\mathscr{Q}$ par $-\mathscr{Q}$[15]. En résumé, cette étude confirme que la restriction au cas des coniques circonscrites ne passe sous silence en fait que des types de coniques quasiment sans intérêt géométrique.

En outre, on notera bien que la signature de $\mathscr{Q}$ est nécessairement $(2,1)$ ou $(1,2)$ lorsqu'elle représente une conique circonscrite non dégénérée.

2.3. Un petit Nullstellensatz

Il existe de nombreux énoncés du Nullstellensatz, *c'est-à-dire du théorème des zéros de* HILBERT *: Nullstellensatz complexe ou réel, affine ou projectif.* Grosso modo, *tous reviennent à décrire les fonctions polynomiales en n indéterminées $P(x_1, \ldots, x_n)$ qui s'annulent en tous les points d'une variété algébrique, c'est-à-dire un ensemble de points défini par un système d'équations polynomiales*

$$P_1(x_1, \ldots, x_n) = P_2(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = P_k(x_1, \ldots, x_n) = 0\,.$$

[14] Sans vouloir entrer dans des discussions de cas, signalons que cette hypothèse n'est pas automatiquement vérifiée, mais que l'on peut toujours s'y ramener. Par exemple, si $\mathscr{Q}(X,Y,Z) = \underbrace{(x)}_{\ell_1}{}^2 + \underbrace{(x+y)}_{\ell_2}{}^2 - \underbrace{(z)}_{\ell_3}{}^2$, on aura $\ell_2(X,Y,Z) + \ell_3(X,Y,Z) = X + Y + Z$ pour tout triplet (X,Y,Z), de sorte que $\lambda_1 = 0$, mais on pourra brouiller les cartes en remplaçant cette décomposition en carrés par celle-ci :

$$q(X,Y,Z) = \underbrace{\Big(\frac{X + (X+Y)}{\sqrt{2}}\Big)}_{\ell_1}{}^2 + \underbrace{\Big(\frac{X - (X+Y)}{\sqrt{2}}\Big)}_{\ell_2}{}^2 - \underbrace{(Z)}_{\ell_3}{}^2,$$

pour laquelle on bien $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$.

[15] On notera également que la signature de $\mathscr{Q}$ ne sera pas un invariant suffisamment fin pour discriminer ellipses, paraboles et hyperboles. Nous introduirons au **II-2.5** un scalaire supplémentaire qui y parviendra.

Comme le résultat que nous présentons ici est particulièrement simple à énoncer et à établir, il ne nous a pas semblé nécessaire de nous appesantir sur les formes générales de ce théorème. Le lecteur pourra approfondir tout cela dans **[22]** *pour le cas d'un corps de base algébriquement clos, qui laisse déjà entrevoir à lui seul toute la puissance du résultat. La remarque* **2** *à la fin de ce paragraphe donnera toutefois un aperçu du théorème général.*

*Pour cette section, on pourra consulter la définition de l'*homogénéité *d'un polynôme à plusieurs indéterminées en page* **15**.

Au cours de la démonstration de l'existence de la conique $\mathscr{C}$ au paragraphe précédent, nous venons de faire voir la *proportionnalité* des équations barycentriques d'une conique circonscrite. Le but de cette section est de montrer qu'il s'agit là d'une conséquence d'un résultat plus général.

Nous avons besoin d'une convention importante pour commencer : que signifie le fait qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$ *s'annule* en un point M, de coordonnées barycentriques (x,y,z) ? *A priori*, puisque les triplets de la forme (tx,ty,tz), où t est un scalaire non nul, fournissent tous les triplets de coordonnées barycentriques de M, il se pourrait que $P(tx,ty,tz)$ soit nul pour certaines valeurs de t et non nul pour d'autres et que la notion d'*annulation* perde ainsi son sens.

Nous dirons donc que le polynôme $P \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$ *s'annule* au point M de coordonnées barycentriques (x,y,z) si $P(tx,ty,tz) = 0$ pour *tout* scalaire non nul t[16].

Dans le cas particulier où P est un polynôme homogène, de degré $m \in \mathbb{N}$, nous remarquons déjà que, si un point M a pour coordonnées barycentriques (x,y,z) et que $P(x,y,z) = 0$, alors P s'annule au point M. En effet, puisque tout autre triplet de coordonnées barycentriques de M est de la forme (tx,ty,tz), avec $t \in \mathbb{R}^*$, l'on a donc

$$P(tx,ty,tz) = t^m P(x,y,z) = 0\,.$$

Attaquons-nous au cas général : un polynôme $P \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$ de degré total m s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{k=0}^{m} P_k$, où P_k est un polynôme homogène de degré k[17].

Nous pouvons alors énoncer, avec les mêmes notations : *le polynôme P s'annule au point M de coordonnées barycentriques (x,y,z) si, et seulement si, $P_k(x,y,z) = 0$ pour tout k.*

---

[16] Bien sûr, cette annulation sera forcément vraie aussi pour $t = 0$.

[17] Rappelons que le *degré total* d'un monôme non nul $\lambda X^{m_1} Y^{m_2} Z^{m_3}$ est par définition $m_1 + m_2 + m_3$ et que le *degré total* d'un polynôme est le maximum des degrés totaux de ses monômes non nuls, le degré total du polynôme nul étant par convention fixé à $-\infty$.

Pour prouver l'existence de la famille (P_k), il suffit alors de définir P_k comme la somme de tous les monômes non nuls de degré total k figurant dans P.

La condition est clairement suffisante vu l'étude du cas particulier *supra*. Réciproquement, supposons que $P(tx, ty, tz)$ soit nul pour tout $t \neq 0$. Puisque l'on a

$$\forall\, t \neq 0, 0 = P(tx, ty, tz) = \sum_{k=0}^{m} t^k P_k(x, y, z)\,,$$

la fonction polynomiale $t \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{k=0}^{m} t^k P_k(x, y, z)$ s'annule pour une infinité de valeurs de t, et on en déduit bien que $P_k(x, y, z) = 0$ pour tout k.

Ainsi, *dans ce cas*, le fait pour P de s'annuler au point M ne dépend pas du choix du triplet de coordonnées barycentriques de ce point. En revanche, dès qu'un polynôme P est non constant, on ne peut plus parler de la *fonction-polynôme* associée à P [18] puisque là, au contraire, ce choix a toute son importance.

Venons-en à présent au résultat essentiel de cette section : si nous désignons par $P_0(X, Y, Z)$ le polynôme non nul $pYZ + qZX + rXY$ considéré comme élément de $\mathbb{R}[X, Y, Z]$, nous pouvons énoncer que *si un polynôme* $P \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ s'annule *en tout point de la conique circonscrite* $\mathscr{C}$ *d'équation barycentrique* $P_0(X, Y, Z) = 0$, *alors* P_0 *divise* P *dans* $\mathbb{R}[X, Y, Z]$.

Comme la réciproque de cette proposition est triviale, nous aurons établi que l'ensemble des polynômes qui s'annulent en tout point de $\mathscr{C}$ est l'idéal principal de $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ engendré par P_0 [19].

En particulier, si un polynôme P_1 *homogène de degré* 2 *s'annule en tout point de* $\mathscr{C}$, *alors* P_1 *est proportionnel à* P_0. *Cette propriété établit alors trivialement que, si* $P_0(X, Y, Z) = 0$ *et* $P_1(X, Y, Z) = 0$ *sont deux équations barycentriques homogènes de degré* 2 *d'une même conique circonscrite, alors les polynômes* P_0 *et* P_1 *sont proportionnels.*

Il nous reste à prouver la propriété annoncée. La démonstration qui suit utilise un peu d'Algèbre commutative et pourra être omise en première lecture. Nous supposons par exemple que $p \times r \neq 0$ [20] et laissons en exercice le cas particulier plus simple où un seul monôme non nul figure dans P_0.

Nous écrivons, dans l'anneau $\mathbb{R}(X, Y)[Z]$, l'identité de division euclidienne du polynôme $P(X, Y, \cdot)$ par le polynôme $P_0(X, Y, \cdot)$, le point étant chaque

[18] Qui à un point M du plan associerait $P(x, y, z)$.

[19] Un idéal de $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ engendré par une famille de polynômes homogènes, pas nécessairement de même degré, est appelé un *idéal homogène*. L'idéal que nous venons de définir est donc homogène. Voir dans **[22]** un approfondissement de cette notion.

[20] Rappelons que p est le coefficient du terme en YZ dans le polynôme P_0, et r celui du terme en XY.

fois là pour signifier que nous parlons de polynômes en Z à coefficients dans $\mathbb{R}(X,Y)$:

$$P(X,Y,Z) = (pYZ + qZX + rXY) \times \frac{Q_1(X,Y,Z)}{Q_2(X,Y)} + \frac{R_1(X,Y)}{Q_2(X,Y)},$$

où Q_1 est dans $\mathbb{R}[X,Y,Z]$ et R_1, Q_2 dans $\mathbb{R}[X,Y]$ [21].

Montrons que le polynôme R_1 est nul. En effet, pour tout couple (x,y) tel que $py + qx \neq 0$, on calcule le scalaire z tel que $pyz + qzx + rxy = 0$. On a alors $P_0(x,y,z) = 0$ et donc $P(x,y,z) = 0$. Il en découle que $R_1(x,y) = 0$.

Cela montre que la fonction polynôme $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (py+qx)R_1(x,y)$ est nulle. Comme l'anneau des fonctions polynômes à deux variables sur $\mathbb{R}$ est intègre, et que la fonction $(x,y) \longmapsto py + qx$ n'est pas nulle, on en déduit que la fonction polynôme associée à R_1 est nulle, et donc que $R_1 = 0$, puisque le corps $\mathbb{R}$ est de cardinal infini.

Maintenant, $P_0 = (qX + pY)Z + rXY$ et les polynômes $qX + pY$ et rXY sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X,Y]$: ayant établi que P_0 divise P dans $\mathbb{R}(X,Y)[Z]$, nous pouvons conclure qu'il divise aussi P dans $\mathbb{R}[X,Y][Z]$, c'est-à-dire dans $\mathbb{R}[X,Y,Z]$.

Remarque 1. Bien que $\mathbb{R}$ ne soit pas algébriquement clos, ce résultat est aussi simple que celui que nous aurions pu établir, *mutatis mutandis*, dans $\mathbb{C}$ par exemple. Cela tient notamment au fait que la conique d'équation barycentrique $pYZ + qZX + rXY = 0$ contient *suffisamment* de points. Nous n'avons pas à regretter ici notre restriction au cas de coniques circonscrites.

Au contraire, la situation n'est pas aussi idyllique (*sic !*) lorsque l'on s'intéresse aux équations formelles de cercles dans un plan affine euclidien. Le **VI-1.1** est là pour nous montrer que notre résultat tombe en défaut dès lors que l'on accepte de considérer des cercles vides.

Remarque 2. Pour satisfaire, au moins partiellement, la légitime curiosité du lecteur, nous donnons ci-après la variante affine la plus accessible du théorème des zéros.

Rappelons pour commencer que, si K est un corps commutatif, les anneaux de polynômes $A = K[X_1, \ldots, X_n]$ ne sont plus principaux dès que $n \geqslant 2$ mais que, à défaut, ils sont *nœthériens*, c'est-à-dire en particulier que, si $\mathscr{I}$ est un idéal de cet anneau, alors il est de type fini : il existe une famille finie $\{P_i\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$ dans $\mathscr{I}$, telle que $\mathscr{I} = AP_1 + \cdots + AP_p$. Dans la définition

[21] En particulier, R_1 est un polynôme en les seules indéterminées X et Y puisque P_0 est de degré 1 par rapport à Z. Par exemple,

$$Z^2 = (YZ + ZX + XY) \times \frac{Z(X+Y) - XY}{(X+Y)^2} + \frac{X^2Y^2}{(X+Y)^2}.$$

qui suit, l'ensemble $V(\mathscr{I})$ est donc aussi l'ensemble des zéros communs à tous les polynômes P_ℓ.

Soit K un corps (commutatif) algébriquement clos, n un entier naturel et $\mathscr{I}$ un idéal de l'anneau de polynômes $K[X_1, \ldots, X_n]$. Désignons par $V(\mathscr{I})$ la *variété affine* d'équation $\mathscr{I}$:

$$V(\mathscr{I}) = \{X = (X_1, \ldots, X_n) \in K^n, \forall P \in \mathscr{I}, P(X) = 0\} .$$

Alors, un polynôme $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ s'annule en tous les $X \in V(\mathscr{I})$ si, et seulement si, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $P^k \in \mathscr{I}$.

Il est à noter que, si I est un idéal d'un anneau commutatif A, l'ensemble des $x \in A$ pour lesquels il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $x^k \in I$ est toujours un idéal de A ; on l'appelle le *radical* de I et on le note $\sqrt{I}$, ou $\mathrm{Rad}(I)$.

Dans notre énoncé particulier, le corps de base n'avait pas besoin d'être algébriquement clos. Pourtant, les hypothèses et les conclusions rejoignent celles du théorème des zéros qui fait l'objet de cette note.

En effet, si une conique circonscrite $\mathscr{C}$ admet pour équation barycentrique $P_0(X, Y, Z) = 0$, avec $P_0 \in A \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{R}[X, Y, Z]$, on peut la considérer comme égale à $V(\mathscr{I})$, où $\mathscr{I}$ est l'idéal principal $P_0\mathbb{R}[X, Y, Z]$. Dès lors, un polynôme $P_1 \in A$ s'annule en tout point de $\mathscr{C}$ si, et seulement si, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $P_1^k \in \mathscr{I}$. Comme, avec nos hypothèses, le polynôme P_0 est irréductible et que $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ est factoriel, cela équivaut à dire que P_0 divise P_1. Nous voilà retombés sur nos pieds.

2.4. Le centre d'une conique circonscrite

Une conique dégénérant en la réunion de deux droites admet un centre (c'est-à-dire un centre de symétrie) qui est leur point d'intersection lorsqu'elles sont sécantes, et admet une infinité de centres lorsqu'elles sont parallèles : ce sont tous les milieux des segments ayant une extrémité sur une des droites, et l'autre sur la seconde.

Considérons désormais une conique non dégénérée $\mathscr{C}$, d'équation barycentrique $pYZ + qZX + rXY = 0$, avec $pqr \neq 0$. Quel en est le centre, et, d'abord, en a-t-elle bien un ?

Nous établissons ici que *la conique $\mathscr{C}$ admet un centre si, et seulement si, $p^2 + q^2 + r^2 - 2qr - 2rp - 2pq \neq 0$. Si c'est vérifié, les coordonnées barycentriques du centre sont données par le produit matriciel*

$$(1, 1, 1) \begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix}^{-1} .$$

Pour le démontrer, cherchons les points $I_{\mathscr{C}}$, de coordonnées barycentriques normalisées (a, b, c) qui soient centres de symétrie de $\mathscr{C}$. Pour qu'il en soit

ainsi, il est nécessaire que la symétrie de centre $I_{\mathscr{C}}$ envoie A, B et C sur des points A', B' et C' appartenant à $\mathscr{C}$. Vu le **I-7.3**, A', B' et C' ont pour coordonnées barycentriques normalisées $(2a-1,2b,2c)$, $(2a,2b-1,2c)$ et $(2a,2b,2c-1)$. Ces trois points sont sur $\mathscr{C}$ si, et seulement si,

$$\begin{aligned}4pbc+2qc(2a-1)+2rb(2a-1)&\\ &=2pc(2b-1)+4qca+2ra(2b-1)\\ &=2pb(2c-1)+2qa(2c-1)+4rab=0\,.\end{aligned}$$

Développer ces produits donne la condition nécessaire [22]

$$2(pbc+qca+rab)=rb+qc=ra+pc=qa+pb\,.$$

De cela suit que le vecteur-ligne

$$(a,b,c)\times\underbrace{\begin{pmatrix}0&r&q\\r&0&p\\q&p&0\end{pmatrix}}_{F}$$

a ses trois composantes égales et, partant, appartient à la droite vectorielle engendrée par $U=(1,1,1)$. Comme F a pour déterminant $d=2pqr\neq 0$, il est donc nécessaire que (a,b,c) appartienne à la droite vectorielle D engendrée par $V=UF^{-1}$. La matrice (symétrique!) F^{-1} vaut

$$F^{-1}=-\frac{1}{d}\begin{pmatrix}p^2&-pq&-pr\\-pq&q^2&-qr\\-pr&-qr&r^2\end{pmatrix},$$

de sorte que

$$dV=-(p^2-pq-pr,q^2-qr-qp,r^2-rp-rq)\,.$$

Si la somme $S=p^2+q^2+r^2-2qr-2rp-2pq$ des trois composantes de $-dV$ est nulle, aucun élément de D ne peut être le triplet des coordonnées barycentriques d'un point du plan : la conique n'a pas de centre, c'est donc une parabole.

Sinon, c'est-à-dire si $S\neq 0$, il existe effectivement un point $I_{\mathscr{C}}$ (et un seul) dont les coordonnées barycentriques normalisées appartiennent à D; ce triplet est

$$T=-\frac{dV}{S}=\frac{1}{S}(p^2-pq-pr,q^2-qr-qp,r^2-rp-rq)\,.$$

[22] On remarquera que $rb+qc=ra+pc=qa+pb$ équivaut à

$$\frac{\partial\mathscr{Q}}{\partial X}(a,b,c)=\frac{\partial\mathscr{Q}}{\partial Y}(a,b,c)=\frac{\partial\mathscr{Q}}{\partial Z}(a,b,c)\,.$$

Mais, nous n'avons jusqu'ici procédé qu'à une condition nécessaire. Il reste à vérifier que le point $I_{\mathscr{C}}$ est effectivement centre de symétrie de $\mathscr{C}$, rien ne nous garantissant que nous ayons envisagé toutes les paraboles en considérant le seul cas où $S = 0$.

Vu le **I-7.3**, la symétrie σ de centre $I_{\mathscr{C}}$ envoie le point de coordonnées barycentriques $\xi = {}^t(x, y, z)$ sur le point de coordonnées barycentriques $\Phi\xi$, où $\Phi = 2\,{}^tTU - \mathrm{Id}_3$. Dire que σ laisse $\mathscr{C}$ fixe revient à dire que, pour tout vecteur-colonne ξ,

$$ {}^t\xi F\xi = 0 \Longrightarrow {}^t(\Phi\xi)F(\Phi\xi)\,(= {}^t\xi\,{}^t\Phi F\Phi\xi) = 0\,. $$

Pour établir cela, il suffit d'établir que ${}^t\Phi F\Phi$ est proportionnelle à F. Or, $T = \dfrac{-d}{S}UF^{-1}$ et donc $\Psi \overset{\text{déf}}{=} -S(2\,{}^tTU - \mathrm{Id}_3) = 2dF^{-1}\,{}^tU \times U + S\,\mathrm{Id}_3$ est proportionnelle à Φ. Il sera plus simple de montrer que ${}^t\Psi F\Psi$ est proportionnelle à F. On a en effet

$$ {}^t\Psi F\Psi = (2d\,{}^tUUF^{-1} + S\,\mathrm{Id}_3)F(2dF^{-1}\,{}^tUU + S\,\mathrm{Id}_3)\,. $$

Développer cette expression donne

$$ {}^t\Psi F\Psi = (4d^2\,{}^tU\,(UF^{-1}\,{}^tU)\,U + 4dS\,{}^tUU + S^2\mathrm{Id}_3)\,. $$

Or, $UF^{-1}\,{}^tU = -\dfrac{S}{d}$ et on obtient (enfin) ${}^t\Psi F\Psi = S^2\mathrm{Id}_3$.

La condition nécessaire a donc consisté en la traduction de l'appartenance de A', B' et C' à $\mathscr{C}$. Si $I_{\mathscr{C}}$ est tel que cette propriété soit vérifiée, alors $\mathscr{C}$ et $\sigma(\mathscr{C})$ passent toutes deux par les « six » points A, B, C, A', B' et C' et il n'est pas étonnant que $\mathscr{C} = \sigma(\mathscr{C})$. Néanmoins, si par exemple $I_{\mathscr{C}}$ est le milieu du segment $[AB]$, alors $B' = A$, $A' = B$ et nous n'avons plus que quatre points, A, B, C, et C' sommets d'un parallélogramme. En réalité, on peut montrer que, si une ellipse ou une hyperbole contient quatre points formant parallélogramme, alors le centre de ce parallélogramme est celui de la conique[23]. Rien d'étonnant, donc, à ce que le point $I_{\mathscr{C}}$ trouvé ait été le centre cherché, même dans ce cas très particulier.

Maintenant, le problème inverse se propose à nous[24] : connaissant un tri-

[23] Par exemple, si $ABCD$ est un tel parallélogramme, on prend ABC comme triangle de référence, de sorte que le point D a pour coordonnées barycentriques $(1, -1, 1)$. Une conique circonscrite à ABC a une équation barycentrique de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$, avec $-p + q - r = 0$ puisqu'elle passe aussi par D. Dans ces conditions, $S = -4rp$. Si l'on avait $S = 0$, alors on aurait par exemple $r = 0$, donc aussi $q = p \neq 0$ et l'équation barycentrique de la conique serait $(X + Y)Z = 0$, ce qui n'est l'équation barycentrique ni d'une ellipse, ni d'une hyperbole (mais de la réunion des droites *parallèles* AD et BC). Donc, $pr \neq 0$ et les formules *supra* montrent que les coordonnées barycentriques du centre sont $(\,p(p-(p+r)-r), q(q-p-r), r(r-p-(p+r))\,)$; après simplification par le facteur multiplicatif $-2pr$, on obtient bien les coordonnées barycentriques $(1, 0, 1)$ du milieu de AC, qui est le centre du parallélogramme.

[24] Cette étude se révélera utile au **IV-1**.

angle ABC et un point $I_{\mathscr{C}}$, de coordonnées barycentriques (a,b,c), existe-t-il une conique circonscrite au triangle et dont $I_{\mathscr{C}}$ soit le centre ? Vu ce qui précède, cela équivaut à l'existence de p, q et r non tous nuls tels que

$$(\mathscr{S}') \qquad (a,b,c) \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix}}_{F} = (1,1,1)\,.$$

Comme le triplet nul n'est pas solution de ce système, l'existence de notre conique équivaut à l'existence d'une solution de $(\mathscr{S}')$, quelle qu'elle soit. Les inconnues du système étant p, q et r, récrivons-le sous la forme

$$\begin{cases} qc + rb = 1 \\ pc + ra = 1 \\ pb + qa = 1\,. \end{cases}$$

Le déterminant du système est $2abc$ et on en conclut ce qui suit.

- Si par exemple $c = 0$, c'est-à-dire si $I_{\mathscr{C}}$ est sur AB, alors le système $(\mathscr{S}')$ devient $(rb = ra = qa + pb = 1)$. Il est clairement incompatible si $b \neq a$, ou si $ab = 0$, c'est-à-dire si $I_{\mathscr{C}}$ n'est pas le milieu de AB et, sinon, il admet une infinité de solutions, de la forme

$$\left(p\,, q = \frac{1}{a} - pr = \frac{1}{a}\right),$$

avec p réel. Comme nous l'avons vu plus haut, toutes ces coniques passent par A, B, C et le symétrique C' de C par rapport à $I_{\mathscr{C}}$, les quatre points $AC'BC$ formant parallélogramme. Les coniques obtenues ont pour équation barycentrique $pyz + \left(\frac{1}{a} - p\right)zx + \frac{1}{a}xy = 0$. Si on a par exemple $p = \frac{1}{a}$, alors l'équation devient $y(x+z) = 0$; le lecteur vérifiera que la conique dégénère en la réunion de deux droites parallèles, figure dont $I_{\mathscr{C}}$ est bien *un* des centres de symétrie.

- Si $abc \neq 0$, c'est-à-dire si $I_{\mathscr{C}}$ n'est sur aucun des côtés du triangle, alors un seul triplet (p,q,r) est solution de $(\mathscr{S}')$. Il faut encore savoir si $pqr \neq 0$, non pas pour rejeter les coniques dégénérées, mais pour la raison que le calcul matriciel précédent supposait remplie cette condition. Or, $(\mathscr{S}')$ admet par exemple un triplet solution vérifiant $r = 0$ si, et seulement si, il existe (p,q) tels que $qc = pc = pb + qa = 1$. Cela se produit si, et seulement si, $abc \neq 0$ et $a + b = c$, c'est-à-dire si, et seulement si, le point $I_{\mathscr{C}}$ est sur la droite joignant les milieux de $[AC]$ et $[BC]$, mais est différent de ces deux milieux. Un dessin montre alors que la conique dégénère, ce que l'on savait, mais en deux droites parallèles et symétriques par rapport au point $I_{\mathscr{C}}$: l'une d'elles est AB et l'autre passe par C. Ce cas n'est donc pas à exclure.

2.5. Le genre d'une conique circonscrite

Nous revenons à l'invariant S afin de classifier les coniques selon leur genre : ellipse, parabole ou hyperbole.

Dans la section précédente, l'introduction du scalaire $S = p^2 + q^2 + r^2 - 2qr - 2rp - 2pq$, qui séparait les paraboles des coniques à centre a sans doute laissé entrevoir la possibilité de discriminer également ellipses et hyperboles grâce au *signe* de S. Pour ce faire, le plus simple est en effet de passer de l'équation barycentrique $pYZ + qZX + rXY = 0$ à l'équation affine de cette conique dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:

$$pXY + qY(1 - X - Y) + r(1 - X - Y)X = 0\,,$$

soit encore $rX^2 + (q + r - p)XY + qY^2 - rX - qY = 0$. Le discriminant du trinôme $rX^2 + (q + r - p)XY + qY^2$ est $\delta = (q + r - p)^2 - 4qr = p^2 + q^2 + r^2 - 2qr - 2rp - 2pq = S$. On obtient bien respectivement une hyperbole, une parabole ou une ellipse selon que δ est > 0, nul ou < 0.

Ici, la classification est un peu plus précise que l'habituelle classification affine fondée sur le signe de δ : si $\delta < 0$, on obtient une ellipse qui peut être éventuellement vide ou réduite à un point. Lorsque $S < 0$, ce n'est pas le cas avec nos ellipses circonscrites puisqu'elles contiennent au moins trois points : ce sont donc de vraies ellipses. Dans le cas où $\delta \geqslant 0$, la parabole ou l'hyperbole peut dégénérer en la réunion de deux droites ; ici, lorsque $S = 0$, la conique circonscrite ne peut dégénérer en la réunion de deux droites que si, et seulement si, $pqr = 0$: on sait donc toujours si cela se produit ou non.

À noter que l'on a $S = (q + r - p)^2 + (q - r)^2 - (q + r)^2$: cela montre que la forme quadratique qui à (p, q, r) associe S est de signature $(2, 1)$ puisque les trois formes linéaires qui à (p, q, r) associent respectivement $q + r - p$, $q - r$ et $q + r$ forment manifestement une famille libre.

2.6. Les tangentes à une conique circonscrite

Nous gardons dans cette section les notations précédentes : pour une conique circonscrite $\mathscr{C}$ non dégénérée, d'équation barycentrique $pYZ + qZX + rXY = 0$, nous désignons par F la matrice définie comme précédemment.

Nous établissons ici que, *si M de coordonnées barycentriques (a, b, c) est un point de $\mathscr{C}$, à distance finie, la conique $\mathscr{C}$ admet une tangente en M dont une équation barycentrique est*

$$(a, b, c)\, F \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0\,.$$

Revenons pour cela à une équation affine de $\mathscr{C}$, par exemple

$$pUV + qV(1-U-V) + r(1-U-V)U = 0,$$

soit encore $rU^2 + qV^2 + (q+r-p)UV - rU - qV = 0$. Appelons $\Phi(U,V)$ le membre de gauche de cette équation ; cette fonction est de classe C^1 et, si les coordonnées affines de M sont (u_0, v_0), on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial U}(u_0, v_0) = 2ru_0 + (q+r-p)v_0 - r$$

et

$$\frac{\partial \Phi}{\partial V}(u_0, v_0) = 2qv_0 + (q+r-p)u_0 - q.$$

On vérifie par un calcul simple mais fastidieux que ces deux dérivées partielles ne s'annulent ensemble en aucun point de $\mathscr{C}$[25]. Un résultat classique de calcul différentiel montre alors que la tangente en M à $\mathscr{C}$ existe et a pour équation affine

$$(U-u_0)(2ru_0 + (q+r-p)v_0 - r) + (V-v_0)(2qv_0 + (q+r-p)u_0 - q) = 0.$$

Lorsque l'on développe cette équation, le terme constant

$$-2ru_0^2 - 2qv_0^2 - 2(q+r-p)u_0v_0 - ru_0 - qv_0$$

se simplifie en $-(ru_0+qv_0)$ puisque le couple (u_0, v_0) vérifie l'équation affine de $\mathscr{C}$. On revient enfin à l'équation barycentrique en remplaçant U par $\dfrac{Y}{X+Y+Z}$ puis V par $\dfrac{Z}{X+Y+Z}$ et en remarquant que $u_0 = \dfrac{b}{a+b+c}$ et $v_0 = \dfrac{c}{a+b+c}$. L'équation obtenue est celle annoncée, au coefficient multiplicatif -1 près.

La formule qui vient d'être démontrée masque en fait une formule plus générale, propre aux courbes algébriques, et qui sera établie et démontrée dans l'Annexe **A**. Nous y renvoyons le lecteur.

Application 1. On vérifie facilement grâce à la formule de cette section que la tangente en A à $\mathscr{C}$ a pour équation $qZ + rY = 0$. Elle coupe le côté opposé en le point A' de coordonnées barycentriques $(0, q, -r)$, éventuellement à l'infini. De même, les tangentes en B et C coupent les côtés opposés respectifs en les points B' et C' de coordonnées barycentriques $(-p, 0, r)$

[25] Le déterminant du système linéaire $\mathscr{S}$: $\dfrac{\partial \Phi}{\partial U} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial V} = 0$ n'est autre que $-S$, le scalaire S ayant été introduit au **II-2.4**. Si $S \neq 0$, on montre que $\mathscr{S}$ n'est vérifié qu'au centre de la conique, mais ce point ne lui appartient pas puisqu'elle est non dégénérée.

et $(p, -q, 0)$. Ces trois points sont alignés[26] puisque

$$\begin{vmatrix} 0 & q & -r \\ -p & 0 & r \\ p & -q & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Ce résultat constitue un cas dégénéré du théorème de PASCAL que nous établirons à la fin de ce paragraphe.

Application 2. Soit une conique non dégénérée $\mathscr{C}$, et trois points distincts de $\mathscr{C}$: A, B et C. Si l'on connaît les tangentes en deux des points, B et C par exemple, nous pouvons construire la tangente au point A grâce à cette propriété : nous construisons B' et C' comme *supra*, puis A' point d'intersection de BC avec la droite $B'C'$ et enfin la tangente en A qui est la droite AA'.

La section qui suit est plus abstraite et pourra être omise en première lecture.

2.7. La conjugaison (harmonique) par rapport à une conique

Considérons une conique $\mathscr{C}$ aussi générale que possible : nous ne la supposons pas circonscrite *a priori* et elle peut aussi être dégénérée. Comme dans la section **II-2.1**, nous introduisons « la » forme quadratique $\mathscr{Q}_0$ donnant, à un coefficient multiplicatif non nul près, le membre de gauche de l'équation barycentrique de $\mathscr{C}$. La forme bilinéaire symétrique $\mathscr{B}_0$ qui à $L = (x, y, z)$ et $L' = (x', y', z')$ associe $LF\,{}^tL'$ est la forme polaire de $\mathscr{Q}_0$.

Lorsque $\mathscr{C}$ est non dégénérée, ce que nous venons d'établir au **II-2.6** peut donc se récrire comme il suit : si les coordonnées barycentriques de $M \in \mathscr{C}$ sont $\ell = (a, b, c)$, alors une équation barycentrique de la tangente en M à $\mathscr{C}$ est $\mathscr{B}_0(\ell, \xi)$, où $\xi = (X, Y, Z)$.

Nous pouvons maintenant donner une définition plus générale : deux points, disons M et M'[27], de coordonnées barycentriques respectives $\ell = (a, b, c)$ et $\ell' = (a', b', c')$ sont *conjugués* par rapport à $\mathscr{C}$ si $\mathscr{B}_0(\ell, \ell') = 0$[28].

Récapitulons les résultats de la section **II-2.6** valables dans le cas d'une conique $\mathscr{C}$ non dégénérée : d'une part, l'ensemble des points conjugués d'un point $M \in \mathscr{C}$ est la tangente en ce point ; d'autre part, si $\mathscr{C}$ admet un centre I, l'ensemble des

[26] D'ailleurs, la droite qui joint ces points a pour équation barycentrique $qrX + rpY + pqZ = 0$.

[27] ...points qui peuvent éventuellement être à l'infini.

[28] À noter que cette relation est **symétrique**. Moins symétrique est, en apparence seulement, la formule équivalente

$$a' \frac{\partial \mathscr{Q}}{\partial X}(a, b, c) + b' \frac{\partial \mathscr{Q}}{\partial Y}(a, b, c) + c' \frac{\partial \mathscr{Q}}{\partial Z}(a, b, c) = 0 .$$

conjugués de I est la droite à l'infini. En effet, les coordonnées barycentriques de I vérifient $\underbrace{(a,b,c)}_{\ell} F = (1,1,1)$ et on a donc

$$\ell\, F\, {}^t(X,Y,Z) = 0 \Longleftrightarrow X+Y+Z = 0.$$

Toujours avec l'hypothèse de non-dégénérescence, l'ensemble des conjugués d'un point M, de coordonnées barycentriques ℓ du plan est la *droite* d'équation $\mathscr{B}_0(\ell,\xi)$, avec $\xi = (X,Y,Z)$: on l'appelle la *polaire* de M (par rapport à $\mathscr{C}$). Le lecteur est invité à vérifier que l'ensemble ainsi défini est bien une droite : bien entendu, l'équation barycentrique est bien homogène de degré 1, mais il s'agit de s'assurer que $\mathscr{B}_0(\ell,\xi)$ n'est pas nul pour tout triplet ξ.

Inversement, si on se donne une droite Δ d'équation barycentrique $aX+bY+cZ=0$, avec (a,b,c) non nul, il existe un unique point M, de coordonnées barycentriques (x,y,z), dont Δ est la polaire ; ce point, le *pôle* de Δ, est tel que $(x,y,z) = (a,b,c)F^{-1}$.

Important est le caractère *symétrique* de la relation de conjugaison : un point M et un point M' sont conjugués si, et seulement si, l'un appartient à la polaire de l'autre. Établir que trois points M, M' et M'' sont alignés équivaut à établir qu'il existe un point N conjugué à ces trois points [29]. Autrement dit, trois points sont alignés si, et seulement si, leurs polaires concourent.

Si on accepte les coniques dégénérées, on perd un peu en généralité. Supposons une conique $\mathscr{C}$ réunion de deux droites **distinctes**. Si ces droites sont sécantes, appelons A leur point de concours, et appelons B et C des points distincts de A choisis sur chacune des droites, de sorte que $\mathscr{C}$ est la réunion des droites AB et AC : par rapport à ce triangle, une équation barycentrique de $\mathscr{C}$ est $YZ=0$. Si elles sont parallèles, nous choisirons le point A sur la première et les points B et C sur la seconde : une équation barycentrique sera alors $X(Y+Z)=0$. Nous allons seulement faire les calculs dans le premier cas, car ceux du second sont analogues ; nous ne les détaillerons donc pas.

Deux points $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z')$, à l'infini ou non, sont alors conjugués si, et seulement si, $yz'+zy'=0$. On voit donc que tout point du plan est conjugué avec A, et la polaire de A n'a plus de sens. Au contraire, un point $M \neq A$ de coordonnées barycentriques (x,y,z), avec $y \neq 0$ ou $z \neq 0$, admet comme polaire la droite d'équation barycentrique $zY+yZ=0$: c'est une droite passant par A. Deux points (distincts de A) alignés avec A ont la même polaire, car leurs coordonnées barycentriques ne diffèrent que par la composante x et une droite passant par A, d'équation barycentrique $bY+cZ=0$ (avec $b \neq 0$ ou $c \neq 0$) est la polaire de tous les points de coordonnées barycentriques (x,c,b), où x décrit $\mathbb{R}$.

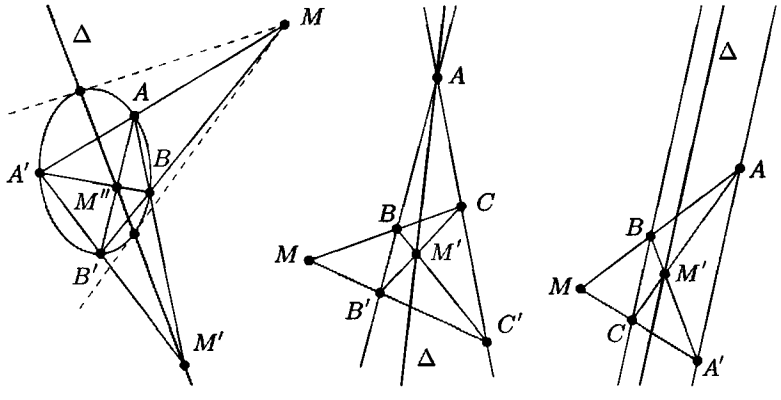
Dans le cas de deux droites parallèles, avec les notations *supra*, le point à l'infini de BC est conjugué avec tout point du plan. Tout point M distinct du point à l'infini de la droite BC a une polaire, et elle est parallèle à BC. Deux points sur une

[29] En effet, si Δ désigne la droite MM' et N le pôle de cette droite, un point M'' est sur Δ si, et seulement si, il conjugué à N.

même parallèle à BC ont la même polaire. Inversement, toute droite parallèle à BC est la polaire d'un ensemble de points, tous situés sur une parallèle à BC [30].

Même si la généralité en souffre, nous n'exclurons pas les coniques dégénérées, d'autant plus qu'historiquement c'est ce cas-là qui s'est imposé le premier. C'est d'ailleurs la considération de coniques dégénérées qui a été à l'origine de la notion de forme quadratique *dégénérée*.

La notion de droite polaire a d'autant plus d'intérêt qu'il existe une construction de celle-ci, à la règle seule d'ailleurs. La figure qui suit l'illustre dans chacun des trois cas précédents : une conique non dégénérée, la réunion de deux droites sécantes puis enfin la réunion de deux droites parallèles. Nous la justifierons dans le premier cas, les deux autres étant analogues.



Décrivons la construction de la première figure : par le point M donné, on mène deux sécantes à la conique, disons AA' et BB' [31]. Les droites AB et $A'B'$ se coupent en un point M', les droites AB' et $A'B$ se coupent en un point M''. La polaire de M est alors la droite $M'M''$.

Avec ces notations, prenons les points A, A' et B pour former le triangle de référence. Les coordonnées barycentriques de M sont de la forme $(x, y, 0)$, la droite BM a pour équation barycentrique $yX - xY = 0$ et les coordonnées barycentriques de B' sont de la forme $(\lambda x, \lambda y, z)$, avec $\lambda \neq 0$ puisque $B' \neq B$. Nous en déduisons qu'une équation barycentrique de $\mathscr{C}$ est de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$, avec $p\lambda yz + q\lambda zx + r\lambda^2 xy = 0$ puisqu'elle passe par B'. On a donc aussi $pyz + qzx + \lambda rxy = 0$. Maintenant, on obtient facilement comme coordonnées barycentriques de M' le triplet $(\lambda x, 0, z)$ et on en déduit que M et M' sont conjugués par rapport à $\mathscr{C}$: en effet, cela équivaut à la formule

$$(x, y, 0) \begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

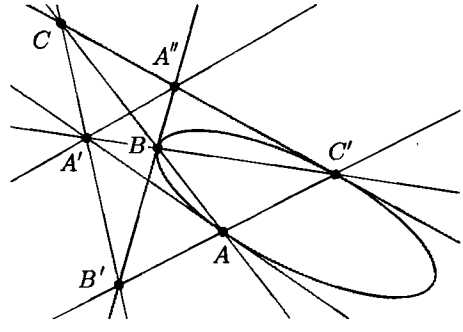
[30] Le cas de deux droites parallèles ne se distingue donc pas du précédent. Simplement, le point d'intersection des droites est à l'infini et c'est ce point qui joue un rôle particulier.

[31] Nous verrons au **II-3.1** que, si l'on connaît cinq points A, B, C, D, E d'une conique $\mathscr{C}$, on sait construire le point en lequel une droite passant par l'un de ces cinq points recoupe la courbe. Cela permet ici de construire A' et B' connaissant A, B et M.

que l'on vérifie trivialement. De même, le point M'' est conjugué avec M et la polaire de M est donc bien $M'M''$.

Cette application possède elle-même une application « secondaire » illustrée par la première figure : soit un point M d'où l'on puisse mener deux tangentes distinctes à une conique $\mathscr{C}$, alors les deux points de contact T et T' de ces tangentes sont les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la polaire de M. En effet, puisque M est sur la tangente à $\mathscr{C}$ en T, les points T et M sont conjugués par rapport à $\mathscr{C}$, et de même T' et M. La polaire de M est donc aussi la droite TT' ! Dans le cas de la figure, si le point M avait été placé à l'« intérieur » de l'ellipse, la droite $M'M''$ ne l'aurait rencontrée en aucun point.

Revenons maintenant aux notations de l'application **1** de la section **II-2.6** et montrons que les points A et A' sont conjugués par rapport à la conique Γ réunion des droites BB' et CC' (qui sont des tangentes à $\mathscr{C}$). Nous pourrons alors reformuler l'énoncé de l'application **1** comme il suit : soit trois points A, B et C d'une conique $\mathscr{C}$ non dégénérée, T_A, T_B et T_C les tangentes en ces trois points, Γ la conique réunion des droites T_B et T_C, de centre le point A''. La droite T_A est celle qui joint le point A au point d'intersection de BC avec la polaire de A par rapport à Γ[32]. Les droites BC et $B'C'$ sont des sécantes à Γ issues de A, avec les points B, C, B' et C' sur Γ ; comme ces droites se coupent au point A', le mode de construction *supra* montre que A et A' sont effectivement conjugués par rapport à Γ.



Vérifions-le par le calcul : la droite T_A a pour équation barycentrique $rY+qZ=0$ et le point A' a pour coordonnées barycentriques $(0,-q,r)$; les droites T_B et T_C ont pour équations barycentriques respectives $rX+pZ=0$ et $qX+pY=0$, de sorte que la conique Γ a pour équation barycentrique $(rX+pZ)(qX+pY)=0$. La matrice de cette forme quadratique est $\frac{1}{2}F$, où

$$F=\begin{pmatrix} 2rq & rp & qp \\ rp & 0 & p^2 \\ qp & p^2 & 0 \end{pmatrix},$$

et la relation de conjugaison équivaut à la formule

$$\begin{pmatrix} 0 & -q & r \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

dont la vérification est immédiate.

[32] Ici, cette polaire est $A'A''$ et elle coupe BC au point A'.

Nous ne pouvons pas clore cette section sans ramener la notion de *conjugaison* à celle d'harmonie, présente au surplus dans le titre et historiquement antérieure.

Donnons-nous une droite PQ, avec $P \neq Q$, et deux points M et M', distincts ou non, sur PQ. Nous allons montrer que, si M et M' sont conjugués par rapport à *une* conique passant par P et Q, dégénérée ou non, mais ne contenant pas la droite PQ, alors ils le sont par rapport à *toutes* les coniques de cette forme.

Choisissons une point R formant triangle avec P et Q, et prenons PQR comme triangle de référence. Les coordonnées barycentriques de M et M' sont respectivement de la forme $(x, y, 0)$ et $(x', y', 0)$, avec par exemple (voir **I-3**)

$$x = -\overline{QM},\ y = \overline{PM},\ x' = -\overline{QM'},\ y' = \overline{PM'},$$

où l'on remarquera que ces scalaires sont indépendants du choix de R. Une conique passant par P et Q a une équation barycentrique de la forme $0X^2 + 0Y^2 + \ell Z^2 + 2pYZ + 2qZX + 2rXY = 0$ et la condition de conjugaison équivaut à $r(xy' + yx') = 0$. Or, $r \neq 0$ sinon l'équation barycentrique de cette conique se factoriserait par Z et la conique contiendrait PQ, ce que nous avons exclu. Notre condition équivaut donc à $xy' + yx' = 0$ [33]. Si les coordonnées barycentriques de P sont $(x, y, 0)$, celles de Q sont $(x, -y, 0)$.

Lorsque M est le milieu de PQ, on a $x = y \neq 0$ et M' est le conjugué de M si, et seulement si, $x' + y' = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, le point M' est à l'infini (sur PQ). De même, lorsque M est à l'infini sur PQ, son conjugué est le milieu de PQ.

Intéressons-nous aux autres cas. Si $M = P$, respectivement $M = Q$, alors la conjugaison équivaut à $M' = P$, respectivement $M' = Q$. Sinon, on a $xyx'y' \neq 0$ et cette condition équivaut à $\dfrac{y}{x} : \dfrac{y'}{x'} = -1$, c'est-à-dire à

$$\frac{\overline{M'P}}{\overline{M'Q}} : \frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}} = -1\,.$$

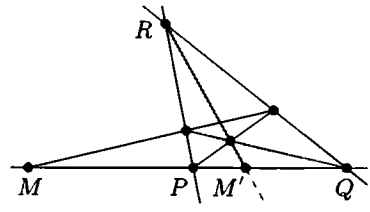
Cette relation montre que le cas où M est à l'infini par exemple ne se distingue pas du cas général : si M « tend vers l'infini », le quotient $\overline{MP}/\overline{MQ}$ tend vers 1 et la relation de conjugaison donne, à la limite, $\overline{M'P}/\overline{M'Q} = -1$, c'est-à-dire « M' est le milieu de PQ ».

Lorsque la relation $xy' + yx' = 0$ (indépendante du choix de R, c'est-à-dire intrinsèque à la configuration des quatre points) est vérifiée, on dit que les quatre points alignés P, Q, M et M' sont en *division harmonique* et on dit aussi que M' est le *conjugué harmonique* de M par rapport à PQ [34]. Le membre de gauche de la formule précédente s'appelle le *birapport* des quatre points $PQMM'$, mais n'est pas *a priori* défini lorsque M ou M' coïncident avec P ou Q.

[33] Relation indépendante de la conique.

[34] Ou que M est le *conjugué harmonique* de M' par rapport à PQ. La relation est symétrique.

Étant donné PQ comme *supra* et $M \neq P \neq Q$ sur la droite PQ, la construction de M' tel que la division $PQMM'$ soit harmonique découle de celle illustrée par la figure de la page **67**. Il suffit par exemple de choisir un point R formant triangle avec P et Q, de considérer la conique $\mathscr{C}$ réunion des droites RP et RQ et de construire la polaire Δ de M par rapport à $\mathscr{C}$. La droite Δ coupe alors PQ en le point M' cherché : cela résulte du caractère « universel » de la notion de conjugaison qui vient d'être établi.



2.8. Les asymptotes d'une hyperbole circonscrite

Considérons ici une hyperbole non dégénérée $\mathscr{H}$ circonscrite, c'est-à-dire ayant une équation barycentrique de la forme $\mathscr{Q}(X,Y,Z) = pYZ + qZX + rXY = 0$, avec $pqr \neq 0$ et $S = p^2 + q^2 + r^2 - 2qr - 2rp - 2pq > 0$.

Nous allons établir qu'il existe, à un coefficient multiplicatif non nul près, exactement deux vecteurs lignes non nuls $L = (a,b,c)$ vérifiant $a+b+c = 0$ et $\mathscr{Q}(L) = 0$, et qu'à chaque L trouvé correspond une asymptote de $\mathscr{H}$, d'équation barycentrique $LF\,{}^t\xi$, avec $\xi = (X,Y,Z)$, où la matrice F est définie comme au **II-2.1**.

En effet, $a+b+c = 0$ et $\mathscr{Q}(L) = 0$ équivaut à $c = -(a+b)$ et $rab - (a+b)(qa+pb) = -(qa^2 + (p+q-r)ab + pb^2) = 0$. Fixons b et considérons l'expression $qa^2 + (p+q-r)ab + pb^2$ comme un trinôme en a, de degré effectif 2. Le discriminant en est $Sb^2 \geqslant 0$. Donc,

$$qa^2 + (p+q-r)ab + pb^2 = 0 \Longleftrightarrow a = \frac{r-p-q \pm \sqrt{S}}{2q} b\,.$$

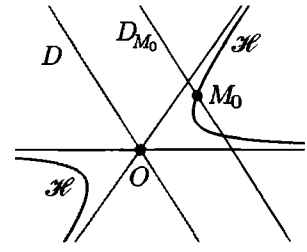
On obtient alors bien à un coefficient près exactement deux solutions, savoir

$$\begin{cases} L_1 = \left(r-p-q+\sqrt{S}, 2q, -r+p-q-\sqrt{S}\right) \\ L_2 = \left(r-p-q-\sqrt{S}, 2q, -r+p-q+\sqrt{S}\right). \end{cases}$$

On vérifie sans peine que ces deux vecteurs-lignes sont non colinéaires, et donc en particulier non nuls.

Pour en déduire les asymptotes de $\mathscr{H}$, considérons-en l'équation affine dans un repère dont les axes sont ses asymptotes. Une telle équation est de la forme $XY = \lambda$, avec $\lambda \neq 0$. Si un point M_0 de coordonnées affines (x_0, y_0) est sur $\mathscr{H}$, une parallèle menée de M_0 à une des asymptotes ne recoupe *jamais* $\mathscr{H}$ en un second point. Par exemple, la droite verticale d'équation affine $X = x_0$ coupe $\mathscr{H}$ en le seul point M_0. En outre, parmi toutes les droites verticales (ou horizontales), seule l'asymptote ne coupe $\mathscr{H}$ en *aucun* point.

Au contraire, étant donné une droite D non parallèle aux axes, on peut trouver M_0 sur $\mathscr{H}$ tel que la parallèle D_{M_0} à D menée de M_0 recoupe $\mathscr{H}$ en un autre point. On s'en convainc grâce à la figure ci-contre ou, bien sûr, par le calcul : si D a pour équation affine $Y = aX + b$, avec $a \neq 0$, et si $x_0y_0 = \lambda$, alors D_{M_0} a pour équation affine $Y = a(X - x_0) + y_0$, de sorte que les abscisses des points de $\mathscr{H} \cap D_{M_0}$ sont les solutions de l'équation $\mathscr{E}$ en X



$$X(a(X - x_0) + y_0) - \lambda = 0\,,$$

dont le discriminant est $\delta(x_0) = (y_0 - ax_0)^2 + 4a\lambda = a^2x_0^2 - 2ax_0y_0 + y_0^2 + 4a\lambda$. Comme $x_0y_0 = \lambda$, x_0 est non nul et $\delta(x_0) = \left(ax_0 + \dfrac{\lambda}{x_0}\right)^2$ qui est strictement positif sauf pour au plus deux valeurs de x_0. L'équation $\mathscr{E}$ possède alors la solution x_0, mais aussi une seconde solution, et le résultat est établi.

En annexe, dans la section **A-3**, nous reviendrons sur ces questions d'intersection, rendues nécessaires par des constructions ultérieures.

Nous pouvons conclure maintenant. L'hyperbole $\mathscr{H}$ possède un centre, de coordonnées barycentriques UF^{-1}, où $U = (1, 1, 1)$, voir au **II-2.4**. Soit aussi $L \in \{L_1, L_2\}$ un des triplets trouvés dans cette section. Utilisons la remarque précédente pour montrer que la droite Δ_0 paramétrée[35] par $(t, u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \longmapsto tUF^{-1} + uL$ est asymptote à la conique. Soit en effet un point $M_0 \in \mathscr{H}$, de coordonnées barycentriquesξ vérifiant $\xi F\,{}^t\xi = 0$. Un calcul simple montre que $(t\xi + uL)F\,{}^t(t\xi + uL) = 2tu\xi F\,{}^tL$, notamment car $\xi F\,{}^t\xi = LF\,{}^tL = 0$. Le scalaire $\xi F\,{}^tL$ ne peut être nul, car sinon la droite Δ paramétrée par $(t, u) \longmapsto t\xi + uL$ serait incluse dans $\mathscr{H}$; mais cette conique est non dégénérée. Donc, le scalaire $(t\xi + uL)F\,{}^t(t\xi + uL)$ ne s'annule que pour $u = 0$ (car t décrit $\mathbb{R}^*$) et Δ ne coupe $\mathscr{H}$ qu'en un point. Comme c'est vérifié pour tout point $M_0 \in \mathscr{H}$, nous avons bien trouvé une direction asymptotique. Maintenant, la droite Δ_0 ne coupe la conique en aucun point, car

$$\begin{aligned}(tUF^{-1} + uL)F\,{}^t(tUF^{-1} + uL)&\\ = t^2UF^{-1}\,{}^tU + 2tuU\,{}^tL + u^2LF\,{}^tL) &= -\frac{S}{2pqr}t^2.\end{aligned}$$

En effet, $UF^{-1}\,{}^tU = -\dfrac{S}{2pqr}$, $U\,{}^tL = 0$ et $LF\,{}^tL = 0$ par construction de L.

La droite Δ_0 qui est parallèle à une direction asymptotique ne coupe donc la conique en aucun point, puisque t décrit $\mathbb{R}^*$ et c'est donc une asymptote.

[35] Voir le **I-5.2**.

Pour tout $(t,u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on a $LF\,{}^t(tUF^{-1}+uL) = tL\,{}^tU + uLF\,{}^tL = 0$; donc Δ_0 est incluse dans la droite d'équation barycentrique $LF\,{}^t\xi = 0$, avec $\xi = (X,Y,Z)$. Il y a donc bien égalité.

Comme on le voit, tout se passe comme si les asymptotes d'une hyperbole étaient les tangentes en ses points à l'infini. C'est ce qui ressort de l'analogie entre l'équation de cette section et celle de la précédente.

Note. Et les paraboles ? Le principe de détermination de l'axe d'une parabole $\mathscr{P}$ circonscrite est analogue : si deux droites parallèles (mais distinctes) ne coupent une parabole qu'en un point chacune, alors elles sont parallèles à l'**axe** de $\mathscr{P}$.

Si $\mathscr{P}$ a une équation barycentrique de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$, avec $p^2+q^2+r^2-2qr-2rp-2pq = 0$, alors, si on pose

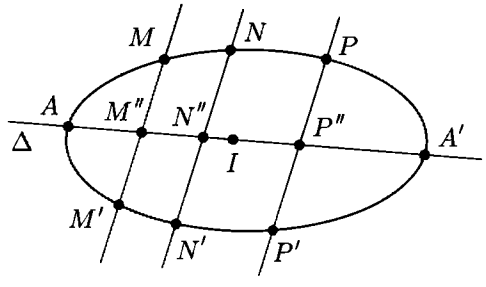
$$L = \big(p(p-q-r), q(q-r-p), r(r-p-q)\big)\,,$$

de sorte que les droites paramétrées par $(t,u) \neq (0,0) \longmapsto t(0,1,0)+uL$ et $(t,u) \neq (0,0) \longmapsto t(0,0,1)+uL$ sont parallèles et ne coupent $\mathscr{P}$ qu'en les points B et C respectivement. Elles dirigent donc l'axe de $\mathscr{P}$; autrement dit, l'axe de $\mathscr{P}$ admet L pour vecteur directeur.

2.9. Directions conjuguées d'une conique

2.9.1. Milieux de cordes

Dans cette section, nous allons établir et interpréter le résultat suivant : *soit Γ une conique (non dégénérée) ayant un centre I, et deux droites parallèles distinctes la coupant respectivement en des points M, M' et N, N', alors les milieux respectifs M'' et N'' des segments MM' et NN' sont alignés avec I.*



Nous étudierons aussi le cas de la parabole, et tirerons aussi quelques conclusions de cet alignement.

Commençons par prouver le résultat annoncé. Nous prenons comme triangle de référence le triangle (non aplati) ABC, où $A = M$, $B = M'$ et $C = N$; la conique Γ a, relativement à ce triangle, une équation barycentrique de la forme $pYZ+qZX+rXY = 0$, avec $p^2+q^2+r^2-2(qr+rp+pq) \neq 0$.

Le point M'' a pour coordonnées barycentriques $(1,1,0)$; la droite NN', parallèle à MM' et passant par N, a donc pour équation barycentrique $X+Y=0$. Elle coupe Γ en N et en le point N', et un calcul simple montre alors que les coordonnées barycentriques de N' sont $(q-p,p-q,r)$. Les coordonnées barycentriques du milieu N'' du segment NN' sont alors $(q-p,p-q,2r)$, voir au **I-5.1**. Les coordonnées barycentriques du point I ont été déterminées au **II-2.4** ; ce sont

$$(p^2-pq-pr,q^2-qr-qp,r^2-rp-rq)\,,$$

de sorte que l'alignement annoncé équivaut à la nullité du déterminant

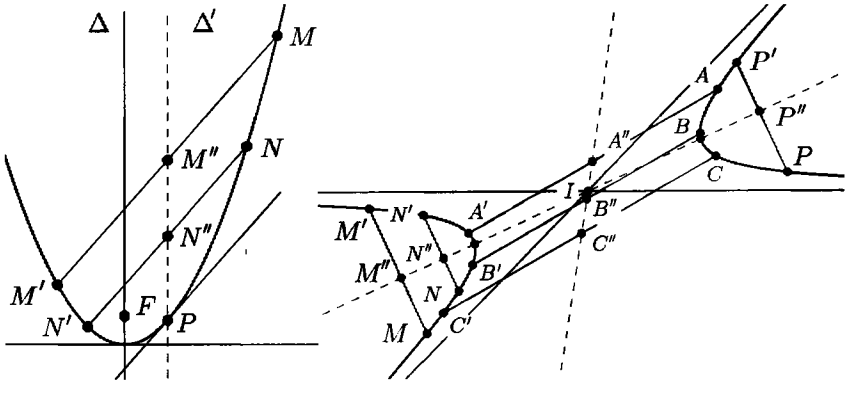
$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ q-p & p-q & 2r \\ p^2-pq-pr & q^2-qr-qp & r^2-rp-rq \end{vmatrix}.$$

Or, on évalue facilement ce déterminant : il suffit de soustraire la première colonne à la deuxième, de factoriser $p-q$ dans la nouvelle deuxième colonne et de développer par rapport à la première ligne. On a alors

$$D=2(p-q)\begin{vmatrix} 1 & r \\ -p-q+r & r^2-rp-rq \end{vmatrix}=0$$

et le résultat est établi.

Cela fournit d'ailleurs un moyen de déterminer le centre d'une conique à centre : si MM' et NN' sont deux « cordes » parallèles inscrites dans la conique, le centre appartient à la droite qui en rallie les milieux. Il suffit alors de choisir deux autres cordes parallèles, mais non parallèles aux deux premières, pour déterminer une seconde droite passant par le centre. Ce dernier est alors à l'intersection de ces deux droites. Cette construction est illustrée, dans le cas de l'hyperbole par exemple, dans la figure qui suit.



Le même calcul de déterminant que celui qui vient d'être effectué montre que les milieux des cordes d'une parabole parallèles à une direction donnée

appartiennent à une parallèle Δ' à l'axe Δ de la parabole. Ces milieux ne décrivent pas la droite Δ' entière, mais seulement une demi-droite (ayant pour extrémité le point P où la tangente possède la direction donnée ; c'est le « cas-limite » d'une corde réduite au seul point P). Lorsque la direction donnée est celle de l'axe, on n'a jamais de telles cordes, tout se passant comme si l'une des extrémités était rejetée à l'infini.

Dans le cas de l'ellipse, voir la figure de la page **72**, les milieux des cordes de direction donnée ne décrivent qu'un segment, tel le segment AA' que l'on y observe[36]. En ces deux points A et B, les tangentes à l'ellipse ont la direction donnée.

Dans le cas de l'hyperbole, les milieux peuvent décrire une droite tout entière : cela se produit lorsque la direction est telle que les extrémités des cordes appartiennent à deux branches différentes de la courbe ; on le constate avec les cordes AA', BB' et CC'. Au contraire, si les extrémités restent sur une même branche, comme cela se passe avec les segments MM', NN' et PP', les milieux décrivent une droite privée d'un segment (plus précisément un segment passant par le centre, mais cela n'empêche pas la construction de celui-ci). Encore une fois, on ne trouvera pas de cordes parallèles à une direction asymptotique d'une hyperbole.

Donnons-nous une direction de cordes, c'est-à-dire un point à l'infini Ω, voir l'Annexe **B**. Si MM' est une corde d'une conique $\mathscr{C}$, parallèle à cette direction, alors Ω appartient à la droite MM' et, si M'' est le milieu de MM', la division $MM'M''\Omega$ est harmonique, voir au **II-2.7**. En d'autres termes, le point M'' est sur la polaire de Ω par rapport à $\mathscr{C}$. Cela explique donc l'alignement de tous ces milieux.

En outre, si $\mathscr{C}$ a un centre I, la polaire de I est la droite à l'infini, qui passe par Ω. Donc, la polaire de I par rapport à $\mathscr{C}$ passe, elle, par Ω. C'est ce que nous venons également de vérifier par ce calcul de déterminant.

Dans le cas d'une parabole, tout se passe comme si le centre était rejeté à l'infini, dans la direction de l'axe, et cela confirme les résultats qui viennent d'être énoncés dans ce dernier cas.

On appelle *diamètre* d'une conique $\mathscr{C}$ toute droite passant par le centre de $\mathscr{C}$, lorsque $\mathscr{C}$ est une conique à centre, ou toute parallèle à l'axe de $\mathscr{C}$, lorsque $\mathscr{C}$ est une parabole.

Nous avons établi *supra* que *les milieux des cordes parallèles à une direction donnée inscrites dans une conique $\mathscr{C}$ non dégénérée appartiennent à un même diamètre de $\mathscr{C}$*. Ce diamètre est appelé le *diamètre conjugué* de la direction en question.

[36] Nous ne détaillons pas ces calculs immédiats. Ils reviennent à discuter par un discriminant le nombre de solutions d'une équation du second degré. Dans le cas particulier d'une direction asymptotique, le degré de l'équation s'abaisse à 1, voire à 0, et cela explique l'absence de corde « à distance finie » sur la conique.

2.9.2. Conjugaison et bilinéarité

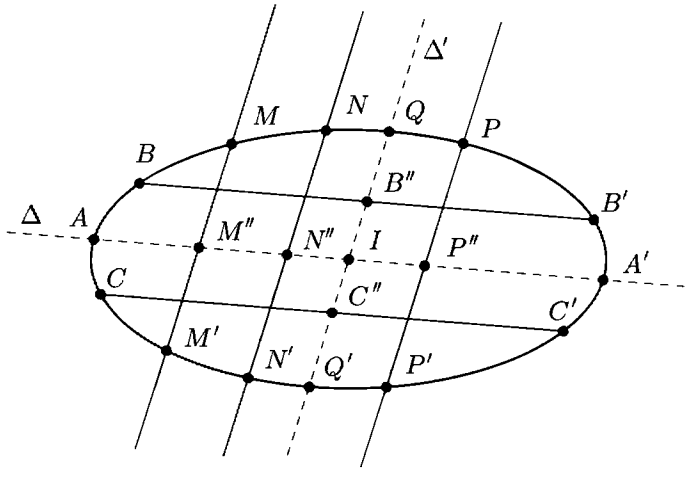
Nous allons maintenant expliquer l'épithète *conjugué*.

Pour cela, nous énonçons ce qui suit : *soit une conique $\mathscr{C}$, dont l'équation barycentrique par rapport à un triangle de référence est $q(X,Y,Z) = 0$, où q est une forme quadratique, et soit deux cordes parallèles MM' et NN' inscrites dans $\mathscr{C}$, de milieux respectifs M'' et N'', alors, si $\mathscr{B}_0$ désigne la forme polaire de q, on a*

$$\mathscr{B}_0\left(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M''N''}\right) = 0\,.$$

En d'autres termes, deux vecteurs appartenant respectivement à une direction et à la direction du diamètre conjugué sont orthogonaux relativement à la forme bilinéaire $\mathscr{B}_0$. Le mot *orthogonalité* étant mieux adapté au cas d'un produit scalaire, le terme traditionnellement retenu a donc été *diamètres conjugués* plutôt que *diamètres orthogonaux*.

Ce résultat nous apprend aussi que la relation de conjugaison est symétrique, et c'est ce que nous vérifions à partir de la figure qui suit :



Cette figure reprend et précise celle de la page **72**, dans le cas de l'ellipse[37] ; la droite Δ est le diamètre conjugué de la direction commune de MM', NN' et PP'. Les cordes AA', BB' et CC', parallèles à Δ, ont leurs milieux sur le diamètre conjugué Δ' de la direction de Δ[38].

Bien entendu, le milieu du segment AA' est le centre I de la conique, de même que le milieu de QQ'. Cela résulte de ce qui précède, ou du fait que I est centre de symétrie de la conique.

[37] Cela serait la même chose avec une hyperbole, également conique à centre.

[38] Avec la définition qui suit, nous disons tout simplement que les diamètres Δ et Δ' sont *conjugués*.

Grâce à cette symétrie, on peut généraliser la notion de *conjugaison* par rapport à une conique $\mathscr{C}$ non dégénérée : deux directions sont *conjuguées* si le diamètre conjugué de l'une admet l'autre comme direction. Deux diamètres sont *conjugués* si la direction de l'un admet l'autre comme diamètre conjugué.

Il nous reste à vérifier la relation d'orthogonalité annoncée. Choisissons, comme au début de cette section, le triangle $MM'N$ comme triangle de référence, de sorte que l'équation barycentrique de $\mathscr{C}$ est $pYZ + qZX + rXY = 0$. Les coordonnées barycentriques du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sont $(-1,1,0)$, voir au **A-1** ; les coordonnées barycentriques normalisées du point M'' sont $\frac{1}{2}(1,1,0)$, celles du point N'' sont $\frac{1}{2r}(q-p, p-q, 2r)$, et les coordonnées barycentriques du vecteur $\overrightarrow{M''N''}$ sont alors $\frac{1}{2r}(q-p,p-q,2r) - \frac{1}{2}(1,1,0)$, c'est-à-dire encore $\frac{1}{2r}(q-p-r, p-q-r, 2r)$.

La relation attendue équivaut à celle qui suit, qui est une simple vérification :

$$(-1,1,0)\begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q-p-r \\ p-q-r \\ 2r \end{pmatrix} = 0\,.$$

Nous retrouverons cette situation géométrique à la fin du **II-4.1**.

2.9.3. Conjugaison et polarité

Pour terminer, nous énonçons et établissons ce qui suit : *si* Γ *est une conique non dégénérée de centre* Ω, *si* M *est un point distinct de* Ω, *et si* Δ *est sa polaire par rapport à* Γ, *alors les directions des droites* ΩM *et* Δ *sont conjuguées (par rapport à* Δ*).*

Voici une raison simple, que l'on préférera sans doute au calcul qui suit : considérons Δ_∞ le point à l'infini de Δ ; ce point est conjugué avec M puisqu'il appartient à la polaire de M. Il est aussi conjugué avec Ω puisque la polaire du centre d'une conique est la droite de l'infini. La polaire de Δ_∞ est donc la droite ΩM, ce qui achève la démonstration.

Pour une preuve barycentrique, choisissons un triangle de référence ABC inscrit dans Γ, dont une équation barycentrique est donc de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$, avec $pqr \neq 0$. Appelons $\xi = (x,y,z)$ les coordonnées barycentriques normalisées de M, puis U le vecteur-colonne ${}^t(1,1,1)$ et enfin F la matrice $\begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées barycentriques du centre Ω sont ${}^tUF^{-1}$; elles ne sont pas normalisées, mais elles le deviennent si on les divise par leur somme, qui

est ${}^tUF^{-1}U$. Les coordonnées barycentriques du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ sont donc $\xi - \dfrac{{}^tUF^{-1}}{{}^tUF^{-1}U}$, soit encore $\left({}^tUF^{-1}U\right)\xi - {}^tUF^{-1}$ après réduction au même dénominateur.

Maintenant, une équation barycentrique de Δ est $(X,Y,Z)\,F\,{}^t\xi = 0$, de sorte qu'un vecteur directeur de cette droite a des coordonnées barycentriques de la forme $V = (\alpha,\beta,\gamma)$, où $\alpha+\beta+\gamma = 0$, c'est-à-dire encore $VU = 0$, puisque V est le triplet de coordonnées barycentriques d'un vecteur. On a aussi $VF\,{}^t\xi = 0$ du fait de l'équation barycentrique de la droite Δ [39].

Il reste donc à vérifier que les deux vecteurs directeurs annoncés sont conjugués, c'est-à-dire que

$$V \times F \times {}^t\left(\left({}^tUF^{-1}U\right)\xi - {}^tUF^{-1}\right) = 0\,.$$

Puisque ${}^tUF^{-1}U$ est un scalaire et que F est une matrice symétrique,

$$F\,{}^t\left(\left({}^tUF^{-1}U\right)\xi - {}^tUF^{-1}\right) = \left({}^tUF^{-1}U\right)F\,{}^t\xi - FF^{-1}U\,,$$

et les deux relations $VU = 0$ et $VF\,{}^t\xi = 0$ donnent bien le résultat escompté.

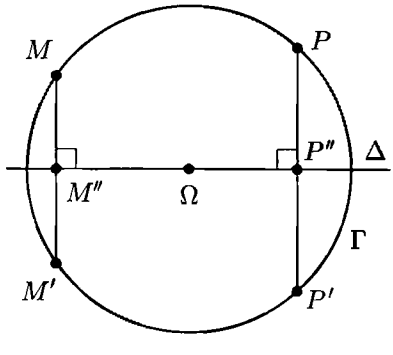
2.9.4. Le cas particulier des cercles

Lorsqu'une conique Γ est un cercle, la notion de *diamètre d'une conique* coïncide avec la notion classique de *diamètre d'un cercle* ; il s'agit dans les deux cas d'une droite passant par le centre du cercle. De même, deux diamètres sont *conjugués* par rapport à Γ si, et seulement si, ils sont orthogonaux au sens euclidien, et deux directions sont orthogonales par rapport à Γ si, et seulement si, elles sont orthogonales au sens euclidien.

Le résultat énoncé au **II-2.9.3** devient alors : *si Γ est un cercle de centre Ω, si M est un point distinct de Ω, et si Δ est sa polaire par rapport à Γ, alors les directions des droites ΩM et Δ sont orthogonales.*

Tout cela est quasiment immédiat ; établissons-le géométriquement dans le cas de diamètres conjugués d'un cercle.

Soit MM' et PP' deux cordes parallèles inscrites dans Γ ; alors les médiatrices de ces cordes passent par le centre Ω. Ainsi, les milieux de ces cordes sont alignés avec Ω, et le résultat est acquis. L'application (involutive) qui à P associe P' est toujours une symétrie *orthogonale* ; dans le cas d'une conique quelconque, ce serait en général une symétrie *oblique*.



[39] Voir à la fin du **I-4.2**.

2.10. L'équation barycentrique du cercle circonscrit

Nous allons encore entreprendre dans ce paragraphe l'étude de l'équation du cercle circonscrit au triangle, unique conique circonscrite qui soit un cercle, mais laissons pour plus tard l'étude des hyperboles équilatères circonscrites : l'inversion isogonale, que nous définirons plus loin, se prête mieux en effet à l'étude de celles-ci, grâce au caractère euclidien qui la sous-tend.

Supposons euclidien le plan du triangle ABC ; nous établissons que l'équation du cercle circonscrit à ABC est

$$a^2YZ + b^2ZX + c^2XY = 0\,.$$

En effet, une équation affine dans le repère $\mathscr{R} = (A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est de la forme

$$\|AM\|^2 + ux + vy + w = 0\,,$$

avec $w = 0$ (puisque le cercle passe par A). Or, nous savons que l'on obtient une équation barycentrique à partir de cette équation affine en substituant respectivement $\dfrac{Y}{X+Y+Z}$ et $\dfrac{Z}{X+Y+Z}$ à x et y. Mais,

$$\|AM\|^2 = \|x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}\|^2 = \frac{\|Y\overrightarrow{AB} + Z\overrightarrow{AC}\|^2}{(X+Y+Z)^2} = \frac{Y^2c^2 + 2bcYZ\cos\widehat{A} + b^2Z^2}{(X+Y+Z)^2},$$

voir le calcul fait en remarque, page **9**, de sorte que l'équation barycentrique du cercle est de la forme

$$Y^2c^2 + 2bcYZ\cos\widehat{A} + b^2Z^2 + (uY + vZ)(X + Y + Z) = 0\,.$$

Le terme en X^2 est nul, et la nullité des termes en Y^2 et Z^2 [40] donne $c^2 + u = b^2 + v = 0$. Le coefficient du terme en YZ devient alors $2bc\cos\widehat{A} - c^2 - b^2 = -a^2$.

Après simplification par -1, on obtient donc l'équation toute simple $a^2YZ + b^2ZX + c^2XY = 0$ pour le cercle circonscrit.

Remarque. Le cercle circonscrit est-il bien une ellipse ? Pour le confirmer, formons $S = a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2$. Or, on sait que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$. Un petit calcul donne alors $S = -4a^2b^2\sin^2\widehat{C}$. Comme on a aussi $c = 2R\sin\widehat{C}$, où R est le rayon du cercle circonscrit, on a aussi la formule plus symétrique $S = -\left(\dfrac{abc}{R}\right)^2$, et S est bien strictement négatif [41].

La section **II-2.4** a établi des relations entre l'équation barycentrique d'une conique circonscrite et les coordonnées barycentriques de son centre. Vérifions-les

[40] Puisque le cercle circonscrit est une conique circonscrite ! On peut aussi invoquer les rôles symétriques de X, Y et Z.

[41] Si on désigne par Σ l'aire du triangle, alors $abc = 4R\Sigma$, de sorte que $S^2 = -16\Sigma^2$.

à partir de l'exemple du cercle circonscrit. Pour celui-ci, nous avons $(p,q,r) = (a^2,b^2,c^2)$. Puisque $S \neq 0$, les coordonnées barycentriques du centre sont

$$(p^2 - pq - pr, q^2 - qr - qp, r^2 - rp - rq)\,,$$

c'est-à-dire encore

$$\big(a^2(a^2 - b^2 - c^2), b^2(b^2 - c^2 - a^2), c^2(c^2 - a^2 - b^2)\big)\,.$$

Puisque $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos\widehat{A}$, etc., nous pouvons factoriser $-2abc$ dans le triplet précédent, et il nous reste les coordonnées barycentriques déjà obtenues $(a\cos\widehat{A}, b\cos\widehat{B}, c\cos\widehat{C})$. Il est conseillé au lecteur de faire le travail inverse : retrouver une équation barycentrique du cercle circonscrit à partir des coordonnées barycentriques de son centre, supposées connues.

2.11. Du côté de chez Leibniz

En relation avec l'équation barycentrique du cercle circonscrit au triangle ABC, qui vient d'être établie, nous énonçons la formule suivante, dans laquelle (x,y,z) représente le triplet de coordonnées barycentriques d'un point M du plan affine euclidien :

$$(x+y+z)(xMA^2 + yMB^2 + zMC^2) = a^2yz + b^2zx + c^2xy\,.$$

En particulier, cela prouve que M appartient au cercle circonscrit au triangle si, et seulement si, on a $xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 = 0$. Cette dernière équation n'est pas une équation barycentrique, puisque les termes tels que MA^2 ne sont pas des constantes, mais caractérise les points du cercle circonscrit.

Nous élevons au carré scalaire puis développons la formule $x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. Dans la formule obtenue figurent des termes comme x^2MA^2 et des termes tels que $2xy\big(\overrightarrow{MA}\,\big|\,\overrightarrow{MB}\big)$; nous ramenons les produits scalaires $\big(\overrightarrow{MA}\,\big|\,\overrightarrow{MB}\big)$ à des combinaisons linéaires de carrés scalaires grâce à la formule

$$c^2 = BA^2 = \big(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\big)^2 = MA^2 + MB^2 - 2\big(\overrightarrow{MA}\,\big|\,\overrightarrow{MB}\big)\,.$$

Vérifier alors la formule annoncée n'est plus alors qu'une formalité : tous les ingrédients s'y trouvent.

2.12. Les cercles du plan

Nous allons montrer ici que l'équation barycentrique générale des cercles du plan est de la forme

$$a^2YZ + b^2ZX + c^2XY + (pX + qY + rZ)(X + Y + Z) = 0\,.$$

Pourquoi cela ? Si on en revient au cercle circonscrit, il a une équation affine dans $\mathscr{R}$ de la forme $\|AM\|^2 + uX + vY = 0$, avec $u = -c^2$ et

$v = -b^2$ comme cela a été établi au **II-2.10**. L'équation générale des cercles (éventuellement de rayon nul, voire vides) du plan est $\|AM\|^2 + u'x + v'y + w' = 0$, c'est-à-dire encore $\|AM\|^2 + ux + vy + (\lambda x + \mu y + \nu) = 0$, avec $\lambda = u' - u$, $\mu = v' - v$ et $\nu = w'$. En d'autres termes, les membres de gauche de ces équations affines diffèrent les uns des autres par addition d'un terme de la forme $\lambda x + \mu y + \nu$.

Lorsque l'on repasse aux coordonnées barycentriques, c'est-à-dire en substituant respectivement $\dfrac{Y}{X+Y+Z}$ et $\dfrac{Z}{X+Y+Z}$ à x et y, on obtient comme équation barycentrique

$$\frac{\overbrace{-(a^2YZ + b^2ZX + c^2XY)}^{\text{Voir II-2.10}} + \big(\lambda Y + \mu Z + \nu(X+Y+Z)\big)(X+Y+Z)}{(X+Y+Z)^2} = 0,$$

qui est bien une équation de la forme annoncée.

Réciproquement, toute équation barycentrique de cette forme conduit à une équation affine de la forme précédente.

2.13. L'axe radical de deux cercles. Version algébrique

La notion développée dans la section qui suit nous sera utile tout au long de ce chapitre ainsi que des deux suivants. Toutefois, une approche plus simple et plus naturelle est à trouver au **VI-2.3**. *Comme nous le verrons, le calcul d'une équation, barycentrique ou cartésienne, d'un axe radical repose sur l'existence d'une forme privilégiée de l'équation d'un cercle, et cette forme privilégiée est plus évidente en Géométrie euclidienne.*

Alors, pourquoi en parler ici ? Tout simplement, parce que nous ne pouvons pas ignorer cette notion dans le cadre du calcul barycentrique, même s'il n'est pas tout à fait aussi adapté !

Soit alors deux cercles distincts Γ et Γ' du plan, d'équations barycentriques respectives (voir le **II-2.12**)

$$a^2YZ + b^2ZX + c^2XY + (pX + qY + rZ)(X+Y+Z) = 0$$

et

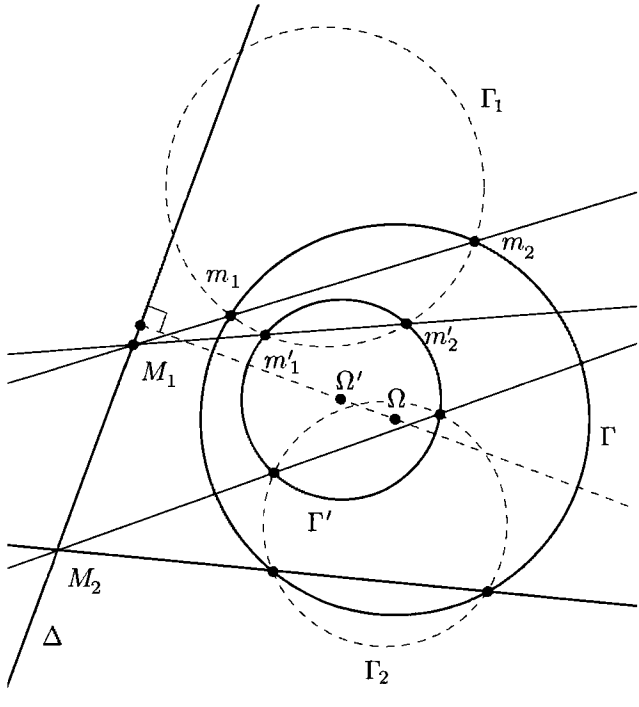
$$a^2YZ + b^2ZX + c^2XY + (p'X + q'Y + r'Z)(X+Y+Z) = 0.$$

La différence entre les deux membres de gauche est

$$((p-p')X + (q-q')Y + (r-r')Z)(X+Y+Z).$$

Nous allons à présent interpréter l'ensemble Δ d'équation barycentrique $(p-p')X + (q-q')Y + (r-r')Z = 0$.

- Si Γ et Γ' sont sécants en deux points M et M', alors les coordonnées barycentriques de ces deux points vérifient les équations barycentriques des deux cercles, et donc annulent aussi $(p-p')X+(q-q')Y+(r-r')Z$. L'équation barycentrique du premier degré $(p-p')X+(q-q')Y+(r-r')Z=0$ ne représente pas le plan tout entier, puisqu'alors Γ et Γ' auraient même équation barycentrique, et elle représente donc une droite : cela ne peut être que la droite MM'. Nous l'appelons l'*axe radical* de Γ et Γ'.
- Si Γ et Γ' sont concentriques, mais distincts, les membres de gauche de leurs équations affines sont respectivement de la forme $\|AM\|^2+uX+vY+w=0$ et $\|AM\|^2+uX+vY+w'$, avec $w'\neq w$, et les mêmes calculs que ceux qui viennent d'être faits montrent que les membres de gauche de leurs équations barycentriques ne diffèrent que d'un terme de la forme $\lambda(X+Y+Z)^2$, de sorte que $(p-p')X+(q-q')Y+(r-r')Z$ est de la forme $\lambda(X+Y+Z)$. Ici, l'équation barycentrique $(p-p')X+(q-q')Y+(r-r')Z=0$ représente la droite de l'infini[42].
- Si Γ et Γ' ne sont ni concentriques ni sécants, nous recourons à la construction qui suit :



Traçons un premier cercle auxiliaire Γ_1 sécant avec Γ et Γ', et construi-

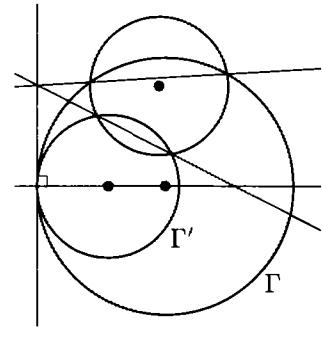
[42]Nous mettrons cette remarque à profit à la fin de cette section, à l'occasion d'un exercice.

sons l'axe radical de Γ_1 et Γ, soit m_1m_2, et celui de Γ_1 et Γ', soit $m_1'm_2'$. Ces deux axes se coupent[43] en un point M_1 dont nous allons montrer qu'il appartient à Δ. Il suffira ensuite de construire un second point $M_2 \in \Delta$ grâce à un second cercle auxiliaire Γ_2. Ainsi, l'ensemble Δ, qui est une droite pour la même raison que précédemment, est la droite M_1M_2. Nous l'appelons encore l'*axe radical* de Γ et Γ'.
Reste à établir que $M_1 \in \Delta$; l'équation barycentrique de Γ_1 est de la forme

$$a^2YZ + b^2ZX + c^2XY + (p''X + q''Y + r''Z)(X + Y + Z) = 0\,.$$

Comme Γ et Γ_1 sont sécants, cas déjà étudié, la droite m_1m_2 a pour équation barycentrique $(p''-p)X+(q''-q)Y+(r''-r) = 0$ et la droite $m_1'm_2'$ a pour équation barycentrique $(p''-p')X+(q''-q')Y+(r''-r') = 0$. Les coordonnées barycentriques de M_1 vérifient ces deux équations, et donc aussi leur « différence » $(p'-p)X+(q'-q)Y+(r'-r) = 0$. Donc M_1 appartient bien à Δ, et il en va de même pour M_2.

Et si les cercles sont tangents ? On dispose alors d'un point d'intersection M, sur l'axe donc, et on peut construire un second point de l'axe grâce à un cercle auxiliaire comme *supra*. On peut aussi utiliser le fait que l'axe est orthogonal à la droite joignant les centres des cercles. On notera que, dans ce cas, l'axe radical est la tangente commune aux deux cercles. En effet, leur point d'intersection appartient à l'axe radical et on sait que ce dernier est orthogonal à la droite en joignant les centres. Inversement, cette configuration ne s'est pas produite, on l'a vu, dans le cas où les cercles sont disjoints ou sécants.



Nous énonçons donc : *si l'axe radical de deux cercles est tangent à l'un d'eux, les deux cercles sont alors tangents.*

Exemple. Cherchons l'équation barycentrique de l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle d'EULER du triangle ABC. Le cercle circonscrit a pour équation barycentrique $\Phi = a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$ alors que celle du cercle d'EULER est, voir **I-7.5.2**,

$$\Psi = bc\cos\widehat{A}\,X^2 + ca\cos\widehat{B}\,Y^2 + ab\cos\widehat{C}\,Z^2 - a^2YZ - b^2ZX - c^2XY = 0\,.$$

La ressemblance de $-\Psi$ avec la forme générale de l'équation barycentrique des cercles donnée dans cette section est trompeuse, car $(-\Psi) - \Phi =$

[43] La construction pourrait échouer si m_1m_2 était parallèle à $m_1'm_2'$. Pour éviter cela, il suffit de ne pas centrer Γ_1 sur la droite joignant les centres de Γ et de Γ'. En effet, au chapitre **VI**, nous définirons l'axe radical de façon plus géométrique, et nous montrerons qu'il est orthogonal à la droite joignant les centres des cercles.

$-(bc\cos\widehat{A}\,X^2+ca\cos\widehat{B}\,Y^2+ab\cos\widehat{C}\,Z^2)$ et on ne peut y factoriser la forme $X+Y+Z$.

Nous allons plutôt factoriser artificiellement cette expression, quitte à introduire des termes correctifs ; dans la partie de la formule surmontée par une accolade, nous avons fait en sorte d'obtenir les termes corrects en X^2, Y^2 et Z^2 figurant dans $-\Psi$:

$$-\Psi = -\overbrace{(bc\cos\widehat{A}\,X+ca\cos\widehat{B}\,Y+ab\cos\widehat{C}\,Z)(X+Y+Z)}+$$
$$+a(a+b\cos\widehat{C}+c\cos\widehat{B})YZ+b(b+c\cos\widehat{A}+a\cos\widehat{C})ZX+$$
$$+c(c+a\cos\widehat{B}+b\cos\widehat{A})XY.$$

Or, si R désigne le rayon du cercle circonscrit, $b=2R\sin\widehat{B}$ $c=2R\sin\widehat{C}$, de sorte que $b\cos\widehat{C}+c\cos\widehat{B}=2R\sin(\widehat{B}+\widehat{C})=2R\sin(\pi-\widehat{A})=a$. Ainsi, le terme en YZ se simplifie en $2a^2YZ$ et on a

$$-\frac{\Psi}{2}=a^2YZ+b^2ZX+c^2XY-$$
$$-(bc\cos\widehat{A}\,X+ca\cos\widehat{B}\,Y+ab\cos\widehat{C}\,Z)(X+Y+Z)/2\,.$$

Cette fois[44], $-\Psi/2$ est de la forme

$$a^2YZ+b^2ZX+c^2XY+(pX+qY+rZ)(X+Y+Z)\,,$$

et l'on en déduit que l'axe radical cherché a pour équation barycentrique

$$bc\cos\widehat{A}\,X+ca\cos\widehat{B}\,Y+ab\cos\widehat{C}\,Z=0\,.$$

On préférera peut-être la formule équivalente

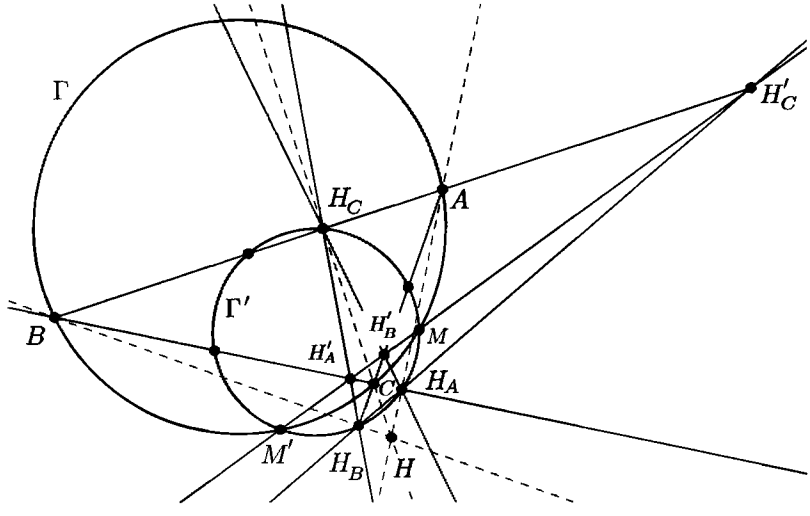
$$\frac{\cos\widehat{A}}{a}X+\frac{\cos\widehat{B}}{b}Y+\frac{\cos\widehat{C}}{c}Z=0\,.$$

Sous cette forme, on reconnaît dans cet axe l'axe *orthique* du triangle, qui sera défini au **III-4.1**.

[44]Pourquoi ne l'était-elle pas avant ? Tout simplement parce que l'équation barycentrique du cercle d'Euler, comme toute équation barycentrique d'ailleurs, n'est définie qu'à une constante multiplicative non nulle près. En cela, les équations barycentriques des cercles se distinguent de leurs équations affines en repère orthonormé, que l'on peut toujours supposer *normalisées*, c'est-à-dire de la forme $X^2+Y^2+aX+bY+c=0$. Le calcul a montré que c'est $-\Psi/2$ qui est de la bonne forme, et non pas Ψ ou $-\Psi$. On remarquera d'ailleurs qu'au **I-7.5.2**, nous avions simplifié par -2 pour avoir une forme plus agréable et nous n'avons fait ici que remettre les choses dans le même ordre. S'il est vrai que l'on aurait pu se passer de « faire et défaire » de la sorte, il n'en demeure pas moins que le calcul qui vient d'être fait est un bon exemple qui illustre la conduite à tenir dans le cas général avec des équations qui n'ont pas toujours la bonne idée de se présenter comme nous l'aimerions.

Il ne faut pas passer sous silence les cas particuliers, encore une fois inévitables. Si ABC est équilatéral, les deux cercles sont concentriques et leur axe radical[45] est la droite de l'infini : c'est confirmé par l'équation qui vient d'être obtenue. Si ABC est un triangle rectangle, en A par exemple, alors les deux cercles passent par A, ainsi que la droite des centres : les deux cercles sont tangents en A et leur axe radical est leur tangente commune au point A ; toutefois, l'orthocentre H coïncide avec A et l'axe orthique n'est pas défini dans ce cas.

Voici, pour le cas général, une figure d'ensemble, où G est le cercle circonscrit, Γ' le cercle d'EULER et $H'_A H'_B H'_C$ l'axe orthique, les trois points qui le définissent étant alignés. Le triangle a été construit obtusangle, de sorte que Γ et Γ' sont sécants : l'axe orthique est aussi la droite qui joint leur deux points d'intersection M et M'. Les points de Γ' innomés sur la figure sont les milieux des côtés du triangle.



Enfin, il est bon de tirer des conclusions du *modus operandi* mis en évidence dans les calculs précédents : pour obtenir l'équation barycentrique de l'axe radical de deux cercles, on effectue une combinaison linéaire (non triviale) de leurs équations barycentriques de telle sorte que l'on puisse y factoriser $X + Y + Z$. Un exemple édifiant sera exposé au **IV-2.2**.

Exercice. Vu les résultats du **II-2.10** et de cette section notamment, l'équation barycentrique générale des cercles centrés au point O, centre du cercle circonscrit au triangle ABC, est

$$a^2YZ + b^2ZX + c^2XY + \lambda(X + Y + Z)^2 = 0\,.$$

En effet, nous avons là l'équation générale des cercles concentriques au

[45] Et nous verrons que, dans ce cas, l'axe orthique est également la droite de l'infini.

cercle circonscrit. *Pour quelle valeur de λ ce cercle est-il réduit au seul point O ?*

Nous donnons les indications permettant la résolution de cet exercice : remarquons d'abord que cela équivaut à ce que la forme quadratique $\mathscr{Q}_\lambda$ qui au triplet (X,Y,Z) associe $a^2YZ + b^2ZX + c^2XY + \lambda(X+Y+Z)^2$ ait pour signature $(2,0)$ ou $(0,2)$ [46]. C'est en effet la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des triplets annulant cette forme soit une droite vectorielle. Or, la matrice de $\mathscr{Q}_\lambda$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda + c^2/2 & \lambda + b^2/2 \\ \lambda + c^2/2 & \lambda & \lambda + a^2/2 \\ \lambda + b^2/2 & \lambda + a^2/2 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si la signature de $\mathscr{Q}_\lambda$ est $(2,0)$ ou $(0,2)$, alors $\mathscr{Q}_\lambda$ est dégénérée et $\det M_\lambda = 0$. Inversement, si ce déterminant est nul, la forme $\mathscr{Q}_\lambda$ peut avoir l'une des deux valeurs annoncées, mais aussi $(1,0)$, $(1,1)$ ou $(0,1)$. Or, les équations barycentriques obtenues seraient respectivement celles d'une droite, de la réunion de deux droites, ou d'une droite. Comme nous savons que $\mathscr{Q}_\lambda$ représente un cercle, ces cas sont impossibles et la réciproque est établie.

Reste à savoir quand $\det M_\lambda = 0$. Or, ce déterminant se calcule facilement : soustraire la première colonne aux deux autres puis, dans le déterminant obtenu, la première ligne aux deux autres. On a alors

$$\det M_\lambda = \begin{vmatrix} \lambda & c^2/2 & b^2/2 \\ c^2/2 & -c^2 & \dfrac{a^2-b^2-c^2}{2} \\ b^2/2 & \dfrac{a^2-b^2-c^2}{2} & -b^2 \end{vmatrix}.$$

Développer ce déterminant par rapport à la première colonne donne $\det M_\lambda = \alpha\lambda + \beta$, avec

$$\begin{cases} \alpha = b^2c^2 - \dfrac{(a^2-b^2-c^2)^2}{4} & = b^2c^2(1-\cos^2\widehat{A}) \\ \beta = \dfrac{b^2c^2}{4}(a^2-b^2-c^2+b^2+c^2) & = a^2b^2c^2/4\,. \end{cases}$$

Ainsi, le déterminant s'annule si, et seulement si, $\lambda = -\dfrac{a^2}{4\sin^2\widehat{A}} = -R^2$.

Pour cette valeur de λ, il est intéressant de factoriser $-R^2$ dans l'expression

[46] Au **II-2.1**, nous avons détaillé et interprété les valeurs possibles de la signature d'une conique.

de M_λ, puisque $a = 2R\sin\widehat{A}$, etc. On obtient alors

$$M_\lambda = -R^2 \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\widehat{C} & \cos 2\widehat{B} \\ \cos 2\widehat{C} & 1 & \cos 2\widehat{A} \\ \cos 2\widehat{B} & \cos 2\widehat{A} & 1 \end{pmatrix}.$$

En conclusion, une équation barycentrique du cercle réduit au point O est

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 2\cos 2\widehat{A}\, YZ + 2\cos 2\widehat{B}\, ZX + 2\cos 2\widehat{C}\, XY = 0\,.$$

Pourquoi diantre se donner du mal pour déterminer l'équation d'un cercle-point ? On peut apporter à cette question plusieurs réponses, dont la remarque qui suit : les résultats du **I-7.4** nous permettent désormais d'écrire l'équation barycentrique de n'importe quel cercle réduit à un point. Mais encore ? Si Γ est un cercle réduit à son centre Ω, alors, pour un point $M \neq \Omega$ à distance finie, la polaire de M par rapport à Γ est la perpendiculaire à ΩM menée de Ω. Comme l'équation barycentrique d'un polaire est simple à obtenir [47], celle de cette perpendiculaire l'est aussi.

2.14. Cercles possédant un triangle autopolaire donné

Nous allons appliquer ce qui précède à un problème plus simple, mais que l'on pourra réserver à une seconde lecture car il fait appel à des notions qui ne seront développées qu'ultérieurement : *un triangle ABC étant donné, existe-t-il un cercle Γ par rapport auquel il soit autopolaire ?*

Nous évoquerons cette notion au **III-3.2** et établirons à cette occasion que cela équivaut à dire que Γ a une équation barycentrique de la forme $uX^2 + vY^2 + wZ^2 = 0$.

Or, au **II-2.12**, nous avons vu que l'équation barycentrique générale d'un cercle du plan est de la forme

$$a^2YZ + b^2ZX + c^2XY + (pX + qY + rZ)(X + Y + Z) = 0\,.$$

Le cercle Γ est de la forme attendue si, et seulement si, les termes rectangles de cette équation barycentrique sont nuls, ce qui équivaut à

$$p + q + c^2 = q + r + a^2 = r + p + b^2 = 0\,.$$

Ce système linéaire en (p, q, r) admet, on le vérifie trivialement, comme seule solution

$$\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2, c^2 + a^2 - b^2, a^2 + b^2 - c^2)\,,$$

[47] Voir au **II-2.7**.

c'est-à-dire encore $(bc\cos\widehat{A}, ca\cos\widehat{B}, ab\cos\widehat{C})$ [48], de sorte que Γ est unique et admet comme équation barycentrique

$$bc\cos\widehat{A}\,X^2 + ca\cos\widehat{B}\,Y^2 + ab\cos\widehat{C}\,Z^2 = 0\,.$$

Nous pouvons simplifier cette équation en la divisant par le scalaire non nul abc : on obtient l'équation équivalente

$$\frac{\cos\widehat{A}}{a}X^2 + \frac{\cos\widehat{B}}{b}Y^2 + \frac{\cos\widehat{C}}{c}Z^2 = 0\,.$$

Toutefois, ce cercle est vide si, et seulement si, les trois coefficients de cette équation barycentrique sont de même signe, c'est-à-dire si, et seulement si, le triangle ABC est acutangle [49].

Si le triangle est rectangle, en A par exemple, on a alors $\cos\widehat{B} > 0$ et $\cos\widehat{C} > 0$, de sorte que le cercle Γ se réduit au point A.

Nous exclurons donc ces deux cas sans intérêt et nous limiterons au cas où l'un des trois angles est obtus [50], l'angle $\widehat{A}$ par exemple.

Puisque la matrice de la forme quadratique $\mathscr{Q}$ donnant l'équation barycentrique précédente est la matrice diagonale

$$\Delta = \mathrm{Diag}(\cos\widehat{A}/a, \cos\widehat{B}/b, \cos\widehat{C}/c)\,,$$

les coordonnées barycentriques du centre Ω de Γ sont $\Delta^{-1} \times {}^t(1,1,1)$, c'est-à-dire encore $(a/\cos\widehat{A}, b/\cos\widehat{B}, c/\cos\widehat{C})$.

Autrement dit, le centre en question est l'orthocentre H du triangle. Cela s'explique par le fait que la droite $A\Omega$ est orthogonale à la polaire de A par rapport à Γ, qui est la droite BC [51]. Donc, $A\Omega$ est une hauteur du triangle, et il en va de même de $B\Omega$ et de $C\Omega$.

Nous expliquons à présent une première construction de Γ lorsque ABC est obtusangle. Nous commençons par montrer que A est intérieur au cercle Γ : en effet, la forme quadratique $\mathscr{Q}$ qui au triplet (X,Y,Z) associe $\dfrac{\cos\widehat{A}}{a}X^2 + \dfrac{\cos\widehat{B}}{b}Y^2 + \dfrac{\cos\widehat{C}}{c}Z^2$ prend des valeurs positives en B et C et des valeurs

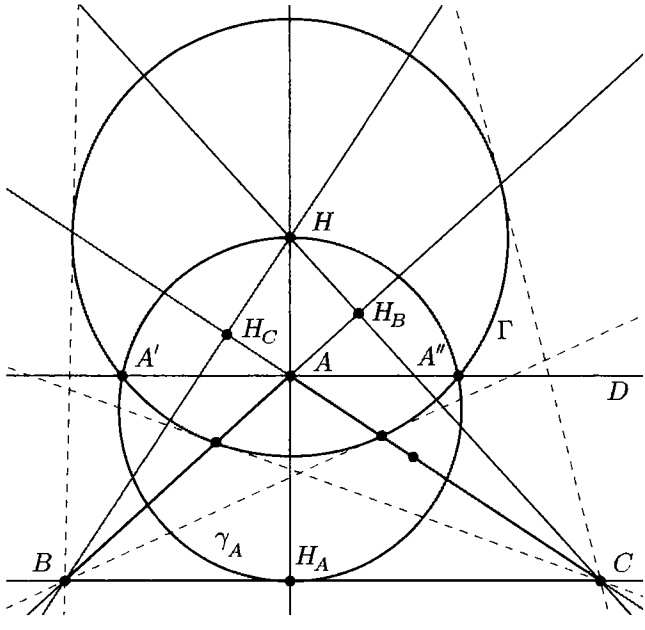
[48] Vu les résultats du **II-2.13**, une équation barycentrique de l'axe radical de ce cercle et du cercle circonscrit est $pX + qY + rZ = 0$. Vu les valeurs obtenues pour le triplet (p,q,r), cet axe est encore une fois l'axe orthique du triangle ABC. Cette propriété sera approfondie au chapitre **VI** : elle signifie notamment que ce cercle, le cercle circonscrit et le cercle d'Euler appartiennent à un même *faisceau linéaire* de cercles. Cette constatation nous fournit la seconde des deux constructions qui suivent.

[49] Un triangle *acutangle* est un triangle dont les trois angles sont aigus.

[50] Un tel triangle est naturellement dit *obtusangle*.

[51] Au **II-2.9.4**, nous avons déjà rencontré cette situation, et établi à cette occasion l'orthogonalité en question.

négatives en H[52] et en A, et ces deux derniers points sont donc d'un « même côté » de Γ. Le pied H_A de la hauteur issue de A appartient à la polaire de A par rapport à Γ et est extérieur à ce cercle. Le cercle de diamètre HH_A contient les points de contact A' et A'' des tangentes à Γ menées de H_A, et ces points sont aussi sur la perpendiculaire à AH menée de A. Cela suffit pour construire les points A' et A'', puis le cercle Γ.



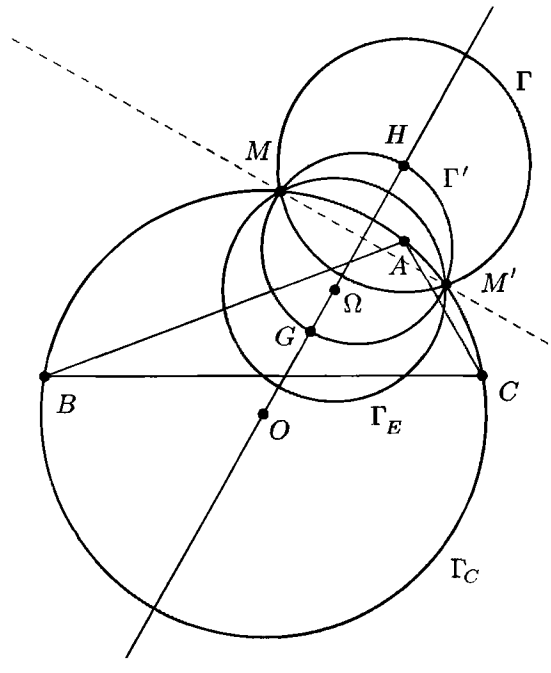
Les points de contact des tangentes à Γ menées de B, respectivement de C, sont les points où Γ coupe la droite AC, respectivement la droite AB, étant donné que les polaires de ces deux points extérieurs à Γ sont respectivement les droites AC et AB.

Voici ores une seconde construction, qui découle des méthodes du **VI-3.3.2** : nous y verrons que l'on peut construire un cercle d'un faisceau linéaire dès que l'on en connaît le centre. Ici, seul le cas d'un triangle obtusangle est réellement digne d'intérêt puisque, sinon, le cercle Γ est vide.

Nous avons représenté ici le triangle ABC, les points O et H, le centre Ω du cercle d'EULER, le cercle circonscrit Γ_C, le cercle d'EULER Γ_E, et le cercle à construire Γ. Figure aussi dans ce faisceau le cercle Γ' de diamètre GH ; en effet, les points G et H sont les centres des homothéties qui envoient Γ_C sur Γ_E et l'assertion résulte des résultats du **VI-3.3.4.**

[52] Cette valeur est $a/\cos\widehat{A} + b/\cos\widehat{B} + c/\cos\widehat{C}$, soit encore $2R(\operatorname{tg}\widehat{A} + \operatorname{tg}\widehat{B} + \operatorname{tg}\widehat{C})$. C'est aussi $2R\operatorname{tg}\widehat{A}\operatorname{tg}\widehat{B}\operatorname{tg}\widehat{C}$ (qui est trivialement < 0) du fait que $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.

Le triangle ABC étant obtusangle, Γ_C et Γ_E sont sécants en des points M et M', de sorte que l'axe orthique est la droite MM', représentée en pointillés. Le cercle Γ à construire est centré en H et passe par M (et M') ; il ne reste donc plus qu'à le tracer.



Remarque. Si le triangle ABC est rectangle en A, le point H coïncide avec A, les cercles Γ_C et Γ_E passent par A et sont centrés sur la médiane issue de A ; enfin, le cercle de diamètre GH est centré sur cette même droite. Ces trois cercles sont donc tangents en A et le cercle Γ est, lui, réduit au point A. C'est en quelque sorte un « cas limite » du cas d'un triangle obtusangle.

Si, enfin, le triangle ABC a ses trois angles aigus, le cercle Γ_C, le cercle Γ_E et le cercle de diamètre GH appartiennent à un même faisceau à points de PONCELET : voir au **VI-3.3.4**. En soi, cette situation n'est pas inintéressante, mais, le cercle Γ étant sans point réel, il ne se situe plus de façon remarquable par rapport aux trois autres.

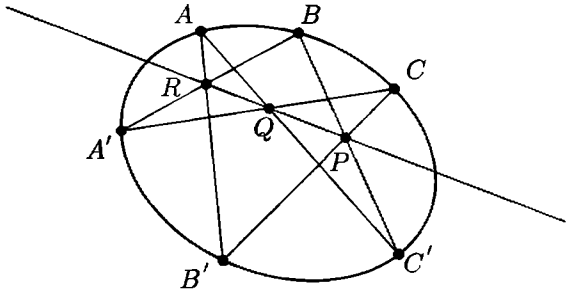
3. Autour du théorème de PASCAL

3.1. Le théorème de PASCAL

Voici l'énoncé du théorème de PASCAL, alias *hexagrammum mysticum* : *soit six points A, B, C, A', B', C' du plan, les trois premiers n'étant pas alignés.*

Alors, il existe une conique passant par ces six points si, et seulement si, les points P, Q, R, intersections respectives des droites BC' et CB', CA' et AC', AB' et BA', sont alignés[53].

La condition se lit mieux à partir d'une figure :



À noter que l'existence d'une condition d'appartenance de *six* points à une même conique est prévisible, puisque *cinq* points suffisent déjà pour en définir une et qu'il n'y a donc aucune raison pour que *six* lui appartiennent.

Pour démontrer cela, prenons le triangle ABC comme triangle de référence. Appelons $(x, y, z), (x', y', z')$ et (x'', y'', z'') les coordonnées barycentriques respectives de A', B' et C'. La droite BC' a pour équation barycentrique $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x'' & y'' & z'' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire $z''X - x''Z = 0$ et de même $B'C$ a pour équation barycentrique $x'Y - y'X = 0$. Les coordonnées barycentriques du point P sont donc $(x'x'', x''y', x'z'')$. Un calcul analogue donne celles de Q : $(y''x, y''y, yz'')$ et celles de R : $(z'x, zy', zz')$. L'alignement de (P, Q, R) équivaut à la nullité de $\Delta = \begin{vmatrix} x'x'' & x''y' & x'z'' \\ y''x & y''y & yz'' \\ z'x & zy' & zz' \end{vmatrix}$. Maintenant, il existe une conique circonscrite à ABC et passant par A', B' et C' si, et seulement si, il existe des scalaires u, v, w non tous nuls tels que les coordonnées barycentriques de A', B' et C' vérifient l'équation $uYZ + vZX + wXY = 0$. L'existence d'un tel triplet équivaut à la nullité de $\Delta' = \begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ y'z' & z'x' & x'y' \\ y''z'' & z''x'' & x''y'' \end{vmatrix}$.

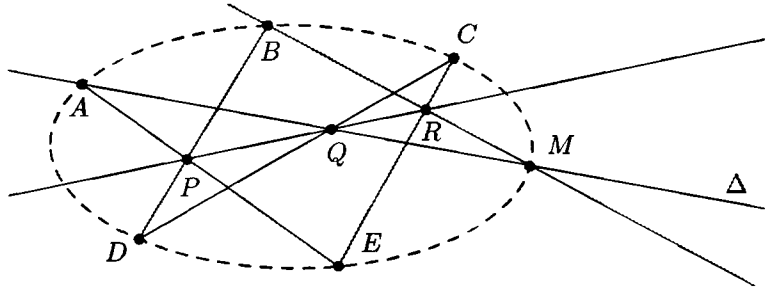
Or, en développant ces deux déterminants, fût-ce par la règle de SARRUS, on s'aperçoit qu'ils sont égaux quels que soient A', B' et C'. Le résultat s'en déduit immédiatement. En faisant ce calcul pour tester l'efficacité du calcul

[53] Dans la section **II-2.6**, nous avons décrit un cas « dégénéré » de ce résultat. Lorsque $A' = C$, $B' = A$ et $C' = B$, les points A, B et C étant sur une conique $\mathscr{C}$, les droites AB', BC' et CA' « dégénèrent » en les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces trois points. Les points P, Q et R sont, à l'ordre près, ceux qui avaient été construits dans la dite section.

barycentrique, nous n'avons pas manqué d'être étonné par deux choses : d'une part, le côté purement mécanique du calcul lui-même et d'autre part, l'égalité entre ces deux déterminants qui ne se déduisent pas l'un de l'autre par une quelconque suite d'opérations élémentaires, et qui n'ont même pas de coefficient en commun.

Cette propriété d'alignement peut se révéler utile pour certaines constructions : le cas le plus typique est celui où l'on connaît cinq points d'une conique non dégénérée, disons A, B, C, D, E, et une droite Δ passant par A et où l'on désire déterminer le point M où cette droite recoupe la conique.

Dans ces conditions, on applique le théorème de PASCAL aux six points A, B, C, D, E et M, ce dernier étant supposé construit. On ne connaît pas la droite BM, mais on sait que la droite AM est Δ. Les droites AE et BD se coupent en un point P, Δ et CD en un point Q et nous savons désormais que BM et CE concourent en un point aligné avec P et Q : BM est donc la droite Δ' qui joint B au point d'intersection R de CE et de PQ, et M est le point d'intersection de Δ et Δ'. Pour mener à bien cette construction, il n'est bien sûr pas nécessaire d'avoir construit la conique, aussi l'avons-nous seulement représentée en pointillés sur la figure qui suit.



On peut imaginer des cas « dégénérés », c'est-à-dire des « cas-limites » du théorème, correspondant à l'égalité de certains des six points A, A', B, B', C, C' sur une conique non dégénérée $\mathscr{C}$. L'un d'entre eux est celui où $C' = A$. Le problème se pose lorsque l'on a besoin du point d'intersection de $A'C$ et de AC', c'est-à-dire de $A'C$ et de AA ! Si le point A n'était pas assujetti à se déplacer sur une conique, il n'y aurait pas de façon privilégiée de définir la droite AA. Ici, il semble naturel de considérer que c'est la tangente T à la conique $\mathscr{C}$ au point A. Nous allons vérifier que sont effectivement alignés les trois points d'intersection suivants : $AB' \cap A'B$, $BA \cap B'C$ et $T \cap A'C$.

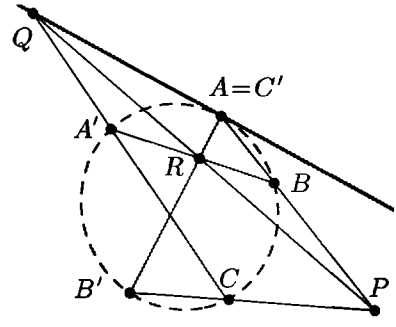
Appelons (x, y, z) et (x', y', z') les coordonnées barycentriques respectives de A' et B'. Supposons que $\mathscr{C}$ a pour équation barycentrique $pYZ + qZX + rXY = 0$. La droite T a alors pour équation barycentrique $rY + qZ = 0$ et des calculs analogues à ceux du cas général donnent pour nos trois points d'intersection les coordonnées barycentriques respectives

(xz', zy', zz'), $(x', y', 0)$ et $(qx, qy, -ry)$. L'alignement de ces trois points équivaut à la nullité du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} xz' & zy' & zz' \\ x' & y' & 0 \\ qx & qy & -ry \end{vmatrix}.$$

Or, $\Delta = qzz'(yx' - xy') - ryy'(xz' - zx')$ et l'appartenance de A' et B' à $\mathscr{C}$, qui se traduit par les égalités $pyz + qzx + rxy = py'z' + qz'x' + rx'y' = 0$ entraîne que $q = yy'(xz' - zx')$ et $r = zz'(yx' - xy')$. On en déduit bien que Δ est nul.

Autrement dit, dès que cinq points sont connus sur une conique $\mathscr{C}$ non dégénérée, nous savions comment trouver l'intersection de $\mathscr{C}$ avec une droite passant par un des cinq points, et désormais nous savons construire la tangente en l'un des cinq points[54]. Comme pour la construction précédente, on obtient d'abord les points P et R, puis $Q = PR \cap CA'$ et la tangente T cherchée est la droite AQ.



Voici enfin un exercice d'application du théorème : on donne un triangle ABC, et deux points distincts M et N du plan, non situés sur les côtés du triangle. On suppose que les droites AM, BM et CM coupent respectivement BC, CA et AB en des points M_A, M_B et M_C et que les droites AN, BN et CN coupent respectivement BC, CA et AB en des points N_A, N_B et N_C. Montrer alors que les points M_A, M_B, M_C, N_A, N_B et N_C sont sur une même conique Γ.

Définissons $A' = M_BN_C \cap N_BM_C$, et les points B' et C' de façon similaire. Il suffit de montrer que ces trois points sont alignés. Si nous établissons qu'ils sont sur la droite MN, nous pourrons donc conclure. Appelons (x, y, z) des coordonnées barycentriques de M et (x', y', z') des coordonnées barycentriques de N. Alors les points M_B, M_C, N_B et N_C ont pour coordonnées barycentriques respectivement $(x, 0, z)$, $(x, y, 0)$, $(x', 0, z')$ et $(x', y', 0)$. Les droites M_BN_C, N_BM_C et MN ont pour équations barycentriques respectives

$$\begin{vmatrix} x & 0 & z \\ x' & y' & 0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ x' & 0 & z' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \text{ et } \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0,$$

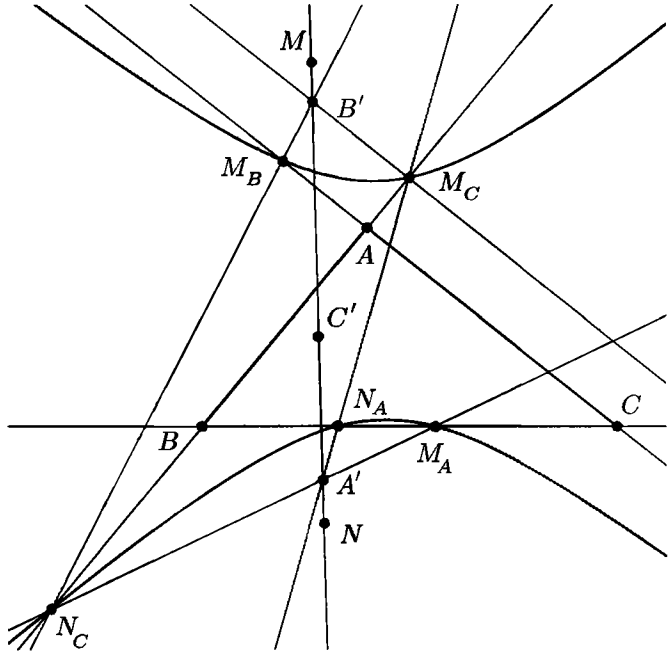
soit (sous forme développée) respectivement $-y'zX + x'zY + xy'Z = 0$,

[54] Toujours sans supposer $\mathscr{C}$ tracée ! Cela permet au contraire d'en préciser les contours grâce à l'ajout de points et de tangentes supplémentaires.

$yz'X - xz'Y - x'yZ = 0$ et $(yz' - y'z)X + (x'z - xz')Y + (xy' - x'y)Z = 0$. Ces trois droites concourent puisque

$$\begin{vmatrix} -y'z & x'z & xy' \\ yz' & -xz' & -x'y \\ yz' - y'z & x'z - xz' & xy' - x'y \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, la troisième ligne de ce déterminant est la somme des deux premières. Cela établit bien que $A' = M_B N_C \cap N_B M_C$ est sur la droite MN, et il en va de même pour B' et C'. Voici une figure, sur laquelle sont représentés les points A, B, C, M, N, A', B' et C', ainsi que la conique contenant les points[55] M_A, etc.



Ce résultat a une réciproque : on suppose que les droites AM, BM et CM coupent respectivement BC, CA et AB en des points M_A, M_B et M_C, que des points N_A, N_B et N_C sont situés respectivement sur BC, CA et AB, que les points M_A, M_B, M_C, N_A, N_B et N_C sont sur une même conique. Montrer alors que les droites AN_A, BN_B et CN_C concourent en un point N.

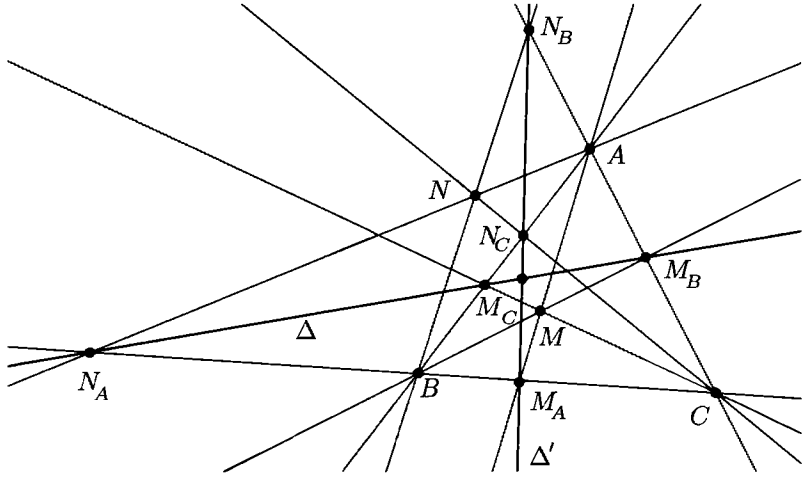
[*Indication : définir les points* $N = AN_A \cap BN_B$ *puis* $N'_C = CN \cap AB$ *et montrer que* $N_C = N'_C$.]

Il y a un cas particulier intéressant, lorsque le plan est euclidien : on prend pour M le centre de gravité G du triangle, et pour N l'orthocentre H.

[55] Il est difficile d'avoir toute la famille sur la photo. Ici, c'est N_B qui est hors champ.

Ces deux points sont distincts, du moins si ABC n'est pas équilatéral, et les points G_A, G_B, G_C, H_A, H_B et H_C sont *en général* distincts : ce sont respectivement les milieux des côtés et les pieds des hauteurs. La conique qui passe par ces six points est un cercle, le cercle d'EULER du triangle, déjà rencontré au **I-7.5.2**.

La conique Γ peut très bien être dégénérée : le point M étant choisi, on considère le point m où la droite M_BM_C coupe le côté BC, et on choisit N sur la droite Am. Ainsi, le point N_A coïncide avec m, et les points M_B, M_C et N_A sont alignés. La conique Γ est donc dégénérée. Sur la figure qui suit, elle est la réunion des droites Δ et Δ'.



3.2. Un déterminant impressionnant... en apparence

Un commentaire sur les méthodes de la section précédente nous donne ici l'occasion d'un calcul de déterminant.

Si on ne dispose pas d'une figure assez précise (ou d'un logiciel graphique) pour « deviner » que, sur la figure de la page **93**, les points A', B' et C' sont sur la droite MN, il reste toujours l'espoir de prouver directement qu'il existe une conique qui contienne chacun des six points M_A, M_B, M_C, N_A, N_B et N_C. Comme l'équation barycentrique générique des coniques du plan affine, pas nécessairement circonscrites au triangle ABC [56], est

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 + DYZ + EZX + FXY = 0\,.$$

Les coefficients $A, \ldots, F$ devant être non tous nuls, il suffit de montrer que le système linéaire homogène de six équations à six inconnues suivant, qui

[56] La conique que nous cherchons a d'autant moins de chances de passer par les sommets que nous lui imposons déjà de rencontrer les côtés du triangle ABC en les points M_A, etc.

traduit l'appartenance de nos six points à une même conique, admet une solution non triviale :

$$(\mathscr{S}) \qquad \begin{cases} By^2 + Cz^2 + Dyz = 0 \\ Ax^2 + Cz^2 + Ezx = 0 \\ Ax^2 + By^2 + Fxy = 0 \\ By'^2 + Cz'^2 + Dy'z' = 0 \\ Ax'^2 + Cz'^2 + Ez'x' = 0 \\ Ax'^2 + By'^2 + Fx'y' = 0\,. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & y^2 & z^2 & yz & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & z^2 & 0 & zx & 0 \\ x^2 & y^2 & 0 & 0 & 0 & xy \\ 0 & y'^2 & z'^2 & y'z' & 0 & 0 \\ x'^2 & 0 & z'^2 & 0 & z'x' & 0 \\ x'^2 & y'^2 & 0 & 0 & 0 & x'y' \end{vmatrix}.$$

Pour le rendre plus civilisé, décrivons-le par blocs, sous la forme $\Delta = \begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix}$, avec

$$P = \begin{pmatrix} 0 & y^2 & z^2 \\ x^2 & 0 & z^2 \\ x^2 & y^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} yz & 0 & 0 \\ 0 & zx & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & y'^2 & z'^2 \\ x'^2 & 0 & z'^2 \\ x'^2 & y'^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} y'z' & 0 & 0 \\ 0 & z'x' & 0 \\ 0 & 0 & x'y' \end{pmatrix}.$$

Nous remarquons que les matrices Q et S, étant diagonales, commutent. Cela suffit pour garantir que le calcul de Δ se ramène à celui d'un déterminant d'ordre 3 : $\Delta = \det(SP - QR)$; nous justifierons cette formule après le calcul de ce déterminant. Maintenant,

$$SP - QR = \begin{pmatrix} 0 & yy'(yz' - zy') & zz'(zy' - z'y) \\ xx'(xz' - zx') & 0 & zz'(zx' - xz') \\ xx'(xy' - yx') & yy'(yx' - xy') & 0 \end{pmatrix},$$

et il est clair que $\det(SP - QR) = 0$: une fois que l'on a mis en facteur respectivement xx', yy' et zz' dans ce déterminant, on s'aperçoit que la somme des colonnes y est nulle. De cela suit que $(\mathscr{S})$ admet une solution non nulle et que la conique recherchée existe bien.

Pour finir, établissons la formule promise, savoir $\Delta = \det(SP - QR)$. Nous nous contenterons de le faire lorsque le corps de base est de cardinal infini, ce qui est le cas de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$. Supposons P, Q, R et S carrées de même ordre n,

et de coefficients $p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j}$ et $s_{i,j}$. Nous allons montrer que l'application polynomiale en ces $4 \times n^2$ coefficients $\Phi = \det(S) \times (\Delta - \det(SP - QR))$ est nulle.

Elle vaut 0 si $\det(S) = 0$; supposons donc au contraire S inversible. On a la formule matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & -QS^{-1} \\ 0 & \mathrm{Id}_n \end{pmatrix}}_{T} \times \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} P - QS^{-1}R & 0 \\ R & S \end{pmatrix}}_{T'}.$$

Or $\det(T) = 1$, car T est triangulaire supérieure avec une diagonale constituée de 1, et $\det(T') = \det(S) \times \det(P - QS^{-1}R)$, car la matrice T' est triangulaire inférieure par blocs. On a donc

$$\Delta = \det(T') = \det(S) \times \det(P - QS^{-1}R) = \det(SP - SQS^{-1}R),$$

et ce dernier déterminant est $\det(SP - QR)$, car $SQ = QS$. Là encore, on a établi que Φ prend la valeur 0.

En conséquence, la fonction polynomiale nulle est le produit des deux fonctions polynomiales $\det(S)$ et $\Psi = \Delta - \det(SP - QR)$. Comme l'algèbre des fonctions polynomiales à $4n^2$ indéterminées sur un corps infini est intègre, c'est que l'un des deux facteurs est nul. Comme ce n'est pas le premier, nous en concluons que $\Delta - \det(SP - QR)$ est toujours nul, ce que nous voulions démontrer.

Nous avons mis en œuvre ici le *principe de densité algébrique* : ayant eu besoin de l'hypothèse que $\det(S) \neq 0$ pour montrer que Ψ est nulle, nous avons introduit $\Phi = \det(S) \times \Psi$ qui prend la valeur 0 dans tous les cas, puis nous avons fait en sorte de « simplifier » par la fonction $\det(S)$.

Le terme de *densité* évoque naturellement la Topologie, et on peut ici invoquer celle de ZARISKI. Nous renvoyons le lecteur intéressé à **[22]**.

4. Quelques résultats sur les coniques générales

4.1. Le théorème de CARNOT

Une autre manière d'aborder l'exercice à la fin du **II-3.1** est d'utiliser le théorème de CARNOT, dont l'énoncé suit, avec ensuite la complicité du théorème de CEVA.

Théorème de CARNOT. *On donne un triangle ABC d'un plan affine, et, sur chacune des droites BC, CA et AB, une paire de points (P, P'), (Q, Q') et (R, R') respectivement, ces six points étant tous distincts et distincts des sommets du triangle. Alors, ces six points sont sur une même conique si,*

et seulement si,

$$\frac{\overline{BP}\times\overline{BP'}}{\overline{CP}\times\overline{CP'}}\times\frac{\overline{CQ}\times\overline{CQ'}}{\overline{AQ}\times\overline{AQ'}}\times\frac{\overline{AR}\times\overline{AR'}}{\overline{BR'}\times\overline{BR'}}=1.$$

Cette formule bien utile pourra servir chaque fois que l'on veut situer sur une même conique six points placés par deux sur les côtés d'un triangle. Elle a aussi l'avantage de ne pas se cantonner aux coniques circonscrites, quoique cette restriction ne nous ait pas beaucoup pénalisés jusqu'à présent.

En effet, supposons les six points sur la conique $\mathscr{C}$ d'équation barycentrique $uX^2+u'Y^2+u''Z^2+vYZ+v'ZX+v''XY=0$. Cette conique coupe la droite BC en les points P et P' dont les coordonnées barycentriques $(0,y,z)$ et $(0,y',z')$ sont solutions de l'équation $u'Y^2+vYZ+u''Z^2=0$. Vu le **I-3**, on a aussi $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=-\dfrac{z}{y}$ et $\dfrac{\overline{BP'}}{\overline{CP'}}=-\dfrac{z'}{y'}$, de sorte que

$$\frac{\overline{BP}\times\overline{BP'}}{\overline{CP}\times\overline{CP'}}=\frac{zz'}{yy'}=\frac{u'}{u''}.$$

Dans la formule qui précède, la dernière égalité résulte de la relation donnant le produit des racines d'une équation du second degré. Pourquoi, en revanche, a-t-on $u''\neq 0$? Sinon, $\mathscr{C}$ passerait par le point C, qui est aligné avec P,P' d'une part et Q,Q' d'autre part. La conique se décomposerait donc en la réunion des droites CB et CA, ce qui est absurde puisque R n'appartient pas à cette réunion.

Cela étant, on effectue sur les mêmes calculs sur les autres quotients (permutations circulaires!) et cela montre que le produit figurant dans le membre de gauche du théorème est égal à $\dfrac{u'}{u''}\dfrac{u''}{u}\dfrac{u}{u'}=1$, cqfd.

Le résultat qui vient d'être obtenu s'étend, au prix d'un calcul analogue, à des « cas limites » : l'égalité a toujours lieu lorsque $R'=R$ par exemple, à la condition que la droite AB soit tangente à la conique; on peut bien entendu avoir plus d'une égalité entre points des « paires » (P,P'), (Q,Q') et (R,R').

Réciproquement, supposons la formule vérifiée, et appelons $\mathscr{C}$ une conique passant par les six points sauf peut-être le dernier d'entre eux, R'. Cette conique coupe AB en R donc la recoupe en un point R''. Ce point n'est pas un des côtés du triangle, ce pour la même raison que *supra*. S'il est égal à R, c'est que la droite AB est tangente à la conique. Quoi qu'il en soit, la condition nécessaire montre que l'on a

$$\frac{\overline{BP}\times\overline{BP'}}{\overline{CP}\times\overline{CP'}}\times\frac{\overline{CQ}\times\overline{CQ'}}{\overline{AQ}\times\overline{AQ'}}\times\frac{\overline{AR}\times\overline{AR''}}{\overline{BR}\times\overline{BR''}}=1.$$

Donc, on a aussi $\dfrac{\overline{AR'}}{\overline{BR'}} = \dfrac{\overline{AR''}}{\overline{BR''}}$ et de cela suit $R'' = R'$. Donc, les six points sont bien sur une même conique.

On aurait pu aussi former l'équation barycentrique de $\mathscr{C}$ et vérifier que les coordonnées barycentriques de R' la satisfont.

Comme cela a été annoncé, on peut retrouver le résultat de l'exercice cité au début de cette section. En gardant les mêmes notations que dans celui-ci, le théorème de CEVA établit les égalités

$$\overline{BM_A} \times \overline{CM_B} \times \overline{AM_C} = -\overline{CM_A} \times \overline{AM_B} \times \overline{BM_C}$$

et

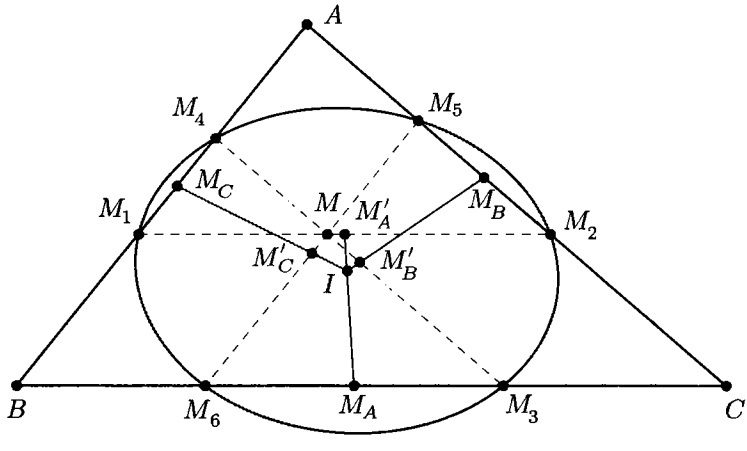
$$\overline{BN_A} \times \overline{CN_B} \times \overline{AN_C} = -\overline{CN_A} \times \overline{AN_B} \times \overline{BN_C}\,.$$

De cela suit que

$$\frac{\overline{BM_A} \times \overline{BN_A}}{\overline{CM_A} \times \overline{CN_A}} \times \frac{\overline{CM_B} \times \overline{CN_B}}{\overline{AM_B} \times \overline{AN_B}} \times \frac{\overline{AM_C} \times \overline{AN_C}}{\overline{BM_C} \times \overline{BN_C}} = \frac{-1}{-1} = 1\,.$$

Ainsi, les six points sont bien sur une même conique.

Voici une seconde application du théorème de CARNOT :



On donne un triangle non aplati ABC et un point M du plan, à distance finie. La parallèle menée de M à BC coupe les droites AB et AC en les points M_1 et M_2, respectivement. On construit de même les points M_3, M_4, M_5 et M_6 et on suppose que ces six points existent et sont distincts [57].

Montrons alors qu'ils se situent tous les six sur une même conique, et indiquons une construction de son centre lorsqu'il existe.

[57] On vérifie sans difficulté que cela se produit si, et seulement si, le point M n'appartient à aucun des côtés du triangle, et à aucune des parallèles menées par un des sommets au côté opposé.

Du fait du théorème de THALÈS, on a tout de suite

$$\overline{AM_1}\cdot\overline{CM_2} = \overline{AM_2}\cdot\overline{BM_1}$$

ainsi que les deux autres égalités qui s'en déduisent par permutation des rôles des sommets du triangle. C'est exactement ce qu'il faut établir pour montrer que

$$\frac{\overline{BM_3}\cdot\overline{BM_6}\cdot\overline{CM_2}\cdot\overline{CM_5}\cdot\overline{AM_1}\cdot\overline{AM_4}}{\overline{CM_3}\cdot\overline{CM_6}\cdot\overline{AM_2}\cdot\overline{AM_5}\cdot\overline{BM_1}\cdot\overline{BM_4}} = 1\,.$$

Ainsi, les six points sont bien sur une même conique $\mathscr{C}$; supposons que c'est une ellipse ou une hyperbole (non dégénérée). Au **II-2.9**, nous avons vu une construction du centre I de $\mathscr{C}$ au moyen de cordes parallèles.

Or, les cordes M_1M_2 et M_3M_6 sont parallèles : le point I appartient donc à la droite joignant les milieux de ces deux cordes. Pour la même raison, il appartient à la droite joignant les milieux de M_5M_6 et de M_1M_4, et celle joignant ceux de M_3M_4 et de M_2M_5. Ces trois droites sont donc concourantes, précisément au point I.

Remarquons aussi que, selon les définitions du **II-2.9**, le diamètre $M_AM'_A$ est conjugué à la direction BC. De même, les diamètres $M_BM'_B$ et $M_CM'_C$ sont conjugués respectivement aux directions CA et AB.

Une étude détaillée des cas particuliers est possible ; on peut se demander pour quelles positions de M la conique contenant les six points est dégénérée, ou bien est une parabole, ou encore une hyperbole équilatère. Tout cela se fait avec des calculs d'une complexité raisonnable et nous allons nous contenter de caractériser les M pour lesquels les six points sont cocycliques.

À la fin du **VI-2.3**, à l'occasion d'un exercice, nous établirons que, si trois cordes NN', PP' et QQ' inscrites dans une conique $\mathscr{C}$ se coupent en un point M, alors $\mathscr{C}$ est un cercle si, et seulement si,

$$\overline{MN}\,\overline{MN'} = \overline{MP}\,\overline{MP'} = \overline{MQ}\,\overline{MQ'}\,.$$

Choisissons donc les cordes M_1M_2, M_3M_4 et M_5M_6, sécantes en M. Désignons par (x, y, z) les coordonnées barycentriques normalisées du point M ; une équation barycentrique d'une parallèle à BC est de la forme

$$uX + v(X + Y + Z) = 0$$

avec $u \neq 0$. En écrivant qu'elle passe par M, on obtient l'équation barycentrique suivante de droite M_1M_2 :

$$(x + y + z)X - x(X + Y + Z) = 0$$

On obtient alors les coordonnées barycentriques normalisées des points M_1 et M_2, respectivement $(x, y+z, 0)$ et $(x, 0, y+z)$. De cela suit que $\overrightarrow{AM_1} =$

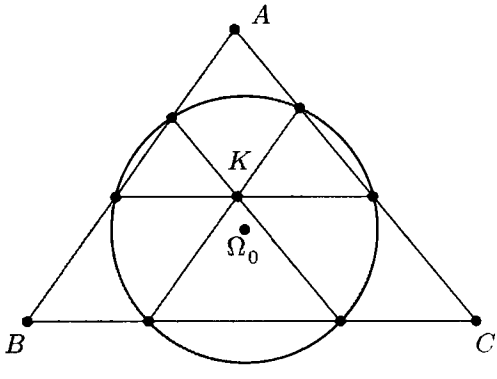
$(y+z)\overrightarrow{AB}$ alors que $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$. En conclusion, $\overrightarrow{MM_1} = z\overrightarrow{CB}$ [58]. De même, $\overrightarrow{MM_2} = y\overrightarrow{BC}$. La relation *supra* équivaut donc à

$$-yza^2 = -zxb^2 = xyc^2.$$

Le seul triplet (x, y, z) satisfaisant cette relation ainsi que la relation $x + y + z = 1$ est $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}(a^2, b^2, c^2)$. En d'autres termes, le seul point qui convienne est le point de LEMOINE K du triangle ABC. Ce point a été défini au **I-3**.

Au **VI-2.1**, nous définirons la *puissance* d'un point par rapport à un cercle. Ici, lorsque $M = K$, la conique $\mathscr{C}$ est un cercle, et la puissance de K par rapport à ce cercle est

$$\mathrm{p}_{\mathscr{C}}(K) = \overline{KM_1} \cdot \overline{KM_2} = -\frac{a^2b^2c^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}.$$



4.2. Alignement de trois images affines

4.2.1. Généralités

Dans la section **I-7.1**, nous avons donné les formules matricielles d'une application affine. En voici une application intéressante : *supposons données trois applications affines φ_1, φ_2 et φ_3 et demandons-nous quel est le lieu des points M tels que $\varphi_1(M)$, $\varphi_2(M)$ et $\varphi_3(M)$ soient alignés.*

Comme nous le savons, les coordonnées barycentriques (x', y', z') du point $\varphi_1(M)$ sont liées à celles, (x, y, z), de M par une formule du type

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_1' & a_1'' \\ b_1 & b_1' & b_1'' \\ c_1 & c_1' & c_1'' \end{pmatrix}}_{F_1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

[58] On pouvait aussi remarquer que le quadrilatère BM_6MM_1 est un parallélogramme.

Dans cette formule matricielle, nous supposerons que la somme des composantes de chaque colonne vaut 1, ce qui est loisible vu le **I-7.1**.

On a bien sûr des formules analogues pour φ_2 et φ_3, avec des matrices F_2 et F_3, pour lesquelles nous ferons la même hypothèse. Ainsi, $\varphi_1(M)$, $\varphi_2(M)$ et $\varphi_3(M)$ sont alignés si, et seulement si, on a

$$\begin{vmatrix} a_1x+a'_1y+a''_1z & a_2x+a'_2y+a''_2z & a_3x+a'_3y+a''_3z \\ b_1x+b'_1y+b''_1z & b_2x+b'_2y+b''_2z & b_3x+b'_3y+b''_3z \\ c_1x+c'_1y+c''_1z & c_2x+c'_2y+c''_2z & c_3x+c'_3y+c''_3z \end{vmatrix} = 0.$$

Il semblerait que l'équation barycentrique de ce lieu fût de degré 3, mais, si l'on additionne toutes les lignes à la première dans ce déterminant, on le met sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ b_1x+b'_1y+b''_1z & b_2x+b'_2y+b''_2z & b_3x+b'_3y+b''_3z \\ c_1x+c'_1y+c''_1z & c_2x+c'_2y+c''_2z & c_3x+c'_3y+c''_3z \end{vmatrix} = 0.$$

Le degré n'a pas changé apparemment, mais l'on peut désormais factoriser $x+y+z$ dans ce déterminant. C'est compréhensible : si M est à l'infini, d'une part $x+y+z=0$ et d'autre part les points $\varphi_1(M)$, $\varphi_2(M)$ et $\varphi_3(M)$ sont à l'infini aussi (car les applications φ_i sont **affines**), donc alignés. Il est donc normal que la droite de l'infini fasse « partie » du lieu et que son équation barycentrique se factorise dans l'équation cherchée. Le lieu est donc la réunion de la droite de l'infini et de l'ensemble $\mathscr{E}$ d'équation barycentrique

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1X+b'_1Y+b''_1Z & b_2X+b'_2Y+b''_2Z & b_3X+b'_3Y+b''_3Z \\ c_1X+c'_1Y+c''_1Z & c_2X+c'_2Y+c''_2Z & c_3X+c'_3Y+c''_3Z \end{vmatrix} = 0.$$

Si on développe ce déterminant, on obtient maintenant l'équation d'une conique ; cette fois, $\mathscr{E}$ peut être vide, rien ne nous garantissant l'existence de points satisfaisant la condition requise.

Si l'on choisit trois points non alignés A_1, A_2 et A_3 et pour φ_i l'homothétie de centre A_i et de rapport 2, aucun point à distance finie ne fait partie du lieu. En effet, les images d'un point M quelconque par les φ_i forment le triangle $A'_1A'_2A'_3$ symétrique de $A_1A_2A_3$ par rapport à M ; ces trois points ne peuvent donc être alignés.

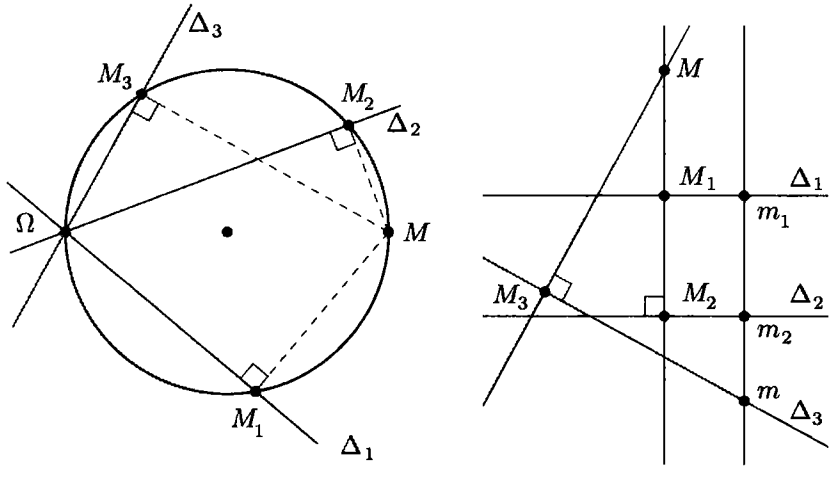
Dans les sections qui suivent, nous envisageons le cas des projections orthogonales sur trois droites. Dans un premier temps, nous réglons leur compte géométriquement à quelques cas particuliers simples (et qui ont pour dessein de montrer que seule la configuration de trois droites en triangle est réellement intéressante). Ensuite, dans l'exemple fondamental de la droite de SIMSON, nous connaîtrons d'avance assez de points de $\mathscr{E}$ pour être sûrs que cette conique n'est pas vide.

4.2.2. Des configurations particulières

Si trois droites deux à deux distinctes Δ_1, Δ_2 et Δ_3 d'un plan affine euclidien concourent en Ω, le lieu des points M dont les projections respectives M_i, avec $1 \leqslant i \leqslant 3$, sur ces droites sont alignées est réduit au singleton $\{\Omega\}$.

En effet, Ω appartient clairement à ce lieu, puisque ses trois projections sont confondues avec lui. En outre, si un point M est distinct de Ω, les trois points M_i appartiennent au cercle de diamètre ΩM. Or, trois points d'un cercle ne sont alignés que si deux d'entre eux au moins sont confondus, et cela n'est pas le cas puisque $M \neq \Omega$.

Si deux droites distinctes Δ_1 et Δ_2 d'un plan affine euclidien sont parallèles et si une troisième droite Δ_3 leur est sécante, le lieu des points M défini de la même façon est réduit à Δ_3. En effet, quel que soit M, les points M_1 et M_2 sont distincts et appartiennent à la perpendiculaire (commune) à Δ_1 et Δ_2 menée de M. Si $M \in \Delta_3$, on a $M_3 = M$ et les points M_i sont alignés. Sinon, on a $M_3 \neq M$ et la droite MM_3 n'est pas parallèle à M_1M_2 : l'alignement est donc en défaut.



Si les trois droites Δ_i sont parallèles, alors les points M_i sont toujours alignés et le lieu est le plan tout entier.

Il ne nous reste donc que le cas *général* qui suit, et ce cas va se révéler ô combien plus consistant que les précédents.

4.2.3. La droite de Simson et l'hypocycloïde de Steiner

Appliquons donc le principe général *supra* au cas où les φ_i sont les projections orthogonales respectives sur les côtés BC, CA et AB d'un triangle ABC du plan affine euclidien.

Nous établissons par le calcul le résultat suivant : le lieu des points dont les trois projections orthogonales sur les côtés d'un triangle sont alignées est le cercle circonscrit à ce triangle.

Passons dès à présent au calcul ; par exemple, φ_1 laisse fixes les points B et C et envoie A sur le pied de la hauteur qui en est issue. Les coordonnées barycentriques de ce point sont $(0, b\cos\widehat{C}, c\cos\widehat{B})$, soit encore, sous forme de coordonnées barycentriques normalisées, $(0, b\cos\widehat{C}/a, c\cos\widehat{B}/a)$.

La matrice F_1 est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{b\cos\widehat{C}}{a} & 1 & 0 \\ \dfrac{c\cos\widehat{B}}{a} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient de la même façon les coefficients des matrices F_2 et F_3 (par permutation circulaire), de sorte que l'équation barycentrique du lieu cherché est, avant l'opération sur les lignes,

$$\begin{vmatrix} 0 & X + aY\cos\widehat{C}/b & X + aZ\cos\widehat{B}/c \\ bX\cos\widehat{C}/a + Y & 0 & Y + bZ\cos\widehat{A}/c \\ cX\cos\widehat{B}/a + Z & cY\cos\widehat{A}/b + Z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous additionnons, comme convenu, les lignes de ce déterminant à la première et que nous simplifiions par $X + Y + Z$, nous avons maintenant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bX\cos\widehat{C}/a + Y & 0 & Y + bZ\cos\widehat{A}/c \\ cX\cos\widehat{B}/a + Z & cY\cos\widehat{A}/b + Z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il reste alors à développer le déterminant et à réduire les coefficients. Dans le calcul du terme en ZX, on est amené à simplifier l'expression $\Phi = b/a(\cos\widehat{A}\cos\widehat{B} + \cos\widehat{C})$. Or, $\cos\widehat{C} = -\cos(\widehat{A} + \widehat{B})$ et on obtient $\Phi = b\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}/a$. À la fin, on a l'équation barycentrique cherchée

$$YZ\sin^2\widehat{A} + bZX\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}/a + cXY\sin\widehat{A}\sin\widehat{C}/a = 0.$$

On peut encore améliorer le résultat obtenu en multipliant le tout par a^2 et en le divisant par $\sin^2\widehat{A}$. Comme on a par exemple $\dfrac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{a}$, on obtient

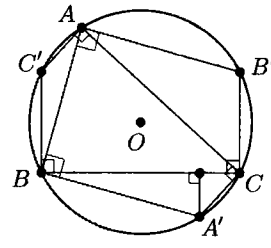
$$a^2YZ + b^2ZX + c^2XY = 0.$$

Le lieu cherché est donc bien le cercle circonscrit au triangle.

Dès lors que nous savions que le lieu était une conique, et cela résultait de simples considérations sans calculs sur les déterminants, nous aurions pu, du moins dans

le cas général, nous passer de ces calculs pour déterminer la nature exacte de notre conique. En effet, si elle coupe le cercle circonscrit en cinq points au moins, elle coïncide avec lui et nous allons le mettre facilement en évidence lorsque le triangle n'est pas rectangle.

Les sommets du triangle appartiennent au lieu : par exemple, les projections de A sur BC, CA et AB sont alignées, car les deux dernières coïncident avec le point A. Désignons par A', B' et C' les symétriques respectifs des sommets du triangle par rapport au centre O du cercle circonscrit.



Le point A' appartient aussi au lieu, comme les deux autres points, car ses projections sur BC, CA et AB sont toutes les trois sur le côté BC ; en effet, l'angle $\widehat{ACA'}$ est droit (puisque A et A' sont diamétralement opposés) et la projection de A' sur CA est le point C ; de même, sa projection sur AB est le point B.
Cela fait bien six points distincts en général, mais quatre seulement lorsque le triangle est rectangle en A puisqu'alors $B' = C$ et $C' = B$. Dans ce dernier cas, quatre points d'intersection entre la conique et le cercle ne suffisent pas pour établir l'égalité des deux objets.

Lorsque M est un point de ce cercle, la droite Δ qui en porte les projections sur les trois côtés s'appelle la *droite de Simson* du point M. Nous allons approfondir les propriétés nombreuses de cette droite, et en particulier montrer qu'elle passe aussi par le milieu H_M du segment HM. Ce point appartient au cercle d'EULER puisque ce dernier se déduit (entre autres) du cercle circonscrit par l'homothétie de centre H et de rapport $+1/2$.

La famille des droites de SIMSON des points du cercle circonscrit a une propriété remarquable : toutes les droites de cette famille sont tangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements[59], dite de STEINER, centrée au centre Ω du cercle d'EULER du triangle et tangente à ce cercle en trois points distincts ainsi qu'aux trois côtés et aux trois hauteurs du triangle. Cette configuration est d'autant plus inattendue que l'hypocycloïde est invariante par la rotation de centre Ω et d'angle $2\pi/3$, alors qu'un triangle ABC général ne jouit pas de cette propriété.

Il existe une interprétation cinématique du résultat qui va être établi : si M parcourt le cercle circonscrit avec une vitesse angulaire constante ω, le point H_M qui s'en déduit par homothétie parcourt le cercle d'EULER à la même vitesse. En revanche, la droite de SIMSON recoupe le cercle d'EULER en un point H'_M qui, nous le verrons, parcourt ce même cercle à une vitesse angulaire égale à -2ω. On sait alors que la droite qui joint ces

[59] Même s'il n'est pas familier des courbes cycloïdales, le lecteur pourra profiter du spectacle en examinant la figure qui suit.

deux points, c'est-à-dire la droite de SIMSON, enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements[60].

Remarquons aussi que, si on appelle M' le point diamétralement opposé à M, alors $H_{M'}$ est diamétralement opposé à H_M sur le cercle d'EULER, mais $H'_{M'}$ est égal à H'_M puisque la vitesse angulaire de ce second point est double. Les droites de SIMSON de M et de M' sont donc orthogonales au point H'_M.

Remarque. Les propriétés mises en œuvre *supra* sont de nature métrique et angulaire. C'est donc par les nombres complexes que la vérification des résultats énoncés s'effectuera au mieux, une fois le plan euclidien identifié à $\mathbb{C}$.

Si on suppose par exemple, quitte à faire subir une homothétie à la figure, que le rayon du cercle circonscrit au triangle est égal à 1, une translation permet de placer le centre de ce cercle à l'origine ; les affixes des sommets sont alors des complexes a, b et c de module 1.

Attention. Ici, a, b et c désignent des complexes, et non des longueurs de côtés !

Comme le chapitre **V** nous le montrera, l'affixe de H est alors $z_H = a+b+c$ et celui de Ω est $z_\Omega = \dfrac{a+b+c}{2}$. Si z est l'affixe du point M du cercle circonscrit, il se projette sur AB et BC en les points d'affixes respectifs $z_c = \dfrac{a+b+z-ab\bar{z}}{2}$ et $z_b = \dfrac{a+c+z-ac\bar{z}}{2}$.

Lorsque $M \neq A$, l'affixe du point $H_M = \dfrac{a+b+c}{2} + \dfrac{z}{2}$ est aussi égal à $t_0 z_c + (1-t_0)z_b$, avec $t_0 = \dfrac{bz+ac}{(b-c)(z-a)}$, ce qui confirme[61] que ce point est bien sur la droite de SIMSON de M. Comme le cercle d'EULER est de centre O et de rayon $1/2$, on obtient les intersections de la droite de SIMSON de M avec ce cercle en résolvant l'équation en le réel t

$$\left|tz_c + (1-t)z_b - z_\Omega\right|^2 = \frac{1}{4}.$$

C'est une équation du second degré dont on connaît la solution t_0. Or, on

[60] Ce résultat se généralise : si deux points M et M' parcourent un cercle à des vitesses angulaires respectives ω et $m\omega$, où m est un entier $\neq 0 \neq \pm 1$, la droite Δ qui les joint enveloppe une courbe *cycloïdale*, plus précisément une épicycloïde à $m-1$ rebroussements si $m > 0$ et une hypocycloïde à $1-m$ rebroussements si $m < 0$. Il y a contact de la courbe et du cercle chaque fois que $M = M'$, ce qui se produit $|m-1|$ fois au cours d'un parcours complet du cercle par M, et Δ est une tangente de rebroussement chaque fois que M et M' sont diamétralement opposés, ce qui se produit avec la même fréquence.

[61] Mais il faut pour cela s'assurer que t_0 est réel. Or, puisque a, b, c et z sont de module 1, $\bar{t}_0 = \dfrac{1/bz + 1/ac}{(1/b - 1/c)(1/z - 1/a)} = t_0$.

vérifie tout de suite que le produit des racines est

$$(bz+ac)\frac{z(bz+ac)-z^3-abc}{z(b-c)^2(z-a)^2},$$

de sorte que l'autre racine est $t_1 = \dfrac{z(bz+ac)-z^3-abc}{z(b-c)(c-a)}$. La droite de SIMSON recoupe donc le cercle d'EULER en le point H'_M d'affixe

$$t_1 z_c + (1-t_1) z_b = \underbrace{\frac{a+b+c}{2}}_{z_\Omega} - \frac{abc}{2z^2}.$$

Cela établit bien que le vecteur $\overrightarrow{\Omega H'_M}$ « tourne » avec une vitesse angulaire de sens opposé et de valeur double de celle du vecteur $\overrightarrow{\Omega H_M}$.

On peut avoir $H'_M = H_M$ [62] ; la droite de SIMSON de M est alors tangente au cercle d'EULER, puisqu'une droite qui rencontre un cercle (de rayon > 0) en un seul point lui est tangente.

Le fait que l'enveloppe est une hypocycloïde résulte alors du calcul simple de l'exercice **V-4**.d. En outre, ce calcul montre que le *point caractéristique* M' de la droite de SIMSON, c'est-à-dire son point de contact avec l'enveloppe, est le symétrique de H'_M par rapport à H_M [63]. Cela fournit donc une construction de ce point, puisque H_M est le milieu de HM et que H'_M est le point où la droite de SIMSON recoupe le cercle d'EULER.

La figure qui suit représente les trois côtés d'un triangle non rectangle, les trois hauteurs ainsi que la droite de SIMSON d'un point générique du cercle circonscrit. Ces sept droites sont tangentes à l'hypocycloïde. Le cercle d'EULER lui est tritangent.

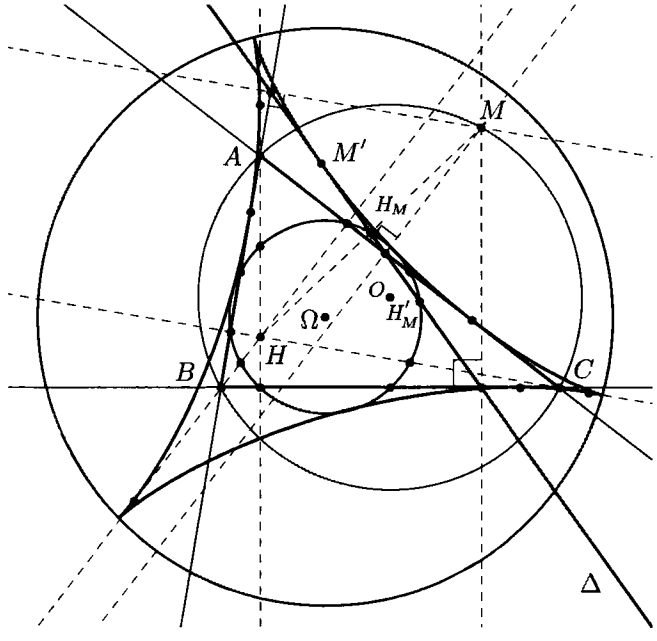
Le plus grand cercle représenté sur cette figure est celui qui contient les trois points de rebroussement. Il est centré en Ω et son rayon est triple de celui du cercle d'EULER.

À noter aussi que ces points de rebroussement correspondent aux valeurs de z pour lesquelles H_M et H'_M sont diamétralement opposés, c'est-à-dire à z solution de l'équation $Z^3 = abc$; les tangentes aux points de rebroussement passent par le centre Ω du cercle d'EULER puisqu'elles joignent des points diamétralement opposés sur ce cercle. Ces points de rebroussement ne sont pas constructibles à la règle et au compas, car ils exigent une tri-

[62] Cela se produit si, et seulement si, $z^3 = -abc$. Comme $-abc$ est de module 1, ses trois racines cubiques le sont aussi et il y a exactement trois points du cercle dans ce cas.

[63] Avec les notations *supra*, il a donc pour affixe le complexe $\dfrac{a+b+c}{2} + z + \dfrac{abc}{2z^2}$.

section des angles du triangle[64]. Toutefois, nous allons donner dans les sections qui suivent une méthode de construction des ces tangentes avec l'« outil coniques » du logiciel CABRI, en discutant ensuite ce que cet outil apporte en plus des possibilités de la règle et du compas.



4.2.4. Deux constructions préparatoires

Le but de cette section est de construire les droites de SIMSON passant par un point donné M du plan. Avant de détailler les constructions annoncées, voyons à quels impératifs elles répondent. Si $\mathscr{H}$ est l'hypocycloïde enveloppe de la droite de SIMSON d'un triangle ABC et M un point du plan, nous aimerions construire les tangentes à $\mathscr{H}$ passant par M, c'est-à-dire encore les droites de SIMSON passant par M. Cela revient enfin à déterminer les points M_i du cercle circonscrit dont la droite de SIMSON passe par M.

Pour ne pas encombrer les études qui suivent de cas particuliers, traitons à part le cas où M est sur une droite portant un côté du triangle, BC par exemple. Pour un point M' du plan, appelons m'_1, m'_2 et m'_3 les projections de M' sur BC, CA et AB respectivement.

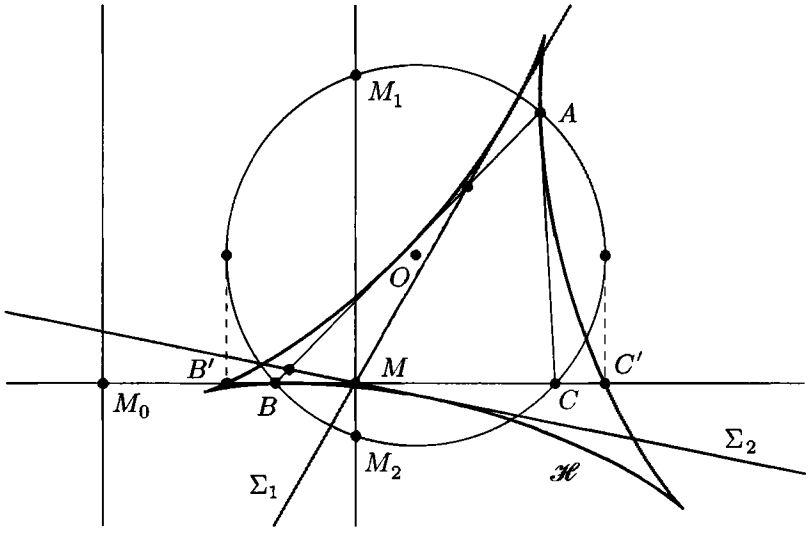
Soit M' un point du cercle circonscrit dont la droite de SIMSON Σ passe par M ; si $m'_3 \neq M$, alors $\Sigma = BC$ (et nous savons que BC est effectivement

[64]D'ailleurs les tangentes de rebroussement sont liées aux hauteurs du *triangle de* MORLEY construit à partir des trisectrices du triangle ABC.

une droite de SIMSON). Sinon, $m'_3 = M$ et une condition nécessaire est que M' soit sur la perpendiculaire à BC menée de M.

Cette perpendiculaire peut ne pas couper le cercle (si M est extérieur au segment $[B'C']$ projection orthogonale du cercle sur BC : voir l'exemple du point M_0 sur la figure). Dans ce cas, M n'appartient qu'à une droite de SIMSON. Sinon, cette perpendiculaire le coupe en un ou deux points : étudions par exemple le cas où il y a deux points distincts M_1 et M_2. Comme la projection de chacun de ces points sur BC est M, les droites de SIMSON de ces deux points passent par M et conviennent donc. On a trouvé en tout deux droites de SIMSON supplémentaires [65].

Ce qui vient d'être traité inclut-il le cas où M est un sommet, C par exemple ? Comme ce point appartient à la droite BC et à la droite CA, on peut lui appliquer la construction précédente pour chacune de ces deux droites, mais le lecteur vérifiera que cela ne fournit en tout que trois droites de SIMSON passant par C : celle de C lui-même, qui est la hauteur issue de C, et celles des points diamétralement opposés à A et à B, qui donnent respectivement les droites BC et CA. Ces trois droites peuvent n'en faire que deux, lorsque le triangle est rectangle en A ou en B.



Soit maintenant M donné hors des droites BC, CA et AB ; pour un point M' du plan, appelons toujours m'_1, m'_2 et m'_3 les projections de M' sur BC, CA et AB respectivement. Si M' est sur le cercle circonscrit, elles

[65] L'intersection est formée d'un seul point M_1 lorsque $M \in \mathscr{H}$. On ne trouve alors qu'une droite de SIMSON en plus de BC. C'est le cas justement des points B' et C' précédemment construits.

sont alignées, et la droite qui porte ces trois points contient aussi le milieu M'' du segment HM'. La droite de SIMSON de M' passe alors par M si, et seulement si, les cinq points m'_1, m'_2, m'_3, M et M'' sont alignés.

Nous pouvons réduire cela à deux problèmes :

- **Problème P_1.** Chercher les points M' du plan tels que les triplets de points (m'_2, m'_3, M'), (m'_3, m'_1, M') et (m'_1, m'_2, M') soient alignés.

  Ce problème énonce manifestement une condition nécessaire. Si, par contre, les trois conditions d'alignement sont vérifiées, on a par exemple $m'_2 \neq m'_3$ [66] et la droite Σ qui porte ces deux points passe aussi par M'. Si, par exemple, $M' \neq m'_2$, alors la troisième condition énoncée par le problème établit que m'_1 est aussi sur Σ. Cela montre que les points M' trouvés sont forcément sur le cercle circonscrit et que leurs droites de SIMSON passent par M.

- **Problème P_2.** Chercher les points M' du plan tels que les trois triplets de points (m'_1, M, M''), (m'_2, M, M'') et (m'_3, M, M'') soient alignés.

  C'est encore une condition nécessaire. Supposons inversement ces trois alignements vérifiés par un point M' du plan ; le cas le plus général est que $M'' \neq M$. Dans ce cas, les trois alignements montrent que les trois points m'_i sont sur la droite MM'' et en particulier sont alignés. Le point M' convient bien (en particulier, il est nécessairement sur le cercle $\mathscr{C}$).
  Reste le cas où $M'' = M$. Cela signifie que M est le milieu de HM' ; si M' n'appartient pas au cercle circonscrit, ce point ne peut convenir et il faudra le retirer de l'intersection trouvée. Sinon, il admet une droite de SIMSON dont nous savons qu'elle passe par M'', c'est-à-dire précisément par M. Dans ce cas, le point M' convient bien [67].
  Cette disjonction de cas ne se révélera pas superflue, car nous verrons que le lieu contient toujours le point, que nous appellerons M_0, tel que M soit le milieu de HM_0, c'est-à-dire le symétrique de H par rapport à M. Nous saurons donc démasquer et éradiquer cet éventuel intrus.

Après cela, la recherche des tangentes de rebroussement ne sera plus qu'un cas particulier, celui correspondant au choix $M' = \Omega$.

Les deux sections qui suivent détaillent l'étude de ces deux problèmes. Bien qu'il y ait une face Nord et une face Sud, le matériel d'escalade requis sera à peu près le même pour les deux expéditions. L'« outil coniques » y trouvera toute sa place.

---

[66] Les trois projections d'un point ne sont pas forcément distinctes : on a $m'_2 = m'_3$ lorsque $M' = A$; en revanche, elles ne sont jamais toutes les trois égales.

[67] Si M appartient au cercle d'EULER du triangle, deux droites de SIMSON (au moins) passent par ce point. L'une d'entre elles est la droite de SIMSON d'un point M' tel que $M'' = M$.

4.2.5. Le H_3 par la face Nord : le problème P_1

Soit tout à fait généralement deux droites Δ et Δ' concourantes, et un point M n'appartenant à aucune de ces deux droites ; désignons par $\mathscr{L}_{\Delta,\Delta',M}$ l'ensemble $\mathscr{E}_M$ des points M' tels que les projections de M' sur Δ et Δ' soient alignées avec M.

Vu ce qui précède, si un point M n'appartient à aucune des droites BC, CA ou AB, l'ensemble $\mathscr{E}_M$ est précisément

$$\mathscr{L}_{AB,AC,M} \cap \mathscr{L}_{BC,BA,M} \cap \mathscr{L}_{CA,CB,M}\,.$$

Ici, ces coniques sont des cas particuliers de celles du type $\mathscr{L}_{\Delta,\Delta',M}$. Le fait que nous avons déjà étudié le cas où $M \in BC$ (par exemple) nous dispense d'envisager le cas où $M \in \Delta \cup \Delta'$ dans l'étude générale qui suit.

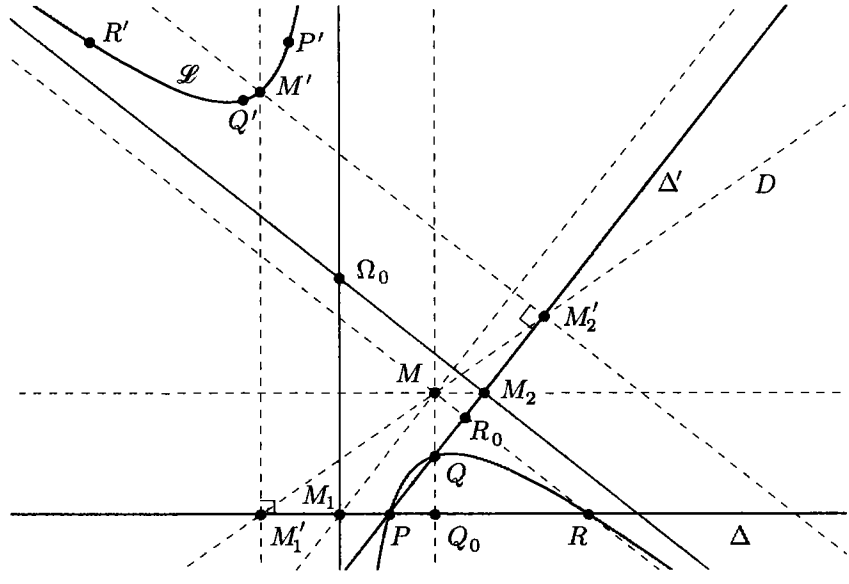
Le logiciel CABRI a besoin (comme nous) de cinq points pour tracer une conique et permet d'utiliser dans une construction les points d'intersection de deux coniques qu'il a préalablement tracées. Comme nous allons montrer que tout lieu du type $\mathscr{L}_{\Delta,\Delta',M}$ est une conique et que nous saurons comment la définir par cinq points particuliers, nous aurons assez d'informations pour tracer les trois coniques intervenant dans l'intersection, savoir $\mathscr{L}_{AB,AC,M}$, $\mathscr{L}_{BC,BA,M}$ et $\mathscr{L}_{CA,CB,M}$.

Soit donc les droites concourantes Δ et Δ', et un point $M \notin \Delta \cup \Delta'$; ayant fixé ces trois objets, nous désignerons plus simplement par $\mathscr{L}$ le lieu $\mathscr{L}_{\Delta,\Delta',M}$. Puisque les applications φ_1, φ_2 et φ_3 qui à un point M' associent respectivement sa projection sur Δ, sa projection sur Δ' et le point M sont des applications affines (la troisième est même une application constante), le lieu $\mathscr{L}$ est une conique, éventuellement vide ou dégénérée, vu le **II-4.2.1**. La figure en page suivante montre un tracé de $\mathscr{L}$ utilisant les propriétés qui vont être établies juste après.

Or, le point P de concours des droites Δ et Δ' appartient à $\mathscr{L}$, puisque $\varphi_1(P) = \varphi_2(P)$; de même, les perpendiculaires à Δ et Δ' menées de M coupent Δ' et Δ en des points Q et R respectivement. Ces points appartiennent aussi au lieu considéré : voir pour cela sur la figure les alignements MQQ_0 et MRR_0. Cela nous fait déjà trois points en général (quoiqu'il soit possible que $Q = P$ par exemple). La figure nous montre comment obtenir autant de points de $\mathscr{L}$ que l'on désire : par M on mène une droite variable D, qui coupe Δ et Δ' en M_1' et M_2' ; les perpendiculaires respectives à Δ en M_1' et à Δ' en M_2' se coupent (car elles ne sont pas parallèles) en un point $M' \in \mathscr{L}$ et il est immédiat qu'à deux droites D distinctes correspondent deux points M' distincts. Il y a toutefois deux exceptions : cette construction ne donne pas de point si D est parallèle à Δ ou à Δ'.

En fait, nous allons préciser un peu les propriétés de $\mathscr{L}$: c'est une hyperbole dont nous allons construire les asymptotes (et donc le centre). Cette étude

sera utile dans l'interprétation ultérieure du nombre de points d'intersection entre nos coniques.



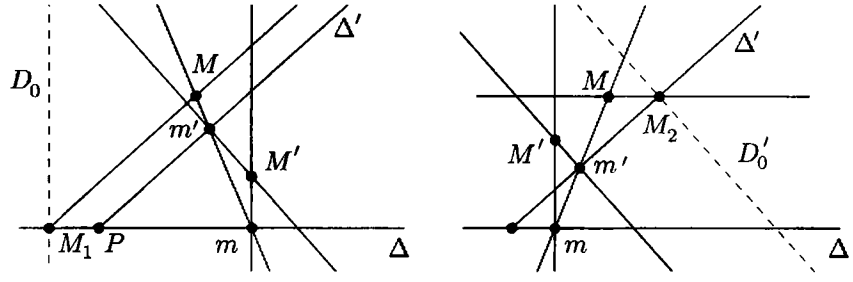
Voici une caractérisation d'une hyperbole et de ses asymptotes, dont on trouvera une preuve en annexe (voir le **A-3**) : *soit une conique* Γ *et une direction* $\overrightarrow{D}$ *de droites ; si toutes les droites de direction* $\overrightarrow{D}$ *coupent* Γ *en au plus un point et qu'il existe une droite* D_0 *de direction* $\overrightarrow{D}$ *qui ne rencontre pas* Γ, *alors* Γ *est une hyperbole non dégénérée,* $\overrightarrow{D}$ *en est une direction asymptotique et* D_0 *en est une asymptote.*

L'existence de D_0 ne rencontrant pas Γ est importante, car, sinon, Γ serait une parabole (et n'aurait pas d'asymptote).

Regardons les droites de direction orthogonale à Δ ; si $m \in \Delta$, un seul point M' de $\mathscr{G}$ appartient à la perpendiculaire D_m en m à Δ. En effet, la droite Mm coupe Δ' en un point m' et le seul point M' possible doit se projeter en m' sur Δ' : c'est donc l'intersection de D_m et de la perpendiculaire en m' à Δ'. Inversement, ce point convient.

Toutefois, il existe un point m pour lequel cette construction échoue : c'est le point M_1 intersection de Δ et de la parallèle en M à Δ'. La caractérisation précédente (appliquée à la conique $\mathscr{G}$ et à la famille des perpendiculaires à Δ) montre que $\mathscr{G}$ est une hyperbole non dégénérée et que la perpendiculaire D_0 en M_1 à Δ en est une asymptote (voir la demi-figure de gauche). La demi-figure de droite s'applique aux perpendiculaires à Δ' cette fois et établit de même que l'autre asymptote D_0' de $\mathscr{G}$ est la perpendiculaire à Δ'

menée du point M_2, intersection de E' avec la parallèle menée de M à Δ. Le centre Ω_0 de $\mathscr{L}$ est le point d'intersection de ces deux asymptotes [68]. La figure générale précédente récapitule, elle, toutes ces constructions.



Nous avons désormais jeté toutes les bases nécessaires à la construction de chacune des trois coniques $\mathscr{L}_{AB,AC,M}$, $\mathscr{L}_{BC,BA,M}$ et $\mathscr{L}_{CA,CB,M}$, que nous savons même être des hyperboles.

Le point M du plan étant donné, seul un calcul assez long permet de savoir combien de tangentes à l'hypocycloïde vont y concourir. En fait, nous nous contenterons de montrer que ce nombre est non nul et inférieur ou égal à 3 ; la preuve se trouve à l'annexe **A-2**. Toutefois, on peut mener le calcul à son terme et établir qu'il est égal à 1, 2 ou 3 selon respectivement que M est « extérieur » à cette courbe, sur cette courbe, ou « intérieur » à cette courbe, les adjectifs *extérieur* et *intérieur* étant à prendre au sens géométrique du terme, et non topologique [69]. L'étude qui suit montre que le nombre de points d'intersection de nos trois hyperboles est effectivement inférieur ou égal à 3 [70].

Deux coniques non dégénérées peuvent avoir jusqu'à quatre points d'intersection. Toutefois, ici, $\mathscr{L}_{AB,AC,M}$ et $\mathscr{L}_{BC,BA,M}$ par exemple ont une direction asymptotique commune qui est orthogonale à la droite AB. Tout se passe comme si elles avaient un point d'intersection à l'infini, et cela diminue de 1 le nombre de points d'intersection à distance finie. C'est compatible avec le résultat évoqué à l'instant.

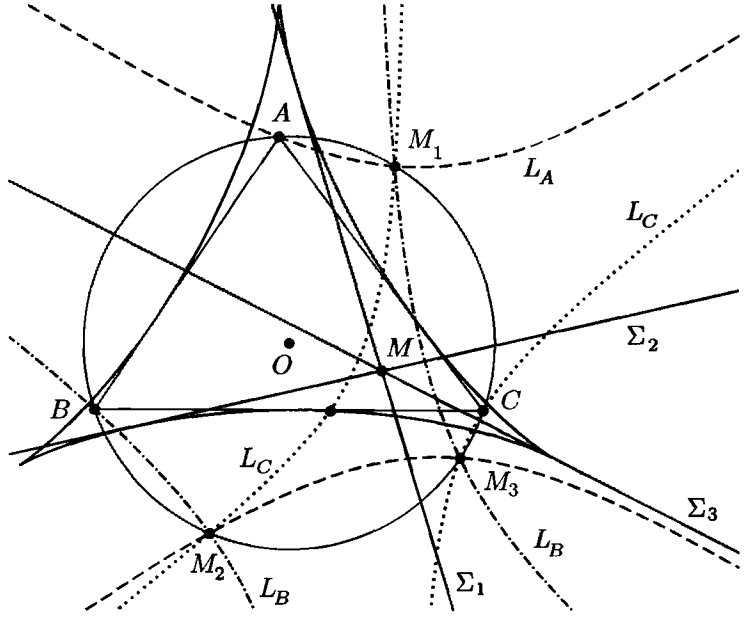
La figure qui suit représente le cas d'un point M duquel trois tangentes peuvent être menées. Nous avons appelé pour simplifier nos trois hyperboles

[68] À noter que l'angle des asymptotes est égal à celui des droites Δ et Δ'. L'hyperbole $\mathscr{L}$ est équilatère si, et seulement si, Δ et Δ' sont orthogonales.

[69] D'ailleurs, pour la topologie euclidienne, l'intérieur de cette courbe est vide. Rigoureusement, l'hypocycloïde est un arc de JORDAN dont le complémentaire possède deux composantes connexes, une non bornée, l'« extérieur » et une bornée, l'« intérieur ».

[70] Mais on se souviendra que, si un point M_i est obtenu par la construction de l'intersection précédente, il faut encore construire sa droite de SIMSON pour en déduire une tangente passant par M.

L_A, L_B et L_C respectivement, M_1, M_2 et M_3 leurs trois points communs, et Σ_1, Σ_2, Σ_3 les droites de SIMSON correspondantes.



4.2.6. Le H_3 par la face Sud : le problème P_2

Pour attaquer l'arête SIMSON par la voie P_2, nous devons mettre en œuvre (trois fois) la construction d'un lieu $\mathscr{L}'_{\Delta,H,M}$ du type suivant : étant donné une droite Δ et deux points H et M, déterminer le lieu $\mathscr{L}'_{\Delta,H,M}$ des points M' tels que le point M, le milieu M'' de HM' et la projection m' de M' sur Δ soient alignés.

Pour la même raison qu'au **II-4.2.5**, ce lieu est une conique. Elle passe manifestement par le symétrique M_0 de H par rapport à M puisque le milieu de HM_0 est M. Ce point appartient d'ailleurs au lieu quel que soit le choix de Δ.

Choisissons un repère orthonormé du plan dont l'origine soit H, et tel que l'axe des abscisses soit parallèle à la droite Δ. Une équation cartésienne de Δ est alors de la forme $Y = \lambda$, et M a des coordonnées que nous appellerons (α, β). Pour un point $M'(x, y)$ du plan, le point m' a pour coordonnées (x, λ) et une équation cartésienne du lieu est donc

$$\begin{vmatrix} X & X/2 & \alpha \\ \lambda & Y/2 & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation équivaut trivialement à la suivante (il suffit de développer le déterminant et de factoriser) :

$$(X-\alpha)(Y-\beta-\lambda)=\alpha(\lambda-\beta)\,.$$

On reconnaît ici l'équation cartésienne d'une hyperbole équilatère, éventuellement dégénérée, d'asymptotes parallèles aux axes (c'est-à-dire en toute généralité parallèles respectivement à Δ et à la direction orthogonale à Δ).

Le centre Ω_0 de l'hyperbole a pour coordonnées $(\alpha,\beta+\lambda)$; or, le point M_0 a pour coordonnées $(2\alpha,2\beta)$ et le symétrique H' de H par rapport à Δ a pour coordonnées $(0,2\lambda)$. On peut donc construire Ω_0 comme milieu du segment M_0H'. Ensuite, les asymptotes sont la parallèle et la perpendiculaire à Δ menées de Ω_0, la seconde étant $M\Omega_0$ lorsque ces points sont distincts, c'est-à-dire lorsque $\lambda\neq 0$.

Cette hyperbole dégénère en la réunion des droites d'équation cartésienne $X=\alpha$ et $Y=\beta+\lambda$, c'est-à-dire de ses asymptotes, lorsque $\alpha(\lambda-\beta)=0$. Le cas $\alpha=0$ correspond à l'égalité $H=M$ ou à l'orthogonalité de Δ et de la droite HM ; le cas $\lambda=\beta$ correspond à l'appartenance de M à Δ. Dans les deux cas, le tracé de l'hyperbole revient à celui des deux asymptotes.

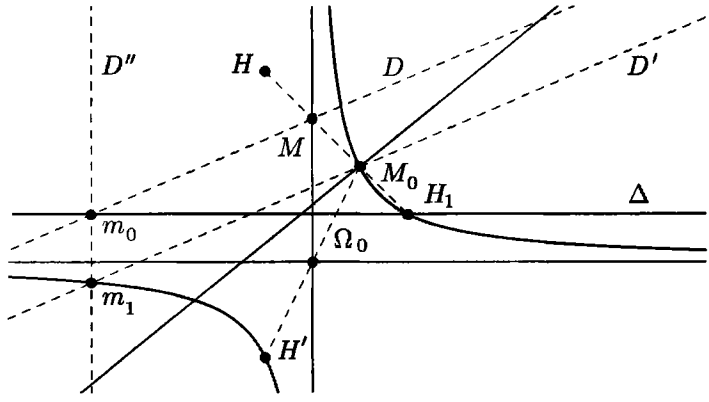
Mis à part ces cas, l'hyperbole est équilatère et non dégénérée. Si la droite HM n'est pas parallèle à Δ, ces droites se coupent en un point H_1 de l'hyperbole (en effet, la projection de H_1 sur Δ est H_1, aligné avec M et le milieu de HH_1). Comme cette courbe est symétrique par rapport à ses deux axes, qui sont les bissectrices des asymptotes, cela suffit « en général » pour placer de nouveaux points, en nombre suffisant [71] pour permettre la construction par CABRI. Sinon, on peut recourir à la construction qui suit, permettant l'obtention d'un nombre arbitraire de points : on choisit un point m_0 sur Δ, on trace la droite $D=Mm_0$ ainsi que la parallèle D' à D en H_0. Cette droite coupe la perpendiculaire D'' à Δ en m_0 en un point m_1 du lieu, qui est en outre son seul point d'intersection avec D''.

En effet, pour qu'un point M' de D'' soit sur l'hyperbole, il faut et il suffit que le milieu M'' de HM' soit aligné avec M et la projection de M' sur Δ, qui est précisément m_0. Cela se produit si, et seulement si, le point M'' appartient à D', c'est-à-dire encore si, et seulement si, M' est sur D'.

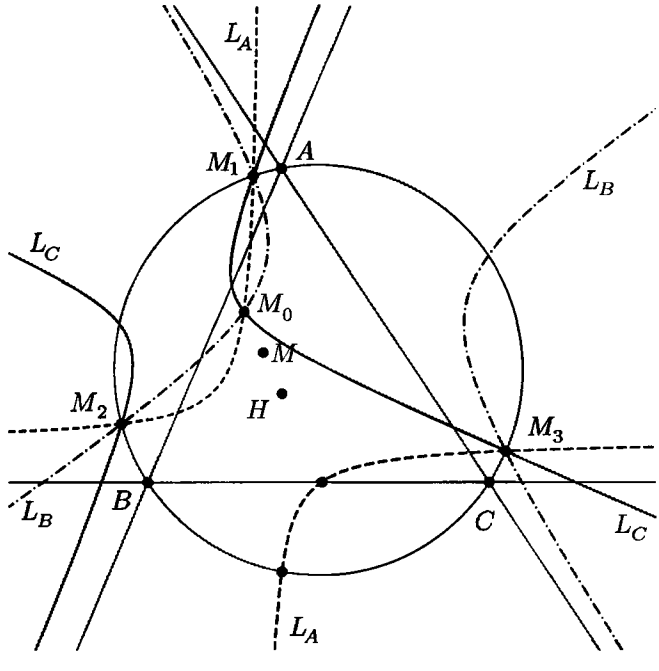
Cette construction échoue si, et seulement si, D et D' sont parallèles, c'est-à-dire si, et seulement si, m_0 est la projection de M sur Δ.

Compte tenu de la caractérisation des directions asymptotiques énoncée au **II-4.2.5**, cela confirme bien qu'une direction asymptotique de l'hyperbole est « verticale » et cela confirme la position de l'asymptote « verticale ».

[71] Au moins cinq.



Pour obtenir les points M' dont la droite de SIMSON passe par M donné, il reste donc à former l'intersection $\mathscr{S}'_{BC,H,M} \cap \mathscr{S}'_{CA,H,M} \cap \mathscr{S}'_{AB,H,M}$ et de prendre les dispositions nécessaires à propos du point M_0 selon qu'il appartient ou non au cercle circonscrit.



Dans la figure qui précède, nous avons désigné par exemple par L_A l'hyperbole $\mathscr{S}'_{BC,H,M}$, les autres noms s'en déduisant par permutation circulaire. Ici, le point M_0 n'est pas sur ce cercle et ne convient pas : les droites de SIMSON passant par M sont celles des points M_i, avec $1 \leqslant i \leqslant 3$, mais nous

ne les avons pas tracées pour ne pas nuire à la lisibilité de la figure (ce tracé sera effectué au contraire dans un cas particulier évoqué un peu plus loin).

Une propriété remarquable de la figure est à signaler : lorsque les droites de SIMSON de trois points distincts M_1, M_2 et M_3 passent par un point M, alors l'orthocentre du triangle $M_1M_2M_3$ est le symétrique de H par rapport au point M.

En effet, chacune des trois hyperboles équilatères passe par les points M_i. Nous verrons au **III-8** qu'elles passent alors aussi par l'orthocentre du triangle $M_1M_2M_3$. Or, nous avons vu que le quatrième point commun à nos hyperboles est précisément le symétrique de H par rapport à M.

Il y a toutefois un cas particulier à prendre en compte : celui où le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle, en M_1 par exemple. Dans ce cas, l'orthocentre est M_1, et non un quatrième point, et les points M_2 et M_3 sont symétriques par rapport à O. Nous avons vu au **II-4.2.3** que les droites de SIMSON des points M_2 et M_3 se coupent orthogonalement en un point H' du cercle d'EULER. Ce point H' est donc le point de concours M des trois droites de SIMSON.

Avec les notations du **II-4.2.3** utilisant des affixes, M_2 a un affixe z, celui de M_3 est alors $-z$ et celui de M_1 est alors Z tel que $\dfrac{a+b+c}{2} + \dfrac{Z}{2} = \dfrac{a+b+c}{2} - \dfrac{abc}{2z^2}$, c'est-à-dire $Z = -abc/z^2$; en outre, l'affixe du point $H' = M$ est $\dfrac{a+b+c}{2} - \dfrac{abc}{2z^2}$. Le symétrique de H par rapport à H' a pour affixe $-abc/z^2$ et on a $H' = M = M_1$. Le résultat subsiste donc dans ce cas aussi.

Cas particuliers intéressants. Soit un triangle ABC non rectangle ; choisissons alors pour M l'orthocentre H du triangle. Quelles sont les droites de SIMSON passant par H ?

D'après la méthode P_2, nous déterminons les hyperboles équilatères du type $\mathscr{L}'_{\Delta,H,H}$, où Δ est l'une des droites portant les côtés du triangle. Vu l'égalité $H = M$, chacune de ces hyperboles dégénère en la réunion de la droite Δ et de la perpendiculaire en H à Δ, c'est-à-dire en la réunion d'un côté et de la hauteur issue du sommet opposé.

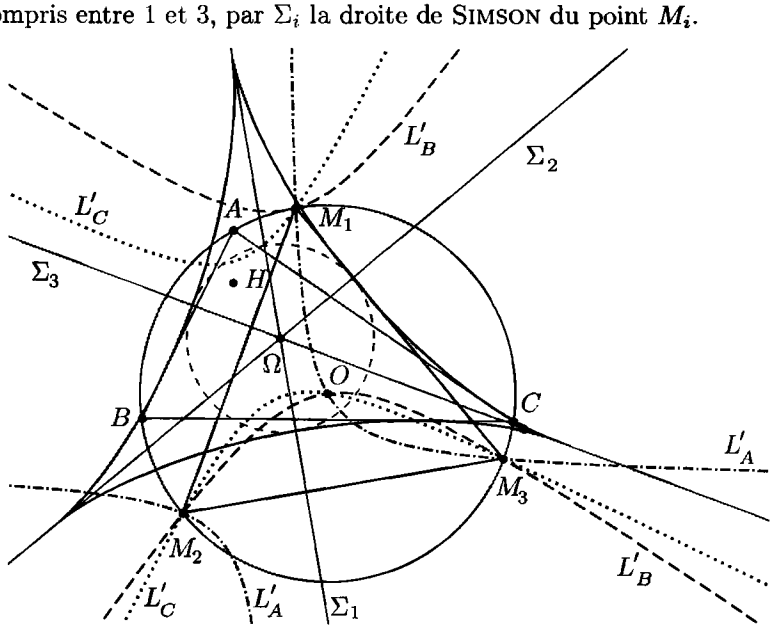
Il est alors immédiat que $\mathscr{L}'_{BC,H,H} \cap \mathscr{L}'_{CA,H,H} \cap \mathscr{L}'_{AB,H,H}$ est formée de quatre points : les sommets du triangle et l'orthocentre H. Comme l'orthocentre d'un triangle non rectangle n'est jamais sur le cercle circonscrit [72],

[72] Supposons H sur le cercle circonscrit ; il coïncide de toute façon avec au plus un sommet du triangle. Si par exemple $H \neq B \neq C$, nous considérons le symétrique H'_A de H par rapport à BC. Il est lui aussi sur le cercle circonscrit, voir **V-2**. La médiatrice de HH'_A passe donc par O ; or, cette médiatrice est BC. Donc $O \in BC$ et le triangle est rectangle en A.

les droites de SIMSON passant par H sont celles que nous connaissions déjà, c'est-à-dire celles des sommets, c'est-à-dire encore les hauteurs du triangle.

Avec la même hypothèse sur le triangle, choisissons pour M le centre Ω du cercle d'EULER du triangle. Par exemple, l'hyperbole $\mathscr{L}'_{BC,H,\Omega}$ passe par le symétrique de H par rapport à Ω, c'est-à-dire le centre O du cercle circonscrit ainsi que par le symétrique H'_A de H par rapport à BC, symétrique qui appartient au cercle circonscrit (voir au **V-2**). En outre, le centre de l'hyperbole est le milieu de OH'_A, vu notre étude générale. Le cercle circonscrit au triangle coupe donc l'hyperbole en un point symétrique du centre (du cercle) par rapport au centre (de l'hyperbole). On sait alors que ce cercle recoupe l'hyperbole en trois points formant triangle équilatéral (voir au **III-8**). Cela confirme le résultat du calcul effectué en annexe et évoqué au **II-4.2.5**.

Dans la figure qui suit, nous avons désigné par L'_A l'hyperbole $\mathscr{L}'_{BC,H,\Omega}$, les autres noms s'en déduisant par permutation circulaire, et, pour chaque i compris entre 1 et 3, par Σ_i la droite de SIMSON du point M_i.



4.2.7. En guise de conclusion

De façon imagée, les constructions géométriques s'effectuant à la règle et au compas permettent les « quatre opérations » dans le corps de base, ainsi

Au **III-6**, nous pourrons établir ce résultat d'une autre manière : l'inverse isogonal d'un point du cercle circonscrit distinct d'un sommet est à l'infini. Or, l'orthocentre d'un triangle non rectangle admet toujours un inverse isogonal à distance finie, savoir le centre du cercle circonscrit.

que les extractions de racines carrées. Si l'on introduit l'outil conique, les extractions de racines *cubiques* deviennent possibles elles aussi.

Le lecteur désireux d'approfondir pourra trouver cela détaillé de manière exhaustive et rigoureuse dans le passionnant article de J.-M. ARNAUDIÈS et P. DELEZOÏDE, **[3]**, cité en bibliographie.

Résumons ce qui éclaire nos propres constructions. Nous identifions le plan affine euclidien à $\mathbb{C}$ et nous supposons que nous disposons d'une figure initiale, c'est-à-dire d'un ensemble fini $\mathscr{P}$ de points dont en particulier les images des complexes 0 et 1. Appelons K_0 le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ qui contienne les affixes des points de $\mathscr{P}$ et qui soit stable par l'application de conjugaison $z \in \mathbb{C} \longmapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ [73].

Dans ces conditions, un point M d'affixe z_M est constructible *à la règle et au compas* à partir de la figure $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe une *tour finie* d'extensions de corps

$$K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_r$$

telle que $z_M \in K_r$ et que chaque K_{s+1} soit une extension quadratique [74] de K_s pour $0 \leqslant s \leqslant r-1$.

Dans l'énoncé précèdant, *constructible à la règle et au compas* est à prendre au sens évident du terme : chaque construction intermédiaire consiste soit en le tracé d'une droite passant par deux points de la figure (*outil règle*) ou d'un cercle centré en un point de la figure et passant par un second point de celle-ci (*outil compas*), soit en l'enrichissement de la figure par des points d'intersection de deux objets sécants obtenus à l'aide des deux outils précédents. Tout nouveau point peut servir dans une construction ultérieure et l'on accepte un nombre *fini* d'utilisations de chaque outil.

Nous ne définirons pas la constructibilité *à la règle, au compas et avec l'outil conique* puisque cela reprend la même définition, avec un outil de plus.

Il n'est pas envisageable de tracer des coniques sur une feuille de papier, ou alors tout tracé sera approximatif (à main levée, si on est adroit) ou laborieux [75]. En revanche, certains logiciels graphiques représentent sans se faire prier une conique dont cinq points sont connus et permettent de réutiliser dans les constructions les points d'intersection, pris individuellement, des objets graphiques (droites, coniques dont les cercles [76]).

---

[73] Cette clause de stabilité est importante : $\overline{1+\mathrm{i}\pi} \notin \mathbb{Q}(1+\mathrm{i}\pi)$ alors qu'une construction aussi classique qu'élémentaire permet de construire à la règle et au compas l'image de $1-\mathrm{i}\pi$ à partir de celles des complexes 0, 1 et $1+\mathrm{i}\pi$.

[74] Un corps K' est une extension quadratique d'un sous-corps K s'il existe un élément x dans $K' \setminus K$ tel que $x^2 \in K$ et tel que $K' = K[x] = \{u+vx \,|\, (u,v) \in K^2\}$.

[75] Évoquons seulement pour mémoire le tracé de l'*ellipse du jardinier* : celui-ci n'est possible que si l'on connaît les deux foyers et la longueur du grand axe.

[76] Les cercles sont des coniques privilégiées puisqu'il suffit d'en fournir le centre et un point.

Avec cette latitude supplémentaire, un point M d'affixe z_M est constructible *à la règle, au compas et avec l'outil conique* à partir de la figure $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe une *tour finie* d'extensions de corps

$$K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_r$$

telle que $z_M \in K_r$ et que chaque K_{s+1} soit une extension quadratique **ou** cubique[77] de K_s pour $0 \leqslant s \leqslant r-1$.

Les Grecs savaient déjà que le problème de la construction de $\sqrt[3]{2}$, dit *problème de Délos*, se ramenait à la recherche du point d'intersection des coniques d'équation respectivement $XY = 2$ et $Y = X^2$. Il ne leur manquait donc plus que l'ordinateur et la souris (hors de prix à l'époque).

Revenons enfin à notre hypocycloïde à trois rebroussements. Nous avions identifié le plan affine euclidien (orienté) à $\mathbb{C}$ et désigné par a, b et c les affixes des trois sommets d'un triangle. Les points du cercle circonscrit à ce triangle et dont la droite de SIMSON est une tangente de rebroussement ont des affixes solutions de l'équation $Z^3 = abc$ qui ne sont pas *en général* constructibles à la règle et au compas à partir de la figure formée par le triangle, quoiqu'ils puissent l'être dans des cas particuliers (lorsque le triangle est équilatéral, par exemple).

En revanche, l'adjonction de l'*outil conique* autorise la détermination de ces points, puisqu'il suffit de construire les droites de SIMSON passant par le centre du cercle d'EULER du triangle. Cela est conforme avec les résultats généraux énoncés dans cette section, puisque, précisément, les solutions de l'équation $Z^3 = abc$ appartiennent à une extension cubique du sous-corps K_0 correspondant à la figure initiale, celle formée par le triangle donné.

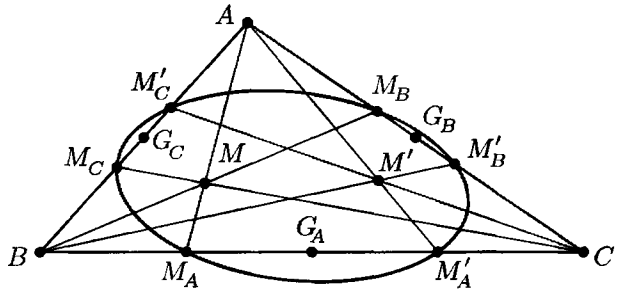
[77] Un corps K' est une extension cubique d'un sous-corps K s'il existe un élément x dans $K' \setminus K$ tel que $x^3 \in K$ et tel que $K' = K[x] = \{u + vx + wx^2 \mid (u, v, w) \in K^3\}$.

Chapitre III

Correspondances remarquables liées à un triangle

1. L'inversion isotomique

1.1. Définition



Considérons un point M du plan d'un triangle ABC. Supposons dans un premier temps que M n'appartient à aucune des droites menées d'un sommet du triangle parallèlement au côté opposé. Alors, la droite AM coupe BC en M_A, et on définit de même M_B et M_C. Appelons M'_A le symétrique de M_A par rapport au milieu G_A de BC et définissons de même M'_B et M'_C.

Nous allons montrer que les droites AM'_A, BM'_B et CM'_C sont parallèles, ou, sinon, concourent en un point M'[1], *que l'on appellera l'*inverse *(ou*

[1]On remarquera que ce point se construit à la règle et au compas à partir des points A, B, C et du point M donné.

le conjugué [2]) isotomique *de* M. Lorsque ces droites sont parallèles, nous pourrons considérer qu'elles concourent en un point M' à l'infini dans le plan projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Dans le cas où les points M_A, M_B, M_C, M'_A, M'_B et M'_C sont distincts des sommets du triangle, on peut même préciser qu'ils appartiennent à une même conique : cela résulte en fait du théorème de CARNOT, voir au **II-4.1**. En effet, on a par exemple $\overline{BM_A} = -\overline{CM'_A}$ ainsi que cinq autres égalités entre longueurs orientées, de sorte que le quotient caractérisant l'appartenance à une même conique vaut bien 1, après simplification. Comme les droites AM_A, BM_B et CM_C concourent, l'exercice du **II-3.1** montre alors le concours des droites AM'_A, BM'_B et CM'_C.

Comme ces deux résultats requéraient tout de même quelques calculs consistants, passons maintenant à une démonstration directe du concours annoncé.

Soit (x, y, z) des coordonnées barycentriques de M ; alors $(0, y, z)$ est un triplet de coordonnées barycentriques de M_A ; pour s'en convaincre, remarquer que M_A est sur le côté (BC) et que les points A, M et M_A sont alignés : voir pour cela les formules du **I-5.1**. On introduit maintenant le point M''_A de coordonnées barycentriques $(0, z, y)$: alors,

$$(y+z)\overrightarrow{G_AM_A} = y\overrightarrow{G_AB} + z\overrightarrow{G_AC} = -y\overrightarrow{G_AC} - z\overrightarrow{G_AB} = -(y+z)\overrightarrow{G_AM''_A},$$

d'où suit que $\overrightarrow{G_AM''_A} = -\overrightarrow{G_AM_A}$ puis que $M''_A = M'_A$. On obtient de la même façon les points M'_B, de coordonnées barycentriques $(z, 0, x)$ et M'_C, de coordonnées barycentriques $(y, x, 0)$. La droite (AM_A) a pour équation barycentrique $yY - zZ = 0$, et les équations des deux autres s'obtiennent par permutation circulaire. Pour conclure, il suffit de vérifier la nullité du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 0 & y & -z \\ -x & 0 & z \\ x & -y & 0 \end{vmatrix}.$$

Jusque-là, on peut se dire qu'il eût suffi de remarquer que $\dfrac{\overline{BM_A}}{\overline{CM_A}}$ et $\dfrac{\overline{BM'_A}}{\overline{CM'_A}}$ sont inverses l'un de l'autre, et d'appliquer le théorème de CEVA plutôt que de mettre en branle les lourdes formules précédentes.

En fait, ces calculs en disent plus : on peut résoudre le système suivant, pour déterminer les coordonnées barycentriques du point de concours M'

[2] Mais on préférera parler d'inverse, le terme de *conjugué* faisant double emploi avec celui défini au **II-2.6**.

de nos droites :

$$\begin{cases} yY - zZ &= 0 \\ -xX + zZ &= 0 \\ xX - yY &= 0\,. \end{cases}$$

On en tire tout de suite le triplet cherché : (yz, zx, xy).

1.2. Cas particuliers

Tout cela appelle plusieurs question et remarques :

- Quand les trois droites sont-elles parallèles ? Comme nous l'avons vu dans la section **I-4.4**, cela se produit si, et seulement si,

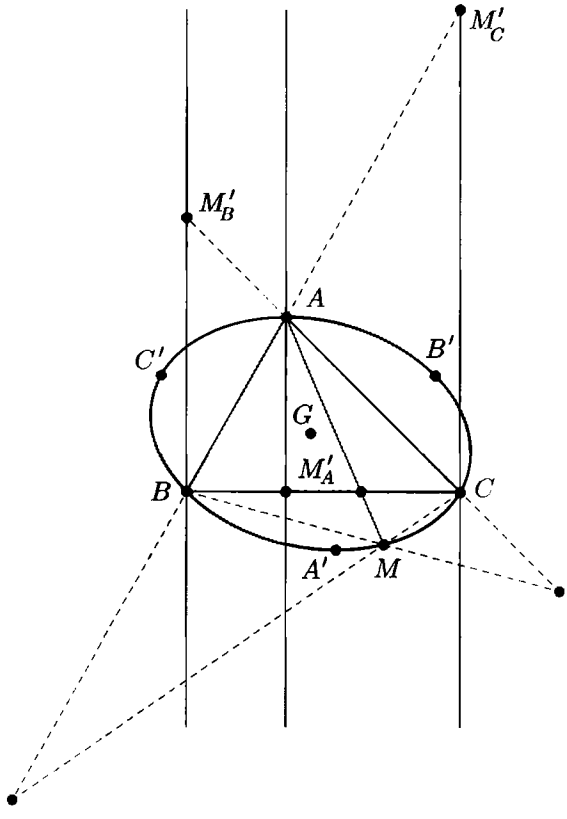
$$\begin{vmatrix} 0 & y & -z \\ -x & 0 & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = yz + zx + xy = 0\,,$$

et cela correspond bien au fait que le point M' de coordonnées barycentriques (yz, zx, xy) est à l'infini. L'ensemble des points M de coordonnées barycentriques (X, Y, Z) tels que $YZ + ZX + XY = 0$ est une conique circonscrite au triangle, voir **II-2** ; comme le laisse supposer la symétrie des rôles joués par les variables X, Y et Z, cette conique est centrée au centre de gravité G du triangle (mais, c'est aussi une conséquence des formules du **II-2.4**), elle passe donc aussi par les symétriques respectifs A', B' et C' de A, B et C par rapport à G. En outre, son équation correspond au cas $p = q = r = 1$, pour lequel on a $S = -3$; cette conique est donc une ellipse et elle a reçu le nom d'*ellipse (circonscrite) de* STEINER du triangle ABC.

Cette conique est l'ellipse d'aire minimale qui contienne le triangle dans son « intérieur ». Elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on énumère les sommets de ce triangle et joue, d'une certaine manière, le rôle du cercle circonscrit, mais dans le cadre affine[3]. De son côté, et nous le verrons bientôt, le cercle circonscrit intervient dans une autre inversion

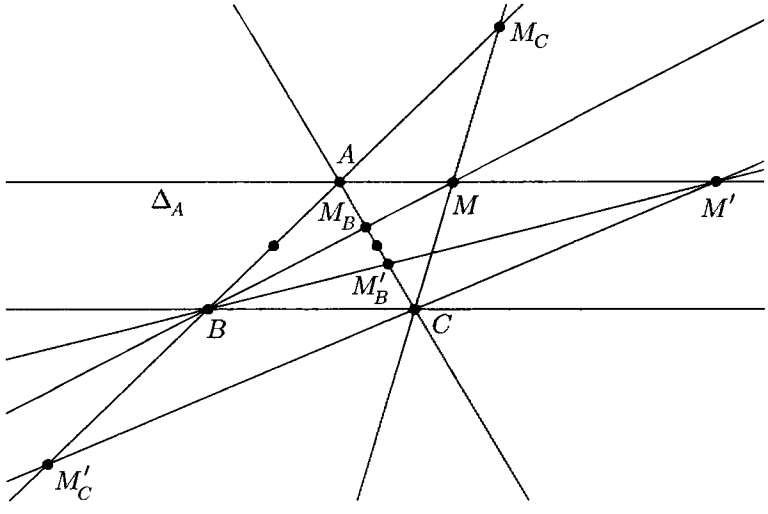
[3]De manière plus précise, si f est l'application affine qui envoie les sommets d'un triangle ABC (non aplati) respectivement sur les sommets d'un second triangle $A'B'C'$ (non aplati), alors l'image par f de l'ellipse de STEINER de ABC est l'ellipse de STEINER de $A'B'C'$; en revanche, le cercle circonscrit ne jouit pas de la même sollicitude de la part de f, sauf si, et seulement si, les triangles sont *semblables*, auquel cas f est une similitude. Si un triangle ABC est isocèle en A, l'ellipse de STEINER et le cercle circonscrit sont tangents en A, et mêmes confondus si (et seulement si) le triangle est équilatéral. Dans les autres cas, ils se coupent, mis à part les trois sommets, en un quatrième point, dit *point de Steiner* du triangle, et dont les coordonnées barycentriques sont $((a^2 - b^2)(c^2 - a^2), (b^2 - c^2)(a^2 - b^2), (c^2 - a^2)(b^2 - c^2))$. Une généralisation de cette intersection entre coniques circonscrites interviendra naturellement dans **III-2.2**.

liée au triangle ABC.



- Désignons par Δ_A la droite menée de A parallèlement au côté BC, et par Δ_B et Δ_C les deux droites définies de manière analogue après permutation des sommets A, B et C. Nous n'avons pas encore envisagé le cas où M appartient par exemple à Δ_A. Si M est le point A lui-même, alors la droite AM n'est pas définie, en revanche on a $M_B = M_C = A$, puis $M'_B = C$ et $M'_C = B$; les droites BM'_B et CM'_C sont bien définies, mais confondues avec BC : le point M' n'est donc plus défini (tout se passe comme si l'image du point A « éclatait » par l'inversion en tout le côté opposé BC).
  Si au contraire M de coordonnées barycentriques (x, y, z) appartient à Δ_A privée de A et de ses points d'intersection avec Δ_B, Δ_C et l'ellipse de STEINER, alors des calculs analogues à ceux du cas général établissent que M_B, M_C puis M'_B et M'_C sont bien définis et que les droites BM'_B et CM'_C se coupent encore en le point M' de coordonnées barycentriques (yz, zx, xy) qui appartient à Δ_A.

En outre, le point M_A est à l'infini sur la droite Δ_A : on peut alors considérer que $M'_A = M_A$ et que $AM'_A = \Delta_A$; autrement dit, le concours des trois droites du cas général est conservé. C'est un bon exercice que de le vérifier (on commencera par remarquer qu'une équation barycentrique de Δ_A est $Y + Z = 0$).



Reste enfin, mais, promis, c'est fini, le cas où M est par exemple le point d'intersection de Δ_A et Δ_B, autrement dit le point tel que le quadrilatère $AMBC$ soit un parallélogramme. Seul le point M_C est alors bien défini, c'est même le milieu C' de AB, et on a aussi $M'_C = C'$. On pourra toujours considérer que $AM'_A = \Delta_A$ et $BM'_B = \Delta_B$ et donc que $M' = M$. En fait, les coordonnées barycentriques de M sont $(1, 1, -1)$ et les formules « générales » donnent elles aussi pour M' les coordonnées barycentriques $(-1, -1, 1)$: cela confirme que $M' = M$.

- Le point M qui vient d'être trouvé est laissé fixe par l'inversion. Y en a-t-il d'autres ? Si un point M de coordonnées barycentriques (x, y, z) est laissé fixe, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $yz = \lambda x, zx = \lambda y$ et $xy = \lambda z$. Cela implique que $xyz = \lambda x^2 = \lambda y^2 = \lambda z^2$ et donc que $x = \pm y = \pm z$. Inversement, le point de coordonnées barycentriques $(1, 1, 1)$, c'est-à-dire l'isobarycentre du triangle, est fixe, de même que ceux de coordonnées barycentriques $(1, 1, -1)$, nous venons de l'étudier, $(1, -1, 1)$ et $(-1, 1, 1)$: ils se construisent de la même façon, après échange des rôles des sommets A, B et C. Comme (x, y, z) n'est défini qu'à un facteur multiplicatif non nul près, il n'y a pas d'autre point fixe. Nous en resterons à quatre.
- Il n'est pas mauvais de récapituler les cas d'existence de l'inverse d'un point M : si l'on s'en tient au cadre *affine*, un point M admet un inverse si, et seulement si, il n'appartient pas à l'ellipse de STEINER. Si l'on

consent à considérer l'inversion comme application d'une partie du plan projectif réel dans une autre partie, alors on considérera que seuls les sommets du triangle n'ont pas d'inverse.

- Si le point M est sur le côté BC, mais distinct de B et de C, on vérifie tout de suite que $M' = A$: de même que A éclate en le côté BC, le côté BC se « rétracte » par l'inversion en le point A.
  À vrai dire, cela n'est qu'un des aspects du fait suivant : si on restreint le plan affine P à une partie $\mathscr{P}$ que nous allons définir, alors l'inversion isotomique est une **involution** de $\mathscr{P}$ sur elle-même. Prenons en effet pour $\mathscr{P}$ le plan P privé des trois côtés du triangle et de l'ellipse de STEINER circonscrite, définie *supra* : autrement dit, $\mathscr{P}$ a pour équation barycentrique le système

$$(XYZ \neq 0, YZ + ZX + XY \neq 0, X + Y + Z \neq 0).$$

  Il est immédiat que si (x, y, z) vérifie ce système, alors (yz, zx, xy) le vérifie aussi puis que le point de coordonnées barycentriques $(zx \times xy, xy \times yz, yz \times zx) = xyz \times (x, y, z)$ est confondu avec celui de coordonnées barycentriques (x, y, z).

Le foisonnement des cas particuliers rencontrés dans cette section devrait persuader le lecteur du bien-fondé de l'approche projective de la Géométrie ; les cas de parallélisme se fondent alors dans la masse !

2. Droites, coniques et inversion isotomique

Nous avons déjà désigné par $\mathscr{P}$ le plan P privé des trois côtés du triangle et de l'ellipse de STEINER circonscrite Σ ; en outre, appelons dans toute cette section $\mathscr{D}$ le plan affine privé de l'ellipse de STEINER du triangle ABC, et $\imath$ l'inversion isotomique par rapport au triangle. Considérons maintenant une droite affine D du plan qui n'est pas un côté du triangle (dans le cas contraire, son image serait sans intérêt). Nous nous intéressons ici à l'image Δ de $D \cap \mathscr{D}$ par $\imath$.

Soit une équation barycentrique de D, disons $pX + qY + rZ = 0$, avec $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$. Un point M de coordonnées barycentriques (x, y, z), avec $xyz \neq 0$ (et $x + y + z \neq 0$), appartient à Δ si, et seulement si, on a

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} + \frac{r}{z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{y}\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\frac{1}{y} \neq 0.$$

Cela équivaut à $pyz + qzx + rxy = 0$, avec $x + y + z \neq 0$.

Si au contraire $xyz = 0$, M est sur un côté du triangle : si c'est un sommet, nous ne pourrons avec la meilleure volonté du monde lui attribuer un inverse, mais s'il est par exemple sur le côté AB privé des points A et B, alors son inverse est le sommet opposé C.

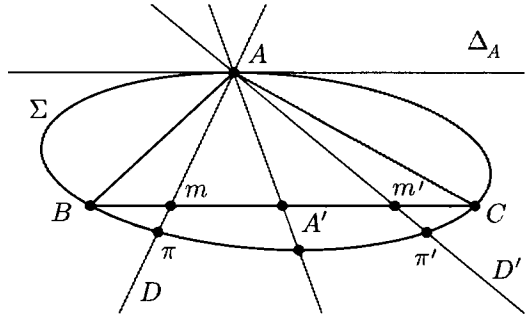
Dans tous les cas, nous avons montré que, si $M \in \Delta$, alors $\imath(M)$ appartient à la conique circonscrite Γ d'équation $pYZ+qZX+rXY = 0$. Nous vérifierons ultérieurement que $\imath(\Delta)$ est en fait la conique Γ **privée d'un nombre fini de points** lorsque D ne passe par **aucun** sommet du triangle : il va donc être crucial de distinguer les cas qui suivent.

Pour simplifier nos sous-titres, nous convenons d'appeler *droite cévienne* toute droite passant par un des sommets du triangle de référence.

2.1. L'inverse isotomique d'une droite cévienne

Moyennant quelques conventions d'énoncé, nous allons établir que l'image d'une cévienne par l'inversion isotomique est une cévienne issue du même sommet.

Supposons que la droite D passe par A ; son équation barycentrique est de la forme $qY + rZ = 0$, avec $(q,r) \neq (0,0)$ et la conique Γ a pour équation $X(rY + qZ) = 0$. Donc, Γ dégénère en la réunion du côté BC et de la droite D' d'équation $rY + qZ = 0$, qui passe par A. Puisque nous avons remarqué que le point A « éclate » en le côté BC, ce côté représente, d'une certaine manière, la contribution du seul point A à l'image de D, la droite D' contenant, elle, l'image du reste de la droite D.



Précisons cette image un peu mieux : les droites D et D' coupent respectivement le côté opposé BC en des points m et m', et recoupent Σ en des points π et π'. Comme $\imath$ est une involution de $\mathscr{P}$ sur elle-même, tout point M de D, distinct de A, m et π a son image par $\imath$ dans D', mais distincte de A, m' et π'. Comme les rôles de D et D' sont symétriques et que $\imath$ est involutive, cela montre que

$$\imath(D \setminus \{A, m, \pi\}) = D' \setminus \{A, m', \pi'\} .$$

Les points A et π n'ont pas d'image, et le point m admet A pour image. Finalement, nous avons une image pour « presque » tous les points de D :

$$\imath(D \setminus \{A, \pi\}) = D' \setminus \{m', \pi'\} .$$

À vrai dire, le point m' manquant correspond à la limite de $\imath(M)$ lorsque M tend vers A et le point π' manquant est la limite de $\imath(M)$ lorsque M tend vers l'infini sur la droite D.

Si D est la droite Δ_A, alors $D' = D$, le point m est rejeté à l'infini et le point π coïncide avec A ; nous aurons alors $\imath(D \setminus \{A\}) = D \setminus \{A\}$. Le point manquant, A cette fois, est la limite de $\imath(M)$ lorsque M tend vers l'infini sur la droite D.

Pour ces raisons, et pour simplifier nos formulations, nous pourrons dire dans tous les cas que $\imath(D) = D'$. Comme la figure le montre, la droite D' s'obtient aussi à partir de D par la symétrie affine σ_A par rapport à la médiane AA', parallèlement au côté BC [4]. Définissons de même les symétries affines σ_B et σ_C ; cela nous permet de formuler d'une autre façon la construction de l'inverse d'un point M : si M n'est pas sur un des côtés du triangle, les droites $\sigma_A(AM)$, $\sigma_B(BM)$ et $\sigma_C(CM)$ sont parallèles, ou se coupent en le point $\imath(M)$.

2.2. L'inverse isotomique d'une droite non cévienne

L'inversion isotomique ne traite pas à égalité céviennes et non-céviennes : si une droite ne passe par aucun sommet du triangle ABC, son inverse isotomique est une conique circonscrite. L'inversion isogonale fait de même : voir **III-5**. *De son côté, l'inversion géométrique, que nous définirons en* **V-7**, *agit différemment sur les droites passant, ou ne passant pas, par son pôle.*

L'équation barycentrique d'une droite D ne passant par aucun sommet est cette fois de la forme $pX + qY + rZ = 0$, où p, q et r sont *tous les trois* non nuls. Rappelons en outre que p, q et r ne sont pas tous égaux (sinon, D serait la droite de l'infini). Nous savons déjà que $\imath(D)$ est incluse dans la conique circonscrite Γ d'équation barycentrique $pYZ + qZX + rXY = 0$; comme D coupe chaque côté du triangle en au plus un point, et l'ellipse Σ en au plus deux points, $D \cap \mathscr{P}$ est donc la droite D privée d'au plus cinq points. Pour sa part, Γ ne rencontre les côtés du triangle qu'en les points A, B et C et rencontre Σ en ces points, plus *en général* un quatrième, que nous appellerons D_Σ, de coordonnées barycentriques

$$\big((p-r)(q-p), (q-p)(r-q), (r-q)(p-r)\big) .$$

En effet, la résolution du système $pyz + qzx + rxy = zx + xy + yz = 0$ peut se ramener à celle, plus classique d'un système linéaire : d'abord, on cherche les solutions de la forme $(x, y, 0)$ par exemple et on trouve alors les sommets du triangle. On cherche ensuite les solutions pour lesquelles

[4] Mais on notera bien que la formule « globale » $\imath(D) = \sigma_A(D)$ ne signifie pas que, pour un point M de D, on a aussi $\imath(M) = \sigma_A(M)$.

$xyz \neq 0$. Pour celles-ci, on a $pyz+qzx+rxy = zx+xy+yz = 0$, c'est-à-dire encore

$$\frac{p}{x}+\frac{q}{y}+\frac{r}{z} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 0\,,$$

et on obtient tout de suite, à un facteur multiplicatif non nul près

$$(1/x, 1/y, 1/z) = (r-q, p-r, q-p)\,.$$

Si $p \neq q \neq r$, nous avons bien trouvé le quatrième des points annoncés. Le compte y est.

Au contraire, si par exemple $p = q$, nous n'avons pas de quatrième point. L'équation de D est de la forme $p(x+y)+rz = 0$: elle est parallèle à AB, et celle de Γ est alors $pz(x+y)+rxy = 0$. D'où vient qu'elle coupe Σ en un point de moins que les autres ? D'après la section **II-2.6**, les équations barycentriques des tangentes respectives en C à Σ et à Γ sont $x+y = 0$ et $py+px = 0$. Voilà donc la raison : les deux coniques sont tangentes en C, de sorte que ce point compte pour deux dans le cardinal de l'intersection.

Retournons au cas général, savoir $a \neq b \neq c$; le lecteur soupçonneux se demandera peut-être si $((p-r)(q-p), (q-p)(r-q), (r-q)(p-r))$ est bien le triplet de coordonnées barycentriques d'un point à distance finie ! D'abord, qu'il soit à l'infini ne serait en rien gênant. Ensuite, qu'un point (réel) d'une ellipse soit à l'infini serait étonnant. Mais vérifions quand même :

$$\begin{aligned}(p-r)(q-p)+(q-p)(r-q)+(r-q)(p-r)\\ = -(p^2+q^2+r^2+qr+rp+pq) = -\frac{(q-r)^2+(r-p)^2+(p-q)^2}{2}.\end{aligned}$$

Cette quantité n'est donc pas nulle, puisque $p \neq q \neq r$. Il n'est sans doute pas nécessaire de rechercher une astuce de ce genre chaque fois qu'il faut étudier le signe d'une forme quadratique, puisque le cours est là pour cela : la forme quadratique $\mathscr{Q}_0(x,y,z) = -(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$ a pour matrice (dans la base canonique)

$$F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres sont 0 (simple) et $-3/2$ (double), toutes deux négatives ou nulles. La forme $\mathscr{Q}_0$ est donc négative et ne prend la valeur 0 que lorsque $(x,y,z)\,F = (0,0,0)$. Un calcul simple confirme que cela se produit si, et seulement si, $x = y = z$, ce que nous avions exclu.

Ces digressions nous ont quelque peu éloignés de la discussion de l'image exacte Δ de $D \cap \mathscr{D}$ par $\imath$. Comme dans la section précédente, on a que $\imath(D \cap \mathscr{P}) = \Gamma \cap \mathscr{P}$. Dans le cas général, celui où D coupe les trois côtés du triangle, les images par $\imath$ de ces trois points d'intersections sont A, B et C ; les éventuels points de $D \cap \Sigma$ n'ont pas d'image par $\imath$ et nous avons donc finalement $\Delta = \Gamma \setminus \{D_\Sigma\}$.

Si maintenant $D \parallel BC$, la même discussion montre que C n'est pas dans Δ, mais cette fois $D_\Sigma = C$: on a donc encore $\Delta = \Gamma \setminus \{D_\Sigma\}$.

Dans tous les cas, nous dirons encore que $\imath(D) = \Gamma$, d'autant plus volontiers que le point à retirer est en fait la « limite » de $\imath(M)$, lorsque $M \in D$ tend vers le point à l'infini de D.

Évidemment, on a aussi $\imath(\Gamma \cap \Sigma) = D \cap \mathscr{P}$ et nous dirons pour simplifier que $\imath(\Gamma) = D$ [5].

Quel est le genre de Γ ? Intuitivement, Γ a autant de points à l'infini qu'il y a de points d'intersection de D avec Σ, puisque $\imath$ envoie tous les points de Σ à l'infini. Vérifions ce fait.

Une équation barycentrique est $pX + qY + rZ = 0$ pour D et $pYZ + qZX + rXY = 0$ pour Γ. Le genre de Γ est donné par le signe de $S = p^2 + q^2 + r^2 - 2qr - 2rp - 2pq$. Un point M de coordonnées barycentriques (x, y, z) appartient à $D \cap \Sigma$ si, et seulement si, $px+qy+rz = yz+zx+xy = 0$. Cela équivaut à

$$\begin{cases} z = -\dfrac{px + qy}{r} \\ rxy - (px + qy)(x + y) = 0\,. \end{cases}$$

On a $rxy - (px+qy)(x+y) = -\big(px^2 + (p+q-r)xy + qy^2\big)$ et une discussion analogue à celle effectuée au **II-2.8** montre que $D \cap \Sigma$ comporte zéro, un ou deux points selon que, respectivement, le discriminant de ce trinôme, savoir $\delta = (p+q-r)^2 - 4pq$ est strictement négatif, nul, ou strictement positif. Or, $\delta = S$, de sorte que
- si $S < 0$, D ne rencontre pas Σ et Γ est une ellipse ;
- si $S = 0$, D rencontre Σ en un point et Γ est une parabole ;
- si $S > 0$, D rencontre Σ en deux points et Γ est une hyperbole.

3. Application à des constructions géométriques

3.1. Combien de paraboles par quatre points

Nous savons que cinq *points définissent en général une conique ; cette conique n'a aucune raison particulière d'être une parabole, pas plus que d'être un cercle ou une hyperbole équilatère. Puisque, parmi les coniques, les paraboles sont celles qui satisfont* une *condition scalaire,* confer *la discussion*

[5] Plus précisément, si Γ' est une conique circonscrite non dégénérée, on montre de même que $\imath(\Gamma)$ est une droite ne passant par aucun des sommets du triangle, ce au prix des mêmes abus d'écriture. Si au contraire Γ' est dégénérée, son inverse isotomique est une droite passant par un des sommets (lequel ?)

du **II-2.5**, *il est naturel d'espérer que* quatre *points vont suffire à définir une parabole. C'est presque cela, puisque* par quatre points trois à trois non alignés on peut faire passer zéro, une ou deux paraboles [6].

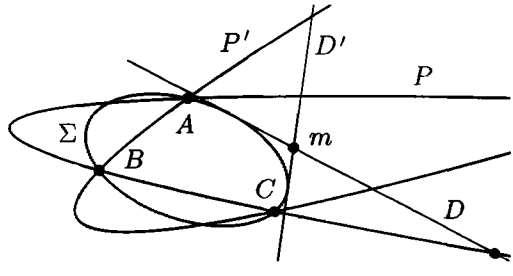
Donnons-nous quatre points A, B, C et M trois à trois non alignés. Considérons le triangle ABC et l'inversion $\imath$ qui lui est attachée. Supposons pour l'instant que $M \notin \Sigma$. Si une parabole Π passe par nos quatre points, alors $\imath(\Pi)$ est une droite passant par $\imath(M)$ et tangente à Σ. Réciproquement, si D est une droite passant par $\imath(M)$ et tangente à Σ, alors $\imath(D)$ est une parabole qui convient. On en déduit que

- Si $\imath(M)$ est extérieur à Σ, exactement deux paraboles passent par A, B, C et M.
- Si $\imath(M)$ est intérieur à Σ, aucune parabole ne passe par A, B, C et M.

Si $M \in \Sigma$, alors $\imath(M)$ est à l'infini et on trouverait encore deux paraboles. Rien que de très normal : d'un point à l'infini, on mène deux tangentes à Σ, qui sont d'ailleurs parallèles entre elles (et même symétriques par rapport au centre de l'ellipse, c'est-à-dire le centre de gravité du triangle).

Quant au cas « apparemment omis » où $\imath(M)$ appartient à Σ, il correspond au cas où M est à l'infini, ce qu'il n'est pas interdit d'envisager. Pour traiter ce cas, il suffit de démontrer que, par trois points $A\,B\,C$ passe une unique parabole de direction asymptotique donnée, à la condition que BC, CA et AB ne soient pas parallèles à cette direction [7].

La figure ci-contre montre le cas où $m = \imath(M)$ est extérieur à Σ. On a construit les deux paraboles passant par A, B, C et M. Les droites D et D' sont les tangentes menées de m à Σ, et les paraboles P et P' sont leurs images respectives par $\imath$.



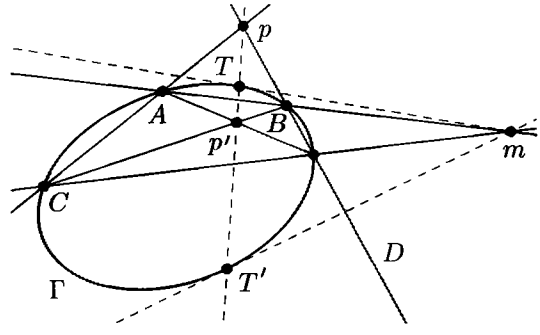
[6] C'est en réalité un cas particulier d'une situation plus générale : les coniques passant par quatre points trois à trois non alignés forment un *faisceau linéaire de coniques* et, parmi les coniques d'un tel faisceau, zéro, une ou deux sont tangentes à une droite donnée, pourvu que cette droite ne passe par aucun des quatre points. Nous retrouvons le problème qui nous occupe ici en remarquant que les paraboles sont celles des coniques qui sont tangentes à la droite de l'infini. Une étude détaillée des faisceaux linéaires de coniques est à trouver au **IV-1**.

[7] Hors de tout contexte géométrique, c'est une conséquence du théorème d'interpolation de LAGRANGE : en effet, si on choisit un repère affine tel que la direction donnée soit celle des ordonnées, les abscisses des points A, B et C sont distinctes deux à deux, et l'équation (affine) de la parabole est nécessairement dans ce repère de la forme $Y = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$.

3.2. Secrets de fabrication. Les triangles autopolaires

La figure de la section précédente appelle la question suivante : comment construire les tangentes mT et mT' menées d'un point m à une conique Γ non dégénérée, quand elles existent ? Nous allons décrire et justifier ici une méthode possible.

De m on mène deux sécantes à Γ, qui la coupent respectivement en A, B et C, D. On construit le point p intersection de AC et BD, et le point p' intersection de AD et BC. La droite pp' est alors indépendante des sécantes choisies, et les tangentes existent si, et seulement si, cette droite coupe Γ en deux points, qui sont alors les points de contact des tangentes cherchées.



La section **II-2.7** étant « facultative » en première lecture, donnons de cette propriété une preuve directe. Avec ces notations, prenons les points A, B et C pour former le triangle de référence. Le point D a des coordonnées barycentriques (u, v, w) et la conique Γ a une équation barycentrique de la forme $\lambda YZ + \mu ZX + \nu XY = 0$, avec $\lambda vw + \mu wx + \nu xy = 0$ puisqu'elle passe par D. La droite BD a pour équation barycentrique $wX - uZ = 0$ et elle coupe le côté AC en le point p de coordonnées barycentriques $(u, 0, w)$. De même, on obtient les coordonnées barycentriques de p', savoir $(0, v, w)$. Pour sa part, le point m a pour coordonnées barycentriques $(u, v, 0)$ puisque c'est le point d'intersection de AB et de CD.

Désignons par F la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \nu & \mu \\ \nu & 0 & \lambda \\ \mu & \lambda & 0 \end{pmatrix}$ construite à partir de l'équation barycentrique de Γ. Un calcul simple montre que

$$(u, v, 0)\, F \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = (u, v, 0)\, F \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0\,.$$

Donc, la droite pp' a pour équation barycentrique $(u, v, 0)\, F \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$.

Alors les coordonnées barycentriques de chaque point d'intersection de cette droite avec Γ vérifient *a fortiori* cette équation et cela signifie bien que m est sur la tangente à Γ en ces points (voir **II-2.6**).

Selon la définition donnée à la fin de la section **II-2.6**, les points m et p sont conjugués par rapport à Γ, et il en va de même des points m et p', ainsi

que des points p et p' : cela résulte d'un calcul analogue à ceux *supra*, ou des rôles symétriques joués par ces trois points dans la construction faite dans la figure. On dit que le triangle mpp' est *autopolaire*, ou *autoconjugué*, par rapport à Γ.

Si l'on forme une équation barycentrique de Γ par rapport à ce triangle mpp' pris comme triangle de référence [8], on obtient une équation de la forme $\lambda' X^2 + \mu' Y^2 + \nu' Z^2 = 0$, c'est-à-dire « décomposée en carrés ». En effet, l'équation barycentrique de Γ est dès lors de la forme $(X, Y, Z)\, F' \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$, où F' est une matrice symétrique d'ordre 3 *a priori* quelconque : il n'y a plus aucune raison pour que les termes diagonaux soient encore nuls. Toutefois, comme dans la section **II-2.6**, on établirait que deux points, de coordonnées barycentriques respectives (x, y, z) et (x', y', z') sont conjugués si, et seulement si, $(x, y, z)\, F' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0$ [9]. Les points m, p et p' ayant comme coordonnées barycentriques respectives $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$, leur conjugaison deux par deux montre immédiatement que les coefficients *non diagonaux* de F' sont nuls, et la matrice est au contraire *diagonale*. Nous sommes là aux antipodes de la notion de conique circonscrite !

3.3. Le quatrième point commun à deux coniques

On se donne deux coniques Γ et Γ' non dégénérées, dont on connaît déjà trois points communs. Nous allons établir qu'en général elles en ont un quatrième. Comment le construire ?

Supposons que Γ passe par A, B, C, D et E et Γ' par A, B, C, D' et E'. Cela sous-entend que les trois points d'intersection déjà connus sont A, B et C. Ces trois points ne sont pas alignés, sinon les coniques seraient dégénérées, ce que nous avons exclu. Appelons $\imath$ l'inversion isotomique par rapport au triangle ABC. Vu ce qui précède, $\imath(\Gamma)$ est la droite $\gamma = \imath(D)\imath(E)$ et $\imath(\Gamma')$ la droite $\gamma' = \imath(D')\imath(E')$. Supposons ces points à distance finie, en laissant

[8] Il faut tout de même montrer que ces trois points sont non alignés. Formons le déterminant de leurs coordonnées barycentriques dans l'ordre p', p, m pour améliorer l'esthétique de la formule :

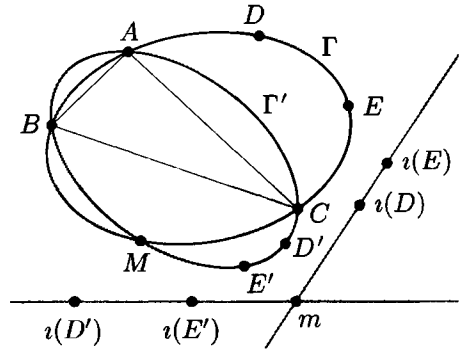
$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & v & w \\ u & 0 & w \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = 2uvw\,.$$

Ce déterminant est non nul, car, si par exemple $u = 0$, alors les point B, C et D sont alignés sur Γ qui est alors dégénérée, ce que nous avons exclu.

[9] Dans cette section, la matrice avait sa diagonale nulle puisqu'il s'agissait de coniques circonscrites ; le cas général requiert les mêmes calculs. On peut aussi s'en convaincre en écrivant les formules de changement de triangle de référence, voir **I-8**.

au lecteur le soin d'adapter le principe qui va suivre aux autres cas. Les droites γ et γ' se coupent en un point m, éventuellement à l'infini et donc $M = \imath(m)$ appartient à $\Gamma \cap \Gamma'$. Si M n'est pas un sommet du triangle, c'est donc un quatrième point d'intersection et il n'y en a pas d'autre. Au contraire, on peut vérifier que, si $M = A$, alors Γ et Γ' sont tangentes en A, et le quatrième point est A, qui « compte pour deux ».

La construction de M peut donc s'effectuer à la règle et au compas à partir des données, puisque tel est le cas des points auxiliaires de la construction $\imath(D)$, $\imath(E)$, $\imath(D')$, $\imath(E')$, puis m et enfin M.

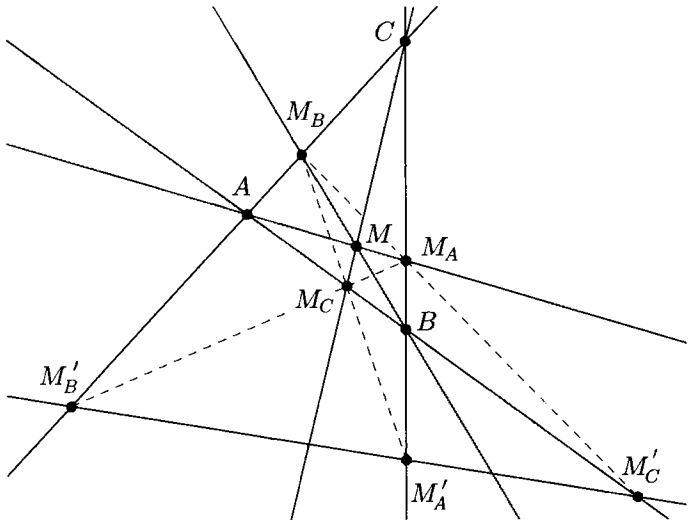


4. Triangles et polarisation

4.1. La polaire triangulaire (ou trilinéaire)

Cette *polarisation* n'est pas une application *ponctuelle*, c'est-à-dire qui à un point associe un point, comme peut l'être l'inversion isotomique ; *grosso modo*, cette dernière met effectivement en correspondance des points, même si des précautions doivent être prises en terme de domaine de définition. Au contraire, la polarisation triangulaire associe une droite à un point (et, inversement, un point à une droite) : cela n'a rien d'extraordinaire en soi puisque nous connaissons déjà des situations analogues. En effet, à un point simple d'une courbe régulière, on peut associer la tangente en ce point et à une tangente le point de contact ; mais cela ne nous donne pas une correspondance portant sur « suffisamment » de points et de tangentes. En revanche, à la fin du **II-2.6**, nous avons défini la polaire d'un point par rapport à une conique non dégénérée et l'exercice laissé au lecteur établissait qu'elle mettait en correspondance le plan privé du centre et l'ensemble des droites ne passant pas par le centre [10].

[10] Et même le plan projectif entier et l'ensemble des droites projectives du plan si l'on se place dans ce cadre.



Donnons-nous un point M suffisamment général (nous préciserons cela dans peu de temps) ; la droite AM coupe BC en M_A, et l'on définit de même M_B et M_C. La droite M_BM_C coupe BC en M'_A [11] et l'on définit de même M'_B et M'_C. Ces trois points sont alors alignés, nous allons établir cela tout de suite, et la *polaire (triangulaire)* de M est alors par définition la droite qui porte ces trois points.

Si M a pour coordonnées barycentriques (x, y, z), alors M_A a pour coordonnées barycentriques $(0, y, z)$: nous supposerons que $y+z \neq 0$, $z+x \neq 0$ et $x+y \neq 0$ [12] pour que les points M_A, M_B et M_C soient définis tous les trois. Le point M'_A existe si, et seulement si, ses coordonnées barycentriques $(0, Y_0, Z_0)$ vérifient $Y_0 + Z_0 \neq 0$ et

$$\Delta \overset{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} 0 & Y_0 & Z_0 \\ x & 0 & z \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Si $x = 0$, $M \in BC$ et M_BM_C est confondu avec BC : excluons ce cas. Dans ce cas, $\Delta = 0$ équivaut à $zY + yZ = 0$; nous avons donc un point M'_A, de coordonnées barycentriques $(0, -y, z)$, si l'on exclut le cas où $y = z$ [13],

[11] Les propriétés liées à la notion de *conjugaison harmonique*, voir au **II-2.7**, nous permettent d'observer que M_A et M'_A sont conjugués harmoniquement par rapport à (B, C). Cela explique la construction inverse qui va suivre, celle du pôle connaissant la polaire, ainsi que les nombreux alignements et concours que l'on décèle sur la figure décrivant la dite construction.

[12] C'est-à-dire M n'appartient pas à la parallèle menée d'un sommet au côté opposé.

[13] Vérifier que $y = z$ équivaut à dire que M est sur la médiane issue de A.

qui envoie M'_A à l'infini. Compte tenu de ces exclusions, M'_A appartient à la droite d'équation barycentrique $yzX + zxY + xyZ = 0$ et il en est de même des points M'_B et M'_C si M n'appartient pas non plus aux deux autres médianes.

Nous dirons donc que la *polaire triangulaire*, dite aussi *polaire trilinéaire* est la droite d'équation barycentrique $yzX + zxY + xyZ = 0$ chaque fois que cela définit bien une droite. Cela permet de « repêcher » tous les points du plan, sauf les sommets.

Si $M = A$ par exemple, alors $yz = zx = xy = 0$ et nous n'avons pas l'équation barycentrique d'une droite. Si M est le centre de gravité, alors $yz = zx = xy \neq 0$ et la polaire est la droite de l'infini.

Dans tous les autres cas, la polaire est bien une droite à distance finie. Le lecteur pourra montrer que, dans les cas particuliers précédemment « exclus », nos points auxiliaires M'_A, M'_B et M'_C, qu'ils soient à distance finie ou non, sont bien sur cette droite chaque fois qu'ils sont définis.

Si M est l'orthocentre H du triangle, nous pouvons en définir la polaire triangulaire à condition que H ne soit pas un sommet, c'est-à-dire que le triangle ABC ne soit pas rectangle. Dans ce cas, les coordonnées barycentriques de H sont $\left(\frac{a}{\cos\widehat{A}}, \frac{b}{\cos\widehat{B}}, \frac{c}{\cos\widehat{C}}\right)$ et la polaire a pour équation barycentrique

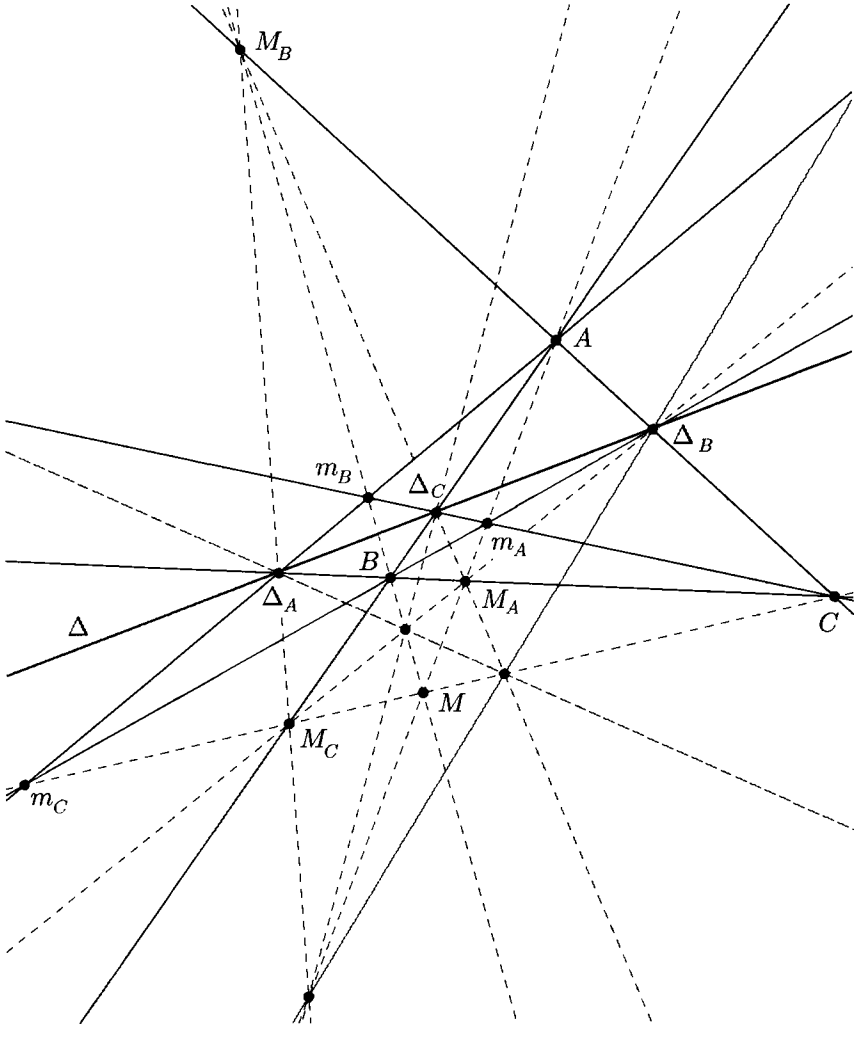
$$\frac{\cos\widehat{A}}{a}X + \frac{\cos\widehat{B}}{b}Y + \frac{\cos\widehat{C}}{c}Z = 0.$$

formule qui coïncide avec l'équation barycentrique de l'axe orthique introduit au **II-2.13**.

Dans la section **II-2.6**, nous avons établi que, si une conique circonscrite a pour équation barycentrique $pYZ + qZX + rXY = 0$, alors les points d'intersections des tangentes aux sommets avec les côtés opposés sont sur la droite d'équation barycentrique $qrX + rpY + pqZ = 0$. Cette droite est la polaire triangulaire du point de coordonnées barycentriques (p, q, r) : cette remarque permet d'interpréter géométriquement le triplet (p, q, r) des coefficients intervenant dans l'équation barycentrique d'une telle conique. On pourra voir cela également comme une façon de mettre en correspondance les points du plan projectif et les coniques circonscrites ; plus précisément, les points à l'infini ont des coordonnées barycentriques (p, q, r) telles que $p + q + r = 0$ et les coniques qui leur correspondent sont exactement celles qui passent par l'isobarycentre G du triangle puisque cette condition équivaut à $p \times 1 \times 1 + q \times 1 \times 1 + r \times 1 \times 1 = 0$. Aux coniques circonscrites ne passant pas par G correspondent les points du plan à distance finie.

Pour être complet, il nous reste à étudier la manière de construire un point du plan connaissant sa polaire triangulaire, c'est-à-dire la construction in-

verse de celle que nous avons faite au début de cette section.



Si une droite Δ est un côté du triangle, par exemple le côté BC, d'équation barycentrique $x = 0$, elle est la polaire triangulaire de n'importe quel point du côté BC, à l'exception des points B et C eux-mêmes qui n'ont pas de polaire. Aucun point du plan n'a de polaire triangulaire passant par un sommet, mais distincte d'un côté : en effet, l'équation barycentrique d'une polaire triangulaire est toujours de la forme $qrX + rpY + pqZ = 0$ et il est impossible qu'un et un seul des trois coefficients qr, rp et pq soit nul.

Considérons donc une droite rencontrant les côtés BC, CA et AB respectivement en des points Δ_A, Δ_B et Δ_C. Les droites $B\Delta_B$ et $C\Delta_C$, si elles

ne sont pas parallèles, se coupent en un point m_A et on définit de même, sous réserve d'existence, les points m_B et m_C. Les droites Am_A, Bm_B et Cm_C se coupent alors en un point M, dont Δ est la polaire. Les cas particuliers de parallélisme se traitent de façon analogue grâce à l'introduction de points à l'infini.

Nous laissons au lecteur le plaisir (*sic* !) de vérifier cela par le calcul barycentrique[14], en indiquant toutefois les résultats intermédiaires à obtenir. Supposons que Δ a une équation barycentrique de la forme $p'X + q'Y + r'Z = 0$, avec $p'q'r'$ non nul[15]. Avec nos notations, le point Δ_A a pour coordonnées barycentriques $(0, -r', q')$, la droite $A\Delta_A$ a pour équation barycentrique $q'Y + r'Z = 0$ et le point m_A pour coordonnées barycentriques $(r'q', -p'r', -p'q')$. Les droites Am_A, Bm_B et Cm_C ont pour équations barycentriques respectives $q'Y - r'Z = 0$, $-p'X + r'Z = 0$ et $p'X - q'Y = 0$. Le point M de coordonnées barycentriques $(q'r', r'p', p'q')$ appartient manifestement à ces trois droites et la polaire triangulaire de ce point a pour équation barycentrique $r'p'p'q'X + p'q'q'r'Y + q'r'r'p'Z = 0$: c'est bien la droite Δ, puisqu'on a le droit de simplifier par la quantité non nulle $p'q'r'$.

Un examen attentif de la dernière figure montre des alignements et concours intéressants. Introduisons les points M_A, M_B et M_C comme nous l'avons toujours fait : M_A est le point de concours de AM et de BC, etc. Alors les points M_A, M_B et Δ_C sont alignés et on a deux alignements analogues. Rien que de très normal puisque nous savons que Δ est la polaire triangulaire de M. Nous observons aussi que m_A et m_B sont sur le droite $C\Delta_C$: cela résulte des égalités

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -q' & p' & 0 \\ r'q' & -p'r' & -p'q' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -q' & p' & 0 \\ -r'q' & p'r' & -p'q' \end{vmatrix} = 0.$$

Cela montre que la polaire triangulaire de M par rapport au triangle $m_Am_Bm_C$ est aussi la droite Δ. Par exemple, la droite m_AM coupe la droite m_Bm_C au point A, la droite m_BM coupe la droite m_Cm_A au point B et la droite m_CM coupe la droite m_Am_B au point C. Ensuite, la droite AB coupe m_Am_B au point Δ_C et la fin de la construction redonne bien la droite Δ !

Le lecteur pourra vérifier que la polaire triangulaire de M par rapport au triangle $M_AM_BM_C$ est encore Δ, en vérifiant les alignements et concours nécessaires.

[14] Ou grâce à la remarque que M_A s'obtient par la construction du conjugué harmonique de Δ_A par rapport à (B, C).

[15] Puisque Δ ne passe par aucun des sommets.

4.2. La dualité, ou polarisation, « formelle »

Nous nous donnons toujours un plan affine, et, dans celui-ci, un triangle de référence ABC. Notre dessein est d'associer à tout point M, de coordonnées barycentriques (x, y, z), la droite d'équation barycentrique $xX+yY+zZ=0$; nous souhaitons donc que les coefficients de cette équation barycentrique soient les coordonnées barycentriques de M.

4.2.1. Préliminaires

Il y a plusieurs types de remarques à faire, pour commencer.

- Les coordonnées barycentriques d'un point M ne sont définies qu'à un scalaire multiplicatif non nul près. Cela ne nuit pas à la cohérence de notre définition, puisque les équations barycentriques $xX + yY + zZ = 0$ et $\lambda xX + \lambda yY + \lambda zZ = 0$, si λ est un scalaire non nul, définissent la même droite.
- La droite d'équation barycentrique $Y - Z = 0$ est associée au point de coordonnées barycentriques $(0, 1, -1)$, qui est à l'infini. Pour avoir toutes les droites du plan, il ne faut donc pas exclure les points M à l'infini.
  De même, au centre de gravité G est associée la droite d'équation barycentrique $X + Y + Z = 0$, qui est la droite de l'infini : il faut donc la prendre en considération elle aussi.
  Ces précisions étant apportées, il est immédiat que l'application qui à M de coordonnées barycentriques (x, y, z) associe la droite $\delta(M)$ d'équation barycentrique $xX + yY + zZ = 0$ met en bijection le plan projectif, c'est-à-dire le plan affine complété par sa droite à l'infini et les droites de celui-ci.
  Nous dirons que la droite $\delta(M)$ est *la duale* du point M et que le point M est *le dual* de la droite $\delta(M)$. Vu la symétrie des rôles joués par les coordonnées barycentriques et les équations barycentriques dans cette définition, si un point M a pour duale une droite Δ, nous noterons aussi $M = \delta(\Delta)$.
- Il est à noter enfin que cette association n'est pas canonique puisqu'elle dépend du triangle de référence. Cela n'est pas gênant car on sait bien qu'il n'existe pas d'isomorphisme naturel entre un espace vectoriel non nul et son dual.

4.2.2. Dualité et constructions géométriques

Notre dualité est effective : nous savons construire la duale d'un point M, et le dual d'une droite Δ. Nous détaillons les constructions dans ce qui suit.

Si le point M de coordonnées barycentriques (x, y, z) est donné, la droite AM coupe le côté BC en le point M_A de coordonnées barycentriques $(0, y, z)$. Le symétrique M'_A de M_A par rapport au milieu du côté BC a

pour coordonnées barycentriques $(0, z, y)$ et le conjugué harmonique M''_A de ce dernier point par rapport au couple (B, C) a pour coordonnées barycentriques $(0, -z, y)$ [16] : ce point appartient à la duale $\delta(M)$.

Donc, pour un point M *assez général*, on sait construire le point M''_A, et, de même les points M''_B et M''_C. Ces trois points sont alignés et la droite qui les porte est précisément la duale cherchée $\delta(M)$.

Voici quelques cas particuliers : si $M = A$, alors déjà M_A n'a pas de sens, donc M'_A et M''_A pas non plus, mais on obtient $M''_B = C$ et $M''_C = B$, de sorte que la duale de A est le côté opposé BC, ce qui est heureusement conforme à notre définition formelle : au point A, de coordonnées barycentriques $(1, 0, 0)$, nous avons décidé d'associer la droite d'équation barycentrique $1X = 0$, c'est-à-dire la droite BC.

Si le point M appartient à la droite BC privée des points B et C, alors on obtient $M''_B = M''_C = A$ mais $M''_A \neq A$: ces deux points suffisent pour la construction de la duale $\delta(M)$, et c'est la droite souhaitée.

Le lecteur est invité à examiner les cas particuliers restants, par exemple l'appartenance de M à une des médianes du triangle [17].

Inversement, étant donné une droite Δ, elle coupe *en général* les côtés du triangle en des points M''_A, M''_B et M''_C, et on effectue la construction inverse : le point M'_A est le conjugué harmonique de M''_A par rapport au couple (B, C) et M_A le symétrique de ce dernier par rapport au milieu du côté BC. On construit de même M_B et M_C, de sorte que le point M est à l'intersection des droites AM_A, BM_B et CM_C. Les quelques cas particuliers s'étudient avec la même bienveillance.

4.2.3. Propriétés de la dualité

En voici un catalogue, résumé dans la liste qui suit.

1. $M \in \delta(M') \iff M' \in \delta(M)$.
2. D est la droite $MM' \iff \delta(D)$ est a l'intersection de $\delta(M)$ et $\delta(M')$.
3. Les droites D et D' se coupent en $M \iff \delta(D) \in \delta(M)$ et $\delta(D') \in \delta(M)$.
4. Les points M, M', M'' sont alignés $\iff$ les droites $\delta(M), \delta(M')$ et $\delta(M'')$ concourent.
5. Les droites D, D', D'' concourent $\iff$ les points $\delta(D), \delta(D')$ et $\delta(D'')$ sont alignés.

Ces propriétés sont immédiates et laissées en exercice. Par exemple, si les points M et M' ont pour coordonnées barycentriques respectives (x, y, z)

[16] Voir au **III-1** et au **II-2.7.**

[17] Si M est sur la médiane AG, alors M''_A est à l'infini. Ce n'est pas plus gênant que cela.

et (x', y', z'), on a

$$M \in \delta(M') \iff xx' + yy' + zz' = 0 \iff M' \in \delta(M)\,.$$

Cette dualité explique à elle seule les similitudes dans les formules à base de déterminant caractérisant le concours de trois droites, ou l'alignement de trois points. Elle met aussi en correspondance le « produit vectoriel formel » que nous avons signalé au **I-4.2** *puis au* **I-4.4**.

Nous enrichirons ce catalogue ultérieurement, en **A-5.4.2**.

5. Définition de l'inversion isogonale

L'inversion isogonale a des points communs avec l'inversion isotomique, déjà étudiée à partir du **III-1**. *Comme elle, elle est liée à un triangle, mais elle s'en distingue en faisant appel à une définition* euclidienne *et non pas simplement* affine. *Elle est toutefois suffisamment intéressante en soi pour mériter une étude spécifique.*

Soit M un point de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ qui n'est situé sur aucun des côtés du triangle ABC. Nous allons montrer qu'il existe un point M' (unique) de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ pour lequel on a les égalités entre angles orientés

$$\widehat{BAM} = \widehat{M'AC}, \quad \widehat{CBM} = \widehat{M'BA}, \quad \widehat{ACM} = \widehat{M'CB}\,.$$

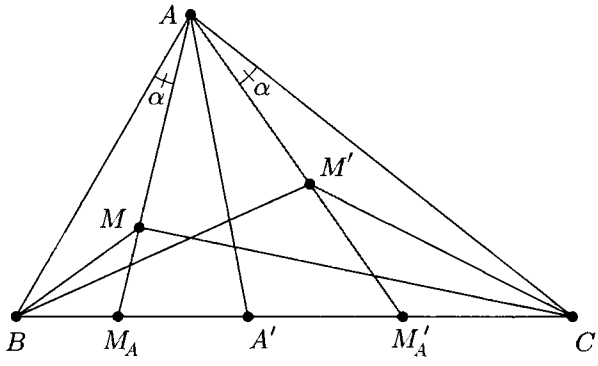
Le point M' est appelé l'*inverse (*ou le *conjugué) isogonal* du point M ; il est clair que M est alors l'inverse isogonal de M' puisque ces relations font intervenir de manière symétrique les points M et M'.

En outre, nous établirons que, si (x, y, z) sont les coordonnées barycentriques de M, celles de M' sont le triplet $(a^2/x, b^2/y, c^2/z)$, c'est-à-dire encore (a^2yz, b^2zx, c^2xy). Cela montre que M' est à l'infini si, et seulement si, M appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.

Vu la définition de M', l'unicité est évidente puisqu'il lui est requis d'appartenir à trois droites distinctes. Le « miracle » est dans l'existence de M' ! Comme l'énoncé en fournit les coordonnées barycentriques, il suffit de vérifier que ce point vérifie la première égalité, les autres s'en déduisant par permutation circulaire.

Il est instructif de donner des résultats annoncés plusieurs démonstrations ; l'une d'entre elles, purement barycentrique, sera vue au **IV-2.3.1** lorsque nous aurons engrangé un peu plus de connaissances sur les coniques. Pour l'instant, nous avons deux méthodes à notre disposition ; toutefois la seconde, requérant des connaissances en Géométrie projective (ou un coup d'œil préalable au **B-4.2**), pourra être réservée à une seconde lecture.

5.1. La preuve géométrique



Considérons un point M, de coordonnées barycentriques (x, y, z), non situé sur $AB \cup BC$. Ainsi, on a $yz \neq 0$. Considérons un point $M' \neq A$ quelconque tel que $\widehat{BAM} = \widehat{M'AC}$ (angles nommés α sur la figure), et désignons-en les coordonnées barycentriques par (x', y', z'), avec $y'z' \neq 0$. Commençons par établir que (yy', zz') est proportionnel à (b^2, c^2).

En effet, les aires orientées des triangles MAB et MCA sont égales à $AM \cdot c \cdot \sin\alpha$ et $AM \cdot b \cdot \sin(\widehat{A} - \alpha)$. Le **I-3** montre alors que

$$\frac{z}{y} = \frac{AM \cdot c \cdot \sin\alpha}{AM \cdot b \cdot \sin(\widehat{A} - \alpha)} = \frac{c \cdot \sin\alpha}{b \cdot \sin(\widehat{A} - \alpha)}.$$

Le même calcul établit que l'on a

$$\frac{z'}{y'} = \frac{AM \cdot c \cdot \sin(\widehat{A} - \alpha)}{AM \cdot b \cdot \sin\alpha} = \frac{c \cdot \sin(\widehat{A} - \alpha)}{b \cdot \sin\alpha}.$$

Ainsi, on a effectivement $zz'/yy' = c^2/b^2$. Inversement, un calcul analogue établit que si les coordonnées barycentriques de deux points M et M' non situés sur $AB \cup AC$ vérifient cette relation, alors l'égalité angulaire annoncée est vérifiée.

Nous concluons à présent : si M non situé sur l'un des côtés, de coordonnées barycentriques (x, y, z), est donné, alors nous introduisons le point M' de coordonnées barycentriques $(x' = a^2/x, y' = b^2/y, z' = c^2/z)$. On a en particulier $zz'/c^2 = yy'/b^2$, de sorte que $\widehat{BAM} = \widehat{M'AC}$. Bien entendu, les deux autres égalités angulaires s'établissent de même. L'existence de M' est donc garantie.

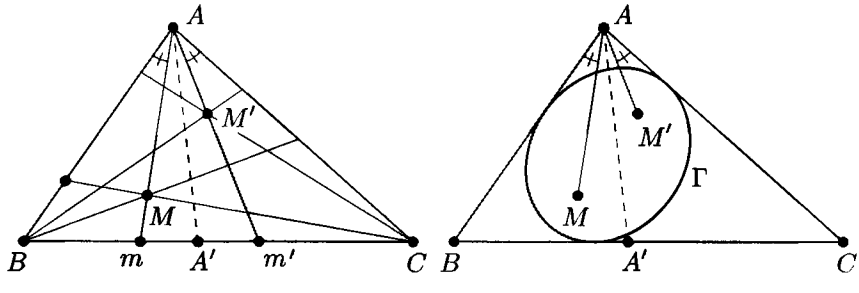
À vrai dire, la démonstration n'est pas tout à fait terminée, car le calcul ci-dessus devient douteux si le point M' est à l'infini. Dans ce cas, ses coordonnées barycentriques sont de la forme (x', y', z'), avec $x' + y' + z' = 0$.

Si on introduit le point M'_A où la droite AM' coupe BC, alors les coordonnées barycentriques de M'_A sont $(0, y', z')$. Le calcul d'aires, appliqué au point M'_A, montre alors que l'égalité angulaire $\widehat{BAM} = \widehat{M'_A AC}$ équivaut à $zz'/c^2 = yy'/b^2$. Or, les angles $\widehat{M'_A AC}$ et $\widehat{M'AC}$ sont égaux, et nous retombons sur nos pieds.

Le lecteur est invité à retrouver par un calcul d'aires analogue le concours des céviennes définissant l'inverse isotomique *d'un point donné; voir à cet effet la section* **III-1**.

5.2. La preuve par les homographies

Supposons que AM et AM' ne sont pas parallèles à BC, les cas contraires se traitant de façon analogue, comme cela a déjà été vu au moment de l'étude de l'inverse isotomique. Appelons m et m' les points où AM et AM' coupent BC; les coordonnées barycentriques de ces points relativement au couple (B, C) sont (y, z) et (b^2zx, c^2xy), c'est-à-dire aussi (b^2z, c^2y). Il suffit de montrer que, si on définit φ comme l'application qui à m, élément de BC, de coordonnées barycentriques (x, y) associe le point m' de coordonnées barycentriques (b^2z, c^2y), alors $\widehat{BAm} = \widehat{m'AC}$, c'est-à-dire encore que Am' est symétrique de Am par rapport à la bissectrice intérieure AA' de l'angle $\widehat{A}$. Or, cette dernière application, appelons-la φ', est une homographie involutive du complété projectif de la droite AB, tout comme l'est φ. Il suffit de montrer que ces deux applications ont les mêmes points fixes, et une paire commune de points homologues. Mais A' a pour coordonnées barycentriques (b, c) et $\varphi(A')$ a pour coordonnées barycentriques (b^2c, c^2b), c'est-à-dire encore (b, c) : on a $\varphi(A') = A'$ et il est clair que $\varphi'(A') = A'$. Il en va de même pour le point A'' où la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe BC. Maintenant, $\varphi(B) = C$, car les coordonnées barycentriques de B sont $(1, 0)$ et $\varphi'(B) = C$ de manière évidente. Cela suffit pour montrer que φ et φ' sont égales.



5.3. Premières propriétés

L'aspect euclidien de l'inversion isogonale trouve ici toute son illustration.

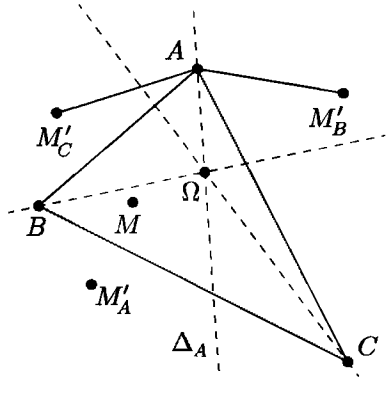
Si un point M est un foyer d'une conique à centre non dégénérée Γ inscrite[18] dans le triangle, alors son inverse isogonal M' en est l'autre foyer.

En effet, un théorème de PONCELET, voir **[6]** ou **[14]**, s'énonce comme il suit : la paire des tangentes (T, T') menées d'un point P à une conique à centre de foyers M et M' a mêmes bissectrices que la paire (PM, PM') ; En d'autres termes, les angles de droites (T, PM) et (PM', T') sont égaux. On applique alors ce théorème à chacun des points A, B et C : voir la figure de droite de la page **143**[19].

Si, au contraire, c'est une parabole qui est inscrite, alors son foyer M appartient au cercle circonscrit et son inverse isogonal est rejeté à l'infini. En effet, les projections orthogonales de M sur les côtés du triangle, qui sont trois tangentes particulières à la parabole, appartiennent à la tangente au sommet de celle-ci et sont donc alignés. Le résultat est donc conséquence du théorème de la droite de SIMSON.

Il existe une autre construction de l'inverse isogonal d'un point M : considérons-en les symétriques orthogonaux M'_A, M'_B et M'_C par rapport respectivement aux côtés BC, CA et AB. Si M n'est pas sur le cercle circonscrit à ABC, les points M'_A, M'_B et M'_C forment eux-mêmes un triangle, et le centre Ω du cercle circonscrit à ce triangle n'est autre que l'inverse isogonal de M.

En effet, Ω est le point de concours des médiatrices de ce dernier triangle. Or, la médiatrice de MM'_B est AC, et celle de MM'_C est AB. Donc, A est équidistant de M, M_B et M_C et appartient en particulier à la médiatrice Δ_A de $M_B M_C$. Un calcul simple d'angle permet de vérifier que cette dernière médiatrice est précisément la droite symétrique de AM par rapport à la bissectrice du triangle ABC passant par A. Le point Ω est donc bien l'inverse isogonal de M.



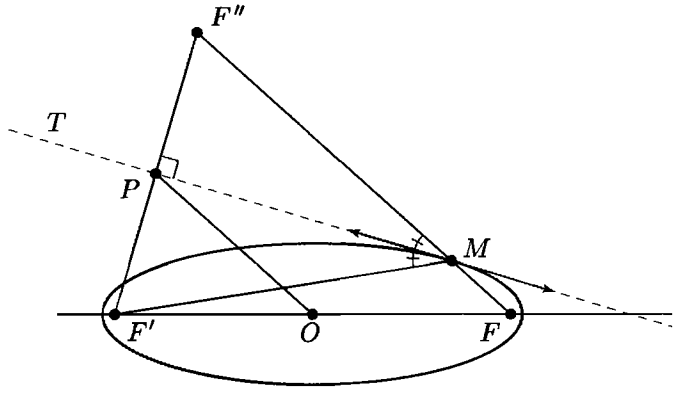
On pourra compléter utilement cette remarque avec l'exercice qui clôt cette section.

[18] On dit qu'une conique non dégénérée est *inscrite* dans un triangle ABC si elle est tangente à chacun des côtés de ce triangle.

[19] Par exemple, les tangentes menées de A à la conique Γ sont justement les côtés AB et AC et la bissectrice commune est la droite AA'.

Un cas particulier intéressant est celui où $M = H$, l'orthocentre du triangle ABC. Nous établirons au **III-6** que le symétrique H'_A de H par rapport à BC est sur le cercle circonscrit à ABC ; la construction qui vient d'être faite confirme alors que l'inverse isogonal de H est le centre O du cercle circonscrit.

Exercice. Dans la figure qui suit, M est un point d'une ellipse $\mathscr{E}$ de centre O, de foyers F et F', T est la tangente en M à $\mathscr{E}$, P et F'' sont respectivement le projeté orthogonal de M sur T et le symétrique orthogonal de M par rapport à T. Supposant connu le fait que T est une bissectrice de (MF, MF'), montrer que M, F et F'' sont alignés et que la distance FF'' est égale à $2a$ (longueur du grand axe de l'ellipse) ; en déduire que la distance OP est égale à a.



[*Dans cette figure, les foyers F et F' ont été construits géométriquement à l'aide du logiciel* CABRI. *Ils sont beaucoup plus près des sommets qu'on ne l'imagine lorsque l'on trace une telle ellipse à main levée !*]

Retrouver alors le résultat établi *supra* : si F est un foyer d'une conique à centre[20] inscrite dans le triangle, alors son inverse isogonal F' en est l'autre foyer.

Si un point M n'est pas sur le cercle circonscrit à ABC, ses projetés orthogonaux sur les côtés du triangle ne sont pas alignés, et on désigne par Γ_M le cercle circonscrit au triangle formé par ces trois points. Si $M \neq M'$ et $\Gamma_M = \Gamma_{M'}$, montrer que M et M' sont inverses isogonaux l'un de l'autre[21].

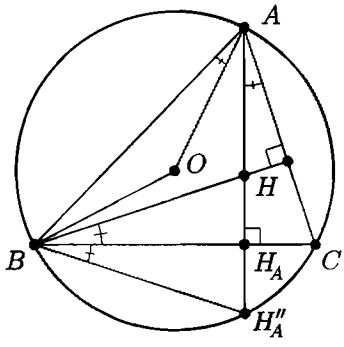
[20] On ne vérifiera pas que le cas d'une hyperbole se traite de la même manière que celui de l'ellipse.

[21] On retrouve le même cas particulier : lorsque $M = H$, les trois projetés orthogonaux du point sont sur le cercle d'EULER du triangle, car ce sont les pieds des trois hauteurs, et il en va de même des trois projetés du point O, qui sont les milieux des côtés, également sur le cercle d'EULER !

6. Des couples célèbres

Dans ce bref paragraphe, nous mettons en évidence quelques paires de points inverses l'un de l'autre par isogonalité.

Retrouvons à présent les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H, en montrant que O et H sont inverses isogonaux par rapport au triangle ABC. L'isogonalité revient à l'égalité des angles $\widehat{BAO}$ et $\widehat{HAC}$, ainsi qu'aux égalités que l'on obtient en permutant circulairement les sommets du triangle. Supposons par exemple le triangle acutangle.



Le triangle AOB est isocèle en O, et $\widehat{AOB} = 2\gamma$. De cela suit que $\widehat{BAO} = \frac{\pi}{2} - \gamma$. On obtient la même valeur pour $\widehat{HAC}$ en se plaçant dans le triangle rectangle AH_AC. En conséquence, si le triangle ABC *n'est pas* rectangle, le point O n'appartient à aucun des côtés et les coordonnées barycentriques de H sont $\left(\frac{a}{\cos\widehat{A}}, \frac{b}{\cos\widehat{B}}, \frac{c}{\cos\widehat{C}}\right)$.

Prolongeons la hauteur AH jusqu'à ce qu'elle recoupe le cercle circonscrit, en un point H''_A. Pour montrer que le symétrique H'_A de H par rapport à BC est sur le cercle circonscrit, il suffit de montrer que $H''_A = H'_A$ et, pour cela, de montrer que le triangle HBH''_A est isocèle en B. Or, les angles HBC et HAC sont égaux (à $\pi/2 - \widehat{C}$) et les angles inscrits H''_ABC et H''_AAC sont égaux, car ils interceptent le même arc. Le résultat s'ensuit donc.

Le centre I du cercle inscrit est son propre inverse (voir par exemple la construction géométrique de l'inverse), et il en va de même des centres I_A, I_B et I_C des cercles exinscrits.

Si, maintenant, on considère le polynôme $P(z) = (z - z_a)(z - z_b)(z - z_c)$, où z_a, z_b et z_c sont les affixes de A, B, C, on définit les *points de Lucas* du triangle, comme les images L et L' des zéros du polynôme dérivé P' (on vérifie aisément que cette paire de points ne dépend pas de la façon d'identifier un plan euclidien donné avec $\mathbb{C}$). Nous allons montrer que ces points sont inverses isogonaux l'un de l'autre. Soit en effet ξ l'affixe du point L et ξ' celui de L' ; de l'égalité $\frac{P'(\xi)}{P(\xi)} = 0$ découle $\frac{1}{\xi - z_a} + \frac{1}{\xi - z_b} + \frac{1}{\xi - z_c} = 0$.

Dans chaque quotient, on multiplie haut et bas par le complexe conjugué

puis on prend le conjugué du résultat, on obtient alors

$$\frac{\xi - z_a}{|\xi - z_a|^2} + \frac{\xi - z_b}{|\xi - z_b|^2} + \frac{\xi - z_c}{|\xi - z_c|^2} = 0\,.$$

Cela montre que ξ admet pour coordonnées barycentriques le triplet

$$(1/LA^2, 1/LB^2, 1/LC^2)\,.$$

Pour montrer que L et L' sont inverses isogonaux, il suffit de montrer que

$$(1/LA^2L'A^2, 1/LB^2L'B^2, 1/LC^2L'C^2)$$

est proportionnel à (a^2, b^2, c^2).

Or, par exemple, on a

$$9LA^2L'A^2 = |3(z_a - \xi)(z_a - \xi')|^2 = |P'(z_a)|^2 = |z_a - z_b|^2|z_a - z_c|^2 = c^2b^2,$$

et le résultat annoncé s'ensuit.

Enfin, on appelle *symédiane* au point A dans le triangle ABC le symétrique de la médiane issue de A par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. On définit de même les deux autres symédianes : ces trois droites concourent donc en l'inverse isogonal du point G ; on l'appelle le *point de Lemoine* du triangle, et ses coordonnées barycentriques sont (a^2, b^2, c^2) [22].

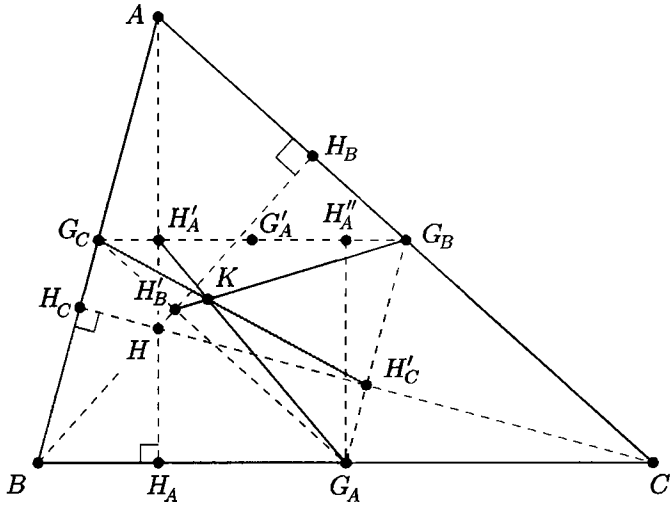
D'aucuns trouveront peut-être un peu compliquée la construction de K comme intersection des symédianes. En voici une autre : nous désignons comme toujours par G_A, G_B et G_C les milieux des côtés, par H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs, et enfin par H'_A, H'_B et H'_C les « milieux des hauteurs », c'est-à-dire les milieux des segments AH_A, BH_B et CH_C. Alors, les droites $G_AH'_A$, $G_BH'_B$ et $G_CH'_C$ concourent en K.

Dans la figure qui suit, nous avons représenté en traits pleins les segments nécessaires pour la construction, et en pointillés ceux qui vont nous servir à démontrer le résultat annoncé [23].

[22] C'est le point K caractérisé par la propriété remarquable établie au **II-4.1** : la parallèle menée de K à BC coupe les côtés AB et AC en des points M_1 et M_2 ; ces deux points, ainsi que les quatre points similairement construits à partir des parallèles menées au deux autres côtés, sont alors sur un même cercle.

Une propriété à rappeler est la suivante : le point de LEMOINE est le point du plan euclidien dont la somme des carrés des distances aux côtés du triangle est minimale. C'est ce que nous avons déterminé au **I-3**.

[23] Si le triangle est isocèle en A mais non équilatéral, les points G_A et H_A coïncident, mais les deux autres droites suffisent pour la construction de K. Enfin, si ABC est équilatéral, on a $K = G = O$.



Supposons donc ABC non équilatéral, et supposons également dans un premier temps qu'il n'est pas rectangle. Le concours des trois droites découle de la remarque suivante : dans le triangle médian $G_AG_BG_C$, la hauteur issue de G_A est la droite $G_AH''_A$ (c'est la parallèle menée par G_A à la hauteur issue de A dans le triangle ABC). En outre, le point H'_A est le symétrique de H''_A par rapport au milieu G'_A de G_BG_C (qui est aussi le milieu de AG_A). Puisqu'une constatation analogue s'opère pour les points H'_B et H'_C, nous reconnaissons là la construction de l'inverse isotomique, par rapport au triangle médian, de l'orthocentre $\mathscr{H}$ de ce triangle. L'inverse isotomique est le point K et nos trois droites concourent en ce point.

Cela ne prouve pas encore que K est le point de LEMOINE du triangle ABC, mais un petit calcul barycentrique va l'établir.

En effet, le triangle médian étant homothétique au triangle ABC, les valeurs des angles aux sommets sont encore respectivement $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$, de sorte que les coordonnées barycentriques de $\mathscr{H}$ relativement au triangle médian sont

$$(\mathrm{cotg}\widehat{B}\cdot\mathrm{cotg}\widehat{C}, \mathrm{cotg}\widehat{C}\cdot\mathrm{cotg}\widehat{A}, \mathrm{cotg}\widehat{A}\cdot\mathrm{cotg}\widehat{B}).$$

Ainsi, celles de son inverse isotomique K sont

$$(x = \mathrm{tg}\widehat{B}\cdot\mathrm{tg}\widehat{C}, y = \mathrm{tg}\widehat{C}\cdot\mathrm{tg}\widehat{A}, z = \mathrm{tg}\widehat{A}\cdot\mathrm{tg}\widehat{B}).$$

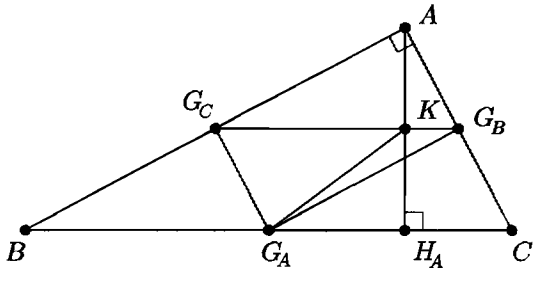
Les formules de changement de triangle de référence montrent que, par rapport au triangle ABC cette fois, le point K a pour coordonnées barycentriques le triplet (x', y', z'), où $x = y' + z' = \mathrm{tg}\widehat{A}\,(\mathrm{tg}\widehat{B} + \mathrm{tg}\widehat{C})$, et où y et z s'obtiennent de manière analogue.

Or, $\mathrm{tg}\widehat{B} + \mathrm{tg}\widehat{C} = \dfrac{\sin(\widehat{B}+\widehat{C})}{\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}}$, puis $x = \dfrac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}} \times \dfrac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}}$.

Cela montre que les coordonnées barycentriques du point K sont également $(\sin^2\widehat{A}, \sin^2\widehat{B}, \sin^2\widehat{C})$.

Comme ce triplet est proportionnel à (a^2, b^2, c^2)[24], nous reconnaissons bien là les coordonnées barycentriques du point de LEMOINE du triangle ABC.

Lorsque le triangle est rectangle, en A par exemple, certains points se confondent : H'_C avec G_B, et H'_B avec G_C notamment. Les droites $G_BH'_B$ et $G_CH'_C$ se confondent donc en la droite G_BG_C, parallèle à BC. Comme le point H'_A appartient à cette parallèle, et comme il appartient aussi à $G_AH'_A$, c'est lui le point d'intersection de nos trois droites. Le point de LEMOINE K est donc le point H'_A, milieu de la hauteur AH_A issue de A.



Ce résultat est confirmé par le calcul barycentrique : les coordonnées barycentriques de K sont (a^2, b^2, c^2), avec ici $a^2 = b^2 + c^2$, de sorte que K appartient à la droite d'équation barycentrique $X = Y + Z$, c'est-à-dire à la droite G_BG_C. En outre, le point G_A coïncide avec le centre O du cercle circonscrit, et la symédiane issue de A est donc la hauteur issue de A.Cqfd !

7. Droites, coniques et inversion isogonale

L'action de l'inversion isogonale sur l'ensemble des droites du plan est analogue à celle de l'inversion isotomique. Nous nous contenterons donc d'une liste de résultats.

7.1. L'inverse isogonal d'une droite cévienne

Désignons par **I** l'inversion isogonale par rapport au triangle ABC, définie pour tout point M n'appartenant pas au cercle circonscrit γ. Nous

[24]Car $a = 2R\sin\widehat{A}$, etc.

n'allons bien entendu pas refaire tous les calculs et discussions du paragraphe **III-2.1** puisque les formules donnant les coordonnées barycentriques de $\mathbf{I}(M)$ en fonctions de celles de M sont quasiment les mêmes que celles qui donnent les coordonnées barycentriques de $i(M)$.

Soit donc une droite D, passant par A : elle a une équation barycentrique de la forme $qY+rZ=0$, avec $(p,q)\neq(0,0)$. En outre, $\mathbf{I}(D)$ est incluse dans la droite D' [25] d'équation barycentrique $rc^2Y+qb^2Z=0$.

Les inévitables cas particuliers se produisent si D ou D' est tangente en A à γ ou parallèle au côté BC. La tangente T_A en A à γ a pour équation barycentrique $c^2Y+b^2Z=0$ et la parallèle Δ_A à BC menée de A a pour équation barycentrique $Y+Z=0$.

Si $D=T_A$, alors D' a pour équation barycentrique $b^2c^2Y+c^2b^2Z=0$, soit encore $Y+Z=0$; c'est dire que $D'=\Delta_A$. En général, ici, $D'\neq D$, alors qu'il y avait égalité dans le cas de l'inversion isotomique. Il y a donc deux cas à envisager :

- Si le triangle n'est *pas* isocèle en A, alors $b^2\neq c^2$ et $D'\neq D$. La droite D' recoupe γ en un point π', et on a $\mathbf{I}(D\setminus\{A\})=D'\setminus\{\pi'\}$.
- Si le triangle *est* isocèle en A, alors $b^2=c^2$ et $D'=D$. Alors, on a $\mathbf{I}(D\setminus\{A\})=D'\setminus\{A\}$.

Maintenant, si $D=\Delta_A$ et que ABC ne soit pas isocèle en A [26], alors elle recoupe γ en un point π alors que D' recoupe BC en un point m'. On a alors $\mathbf{I}(D\setminus\{A,\pi\})=D'\setminus\{m'\}$.

Si D n'est pas tangente en A à γ, ni parallèle à BC, elle recoupe le cercle en un point π. Comme D' n'est pas tangente en A à γ, elle recoupe ce cercle en un point π' et BC en un point m'. Dans ce cas on a, comme au **III-2.1**, on a $\mathbf{I}(D\setminus\{A,\pi\})=D'\setminus\{m',\pi'\}$.

Dans tous les cas, nous dirons pour simplifier que $\mathbf{I}(D)=D'$.

7.2. L'inverse isogonal d'une droite non cévienne

La discussion est la même que celle détaillée au **III-2.2** : si D ne passe par aucun des sommets, elle a une équation barycentrique de la forme $pX+qY+rZ=0$, avec p, q et r tous non nuls. Son image par $\mathbf{I}$ est incluse dans la conique circonscrite Γ d'équation barycentrique $pa^2YZ+qb^2ZX+rc^2XY=0$. Cette conique coupe le cercle circonscrit γ en les points A, B et C et en un quatrième point D_γ, éventuellement confondu avec l'un des sommets lorsque D est parallèle au côté opposé. On trouve encore dans

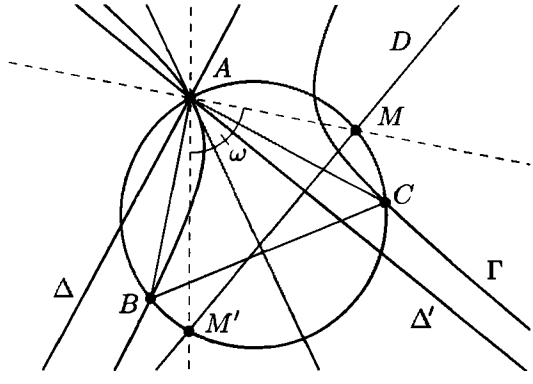
[25] Cette fois, D' est l'image de D par la symétrie orthogonale par rapport à la bissectrice de l'angle BAC. Intérieure ou extérieure, la bissectrice ? C'est pareil !

[26] S'il l'est, nous sommes dans la même situation que lorsque $D=T_A$.

tous les cas $\mathbf{I}(D) = \Gamma \setminus \{D_\gamma\}$. Nous dirons ici encore que $\mathbf{I}(D) = \Gamma$ et que $\mathbf{I}(\Gamma) = D$ [27].

La discussion du genre de Γ est identique : selon que D et γ sont sécants, tangents ou disjoints, Γ est une hyperbole, une parabole ou une ellipse. Dans la section qui suit, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux hyperboles *équilatères* circonscrites.

Nous allons avant cela déterminer l'angle des asymptotes de $\Gamma = \mathbf{I}(D)$ lorsque cette conique est une hyperbole.



La droite D coupe le cercle circonscrit en deux points, M et M'. Lorsque le point courant m de D tend vers M par exemple, la droite Am tend vers la droite AM et la droite symétrique de Am par rapport à la bissectrice de BAC tend vers la droite symétrique de AM par rapport à la bissectrice de BAC, notée Δ sur la figure. Or, $\mathbf{I}(m)$ tend vers l'infini quand m tend vers M et donc Δ dirige une asymptote de Γ, sans être d'ailleurs nécessairement confondue avec elle. De la même façon, on construit Δ' à partir de AM' et elle dirige l'autre asymptote de Γ. Ainsi, l'angle des asymptotes de Γ est celui des droites Δ et Δ', qui est lui-même celui des droites AM et AM', noté ω sur la figure. On vérifiera facilement que $\sin\omega = \dfrac{\|MM'\|}{2R}$.

Un cas particulier intéressant est celui où D passe par O ; plus précisément, $\omega = \pi/2$ si, et seulement si, l'hyperbole Γ est équilatère et cela se produit donc si, et seulement si, la droite D passe par O. À noter aussi que, si $O \in D$, alors $H = \mathbf{I}(O) \in \Gamma$: nous allons approfondir ce cas dans le paragraphe qui suit.

[27] Plus précisément, si Γ' est une conique circonscrite non dégénérée, on montre de même que $\mathbf{I}(\Gamma)$ est une droite ne passant par aucun des sommets du triangle, au prix des mêmes abus d'écriture. Si au contraire Γ' est dégénérée, son inverse isogonal est une droite passant par un des sommets.

8. Hyperboles équilatères circonscrites à un triangle

Alors que, pour une conique, la propriété d'être une parabole est une notion affine, *celle d'être une hyperbole équilatère en est une* euclidienne *: l'image d'une hyperbole équilatère par une isométrie du plan est encore une hyperbole équilatère, alors que l'on peut seulement garantir que son image par une application affine reste une hyperbole. Nous allons voir que l'inversion isogonale réserve aux hyperboles équilatères un traitement à part.*

8.1. Propriétés générales

Supposons toujours notre plan affine euclidien, et donnons-nous un triangle ABC, d'orthocentre H. Supposons que H n'est pas un sommet du triangle, c'est-à-dire que le triangle n'est *pas* rectangle.

Alors, *une conique* Γ *passant par* A, B *et* C *est une hyperbole équilatère si, et seulement si, elle passe aussi par* H. *En outre, le centre* I *de la conique appartient au cercle d'*EULER *du triangle.*

Démonstration. Soit une hyperbole équilatère Γ passant par les trois points. Choisissons un repère affine orthonormé dont les axes soient portés par les asymptotes de Γ. Cette conique a alors une équation affine du type $XY = k$, avec k réel. Si $k = 0$, la conique est dégénérée et la vérification est triviale ; supposons donc $k \neq 0$: on a alors forcément $xx'x'' \neq 0$.

Les coordonnées affines des points (distincts) sont respectivement (x, y), (x', y') et (x'', y''). Un vecteur directeur de la droite BC a pour composantes $(x'x'', -k)$ et la hauteur issue de A a pour équation affine

$$x'x''(X - x) - k(Y - y) = 0\,.$$

On vérifie[28] que cette dernière recoupe Γ en le point H_0 de coordonnées $(-k^2/(xx'x''), -xx'x''/k)$.

Les coordonnées de H_0 sont des fonctions symétriques des abscisses x, x' et x'' : si on échange les rôles de A, B et C, on retrouve le même point H_0 et il appartient bien aux trois hauteurs ; c'est dire que $H_0 = H$, or $H_0 \in \Gamma$ par construction, et le résultat est acquis[29].

Réciproquement, supposons un triangle ABC non rectangle, ayant H pour orthocentre. Une conique Γ_0 quelconque est circonscrite à ABC si, et seulement si, elle a une équation barycentrique de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$, avec $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$. Cette conique passe par H si, et seulement si,

[28] Ne pas oublier que $y = k/x$!

[29] Pour ce sens direct, nous n'avons pas utilisé le fait que le triangle n'est pas rectangle. En fait, s'il l'est, il n'y a rien a démontrer.

les coordonnées barycentriques de H vérifient cette équation barycentrique, c'est-à-dire si, et seulement si, voir **I-10**,

$$\varphi_0(p,q,r) \overset{\text{déf}}{=} p\frac{bc}{\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}} + q\frac{ca}{\cos\widehat{C}\cos\widehat{A}} + r\frac{ab}{\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}} = 0\,.$$

Il est clair que φ_0 est une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^3$ et donc que $\operatorname{Ker}(\varphi_0)$ en est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

Déterminons-en une base. Une équation barycentrique de AH est de la forme $q_0Z + r_0Y = 0$, et donc la conique Γ_A réunion des droites AH et BC a pour équation barycentrique $q_0ZX + r_0XY = 0$. On a $\varphi_0(0,q_0,r_0) = 0$ puisque Γ_A est une conique circonscrite, fût-elle dégénérée, passant par H aussi. De même, la conique Γ_B réunion des droites BH et CA a une équation barycentrique de la forme $p_1YZ + r_1XY = 0$ et on a $\varphi_0(p_1,0,r_1) = 0$. Comme les triplets $(0,q_0,r_0)$ et $(p_1,0,r_1)$ sont non nuls, et clairement non colinéaires, ils forment une base de $\operatorname{Ker}\varphi_0$ et Γ a donc une équation barycentrique de la forme $\lambda(q_0ZX + r_0XY) + \mu(p_1YZ + r_1XY) = 0$; il ne reste plus qu'à montrer que toutes les coniques ayant une équation barycentrique de cette forme sont des hyperboles équilatères.

Revenons pour cela à un repère affine orthonormé : AH a une équation (affine) de la forme $mX + nY + s = 0$ et BC une équation de la forme $m'X + n'Y + s' = 0$, avec $mm' + nn' = 0$, de même on a, pour BH et CA des équations de la forme $m''X + n''Y + s'' = 0$ et $m'''X + n'''Y + s''' = 0$, avec $m''m''' + n''n''' = 0$. Ainsi, Γ a une équation affine de la forme

$$\lambda(mX+nY+s)(m'X+n'Y+s')+\mu(m''X+n''Y+s'')(m'''X+n'''Y+s''') = 0.$$

Un calcul rapide montre que la somme des coefficients en X^2 et en Y^2 est $\lambda(mm' + nn') + \mu(m''m''' + n''n''')$, laquelle vaut bien 0. Cela établit que la conique Γ est effectivement une hyperbole équilatère.

Dans cette réciproque, nous nous sommes servi du fait que H est différent des trois autres points. En revanche, si ABC est rectangle en A, le résultat tombe en défaut.

Il nous reste à établir que le centre de Γ est sur le cercle d'EULER du triangle. Récrivons la formule $\varphi_0(p,q,r) = 0$ sous la forme équivalente

$$\varphi_0'(p,q,r) \overset{\text{déf}}{=} pbc\cos\widehat{A} + qca\cos\widehat{B} + rab\cos\widehat{C} = 0\,,$$

où on a posé $\varphi_0' = \cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C} \times \varphi_0$ [30].

[30] On a aussi

$$\varphi_0'(p,q,r) = p(\overrightarrow{AB}\,|\,\overrightarrow{AC}) + q(\overrightarrow{BC}\,|\,\overrightarrow{BA}) + r(\overrightarrow{CA}\,|\,\overrightarrow{CB})\,,$$

où le produit scalaire est noté $(\cdot\,|\,\cdot)$.

Avec les notations du **II-2.4**, les coordonnées barycentriques (x, y, z) du centre I sont telles que $(x, y, z)F = (1, 1, 1)$, c'est-à-dire encore telles que

$$\begin{cases} ry + qz = 1 \\ rx + pz = 1 \\ qx + py = 1\,. \end{cases}$$

Si $xyz \neq 0$, c'est-à-dire si I n'est pas sur un côté du triangle, on a, à un facteur multiplicatif près,

$$\begin{cases} p = x(x - y - z) \\ q = y(y - x - z) \\ r = z(z - x - y) \end{cases}$$

et, puisque $\varphi_0'(p, q, r) = 0$, on a

$$bcx(x - y - z)\cos\widehat{A} + cay(y - x - z)\cos\widehat{B} + abz(z - x - y)\cos\widehat{C} = 0\,.$$

C'est bien dire que I est sur le cercle d'EULER du triangle : pour comparer avec l'équation barycentrique du **I-7.5.2**, on aura juste à vérifier que, par exemple, $c = a\cos\widehat{B} + b\cos\widehat{B}$.

Reste le cas où I est sur un côté, BC par exemple. Si I est le milieu de BC, alors il est bien sur le cercle d'EULER et, sinon, la conique Γ contient aussi deux autres points de BC : ce sont les symétriques de B et C par rapport à I ; donc, Γ dégénère en la réunion de BC et d'une autre droite, orthogonale à BC puisque Γ est une hyperbole équilatère : cette seconde droite est forcément la hauteur issue de A et I est l'intersection de cette hauteur avec BC. Or, ce point, que nous avons désigné par H_A, appartient bien au cercle d'EULER.

Réglons tout de même le cas d'un triangle rectangle en A ; nous établissons qu'une conique (non dégénérée) passant par A, B et C est une hyperbole équilatère si, et seulement si, sa tangente en A est la hauteur issue de A.

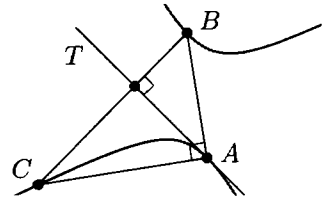
Pour ce faire, choisissons un repère (affine) orthonormé d'origine A et d'axes portés par les droites AB et AC respectivement. Les coordonnées (affines) de B sont alors de la forme $(b, 0)$, avec $b \neq 0$, et celles de C de la forme $(0, c)$, avec $c \neq 0$. Une conique $\mathscr{C}$ « générique » a pour équation affine $\Phi(X, Y) = pX^2 + qXY + rY^2 + sX + tY + u = 0$. Elle passe par A si, et seulement si, $u = 0$, elle passe par B si, et seulement si, $s = -pb$, et par C si, et seulement si, $t = -rc$. Comme $\mathscr{C}$ est supposée non dégénérée, l'équation de la tangente T en A à $\mathscr{C}$ est $sX + tY = 0$ [31], alors qu'un vecteur directeur de BC est $(-b, c)$. Donc, T est orthogonale à BC si, et seulement si, $cs + bt = 0$ donc si, et seulement si, $-pbc - brc = 0$, c'est-à-dire enfin si, et seulement si, $r = -p$. Cette dernière condition équivaut bien au fait que $\mathscr{C}$ est une hyperbole équilatère.

[31] Se rappeler que le gradient de Φ est un vecteur normal à cette droite.

Était-il prévisible que la tangente soit la hauteur $\mathscr{H}$ issue de A ? Oui, si on se rappelle l'interprétation de la tangente comme limite d'une corde : si un point A' est choisi proche de A sur la droite $\mathscr{H}$, l'orthocentre A'' du triangle $A'BC$ appartient à $\mathscr{H}$ et il est proche de A aussi. Une hyperbole équilatère passant par A', B, C passe aussi par A'' et la droite $A'A''$ est donc une corde de cette hyperbole. Quand A' tend vers A, A'' tend vers A aussi, mais la droite $A'A''$ reste confondue avec $\mathscr{H}$. C'est bien cette droite que nous avons trouvée comme tangente en A dans la configuration-limite.

Signalons pour être complet qu'il y a deux hyperboles équilatères **dégénérées** passant par les trois points :

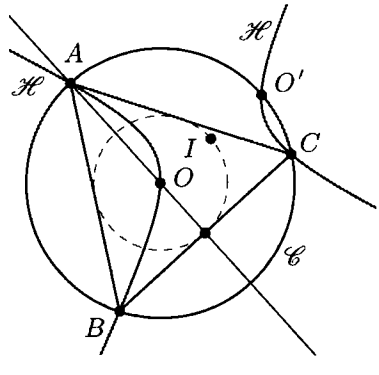
1. La réunion de la droite BC et de la hauteur issue de A. On peut alors parler de tangente en A à cette « conique », et c'est bien la hauteur attendue.
2. La réunion des droites AB et AC. La tangente en A n'a plus alors de sens [32].



Voici un exercice, proposé par un ami anonyme : on considère un triangle équilatéral ABC, de centre O et une hyperbole équilatère $\mathscr{H}$ passant par les sommets du triangle (et donc aussi par O qui possède aussi la casquette d'orthocentre dans ce cas-là). Montrer que le centre I de l'hyperbole appartient au cercle inscrit au triangle ABC, et que $\mathscr{H}$ contient le symétrique O' de O par rapport à I.

Nous allons donner une solution de cet exercice, puis en énoncer et établir une réciproque.

Solution. Puisque ABC est équilatéral, on a $a = b = c$, $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \pi/3$ et l'équation barycentrique de $\mathscr{H}$ est de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$, avec $p + q + r = 0$, après simplification de l'expression de φ_0. Supposons en outre que $p^2 + q^2 + r^2 = 1$, après division éventuelle par un scalaire idoine ; comme $(p+q+r)^2 = 0$, de cela suit que $qr + rp + pq = -1/2$.



Il est facile de vérifier que le cercle d'EULER coïncide avec le cercle inscrit et cela montre que I appartient bien au cercle inscrit. Les coordonnées barycentriques normalisées de O sont $(1/3, 1/3, 1/3)$; si nous appelons (x, y, z) celles de I, alors celles de O' sont $(2x - 1/3, 2y - 1/3, 2z - 1/3)$, voir **I-7.3**.

[32] Toutefois, les géomètres anciens ne craignaient pas de dire que la hauteur issue de A est tangente à notre conique, puisqu'elle la coupe en deux points confondus !

Il nous reste à établir que $O' \in \mathscr{H}$, c'est-à-dire que

$$p(2y-1/3)(2z-1/3)+q(2z-1/3)(2x-1/3)+r(2x-1/3)(2y-1/3)=0\,.$$

Or, *confer* **II-2.4**, nous savons que (x,y,z) est égal à

$$\underbrace{\frac{1}{p^2+q^2+r^2-2qr-2rp-2pq}}_{=1/2}(p^2-pq-pr,q^2-qr-qp,r^2-rp-rq)\,.$$

Les termes figurant dans la parenthèse se simplifient eux aussi :

$$p^2-pq-pr=p(p-q-r)=p(2p-p-q-r)=2p^2\,.$$

Reste donc à établir que

$$p(2q^2-1/3)(2r^2-1/3)+q(2r^2-1/3)(2p^2-1/3)+r(2p^2-1/3)(2q^2-1/3)=0\,.$$

Appelons Δ le membre de gauche dans la formule précédente ; il est égal à

$$4pqr(qr+rp+pq)-\frac{2}{3}\left(pq^2+pr^2+qr^2+qp^2+rp^2+rq^2\right)+\frac{p+q+r}{9}\,.$$

En outre,

$$pq^2+pr^2+qr^2+qp^2+rp^2+rq^2=(p+q+r)(p^2+q^2+r^2)-(p^3+q^3+r^3)\,.$$

Compte tenu que $p+q+r=0$, $p^2+q^2+r^2=1$ et $qr+rp+pq=-1/2$, on a donc

$$\Delta=-2pqr+2\,\frac{p^3+q^3+r^3}{3}\,.$$

Appelons $\Pi(X)$ le polynôme $(X-p)(X-q)(X-r)$; on a aussi $\Pi(X)=X^3-X/2-pqr$ (relations entre coefficients et zéros du polynôme Π). Puisque $\Pi(p)=\Pi(q)=\Pi(r)=0$, on a aussi

$$p^3=p/2+pqr\,,\ q^3=q/2+pqr\,,\ r^3=r/2+pqr\,,$$

de sorte que $p^3+q^3+r^3=3pqr$. Cela montre enfin que $\Delta=0$.

Réciproquement, supposons une hyperbole équilatère $\mathscr{H}$ (dégénérée ou non), de centre Ω, et un cercle $\mathscr{C}$ centré en un point $\Omega' \neq \Omega$ de $\mathscr{H}$ et passant par le symétrique Ω'' de Ω' par rapport à Ω. Montrer que $\mathscr{C}$ recoupe $\mathscr{H}$ en trois autres points formant triangle équilatéral.

Nous adaptons un repère orthonormé du plan aux axes de l'hyperbole : $\mathscr{H}$ admet alors une équation cartésienne de la forme $XY=a^2$, c'est-à-dire encore $Z^2-\overline{Z}^2=4\mathrm{i}a^2$, si l'on pose $Z=X+\mathrm{i}Y$. Une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est de même

$$(X-x_0)^2+(Y-y_0)^2=4(x_0^2+y_0^2)\,,$$

où (x_0,y_0) sont les coordonnées cartésiennes de Ω'.

Posons $z_0 = x_0 + iy_0$: cette équation devient $\overline{(Z - z_0)}(Z - z_0) = 4\overline{z_0}z_0$. Effectuons le changement de notation $Z' = Z - z_0$: les équations de l'hyperbole et du cercle sont alors respectivement $(Z' + z_0)^2 - \overline{(Z' + z_0)}^2 = 4ia^2$ et $\overline{Z'}Z' = 4\overline{z_0}z_0$, c'est-à-dire encore $Z' \neq 0$ et $\overline{Z'} = 4\overline{z_0}z_0/Z'$ puisque le point Ω', d'affixe z_0, n'appartient pas au cercle.

Développer les carrés dans l'équation de l'hyperbole, y reporter $\overline{Z'}$ en fonction de Z' et réduire au même dénominateur donne après calcul la condition nécessaire suivante pour que le point d'affixe Z appartienne à $\mathscr{H} \cap \mathscr{C}$:

$$(Z' + 2z_0)(Z'^3 - 8\overline{z_0}^2 z_0) = 0.$$

La première parenthèse s'annule pour $Z' = -2z_0$, c'est-à-dire $Z = -z_0$: c'est l'affixe du point Ω'' qui appartient bien à l'intersection, par construction. La seconde parenthèse s'annule pour trois complexes (distincts) dont les images forment un triangle équilatéral [33]. On vérifie facilement que, inversement, ces trois points appartiennent à l'intersection.

Équilatère, équilatéral : est-ce à cette propriété que ces hyperboles doivent cette épithète ? Ou bien est-ce dû à l'égalité des longueurs des axes focal et non focal [34] ? Aux historiens de trancher !

8.2. Théorème de PASCAL et hyperboles équilatères

Dans cette section, nous donnons une jolie preuve, attribuée à BRIANCHON *et à* PONCELET, *d'un résultat vu au* **III-8** *: si* Γ *est une hyperbole équilatère circonscrite à un triangle* ABC, *alors l'orthocentre du triangle appartient à* Γ [35].

La preuve repose sur un cas particulier du théorème de PASCAL : on considère, sur Γ, les six points $BHFEAC$, où, outre les points A, B et C, on définit H comme le point où la hauteur du triangle issue de C recoupe Γ, puis E et F comme les points à l'infini sur les deux asymptotes de Γ (l'ordre en étant quelconque). Il s'agit donc de montrer que H est l'orthocentre de ABC.

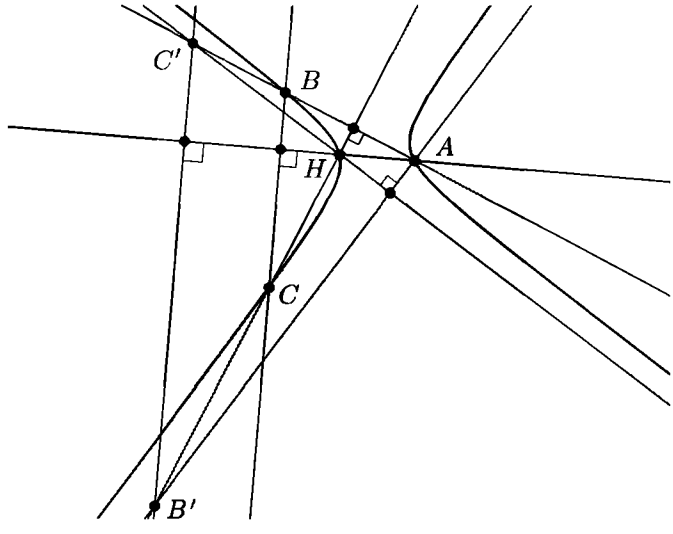
Sont alors alignés les points d'intersection respectifs de AB et EH, BC et EF, CH et AF. Puisque EF est la droite de l'infini, $BC \cap EF$ est le point à l'infini $(BC)_\infty$ de la droite BC ; EH est la parallèle à la « première » asymptote de Γ menée de H et elle coupe AB en un point C' ; AF est la parallèle à la « seconde » asymptote de Γ menée de A et elle coupe CH en

[33] L'un de ces trois points peut être Ω'' ; dans ce cas, cercle et hyperbole sont tangentes en ce point.

[34] On désigne habituellement par a et b les demi-longueurs des axes d'une conique, la demi-distance focal étant alors $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ dans le cas d'une hyperbole. Une hyperbole équilatère est donc caractérisée, parmi les coniques, par son excentricité $e = \sqrt{2}$.

[35] Voir *Géométrie des courbes. Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère, au moyen de quatre conditions données.* Annales de Gergonne, volume 11.

un point B'. Vu le théorème de PASCAL, les points $(BC)_\infty$, B' et C' sont alignés, c'est-à-dire la droite $B'C'$ est parallèle à BC. Observons le triangle $AB'C'$: la hauteur issue de B' est $B'H$, du fait que CH est orthogonale à AC' ; la hauteur issue de C' est $C'H$ puisque $C'H$ est orthogonale à AB' (ces droites étant parallèles aux asymptotes de Γ, orthogonales par hypothèse). Cela montre que H est l'orthocentre de $AB'C'$ et donc que AH est orthogonale à $B'C'$, donc aussi à BC qui lui est parallèle : ainsi, H est bien l'orthocentre de ABC, et cet orthocentre est sur la conique.



9. Deux exercices de révision

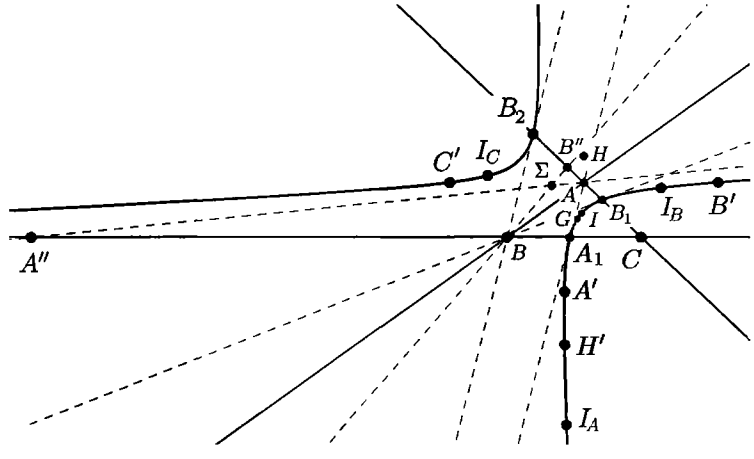
9.1. Les deux inversions

Voici un premier exercice qui mêle les notions d'inversion isotomique (qui ressortit à la Géométrie affine) et d'inversion isogonale (propre, elle, à la Géométrie euclidienne). La solution de celui-ci suit la figure.

Nous nous donnons ici un triangle ABC non isocèle dans un plan affine euclidien. Si M est un point de ce plan, nous désignons ici par $\mathbf{i}(M)$ l'inverse isotomique de M, lorsqu'il existe, et par $\mathbf{I}(M)$ son inverse isogonal, lorsqu'il existe.

1. Établir qu'il existe une conique Γ telle que si un point M, non situé sur une des droites portant les côtés du triangle, est aligné avec $\mathbf{i}(M)$ et $\mathbf{I}(M)$, alors $M \in \Gamma$.

2. Montrer que, pour tout point M, les points $\mathrm{i}(M)$ et $\mathrm{I}(M)$ appartiennent à la polaire de M par rapport à Γ. En déduire un principe de construction de la tangente en un point $M \in \Gamma$.
3. Montrer que le triangle ABC est autopolaire par rapport à Γ.
4. Vérifier par le calcul barycentrique que le centre de cette conique est le point de STEINER Σ [36] du triangle ABC. Expliquer aussi ce fait géométriquement.
5. Vérifier que les points suivants appartiennent à Γ : les centres I_A, I_B, I_C et I des cercles (ex)inscrits au triangle ABC, les *quatre* points de coordonnées barycentriques $(\pm 1, \pm 1 \pm 1)$ [37].
   En déduire que Γ est une hyperbole équilatère (s'aider de la notion de *quadrilatère orthocentrique*, voir au **IV-1.1**).
6. Si les longueurs des côtés sont telles que $a > c > b$, comme sur la figure, montrer que seules les droites BC et CA coupent Γ (en des points réels). Si A_1 et A_2 [38], respectivement B_1 et B_2, sont les points où BC, respectivement CA, coupe Γ, montrer que les divisions A_1A_2BC et B_1B_2CA sont harmoniques et que les droites AA_1, AA_2, BB_1 et BB_2 sont tangentes à Γ. Si, en outre, A'' et B'' désignent les milieux de A_1A_2 et de B_1B_2, alors les droites AA'' et BB'' se coupent en Σ.



Solution

1. Équation de Γ. Rappelons que, si un point M a pour coordonnées barycentriques (x, y, z), alors les coordonnées barycentriques des conjugués

[36] Voir au **III-1.2**.

[37] Cela donne quatre points : le point G et les points appelés A', B', C' sur la figure. Par exemple, le point C' est tel que $AC'BC$ est un parallélogramme.

[38] Malgré d'affectueuses sollicitations, le point A_2 n'a pas accepté de figurer sur la figure.

isotomique et isogonal de M sont respectivement les triplets (yz, zx, xy) et (a^2yz, b^2zx, c^2xy).

L'alignement de ces trois points équivaut donc à

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ yz & zx & xy \\ a^2yz & b^2zx & c^2xy \end{vmatrix} = 0\,.$$

Développer ce déterminant donne tout de suite la condition équivalente

$$xyz \times \left((c^2-b^2)x^2 + (a^2-c^2)y^2 + (b^2-a^2)z^2\right) = 0\,.$$

Pour un point M non situé sur un des côtés du triangle, on a $xyz \neq 0$, de sorte qu'il existe bien une conique Γ répondant à la question : elle a pour équation barycentrique

$$(c^2-b^2)X^2 + (a^2-c^2)Y^2 + (b^2-a^2)Z^2 = 0\,.$$

Cette conique n'est pas vide : la suite établira qu'elle contient les douze points cités dans l'énoncé. Au reste, nous pouvons en être sûr dès à présent, puisque la signature de la forme quadratique $q : (X, Y, Z) \mapsto (c^2-b^2)X^2 + (a^2-c^2)Y^2 + (b^2-a^2)Z^2$ *est de la forme* $(2, 1)$ *ou* $(1, 2)$. *En effet, si l'on a par exemple* $a > c > b$, *cette signature est* $(2, 1)$.

En particulier, q est non dégénérée, et Γ l'est donc elle aussi.

2. Conjugaison de tout point M avec ses inverses. Rappelons que, vu l'équation barycentrique de Γ, les points M et M' de coordonnées barycentriques respectives (x, y, z) et (x', y', z') sont conjugué par rapport à Γ si, et seulement si, on a

$$(c^2-b^2)xx' + (a^2-c^2)yy' + (b^2-a^2)zz' = 0\,.$$

Si, par exemple, si on choisit pour M' l'inverse isotomique du point M de coordonnées barycentriques (x, y, z), nous avons à vérifier que

$$(c^2-b^2)x\cdot yz + (a^2-c^2)y\cdot xz + (b^2-a^2)z\cdot xy = 0$$

En effet, on obtient bien le résultat espéré. Il en va de même du cas où M' est l'inverse isogonal de M.

En particulier, la polaire par rapport à Γ d'un point M non situé sur un des côtés du triangle est la droite $\mathbf{i}(M)\mathbf{I}(M)$, car on vérifie tout de suite que ces deux points sont alors toujours distincts.

Si, de plus, M est *sur* Γ, alors cette droite est la tangente à Γ en ce point.

3. Autopolarité. Vu la section **III-3.2**, cette propriété résulte immédiatement du caractère *diagonal* de la matrice (relativement à la base canonique) de la forme quadratique q, c'est-à-dire la matrice $Q = \mathrm{Diag}(c^2-b^2, a^2-c^2, b^2-a^2)$.

4. Le centre Σ de Γ. Ce point a pour coordonnées barycentriques le triplet $(1,1,1)Q^{-1}$. Après avoir chassé les dénominateurs, on obtient comme coordonnées barycentriques de Σ le triplet

$$\big((a^2-b^2)(c^2-a^2),(b^2-c^2)(a^2-b^2),(c^2-a^2)(b^2-c^2)\big)$$

On reconnaît là le point de STEINER du triangle : voir au **III-1.2**.

En voici une explication géométrique : dans la section citée, on a établi que le point de STEINER est le point du plan pour lequel les inverses isotomique et isogonal sont à l'infini. La polaire de Σ est donc à l'infini, et cette propriété caractérise le centre de la conique Γ.

5. Points remarquables et nature de Γ. La vérification de l'appartenance à Γ des huit points donnés est immédiate ! Mieux que cela, elle est prévisible : par exemple, le point I, centre du cercle inscrit, est confondu avec son inverse isogonal et l'alignement des points $I, \mathbf{i}(I)$ et $\mathbf{I}(I)$ est triviale. Cette remarque vaut aussi pour les trois centres des cercles exinscrits, ainsi que pour les points A', B', C', G qui, eux, coïncident avec leur inverse isotomique.

Comme le quadrilatère $I_AI_BI_CI$ est orthocentrique, la conique Γ est alors une hyperbole équilatère. Elle passe donc aussi par l'orthocentre H' du triangle $A'B'C'$, qui se déduit de celui de ABC par l'homothétie de centre G et de rapport -2.

6. Deux alignements remarquables. Avec l'hypothèse $a > c > b$, on voit que les points d'intersection de Γ avec BC sont les points A_1 et A_2 de coordonnées barycentriques $(0, \sqrt{a^2-b^2}, \pm\sqrt{a^2-c^2})$. Grâce à la formule du **II-2.7**, on vérifie que la division A_1A_2BC est harmonique. On procède de même avec la division B_1B_2CA. En revanche, la droite AB ne coupe pas Γ.

Bien sûr, le triangle ABC est autopolaire par rapport à Γ, de sorte que les points B et C sont conjugués par rapport à elle. Cela confirme l'harmonie de la division A_1A_2BC. En revanche, seul le calcul permettait de savoir quels côtés du triangle coupent effectivement Γ.

Puisque les points A_1 et A_2, appartenant à Γ, sont sur la droite BC, les tangentes en ces points se coupent en le pôle de BC, qui est le point A, du fait toujours de l'autopolarité du triangle ABC. Les droites AA_1 et AA_2 sont donc bien tangentes à Γ, et il en va de même de BB_1 et de BB_2.

Enfin, sur Γ, les cordes A_1A_2 et $B'C'$ sont parallèles (penser aux parallélogrammes $BCAC'$ et $ABCB'$) ; les milieux de ces deux cordes, savoir respectivement A'' et A, sont donc alignés avec le centre Σ de la conique. Cela explique que AA'', et de même BB'', passent par Σ.

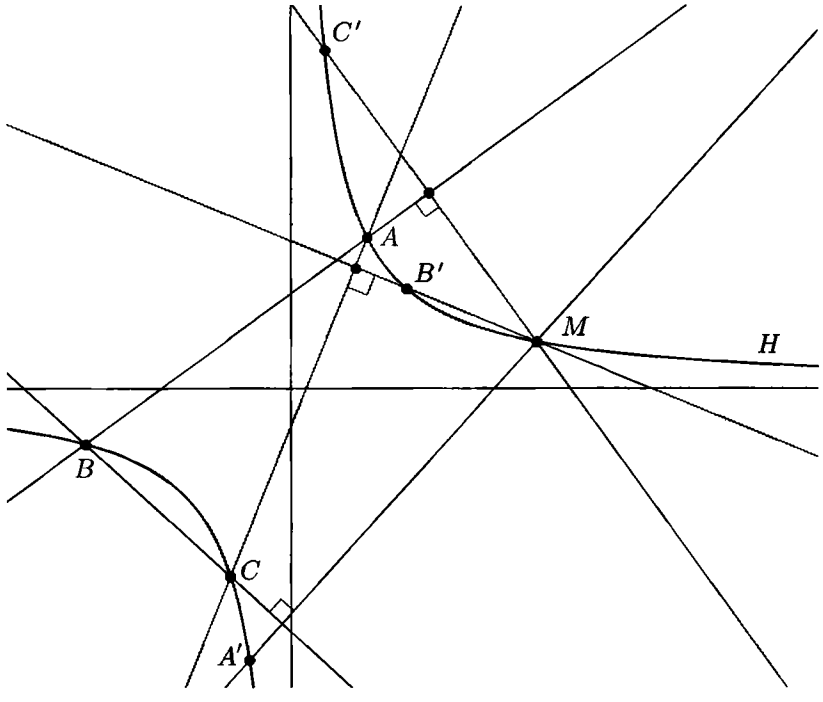
On notera aussi que les directions $A\Sigma$ et BC sont conjuguées. Il en va de même des directions $B\Sigma$ et CA, et des directions $C\Sigma$ et AB.

9.2. Des triangles d'aires égales

On considère, dans un plan affine euclidien P, une hyperbole équilatère H.

a) Soit deux points distincts A et B de H ; à un point M de H, on associe le point $\varphi_{AB}(M)$ de H en lequel la perpendiculaire à la droite AB menée de M recoupe H. Montrer que φ_{AB} est la restriction à H d'une application affine de P dans lui-même.

b) Soit trois points distincts A, B et C de H, et M un point de H ; établir que le triangle $A'B'C' \overset{\text{déf}}{=} \varphi_{BC}(M)\varphi_{CA}(M)\varphi_{AB}(M)$ a même aire que le triangle ABC.



Solution du a). Rapportons le plan P à un repère orthonormé dont les axes soient les asymptotes de H ; une équation de cette conique est alors de la forme $XY = k$, où $k \neq 0$. Désignons par $(a, k/a)$ et $(b, k/b)$ les coordonnées cartésiennes de A et de B, et par (x, y), où $y = k/x$, celles de M.

Le calcul établi au **III-8.1** montre que les coordonnées de $\varphi_{AB}(M)$ sont $(-k^2/abx, -abx/k)$, c'est-à-dire encore $(-ky/ab, -abx/k)$. L'application affine φ_{AB} qui à un point de coordonnées (X, Y) associe le point de coordonnées $(-kY/ab, -abX/k)$ convient donc. On vérifie d'ailleurs immédiatement qu'elle envoie H sur elle-même.

Remarque. Explicitons mieux cette transformation affine : vu le **II-2.9**, nous savons que les milieux des cordes de H parallèles à la direction δ orthogonale à celle de AB appartiennent tous au diamètre Δ' conjugué de δ. L'application φ_{AB} n'est donc autre que la symétrie oblique par rapport à ce diamètre, et parallèlement à la direction δ.

Solution du b). Conservons les notations du **a)** et désignons par $(c, k/c)$ les coordonnées du point C. L'aire du triangle $\varphi_{BC}(M)\varphi_{CA}(M)\varphi_{AB}(M)$ est alors égale au déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} -ky/bc & -ky/ca & -ky/ab \\ -bcx/k & -cax/k & -abx/k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nous ramenons facilement le calcul de ce déterminant à celui donnant l'aire du triangle ABC ; commençons par factoriser $-ky/abc$ dans la première ligne et $-abcx/k^2$ dans la deuxième : nous factorisons ainsi $kabcxy/k^2abc$, c'est-à-dire 1. On a donc encore

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ k/a & k/b & k/c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On reconnaît là l'aire du triangle ABC ; il s'agit d'ailleurs même d'aires *orientées.*

Remarques. Avec ces notations, l'application affine φ_{AB} est une involution ; c'est prévisible puisque la construction de $\varphi_{AB}(M)$ à partir de $M \in H$ est elle-même involutive[39]. Cette involution échange les directions des asymptotes de H ; en effet, lorsque $M \in H$, considéré comme point mobile, s'éloigne à l'infini vers l'une des asymptotes, le point $\varphi_{AB}(M)$ alors construit s'éloigne à l'infini vers l'autre asymptote. À noter que, selon les résultats du **III-8.1**, le point $\varphi_{AB}(M)$ n'est autre que l'orthocentre du triangle ABM, lorsque $M \neq A \neq B$.

L'orthocentre M_0 du triangle ABC est lui-même sur H ; les points $\varphi_{BC}(M_0)$, $\varphi_{CA}(M_0)$ et $\varphi_{AB}(M_0)$ coïncident alors respectivement avec A, B et C. L'égalité des aires n'en est que plus triviale.

Le cercle circonscrit au triangle ABC recoupe H en général en un quatrième point, que nous appelons D. Vérifions, grâce aux résultats du **V-3.2**, à venir, que les points $A' = \varphi_{BC}(D)$, $B' = \varphi_{CA}(D)$ et $C' = \varphi_{AB}(D)$ se déduisent alors des points A, B et C par une symétrie centrale.

En effet, les points A', B' et C' ne sont autres que les orthocentres des triangles BCD, CAD et ABD. Choisissons cette fois un repère orthonormé

[39] C'est l'*involution à point de Frégier* définie par le point à l'infini de la direction orthogonale à celle de la droite AB.

ayant pour origine le centre du cercle $ABCD$, et identifions grâce à ce choix notre plan euclidien à $\mathbb{C}$.

Appelons, pour être cohérent avec le **V-3.2**, a, b, c et d les affixes de nos quatre points : les affixes des points $A'B'C'$ sont alors $b+c+d$, $c+a+d$ et $a+b+d$; on voit qu'ils se déduisent de a, b et c par l'application $z \longmapsto (a+b+c+d)-z$.

Chapitre IV

Les familles de coniques

Dans les deux premiers paragraphes de ce chapitre, nous allons laisser « un degré de liberté » aux coniques circonscrites à un triangle. Cette situation mériterait quasiment d'être développée dans un ouvrage entier; nous en avons donc forcément laissé de côté tout un pan, mais pensons que ce que nous avons conservé convaincra le lecteur de la richesse et de l'intérêt de ce concept. Plus loin, au **A-5.5**, *nous en évoquerons également l'aspect dual, à partir des familles de coniques* inscrites *dans un quadrilatère.*

1. Faisceaux linéaires de coniques circonscrites

Dans la section précédente, nous avons montré que l'équation barycentrique générale des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle de référence (non rectangle) ABC était de la forme $pYZ+qZX+rXY=0$, où le triplet (p,q,r), non nul, annule la forme linéaire φ_0.

Appelons plus généralement *faisceau linéaire de coniques (circonscrites)*[1] l'ensemble des coniques ayant une équation barycentrique de la forme $pYZ+qZX+rXY=0$, où le triplet non nul (p,q,r) annule une certaine forme linéaire non nulle $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$. Nous appellerons cet ensemble plus simplement un *faisceau de coniques* et le désignerons par $\mathscr{F}_\varphi$.

Supposons φ choisie ; toutes les coniques de $\mathscr{F}_\varphi$ passent bien sûr par A, B et C : *nous allons voir qu'elles passent alors aussi toutes par un quatrième point*[2], *éventuellement à l'infini, ou encore éventuellement confondu avec un des sommets du triangle (mais dans ce dernier cas elles possèdent une*

[1] Ici, nous n'aurons pas à supposer que ABC n'est pas rectangle.

[2] Dans le cas des hyperboles équilatères, nous savons déjà que ce quatrième point est l'orthocentre H du triangle.

*propriété supplémentaire). Nous verrons aussi que les centres de celles des coniques du faisceau qui ne sont pas des paraboles, appartiennent à une nouvelle conique passant par les milieux des côtés et qui généralise en cela le cercle d'*EULER *du triangle.*

Donnons-nous donc une forme linéaire φ, qui à $(p,q,r) \in \mathbb{R}^3$ associe $up + vq + wr$, avec $(u,v,w) \neq \vec{0}$. On voit tout de suite qu'il y a deux cas suivants à envisager.

1.1. Les faisceaux à quatre points de base

Supposons dans un premier temps que $uvw \neq 0$. Alors on ne change pas $\mathscr{F}_\varphi$ en posant $\varphi(p,q,r) = \frac{1}{vw}p + \frac{1}{wu}q + \frac{1}{uv}r$ [3]. Le point D, de coordonnées barycentriques toutes non nulles $(1/u, 1/v, 1/w)$, n'est pas un sommet du triangle (il n'est même pas sur un côté du triangle), et appartient à toutes les coniques du faisceau. Le point D est à l'infini si, et seulement si, $vw+wu+uv = 0$ et les coniques ont alors toutes une direction asymptotique commune.

Inversement, si l'on se donne un point D, de coordonnées barycentriques toutes non nulles (x_0, y_0, z_0), alors les coniques passant par A, B, C et D sont celles d'équation barycentrique $py_0z_0 + qz_0x_0 + rx_0y_0 = 0$, ce qui correspond à la forme linéaire définie par $\varphi(p,q,r) = p\underbrace{y_0z_0}_{u} + q\underbrace{z_0x_0}_{v} + r\underbrace{x_0y_0}_{w}$, où l'on a bien $uvw \neq 0$.

Il n'est pas raisonnable d'espérer un cinquième point commun puisque, nous l'avons vu au **II-2.1**, une seule conique passe par cinq points donnés dont quatre quelconques ne sont pas alignés [4]. Si l'on veut résumer cela : *les coniques d'un tel faisceau ont quatre points communs et pas davantage, et la donnée d'un cinquième point rend alors la conique unique.* Le lecteur prudent pourra toutefois le vérifier au prix d'un petit calcul.

1.1.1. Faisceaux et inversion isogonale

Examinons les images par inversion isogonale des coniques de $\mathscr{F}_\varphi$ [5]. Si l'on a une conique d'équation barycentrique $pYZ + qZX + rXY = 0$, avec $up + vq + wr = 0$, alors son inverse isogonal est une droite et a pour équation barycentrique $pb^2c^2X + qc^2a^2Y + ra^2b^2Z = 0$: elle passe par l'inverse isogonal D' de D, de coordonnées barycentriques (a^2u, b^2v, c^2w). Les droites obtenues appartiennent toutes à un faisceau linéaire de droites,

[3] C'est-à-dire en divisant φ par uvw.

[4] Et c'est forcément le cas ici puisque les quatre points déjà connus A, B, C et D sont trois à trois non alignés, même si D est à l'infini.

[5] L'inversion isotomique aurait un effet analogue, mais les hyperboles équilatères se comportent mieux vis-à-vis de la première.

celles passant par le point D' (lorsque D' est à l'infini, ces droites sont toutes parallèles). Inversement, si D est un point dont l'inverse isogonal D' n'est pas sur un côté du triangle, l'ensemble des inverses isogonaux des droites passant par D' est un faisceau de coniques, admettant D comme quatrième point de base. Les trois coniques dégénérées du faisceau correspondent alors aux inverses isogonaux des droites $D'A$, $D'B$ et $D'C$.

Nous savons qu'une conique circonscrite est dégénérée si, et seulement si, elle est la réunion d'un côté et d'une droite passant par le sommet opposé. Il y a donc exactement trois coniques dégénérées dans le faisceau de coniques de points de base A, B, C, D : ce sont les réunions respectives des droites AD et BC, BD et CA, CD et AB. Leurs inverses isogonaux respectifs sont les droites AD', BD' et CD'.

La forme linéaire φ étant connue, et avec elle le point D, nous connaissons déjà les centres des trois coniques dégénérées du faisceau $\mathscr{F}_\varphi$: ce sont les intersections des droites AD et BC, BD et CA, CD et AB, un (voire deux) de ces points pouvant se situer à l'infini. Selon nos conventions constantes, ces points seront appelés D_A, D_B et D_C et leurs coordonnées barycentriques respectives sont $(0, w, v)$, $(w, 0, u)$ et $(v, u, 0)$.

1.1.2. La conique des neuf points

Intéressons-nous aux centres des autres coniques du faisceau, du moins celles qui ne sont pas des paraboles. Le même calcul que celui fait au **III-8** établit que les centres de ces coniques vérifient l'équation barycentrique

$$\mathscr{C} : \quad uX(X-Y-Z)+vY(Y-Z-X)+wZ(Z-X-Y)=0\,.$$

Cette équation étant du second degré, elle représente une conique, que nous appellerons $\mathscr{L}$. Comme on peut s'y attendre, les points D_A, D_B et D_C sont sur $\mathscr{L}$, ce que confirme une substitution dans $\mathscr{C}$ des coordonnées barycentriques de ces points.

Notre moisson ne s'arrête pas là : s'y trouvent aussi les milieux G_A, G_B et G_C des côtés, de coordonnées barycentriques respectives $(0, 1, 1)$, etc., et, si D n'est pas à l'infini, les milieux de AD, BD et CD, de coordonnées barycentriques respectives $(2vw + wu + uv, wu, uv)$, etc.

La vérification est immédiate, mais la présence de ces points était prévisible : par exemple[6], si G_A est le milieu de AB et C' le symétrique de C par rapport à G_A, la conique passant par A, B, C, C' et D admet G_A comme centre.

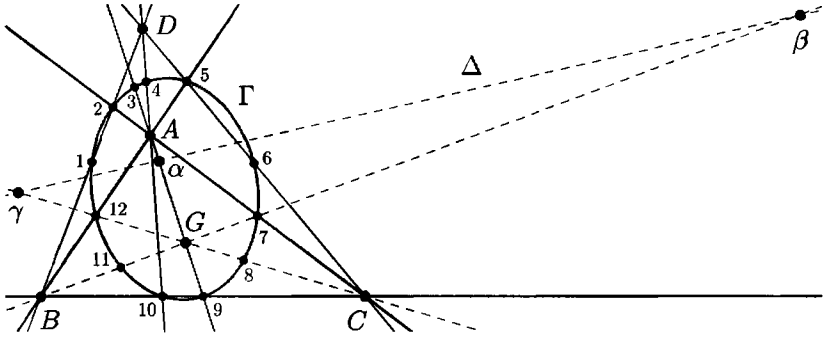
Dans le meilleur des cas, qui est aussi le cas général, nous avons construit ainsi neuf points distincts, mais il serait lassant de discuter les innombrables

[6] Voir aussi le **II-2.4**.

cas d'égalité possibles[7]. On appelle $\mathscr{L}$ la conique *des neuf points* du faisceau.

On l'appelle traditionnellement la conique des *neuf* points parce que ces neuf points sont faciles à construire à partir des quatre points de base. Il est pourtant possible de leur en adjoindre d'autres, au prix d'une construction un peu plus élaborée.

À la fin du **II-3.1**, nous avons remarqué que, à partir de deux points M et N, l'on pouvait construire six points sur une même conique. Si l'on choisit $M = G$, cette construction nous donne les points numérotés **7**, **9** et **12** dans la figure suivante (les milieux des côtés) ; si l'on choisit ensuite $N = D$, on construit alors les points numérotés **2**, **5** et **10**. Ce sont bien sûr déjà six points sur la conique des neuf points.



Ensuite, les milieux des segments AD, BD et CD nous ont fourni les points numérotés **1**, **4** et **6**, c'est-à-dire neuf points jusqu'à présent. Seulement, cette dernière fournée déséquilibre les rôles des points G et D : pourquoi G ne contribuerait-il pas à la construction de trois points supplémentaires ?

Les trois points **1**, **4** et **6** auraient aussi pu être obtenus comme il suit : la polaire triangulaire du point G, centre de gravité de ABC, par rapport au triangle ABC est la droite de l'infini, voir au **III-4.1**. La droite AD coupe cette polaire en le point à l'infini de la droite AD, noté A_∞ par exemple. Le conjugué harmonique de A_∞ par rapport à AD est alors justement le milieu du segment AD, et l'on aurait procédé de même avec les points B et C. Nous allons adapter ce principe pour rétablir l'équilibre dans les rôles de G et de D.

Appelons Δ la polaire triangulaire du point D par rapport au triangle ABC ; la médiane AG coupe Δ en un point α ; le conjugué harmonique de α par rapport à AG est alors encore un point de la conique des neuf

[7]Par exemple, si D_A se confond avec le milieu de BC, nous « perdons » un point, mais gagnons une propriété : la conique est tangente en ce point à BC.

points[8]. On construit de même le conjugué par rapport à BG du point β où la droite BG coupe Δ, et le conjugué par rapport à CG du point γ où la droite CG coupe Δ. Ces trois nouveaux points sont ceux numérotés **3**, **8** et **11**, et le compte y est.

Quel est le genre de cette conique? Pas de chance, elle n'est même pas circonscrite[9] ! Heureusement pour nous, elle passe par G_A, G_B et G_C, dont les coordonnées barycentriques sont simples (et indépendantes de $\mathscr{F}$). Prenons ces trois points comme nouveau triangle de référence. Les formules de changement de coordonnées barycentriques[10] s'écrivent

$$\begin{cases} X = Y' + Z' \\ Y = X' + Z' \\ Z = X' + Y', \end{cases}$$

de sorte que l'équation barycentrique de $\mathscr{L}$ relativement à ce nouveau triangle est $uX'(Y' + Z') + vY'(Z' + X') + wZ'(X' + Y') = 0$, c'est-à-dire encore $\underbrace{(v+w)}_{p'} pY'Z' + \underbrace{(w+u)}_{q'} Z'X' + \underbrace{(u+v)}_{r'} X'Y' = 0$.

Ainsi, $\mathscr{L}$ peut être dégénérée ; cela se produit si, et seulement si, $p'q'r' = 0$. Par exemple, $u + v = 0$ si, et seulement si, les coordonnées barycentriques de D sont de la forme $(1/u, -1/u, 1/w)$, c'est-à-dire si, et seulement si, le point D appartient à la droite parallèle à AB passant par C. Dans ce cas, la conique $\mathscr{L}$ dégénère en la réunion de la droite G_AG_B et de la droite passant par G_C et le milieu de CD.

Sinon, le genre de $\mathscr{L}$, voir la section **II-2.5**, dépend du signe de $S' = p'^2 + q'^2 + r'^2 - 2q'r' - 2r'p' - 2p'q'$ qui vaut ici $-4(vw + wu + uv)$.

1. De ce fait, $\mathscr{L}$ est une **parabole** lorsque $vw + wx + xy = 0$. Cela correspond au cas où le point D est à l'infini, car $1/u + 1/v + 1/w = 0 \iff vw + wu + uv = 0$, le point D' étant alors sur le cercle circonscrit à ABC. Les milieux de AD, BD et CD n'ont alors plus de signification, mais nous gagnons un procédé de construction de paraboles.

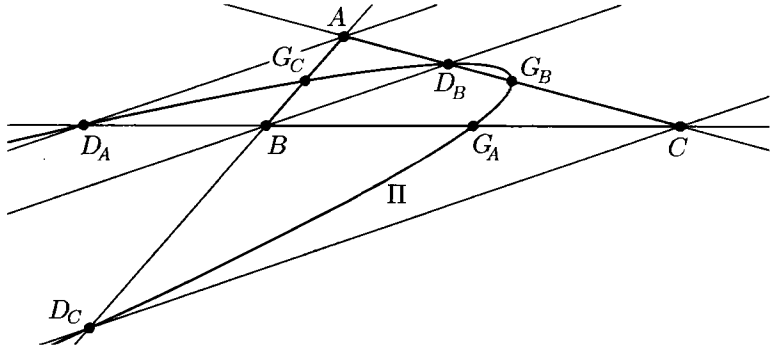
En effet, CABRI nous permet de tracer une conique passant par cinq points,

[8]Nous ne détaillons pas ce calcul, mais il est facile à mener grâce à un calcul barycentrique relatif au triangle de base ABC. Le point α a pour coordonnées barycentriques $(v + w, -u, -u)$ et son conjugué harmonique a pour coordonnées barycentriques $(2u + v + w, u, u)$.

[9]Elle passe déjà par douze points. Vous n'espériez tout de même pas qu'elle allait passer en plus par les sommets du triangle... D'ailleurs, le pourrait-elle seulement ? Elle coupe le côté BC en deux points, savoir D_A et le milieu de BC : si elle contenait un troisième point de cette droite, elle contiendrait BC entier et, donc, si elle passait par les trois sommets, elle contiendrait trois droites. Aucune conique n'y résisterait.

[10]Les anciennes en fonction des nouvelles, voir **I-8**.

et nous en avons même six, situés sur une même parabole !

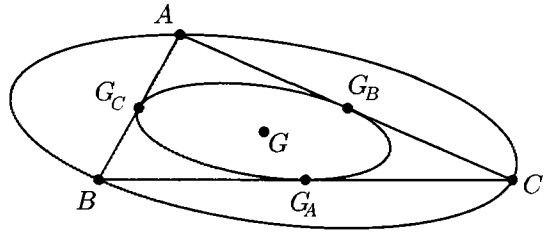


Même s'il en existe d'autres, cette construction n'est pas à dédaigner puisque l'on peut toujours placer cinq points approximativement pour que par eux passe une ellipse, ou une hyperbole, mais obtenir une parabole requiert un placement exact, ce qui est ici le cas.

2. Ensuite, $\mathscr{L}$ est une **ellipse** lorsque $vw + wu + uv > 0$. Cela correspond au cas où le point D' est intérieur au cercle circonscrit.

Si $u = v = w = 1$, $D = G$ et $\mathscr{L}$ a pour équation barycentrique $Y'Z' + Z'X' + X'Y' = 0$ dans le *nouveau* repère : c'est l'ellipse de STEINER circonscrite à $G_AG_BG_C$, c'est-à-dire une ellipse tangente en G_A, G_B et G_C aux côtés[11] du triangle ABC ; on l'appelle l'ellipse de STEINER *inscrite* dans le triangle ABC. C'est l'image de l'ellipse de STEINER circonscrite du même triangle par l'homothétie de centre G et de rapport $1/2$; c'est aussi l'ellipse d'aire maximale qui soit contenue dans l'intérieur du triangle ABC.

La figure qui suit les représente ensemble.



Supposons que le triangle ABC n'est pas rectangle. Si $D = H$, nous savons depuis le **III-8** que $\mathscr{L}$ est un cercle, le cercle d'EULER du triangle. Inversement, si $\mathscr{L}$ est un cercle, c'est le cercle circonscrit au triangle $G_AG_BG_C$

[11] En effet, la tangente à cette ellipse en G_A est la parallèle menée de ce point au côté opposé G_BG_C : c'est précisément la droite BC.

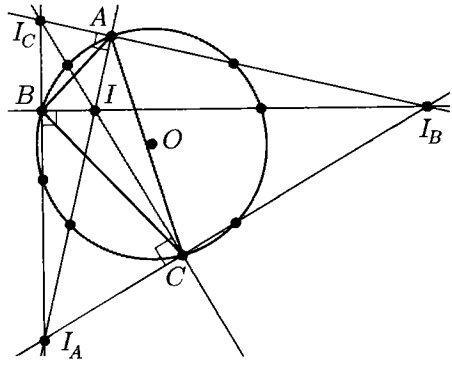
et il a pour équation barycentrique $a^2Y'Z' + b^2Z'X' + c^2X'Y' = 0$ relativement à ce triangle, car les longueurs des côtés sont maintenant $a/2$, $b/2$ et $c/2$. Alors, on a (à un coefficient multiplicatif non nul près) $v + w = a^2$, $w + u = b^2$ et $u + v = c^2$, d'où l'on tire $u = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = bc\cos\widehat{A}$, et le reste par permutation circulaire. Un triplet de coordonnées barycentriques de D est alors $(a/\cos\widehat{A}, b/\cos\widehat{B}, c/\cos\widehat{C})$. Autrement dit, on a $D = H$ et **toutes** les coniques du faisceau sont des hyperboles équilatères.

Remarque. Si D est l'orthocentre du triangle non rectangle ABC, alors chacun de ces quatre points est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres (faire un dessin !) : on dit alors que le quadrilatère $ABCD$ est *orthocentrique*.

À partir d'un triangle non rectangle ABC, le quadrilatère formé par le centre du cercle circonscrit et les milieux des trois côtés est orthocentrique (dessin !)

En voici un autre : les bissectrices d'un triangle ABC concourent en le centre I du cercle inscrit ; la bissectrice issue de A rencontre les bissectrices extérieures issues des deux autres points en le centre I_A d'un cercle exinscrit [12] et l'on construit de même les points I_B et I_C. Alors, le quadrilatère $I_AI_BI_CI$ est orthocentrique.

La figure ci-contre fait apparaître I comme orthocentre du triangle $I_AI_BI_C$, les pieds des hauteurs étant A, B et C : cela montre en particulier que le cercle d'EULER du triangle $I_AI_BI_C$ est le cercle circonscrit à ABC, et ce dernier passe donc aussi par les six milieux des segments formés à l'aide des sommets du quadrilatère $I_AI_BI_CI$ pris deux à deux [13].



Relativement au triangle ABC, les coordonnées barycentriques de ces six milieux ont des expressions assez simples : celles du milieu de I_AI sont par exemple $(-a^2, b(b+c), c(b+c))$.

[12] Les cercles exinscrits sont, comme le cercle inscrit, tangents aux trois côtés du triangle ABC, mais les points de contact ne sont pas tous sur les segments BC, CA et AB.

[13] Vu l'étude faite au **V-3.2**, on peut en déduire que l'isobarycentre du système $I_AI_BI_CI$ est le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

3. Enfin, $\mathscr{L}$ est une **hyperbole** lorsque $vw+wu+uv < 0$. Un cas particulier intéressant est celui où D appartient au cercle circonscrit à ABC. Montrons en effet que $\mathscr{L}$ est une hyperbole **équilatère**[14].

Si le triangle ABC n'est pas rectangle, le triangle $G_AG_BG_C$ qui lui est homothétique ne l'est pas non plus. La conique $\mathscr{L}$ passe par les trois sommets de ce dernier triangle, ainsi que par le point O qui est le centre d'une conique particulière du faisceau (le cercle contenant A, B, C, D !) Or, O est l'orthocentre du triangle $G_AG_BG_C$ (faire un dessin) et $\mathscr{L}$ est équilatère (conséquence du **III-8**).

Si le triangle ABC est rectangle en A, le triangle $G_AG_BG_C$ l'est aussi, cette fois au point G_A ; cela équivaut à l'égalité $a^2 = b^2 + c^2$. De l'équation barycentrique[15] de $\mathscr{L}$,

$$(v+w)Y'Z' + (w+u)Z'X' + (u+v)X'Y' = 0\,,$$

on tire l'équation barycentrique de la tangente à l'hyperbole $\mathscr{L}$ au point G_A : $(u+v)Y' + (u+w)Z' = 0$. Cette droite passe bien sûr par G_A ; pour que $\mathscr{L}$ soit une hyperbole équilatère, il faut et il suffit, vu **I-10**, qu'elle passe aussi par le pied de la hauteur issue de G_A, de coordonnées barycentriques $(0, b^2, c^2)$. Cela se produit si, et seulement si, $(u+v)b^2 + (u+w)c^2 = ua^2 + vb^2 + wc^2 = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, le point D de coordonnées barycentriques $(1/u, 1/v, 1/w)$ appartient à la conique d'équation barycentrique (relative à ABC) $a^2YZ + b^2ZX + c^2XY = 0$, qui est bien le cercle circonscrit à ce triangle.

Plutôt que de conclure dans ce dernier cas grâce à un calcul barycentrique (mais c'est le dessein secret de ce chapitre), nous aurions pu mettre en lumière une propriété générale des coniques. *Si $\mathscr{C}$ est une conique non dégénérée et M un point de celle-ci, l'hypoténuse de tout triangle rectangle en M inscrit dans $\mathscr{C}$ rencontre la normale en M à $\mathscr{C}$ en un point, éventuellement à l'infini, indépendant du choix du triangle (et appelé* point de FRÉGIER du point M*). En d'autres termes, les hypoténuses de deux triangles rectangles en M inscrits se coupent en un point de la normale en ce point.*

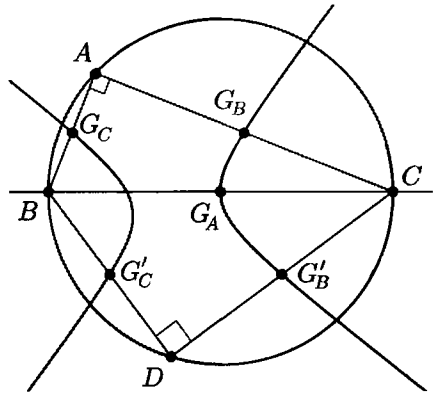
La preuve de ce résultat sera donnée à la fin de ce paragraphe, au **IV-1.4.**

Ici, si le triangle ABC est rectangle en A et que A, B, C, D soient cocycliques, nous appelons G_A, G_B, G_C, G'_B et G'_C les milieux respectifs des segments BC, CA, AB, CD et BD. Ces cinq points sont sur la conique $\mathscr{L}$ et nous avons deux triangles rectangles en G_A : $G_AG_BG_C$ et $G_AG'_BG'_C$

[14] À noter la « réciprocité » : si les quatre points de base sont sur un cercle, $\mathscr{L}$ est alors une hyperbole équilatère alors qu'elle est un cercle lorsque toutes les coniques du faisceau sont des hyperboles équilatères.

[15] Toutes les coordonnées barycentriques qui suivent font référence à $G_AG_BG_C$.

(voir la figure, où les angles droits ont été placés en A et D par souci de lisibilité). Les hypoténuses de ces deux triangles sont parallèles, car parallèles à BC ; elles se coupent à l'infini sur BC et la normale à $\mathscr{L}$ en G_A est donc BC. La tangente en ce point est donc bien la hauteur issue de G_A, et $\mathscr{L}$ est bien une hyperbole équilatère.



1.2. Les faisceaux de coniques tangentes

Nous reprenons maintenant l'étude des faisceaux linéaires $\mathscr{F}_\varphi$ définis par la famille d'équations barycentriques $pYZ+qZX+rXY=0$, où $up+vq+wr=0$ et, cette fois, $uvw=0$.

Si deux des trois scalaires u, v et w sont nuls, disons $v = w = 0$, mais $u \neq 0$, alors les coniques de $\mathscr{F}_\varphi$ ont des équations barycentriques de la forme $X(rY + qZ) = 0$ et sont toutes dégénérées. Nous exclurons ce cas inintéressant.

Supposons donc que $u = 0$, mais $vw \neq 0$. Il est immédiat que $vq + wr = 0$ équivaut à : (q, r) est proportionnel à $(w, -v)$. Si le facteur de proportionnalité est nul, on a $q = r = 0$ et forcément $p \neq 0$. Une conique du faisceau pour laquelle $q = r = 0$ a donc pour équation barycentrique $YZ = 0$ et c'est la réunion des droites AC et AB. Appelons-la $\mathscr{C}_0$. Les autres coniques du faisceau ont une équation barycentrique de la forme $pYZ + wZX - vXY = 0$, avec p réel [16].

Cette fois, nos coniques n'ont en commun que les points A, B et C. En effet, ces trois points conviennent et, réciproquement, tout point commun à toutes les coniques du faisceau doivent en particulier appartenir à $\mathscr{C}_0$ et donc à $AB \cup AC$. Dès lors, un point $M(x, y, 0)$ de AB commun à toutes les coniques doit vérifier $vxy = 0$ (avec $v \neq 0$) : c'est donc le point A ou le point B ; de même, sur AC, on ne trouve comme points communs que A ou C.

[16] Puisque les équations barycentriques d'une même conique ne diffèrent que d'un facteur multiplicatif non nul.

La conique $\mathscr{C}_0$ n'a pas de tangente en A ; en revanche, l'équation barycentrique de la tangente T en A à une autre conique de $\mathscr{F}_\varphi$ est $vY - wZ = 0$: elle ne dépend pas du choix de p et toutes nos coniques, mis à part $\mathscr{C}_0$, sont donc tangentes en A [17]. Cela justifie le nom de *faisceau de coniques tangentes* [18].

Dans le faisceau, nous connaissons déjà la conique dégénérée $\mathscr{C}_0$. Une autre conique du faisceau est dégénérée si, et seulement si, $pvw = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $p = 0$; il n'y a donc dans $\mathscr{F}_\varphi$ que deux coniques dégénérées, la seconde ayant pour équation barycentrique $X(vY - wZ) = 0$ (c'est la réunion de T et de la droite BC). Les faisceaux de coniques tangentes se distinguent par cette diminution du nombre des coniques dégénérées, et cela va avoir des conséquences ultérieurement.

Nous pouvons poursuivre notre étude parallèlement à celle des faisceaux à quatre points de base. En ce qui concerne les inverses isogonaux d'une conique d'un faisceau de coniques tangentes, il n'y en a pas de bien défini pour la conique $\mathscr{C}_0$, mais l'inverse isogonal de la conique d'équation barycentrique $pYZ + wZX - vXY = 0$ est la droite d'équation barycentrique $pb^2c^2X + wc^2a^2Y - va^2b^2Z = 0$. Cette droite passe par le point D' de coordonnées barycentriques $(0, b^2v, c^2w)$, qui est cette fois sur le côté BC.

Réciproquement, si une droite passe par D', mais est distincte de BC, son inverse isogonal est une des coniques du faisceau $\mathscr{F}_\varphi$ autres que $\mathscr{C}_0$. Nous pourrons donc considérer que la conique manquante $\mathscr{C}_0$ et la droite manquante BC se correspondent elles aussi par l'application **I**.

Nous avons écrit de façon imagée au **III-1** que l'inversion isotomique faisait « éclater » le point A en le côté BC. L'inversion isogonale a bien sûr les mêmes propriétés explosives ; ici, toutefois, elles sont « canalisées » par le contact des diverses coniques au point A. Si M décrit une des coniques non dégénérées du faisceau et tend vers A, il le fait de sorte que la droite AM tende vers la tangente T, ainsi l'inverse isogonal de M tend vers le point de $BC \cap \mathbf{I}(T)$, qui est justement D'.

[17] On peut en fait considérer que T coupe $\mathscr{C}_0$ en le point double A, puisqu'elle coupe en A chacune des droites AB et AC. Il est traditionnel de dire alors que T est *aussi* tangente à $\mathscr{C}_0$.

[18] Si nous ne nous restreignions pas aux faisceaux de coniques circonscrites, nous pourrions avoir aussi des faisceaux de coniques *bitangentes*, c'est-à-dire des ensembles de coniques ayant deux points communs $A \neq B$ en lesquels elles ont toutes les mêmes tangentes, à savoir des droites données T et T' respectivement, des faisceaux de coniques *osculatrices*, c'est-à-dire ayant un point commun A en lequel toutes ont le même cercle osculateur, ainsi qu'un second point commun B et enfin les faisceaux de coniques *surosculatrices*, c'est-à-dire ayant un point commun A en lequel toutes sont surosculatrices. En outre, ces points communs peuvent être réels ou non, à distance finie ou non et cela ouvre la voie à des disjonctions interminables de cas, surtout si l'on se limite à $\mathbb{R}$ en tant que corps de base (mais cette restriction peut être imposée par le contexte : si l'on s'intéresse aux constructions à la règle et au compas, se placer « dans $\mathbb{C}$ » n'est pas forcément raisonnable). Les faisceaux de cercles concentriques sont un exemple de faisceau de coniques bitangentes, en les points cycliques I et J.

Le point A est le centre de la conique dégénérée $\mathscr{C}_0$ du faisceau. Si T n'est pas parallèle à BC, la conique $\mathscr{C}_0'$ réunion de ces deux droites admet pour centre leur point de concours $T \cap BC$. Si elles sont parallèles, c'est-à-dire lorsque $v + w = 0$, tout point de la droite G_BG_C est centre de symétrie de $\mathscr{C}_0'$.

Comme pour le cas des faisceaux à quatre points de base, les centres des coniques non dégénérées sont sur la conique $\mathscr{L}$ d'équation barycentrique $vY(Y-Z-X)+wZ(Z-X-Y) = 0$, le seul changement étant dans l'annulation du coefficient u. Le passage au triangle de référence $G_AG_BG_C$ fournit la nouvelle équation barycentrique[19] $(v+w)Y'Z' + wZ'X' + vX'Y' = 0$. Comme $vw \neq 0$, il ne subsiste qu'une possibilité de dégénérescence pour $\mathscr{L}$.

- Si $v + w \neq 0$, $\mathscr{L}$ est non dégénérée, et son genre dépend du signe de $S' = (v + w)^2 + v^2 + w^2 - 2vw - 2w(v + w) - 2(v + w)v = -4vw$. On trouvera donc une ellipse ou une hyperbole, mais jamais une parabole.
- Si $v + w = 0$, $\mathscr{L}$ dégénère en la réunion de la droite G_BG_C et de la droite d'équation barycentrique $Z' - Y' = 0$, qui est la médiane AG_A. À vrai dire, la droite G_BG_C représente à elle seule le lieu des centres de la seule conique $\mathscr{C}_0'$ et les autres coniques du faisceau ont leur centre sur la médiane AG_A.

Approfondissons l'étude de $\mathscr{L}$ lorsque cette conique est non dégénérée, c'est-à-dire lorsque $v + w \neq 0$. Cette conique passe par A, G_A, G_B, G_C et par le point $T_A = T \cap BC$, de coordonnées barycentriques $(0, w, v)$ par rapport à ABC. La présence de ces *cinq* points s'explique comme dans le **IV-1.1**. En revanche, nous avons ici perdu *quatre* points : le quatrième point de base, le point D de la section précédente, s'étant « confondu » avec A, nous avons perdu *trois* milieux de segments, en plus d'un centre de conique dégénérée. Passons-les par profits et pertes, mais gagnons à la place d'autres renseignements précieux.

Tout se passe comme si le point D de la section précédente tendait vers A le long de la droite T (puisque toutes les coniques du faisceau sont astreintes à avoir cette tangente en A) : le milieu de BD tend vers G_C en suivant la droite T' déduite de T par l'homothétie de centre B et de rapport $1/2$. Il est donc *prévisible* que T' est la tangente en G_C à $\mathscr{L}$. Vérifions-le : la conique $\mathscr{L}$ a pour équation barycentrique (dans le nouveau triangle) $(v + w)Y'Z' + wZ'X' + vX'Y' = 0$ et la tangente en G_C a pour équation barycentrique $wX' + (v + w)Y' = 0$[20], alors que T a pour équation barycentrique $(v - w)X' - wY' + vZ' = 0$[21]. Ces deux droites sont bien

[19] Pour éviter les lourdeurs, nous parlerons d'anciennes et de nouvelles coordonnées, ou équations, barycentriques pour faire référence à l'*ancien* triangle ABC ou au *nouveau* triangle $G_AG_BG_C$.

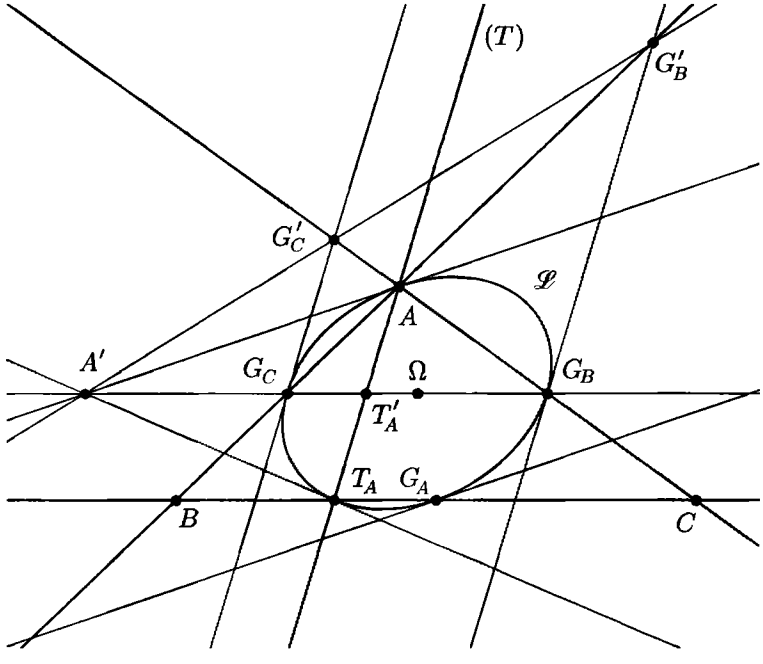
[20] Les nouvelles coordonnées barycentriques de G_C sont $(0, 0, 1)$.

[21] Formules de changement de triangle de référence !

parallèles puisque

$$\begin{vmatrix} w & v+w & 0 \\ v-w & -w & v \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Maintenant, nous remarquons que le quadrilatère $AG_BG_AG_C$ est un parallélogramme inscrit dans $\mathscr{L}$. Le centre Ω' de $\mathscr{L}$ est donc le milieu commun des segments AG_A et G_BG_C et, les points G_B et G_C étant symétriques par rapport à Ω', les tangentes en ces deux points sont parallèles : celle en G_C se déduit donc de T par l'homothétie de centre C et de rapport $1/2$.



La recherche de la tangente en A va nous récompenser de certains de nos efforts passés : en particulier, nous allons pouvoir interpréter *in fine* plusieurs résultats grâce à la notion de conjugaison harmonique (mais les énoncés les plus importants se passent de cette notion). L'application **1** du **II-2.6** nous en donne la construction qui suit : les tangentes à $\mathscr{L}$ en G_B et G_C (qui sont des parallèles à T) coupent respectivement AG_C et AG_B en des points G'_B et G'_C ; la droite joignant ces deux points coupe G_BG_C en un point A' tel que AA' est la tangente cherchée. Les résultats du **II-2.7** nous permettent d'aller plus loin encore : les points A et A' sont conjugués par rapport à la conique Γ réunion des tangentes en G_B et G_C, parallèles à T. La polaire de A' par rapport à Γ passe par A et est parallèle à T : c'est donc la droite T ! La droite T coupe G_BG_C en un point T'_A tel que la division

$G_BG_CA'T'_A$ est harmonique. Le point T'_A est donc aussi sur la polaire de A' par rapport à $\mathscr{L}$. Comme cette polaire passe par A (vu que AA' est tangente à cette conique), c'est encore la droite T. Comme elle recoupe $\mathscr{L}$ au point T_A, ce point est conjugué de A' par rapport à $\mathscr{L}$, et cela montre que la tangente à $\mathscr{L}$ en T_A est la droite $A'T_A$.

Enfin, la tangente à $\mathscr{L}$ en G_A est parallèle à celle au point A, puisque ces deux points sont symétriques par rapport au centre de la conique.

1.3. Coniques remarquables d'un faisceau

Cette brève section a pour dessein de récapituler quelques-uns des résultats des deux précédentes.

Dans le cadre projectif, il n'y a que deux sortes de coniques : les dégénérées et les non dégénérées. Une conique ne sera réellement « remarquable » que si elle est dégénérée, et nous savons déjà combien un faisceau en contient.

Dans le cadre affine, les coniques non dégénérées se classifient selon leur genre, et nous pouvons donc distinguer parmi elles les paraboles, coniques sans centre. Or, justement, tout se passe comme si une parabole avait son centre à l'infini et cela explique la disjonction de cas suivante :

1. Si un faisceau contient deux paraboles, le lieu $\mathscr{L}$ des centres des coniques du faisceau a deux points à l'infini. Ce lieu est donc une hyperbole. En outre, les asymptotes de $\mathscr{L}$ sont dirigées par les axes des deux paraboles du faisceau.
2. De même, si ce faisceau contient une seule parabole[22], le lieu est lui-même une parabole.
3. Enfin, c'est une ellipse dans le cas où le faisceau ne contient aucune parabole.

La preuve rigoureuse de ces assertions s'effectue comme dans le **III-2.2**. Nous ne la referons pas ici.

Dans le cadre euclidien, on peut encore distinguer les cercles, et les hyperboles équilatères ! Un faisceau à quatre points de base ne contient un cercle que si, et seulement si, les points de base sont cocycliques et, dans ce cas, il n'en contient qu'un seul[23]. Un faisceau de coniques tangentes ne contient un cercle que si, et seulement si, le cercle circonscrit au triangle ABC vérifie la condition de contact qui « remplace » le quatrième point de base. Là encore, il n'y a qu'un cercle dans le faisceau.

[22] Ce qui ne peut se produire que dans le cas d'un faisceau à quatre points de base, le quatrième étant à l'infini.

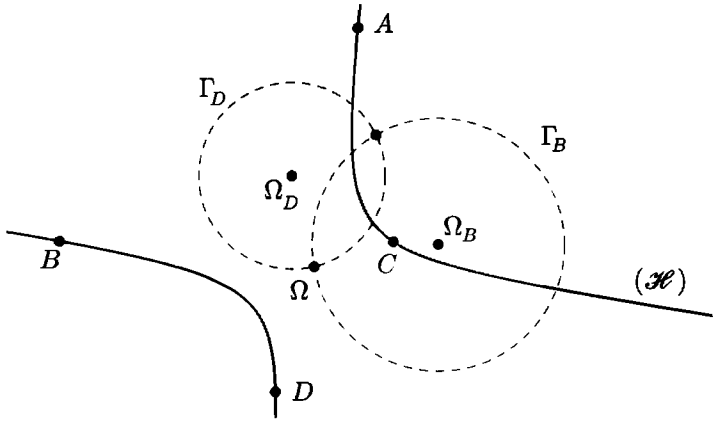
[23] Mais alors, pourquoi existe-t-il par ailleurs des faisceaux de cercles ? C'est parce que, dans ce cas, deux des points de base (les points cycliques) sont non réels, possibilité que nous n'avons pas envisagée ici : nos faisceaux contiennent au minimum trois points de base *réels*.

Quant aux hyperboles équilatères dans un faisceau, nous pouvons les dénombrer grâce aux généralités du début de la section **IV-1.1**. Les inverses isogonaux des coniques du faisceau à quatre points de base A, B, C et D sont les droites passant par l'inverse isogonal D' de D par rapport au triangle ABC. Si $D' = O$, toutes les coniques sont des hyperboles équilatères. Sinon, il en existe exactement une, qui est l'inverse isogonal de la droite $D'O$, c'est-à-dire encore la conique passant par les points A, B, C, D, H.

Lorsqu'il ne passe qu'une hyperbole équilatère par ces quatre points, il est facile d'en construire le centre Ω. En effet, il appartient aux cercles d'EULER de chacun des triangles BCD, ACD, ABD et ABC. C'est donc le point d'intersection de ces quatre cercles, et il est intéressant d'apprendre au passage qu'ils concourent.

Ces cercles ne peuvent avoir deux points d'intersection en commun, puisque n'importe quel point commun aux quatre cercles convient et que nous savons que l'hyperbole équilatère est unique.

Dans la figure qui suit, nous n'avons représenté que les cercles d'EULER Γ_B et Γ_D des triangles respectifs ACD et ABC. En effet, placer les quatre rendrait la figure quasiment illisible [24].



Et dans le cas d'un faisceau de coniques tangentes ? Nous savons que les inverses isogonaux des coniques de $\mathscr{F}_\varphi$ sont les droites passant par le point D' de coordonnées barycentriques $(0, b^2v, c^2w)$, qui est sur le côté BC. Si O n'est pas lui-même sur BC, c'est-à-dire si le triangle n'est pas rectangle en A, seule une hyperbole équilatère appartient au faisceau : c'est la co-

[24] Ces deux cercles ne concourent pas qu'en Ω ; il y a nécessairement un second point d'intersection pour deux cercles, sauf si, par extraordinaire, ils sont tangents. Ici, Γ_B et Γ_D concourent en Ω, mais aussi en le milieu de AC puisque ce point appartient aux cercles d'EULER de ACD et ABC et que ces deux triangles ont ce côté en commun.

nique dont l'inverse isogonal est la droite OD' ; cette conique est celle qui passe par A, B, C et H avec la condition de contact au point A.

Si O appartient à BC, c'est que le triangle ABC est rectangle en A. Il y a cette fois deux sous-cas :

- Si $D' \neq O$, la droite OD' est le côté BC, que nous avons *considéré* comme inverse isogonal de la conique dégénérée $\mathscr{C}_0$.
  Cela suffit-il pour que cette conique soit une hyperbole équilatère ? Comme cette conique est la réunion des droites orthogonales AB et AC, rien ne s'y oppose.
- Si $D' = O$, la conique $\mathscr{C}_0$ est toujours équilatère, ce pour la même raison, et les autres coniques du faisceau le sont aussi puisque leur inverse isogonal passe par le point O.
  En particulier, la droite OA est l'inverse isogonal de l'autre conique dégénérée du faisceau, réunion des droites T et BC : ces deux droites sont orthogonales et T est donc la hauteur du triangle issue de A. Cela confirme les résultats du **III-8**.

Note. Dans la théorie **affine euclidienne** des faisceaux linéaires de coniques, on définit un faisceau comme une famille de coniques ayant, relativement à un repère orthonormé, une équation de la forme

$$(\lambda a + \mu a')X^2 + 2(\lambda b + \mu b')XY + (\lambda c + \mu c')Y^2 + \\ + 2(\lambda d + \mu d')X + 2(\lambda e + \mu e')Y + \lambda f + \mu f' = 0\,,$$

où le couple (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, les autres coefficients étant fixés[25]. Une conique du faisceau est une hyperbole équilatère si, et seulement si, la somme des coefficients en X^2 et en Y^2 est nulle, c'est-à-dire si, et seulement si,

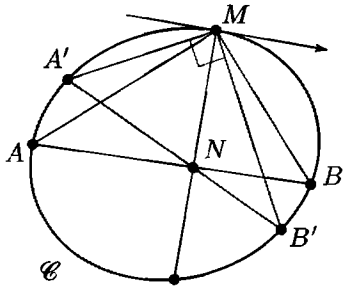
$$\lambda(a + c) + \mu(a' + c') = 0\,.$$

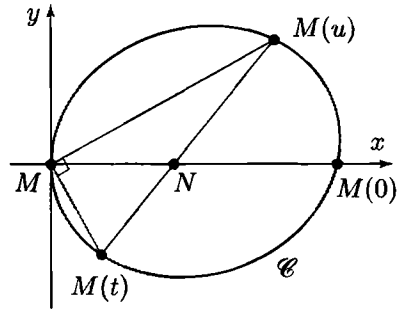
On voit bien que, si $a + c \neq 0$ ou $a' + c' \neq 0$, il y a exactement une hyperbole équilatère (si, par exemple, $a' + c' \neq 0$, la relation $\mu = -\dfrac{a+c}{a'+c'}\lambda$ définit une seule conique, la variabilité de λ revenant à en multiplier l'équation affine par un scalaire). En revanche, si $a + c = a' + c' = 0$, toutes les coniques sont des hyperboles équilatères.

Avec cette représentation, on voit aussi que la présence de cercles n'est pas générale dans un faisceau : il n'en existe un que si, et seulement si, il existe un couple (λ, μ) non nul tel que $\lambda a + \mu a' = \lambda c + \mu c'$ et $\lambda b + \mu b' = 0$. Cela équivaut à la nullité du déterminant $\begin{vmatrix} a - c & a' - c' \\ b & b' \end{vmatrix}$.

[25] On impose aussi que les coefficients du second degré a, a', b, b', c et c' ne sont pas tous nuls, faute de quoi les « coniques » seraient alors toutes des droites.

1.4. Le point de FRÉGIER





Nous nous proposons d'établir le résultat suivant, resté en suspens depuis la section **IV-1.1** : *si $\mathscr{C}$ est une conique non dégénérée et M un point de celle-ci, l'hypoténuse de tout triangle rectangle en M inscrit dans $\mathscr{C}$ rencontre la normale en M à $\mathscr{C}$ en un point N, éventuellement à l'infini, indépendant du choix du triangle, et que nous avons appelé le point de* FRÉGIER *de M.*

Nous connaissons à vrai dire déjà le cas où la conique est un cercle, l'hypoténuse d'un triangle rectangle en M inscrit est alors un diamètre. Elle rencontre la normale en M au centre du cercle. La figure de gauche montre le cas d'une conique « générale ».

La figure de droite illustre le choix d'un repère orthonormé facilitant les calculs : l'origine en est placée au point M, l'axe Mx est porté par la normale et l'axe My par la tangente. Une équation (cartésienne) de $\mathscr{C}$ est alors du type $\Phi(X,Y) = pX^2 + p'XY + p''Y^2 + qX + q'Y + r = 0$.

Puisque la conique $\mathscr{C}$ passe par l'origine, on a $r = 0$. Comme $\mathscr{C}$ est non dégénérée, l'équation cartésienne de la tangente à l'origine M est $X\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(0,0) + Y\dfrac{\partial\Phi}{\partial Y}(0,0) = 0$, c'est-à-dire $qX + q'Y = 0$. Puisque cette tangente est l'axe My, on a donc $q' = 0$ (et $q \neq 0$).

On justifie alors classiquement le paramétrage[26] suivant de la conique, que l'on obtient en posant $Y = tX$ dans l'équation $\Phi(X,Y) = 0$ ci-dessus :

$$\left(x(t) = -\frac{q}{p + p't + p''t^2},\ y(t) = -\frac{qt}{p + p't + p''t^2}\right),$$

dans lequel t décrit l'ensemble $\mathscr{D}$ égal à $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble des zéros du trinôme $D(t) = p + p't + p''t^2$.

Si t et u sont dans $\mathscr{D}$, le triangle $M(t)MM(u)$ est rectangle en M si, et seulement si, $1 + tu = 0$: calculer le produit scalaire $\left(\overrightarrow{MM(t)} \mid \overrightarrow{MM(u)}\right)$.

[26] À vrai dire, l'image de ce paramétrage est $\mathscr{C}$ privée de l'origine. On obtient le point M en « complétant » $\mathbb{R}$ par le symbole ∞.

Une équation cartésienne de la droite $M(t)M(u)$ est alors

$$\big(X - x(t)\big)\big(y(t) - y(u)\big) - \big(Y - y(t)\big)\big(x(t) - x(u)\big) = 0\,,$$

et cette droite coupe la normale Mx, d'équation $Y = 0$ en le point d'abscisse $\xi = X = x(t) - y(t)\dfrac{x(t) - x(u)}{y(t) - y(u)} = -\dfrac{x(t)y(u) - x(u)y(t)}{y(t) - y(u)}$ lorsque le dénominateur n'est pas nul dans cette expression.

Or, $y(t) - y(u) = -q(t-u)\dfrac{p - p''tu}{D(t)D(u)} = -q(t-u)\dfrac{p+p''}{D(t)D(u)}$ puisque $tu = -1$.

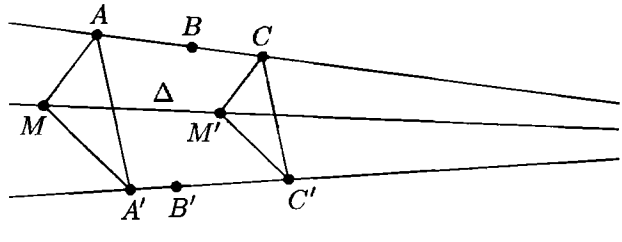
Si $p + p'' \neq 0$, $y(t) = y(u)$ ne se produit jamais avec t et u distincts de ∞ puisqu'alors $t - u = t + 1/t \neq 0$ et $q \neq 0$. On achève alors le calcul pour trouver $\xi = -\dfrac{q}{p+p''}$. Le point de coordonnées cartésiennes $(\xi, 0)$ est bien indépendant du couple (t, u).

Si $p + p'' = 0$, la conique est une hyperbole équilatère et on a toujours $y(t) = y(u)$ chaque fois que $tu = -1$. La droite $M(t)M(u)$ est alors dans ce cas toujours horizontale et coupe la normale au point à l'infini de celle-ci, lui aussi indépendant du couple (t, u).

Dans les deux cas, on a une dégénérescence intéressante : lorsque t tend vers 0, $u = -1/t$ tend vers ∞ ; la droite $MM(t)$ tend vers l'axe Mx puisque $M(0)$ est sur cet axe, tandis que le point $M(u)$ tend vers M et la droite $MM(u)$ vers la tangente en M ; l'angle droit se conserve bien, et l'axe Mx est un cas particulier limite de droite $M(t)M(u)$. C'est pourquoi nous avons cherché là le point de FRÉGIER.

Que la conique soit une hyperbole équilatère ou non, nous gagnons ici un autre moyen de construire la normale en un point M à une conique $\mathscr{C}$. On choisit deux points A et A', on construit les points B et B' où les perpendiculaires en M à $\mathscr{C}$ la recoupent. La normale en M est la droite Δ qui joint ce point au point d'intersection des droites AB et $A'B'$.

Il faut pour cela disposer d'une construction qui n'utilise pas le point d'intersection des deux droites (puisqu'il peut être à l'infini, ou, ce qui revient au même dans la pratique, hors de la feuille ou de l'écran). Le lecteur pourra méditer la construction qui suit.



Sur la droite AB, on choisit un point C différent de A (on aurait pu choisir B) par lequel on mène les parallèles à AM et AA', cette dernière recoupant $A'B'$ en un point C'. Par C' on mène la parallèle à $A'M$ qui recoupe la première parallèle construite en un point M'. La droite Δ cherchée est alors la droite MM'.

Quel est le lieu $\mathscr{F}$ des points de FRÉGIER des points d'une conique $\mathscr{C}$ non dégénérée donnée ? Si $\mathscr{C}$ est une conique à centre distincte d'une hyperbole équilatère, $\mathscr{F}$ est une conique homothétique et de même centre. Si c'est une parabole, $\mathscr{F}$ est une parabole se déduisant de $\mathscr{C}$ par une translation de vecteur parallèle à son axe.

Établissons-le pour le cas d'une conique $\mathscr{C}$ à centre par exemple. Rapportée à un repère orthonormé bien choisi, elle a une équation cartésienne de la forme $\lambda X^2 + \mu Y^2 = 1$, avec $\lambda\mu \neq 0$ et, puisque ce n'est pas une hyperbole équilatère, $\lambda + \mu \neq 0$.

Soit un point M de $\mathscr{C}$, de coordonnées (x, y). Choisissons pour A le point de coordonnées $(-x, y)$ et pour B le point de coordonnées $(x, -y)$, le triangle AMB étant alors bien rectangle en M. L'hypoténuse AB a pour équation $yX + xY = 0$ tandis que la normale en M à $\mathscr{C}$ a pour équation $\mu yX - \lambda xY = (\mu - \lambda)xy$. Si $xy \neq 0$, ces deux droites se coupent en le point de coordonnées $\left(\dfrac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}x, -\dfrac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}y\right)$. Si $\lambda > 0$, $x = 1/\sqrt{\lambda}$ et $y = 0$ par exemple, M est sur l'axe Ox et l'hypoténuse est confondue avec la normale (mauvais choix !) On choisit alors plutôt A et B de coordonnées respectives $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\dfrac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}, \dfrac{2\sqrt{\lambda}}{\mu+\lambda}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\dfrac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}, -\dfrac{2\sqrt{\lambda}}{\mu+\lambda}\right)$. La droite AB coupe alors la normale, qui est l'axe Ox, en le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\dfrac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}, 0\right)$, ce qui est le point attendu dans ce cas particulier [27].

Posons $\varrho = \dfrac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}$; l'application h définie analytiquement par $(X, Y) \longmapsto (\varrho X, -\varrho Y)$ n'est pas une homothétie, mais $\mathscr{F}$ se déduit bien de $\mathscr{C}$ par l'homothétie $h \circ s$, où s est la symétrie par rapport à Ox, définie analytiquement par $(X, Y) \longmapsto (X, -Y)$ (et elle laisse $\mathscr{C}$ stable).

1.5. Une belle figure

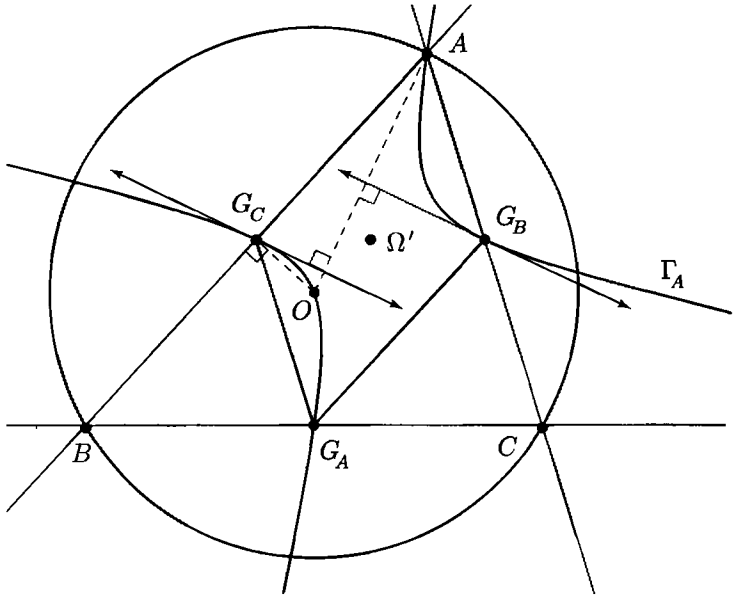
Pour clore ce paragraphe, examinons une situation riche en propriétés géométriques. Donnons-nous un triangle ABC ni isocèle ni rectangle, et désignons comme toujours par G_A, G_B et G_C les milieux des côtés BC, CA et AB, par O le centre du cercle circonscrit, que nous désignerons par $\mathscr{C}$, par H l'orthocentre et par Ω le centre du cercle d'EULER.

[27] Et les autres cas particuliers reçoivent un traitement analogue.

Les points A, O, G_A, G_B et G_C sont trois à trois non alignés : par ces cinq points passe donc une unique conique Γ_A, non dégénérée, qui est une hyperbole équilatère puisque O est l'orthocentre du triangle $G_AG_BG_C$ (une petite révision ne fait jamais de mal : dans le triangle ABC, la médiatrice OG_A est orthogonale au côté BC, mais le côté BC est aussi parallèle à la droite G_BG_C ; ainsi, OG_A est bien une hauteur du triangle $G_AG_BG_C$, et on raisonne de même pour les droites OG_B et OG_C). En outre, le quadrilatère $AG_CG_AG_B$ inscrit dans Γ_A est un parallélogramme ; du **II-2.4** découle que le centre de Γ_A est le milieu commun Ω' des segments AG_A et G_CG_B.

Intéressons-nous à quelques tangentes particulières. Le triangle OG_CA inscrit dans Γ_A est rectangle (propriété des médiatrices) : la tangente en G_C à Γ_A est donc la normale à OA menée de G_C ; c'est une conséquence des résultats du **IV-1.4.**

De même, la tangente en G_B à Γ_A est donc la normale à OA menée de G_B. Ces deux droites sont parallèles (rien que de très normal puisque les points G_C et G_B sont symétriques par rapport au centre de la conique).



La droite BC, qui contient déjà G_A, recoupe Γ_A en un point A' et la tangente en G_A est la normale à OA' menée de G_A (le triangle OG_AA' est rectangle et inscrit). De même, la normale à OA menée de A recoupe Γ_A en un point A'' et la tangente en A est la normale à OA'' menée de A. Comme ces deux tangentes sont parallèles, puisque A et G_A sont symétriques par

rapport au centre de la conique, les droites OA' et OA'' coïncident et les points O, A' et A'' sont alignés.

Par construction, on a $O \neq A''$ et on a aussi $O \neq A'$ puisque O n'est pas sur le côté BC. Comme il ne peut y avoir trois points alignés sur une conique non dégénérée, on en déduit que $A' = A''$ et on en déduit une autre construction du point A' : c'est le point d'intersection de BC avec la normale à OA menée de A (et c'est un sixième point sur Γ_A). D'ailleurs, le milieu de la corde AA' appartient à la droite G_BG_C (remarquer pour cela que l'homothétie de centre A et de rapport $1/2$ envoie la droite BC sur la droite G_BG_C).

Une autre définition de Γ_A nous aurait livré directement le point A' : considérons en effet le faisceau de coniques tangentes formé des coniques passant par A, B, C et tangentes en A au cercle circonscrit. Le lieu $\mathscr{L}$ des centres de ces coniques est la conique passant par les milieux des côtés, le point A (qui est entre autres le centre d'une des coniques dégénérées), le point O (puisque le cercle circonscrit est une conique particulière du faisceau) et par le centre de l'autre conique dégénérée qui est le point d'intersection de BC avec la tangente commune T aux coniques du faisceau en A, ce point étant précisément le point A' [28].

Comme nous l'avons vu dans le cas général des faisceaux de coniques tangentes, nous compensons la perte de certains des « neuf » points par une construction simple de certaines tangentes à $\mathscr{L}$. Le lecteur vérifiera que les tangentes en G_B, G_C et A' sont bien celles prévues par la théorie.

Voici une construction de la tangente en O, que nous justifierons ensuite : par O, nous menons la normale à OA, nous appelons O' le point où elle coupe $\Omega'G_C$ et O'' le symétrique de O par rapport à O'. La tangente en O est alors la normale en O à $O''A$. En outre, le point O'' est lui aussi sur Γ_A.

En effet, nous allons vérifier le lemme [29] qui suit.

Lemme. Soit Γ_A une conique non dégénérée, distincte d'une parabole. Soit en outre quatre points distincts sur Γ_A, M_1, M_2, M_1', M_2' tels que les droites M_1M_2 et $M_1'M_2'$ soient parallèles. Alors, les milieux des segments M_1M_2 et $M_1'M_2'$ sont alignés avec le centre Ω de Γ_A.

Prenons pour triangle de référence le triangle $M_1M_2M_1'$ par exemple. La conique Γ_A a une équation barycentrique de la forme

$$pYZ + qZX + rXY = 0\,,$$

avec $pqr \neq 0$.

[28] Le lecteur est invité à vérifier que les résultats trouvés dans ce cas particulier destiné à mettre les hyperboles équilatères en majesté confirment ceux décrits à propos du lieu des centres des coniques d'un faisceau de coniques tangentes.

[29] Ou bien examiner les résultats généraux du **II-2.9.1**.

Les coordonnées barycentriques de M_2' vérifient cette équation barycentrique ainsi que celle de la parallèle à M_1M_2 menée de M_2', savoir $X+Y=0$. On trouve alors que ce point a pour coordonnées barycentriques $(q-p, p-q, r)$ et le milieu de $M_1'M_2'$ $(q-p, p-q, 2r)$. L'alignement annoncé équivaut à la nullité du déterminant

$$\begin{vmatrix} q-p & p-q & 2r \\ 1 & 1 & 0 \\ p(p-q-r) & q(q-r-p) & r(r-p-q) \end{vmatrix},$$

que l'on vérifie sans difficulté. Cqfd !

Menons donc par O la normale Δ à OA, qui est parallèle à AA'. Puisque AA' coupe Γ_A en deux points, cette direction de droites n'est pas une direction asymptotique de Γ_A et Δ recoupe donc Γ_A en un second point O''. Comme nous connaissons déjà deux tangentes parallèles à AA', celles en G_B et en G_C, la droite Δ n'est pas tangente à Γ_A et donc $O'' \neq O$. On applique le lemme aux quatre points A, A', O et O'' : les milieux de AA' et OO'' sont alignés avec Ω' et donc le milieu de OO' appartient à G_BG_C, comme nous le savions déjà de Ω' et du milieu de AA'. Donc, O'' est le symétrique de O par rapport à O', point d'intersection de Δ avec G_BG_C. Enfin, comme le triangle inscrit AOO'' est rectangle en O, la tangente en O est bien orthogonale à AO''.

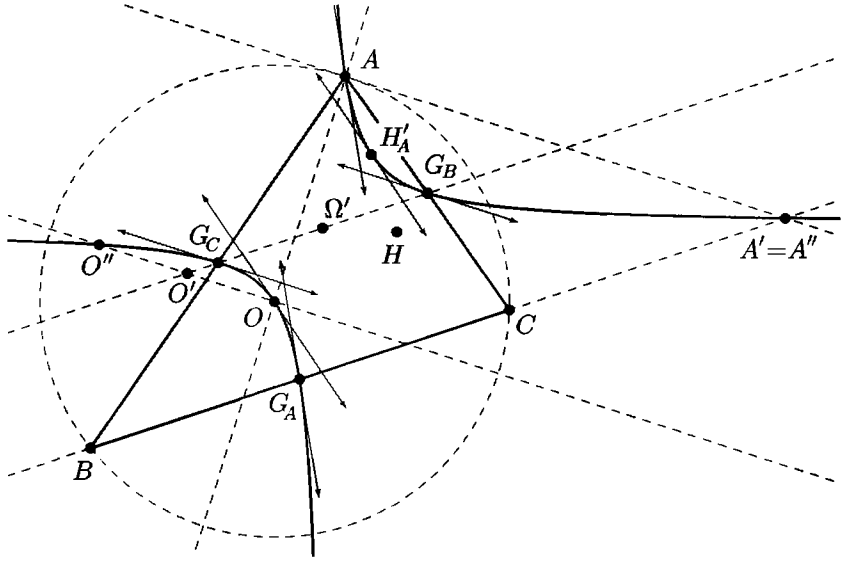
À chaque fois que nous avons trois points sur Γ_A, nous pourrions leur adjoindre l'orthocentre du triangle qu'ils forment, mais cela introduirait des points dont l'intérêt est discutable. Un triangle toutefois retient notre attention : il s'agit du triangle inscrit AG_BG_C, qui se déduit de ABC par l'homothétie de centre A et de rapport $1/2$. L'orthocentre H_A' de ce triangle est donc le milieu de AH et il appartient à Γ_A. D'ailleurs, H_A' est le symétrique de O par rapport à Ω' [30] et on en déduit en particulier que la tangente en H_A' est la parallèle en ce point à la tangente en O, c'est-à-dire encore la normale en H_A' à la droite AO''.

Nous connaissons désormais quatre points appartenant à la fois à Γ_A et au cercle d'EULER : le point H_A' et les milieux des côtés du triangle. Il n'y a donc pas d'autre point commun à ces deux coniques.

La figure qui suit montre, pour commencer, la configuration de tous les

[30] En effet, si on applique à la figure formée par A, O, Ω' et H_A', on s'aperçoit que cela revient à montrer que le symétrique de H par rapport à G_A est le point A_1 diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit. Voir pour cela **V-3**.

points ainsi découverts.



À noter que, dans cet exemple, nous n'avons pas usé de toutes les possibilités offertes en matière de construction de points d'intersection et de tangentes par les principes mis en avant dans les **II-2.6** et **II-3.1**. En effet, les points auxiliaires qu'elles mettent à contribution sont plus « anonymes » que ceux que nous avons utilisés ici et qui participent réellement à la figure. De même, nous avons privilégié les propriétés des hyperboles équilatères, afin d'en montrer l'étendue, plutôt que les résultats généraux concernant les tangentes à la conique $\mathscr{D}$. Toutefois, le lecteur ayant lu le **II-2.7** pourra comparer la construction de la tangente en A avec celle de la polaire du point A' par rapport au cercle circonscrit.

Avant d'envisager une figure d'ensemble (sans toutes les tangentes qui la rendraient illisible), nous allons construire aussi les asymptotes de Γ_A.

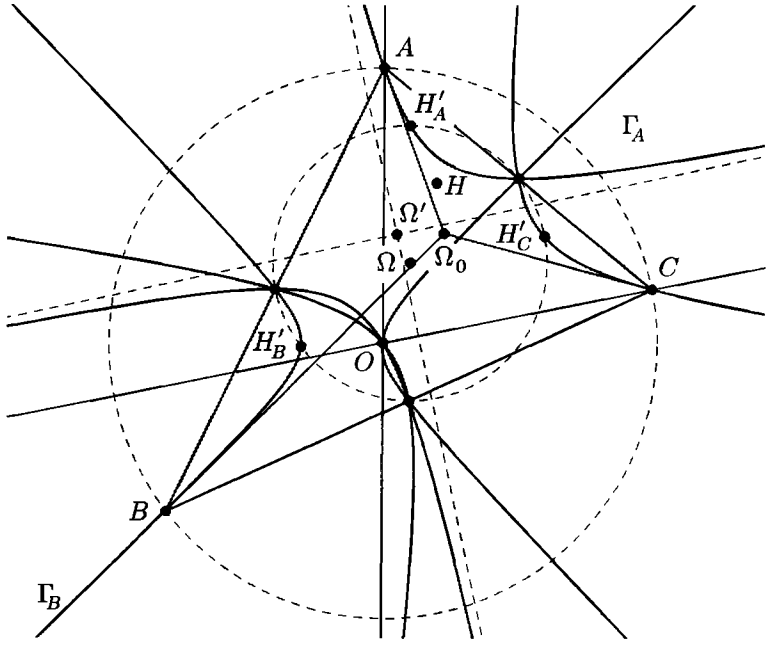
Pour cela, remarquons que, si M est un point de Γ_A et $\mathscr{D}$ est la parallèle menée du centre Ω' de la conique à la tangente en M, alors les asymptotes sont les bissectrices des droites $\Omega' M$ et $\mathscr{D}$. Cette propriété vaut pour toutes les hyperboles équilatères non dégénérées [31]. Si nous choisissons pour M le point O par exemple, cela nous fournit les asymptotes de Γ_A (en pointillés sur la figure qui suit).

[31] Rapportons une hyperbole équilatère non dégénérée $\mathscr{H}$ à ses axes : une équation cartésienne de $\mathscr{H}$ est alors de la forme $XY = \lambda$. Si $M(x, y)$ est sur cette courbe, la droite OM est dirigée par le vecteur (x, y) alors que la tangente en M l'est par le vecteur $(1, -\lambda/x^2)$, c'est-à-dire encore le vecteur $(x, -y)$ puisque $xy = \lambda$. Ces deux directions de droites sont bien symétriques par rapport aux asymptotes de $\mathscr{H}$.

Dans tout ce qui précède, nous avons fait jouer un rôle privilégié à A par rapport aux deux autres sommets du triangle ABC. Nous pouvons donc aussi définir l'hyperbole équilatère Γ_B qui passe par O, B et les milieux des côtés, et l'hyperbole équilatère Γ_C qui passe par O, C et les milieux des côtés. Avec Γ_A, elles appartiennent au faisceau ayant pour points de base O et les milieux des côtés. Toutes trois sont centrées en un point du cercle d'EULER du triangle $G_AG_BG_C$ (plus précisément leurs centres sont les milieux des côtés de ce triangle, comme nous l'avons vu lorsqu'il s'agissait de la seule Γ_A).

Les tangentes en A à Γ_A, en B à Γ_B et en C à Γ_C concourent! En effet, nous pouvons définir, outre A', le point B' où la tangente en B au cercle circonscrit coupe CA et le point C' où la tangente en C au cercle circonscrit coupe AB; au **II-2.6**, nous avons montré que A', B' et C' sont alignés sur une droite $\mathscr{D}_0$. Appelons Ω_0 le point dont cette droite est la polaire[32] par rapport au cercle circonscrit. Alors, ce point et A' sont conjugués par rapport au cercle circonscrit et Ω_0 est sur la tangente en A à Γ_A. Il appartient pour les mêmes raisons aux deux autres tangentes.

Voici une figure d'ensemble, sur laquelle nous avons représenté notamment le cercle circonscrit, le cercle d'EULER, Γ_A et ses asymptotes, Γ_B, Γ_C, le point Ω_0 et les segments qui le joignent à A, B et C.



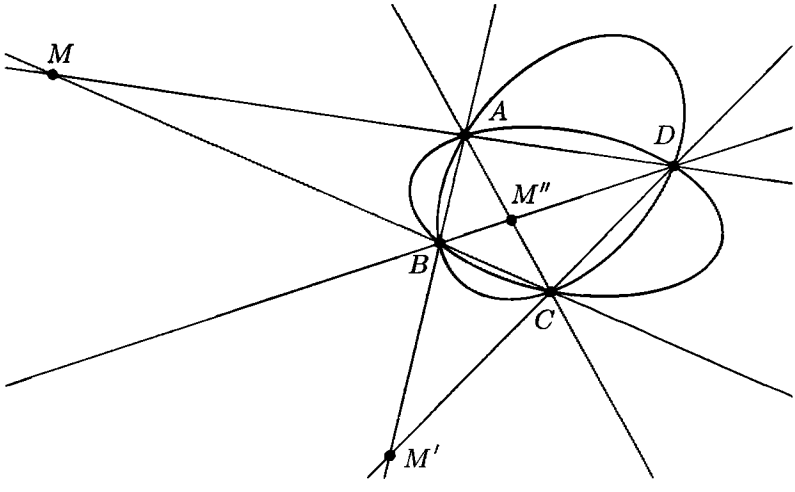
[32] Voir au **II-2.7**.

2. Applications des faisceaux linéaires

2.1. Discussion de l'existence d'un triangle autopolaire commun

Outre l'intérêt que revêt l'interprétation de cette propriété géométrique en termes de matrices et de formes quadratiques, cette section va préparer la démonstration algébrique du théorème de FEUERBACH, *que l'on trouvera dans la section suivante.*

Revenons sur les triangles autopolaires par rapport à des coniques non dégénérées. Supposons un faisceau de coniques $\mathscr{F}$ à quatre points de base A, B, C et D, où les coordonnées barycentriques de D sont toutes non nulles relativement au triangle de référence ABC. Sur la figure qui suit, nous avons représenté deux coniques non dégénérées du faisceau, ainsi que les trois centres M, M' et M'' des coniques dégénérées du faisceau.



Si l'on se reporte à la figure du **III-3.2**, on constate que le triangle $MM'M''$ est autopolaire par rapport à toutes les coniques non dégénérées du faisceau, puisque par exemple les points M' et M'' sont obtenus à partir de deux sécantes menées de M à ces coniques. Il est possible de démontrer que c'est le seul triangle à jouir de cette propriété vis-à-vis de toutes les coniques de $\mathscr{F}$.

Au contraire, nous allons montrer qu'il n'existe pas de triangle autopolaire commun aux coniques d'un faisceau de coniques tangentes, et ce pour une sombre affaire de valeur propre double. Nous allons en effet relier le problème à celui, bien connu, de la diagonalisabilité d'une matrice d'ordre 3.

Tout d'abord, établissons les formules de changement de triangle de référence pour l'équation barycentrique d'une conique : supposons une conique Γ d'équation barycentrique $(X,Y,Z)F\underbrace{{}^t(X,Y,Z)}_{\Xi} = 0$, où F est une matrice symétrique d'ordre 3.

Si l'on donne un nouveau triangle de référence $A'B'C'$ et que la matrice de passage P soit définie comme au **I-8**, on a la formule $\Xi = P\underbrace{{}^t(X', Y', Z')}_{\Xi'}$, de sorte que la nouvelle équation barycentrique de Γ est ${}^t\Xi' \underbrace{{}^tPFP}_{F'}\Xi' = 0$.

Ainsi, la « matrice » de la nouvelle équation barycentrique est $F' = {}^tPFP$.

Vu la section **III-3.2**, le triangle $A'B'C'$ est autopolaire par rapport à Γ si, et seulement si, F' est une matrice diagonale.

Soit donc $\mathscr{F}$ un faisceau de coniques passant toutes par trois points ABC non alignés, ayant ou non un quatrième point de base (la discussion viendra ultérieurement), mais ne comportant pas que des coniques dégénérées.

Choisissons ABC comme triangle de référence, et choisissons dans $\mathscr{F}$ deux coniques distinctes Γ_1, non dégénérée, et Γ_2, d'équations barycentriques respectives ${}^t\Xi Q_1\Xi = 0$ et ${}^t\Xi Q_2\Xi = 0$. Si un triangle $A'B'C'$ est autopolaire par rapport à toutes les coniques de $\mathscr{F}$, il l'est en particulier par rapport à Γ_1 et à Γ_2, : si P est la matrice de passage définie comme précédemment, alors $\Delta_1 = {}^tPQ_1P$ et $\Delta_2 = {}^tPQ_2P$ sont diagonales.

Réciproquement, si Δ_1 et Δ_2 sont diagonales, alors ${}^tPQP$ est diagonale pour toute matrice Q de la forme $\lambda_1Q_1 + \lambda_2Q_2$, car alors ${}^tPQP = \lambda_1\Delta_1 + \lambda_2\Delta_2$. Le triangle $A'B'C'$ est alors autopolaire par rapport à toute conique du faisceau $\mathscr{F}$[33].

Faisons le point : si $A'B'C'$ autopolaire commun existe, alors $\Delta_1 = {}^tPQ_1P$ et $\Delta_2 = {}^tPQ_2P$ sont diagonales. Comme Γ_1 est non dégénérée, Q_1 est inversible et donc Δ_1 l'est aussi ; cela implique que

$$\Delta_1^{-1}\Delta_2 = ({}^tPQ_1P)^{-1}\,{}^tPQ_2P = P^{-1}Q_1^{-1}\underbrace{{}^tP^{-1}\,{}^tP}_{=\mathrm{Id}_3}Q_2P = P^{-1}(Q_1^{-1}Q_2)P\,.$$

Nous y voilà enfin ! La matrice $R = Q_1^{-1}Q_2$ est nécessairement diagonalisable, puisque semblable à la matrice diagonale $\Delta_1^{-1}\Delta_2$[34].

---

[33] En effet, Q est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix}$, où (p, q, r) (non nul) décrit le noyau $\operatorname{Ker}\varphi_0$ d'une certaine forme linéaire non nulle, et ce noyau est un plan inclus dans $\mathbb{R}^3$. Comme Q_1 et Q_2 sont deux matrices non proportionnelles, les triplets correspondants (p_1, q_1, r_1) et (p_2, q_2, r_2) forment une base de $\operatorname{Ker}\varphi_0$ et le résultat s'ensuit.

[34] On notera bien que les formules de passage de $Q_1^{-1}Q_2$ à $\Delta_1^{-1}\Delta_2$ sont du type « similitude de matrices » alors que celles des Q_i aux Δ_i sont du type « congruence de matrices ». Cela tient au fait que $Q_1^{-1}Q_2$ est en réalité la matrice d'un certain endomorphisme : il existe en effet un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ tel que ${}^t\Xi Q_2\Xi = {}^t\big(u(\Xi)\big)Q_1\Xi$ pour tout vecteur-colonne Ξ. On a précisément $u(\Xi) = Q_1^{-1}Q_2\Xi$ pour tout Ξ, de sorte que $Q_1^{-1}Q_2$ est la matrice de cet endomorphisme relativement à la base canonique. Comme les matrices Q_1 et Q_2, cet endomorphisme n'est défini qu'à une constante multiplicative non nulle près.

Pour montrer qu'un faisceau de coniques tangentes ne possède pas de triangle autopolaire, il suffit donc de montrer que la condition précédente est en défaut (la construction du triangle autopolaire indiquée au début de cette section échoue dans le cas d'un faisceau de coniques tangentes puisqu'il n'existe que deux coniques non dégénérées dans le faisceau, mais cela ne suffit pas à prouver qu'il n'en existe pas un, qui pourrait être obtenu différemment).

Soit donc un faisceau $\mathscr{F}$ de coniques passant par les sommets ABC d'un triangle de référence, et ayant en A une tangente donnée T. Nous choisissons pour Γ_1 une conique non dégénérée quelconque de $\mathscr{F}$, associée[35] à la matrice $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix}$, avec $pqr \neq 0$, et pour Γ_2 la conique que nous avons appelée $\mathscr{C}_0$, associée à la matrice $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors, après quelques calculs,

$$Q_1^{-1}Q_2 = \frac{-1}{2pqr} \underbrace{\begin{pmatrix} -pq & p^2 & 0 \\ q^2 & -pq & 0 \\ -rq & -rp & 0 \end{pmatrix}}_{R'}.$$

La matrice R' admet la valeur propre double 0 et, d'ailleurs, la valeur propre simple $-2pq$. Toutefois, un rapide calcul montre que le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension 1 seulement : la matrice R' n'est ainsi pas diagonalisable, la matrice $Q_1^{-1}Q_2$ pas non plus, et le faisceau n'admet pas de triangle autopolaire commun.

Pour la suite de notre étude il n'est pas mauvais de remarquer qu'un faisceau de coniques bitangentes[36] possède au contraire une infinité de triangles autopolaires communs.

Dans la figure qui suit, nous désignons par A' le point d'intersection, éventuellement à l'infini, des droites T et T', et qui est le pôle de la droite AB par rapport à toute conique non dégénérée du faisceau. Ensuite, nous choisissons sur AB un point $B' \neq A \neq B$ et désignons par C' son conjugué harmonique par rapport à AB[37]. Alors, le triangle $A'B'C'$ est autopolaire par rapport à toutes les coniques non dégénérées de ce faisceau (et il y a une infinité de ces triangles). En effet, si l'on se réfère à ces coniques, le point A' est conjugué par rapport à B' et C' qui appartiennent à la polaire

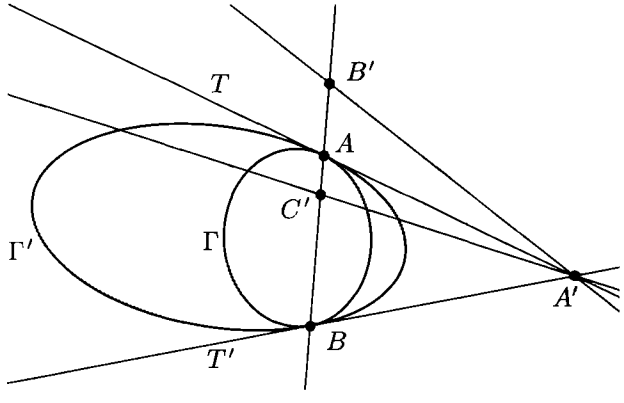
[35] Rappelons la convention faite au **II-2** nous permettant de multiplier ces matrices par le coefficient 2.

[36] Rappelons qu'on l'obtient en considérant ensemble des coniques ayant deux points communs $A \neq B$ donnés en lesquels elles ont toutes les mêmes tangentes, à savoir des droites données T et T' respectivement.

[37] Voir la fin de la section **II-2.7**.

de ce point, et B' et C' sont conjugués par construction. Il n'y a d'ailleurs pas d'autre triangle.

Les faisceaux de coniques osculatrices ou surosculatrices ne possèdent, eux, aucun triangle autopolaire commun.



2.2. Le cas des cercles et le théorème de FEUERBACH

Dans cette section, nous approfondissons le lien entre le contact de deux cercles et l'existence d'une valeur propre double d'une certaine matrice d'ordre 3, que nous fabriquerons comme précédemment. Nous nous limiterons au cas de deux cercles, car celui de deux coniques entraîne l'étude d'un grand nombre de sous-cas occasionnés par la discussion de la réalité de points d'intersection et leur éventuelle position à l'infini.

Au moins, la situation relative de deux cercles est sans surprise : ils peuvent être tangents, sécants (forcément en deux points) ou disjoints !

Commençons par une étude fondée sur les équations affines, en repère orthonormé tout de même. Soit donc deux cercles distincts Γ et Γ' ni vides ni réduits à un point [38] ; plaçons l'origine de notre repère orthonormé au centre de Γ et choisissons l'axe des abscisses de telle façon que Γ' soit centré sur celui-ci : le cercle Γ a une équation affine de la forme $X^2+Y^2-R^2=0$, où $R>0$, tandis que Γ' a une équation de la forme $(X-a)^2+Y^2-r^2=0$, où $r>0$ [39].

Écrivons ces équations sous la forme ${}^t\xi M\xi = 0$ et ${}^t\xi M'\xi = 0$, où l'on a

[38] Nous les appellerons de *vrais* cercles.

[39] Nous excluons bien sûr le cas où $a=0$ et $r=R$ pour lequel nos cercles seraient confondus.

posé $\xi = {}^t(X\,Y\,1)$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 \end{pmatrix}, \qquad M' \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & a^2 - r^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice M est inversible, et l'on a

$$\underbrace{M^{-1}M'}_{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ a/R^2 & 0 & (r^2 - a^2)/R^2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de N est

$$\chi(\lambda) = (1-\lambda)\big(\underbrace{a^2 + (1-\lambda)(r^2 - a^2 - R^2\lambda)}_{\psi(\lambda)}\big)/R^2.$$

Pour le vérifier, on commencera par développer par rapport à la deuxième colonne de $N - \lambda \mathrm{Id}_3$.

Si $a = 0$, c'est-à-dire si les cercles sont concentriques, le polynôme ψ s'annule en 1, et ce scalaire est donc valeur propre double de N. Cette matrice est d'ailleurs diagonalisable : ici, elle est même *déjà* diagonale.

Supposons désormais $a \neq 0$; on a donc $\psi(1) \neq 0$ et le discriminant de ψ est $\Delta = (R^2 + r^2 - a^2)^2 - 4R^2r^2$ qui se factorise sous la forme

$$\Delta = \big((R+r)^2 - a^2\big)\big((R-r)^2 - a^2\big).$$

Ce discriminant est nul si, et seulement si, on a $|R \pm r| = |a|$, c'est-à-dire si les cercles sont tangents ; il est strictement positif si, et seulement si, $|a| > R + r$ ou $|a| < |R - r|$, c'est-à-dire si les cercles sont disjoints et il est enfin strictement négatif si, et seulement si, $|R - r| < |a| < |R + r|$, c'est-à-dire si les cercles sont sécants.

On s'étonnera peut-être que Δ soit < 0 lorsque les cercles sont sécants, c'est-à-dire qu'à un polynôme sans zéros réels corresponde une paire de points réels. En fait, si l'on se place dans le plan projectif complexe $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, les cercles Γ et Γ', lorsqu'ils ne sont ni concentriques ni tangents, ont comme points d'intersection les points cycliques I et J, ainsi que deux autres points, distincts, A et B. Si les cercles sont sécants, A et B sont réels, et les cercles appartiennent au faisceau à points de base I, J, A et B. Une conique dégénérée du faisceau est la réunion de la droite AB, axe radical des deux cercles, et de la droite IJ, qui est la droite de l'infini : c'est une conique réelle. En revanche, les deux autres coniques dégénérées passant par ces deux points de base ne sont pas réelles, et cela explique que le polynôme χ ait ses deux autres zéros non réels. Si les cercles sont disjoints, on a toujours la réunion de l'axe radical et de la droite de l'infini, et deux autres coniques dégénérées qui, à défaut d'être réelles, ont tout de même une équation réelle (car les coordonnées de B sont les conjuguées de celles de A, et de même celles de J sont les conjuguées de celles de I), d'où les trois zéros réels de χ.

Le miracle est que les propriétés obtenues grâce à l'équation affine se généralisent au cas d'équations barycentriques pour nos cercles. Au moyen de ces équations, nous pourrons aussi en connaître la position relative. C'est important, car, étant donné un triangle d'un plan affine euclidien, les équations affines de cercles tels que le cercle d'EULER ou le cercle inscrit sont particulièrement compliquées dans le cas le plus général, alors que leurs équations barycentriques sont bien plus commodes, à défaut d'être simples.

Rappelons que, le triangle $A_0B_0C_0$ étant donné, l'on passe d'une équation affine $F(X,Y)=0$ d'un ensemble inclus dans un plan affine rapporté au repère $\big(A_0\,;\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0C_0}\big)$ à son équation barycentrique en écrivant [40]

$$F\Big(\frac{Y}{X+Y+Z}\,,\,\frac{Z}{X+Y+Z}\Big)=0\,.$$

Dans un tel repère affine, une conique a une équation (affine) de la forme ${}^t\xi M\xi=0$, où M est une matrice symétrique d'ordre 3 et où l'on a posé $\xi={}^t(X\,Y\,1)$: cela ne fait que généraliser le cas des cercles que nous avons étudiés jusqu'ici. L'équation barycentrique obtenue par ce procédé est donc ${}^t\xi' M\xi'=0$, où l'on a cette fois $\xi'={}^t(Y/(X+Y+Z),Z/(X+Y+Z))$. Cette équation nous inflige un dénominateur commun égal à $(X+Y+Z)^2$, mais on s'en débarrasse en la multipliant par ce terme, ce qui nous donne l'équation barycentrique réduite ${}^t\xi''M\xi''=0$, avec $\xi''={}^t(Y,Z,X+Y+Z)$.

Posons donc

$$P_0=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})\,.$$

Ainsi, nous avons

$$\xi''=P\,{}^t(X,Y,Z)\quad\text{et}\quad {}^t\xi''M\xi''=(X,Y,Z)\,\underbrace{{}^tP_0MP_0}_{N}\,{}^t(X,Y,Z)\,.$$

Tout va donc se passer comme dans la section **IV-2.1** : deux *vrais* cercles Γ et Γ' (distincts) ont des équations affines de la forme

$${}^t\xi M\xi=0\quad\text{et}\quad {}^t\xi M'\xi=0\,,$$

plus précisément respectivement

$$X^2+Y^2-R^2=0\quad\text{et}\quad (X-a)^2+Y^2-r^2=0\,,$$

lorsqu'on a fait le choix d'un repère orthonormé adapté, comme au début de cette section, les matrices M et M' étant celles que nous avons définies à ce moment-là. Le passage aux équations barycentriques remplace ces matrices respectivement par $N={}^tP_0MP_0$ et $N'={}^tP_0M'P_0$.

[40] Voir la section **I-4**.

Il serait trop contraignant de se limiter à un triangle $A_0B_0C_0$ tel que A_0 soit le centre de l'un des deux cercles : un changement ultérieur de triangle de référence remplace les matrices N et N' par $F = {}^tPNP$ et $F' = {}^tPN'P$ respectivement, où P est une matrice de passage comme on en a défini au **I-8**. On a donc après ce second changement de matrice $F = {}^t(P_0P)MP_0P$ et $F' = {}^t(P_0P)M'P_0P$, de sorte que F est encore inversible, comme le sont M, P et P_0 et que $F^{-1}F' = (P_0P)^{-1}(M^{-1}M')P_0P$: comme dans la section précédente, les matrices $F^{-1}F'$ et $M^{-1}M'$ sont encore semblables et possèdent donc les mêmes valeurs propres.

La discussion de la position relative des deux cercles se ramène donc à l'étude du spectre de $F^{-1}F'$ et ce **quel que soit le triangle de référence** !

Nous allons appliquer ce principe général à la démonstration du théorème de FEUERBACH : *si ABC est un triangle d'un plan euclidien, alors son cercle d'*EULER *est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits.*

Si le triangle est équilatéral, le cercle d'EULER coïncide avec le cercle inscrit, et étant tangent aux côtés du triangle, il est tangent aux trois autres cercles en les milieux des côtés. Excluons ce cas trop banal.

Le **I-7.5.2** nous a déjà livré l'équation barycentrique du cercle d'EULER. Là, nous avions trouvé

$$a^2(X-Y+Z)(X+Y-Z)+b^2(X+Y-Z)(-X+Y+Z)+ \\ +c^2(-X+Y+Z)(X-Y+Z)=0\,.$$

Matriciellement, écrivons-la sous la forme ${}^t\xi F'\xi$, avec

$$F' = \begin{pmatrix} a^2-b^2-c^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & b^2-c^2-a^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & c^2-a^2-b^2 \end{pmatrix}.$$

Pourquoi l'avoir appelée F' plutôt que F ? La raison de ce choix est que c'est la matrice de l'autre cercle qui intervient naturellement sous la forme d'une matrice inverse : nous avons préféré faire en sorte que la matrice à étudier soit $F^{-1}F'$, conformément à nos notations, et non ${F'}^{-1}F$.

L'équation barycentrique du cercle inscrit est calculée au **A-5.4** ; nous avons même l'embarras du choix et préférerons celle qui fait intervenir les longueurs des côtés plutôt que les angles. Ce sera donc ${}^t\xi F\xi = 0$, avec

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a+b-c & a+c-b \\ a+b-c & 0 & b+c-a \\ a+c-b & b+c-a & 0 \end{pmatrix}.$$

L'auteur de ces lignes avoue ne pas avoir été enthousiaste à l'idée de former le produit $F^{-1}F'$ et encore moins le polynôme caractéristique d'icelui, le fait que l'inverse de F était déjà calculé et la certitude d'obtenir une valeur

propre double étant de bien piètres consolations au regard de la complexité des calculs à attendre.

Bien sûr, il est loisible de soumettre ce produit matriciel à la puissance de feu de MATHEMATICA : ce logiciel de calcul formel nous livre pieds et poings liés la valeur propre double $\lambda_1 = 2abc$, ainsi qu'une valeur propre simple $\lambda_2 = 2(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$. Le résultat est donc établi, du moins grâce à l'informatique.

Heureusement, nous pouvons nous en sortir *aussi* par un calcul abordable : on a aussi

$$\det(F^{-1}F' - \lambda \mathrm{Id}_3) = \det(F' - \lambda F)/\det F,$$

et le numérateur du membre de droite de cette dernière expression se révèle, nous allons le voir, bien plus propice aux calculs.

En réalité, on va voir que ce n'est pas la découverte d'une valeur propre double qui est la clef de la méthode, mais, du moins, la méthode utilisée prouve que c'est bien l'intervention de l'objet $F^{-1}F'$ qui se révèle décisive.

Cette fois, nous n'échapperons pas au calcul de F puisque c'est F^{-1} que nous connaissons. En posant $p = b+c-a$, $q = c+a-b$ et $r = a+b-c$, on a tout de suite

$$F = \frac{-1}{2pqr}\begin{pmatrix} p^2 & -pq & -pr \\ -pq & q^2 & -qr \\ -pr & -qr & q^2 \end{pmatrix},$$

mais nous « omettrons » le coefficient multiplicatif $-1/2pqr$ inutile dans une équation barycentrique. Nous adoptons donc

$$F = \begin{pmatrix} p^2 & -pq & -pr \\ -pq & q^2 & -qr \\ -pr & -qr & q^2 \end{pmatrix}.$$

L'expression de la matrice $F' - \lambda F$ n'est pas très encourageante, mais tentons le tout pour le tout : elle semble en effet se simplifier notablement lorsque l'on pose $\lambda = -1$. On a ainsi

$$F + F' = \begin{pmatrix} -2vw & w^2 & v^2 \\ w^2 & -2wu & u^2 \\ v^2 & u^2 & -2uv \end{pmatrix},$$

où l'on a posé $u = b-c$, $v = c-a$ et $w = a-b$.

Wollust ward dem Wurm gegeben[41] ! On a

$$\det(F + F') = 2uvw(u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw)$$

[41] Phrase extraite de l'Hymne à la Joie. Elle traduit une exultation particulière.

et cette dernière parenthèse est nulle : puisque $w = -(u+v)$, on a aussi

$$u^3+v^3+w^3-3uvw = u^3+v^3-(u+v)^3+3uv(u+v) = 0\,.$$

Puisque nous en parlons, il est bon de remarquer la factorisation sur $\mathbb{C}$

$$u^3+v^3+w^3-3uvw = (u+v+w)(u+\mathrm{j}v+\mathrm{j}^2w)(u+\mathrm{j}^2v+\mathrm{j}w)\,.$$

Elle est liée au *déterminant circulant*[42]

$$\Delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ w & u & v \\ v & w & u \end{vmatrix}.$$

La règle de SARRUS montre que $\Delta = u^3+v^3+w^3-3uvw$; en outre, le déterminant est nul lorsque $u+v+w=0$: c'est ce que nous avons vérifié, mais on le voit mieux en faisant la somme des trois colonnes. Le déterminant est nul aussi lorsque $u+\mathrm{j}v+\mathrm{j}^2w=0$; il suffit, pour le voir, d'effectuer sur les colonnes l'opération élémentaire suivante, qui annule la première colonne :

$$C_1 \longleftarrow C_1 + \mathrm{j}\,C_2 + \mathrm{j}^2\,C_3\,.$$

Nous touchons au but ; le **II-2.13** a établi que, si dans l'équation barycentrique ${}^t\xi(F+F')\xi = 0$, qui est une combinaison linéaire non triviale de celles des deux cercles, nous pouvons factoriser $X+Y+Z$, alors nous aurons obtenu l'équation barycentrique de leur axe radical. Si cet axe radical est tangent au cercle inscrit, les deux cercles sont bien tangents, comme cela a été annoncé.

$${}^t\xi(F+F')\xi = 2(-vwX^2-wuY^2-uvZ^2+u^2YZ+v^2ZX+w^2XY) =$$
$$= -2(X+Y+Z)(vwX+wuY+uvZ)\,.$$

N'oublions pas que $w=-(u+v)$; ainsi par exemple les termes en XY sont bien les mêmes dans les deux expressions : $w^2 = -w(u+v)$. L'axe radical des cercles a pour équation barycentrique $vwX+wuY+uvZ=0$ et il ne reste plus qu'à vérifier qu'il est tangent au cercle inscrit[43]. Or, voir le **A-5.4**, il suffit de vérifier que cette droite satisfait l'équation tangentielle de ce cercle, c'est-à-dire que

$$(b+c-a)wu\cdot uv + (c+a-b)uv\cdot vw + (a+b-c)vw\cdot vu = 0\,.$$

C'est bien le cas, car, après avoir factorisé uvw et remplacé u, v et w par leurs valeurs, on a à vérifier que

$$(b+c-a)(b-c)+(c+a-b)(c-a)+(a+b-c)(a-b) = 0\,,$$

ce que montre un calcul immédiat.

---

[42] Voir aussi l'exercice de la page **247**.

[43] Ce qui dispense de montrer que cette droite n'est pas la droite de l'infini. Mais, de toute façon, c'est clair : $vw+wu+uv = w(u+v)+uv = uv-(u+v)^2 = -(u^2+uv+v^2) \neq 0$ puisqu'on n'a pas $u=v=0$.

Appelons Φ le point de FEUERBACH, point de contact de nos deux cercles. D'après le **A-5.4**, on en obtient les coordonnées barycentriques en formant $F^{-1} \times {}^t(vw, wu, uv)$. On vérifiera aisément que les coordonnées barycentriques de Φ sont

$$\big((b-c)^2(b+c-a), (c-a)^2(c+a-b), (a-b)^2(a+b-c)\big)\,.$$

Comme les trois sont $\geqslant 0$, le point Φ est toujours « intérieur » au triangle.

En outre, la tangente commune aux deux cercles est aussi tangente à l'ellipse de STEINER inscrite dans le triangle, car elle en vérifie aussi l'équation tangentielle[44] $VW+WU+UV=0$ (en effet, $wu\cdot uv+uv\cdot vw+vw\cdot wu = uvw(u+v+w)=0$). Comme on peut montrer de la même manière que les tangentes communes du cercle d'EULER avec les trois cercles exinscrits sont aussi tangentes à cette ellipse, nous avons donc recensé les quatre tangentes communes à ces deux coniques[45].

Récapitulons tout cela par un énoncé : *le cercle d'Euler d'un triangle ABC est tangent au cercle inscrit en un point F, et aux cercles inscrits respectivement dans l'angle A, dans l'angle B et dans l'angle C en des points F_A, F_B et F_C. Les tangentes au cercle d'Euler aux points F, F_A, F_B et F sont également tangentes à l'ellipse de Steiner du triangle.*

En prime, nous avons l'équation barycentrique de la tangente commune aux deux cercles : $vwX+wuY+uvZ=0$. Si le triangle est isocèle en A, mais non équilatéral, on a $b=c$ et donc $u=0$, ce qui simplifie l'équation en $X=0$, car on a dans le même temps $vw \neq 0$. Les deux cercles sont tangents au côté BC en son milieu. Cela se comprend géométriquement sans difficulté : dans ce dernier cas, la hauteur issue de A est aussi la médiane, et c'est un axe de symétrie de la figure. Comme les deux cercles passent par le milieu de BC qui est sur l'axe de symétrie, ils sont tangents en ce point.

Si le triangle n'est pas isocèle, on a $uvw \neq 0$ et une équation barycentrique de la tangente commune est

$$\frac{X}{b-c}+\frac{Y}{c-a}+\frac{Z}{a-b}=0\,.$$

Cette droite est donc la polaire triangulaire du point à l'infini de coordonnées barycentriques $(b-c, c-a, a-b)$. Le **A-5.4** nous a aussi appris que l'on obtient les équations tangentielles des cercles exinscrits en remplaçant l'un des trois scalaires a, b ou c par son opposé. Cela est sans effet sur l'équation barycentrique du cercle d'EULER, qui ne fait apparaître que a^2, b^2 et c^2 et la suite des calculs est exactement la même. Cela prouve sans coup férir le contact de ces trois cercles avec le cercle d'EULER.

---

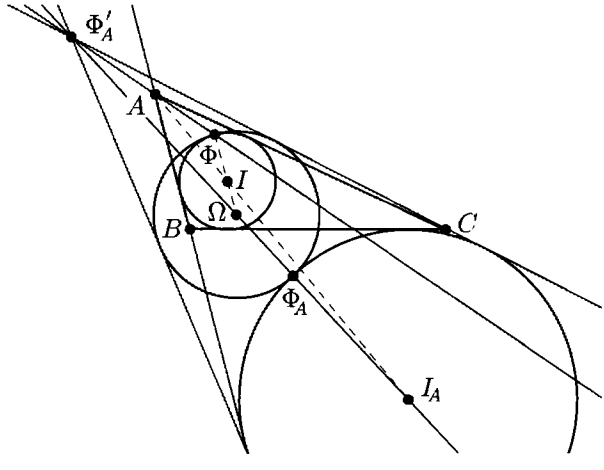
[44] Voir au **A-5.4**.

[45] Ce qui est le nombre maximal de tangentes communes à deux coniques distinctes. Il peut bien entendu y en avoir moins que quatre.

La configuration de tous ces objets est intéressante en soi. En toute généralité, lorsque deux cercles sont tangents en un point M, ce point est le centre d'une homothétie qui envoie le premier sur le second : ainsi, il existe une homothétie $\mathscr{H}_1$ de centre Φ qui envoie le cercle d'EULER sur le cercle inscrit. Il existe en outre une homothétie $\mathscr{H}_2$ de centre A qui envoie le cercle inscrit sur celui, noté $\mathscr{E}_A$, des cercles exinscrits qui est centré sur la bissectrice issue de A[46]. La composée $\mathscr{H} = \mathscr{H}_2 \circ \mathscr{H}_1$ envoie le cercle d'EULER sur $\mathscr{E}_A$. Comme composée de deux homothéties, $\mathscr{H}$ est une homothétie, ou une translation. Le second cas se produit si, et seulement si, le cercle d'EULER et $\mathscr{E}_A$ sont de même rayon. Sinon, $\mathscr{H}$ a un centre Φ'_A qui est à la fois sur la droite $A\Phi$ et sur la droite ΩI_A, cette dernière contenant aussi le point de contact Φ_A de $\mathscr{E}_A$ et du cercle d'EULER.

D'ailleurs, si on appelle r_A le rayon de $\mathscr{E}_A$, et sachant que le rayon du cercle d'EULER est la moitié de celle du cercle circonscrit, on a $\dfrac{\overline{\Phi'_A\Omega}}{\overline{\Phi'_A I_A}} = \pm\dfrac{R/2}{r_A}$ alors que $\dfrac{\overline{\Phi_A\Omega}}{\overline{\Phi_A I_A}} = \mp\dfrac{R/2}{r_A}$. Cela montre (**II-2.7**) que la division $\Omega I_A \Phi_A \Phi'_A$ est harmonique[47].

En effet, ces deux quotients de longueurs orientées sont opposés et sont égaux au signe près aux quotients des rayons des cercles (cela résulte des propriétés générales des homothéties, puisque Φ_A et Φ'_A sont les centres des deux homothéties qui envoient le cercle d'EULER sur le cercle $\mathscr{E}_A$).



[46]En effet, la droite Δ qui joint les centres de ces cercles est la bissectrice issue de A ; de plus, par A passent les droites AB et AC qui sont des tangentes communes aux deux cercles et qui sont symétriques par rapport à Δ. Il est alors immédiat que $\mathscr{H}_2$ est l'homothétie de centre A qui envoie I sur I_A.

[47]Cet énoncé se généralise : deux cercles de centres respectifs M et M' distincts et de rayons distincts ont deux centres d'homothétie Φ et Φ'. La division $MM'\Phi\Phi'$ est alors harmonique.

2.3. Faisceaux linéaires et conjugaison isogonale

2.3.1. Faisceaux et involutions quadratiques

De même que nous nous sommes demandé s'il existe des triangles autopolaires par rapport à toutes les coniques d'un faisceau linéaire, étudions les paires de points conjugués par rapport à toutes les coniques d'un tel faisceau.

Partons d'un triangle de référence ABC et donnons-nous un faisceau linéaire $\mathscr{F}$ de coniques circonscrites, à quatre points de base. Nous savons qu'il existe des scalaires tous non nuls u, v et w tels que les coniques de $\mathscr{F}$ aient toutes une équation barycentrique de la forme $pYZ+qZX+rXY=0$, avec (p,q,r) triplet non nul vérifiant $up+vq+wr=0$.

Soit maintenant un point M de coordonnées barycentriques (x,y,z), éventuellement à l'infini, dans le plan. Les polaires de M par rapport aux coniques de $\mathscr{F}$ concourent en le point M' de coordonnées barycentriques (x',y',z') si, et seulement si, ce point et M sont conjugués harmoniques par rapport à toutes les coniques de $\mathscr{F}$. Vu le **II-2.7**, cela se produit si, et seulement si, on a

$$\psi(p,q,r) \stackrel{\text{déf}}{=} p(yz'+zy')+q(zx'+xz')+r(xy'+yx')=0$$

chaque fois que $\varphi(p,q,r) \stackrel{\text{déf}}{=} up+vq+wr=0$.

Or, cela équivaut à dire que $\ker\psi \supset \ker\varphi$ et, puisque φ et ψ sont des *formes linéaires* sur $\mathbb{R}^3$, cela équivaut à dire aussi que ces deux formes sont proportionnelles.

Puisque $\varphi \neq 0$, cela équivaut à dire enfin qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(yz'+zy', zx'+xz', xy'+yx') = \lambda(u,v,w)$.

Nous discutons puis résolvons donc le système linéaire $\mathscr{S}$ suivant en le triplet (x',y',z')

$$\begin{cases} zy'+yz' &= \lambda u \\ zx'+xz' &= \lambda v \\ yx'+xy' &= \lambda w\,. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $2xyz$. Lorsque $xyz \neq 0$, il y a une solution unique $s(\lambda)$ pour tout λ :

$$s(\lambda) = \left(\frac{\lambda x(-ux+vy+wz)}{2xyz}, \frac{\lambda y(ux-vy+wz)}{2xyz}, \frac{\lambda z(ux+vy-wz)}{2xyz}\right).$$

Ce résultat brut demande à être amélioré un peu. Remarquons déjà que, dans le triplet *supra*, les trois expressions entre parenthèses ne s'annulent

jamais toutes en même temps. En effet, le système linéaire en (x, y, z)

$$\begin{cases} -ux + vy + wz &= 0 \\ ux - vy + wz &= 0 \\ ux + vy - wz &= 0 \end{cases}$$

a pour déterminant $4uvw \neq 0$. De cela suit que, si $xyz \neq 0$, le triplet $s(\lambda)$ trouvé *supra* est non nul dès que $\lambda \neq 0$; en outre, tous les triplets obtenus ainsi sont proportionnels et cela prouve que nous pouvons choisir comme valeur de λ le dénominateur $2xyz$. Ainsi, l'expression des coordonnées barycentriques de M' se simplifient et nous pouvons énoncer : le point M' de coordonnées barycentriques

$$\big(x(-ux + vy + wz), y(ux - vy + wz), z(ux + vy - wz)\big)\,,$$

et celui-là seulement, est conjugué harmonique de M par rapport à toutes les coniques de $\mathscr{F}$.

Bien sûr, ce point M' peut très bien se trouver à l'infini : cela se produit si, et seulement si, la somme des composantes du triplet précédent est nulle, c'est-à-dire si, et seulement si, le point M appartient à la conique $\mathscr{L}$ d'équation barycentrique

$$-uX^2 - vY^2 - wZ^2 + (u + v)XY + (v + w)YZ + (w + u)ZX = 0\,.$$

Nous reconnaissons là la conique des neuf points du faisceau $\mathscr{F}$. Autrement dit, si M appartient à cette conique, mais non pas à une droite portant un côté du triangle, le seul point M' existant est rejeté à l'infini. Cette conique coupe les trois côtés du triangle en six points en tout (voire moins s'il y a égalité entre certains d'entre eux) et le cas de ces points sera étudié dans ce qui suit.

Reste à étudier le cas où $xyz = 0$. Supposons par exemple que $z = 0$, c'est-à-dire que M est sur la droite AB, et récrivons en conséquence le système $\mathscr{S}$:

$$\begin{cases} yz' &= \lambda u \\ xz' &= \lambda v \\ yx' + xy' &= \lambda w\,. \end{cases}$$

Ayant un déterminant nul, ce système n'est pas de CRAMER ; il peut ne pas avoir de solution, ou en avoir une infinité.

Une discussion simple montre la présence de deux sous-cas :

1. Si $xy \neq 0$, c'est-à-dire que M n'est pas un sommet du triangle, le système est de rang 2. Comme on a nécessairement $z' = \dfrac{\lambda u}{y} = \dfrac{\lambda v}{x}$, une condition nécessaire d'existence de solutions est que $\lambda(ux - vy) = 0$. Si $ux \neq vy$, il est nécessaire que $\lambda = 0$. Le système devient alors homogène et admet au moins une solution. Cette fois, on vérifie tout de suite

que l'ensemble des points M' est le singleton $\{(x, -y, 0)\}$. Ce point n'est autre que le conjugué harmonique de M par rapport à AB, voir **II-2.7**. Ce point est conjugué avec M non seulement par rapport aux coniques du faisceau, mais même par rapport à toute conique passant par A et B. Rappelons enfin que ce conjugué est à l'infini si, et seulement si, $x = y$, ce qui ne se produit que lorsque M est le milieu du segment AB. Si $ux = vy$, M est le point de coordonnées barycentriques $(v, u, 0)$. Ce point est d'ailleurs le centre de l'une des coniques dégénérées du faisceau, voir **IV-1.1**. Dans ce cas, on vérifie tout de suite que l'ensemble des points M' est la **droite** d'équation barycentrique $uX+vY-wZ = 0$, c'est-à-dire la droite joignant les centres des deux autres coniques dégénérées. Cette droite passe par le point de coordonnées barycentriques $(v, -u, 0)$ qui est, comme dans le cas précédent, conjugué avec M par rapport à toute conique passant par A et B.

2. Si on a par exemple $y = z = 0$, c'est-à-dire si M est le point A, on vérifie tout de suite que $\mathscr{S}$ n'admet des solutions que si, et seulement si, $\lambda = 0$ et que, dans ce cas, le seul point M' est le point A lui-même. Le point A est conjugué avec lui-même par rapport, cette fois, à toute conique passant par A.

Récapitulons : *à l'exception des centres (que nous avons appelés D_A, D_B et D_C) des trois coniques dégénérées, tout point M du plan est conjugué par rapport à toutes les coniques de $\mathscr{F}$ avec exactement* un *point M'. Les polaires de M par rapport aux coniques dégénérées de $\mathscr{F}$ passent par M' et par les centres respectifs de ces coniques : ce sont donc les droites D_AM', D_BM' et D_CM' et elles concourent en M' (si M' est à l'infini, c'est que ces droites sont parallèles). Au contraire, si par exemple $M = D_A$, nous avons vu au* **II-2.7** *que tout point du plan est conjugué avec M par rapport à celle des coniques dégénérées dont le centre est précisément D_A. Les polaires de M par rapport aux deux autres coniques dégénérées sont alors confondues et cela explique que dans ce cas, et ce cas seulement, nous avons trouvé une infinité de points M'.*

Enfin, la formule donnant les coordonnées barycentriques de M' :

$$x' = x(-ux + vy + wz), y' = y(ux - vy + wz), z' = z(ux + vy - wz)\,,$$

qui est *a priori* valable dans le cas où $xyz \neq 0$ reste vraie dans tous les cas où M' est unique. Par exemple, si $z = 0$ et $M \neq D_C$, cette formule donne pour coordonnées barycentriques le triplet $(x(-ux+vy), y(ux-vy), 0)$ qui est bien proportionnel à $(x, -y, 0)$ puisque $-ux + vy \neq 0$.

L'application φ qui à $M \notin \{D_A, D_B, D_C\}$ associe le point M' s'appelle l'*involution quadratique* associée au faisceau $\mathscr{F}$.

L'appellation *involution* est un peu usurpée ou, si l'on préfère, un peu vague. En effet, si l'on veut une partie du plan projectif qui soit laissée stable

par φ, retirer les trois points D_A, D_B et D_C ne suffit pas ; en revanche, le plan projectif privé de la réunion des droites joignant ces trois points deux à deux est stable par φ, et φ induit une involution sur cette partie. Elle est qualifiée de *quadratique* puisque la formule ci-dessus donne pour x', y' et z' des expressions polynomiales du second degré.

La qualité essentielle de la configuration décrite dans cette section est le fait, pour les coniques considérées, d'appartenir à un même faisceau linéaire. En revanche, si l'on considère trois coniques quelconques $\mathscr{C}_i$, où $i \in \{1,2,3\}$, elles n'ont aucune raison d'avoir quatre points communs, fût-ce dans la complétion projective complexe de notre plan affine.

Dès lors, à un point M du plan, on n'a pas non plus de raison particulière de pouvoir encore associer un point M' qui lui soit conjugué par rapport à ces trois coniques.

Pus précisément, si l'on a pour chaque $\mathscr{C}_i$ une équation barycentrique (par rapport à un triangle de référence) de la forme $(X,Y,Z)F_i\,{}^t(X,Y,Z) = 0$, où F_i est une matrice symétrique d'ordre 3 et si M a pour coordonnées barycentriques (x,y,z), l'existence de M' équivaut à la nullité du déterminant

$$\Delta \overset{\text{déf}}{=} \det\bigl(F_1\,{}^t(x,y,z)\,F_2\,{}^t(x,y,z), F_3\,{}^t(x,y,z)\bigr)\,.$$

Ce déterminant est analogue à celui rencontré au **II-4.2.1**, à ceci près qu'il ne se factorise pas en général. En d'autres termes, l'équation $\Delta = 0$ est *en général* celle d'une cubique non décomposée, que l'on appelle la *jacobienne* de la famille des coniques $\mathscr{C}_i$.

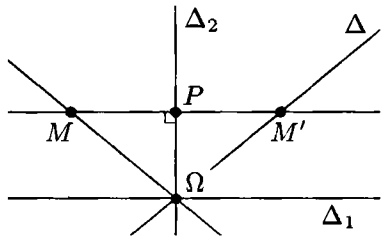
Dans la section suivante, nous considérerons à nouveau l'involution qui vient d'être décrite ici : nous allons montrer que l'inversion isogonale par rapport à une triangle est un cas particulier d'une telle involution. Il en va de même de l'inversion isotomique et nous laissons le lecteur s'inspirer de la construction qui suit pour le démontrer.

2.3.2. Application à l'inversion isogonale

Dans cette section, nous appliquons les résultats de la section précédente à la conjugaison par rapport aux coniques d'un faisceau linéaire d'hyperboles équilatères : à partir d'un point M donné, le point M' construit comme dans la section précédente est alors le conjugué isogonal de M par rapport aux triangle formé par les centres des coniques dégénérées de ce faisceau.

Dans un plan affine euclidien, nous envisageons pour commencer un cas particulier de conjugaison harmonique par rapport à une conique Γ dégénérée : celui où la conique est réunion de deux droites orthogonales Δ_1 et Δ_2, sécantes en un point Ω. Dans ces conditions, si un point M est distinct de Ω, la droite ΩM a une même symétrique orthogonale Δ par rapport à Δ_1 et à Δ_2, et Δ est précisément la polaire de M par rapport à Γ.

En effet, suivons les généralités développées à la fin du **II-2.7** : si, par exemple, $M \notin \Delta_1$, la parallèle à Δ_1 menée de M coupe Δ_2 en un point P et Δ_1 en un point Q à l'infini. Désignons par M' le symétrique de M par rapport à P ; alors P est le milieu de MM' et la division $PQMM'$ est *harmonique*. Cela établit que M' appartient à la polaire de M par rapport à Γ et que cette polaire est bien $\Omega M'$.



Considérons maintenant un triangle ABC et construisons les points de concours des bissectrices I, I_A, I_B et I_C comme au **IV-1**. Nous avons là trois coniques réunions de deux droites orthogonales : Γ_A, réunion des droites I_AI et I_BI_C, puis Γ_B, réunion des droites I_BI et I_CI_A et enfin Γ_C, réunion des droites I_CI et I_AI_B. Ces trois coniques dégénérées appartiennent au faisceau $\mathscr{F}$ des coniques passant par I, I_A, I_B et I_C (c'est un faisceau à quatre points de base). Or, nous venons de montrer que les polaires de « presque tout » point M par rapport à Γ_A, Γ_B et Γ_C concourent. En outre, nous allons faire voir que le point de concours est le conjugué isogonal de M par rapport au triangle ABC, ce qui nous permet d'obtenir une nouvelle interprétation de ce conjugué.

Prenons comme triangle de référence $I_AI_BI_C$. L'orthocentre de ce triangle est d'ailleurs le point I (puisque, entre autres, les droites I_AI et I_BI_C sont orthogonales, étant respectivement les bissectrices intérieure et extérieure issues de A dans le triangle ABC ; en conséquence, les points A, B et C sont les pieds des hauteurs du triangle $I_AI_BI_C$). Il existe donc trois scalaires u, v, w, tous non nuls, tels que les coniques de $\mathscr{F}$ aient comme équation barycentrique par rapport à $I_AI_BI_C$ $pYZ + qZX + rXY = 0$, avec $up + vq + wr = 0$, voir le **IV-1**.

Comme les centres des coniques dégénérées du faisceau sont précisément les points A, B et C, il découle du **IV-2.3.1** que, pour tout point M distinct de ces trois points, il existe un (unique) point M' conjugué de M en particulier par rapport aux trois coniques dégénérées. Comme les droites AM et AM' sont symétriques par rapport à la bissectrice intérieure issue de A du triangle ABC, il est immédiat que l'on a $\widehat{BAM} = \widehat{M'AC}$ et, de même, $\widehat{CBM} = \widehat{M'BA}$ et $\widehat{ACM} = \widehat{M'CB}$. On en conclut que M' est effectivement l'inverse isogonal de M par rapport à ABC.

En outre, le point M' est à l'infini si, et seulement si, le point M est sur le cercle circonscrit à ABC. En effet, il résulte encore une fois du **IV-2.3.1** que le point M' est à l'infini si, et seulement si, le point M est sur la conique des neuf points du faisceau $\mathscr{F}$. Cette conique passe par les centres

des coniques dégénérées du faisceau : ce sont les points A, B et C, c'est-à-dire les pieds des hauteurs du triangle $I_AI_BI_C$, et elle passe par les milieux des segments joignant deux à deux les points I, I_A, I_B et I_C. On reconnaît la fiche signalétique du **cercle** des neuf points du triangle $I_AI_BI_C$. Comme il passe par A, B et C, c'est bien le cercle circonscrit à ABC.

L'équation barycentrique de ce cercle circonscrit est

$$uX^2 + vY^2 + wZ^2 - (u+v)XY - (v+w)YZ - (w+u)ZX = 0\,.$$

Le lecteur pourra vérifier qu'il s'agit bien de l'équation barycentrique habituelle, mais transformée par les formules de changement de triangle de référence, voir au **I-8** [48].

3. Points cycliques et foyers d'une conique inscrite

3.1. Une brève présentation des points cycliques

Identifions un plan euclidien P, rapporté à un repère orthonormé, à $\mathbb{C}$, ce qui est une façon implicite de l'orienter.

La construction de I et de J qui suit peut sans inconvénient être admise comme étant intuitive. Le lecteur courageux, ou soucieux de rigueur, en trouvera une justification complète au **B-4.8**.

Nous y établirons en effet en substance que, le choix du repère orthonormé de P ayant eu l'effet de fixer une orientation de ce plan, les points cycliques sont les points à l'infini des droites de pente i et $-$i une fois que l'on a étendu à $\mathbb{C}^2$ le système de coordonnées cartésiennes.

Cela n'a bien sur de sens que si ces droites ne dépendent pas du choix d'un repère orthonormé direct ; or, c'est bien le cas car les vecteurs ${}^t(1, \pm\mathrm{i})$ sont vecteurs propres des matrices d'ordre 2 de rotation : pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si curieux que cela paraisse, dans l'équation cartésienne de toute droite *isotrope*, c'est-à-dire de pente $\pm$i, équation de la forme

$$Y = \underbrace{\pm\mathrm{i}}_{m} X + p\,,$$

[48] Pour cela, on aura besoin des coordonnées barycentriques des points I_A, I_B, I_C par rapport à ABC – ce sont les triplets $(-a, b, c)$, etc. – et des coordonnées barycentriques de I par rapport à $I_AI_BI_C$: on les obtiendra à partir de celles qu'il possède par rapport à ABC, savoir (a, b, c).

le coefficient m reste inchangé dans tout changement de repère orthonormé direct [49] !

3.2. Coordonnées barycentriques des points cycliques

Nous énonçons : *si z_a, z_b et z_c sont les affixes des sommets du triangle ABC, les coordonnées barycentriques des points cycliques* I *et* J *sont alors* $(z_c - z_b, z_a - z_c, z_b - z_a)$ *et* $(\overline{z_c - z_b}, \overline{z_a - z_c}, \overline{z_b - z_a})$.

On sait en effet que l'on peut immerger P dans un espace vectoriel $\widehat{P}$ « universel » euclidien de dimension 3 et que l'on peut munir $\widehat{P}$ d'un repère orthonormé $(O\,; i, j, k)$ tel qu'un point $M(x, y)$ quelconque de P admette pour coordonnées dans $\widehat{P}$ le triplet $(x, y, 1)$.

Cela étant, les coordonnées barycentriques (x, y, z) de I sont un triplet-solution du système [50]

$$\begin{cases} x\,\mathrm{Re}(z_a) + y\,\mathrm{Re}(z_b) + z\,\mathrm{Re}(z_c) = 1 \\ x\,\mathrm{Im}(z_a) + y\,\mathrm{Im}(z_b) + z\,\mathrm{Im}(z_c) = \mathrm{i} \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Le déterminant Δ de ce système n'est pas nul, les points A, B et C n'étant pas alignés, et on obtient alors tout de suite par exemple

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{Re}(z_b) & \mathrm{Re}(z_c) \\ \mathrm{i} & \mathrm{Im}(z_b) & \mathrm{Im}(z_c) \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \mathrm{i}\frac{z_c - z_b}{\Delta},$$

puis y et z au même facteur de proportionnalité près i/Δ.

Remarque. Si l'on choisit comme triplet de coordonnées barycentriques de I le triplet $\frac{\mathrm{i}}{\Delta}(z_c - z_b, z_a - z_c, z_b - z_a)$, on peut vouloir interpréter le fait qu'il satisfait les lignes L_1, L_2 et L_3 du système précédent.

Le fait qu'il vérifie la troisième équation correspond au fait que I est à l'infini, voir l'Annexe **B**. Le fait qu'il vérifie $L_1 + \mathrm{i}L_2$ correspond à l'identité triviale

$$z_a(z_c - z_b) + z_b(z_a - z_c) + z_c(z_b - z_a) = 0.$$

[49] Et il est remplacé par son opposé dans le cas d'un changement de repère orthonormé renversant l'orientation. Les points cycliques s'échangent alors. En d'autres termes, orienter un plan affine euclidien P revient à distinguer l'un des deux points cycliques I et J du complété projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ du complexifié de P qui, sinon, sont indiscernables.

[50] Nous remercions Bruno Ingrao de nous l'avoir suggéré. Outre qu'il s'inscrit très bien dans le cadre de l'Annexe **B**, il est plus aisé à justifier que la méthode que nous avions initialement prévue.

Plus intéressante est en revanche l'expression $L_1 - \mathrm{i}L_2 = 0$:

$$\frac{\mathrm{i}}{\Delta}\left((z_b - z_a)\overline{z_c} + (z_c - z_b)\overline{z_a} + (z_a - z_c)\overline{z_b}\right) = 2\,.$$

Au **V-3.1**, nous établissons que $(z_a - z_b)\overline{z_c} + (z_b - z_c)\overline{z_a} + (z_c - z_a)\overline{z_b}$ est précisément égal à $4\mathrm{i}S$, où S est l'aire du triangle orienté ABC. Or, on a bien $\Delta = 2S$, puisque Δ est l'aire du parallélogramme orienté $ABA'C$ qui « double » le triangle ABC.

Soit encore une fois un triangle de référence ABC ; posons-nous les deux questions suivantes :

1. Quelles sont les coniques circonscrites à ABC passant aussi par les points cycliques ?
2. Quelles sont les coniques circonscrites à ABC par rapport auxquelles les points cycliques sont conjugués ?

Une conique circonscrite a une équation barycentrique de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$. Elle passe en plus par les points cycliques si, et seulement si,

$$\begin{cases} p(z_a - z_c)(z_b - z_a) + q(z_b - z_a)(z_c - z_b) + r(z_c - z_b)(z_a - z_c) = 0 \\ p(\overline{z_a - z_c})(\overline{z_b - z_a}) + q(\overline{z_b - z_a})(\overline{z_c - z_b}) + r(\overline{z_c - z_b})(\overline{z_a - z_c}) = 0\,. \end{cases}$$

Ce système linéaire homogène en le triplet (p, q, r) est de rang 2. Par exemple, le déterminant suivant [51], formé des deux premiers coefficients de chaque ligne, est non nul :

$$D = \begin{vmatrix} (z_a - z_c)(z_b - z_a) & (z_b - z_a)(z_c - z_b) \\ (\overline{z_a - z_c})(\overline{z_b - z_a}) & (\overline{z_b - z_a})(\overline{z_c - z_b}) \end{vmatrix}.$$

En effet, on vérifiera aisément que D est égal à $2\mathrm{i}\,\|AB\|^2 \left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right]$, où $[\cdot\,,\cdot\,]$ désigne le produit mixte (voir au début du chapitre **V** l'interprétation de la partie imaginaire de $\overline{z_1}z_2$ à l'aide d'un produit mixte).

Comme on le vérifie aisément, le triplet (a^2, b^2, c^2) [52] est une solution particulière de ce système, de sorte que toute solution est égale à ce triplet, à un facteur multiplicatif près. En d'autres termes, la seule conique circonscrite à ABC passant aussi par les points cycliques est le cercle circonscrit !

[51] Où l'on ne prendra pas les barres de la conjugaison complexe pour des traits de fractions.

[52] Où, rappelons-le, a, b et c désignent les longueurs des côtés du triangle. On remarquera pour cela que $a^2 = (\overline{z_c - z_b})(z_c - z_b)$, avec des formules analogues pour b^2 et c^2, de sorte que, dans la première équation formant le système par exemple, on peut factoriser $(z_c - z_b)(z_a - z_c)(z_b - z_a)$.

À noter que ces formules liant I, J et les longueurs des côtés reviennent à écrire que les points cycliques sont conjugués isogonaux par rapport à ABC. Vu l'interprétation de la conjugaison faite au **IV-2.3.2**, c'est effectivement une conséquence de la conjugaison des points cycliques par rapport à n'importe quelle hyperbole équilatère du plan.

De cela on déduit que les seules coniques passant par trois points réels (non situés à l'infini) et les points cycliques sont les cercles.

Soit toujours une conique circonscrite, et son équation barycentrique de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$. Elle possède les points cycliques comme points conjugués si, et seulement si

$$\begin{aligned} p((z_a - z_c)(\overline{z_b - z_a}) + (\overline{z_a - z_c})(z_b - z_a)) + \\ + q((z_b - z_a)(\overline{z_c - z_b}) + (\overline{z_b - z_a})(z_c - z_b)) + \\ + r((z_c - z_b)(\overline{z_a - z_c}) + (\overline{z_c - z_b})(z_a - z_c)) = 0 ; \end{aligned}$$

cette condition équivaut à

$$p(\overrightarrow{CA} \,|\, \overrightarrow{AB}) + q(\overrightarrow{AB} \,|\, \overrightarrow{BC}) + r(\overrightarrow{BC} \,|\, \overrightarrow{CA}) = 0 ,$$

où $(\cdot \,|\, \cdot)$ désigne cette fois le produit scalaire (voir au début du chapitre **V** l'interprétation de la partie réelle de $\overline{z_1} z_2$ comme un produit scalaire). Cette condition équivaut à

$$pbc \cos \widehat{A} + qca \cos \widehat{B} + rab \cos \widehat{C} = 0 .$$

Du **III-8**, à propos de la forme linéaire φ'_0, il suit que cela équivaut à dire que la conique est une hyperbole équilatère.

En conclusion, dès que trois points (à distance finie) ne sont pas alignés, une conique (passant par ces trois points) possède les points cycliques comme points conjugués si, et seulement si, c'est une hyperbole équilatère. Les équations barycentriques de ces coniques satisfont quatre conditions linéaires : cet ensemble de coniques est encore une fois un *faisceau linéaire*.

3.3. Foyers d'une conique inscrite

Recherchons une équation tangentielle d'une conique à centre non dégénérée $\mathscr{C}$ inscrite[53] *dans le triangle fondamental ABC, ayant pour foyer un point F, non situé sur un des côtés*[54].

Le calcul qui suit demande des notions de Géométrie projective complexe et peut être omis en première lecture. En revanche, les compléments nécessaires sur les équations tangentielles et les coniques « dégénérant en deux points » se trouvent dans l'Annexe **A**.

Appelons (x, y, z) les coordonnées barycentriques de F, celles de F' étant donc $(a^2/x, b^2/y, c^2/z)$. La conique $\mathscr{C}$ appartient au faisceau tangentiel des coniques de foyers F et F', dont deux coniques dégénèrent en la paire de points (F, F') d'une part, en la paire de points cycliques (I, J) d'autre part. La conique qui

[53] Rappelons qu'une telle conique est tangente aux trois côtés du triangle.

[54] L'autre foyer F' est l'inverse isogonal de F, éventuellement à l'infini ou confondu avec F, voir au **III-5.3**.

dégénère en les points (F, F') a pour équation tangentielle

$$\Phi(u,v,w) = (ux+vy+wz)(ua^2/x + vb^2/y + wc^2/z) = 0\,,$$

et la conique qui dégénère en les points (I, J) a pour équation tangentielle

$$\Phi'(u,v,w) = \Big(u(z_c - z_b) + v(z_a - z_c) + w(z_b - z_a)\Big) \Big(u(\overline{z_c - z_b}) + v(\overline{z_a - z_c}) + w(\overline{z_b - z_a})\Big) = 0\,,$$

de sorte que la conique $\mathscr{C}$ a pour équation tangentielle une combinaison linéaire non triviale de ces deux équations. Comme, dans Φ', le terme en u^2 est

$$(z_c - z_b)(\overline{z_c - z_b}) = \|BC\|^2 = a^2.$$

L'équation tangentielle de notre conique $\mathscr{C}$, dans laquelle les termes carrés sont nuls, est $\Phi - \Phi' = 0$. En outre, pour développer Φ' afin de simplifier cette différence, on remarque que, par exemple,

$$\begin{aligned}(z_c - z_b)(\overline{z_a - z_c}) + (z_a - z_c)(\overline{z_c - z_b}) \\ = 2\,\mathrm{Re}((z_c - z_b)(\overline{z_a - z_c})) = (\overrightarrow{BC} \,|\, \overrightarrow{CA}) = -2ab\cos\widehat{C}\,,\end{aligned}$$

de sorte que l'équation tangentielle de $\mathscr{C}$ est, après réduction au même dénominateur, $pvw + qwu + ruv = 0$, avec $(\mathscr{F})$:

$$\begin{cases} p = (c^2y^2 + 2cbyz\cos\widehat{A} + b^2z^2)x \\ q = (a^2z^2 + 2aczx\cos\widehat{B} + c^2x^2)y \\ r = (b^2x^2 + 2baxy\cos\widehat{C} + a^2y^2)z\,. \end{cases}$$

Ces formules se simplifient lorsque l'on impose $x + y + z = 1$: on a alors $(\mathscr{F}')$: $(p,q,r) = (xAF^2, yBF^2, zCF^2)$.

Le lecteur épris de Géométrie projective complexe pourra voir cela d'une autre façon : comme il existe une unique conique de foyer F inscrite dans le triangle, on peut introduire les coordonnées barycentriques (x', y', z') de F' *sans préjuger de leur valeur*. La seule valeur possible de ces coordonnées barycentriques permettant d'annuler les termes carrés dans l'équation tangentielle de $\mathscr{C}$ est alors $(a^2/x, b^2/y, c^2/z)$ et l'on retrouve donc les résultats du **III-5**.

Par exemple, lorsque les foyers sont les points de LUCAS L et L' du triangle, voir **III-6**, les formules obtenues dans cette section montrent que l'on a $(p,q,r) = (1,1,1)$, compte tenu de $(\mathscr{F}')$. La conique obtenue est l'ellipse de STEINER inscrite dans le triangle. On ne la confondra pas avec l'ellipse circonscrite rencontrée au **III-1**.

Un autre exemple est celui du cercle inscrit au triangle ABC ; c'est la conique $\mathscr{C}$ correspondant à $F = F' = I$, centre du cercle inscrit, de coordonnées barycentriques (a,b,c). On obtient ainsi $p = 2ab^2c^2(1 + \cos\widehat{A})$, de sorte qu'une expression plus simple est obtenue par simplification de

(p,q,r) par $2a^2b^2c^2$: une équation tangentielle de $\mathscr{C}$ est

$$\frac{1+\cos\widehat{A}}{a}vw+\frac{1+\cos\widehat{B}}{b}wu+\frac{1+\cos\widehat{C}}{c}uv=0\,.$$

Comme $a=2R\sin\widehat{A}$, etc., une autre façon d'écrire cela est

$$\operatorname{cotg}\frac{\widehat{A}}{2}\,vw+\operatorname{cotg}\frac{\widehat{B}}{2}\,wu+\operatorname{cotg}\frac{\widehat{C}}{2}\,uv=0\,.$$

Dans l'annexe **A-5.4**, nous envisagerons une autre méthode pour obtenir l'équation barycentrique du cercle inscrit. Évidemment, nous obtiendrons une expression différente et il s'agira encore une fois de vérifier qu'elle est proportionnelle à celle obtenue ici !

Exercice. En utilisant les résultats du **II-2.10**, montrer qu'une équation de l'axe radical de la paire formée du cercle circonscrit et du cercle inscrit est

$$\operatorname{cotg}^2\frac{\widehat{A}}{2}\,x+\operatorname{cotg}^2\frac{\widehat{B}}{2}\,y+\operatorname{cotg}^2\frac{\widehat{C}}{2}\,z=0\,.$$

3.4. Foyers des coniques tangentes à quatre droites

Le lieu des foyers tangentes à quatre droites données ou, si l'on préfère, « inscrites dans un quadrilatère donné », est une cubique dont nous allons déterminer l'équation barycentrique et sur laquelle nous allons placer un certain nombre de points remarquables. On pourra aussi consulter le **A-5.5** *à propos des* faisceaux tangentiels *de coniques.*

En toute généralité, si on impose à $\mathscr{C}$ d'être tangente à une quatrième droite δ (distincte de la droite à l'infini, et qui ne passe pas par un sommet du triangle et qui a donc une équation de la forme $ux+vy+wz=0$, avec $uvw\neq 0$), la condition de contact de δ avec $\mathscr{C}$ est ${}^tUMU=0$, où $U=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$ et $M=\begin{pmatrix}0&r&q\\r&0&p\\q&p&0\end{pmatrix}$ [55] : on voit donc que le lieu Γ_δ des foyers de ces coniques est inclus dans la courbe dont on obtient l'équation en substituant la formule $(\mathscr{F})$ du **IV-3.3** dans ${}^tUMU=0$: en d'autres termes, on remplace p, q et r par leurs valeurs dans l'expression

$$pvw+qwu+ruv=0\,.$$

[55] Voir l'annexe **A-5.5.2** à propos des faisceaux tangentiels à quatre droites de base.

Plus précisément, une équation barycentrique de Γ_δ est de la forme

$$\underbrace{\lambda X\left(\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}\right)+\mu Y\left(\frac{Z^2}{c^2}+\frac{X^2}{a^2}\right)+\nu Z\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}\right)+\xi XYZ}_{\Phi_\delta}=0,$$

avec

$$\lambda=b^2c^2vw,\quad \mu=c^2a^2wu,\quad \nu=a^2b^2uv$$

et $\xi=2\big(bc{\cdot}vw\cos\widehat{A}+ca{\cdot}wu\cos\widehat{B}+ab{\cdot}uv\cos\widehat{C}\big)$. Le degré de cette équation (homogène) en les variables X, Y et Z est 3 : on dit que Γ_δ est une *cubique*.

Cette cubique mériterait une longue étude à elle seule, mais contentons-nous plutôt de faire voir quelques-unes de ses propriétés, en en admettant certaines.

La cubique Γ_δ passe toujours par A, B et C. En effet, la matrice M est nulle lorsque l'on choisit par exemple $(x,y,z)=(1,0,0)$. Vu la symétrie des rôles joués par nos quatre droites, elle passe aussi par les points d'intersection A', B' et C' de δ avec les droites respectives BC, CA et AB [56].

Elle passe aussi par les points cycliques I et J : si on choisit $(x,y,z)=(z_c-z_b,z_a-z_c,z_b-z_a)$, on constate que M s'annule aussi —le vérifier en se rappelant que $c^2=(z_b-z_a)(\overline{z_b-z_a})$ et que $2cb\cos\widehat{A}=(z_b-z_a)(\overline{z_c-z_a})+(z_c-z_a)(\overline{z_b-z_a})$.

Dans ce qui suit, nous n'envisageons que des cas « généraux » : pour certaines positions particulières de la droite δ, certaines constructions peuvent par exemple donner deux points confondus au lieu de deux points distincts. En revanche, la figure finale montrera que Γ_δ peut avoir essentiellement deux formes, en plus de quelques cas particuliers dans lesquels elle possède un point double ou se décompose. Il faut bien voir également que nous nous limitons au cas où les six points A,B,C,A',B',C' sont distincts et à distance finie.

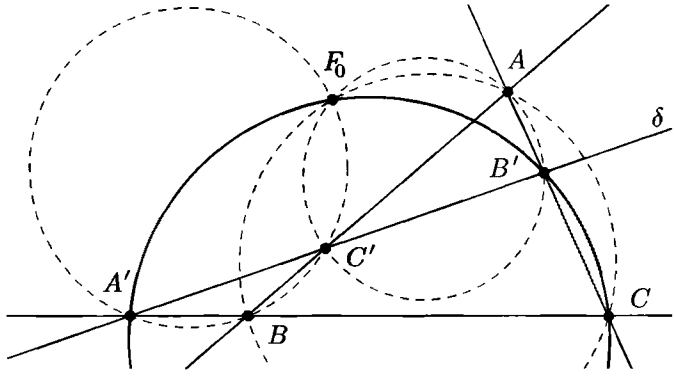
Il existe une parabole $\mathscr{P}$ tangente à δ et aux trois côtés du triangle. Son foyer F_0 appartient au cercle circonscrit à ABC. Ce cercle et Γ_δ se coupent donc en six points, savoir $(A,B,C,F_0,\mathrm{I},\mathrm{J})$, ce qui est le nombre maximal de points d'intersection d'une cubique et d'une conique : il n'y en a pas d'autre [57].

D'ailleurs, F_0 est aussi le point commun aux quatre cercles circonscrits aux triangles formés par trois parmi les quatre droites, puisque ces triplets de droites

[56] Ces six points s'interprètent en fait comme les foyers des trois coniques dégénérées du faisceau tangentiel, décrites au **A-5.5.2.**

[57] On pourra consulter utilement le **A-4.2.**

jouent tous le même rôle dans cette étude.



Ce point jouit également d'une propriété remarquable : on peut en effet établir que, lorsque huit points sont en configuration « suffisamment générale », c'est-à-dire que quatre quelconques d'entre eux ne sont pas sur une même droite, ni sept sur une même conique, alors il passe une infinité de cubiques par ces huit points et, surtout, toutes ces cubiques ont un neuvième point en commun [58].

Une autre façon d'exprimer cela est : si une cubique passe par huit des neuf points d'intersection de deux autres cubiques, elle passe aussi par le neuvième.

Si on choisit pour ces huit points les points A, A', B, B', C, C', I et J, alors le neuvième point est justement F_0.

En effet, on connaît déjà une cubique passant par ces huit points : c'est Γ_δ. Il en existe une autre : c'est la cubique Γ'_δ qui se décompose en la réunion de la droite δ et du cercle ABC (qui passe aussi par les points cycliques). Ces deux cubiques, nous venons de le voir, se coupent en nos huit points, ainsi qu'en F_0. C'est donc forcément le neuvième point cherché.

À la place de Γ'_δ, on aurait pu choisir une cubique réunion d'un des côtés du triangle ABC et du cercle circonscrit au triangle formé par les trois autres droites. Cela confirme que tous les cercles circonscrits ainsi obtenus passent par F_0.

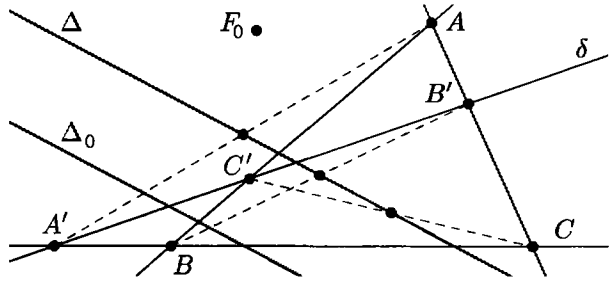
La cubique Γ_δ est invariante par l'inversion isogonale relative à ABC. Elle coupe la droite à l'infini en les points $(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{F}'_0)$, où F'_0 est l'inverse isogonal de F_0, que l'on peut *d'une certaine manière* interpréter comme le second foyer de la parabole $\mathscr{P}$.

La cubique, contenant les points cycliques, est de ce fait dite *circulaire*. Elle a une seule direction asymptotique réelle, dont F'_0 est le point à l'infini.

L'intuition est bonne conseillère, comme cela se produit souvent : si une conique $\mathscr{C}$ du faisceau est « proche » de la parabole $\mathscr{P}$, l'un de ses foyers,

[58] Un phénomène analogue ne se produit pas avec les droites ou les coniques : il passe une infinité de droites par un point, mais ces droites n'ont pas un second point commun ; de même, il passe une infinité de coniques par trois (respectivement quatre) points, mais ces coniques n'ont pas un quatrième, respectivement cinquième, point commun.

disons F, est proche de F_0 tandis que l'autre foyer, F', est proche de F'_0. Or, le milieu du segment FF' est le centre de $\mathscr{C}$. Mais, comme nous verrons en annexe, au **A-5.5.2**, le lieu des centres des coniques du faisceau est la *droite de* NEWTON Δ passant par les milieux de AA', BB' et CC'. Comme le milieu de FF' est sur Δ, le point F' appartient à la droite déduite de Δ par l'homothétie de centre F et de rapport 2. On peut donc prévoir que la droite Δ_0 déduite de Δ par l'homothétie de centre F_0 et de rapport 2 est asymptote à Γ_δ. Le calcul montre que c'est effectivement le cas. Vu ce qui précède, c'est la seule asymptote réelle de cette cubique.



Nous désignerons par **I** l'inversion isogonale par rapport au triangle ABC.

Sachant que la droite δ coupe BC au point A', la tangente à Γ_δ au point A et la droite AA' sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Voici la raison intuitive de cette propriété : si l'on considère un point A'' sur Γ_δ et proche de A', son inverse isogonal $\mathbf{I}(A'')$ appartient aussi à Γ_δ et il est proche de A puisque $\mathbf{I}(A') = A$. En outre, les droites AA'' et $A\mathbf{I}(A'')$ sont symétriques par rapport à la bissectrice issue de A. Lorsque A'' tend vers A', la droite AA'' « tend » vers la droite AA', alors que la droite $A\mathbf{I}(A'')$ tend vers la tangente en A à Γ_δ, puisque $\mathbf{I}(A'')$ tend vers A.

On construit *mutatis mutandis* les tangentes en les points B, C, A', B' et C', en échangeant les rôles joués par les quatre droites données.

Une droite non parallèle à l'asymptote coupe Γ_δ en un ou trois points (un point de contact compte double, voire triple s'il s'agit d'un point d'inflexion) ; une droite parallèle à l'asymptote, mais distincte de celle-ci, coupe Γ_δ en zéro ou deux points (un point de contact comptant double, ici aussi).

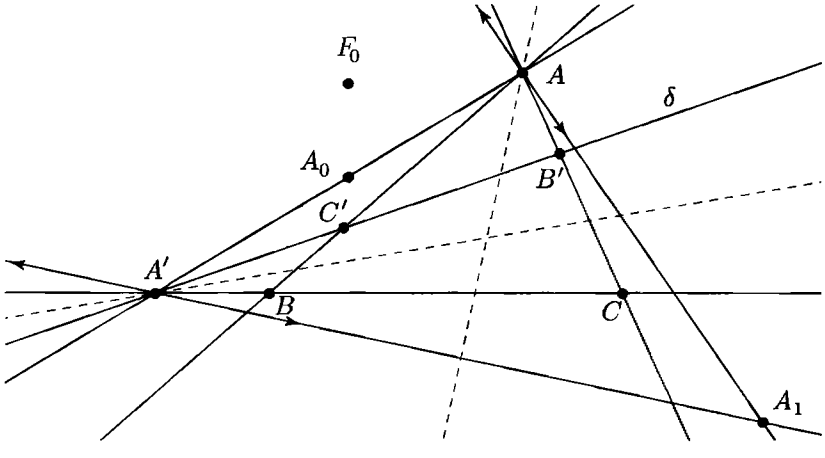
En conséquence, si une droite coupe une cubique en deux points distincts, elle la recoupe en un troisième point, ce point étant éventuellement à l'infini, si la droite est parallèle à une direction asymptotique, ou confondu avec un des deux premiers points, si la droite est tangente.

De même, une tangente à une cubique en un point M la recoupe en un point M', éventuellement à l'infini, ou confondu avec le point de contact si

la droite est une tangente d'inflexion. Ce point M' est appelé le *tangentiel* du point M et nous le noterons $\tau(M)$.

Nous allons construire six nouveaux points sur Γ_δ. La droite AA' recoupe donc cette cubique en un point $A_0 \in \Gamma_\delta$; l'inverse isogonal $A_1 = \mathbf{I}(A_0)$ appartient donc à l'image de AA' par $\mathbf{I}$, c'est-à-dire à la tangente en A. Pour la même raison, il appartient à la tangente en A' et c'est donc le point d'intersection de ces deux tangentes (que nous avons construites l'une et l'autre). Le point d'intersection est donc A_1, il appartient à la cubique et c'est à la fois le tangentiel de A et de A'. Enfin, son inverse isogonal est le point A_0.

On pourrait songer à appliquer également l'inversion isogonale par rapport à un triangle dans lequel la droite δ remplacerait un des trois côtés du triangle ABC. Mais, la définition des points A_0 et A_1 ne dépendant pas du choix de trois des droites parmi les quatre, nous ne ferions que construire les mêmes points à chaque fois.



On procède de même avec les droites BB' et CC', ce qui nous donne les points $B_1 = \tau(B) = \tau(B')$ et $C_1 = \tau(C) = \tau(C')$ ainsi que leurs inverses isogonaux respectifs $B_0 \in BB'$ et $C_0 \in CC'$.

Quand trois points d'une cubique sont alignés, on peut prouver que leurs tangentiels le sont aussi ! Puisque A', B', C' le sont, les trois tangentiels A_1, B_1, C_1 sont donc alignés.

On pouvait aussi partir des alignements $A'BC$, $AB'C$ et ABC', mais ils donnent le même résultat, toujours pour cette même raison de symétrie de rôles des quatre droites.

La transformation par conjugaison isogonale de l'alignement A_1, B_1, C_1 montre que les six points $ABCA_0B_0C_0$ sont sur une même conique.

Nous avions fini par l'oublier, mais Γ_δ est le lieu des foyers d'une famille de coniques. Si F est le foyer d'une conique de la famille autre qu'une parabole, l'autre foyer est $F' = \mathbf{I}(F)$ et le milieu de FF' est sur la droite Δ. En fait, $\Gamma_\delta \setminus \{A, B, C, F_0\}$ est le lieu des points F (n'appartenant pas au cercle circonscrit de ABC) tels que le milieu de $F\mathbf{I}(F)$ appartienne à Δ. On le voit facilement en écrivant les coordonnées barycentriques normalisées du point $\mathbf{I}(F)$ en fonction de celles de F.

Cette remarque va nous permettre de construire le point D en lequel la cubique coupe son asymptote [59]. Comme $D \in \Delta_0$, son inverse D' appartient à l'inverse isogonal de Δ_0, qui est une conique passant par A, B, C et F_0 et que l'on sait construire grâce à un cinquième point, voir au **III-5**. En outre, puisque le milieu de DD' est sur Δ, D' est aussi sur la parallèle à la droite Δ_0 menée de F_0 (c'est-à-dire l'axe de la parabole $\mathscr{P}$). Cela permet donc la construction de D' puis celle de D, son inverse isogonal.

Les exemples précédents nous amènent à la constatation suivante : par exemple, le point A et son inverse isogonal A' ont même tangentiel A_1, et la droite AA' recoupe Γ_δ en l'inverse isogonal de A_1. Cela suggère qu'un point F de la cubique et son inverse isogonal F' ont même tangentiel T et que le point $\mathbf{I}(T)$ n'est autre que le point où la droite FF' recoupe Γ_δ.

Sans détailler tous les calculs, nous prouvons en annexe que cette hypothèse est exacte : voir le **A-5.3**.

Nous pouvons dès lors étendre notre liste de propriétés de Γ_δ ; une discussion importante est menée dans les lignes qui suivent, et une autre se trouve dans la même annexe.

L'asymptote Δ_0 est d'une certaine manière [60] tangente à la cubique, en un point à l'infini F_0' qui est l'inverse isogonal de F_0. Le tangentiel de F_0' est le point D : c'est donc aussi le tangentiel de F_0. Cela permet de déterminer la tangente en F_0 qui n'est autre que F_0D. Cela confirme aussi l'alignement $F_0F_0'D'$ qui nous a servi à construire le point D'.

Demandons-nous s'il existe un point réel $F \in \Gamma_\delta$ dont le tangentiel soit F_0. Si tel est le cas, le point $F' = \mathbf{I}(F)$ admet aussi F comme tangentiel et la droite FF' recoupe Γ_δ au point $\mathbf{I}(F_0)$, c'est-à-dire à l'infini : la droite FF' est alors parallèle à l'asymptote. Comme, de plus, le milieu de FF' est sur la droite de NEWTON Δ, elle-même parallèle à l'asymptote, les points F et F' sont sur Δ.

La réciproque est immédiate. En résumé, puisque Δ ne peut couper la cubique en quatre points : si $\tau(F) = \tau(F') = F_0$, alors F et F' sont les points

[59] C'est la situation normale lorsqu'asymptote il y a. Si une cubique admet une asymptote sans pour autant la couper « à distance finie », c'est que le point à l'infini de la direction asymptotique est... un point d'inflexion.

[60] Pour un adepte de la Géométrie projective, cela ne fait même aucun doute !

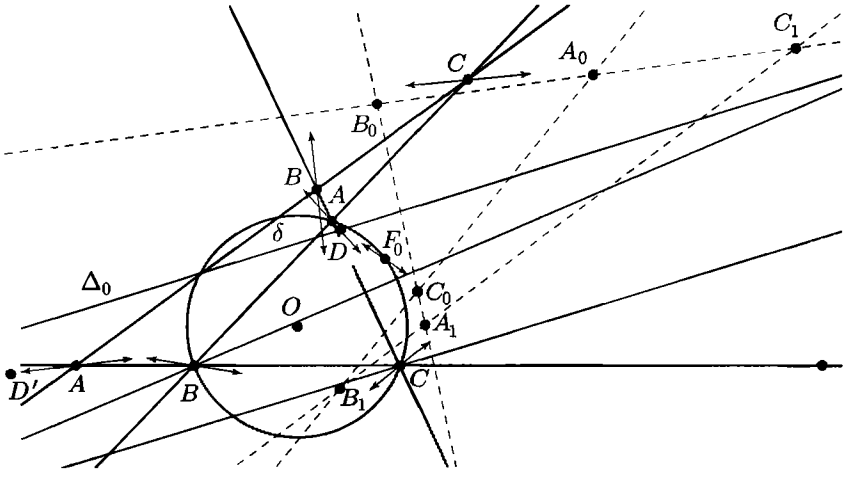
d'intersection de Γ_δ avec Δ. Bien entendu, Δ peut être disjointe de Γ_δ, auquel cas F_0 n'est le tangentiel d'aucun point (réel). Comme $\mathbf{I}(\Delta)$ est une conique, que l'on sait construire, les points F et F' sont les points d'intersection de cette conique avec Δ, lorsque cette intersection est non vide.

Les points cycliques I et J appartiennent à Γ_δ et sont inverses isogonaux l'un de l'autre. La droite qui les joint est la droite de l'infini, et elle recoupe Γ_δ au point F_0'. Les points cycliques ont donc même tangentiel, qui est le point F_0. Le point F_0 est donc à l'intersection de deux tangentes à Γ_δ isotropes : selon la définition de PLÜCKER, on dit que F_0 est un *foyer* de la cubique. C'en est même un *foyer singulier*, car les tangentes isotropes menées de ce point ont pour points de contact les points cycliques eux-mêmes.

On dit de Γ_δ que c'est une *cubique focale* puisque, en plus, elle **contient** son foyer singulier.

La discussion précédente est plus importante qu'il n'y paraît. Si l'on peut mener deux tangentes réelles du point F_0, alors la courbe Γ_δ est connexe, et c'est ce qui correspond au cas de la figure de la page **216**. Sinon, la cubique a deux composantes connexes, dont l'une est un *ovale* et c'est ce qui correspond au cas de la figure qui la suit.

Voici un schéma récapitulatif sur lequel sont placés les points réels que nous avons construits, ainsi que certaines tangentes. Nous n'avons pas placé *pour l'instant* la cubique, car cela rendait la figure illisible. On la trouvera en revanche sur la figure qui suit celle-ci.



La cubique Γ_δ est en général elliptique, c'est-à-dire qu'elle n'est pas en général paramétrable par des fonctions rationnelles (mais on peut la paramétrer à l'aide de fonctions *elliptiques*, ce qui explique cette terminologie). Toutefois, elle devient paramétrable rationnellement lorsqu'un cercle est tangent à δ et aux trois côtés

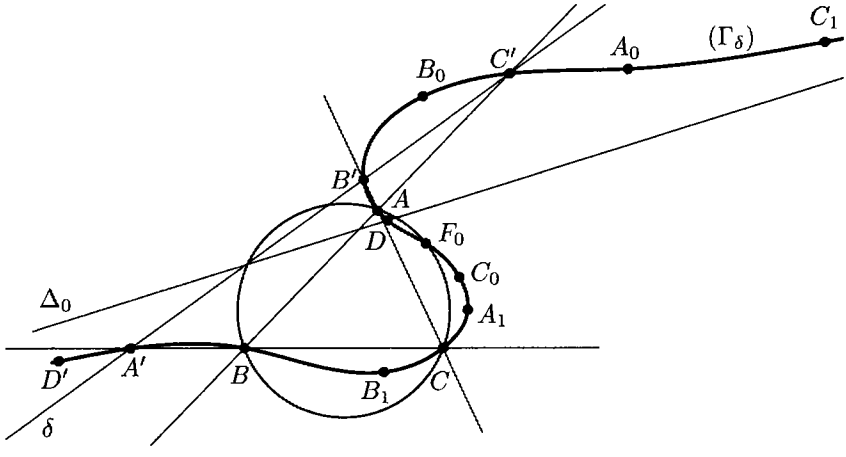
du triangle, c'est-à-dire lorsque δ est tangente au cercle inscrit ou à un cercle exinscrit au triangle ; elle a alors comme point double le centre de ce cercle [61].

La cubique se décompose lorsque *deux* cercles sont tangents à δ et aux trois côtés du triangle, c'est-à-dire lorsque δ est tangente à deux des quatre cercles (ex)inscrits du triangle. Elle se décompose alors en la réunion de la droite joignant les centres de ces deux cercles, par exemple I_B et I_C, et du cercle circonscrit à BCI_BI_C, dont le centre est le milieu de I_BI_C. Elle se décomposerait aussi dans un cas exclu : lorsque δ est la droite de l'infini, en la réunion de cette droite et du cercle circonscrit à ABC. Les coniques $\mathscr{C}$ seraient alors toutes des paraboles.

Dans l'annexe **A-5.3**, on trouvera un principe de construction des intersections de Γ_δ avec les bissectrices du triangle (trois intérieures, trois extérieures). Chacune de ces intersections peut fournir deux points autres qu'un sommet.

Une cubique possède en général trois points d'inflexion alignés [62] ; dans le cas le plus général, il y a trois points d'inflexion I_1, I_2 et I_3 distincts et à distance finie. Ils sont leurs propres tangentiels et ils sont aussi les tangentiels de leurs inverses isogonaux respectifs.

Les figures qui suivent illustrent deux cas aussi généraux que possible, la première d'une courbe Γ_δ connexe, la seconde d'une courbe Γ_δ comportant un ovale.



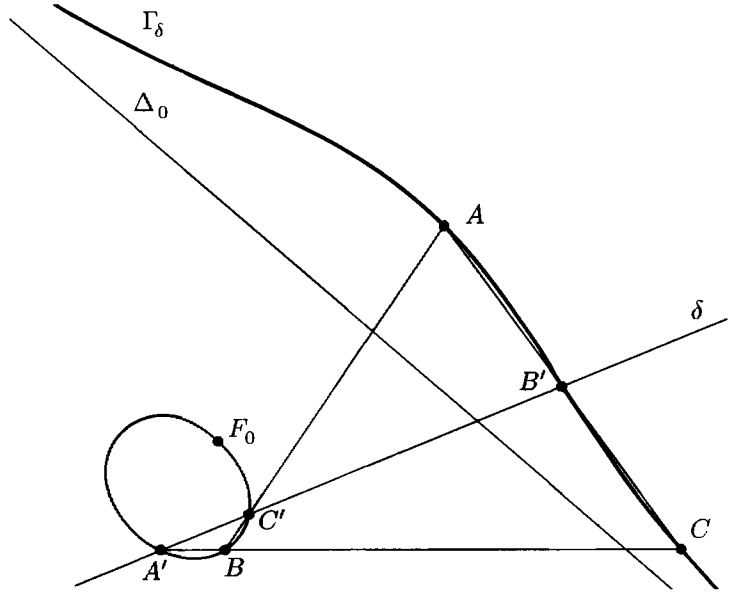
[61] En cela, les courbes algébriques de degré $\geqslant 2$ se révèlent plus compliquées que les droites ou coniques. Nous avons vu au **I-5.2** que toute droite admet une paramétrisation rationnelle ; il en va de même pour les coniques non dégénérées : au **IV-1.4**, nous l'avons vérifié sur un exemple, mais le principe se généralise. Pour ce qui est du cas des courbes de degré supérieur, on trouvera son bonheur dans l'excellent livre d'ARNAUDIÈS-BERTIN, **[2]**, cité en bibliographie. Prévoir force tasses de café.

[62] Mais avec beaucoup de dégénérescences possibles : un des points d'inflexion peut être à l'infini — c'est ce qui se produit avec Γ_δ si la tangente en F_0 est parallèle à l'asymptote — ou bien deux d'entre eux peuvent se confondre en un point multiple — c'est ce qui se produit à l'origine pour la cubique d'équation affine $y^2 = x^3$.

Pour la seconde figure, nous n'avons pas placé cette fois tous les points constructibles, mais seulement les plus importants. Le point d'intersection de Γ_δ avec son asymptote est ici en dehors de l'épure : la figure montre bien que la tangente en F_0 est presque parallèle à l'asymptote, de sorte qu'elles se coupent très loin. Il pourrait même se faire dans certains cas particuliers qu'elles soient parallèles, auquel cas le tangentiel de F_0 serait rejeté à l'infini ; le point à l'infini serait alors un point d'inflexion de la cubique. De même, bien que la composante non bornée de Γ_δ soit très plate, on devine deux points d'inflexion, le troisième étant hors champ.

À noter aussi qu'un point de l'ovale n'est le tangentiel d'aucun point de la cubique, alors qu'un point de la composante non bornée est le tangentiel de quatre points (deux dans chaque composante) ; au contraire, lorsque Γ_δ ne comporte pas d'ovale, tout point est le tangentiel d'exactement deux points.

À noter enfin qu'en cas de présence d'un ovale, ce dernier contient forcément le point F_0. Ce point n'est alors le tangentiel d'aucun point (réel) de la courbe.



Avec cette étude, nous avons cherché à appâter le lecteur afin de l'amener à s'intéresser plus avant aux cubiques, et nous le félicitons tout particulièrement s'il est parvenu à la fin de cette étude sans se laisser décourager par l'avalanche de résultats et de raisonnements intermédiaires.

Il trouvera, pour approfondir, des articles passionnants dans la revue QUADRATURE, notamment les **[23]**, **[24]** et **[25]**.

« We are alone in a desert, pursued by a hungry lion. The only tool we have is a spherical, adamantine cage. We enter the cage and lock it, securely. Next we perform an inversion with respect to the cage. The lion is now in the cage and we are outside. »

THOMAS MILDORF, *A Tour de Force in Geometry*

Chapitre V

Utilisation des nombres complexes en Géométrie

Cette façon trop méconnue d'échapper à un lion est astucieuse et facile à mettre en œuvre. Toutefois, les choses se compliquent si le terrain est en pente.

1. Introduction

1.1. Présentation du chapitre

Utiliser les nombres complexes pour faire de la Géométrie n'est pas qu'une convention de notations : s'il est vrai qu'identifier un couple (x, y) de réels avec le complexe $z = x + \mathrm{i}y$ fournit une notation synthétique bien commode, cette facilité va nous sembler bien anecdotique en comparaison de tous les bienfaits que le corps $\mathbb{C}$ va nous prodiguer, de sorte que l'objet de ce chapitre ne consiste pas seulement, loin s'en faut, à établir une liste de formules dans lesquelles on n'aurait fait que substituer $\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ à x et $\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$ à y.

La supériorité décisive que possède $\mathbb{C}$ sur un espace vectoriel réel général est sa structure de corps. La présence d'une multiplication interne bilinéaire est déjà un atout en soi : elle ouvre la porte à une interprétation précieuse des similitudes, directes ou indirectes ; toutefois, nous n'aurons pas à revenir sur ces transformations développées par le menu en particulier dès le début de l'Enseignement supérieur. Nous ne dédaignerons pas pour autant l'intervention du complexe j, efficace dans le domaine des triangles équilatéraux et, avec eux, des quadrangles équiharmoniques, des centres isodynamiques et de la jolie configuration de FERMAT–TORRICELLI.

La qualité de *corps commutatif* est autrement précieuse : la division nous conduit à la notion d'*homographie*, dans le cadre d'une complétion du plan affine euclidien par *un* point à l'infini (la sphère de RIEMANN), et à la riche Géométrie de l'*inversion* [1].

Et non des moindres, la faculté de remplacer $\overline{z}$ par R^2/z lorsque z est de module R : elle débouche sur toutes les techniques polynomiales, sur les relations entre coefficients et zéros d'un polynôme, et sur les manipulations astucieuses de déterminants.

Nous n'en demanderons guère plus ! Le calcul complexe élémentaire et les interprétations diverses du terme $e^{i\vartheta}$ nous suffiront bien. Nul besoin ici des manipulations astucieuses d'un TARTAGLIA, de fonctions holomorphes ou de discussions passionnées autour d'une valeur possible du complexe i^i [2] !

Cette contribution manifeste de $\mathbb{C}$ ne put que susciter des désirs de généralisation : un espoir vite douché fut celui de construire un analogue de $\mathbb{C}$ pour toute dimension finie, ou, à défaut, pour la dimension 3. Un pis-aller était la découverte des *quaternions* par HAMILTON, mais la perte de la commutativité se paie à elle seule au prix fort. FROBENIUS mit enfin un terme à toute tentative ultérieure en établissant que la liste des sur-corps (de degré fini) de $\mathbb{R}$, fussent-ils non commutatifs, était à jamais définitive.

Avec le corps $\mathbb{H}$ des quaternions, algèbres de CLIFFORD et *octaves* de CAYLEY disputent à $\mathbb{C}$ sa suprématie en matière de Géométrie. Nous donnons notre préférence à ce dernier, en laissant à d'autres la tâche d'arbitrer.

1.2. Conventions et rappels de notations

Nous désignerons respectivement par $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$ les partie réelle et imaginaire du complexe z. Nous désignerons par $i\mathbb{R}$ l'ensemble des complexes de partie réelle nulle.

Au grand dam des Physiciens, nous conserverons les notations qui ont fait leurs preuves : le complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$ *modulo* 2π sera noté i, celui de même module et d'argument $2\pi/3$ *modulo* 2π sera noté j. Nous ferons un usage constant des formules

$$j^3 = 1, \quad 1/j = \bar{j} = j^2 \quad \text{et} \quad 1 + j + j^2 = 0.$$

Lorsque nous disposerons d'un complexe z et que nous poserons alors $z = x + iy$, il sera toujours sous-entendu que $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$.

Nous supposerons donné une fois pour toutes P, plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O; i, j)$, et nous associerons

[1] Dite aussi Géométrie *anallagmatique*. Excellent exercice de diction, à conseiller.

[2] Mais elles ne sont jamais bien loin. Veut-on seulement considérer des courbes algébriques de degré 3, et elles se révèlent immédiatement indispensables.

à tout point $M \in P$, de coordonnées (x, y), le complexe $z = x + \mathrm{i}y$ que nous appellerons l'*affixe* de M. Inversement, si $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, le point $M \in P$ de coordonnées (x, y) est appelé l'*image* du complexe z, et nous pourrons noter $M(z)$ ce point.

Vu le choix d'un repère orthonormé direct, il sera loisible également d'identifier P à $\mathbb{C}$ (et, par exemple, de parler d'un *point* de $\mathbb{C}$).

Nous identifierons librement, mais non pas systématiquement, un complexe z et le point $M(z)$ de P dont il est l'affixe, ce afin de simplifier la formulation de nos énoncés.

Si $X = xi + yj$ et $X' = x'i + y'j$ sont deux vecteurs, on peut leur associer les complexes $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$; dans ces conditions, $\mathrm{Re}\,(\overline{z}z')$ et $\mathrm{Im}\,(\overline{z}z')$ sont respectivement égaux à leur produit scalaire $\left(X \mid X'\right)$ et à leur produit mixte $[X, X']$.

En effet, on a $\overline{z}z' = (x - \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y') = xx' + yy' + \mathrm{i}(xy' - x'y)$.

Les nombres complexes sont particulièrement à l'aise pour traduire les propriétés angulaires de nombreux objets : nous développerons ce point dans la section **V-9.1**.

2. Généralités

Sous quelle forme les équations des ensembles les plus classiques de la Géométrie plane apparaissent-elles, une fois que l'on adopte la notation complexe pour les coordonnées cartésiennes d'un point ?

Si $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels, on a $x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $y = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$. Cela permet de récrire des équations des droites, cercles, coniques, etc. à l'aide des notations z et $\overline{z}$. Plus précisément, voici ce qu'il en est.

1. Toute droite affine admet une équation de la forme

$$\overline{A}z + A\overline{z} + B = 0\,,$$

où $A \in \mathbb{C}^*$ et $B \in \mathbb{R}$.

En effet, toute équation de la forme $aX + bY + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, peut s'écrire sous la forme équivalente

$$\underbrace{\overline{(a + \mathrm{i}b)}}_{\overline{A}}(X + \mathrm{i}Y) + \underbrace{(a + \mathrm{i}b)}_{A}\overline{(X + \mathrm{i}Y)} + 2c = 0\,.$$

Réciproquement, bien entendu, toute équation de la forme précédente est celle d'une droite affine.

Par exemple, si $a \neq b \in \mathbb{C}$, une équation de la droite $M(a)M(b)$ est

$$\Delta \overset{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} a & b & z \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{z} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

En effet, un développement par rapport à la dernière colonne du déterminant montre qu'il s'agit effectivement de l'équation d'une droite, et on vérifie qu'elle passe par a et b (pour $z = a$, deux colonnes sont égales). Plus précisément, $\Delta = \overline{u}z - u\overline{z} + v$, avec $u = a - b$ et $v = a\overline{b} - b\overline{a} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$: l'on n'a pas obtenu directement une équation de la forme encadrée pour cette droite, mais on s'y ramène en divisant l'équation par $-\mathrm{i}$: en effet, on a bien

$$\frac{-1}{\mathrm{i}}\Delta = \overline{u/\mathrm{i}}\, z + u/\mathrm{i}\, \overline{z} - v/\mathrm{i} .$$

De même, la formule (2) de la section **V-3** est équivalente après multiplication par un scalaire non nul à une équation de la forme encadrée.

2. Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $M(\omega)$ et de rayon r admet pour équation

$$\overline{Z}Z - \overline{\omega}Z - \omega\overline{Z} + \overline{\omega}\omega = r^2.$$

En effet, il suffit de remarquer que $M(z) \in \mathscr{C}$ équivaut à

$$|z - \omega|^2 = \overline{(z-\omega)}(z-\omega) = r^2.$$

De cela suit la forme générale de l'équation des cercles :

$$\overline{Z}Z + \overline{\lambda}Z + \lambda\overline{Z} = \mu ,$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Puisque $\overline{Z}Z + \overline{\lambda}Z + \lambda\overline{Z} = \overline{(Z+\lambda)}(Z+\lambda) - \overline{\lambda}\lambda$, ce cercle est vide si $\overline{\lambda}\lambda + \mu < 0$, réduit à son centre $M(-\lambda)$ si $\overline{\lambda}\lambda + \mu = 0$ et est un « vrai » cercle, de centre $M(-\lambda)$, si $\overline{\lambda}\lambda + \mu > 0$.

3. Plus généralement, l'équation générale d'une conique du plan P est de la forme

$$A\overline{Z}Z + \overline{B}Z^2 + B\overline{Z}^2 + \overline{C}Z + C\overline{Z} + D = 0 ,$$

où A et D sont en outre réels, et $(A, B) \neq (0, 0)$.
En effet, la forme affine classique d'une telle équation est

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2dX + 2eY + f = 0 ,$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et, après avoir posé $Z = X + \mathrm{i}Y$, on remarque que $X^2 = \dfrac{2\overline{Z}Z + Z^2 + \overline{Z}^2}{4}$, puis $Y^2 = \dfrac{2\overline{Z}Z - Z^2 - \overline{Z}^2}{4}$ et enfin $2XY = \dfrac{Z^2 - \overline{Z}^2}{2\mathrm{i}}$, etc.

Cette expression ne préjuge pas d'une forme dégénérée ou non de la conique (décomposition en réunion de droites, par exemple).
L'équation $A\overline{Z}Z + \overline{B}Z^2 + B\overline{Z}^2 + \overline{C}Z + C\overline{Z} + D = 0$, avec $B = \lambda + \mathrm{i}\mu$, se récrit sous la forme

$$\underbrace{(A+2\lambda)}_{a}X^2 + \underbrace{4\mu}_{2b}XY + \underbrace{(A-2\lambda)}_{c}Y^2 + 2(\lambda' X + \mu' Y) + D = 0$$

si $B = \lambda + \mathrm{i}\mu$, $C = \lambda' + \mathrm{i}\mu'$ et $Z = X + \mathrm{i}Y$.
Autrement dit, le genre de la conique, qui dépend essentiellement du signe de $ac - b^2$, est : ellipse, parabole ou hyperbole selon respectivement que $A^2 - 4(\lambda^2 + \mu^2)$ est > 0, $= 0$ ou < 0.
Une conique est une hyperbole équilatère (éventuellement dégénérée en la réunion de deux droites orthogonales) si, et seulement si, $A' + C' = 0$. Ici, cela équivaut à $A = 0$.

3. Application des complexes à la Géométrie du triangle

3.1. L'aire d'un triangle

Soit A, B et C, d'affixes respectifs a, b, c, trois points formant un triangle non aplati ; une expression simple (et symétrique !) de l'aire S du triangle orienté ABC est

$$S = \frac{1}{4\mathrm{i}}\big((a-b)\overline{c} + (b-c)\overline{a} + (c-a)\overline{b}\big)\,.$$

En effet, on vérifie tout de suite que la valeur de S est inchangée si on remplace a, b et c respectivement par $a + z, b + z$ et $c + z$, où z est un complexe quelconque. On peut donc supposer que $c = 0$ et il reste à vérifier que dans ce cas $4\mathrm{i}S = b\overline{a} - a\overline{b}$. Or, $b\overline{a} - a\overline{b} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\overline{a}b)$, mais $\mathrm{Im}(\overline{a}b)$ est égal au produit mixte $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]$, c'est-à-dire encore deux fois l'aire S annoncée. Le résultat s'ensuit.

Dans la section **IV-3.2** du chapitre **IV**, nous avons exprimé les coordonnées barycentriques des points cycliques relativement au triangle ABC, une fois le plan P plongé dans le plan projectif complexe $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

Un triplet de coordonnées barycentriques du point cyclique I est, rappelons-le, $(c-b, a-c, b-a)$. Le fait que la somme de ces trois composantes est nulle traduit la position à l'infini de I.

Conformément aux conventions de l'annexe **A-1**, évaluons le vecteur

$$v = (c-b)\overrightarrow{OA} + (a-c)\overrightarrow{OB} + (b-a)\overrightarrow{OC}\,.$$

Si $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$, $b = b_1 + \mathrm{i}b_2$ et $c = c_1 + \mathrm{i}c_2$, la première composante, notée v_1,

du vecteur v par rapport à la base (i,j) est $(c-b)a_1+(a-c)b_1+(b-a)c_1$, c'est-à-dire encore

$$v_1=\frac{1}{2}\big((c-b)(\overline{a}+a)+(a-c)(\overline{b}+b)+(b-a)(\overline{c}+c)\big)\,.$$

Maintenant, $(c-b)a+(a-c)b+(b-a)c=0$, alors qu'au vu la formule précédente $(c-b)\overline{a}+(a-c)\overline{b}+(b-a)\overline{c}=-4\mathrm{i}S$. On en déduit que $v_1=-2\mathrm{i}S$. Un calcul analogue montre que la seconde composante v_2 est égale à $2S$, de sorte que $v=2S\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}$. La « pente » de ce vecteur est bien i, comme c'était attendu.

Le point cyclique J admet pour coordonnées barycentriques $(\overline{c-b},\overline{a-c},\overline{b-a})$ et le vecteur

$$\overline{v}\overset{\text{déf}}{=}\overline{(c-b)}\,\overrightarrow{OA}+\overline{(a-c)}\,\overrightarrow{OB}+\overline{(b-a)}\,\overrightarrow{OC}$$

est égal, lui, à $2S\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}$.

3.2. Quelques points et une configuration remarquables

Soit A, B et C, d'affixes respectifs a,b,c, trois points formant un triangle non aplati, et R le rayon du cercle circonscrit Γ. Nous supposerons maintenant que l'origine est placée au centre de ce cercle, de sorte que a,b et c sont de même module R et que l'on a $\Gamma=C(O\,;R)$, le cercle de centre O et de rayon R.

Le centre de gravité G du triangle est alors l'image du complexe $\dfrac{a+b+c}{3}$ et l'orthocentre H celle du complexe $h=a+b+c$.

Par exemple, on vérifie que AH est orthogonal à BC ; en effet,

$$\mathrm{Re}\,\big((\overline{a+b+c-a})(c-b)\big)=\mathrm{Re}\,\big((\overline{c+b})(c-b)\big)=\mathrm{Re}\,\big(\overline{c}c-\overline{b}b\big)=0\,,$$

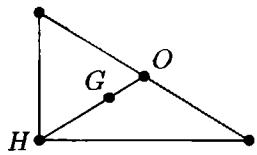
car $\overline{c}b-c\overline{b}$ est imaginaire pur.

Une idée simple et efficace permet de déterminer directement l'affixe de H, même si on ne le connaît pas *a priori* ; en effet, AH est parallèle à la médiatrice OG_A, où G_A désigne comme toujours le milieu du segment BC. Il en découle que, si un point M d'affixe z appartient à la hauteur AH, alors il existe un scalaire *réel* λ tel que $z=a+\lambda\dfrac{b+c}{2}$. Or, si on choisit $\lambda=2$, on obtient $z=a+b+c$; le point M ayant cet affixe appartient donc à la hauteur AH, mais aussi aux deux autres hauteurs puisque l'expression $a+b+c$ est une fonction symétrique des complexes a,b,c.

On retrouve en particulier la relation

$$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}\,.$$

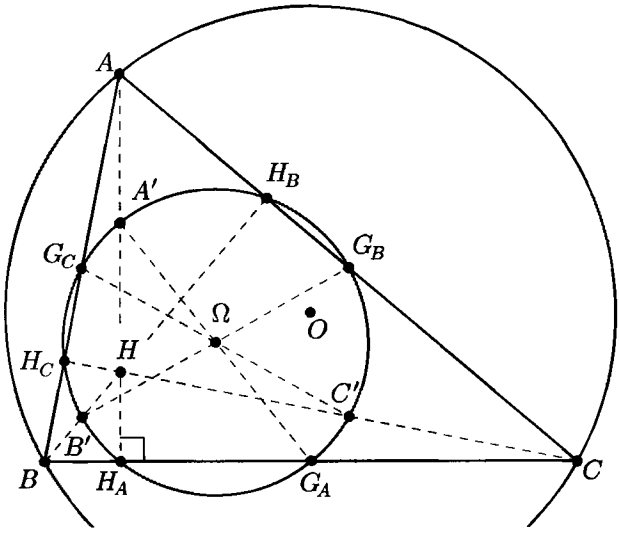
Pour retrouver mnémotechniquement cette formule, on peut considérer le cas particulier d'un triangle rectangle, comme *supra* : H est le sommet de l'angle droit, O est le milieu de l'hypoténuse et G se trouve sur la médiane, et donc sur (HO), aux deux tiers en partant de H.



Nous allons encore approfondir la configuration de ces points, en relation avec le cercle d'EULER.

L'isobarycentre du système des quatre points A, B, C, H est le centre Ω du cercle d'EULER.

Cela résulte des expressions précédentes, qui en donnent les affixes ; on trouve ainsi que l'affixe de leur barycentre est $\frac{1}{4}(a+b+c+(a+b+c))$, c'est-à-dire $\frac{a+b+c}{2}$. Le barycentre cherché est donc le milieu de OH, autrement dit le point Ω.



Le lecteur appréciera sans doute aussi une preuve géométrique de ce résultat. Le cercle d'EULER passe par le milieu A' du segment AH et par le milieu G_A du côté BC. Or, ces deux points sont diamétralement opposés sur ce cercle : voir pour cela l'angle droit $A'H_AG_A$.

Le milieu du segment $A'G_A$ est donc le point Ω. Or, nous venons de décrire là la construction du barycentre annoncé : on détermine d'abord le milieu du segment formé par deux des quatre points, ici A et H, puis le milieu du segment formé par les deux autres, ici B et C, et on termine en formant le milieu de ces deux milieux.

Remarque : triangles particuliers. Si l'on conserve l'hypothèse que le centre O du cercle circonscrit à un triangle non aplati ABC est d'affixe nul, alors

- Le triangle est rectangle en A si, et seulement si, $b+c=0$. Cela équivaut en effet au fait que B et C sont diamétralement opposés.
- Le triangle est isocèle en A si, et seulement si, $a^2 = bc$. En effet, si on appelle α, β et γ des arguments de a, b et c, alors $a^2 = bc$ équivaut à $2\alpha = \beta + \gamma$ *modulo* 2π. Or, un angle polaire *modulo* π de la bissectrice de BC est $\dfrac{\beta+\gamma}{2}$ et la relation précédente équivaut à dire que A se situe sur cette bissectrice, donc que le triangle est isocèle en A.

3.3. Symétries et projections orthogonales

Maintenant, avec les mêmes notations, nous avons une formule simple décrivant la symétrie orthogonale relativement à la droite AB, avec $a \neq b$. En effet, elle est définie au niveau des affixes par

$$\textbf{(1)} \qquad \sigma : z \longmapsto a + b - \frac{ab}{R^2}\overline{z}\,.$$

Il suffit de vérifier que σ est une isométrie involutive gauche ayant a et b comme points fixes. En effet, $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$, où σ_1 est la symétrie orthogonale $z \mapsto \overline{z}$ et σ_2 l'isométrie directe $z \mapsto a + b - \dfrac{ab}{R^2}z$. En outre,

$$\sigma(a) = a + b - \frac{\overline{a}ab}{R^2} = a + b - b = a \quad \text{et} \quad \sigma(b) = a + b - \frac{\overline{b}ab}{R^2} = a + b - a = b\,,$$

de sorte que la droite AB est laissée fixe point par point par σ.

Si l'on choisit au contraire $a = b$, on montre de même que l'application $z \longmapsto 2a - \dfrac{a^2}{R^2}\overline{z}$ définit la symétrie par rapport à la tangente à Γ en A.

On pourra considérer que, si $a = b \in \Gamma$, la notation (AB), ou encore (AA), désigne la tangente à Γ en A.

Cette formule a deux conséquences intéressantes :

1. La droite AB, lieu des points fixes de σ, a pour équation

$$(2): \quad Z + \frac{ab}{R^2}\overline{Z} = a + b\,.$$

Cette équation n'est pas directement de la forme $\overline{A}Z + A\overline{Z} = B$, mais, si $a+b \neq 0$, il suffit de diviser membre à membre par $a+b$, car $1/(a+b)$ et $ab/R^2(a+b)$ sont conjugués l'un de l'autre. Si, au contraire, $a+b=0$, alors l'équation est $Z - a^2\overline{Z}/R^2 = 0$ et il suffit cette fois de la diviser membre à membre par ia.

De même, la droite d'équation $Z = 2a - \dfrac{a^2}{R^2}\overline{Z}$ est la tangente à Γ en A.

Si a et b, complexes de module R, sont les solutions de l'équation $Z^2 + pZ + q = 0$, alors une équation de AB est $Z + q\overline{Z}/R^2 + p = 0$: cela résulte des relations entre coefficients et racines d'une équation polynomiale.

2. La projection orthogonale sur cette droite est définie par $z \longmapsto \dfrac{z + \sigma(z)}{2}$.

Par exemple, le symétrique de l'orthocentre par rapport à la droite AB est le point d'affixe

$$a + b - \frac{ab}{R^2}\overline{(a+b+c)} = -\frac{ab}{R^2}\overline{c}.$$

Ce point appartient donc au cercle Γ (faire un calcul de module). À noter d'ailleurs que le point diamétralement opposé à A est aussi le symétrique de H par rapport au milieu de BC : en effet $2\dfrac{b+c}{2} - h = -a$.

Retrouver à titre d'exercice le fait que le cercle Γ de centre $M\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)$ et de rayon $R/2$ contient les pieds des trois hauteurs et les six milieux des segments joignant deux à deux les points A, B, C et H (c'est bien sûr le *cercle d'*EULER, ou *cercle des neuf points*, du triangle ABC).

À propos, quelles sont les homothéties envoyant Γ sur γ ?

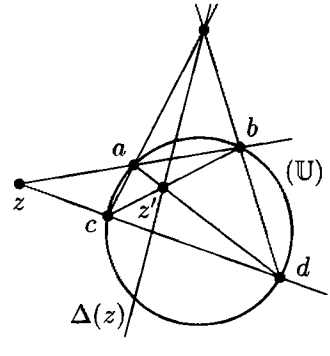
4. Deux exemples et des exercices

4.1. Intersection de droites et polarité

Dans cet exemple, et dans les exercices qui suivent, nous confondrons un point du plan avec son affixe complexe. Ainsi, nous noterons a en lieu et place de $M(a)$ par exemple.

On désigne par $\mathbb{U}$ le cercle-unité du plan complexe et on donne quatre points a, b, c et d appartenant à $\mathbb{U}$.

Déterminer le point $z = (ab) \cap (cd)$, lorsque ces droites ne sont pas parallèles. Si a, b, c et d varient de façon que z reste fixe et distinct de 0, montrer que le point $z' = (ad) \cap (bc)$ reste sur une droite $\Delta(z)$ fixe.



Écrivons que z est sur les droites (ab) et (cd) :

$$\begin{cases} z = a + b - ab\bar{z} \\ z = c + d - cd\bar{z}. \end{cases}$$

On en déduit tout de suite que $z = \dfrac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}$, si $ab - cd \neq 0$ (condition de non-parallélisme).

On a d'ailleurs une expression plus simple de son conjugué : $\overline{z} = \dfrac{a+b-c-d}{ab-cd}$.
Cela résulte des formules $\overline{a} = 1/a$, etc.

Le point z' est défini par $z' = \dfrac{ad(b+c) - bc(a+d)}{ad-bc} = \dfrac{ab(d-c) - cd(b-a)}{ad-bc}$.
Or, on a $ab = \dfrac{a+b-z}{\overline{z}}$ et $cd = \dfrac{c+d-z}{\overline{z}}$. Cela donne par substitution

$$z' = \frac{2(ad-bc) - z(a+d-b-c)}{\overline{z}(ad-bc)}.$$

Mais on a aussi $\overline{z'} = \dfrac{a+d-b-c}{ad-bc}$, de sorte que

$$z' = \frac{2}{\overline{z}} - \frac{z\overline{z'}}{\overline{z}}$$

puis $z'\overline{z} + \overline{z'}z = 2$: c'est bien l'équation d'une droite $\Delta(z)$. Cette droite, définie si $z \neq 0$, est la *polaire* [3] de z par rapport au cercle $\mathbb{U}$; on peut la construire facilement puisqu'elle passe aussi par le point $(ac) \cap (bd)$.

Si z est extérieur à $\mathbb{U}$, les points de contact x et y des tangentes menées de z à $\mathbb{U}$ sont sur $\Delta(z)$; en effet, x et y sont les solutions de l'équation $z = 2Z - \overline{z}Z^2$ en l'inconnue Z (voir **V-3**) et la droite qui joint les points-solutions a pour équation $Z = 2/\overline{z} - z\overline{Z}/\overline{z}$: on retrouve bien $\Delta(z)$.

4.2. L'astuce de Morley

L'exemple qui suit est proposé par François Rideau. Nous partons ici d'un triangle ABC non aplati inscrit dans le cercle-unité Γ : nous appellerons pour une fois a^2, b^2 et c^2 les affixes des sommets. Ce changement de notation fait partie de l'astuce, et se révèle fructueux en matière de simplicité des calculs. Bien entendu, les complexes a, b et c ne sont définis qu'au « signe » près, et cela jouera un rôle dans l'interprétation des résultats à venir.

Nous établissons que les affixes du centre I du cercle inscrit au triangle ABC, et ceux des centres I_A, I_B et I_C des cercles exinscrits (points de concours de deux bissectrices extérieures et d'une bissectrice intérieure, voir la figure) sont, à l'ordre près

$$\pm bc \pm ca \pm ab,$$

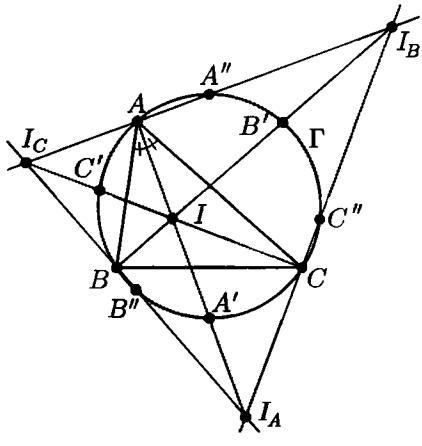
formule dans laquelle un ou trois des symboles $\pm$ valent -1. Cela donne effectivement quatre *valeurs possibles à ces affixes* [4].

[3] C'est un cas particulier de la notion générale de *polaire d'un point par rapport à une conique* que nous avons développée au chapitre **II**.

[4] La simplicité de ce résultat est remarquable !

Pour la suite de cette section, nous ferons référence aux *quatre centres* pour évoquer les points $I_A I_B I_C I$, et nous désignerons par $(\pm)_i$, où $1 \leqslant i \leqslant 3$, les symboles $\pm$ dans l'ordre dans lequel ils se présentent dans la formule *supra*.

La bissectrice intérieure et l'extérieure issues de A recoupent Γ en des points A' et A'', dont les affixes sont à l'ordre près $+bc$ et $-bc$. En effet, le théorème de l'angle inscrit établit que les arcs BA' et $A'C$ sont égaux (voir la figure), ainsi que les arcs CA'' et $A''B$. Ces conditions sont remplies par les deux points d'affixes $\pm bc$, et eux seulement. Du fait que a, b et c ne sont définis qu'au signe près, on ne peut pas savoir lequel des affixes $\pm bc$ est celui de A' ni lequel est celui de A''.



De même, les affixes des points B' et B'' où les bissectrices issues de B recoupent Γ sont $\pm ca$ et ceux des points C' et C''' où les bissectrices issues de C recoupent Γ sont $\pm ab$.

Du fait que chacune des deux bissectrices issues de B concourt avec chacune des deux issues de C, et que leur point d'intersection est l'un des quatre centres, chaque choix du couple $((\pm)_2, (\pm)_3)$ détermine de façon unique le terme $(\pm)_1$, faute de quoi la bissectrice correspondante issue de A ne concourrait pas avec les deux autres.

Choisissons par exemple $((\pm)_2, (\pm)_3) = (1, 1)$; vu le résultat de **V-4.1**, l'affixe du point d'intersection des deux bissectrices correspondantes est

$$\frac{b^2ca(c^2+ab) - c^2ab(b^2+ca)}{b^2ca - c^2ab}.$$

Un petit calcul montre alors que cet affixe est égal à $-bc + ca + ab$. Dès lors, le point ayant cet affixe appartient aussi à la bissectrice issue de A et correspondant à $(\pm)_1 = -1$ (et à cette valeur seulement, vu les remarques précédentes).

On obtient des calculs analogues en permutant circulairement les complexes a, b et c, et on obtient le quatrième affixe en choisissant $((\pm)_1, (\pm)_2, (\pm)_3) = (-1, -1, -1)$. Cela achève la démonstration.

4.3. Un peu de théorie de GALOIS

Si on pose $K = \mathbb{Q}[a^2, b^2, c^2]$ et $L = \mathbb{Q}[bc, ca, ab]$, alors K est un sous-corps de L [5] et le degré de l'extension $[L : K]$ vaut 4, du moins si le triangle est suffisamment générique [6].

En effet, on passe de K à L par deux extensions quadratiques successives puisque $(bc)^2 = b^2c^2 \in K$ et que $(ca)^2 = c^2a^2 \in K$; en outre, deux suffisent, puisque $ab = \dfrac{(bc)\cdot(ca)}{c^2}$ et que $c^2 \in K$.

C'est d'ailleurs prévisible puisque l'on a besoin du compas pour construire les bissectrices en deux seulement des trois côtés du triangle et que celles en le troisième point s'en déduisent à la règle seule. Or, les constructions à la règle n'exigent pas une extension du corps, à la différence des constructions de bissectrices qui requièrent des extensions quadratiques [7].

Enfin, les constructions des quatre centres se construisent alors à la règle seule, de sorte que leurs affixes appartiennent à L.

L'extension $L : K$ est galoisienne ; appelons à présent G le groupe de GALOIS $\mathrm{Gal}(L : K)$; ce groupe possède quatre éléments et est, de ce fait, commutatif.

Or, il n'existe à isomorphisme près que deux groupes à quatre éléments : notre groupe ne peut être qu'isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, alias le *Vierergruppe* de KLEIN [8], car, outre l'identité, il possède trois éléments d'ordre 2, que voici :

$$\begin{cases} \sigma_1 : bc \longmapsto bc & \text{et} \quad ca \longmapsto -ca \\ \sigma_2 : bc \longmapsto -bc & \text{et} \quad ca \longmapsto ca \\ \sigma_3 : bc \longmapsto -bc & \text{et} \quad ca \longmapsto -ca\,. \end{cases}$$

En relation avec les remarques *supra*, notons bien que connaître les images de bc et de ca par un des σ_i suffit pour déterminer aussi l'image de ab.

Regardons par exemple $\sigma_3(ab)$; on sait que $\sigma_3(a^2b^2c^2) = a^2b^2c^2$ puisque ce complexe appartient au corps fixe K. De cela suit que

$$\sigma_3(ab) = \frac{\sigma_3(a^2b^2c^2)}{\sigma_3(bc)\sigma_3(ca)} = +ab\,.$$

Chacun de ces morphismes induit une transposition sur exactement deux des couples de bissectrices, et induit l'identité sur le troisième de ces couples :

---

[5] Par exemple, $a^2 = \dfrac{(ca)\cdot(ab)}{bc} \in L$.

[6] Dans le cas d'un triangle trop particulier, tel un triangle équilatéral, on peut avoir $[L : K] = 1$ ou $[L : K] = 2$.

[7] Voir pour tout cela au **II-4.2.7**.

[8] Et non l'autre groupe d'ordre 4, savoir $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

par exemple, σ_1 échange les deux bissectrices au point B et les deux au point C. De ce fait, il induit aussi une permutation sur les quatre centres. C'est celle qui échange I et I_A ainsi que I_B et I_C.

En d'autres termes, chaque élément du groupe de GALOIS G induit une permutation de l'ensemble $\mathscr{I} \overset{\text{déf}}{=} \{I_A, I_B, I_C, I\}$. L'identité induit la permutation identique, et les σ_i induisent respectivement les trois permutations involutives, c'est-à-dire celles qui se décomposent en un produit de deux 2-cycles.

Il est à remarquer que, si on appelle z_A, z_B, z_C, z les affixes respectifs des quatre centres, on a aussi $L = L'$, où $L' = \mathbb{Q}[z_A, z_B, z_C, z]$. En effet, il est clair que $L' \subset L$ vu les expressions des affixes, mais aussi $L \subset L'$ car on a par exemple

$$bc = -\frac{-bc + ca + ab}{2} - \frac{-bc - ca - ab}{2}.$$

Cette remarque est à mettre en relation avec le résultat suivant, que nous a indiqué François RIDEAU : les affixes des quatre centres sont les zéros du polynôme

$$P(X) = X^4 - 2s_2X^2 + 8s_3X + s_2^2 - 4s_1s_3 \in K[X],$$

où les s_i sont les fonctions symétriques élémentaires des affixes du triangle ABC : $s_1 = a^2 + b^2 + c^2$, etc. Le fait que la somme des zéros de P est nulle n'est plus fait pour nous étonner : voir à ce propos le **V-3.2** pour ce qui concerne l'isobarycentre du système $I_AI_BI_CI$.

Ainsi, le corps de décomposition de P au-dessus de K est L', c'est-à-dire encore L, et le groupe G est aussi le groupe de GALOIS sur K du polynôme P.

4.4. Huit exercices

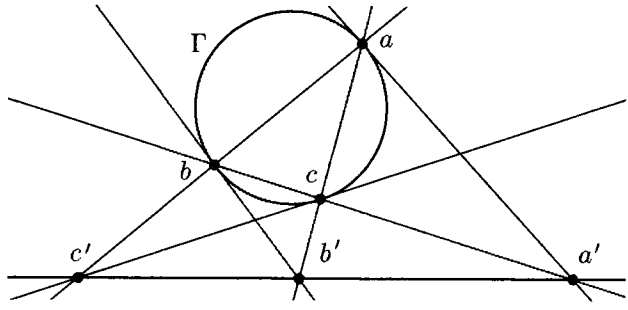
Les quelques exercices qui suivent seront corrigés en fin de chapitre.

a. Un cas limite du théorème de PASCAL. Avec les notations du **V-3**, supposons un triangle abc non isocèle inscrit dans un cercle Γ. Montrer que a', b', c', points d'intersection respectifs des tangentes à Γ en les points a, b, c avec les côtés opposés respectifs du triangle, sont alignés[9].

Ce résultat constitue effectivement un cas-limite du théorème de Pascal *: il correspond à la situation d'un hexagone dégénéré abccab inscrit dans le cercle. Les points d'intersection des droites aa et bc, bb et ca, cc et ab sont alignés. Ici, il faut comprendre que la droite aa est la tangente en a, position*

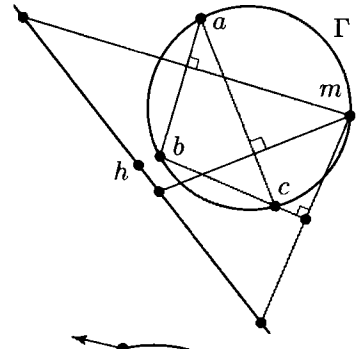
[9] Si le triangle est isocèle en a, le point a' est « rejeté à l'infini sur la droite bc ».

limite d'une corde.



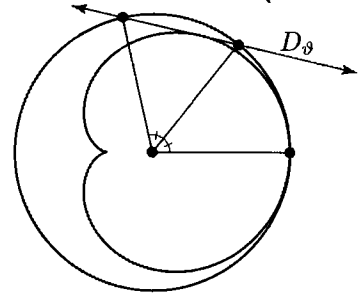
b. La droite de STEINER. Avec les notations du **V-3**, montrer que les symétriques d'un point m par rapport aux trois côtés du triangle (abc) sont alignés si, et seulement si, on a $m \in \Gamma$. Dans ce cas, montrer que la droite qui joint ces trois points passe aussi par h. [*On appelle cette droite la* droite de STEINER *du point* m.]

À noter que cette droite se déduit de la droite de SIMSON du point m par l'homothétie de centre m et de rapport 2.



c. Une enveloppe. En exploitant les formules du **V-4.a**, déterminer l'enveloppe de la droite (D_ϑ) joignant, lorsqu'ils sont distincts, les points d'affixes $e^{i\vartheta}$ et $e^{2i\vartheta}$. On pourra considérer l'enveloppe comme lieu de la limite du point d'intersection de D_ϑ et de $D_{\vartheta'}$ lorsque ϑ' tend vers ϑ.

Ce résultat, ou plutôt la généralisation que l'on en trouvera lors de la correction de cet exercice, est très attendu, puisque nous l'avons invoqué pour justifier l'existence de l'*hypocycloïde de Steiner* au chapitre **II**.

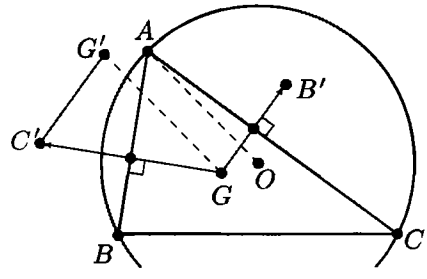


d. Équation complexe du cercle d'EULER. Soit trois complexes z_1, z_2, z_3 d'images non alignées. Montrer que l'équation en z

$$\begin{vmatrix} 2z & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\overline{z} & 0 & 1 & 0 \\ z_1^2 & \overline{z}_1^2 & z_1 & \overline{z}_1 & 1 \\ z_2^2 & \overline{z}_2^2 & z_2 & \overline{z}_2 & 1 \\ z_3^2 & \overline{z}_3^2 & z_3 & \overline{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

est l'équation de cercle d'EULER du triangle $z_1 z_2 z_3$.

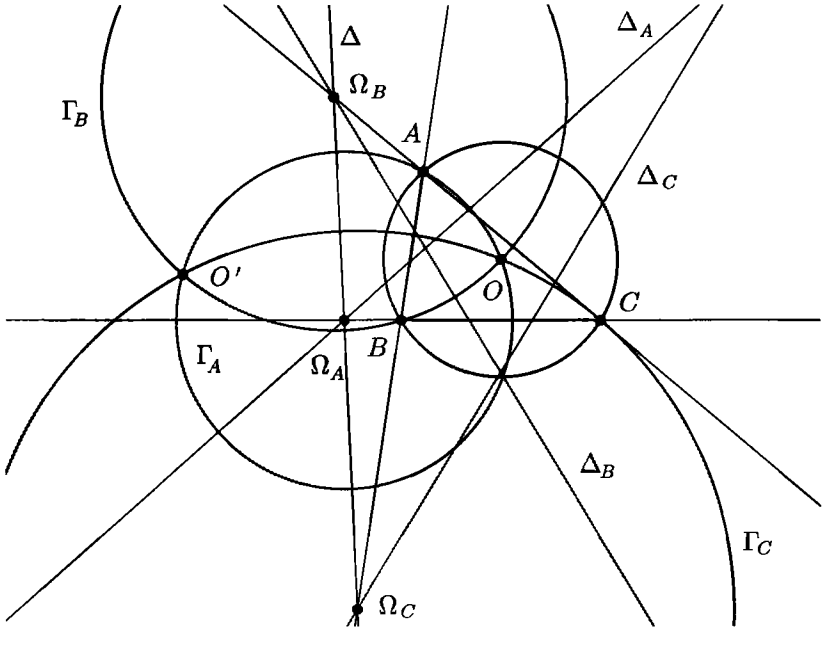
e. On considère un triangle non aplati ABC ; O en est le centre du cercle circonscrit et G l'isobarycentre. On désigne par B' et C' les symétriques de G par rapport aux côtés AB et AC. Montrer que $\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires.



f. Soit un triangle non aplati ABC et non isocèle, et O le centre du cercle circonscrit. La médiatrice Δ_A de OA recoupe BC en un point Ω_A, et on définit par permutation circulaire les points Ω_B et Ω_C.

Montrer que les points Ω_A, Ω_B et Ω_C sont alignés.

Montrer que les cercles Γ_A, Γ_B et Γ_C centrés respectivement en Ω_A, Ω_B et Ω_C et passant par O se recoupent en un second point O'.



Nous retrouverons cette configuration au **VI-5.4**.

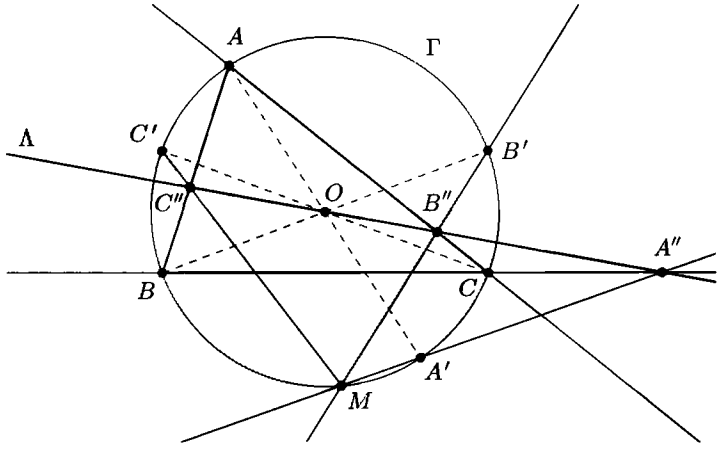
g. On considère trois points distincts A, B, C sur le cercle unité, et leurs opposés diamétraux A', B', C'. Un quatrième point M du cercle est tel que $A'M$, $B'M$ et $C'M$ coupent BC, CA et AB en A'', B'' et C'' respectivement. Montrer l'alignement de O, A'', B'', C''.

Le calcul que l'on trouvera en fin de chapitre fait bien sûr appel aux nombres complexes. Un internaute astucieux a trouvé, sur le forum de `http://les-mathematiques.u-strasbg.fr` une preuve géométrique : on applique le théorème de PASCAL à l'hexagone $ABMB'A'C$ inscrit dans le cercle. Dès lors, les points $AA' \cap BB' = O$, $AC \cap MB' = B''$ et $BC \cap MA' = A''$ sont alignés. L'alignement $OA''B''$ s'établit alors de la même façon à partir de l'hexagone inscrit $BCMC'B'A$.

L'alignement des points $A''B''C''$ s'explique, lui, par un argument très général. Le voici.

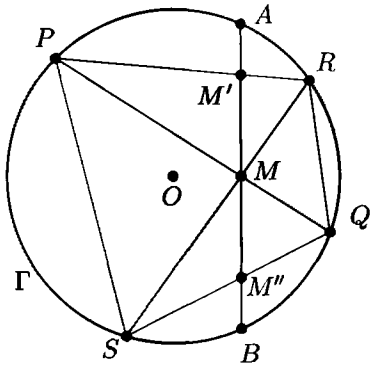
Proposition. Si les sommets d'un triangle ABC possèdent chacun une polaire par rapport à une conique Γ, et que chacune de ces polaires coupe le côté opposé en un seul point, alors ces trois points d'intersection sont alignés.

Si M est un point quelconque du plan, on applique cet énoncé au cercle « de rayon nul » réduit au point M. La polaire du point A est alors la perpendiculaire à AM menée de M. Si, de plus, M est sur le cercle circonscrit à ABC, cette perpendiculaire est la droite $A'M$. Cela montre bien que les points d'intersection des trois polaires, savoir $A'M$, $B'M$ et $C'M$ avec les côtés opposés, savoir BC, CA et AB, sont alignés.



h. Une corde AB d'un cercle Γ a pour milieu un point M. Par le point M passent deux cordes PQ et RS. Les droites PR et QS coupent la droite

AB en M' et M'' respectivement. Montrer que M est le milieu de $M'M''$.



5. Homographies du plan complexe

Les homographies *sont des transformations du plan complexe complété par un point à l'infini. Bien qu'elles ne soient pas applications affines, et donc encore moins des isométries, elles possèdent suffisamment de propriétés importantes pour justifier l'étude qui suit.*

5.1. Généralités

Dans ce paragraphe et les deux suivants, nous confondrons encore un point du plan avec son affixe complexe.

On appelle *homographie* du plan complexe une application h du type $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, où a, b, c et d sont des complexes vérifiant $\Delta = ad - bc \neq 0$ (faute de quoi h serait constante). À noter que le domaine de définition de h ainsi définie est $\{z \in \mathbb{C} \mid cz + d \neq 0\}$.

[*On notera aussi qu'une homographie pour laquelle* $c = 0$ *est une similitude affine directe, définie sur* $\mathbb{C}$ *entier, et que* $c = 0 \Longrightarrow a \neq 0$.]

Pour éviter d'avoir à considérer de nombreux cas particuliers et de s'empêtrer dans des questions de domaine de définition, il est intéressant de « compléter » $\mathbb{C}$ en lui adjoignant un symbole noté ∞ et de désigner par $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ l'ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ [10] .

Comme les applications géométriques recherchées dans ce chapitre nous conduisent à identifier avec $\mathbb{C}$ un plan affine euclidien orienté muni d'un

[10] Si le corps de base est $\mathbb{C}$, l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ peut *a fortiori* être considéré comme une droite affine sur ce corps de base. L'ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en est alors le complété projectif, la complétion d'une droite affine s'effectuant par adjonction d'un **point** à l'infini.

repère orthonormé direct, nous adjoindrons aussi à ce plan un symbole que nous noterons lui aussi ∞ et que nous considérerons comme l'image du symbole ∞ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on lui associe l'application suivante, que l'on nomme toujours *homographie*, que nous continuerons à désigner par h, de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans lui-même définie par $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ si $z \neq \infty$ et $cz+d \neq 0$, par $h(-d/c) = \infty$ si $c \neq 0$ et enfin par $h(\infty) = \begin{cases} \infty & \text{si } c = 0 \\ a/c & \text{sinon.} \end{cases}$

Cette convention sera constante désormais : lorsque nous dirons que h est définie par $z \longmapsto (az+b)/(cz+d)$, nous sous-entendrons que $h(\infty)$ et, le cas échéant, $h(-d/c)$ vérifient la définition précédente.

On vérifie sans difficulté que si deux homographies h et h' sont associées à des matrices M et M' dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, alors $h \circ h'$ est associée à MM'.

Un premier avantage de cette extension est que, si h est associée à la matrice $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, elle réalise une **bijection** de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sur lui-même, dont l'inverse est d'ailleurs associé à la matrice M^{-1}, matrice *inverse* de M.

Cela nous permet aussi par exemple d'interpréter les similitudes (directes) définies par $z \longmapsto az+b$ comme les restrictions à $\mathbb{C}$ des homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ laissant fixe ∞.

Vérifions que si deux homographies, h et h' définies par $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ et $z \longmapsto \dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$ coïncident en au moins trois points de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, alors $h' = h$ et les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ sont proportionnelles (avec un coefficient de proportionnalité dans $\mathbb{C}^*$).

Posons alors $H = h^{-1} \circ h'$ et commençons par le cas où $h'(0) = h(0)$, $h'(\infty) = h(\infty)$ et $h'(1) = h(1)$. On a $H(\infty) = \infty$, de sorte que H est de la forme $z \longmapsto Az+B$, avec $A \in \mathbb{C}^*$ et $B \in \mathbb{C}$. De $H(0) = 0$ on déduit $B = 0$ et de $H(1) = 1$ on déduit que $A = 1$: ainsi, $H = \mathrm{Id}$ et $h' = h$.

Dans le cas général, h et h' coïncident en trois points distincts α, β et γ. Si l'un des trois, disons γ, vaut ∞, alors nous sommes quasiment dans le même cas que précédemment : $H(\infty) = \infty$, de sorte que H est de la forme

---

En revanche, si l'on considère $\mathbb{C}$ comme un **plan affine réel**, la complétion de celui-ci se fait par l'adjonction d'une **droite à l'infini**, comme c'est le cas pour tout plan affine.

On voit donc que l'objet projectif obtenu dépend du corps de base et il faut donc bien préciser ce que l'on fait.

$z \longmapsto Az + B$, avec $A \in \mathbb{C}^*$ et $B \in \mathbb{C}$. On a alors $\alpha \neq \beta \neq \infty$ et

$$\begin{cases} A\alpha + B = \alpha \\ A\beta + B = \beta . \end{cases}$$

Ce système linéaire en (A, B) est de CRAMER et admet la solution $(1, 0)$, qui est donc unique : on a bien encore une fois $H = \mathrm{Id}$ et $h' = h$.

Sans l'astuce qui va suivre, le cas le plus général, savoir $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \infty$ conduirait à des calculs pénibles. Heureusement, nous allons nous ramener au premier cas étudié. Soit en effet l'homographie h_0 définie par

$$h_0(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta} : \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} .$$

On a manifestement $h_0(\alpha) = 0$, $h_0(\beta) = \infty$ et $h_0(\gamma) = 1$; ainsi, $h \circ h_0^{-1}$ et $h' \circ h_0^{-1}$ sont deux homographies, et elles coïncident en 0, ∞ et 1 : elles sont donc égales, de sorte que $h' = h$.

Attaquons-nous aux matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$; écrire que, pour tout $z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, $(az + b)/(cz + d) = (a'z + b')/(c'z + d')$ conduit à des calculs pénibles, même si l'on s'aperçoit que cela entraîne l'égalité des polynômes $(aX + b)(c'X + d')$ et $(a'X + b')(cX + d)$.

Encore une fois, pensons à H : cette homographie vaut l'identité et est associée à la matrice $M^{-1}M'$ qui est de la forme $\begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}$. On a donc $(tz + u)/(vz + w) = z$ pour tout z, de sorte que le polynôme $vX^2 + (w - t)X - u$ est nul. Cela donne tout de suite $w = t$ et $u = v = 0$, de sorte que $M'M^{-1}$ est de la forme $\lambda\mathrm{Id}$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Nous avons bien établi que $M' = \lambda M$.

Enfin, établissons que si $\alpha \neq \beta \neq \gamma \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ et $\alpha' \neq \beta' \neq \gamma' \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sont donnés, il existe une unique homographie h telle que $h(\alpha) = \alpha'$, $h(\beta) = \beta'$ et $h(\gamma) = \gamma'$.

Envisageons le cas général où ces six éléments sont $\neq \infty$, les autres cas se traitant de manière analogue. On définit alors h_0 comme *supra* et h_1 par

$$h_1(z) = \frac{z - \alpha'}{z - \beta'} : \frac{\gamma' - \alpha'}{\gamma' - \beta'} .$$

Alors, $h = h_1^{-1} \circ h_0$ convient, et l'unicité de h découle de ce qui précède [11].

[11] Ces dernières propriétés se comprennent mieux grâce à la Géométrie projective : $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ n'est autre que le *complété projectif* de $\mathbb{C}$ considéré comme espace affine sur le corps $\mathbb{C}$ lui-même ; les homographies que nous avons définies sont les homographies de l'espace projectif $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans lui-même, et les triplets d'éléments distincts $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ sont les *bases projectives* de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Anticipant sur la propriété de *groupe* qui suit, nous venons d'établir que le groupe des homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ *agit simplement transitivement* sur l'ensemble des bases projectives de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Un autre avantage de notre extension des homographies à $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est que l'ensemble des homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est un sous-groupe du groupe (muni de la loi $\circ$) des bijections de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sur lui-même ; le vérification de cela est immédiate et nous désignerons par $H_2(\mathbb{C})$ ce groupe des homographies. Nous le retrouverons dans ce même chapitre lorsque nous approfondirons les propriétés des homographies, en relation avec le birapport, voir au **V-9**.

5.2. Homographies stabilisant le cercle-unité

Nous recherchons, dans le présent paragraphe, les homographies h telles que $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$, où $\mathbb{U}$ est le cercle-unité.

Nous allons établir que ce sont celles de la forme $z \longmapsto \dfrac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}}$, où $|\beta| \neq |\alpha|$.

Si $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$, on a, pour tout $z \in \mathbb{U}$,

$$(\overline{az} + \overline{b})(az + b) = (\overline{cz} + \overline{d})(cz + d)\,.$$

Comme, pour $z \in \mathbb{U}$, on a $\overline{z}z = 1$, cela implique que $\overline{A}z + A\overline{z} + B = 0$, avec

$$A = \overline{a}b - \overline{c}d \quad \text{et} \quad B = \overline{a}a + \overline{b}b - \overline{c}c - \overline{d}d\,.$$

Si $A \neq 0$, cela signifie, vu la section **V-2**, que $\mathbb{U}$ est inclus dans la droite d'équation $\overline{A}z + A\overline{z} + B = 0$, ce qui n'est pas. On en déduit que $A = 0$, puis $B = 0$.

Lorsque $a = 0$, les conditions $A = B = 0$, $\Delta \neq 0$ impliquent $d = 0$, $c \neq 0$ et $|b| = |c|$, de sorte que h est de la forme $z \neq 0 \longmapsto \dfrac{e^{2i\varphi}}{z}$. Ce n'est pas encore la forme annoncée, mais on peut écrire $\dfrac{e^{2i\varphi}}{z} = \dfrac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}z}$ qui correspond à $\alpha = 0$ et $\beta = e^{i\varphi}$. Inversement, une homographie de cette forme est définie en tout point de $\mathbb{U}$ et stabilise $\mathbb{U}$; d'ailleurs, sa restriction à $\mathbb{U}$ coïncide avec celle de l'application $z \longmapsto e^{2i\varphi}\overline{z}$ qui est la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par 0 et d'angle polaire φ (*modulo* π).

Au contraire, lorsque $a \neq 0$, les conditions $A = B = 0$, $\Delta \neq 0$ impliquent

$$b = \overline{c}d/\overline{a}\,, \quad \overline{a}a - \overline{c}c - \overline{d}d + \overline{c}\overline{c}d\overline{d}/\overline{a}a = \frac{(\overline{a}a - \overline{d}d)(\overline{a}a - \overline{c}c)}{\overline{a}a} = 0$$

et

$$ad - \overline{c}cd/\overline{a} = \frac{d(\overline{a}a - \overline{c}c)}{\overline{a}} \neq 0\,,$$

et de cela suit $c = \overline{b}a/\overline{d}$ et $|a| = |d| \neq |b| = |c|$. Comme $|d| = |a|$, on a $\overline{d}d = \overline{a}a$ et l'on peut poser $\overline{d} = ae^{2i\omega}$: on a alors

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b}{a\overline{b}z/\overline{d} + d} = \overline{d}/a \times \frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{d}d/a} = e^{2i\omega} \times \frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}} = \frac{ae^{i\omega}z + be^{i\omega}}{\overline{be^{i\omega}} + \overline{ae^{i\omega}}}$$

qui est de la forme annoncée (avec $\alpha = ae^{i\omega}$ et $\beta = be^{i\omega}$). Inversement, une

homographie de cette forme est définie en tout point de $\mathbb{U}$ et stabilise $\mathbb{U}$: on a en effet, pour $z \in \mathbb{U}$, $az+b \neq 0$ et $\left|\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right| = \left|\dfrac{az+b}{\overline{z(\overline{b}z+\overline{a})}}\right| = \left|\dfrac{az+b}{\overline{b+az}}\right| = 1$.

Remarque : comme les « coefficients » d'une homographie ne sont définis qu'à un facteur multiplicatif (non nul) près, les homographies stabilisant $\mathbb{U}$ n'auront pas toujours le tact de se présenter comme *supra*. Par exemple, $\dfrac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta}z+\overline{\alpha}}$ est aussi égal à $\dfrac{\mathrm{i}\alpha z+\mathrm{i}\beta}{\overline{\mathrm{i}\beta}z+\overline{\mathrm{i}\alpha}}$, qui est cette fois de la forme $-\dfrac{\alpha' z+\beta'}{\overline{\beta'}z+\overline{\alpha'}}$. Nous voilà prévenus.

5.3. Le groupe $\mathbf{PO}(\mathbb{U})$

On vérifie sans peine que l'ensemble G des matrices complexes de la forme $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}$, avec $|\beta| \neq |\alpha|$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ et que l'ensemble $\mathbf{PO}(\mathbb{U})$ des homographies stabilisant $\mathbb{U}$ est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{U}$ sur lui-même. On dispose en outre d'un morphisme h du groupe G *sur* le groupe $\mathbf{PO}(\mathbb{U})$ qui à $M = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}$ associe l'homographie $z \longmapsto h_M(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta}z+\overline{\alpha}}$. Le noyau de ce morphisme est le sous-groupe (distingué) de G constitué des matrices proportionnelles à l'identité, c'est-à-dire de la forme $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \overline{\alpha}\end{pmatrix}$, avec $\overline{\alpha} = \alpha \neq 0$. Autrement dit, $\operatorname{Ker} h = \mathbb{R}^* \mathbf{I}_2$ et $\mathbf{PO}(\mathbb{U})$ est isomorphe au groupe-quotient $G/\mathbb{R}^* \mathbf{I}_2$. Dans le paragraphe suivant, nous allons étudier une partie génératrice de $\mathbf{PO}(\mathbb{U})$ facile à décrire géométriquement.

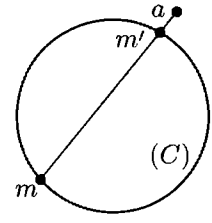
5.4. Les involutions de FRÉGIER de $\mathbb{U}$

*La notion d'*involution de Frégier *est propre aux coniques non dégénérées les plus générales. Nous en avons vu un exemple au* **IV-1.4**, *à propos de triangles rectangles et nous allons maintenant l'envisager dans un autre cadre.*

En fait, en toute généralité, une involution de FRÉGIER est définie ainsi qu'il suit : on se donne une conique non dégénérée $\mathscr{C}$ d'un plan projectif et un point $A \notin \mathscr{C}$. On la définit alors comme l'application qui à un point $M \in \mathscr{C}$ (éventuellement à l'infini) associe le point $M' \in \mathscr{C}$ où la droite AM recoupe $\mathscr{C}$, avec les conventions habituelles : $M' = M$ si la droite AM est tangente à $\mathscr{C}$, et M' est à l'infini si AM est parallèle à une direction asymptotique de $\mathscr{C}$.

Puisque nous allons nous limiter à des cercles, les points à l'infini ne seront pas notre préoccupation première pour ce qui concerne les points M ou M'.

Cela étant, nous revenons à nos notations par des lettres minuscules.



En toute généralité, considérons un cercle (C) du plan euclidien (ou même une conique non dégénérée) et un point $a \notin (C)$. Si $m \in (C)$, la droite (am) recoupe (C) en un point m', éventuellement égal à m si (am) est tangente à (C). Cela définit une application involutive I_a de (C) sur lui-même, appelée *involution de Frégier* de centre a. Vérifions que, lorsque $(C) = \mathbb{U}$, l'involution I_a est un élément de $\mathbf{PO}(\mathbb{U})$.

Nous avons vu dans la section **V-3.3** qu'une équation de (mm') est, puisque $R = 1$, donnée par la formule $Z \in (mm') \iff Z = m + m' - mm'\overline{Z}$. Donc, les points a, m et m' sont alignés si, et seulement si, $a = m + m' - \overline{a}mm'$; on obtient donc $m' = \dfrac{m-a}{\overline{a}m-1}$.

On reconnaît là la variante de la forme trouvée au paragraphe **V-5.2** (après multiplication de tous les coefficients par i).

Les involutions de FRÉGIER fournissent *presque* toutes les homographies involutives stabilisant $\mathbb{U}$. En effet, si $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in G$, alors h_M est une involution si, et seulement si, M^2 est de la forme $\lambda.\mathbf{I}$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Un calcul simple montre que l'on obtient, outre les involutions de FRÉGIER, l'application identique ainsi que toutes les involutions de la forme $z \longmapsto \dfrac{\beta}{\overline{\beta}\overline{z}}$, avec $\beta \neq 0$. Comme nous l'avons vu, ces dernières ne sont autres que les restrictions à $\mathbb{U}$ de certaines symétries orthogonales. Ce sont en quelque sorte des « cas-limites » d'involutions de FRÉGIER : si on pose $a = it\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, avec t réel, dans $\dfrac{z-a}{\overline{a}z-1}$ et que l'on fasse tendre t vers ∞, on obtient comme limite précisément $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}$. Tout se passe comme si le centre a de l'involution était rejeté à l'infini, mais dans une direction bien déterminée !

Dans la construction *supra*, nous avons vu que $m \in (C)$ est fixe par l'involution de FRÉGIER de centre a si (et seulement si) la droite am est tangente au cercle. Si le point a de est intérieur à (C), il n'y a donc pas de point fixe, et il y en a deux (les points de contact des tangentes au cercle menées de a) lorsque a est extérieur à (C). Lorsque le centre est à l'infini, il y a deux points fixes diamétralement opposés : ce sont les points pour lesquels la tangente au cercle a la direction déterminée par a.

[Le modèle de complétion de $\mathbb{C}$ que nous avons appelé $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ne rend pas compte ici de la pluralité des points à l'infini. Un autre modèle y parvient, c'est celui où l'on adjoint à un plan affine une **droite** à l'infini et que l'on désigne par $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

À noter le passage de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$, puisque $\mathbb{C}$, considéré comme droite vectorielle sur le corps de base $\mathbb{C}$, ne peut avoir qu'un point à l'infini.]

5.5. Génération de PO(𝕌) par les involutions de FRÉGIER

Nous nous proposons de montrer que « presque » tous les éléments non involutifs de $\mathbf{PO}(\mathbb{U})$ *sont de la forme* $I_v \circ I_u$, *avec* u *et* v *complexes de module* $\neq 1$ *et que les cas exceptionnels correspondent à* u *et* v *à l'infini.*

De cette démonstration suit en particulier que le groupe $\mathbf{PO}(\mathbb{U})$ est engendré par les involutions de FRÉGIER *généralisées*. Soit donc une homographie h de matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$. Si $\alpha = 0$, h est déjà une involution et nous excluons ce cas. Un calcul simple montre que, si u et v sont des complexes, $I_v \circ I_u$ est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -v \\ \overline{v} & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -u \\ \overline{u} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - v\overline{u} & v - u \\ \overline{v} - \overline{u} & 1 - \overline{v}u \end{pmatrix}$. Disjoignons les cas restants :

5.5.1. Le cas $\beta \neq 0$

Alors,

$$h = I_v \circ I_u \iff \frac{1 - v\overline{u}}{\alpha} = \frac{v - u}{\beta} = \frac{\overline{v} - \overline{u}}{\overline{\beta}} = \frac{1 - v\overline{u}}{\overline{\alpha}}.$$

La valeur commune de ces quatre quotients est nécessairement un réel $t \neq 0$. Nous devons donc résoudre :

$$\mathscr{S} \qquad \begin{cases} 1 - v\overline{u} = t\alpha \\ v - u = t\beta. \end{cases}$$

Après substitution de la seconde équation dans la première, $\mathscr{S}$ équivaut à

$$\begin{cases} (3) \quad t(\beta\overline{u} + \alpha) = 1 - \overline{u}u \\ (4) \quad v = u + t\beta. \end{cases}$$

On va pouvoir poser $t = \dfrac{1 - \overline{u}u}{\beta\overline{u} + \alpha}$, si toutefois cela définit un réel non nul. C'est effectivement le cas si, et seulement si, $\beta\overline{u} + \alpha \in \mathbb{R}^*$, c'est-à-dire si, et seulement si, u appartient à la droite (δ) d'équation $\beta\overline{u} - \overline{\beta}u = \overline{\alpha} - \alpha$ privée du point $-\overline{\alpha}/\overline{\beta}$, et $|u| \neq 1$. Dans ce cas, on obtient $v = u + t\beta = u + \dfrac{1 - \overline{u}u}{\beta\overline{u} + \alpha}\beta = \dfrac{\alpha u + \beta}{\beta\overline{u} + \alpha} = \dfrac{\alpha u + \beta}{\overline{\beta}u + \overline{\alpha}} = h(u)$. On voit alors que v appartient aussi à (δ) : en effet, $\beta\overline{v} + \alpha = \beta(\overline{u} + t\overline{\beta}) + \alpha$ est également réel.

On a donc obtenu des complexes u et v tels que $\begin{pmatrix} 1 - v\overline{u} & v - u \\ \overline{v} - \overline{u} & 1 - \overline{v}u \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$. Reste à vérifier que v est aussi de module $\neq 1$; or, le déterminant du membre de gauche de la formule précédente est $(\overline{v}v - 1)(\overline{u}u - 1)$

et le membre de droite en est $t^2(\overline{\alpha}\alpha - \overline{\beta}\beta) \neq 0$. La condition est donc acquise puisque l'on a fait en sorte que $t \neq 0$.

Concluons : **lorsque $\alpha \neq 0$, on a $h = I_v \circ I_u$ si, et seulement si, $u \in (\delta) \setminus \{-\overline{\alpha}/\overline{\beta}\}$ et $v = h(u)$.**

En outre, le cas où $u = {}^{-\overline{\alpha}}/_{\overline{\beta}}$ correspond à celui où v est à l'infini dans la direction de (δ) ; I_v est alors la symétrie orthogonale par rapport au diamètre de $\mathbb{U}$ orthogonal à (δ).

Approfondissons un peu le rôle de (δ) : z est point fixe de h si, et seulement si, $\overline{\beta}z^2 + (\overline{\alpha} - \alpha)z - \beta = 0$. Si les deux solutions de cette équation sont dans $\mathbb{U}$, ils appartiennent à la droite d'équation $z - \dfrac{\beta\overline{z}}{\overline{\beta}} + \dfrac{\overline{\alpha} - \alpha}{\overline{\beta}} = 0$ (voir **V-3**) et cette droite est justement (δ) ; la droite (δ) joint donc les deux points fixes de h (ou est la tangente à $\mathbb{U}$ en le point fixe de h, lorsqu'il est unique).

*Que h ait ou non ses points fixes dans $\mathbb{U}$, que h soit ou non une involution, nous dirons que (δ) est l'*axe *de l'homographie h dès lors que l'équation* supra *définit bien une droite, c'est-à-dire lorsque $\beta \neq 0$.* Toutefois, il est faux que (δ) passe par les points fixes de h lorsque ces points ne sont pas sur $\mathbb{U}$.

5.5.2. Le cas $\beta = 0$

C'est le cas le plus simple : $\forall z \neq 0, h(z) = {}^{\alpha}/_{\overline{\alpha}z}$ et h est une rotation. Alors, h est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des diamètres de $\mathbb{U}$, qui sont bien des involutions de $\mathbf{PO}(\mathbb{U})$. On vérifie qu'il n'y a pas d'autre possibilité : par exemple, pour u et v de module $\neq 1$, on a $h = I_v \circ I_u \Longrightarrow v = u \Longrightarrow h = \mathrm{Id}$.

[Le résultat trouvé est prévisible : les points fixes d'une rotation sont les *points cycliques* et (δ) est donc la droite de l'infini de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Rien d'étonnant donc à ce que l'on ait dû aller chercher là les centres des involutions.]

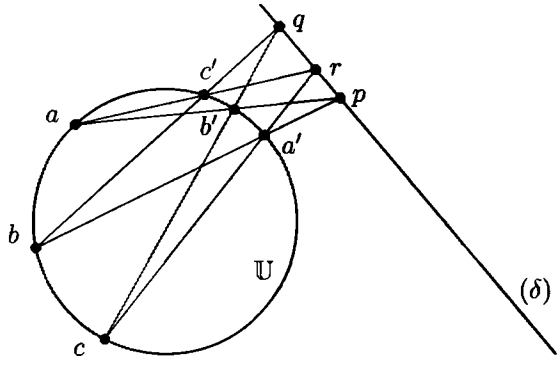
6. Le théorème de Pascal

Dans le cas général d'une conique, et non d'un cercle comme ici, il est loisible d'établir d'abord le théorème de Pascal et d'en déduire la génération d'un certain groupe de transformations par des involutions.

Ici, nous allons faire la démarche inverse, en commençant par le cas du cercle pour généraliser ensuite le résultat à une conique quelconque.

Nous énonçons : *si a, b, c, a', b', c' sont six points distincts du cercle $\mathbb{U}$, si les droites (ab') et $(a'b)$, (bc') et $(b'c)$, (ca') et $(c'a)$, se coupent respectivement*

en p, q et r, alors les points p, q, r sont alignés.



Si les points p, q, r ne sont pas tous distincts, il n'y a rien à démontrer. Supposons-les distincts, et supposons par exemple que (ca') coupe la droite $(\delta) \overset{\text{déf}}{=} (pq)$ en un point r_0 (une démonstration analogue réglerait le cas où ces droites sont parallèles).

Nous allons montrer que $r_0 = r$. Or, (δ) est l'axe de l'homographie $h = I_{r_0} \circ I_q$. Admettons pour l'instant que $J = I_{r_0} \circ I_q \circ I_p$ est une involution ; par construction de p, q, r_0, on a $J(a) = a'$:

$$a \overset{I_p}{\longmapsto} b' \overset{I_q}{\longmapsto} c \overset{I_{r_0}}{\longmapsto} a' .$$

Puisque J est une involution, on a aussi $J(a') = a$:

$$a' \overset{I_p}{\longmapsto} b \overset{I_q}{\longmapsto} c' \overset{I_{r_0}}{\longmapsto} I_{r_0}(c') = J(a') = a .$$

Cela montre que c', a et r_0 sont alignés et donc que $r_0 \in (ac')$. Comme $r_0 \in (ca')$, on a bien $r_0 = r$; enfin, par construction, $p, q, r \in (\delta)$ sont alignés. Cqfd.

Reste donc à démontrer les deux lemmes qui suivent.

Lemme 1. Une homographie $h \neq \mathrm{Id}$ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$: $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ est involutive si, et seulement si, $a + d = 0$.

En effet, le calcul montre tout de suite que l'involutivité équivaut à

$$\begin{cases} a^2 + bc = d^2 + bc \\ b(a+d) = c(a+d) = 0 \end{cases}$$

et la conclusion s'obtient facilement. À noter que $a+d=0 \Longleftrightarrow \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$.

Lemme 2. Soit u, v, w trois points de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$, alors $J = I_w \circ I_v \circ I_u$ est une involution si, et seulement si, u, v, w sont alignés.

7.1. Définition

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}^*$; on appelle *inversion (analytique)* de pôle a et de rapport (ou puissance) $k \in \mathbb{R}^*$ l'application $\hbar$ qui à $z \neq a$ associe z' tel que $(z'-a)(z-a) = k$. Les inversions sont des homographies particulières ; notamment elles transforment les cercles-droites en cercles-droites et elles « conservent les angles de courbes[12] ».

De même, on appelle *inversion (géométrique)* de pôle $a \in \mathbb{C}$ et de rapport (ou puissance) $k \in \mathbb{R}^*$ l'application qui au complexe $z \neq a$ associe z' tel que $(z'-a)\overline{(z-a)} = k$. On peut, si besoin est, l'étendre en une application de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans lui même en associant ∞ à a et *vice versa*. Définie comme application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ou comme application de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, elle est chaque fois une involution de l'ensemble considéré.

Si A, M et M' sont les points d'affixes a, z et z', la définition *supra* équivaut à : A, M et M' alignés et $\overline{AM} \times \overline{AM'} = k$. En outre, l'inversion géométrique n'est autre qu'une inversion analytique suivie de l'application de conjugaison qui, géométriquement, est une symétrie orthogonale.

Si $\mathbf{I}$ est l'inversion de pôle A et de rapport $k \neq 0$, l'ensemble des points fixes de $\mathbf{I}$ est l'ensemble des points M tels que $AM^2 = k$. C'est l'ensemble vide si $k < 0$ et le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{k}$ sinon. Ce cercle est alors appelé le *cercle de l'inversion* $\mathbf{I}$.

Si $\mathbf{I}$, inversion géométrique (ou analytique) de pôle A et de rapport k envoie des points M et N (différents de A) sur M' et N' respectivement, alors on a, en termes de longueurs

$$M'N' = k\frac{MN}{\overline{AM} \times \overline{AN}}\cdot$$

Par exemple, dans le cas d'une inversion analytique, si on désigne par a, m, n, m' et n' les affixes de ces cinq points, on a

$$n'-m' = (n'-a)-(m'-a) = k\Big(\frac{1}{n-a} - \frac{1}{m-a}\Big) = k\frac{m-n}{(m-a)(n-a)}\cdot$$

et la formule s'ensuit immédiatement.

Pourquoi préférer dans certains contextes l'inversion géométrique à l'analytique ?

Bien que l'une et l'autre ne différent que par l'opération de conjugaison, l'inversion géométrique a l'avantage de posséder la propriété d'alignement entre les points A, M et M'.

[12] Ces propriétés seront énoncées au **V-9.1**.

Par exemple, la formule de l'inversion géométrique de pôle l'origine et de rapport $k \neq 0$ est

$$z = x + \mathrm{i}y \longmapsto Z = k\,\frac{x + \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}\,,$$

alors que celle de l'inversion analytique est

$$z = x + \mathrm{i}y \longmapsto Z = k\,\frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}\,.$$

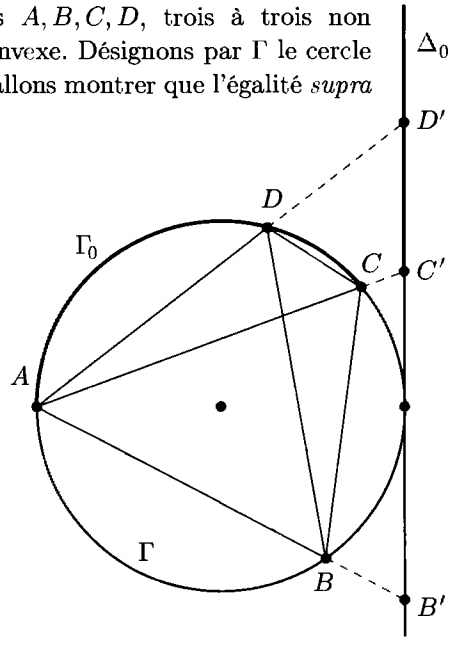
Un inconvénient (tout relatif) à la définition géométrique est la seule conservation des angles de courbes *non orientés* [13]. Dans la pratique, le contact et l'orthogonalité des courbes sont conservés, et cela nous suffira en général.

7.2. Le théorème de Ptolémée

Nous établissons ici la proposition : *dans un plan affine euclidien* Π, *un quadrilatère convexe* $ABCD$ *est inscriptible dans un cercle si, et seulement si, on a l'égalité suivante portant sur les distances, dite* formule de Ptolémée,

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC\,.$$

Supposons donc les quatre points A, B, C, D, trois à trois non alignés, formant un quadrilatère convexe. Désignons par Γ le cercle circonscrit au triangle ABC : nous allons montrer que l'égalité *supra* équivaut à $D \in \Gamma$.



Choisissons un repère orthonormé du plan dont l'origine O soit confondue avec le point A et tel que le cercle Γ soit centré sur l'axe Ox. Une équation de Γ est alors de la forme

$$X^2 + Y^2 - dX = 0\,,$$

où d est le diamètre de Γ. Considérons l'inversion géométrique $\mathbf{I}$ de pôle A et de rapport d^2.
Nous allons commencer par vérifier qu'elle transforme l'ensemble $\Gamma \setminus \{A\}$ en la droite Δ d'équation $X = d$ [14].

[13] À voir au **V-9.1**.
[14] Ce résultat sera largement généralisé au **V-9.3**.

En effet, une représentation polaire de $\Gamma \setminus \{A\}$ est $\varrho = d\cos\vartheta$, où ϑ décrit $]-\pi/2, \pi/2[$, et une représentation polaire de son image par l'inversion est donc $\varrho = d/\cos\vartheta$, pour les mêmes valeurs de ϑ. Le résultat est donc acquis.

Cela étant, appelons B', C' et D' les images de B, C et D par **I**, ces deux premières images appartenant à Δ vu le choix de Γ. Appelons Γ_0 l'arc ouvert du cercle Γ d'extrémités A et C et ne contenant pas B. Son image par l'inversion est la demi-droite Δ_0 ouverte incluse dans Δ, d'origine C' et ne contenant pas B'.

Alors, le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire montre que

$$D \in \Gamma_0 \iff D' \in \Delta_0 \iff D'B' = D'C' + C'B' .$$

Or, on a les formules

$$D'B' = d^2\frac{DB}{AD \times AB}, \quad D'C' = d^2\frac{DC}{AD \times AC} \quad \text{et} \quad C'B' = d^2\frac{CB}{AC \times AB} .$$

L'équivalence annoncée est alors immédiate.

8. Les triangles équilatéraux

Grâce à l'intervention des racines cubiques de l'unité, les nombres complexes se prêtent très volontiers à la manipulation des triangles équilatéraux.

8.1. Caractérisation des triangles équilatéraux par les affixes des sommets

Soit trois complexes a, b et c; les images de ces complexes forment un triangle équilatéral direct si, et seulement si, $a + bj + cj^2 = 0$, et un triangle équilatéral indirect si, et seulement si, $a + bj^2 + cj = 0$, avec $j = e^{2i\pi/3}$.

En effet, le triangle obtenu est équilatéral direct si, et seulement si,

$$(a - c) = e^{-i\pi/3}(b - c) ,$$

et on a $e^{-i\pi/3} = -j$. La condition cherchée est donc $(a - c) + j(b - c) = a + bj + cj^2 = 0$. L'autre cas se traite de la même façon.

Exercice. Un déterminant circulant. À quelle condition, portant sur les images des complexes a, b et c, le déterminant « circulant » $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ est-il nul ?

[*On pourra le factoriser sous la forme*

$$(a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$$

et utiliser ce qui précède.]

8.2. Les centres isodynamiques

Les centres isodynamiques *d'un triangle forment une paire que l'on retrouve en relation avec plusieurs de nos objets familiers : l'inversion, les triangles équilatéraux et même, plus loin, avec la notion de* birapport.

Donnons-nous un triangle, les affixes des sommets étant a, b et c. Existe-t-il une inversion analytique ι (de pôle distinct de a, b, c) telles que $a' = \iota(a), b' = \iota(b)$ et $c' = \iota(c)$ forment un triangle équilatéral direct ? Si ι a pour pôle ω et pour rapport k, on a l'égalité à $a' - \omega = k/(a - \omega)$ et deux égalités analogues portant sur b' et c'.

Un calcul simple montre que le triangle $(a'b'c')$ est alors équilatéral direct si, et seulement si, $\dfrac{1}{a-\omega} + \dfrac{\mathrm{j}}{b-\omega} + \dfrac{\mathrm{j}^2}{c-\omega} = 0$. La réduction au même dénominateur donne la relation équivalente

$$\omega(-c - b - \mathrm{j}c - \mathrm{j}a - \mathrm{j}^2 b - \mathrm{j}^2 a) + bc + \mathrm{j}ac + \mathrm{j}^2 ab = 0\,,$$

c'est-à-dire encore $\omega(a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2 c) = -(bc + \mathrm{j}ac + \mathrm{j}^2 ab)$. Si le triangle (abc) n'est pas équilatéral direct, on a une solution unique $\omega = -\dfrac{bc + \mathrm{j}ca + \mathrm{j}^2 ab}{a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2 c}$.

On vérifie ensuite facilement que, pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, l'inversion de pôle ω et de rapport k convient effectivement. À noter que, si le triangle (abc) est équilatéral indirect, on vérifie que ω en est l'isobarycentre. De façon analogue, on établit que, si le triangle (abc) n'est pas équilatéral *indirect*, on a un unique pôle d'inversion ω' tel que, pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, le triangle $(a'b'c')$ soit équilatéral indirect ; en outre, on a $\omega' = -\dfrac{bc + \mathrm{j}^2 ca + \mathrm{j}ab}{a + \mathrm{j}^2 b + \mathrm{j}c}$. Dans le cas où (abc) n'est pas équilatéral, on a donc deux pôles ω et ω', forcément distincts, que l'on appelle les *centres isodynamiques* du triangle (abc).

8.3. Quelques propriétés

Supposons un triangle (abc) non équilatéral. On vérifie sans difficulté que, si l'on permute circulairement a, b et c, alors ω et ω' sont inchangés. Si, au contraire, on échange deux de ces trois complexes, alors ω et ω' s'échangent également. Cela montre que $s = \omega + \omega'$ et $p = \omega\omega'$ sont invariants par toute permutation du triplet (a, b, c). On trouve effectivement par exemple $p = \dfrac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - abc(a+b+c)}{a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab}$ qui est une fraction rationnelle symétrique en (a, b, c).

Les points ω et ω' se déduisent l'un de l'autre par l'inversion géométrique dont le pôle est le centre $\mathbf{O}$ du cercle circonscrit au triangle (abc), et le rapport le carré du rayon R de ce cercle. Supposons par exemple que $\mathbf{O} = 0$

et donc que ces trois complexes de même module R. On a alors $\overline{a} = R^2/a$, etc., et on vérifie tout de suite que $\overline{\omega'} = R^2/\omega$, ce qui prouve le résultat. En particulier, les points ω et ω' sont alignés avec O. Le calcul mené dans l'exemple **V-4.a** montre aussi que chaque centre isodynamique appartient à la polaire de l'autre par rapport au cercle circonscrit.

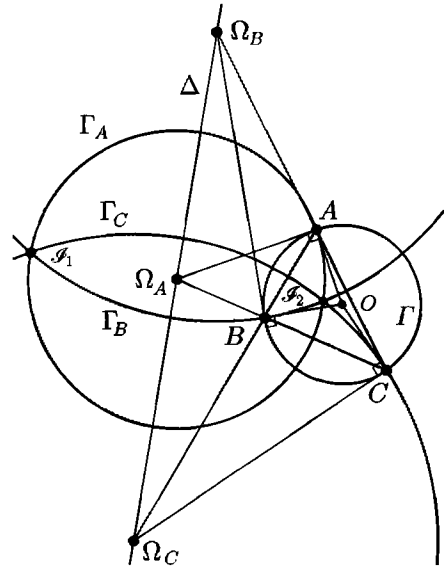
Pour les relations qui suivent, et qui font intervenir des distances, nous avons préféré l'emploi de lettres majuscules. Les deux centres isodynamiques s'appellent $\mathscr{I}_1$ et $\mathscr{I}_2$ dans la figure ci-après ; considérons alors l'un quelconque d'entre eux, noté $\mathscr{I}$. On a les relations :

$$(\text{Iso}) \qquad \frac{\mathscr{I}A}{\mathscr{I}B} = \frac{CA}{CB}, \qquad \frac{\mathscr{I}B}{\mathscr{I}C} = \frac{AB}{AC}, \qquad \frac{\mathscr{I}C}{\mathscr{I}A} = \frac{BC}{BA},$$

que l'on déduit aisément des relations du type $a' - \omega = k/(a - \omega)$, puisque qu'elles impliquent $a' - b' = k\dfrac{b-a}{(b-\omega)(a-\omega)}$ et que $a' - b'$, $b' - c'$ et $c' - a'$ sont de même module. Si le triangle abc n'est pas isocèle, la première de ces relations signifie que $\mathscr{I}$ appartient au cercle d'APOLLONIUS Γ_C d'équation

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}.$$

Ce cercle est centré sur AB, il passe par C et il est orthogonal au cercle circonscrit à ABC : son centre est donc l'intersection de AB avec la tangente à C au cercle circonscrit. On définit de même Γ_A et Γ_B. Ces trois cercles concourent donc en $\mathscr{I}_1$ et en $\mathscr{I}_2$: leurs centres sont alignés et cela confirme le résultat établi dans l'exercice **V-4.b**.



Si le triangle isocèle en A, le cercle Γ_A « dégénère » en la médiatrice de BC mais les résultats subsistent : cette médiatrice et les deux autres cercles concourent en deux points. Si le triangle est équilatéral, les trois cercles deviennent les médiatrices du triangle : l'un des centres isodynamiques est le centre **O** du cercle circonscrit et l'autre est le point à l'infini de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

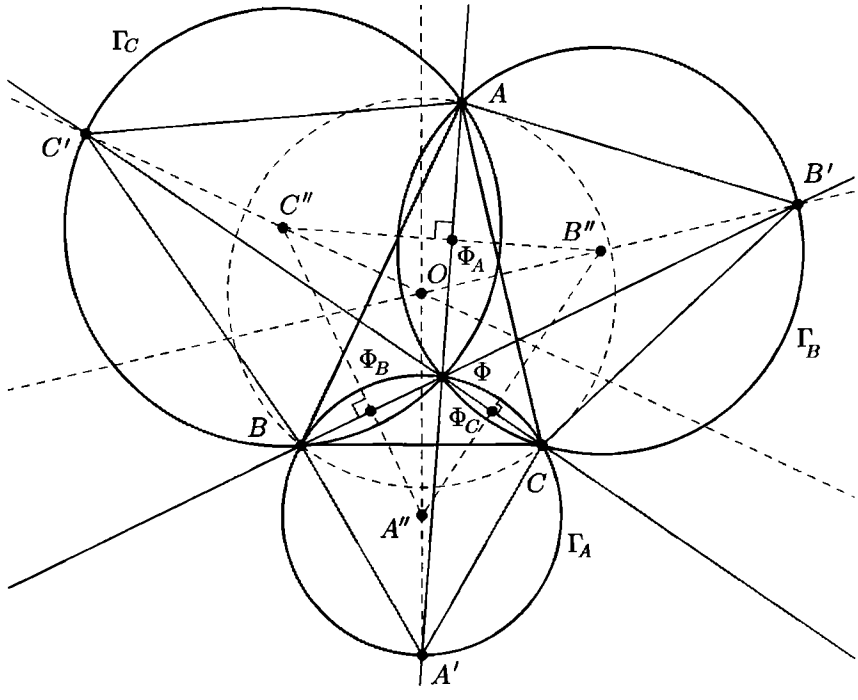
Dans tous les cas, les relations (Iso) caractérisent les centres isodynamiques puisque nous venons d'établir qu'elles ne sont vérifiées que par deux points, dont précisément les deux centres isodynamiques.

Pour terminer, nous mettons en évidence une autre propriété remarquable des centres isodynamiques : *si M est un centre isodynamique du triangle ABC, alors C est un centre isodynamique du triangle ABM.* On peut bien entendu dire aussi que A est un centre isodynamique du triangle BCM, etc.

En effet, des relations $MA/MB = CA/CB$, etc., on déduit que $CA/CB = MA/MB$, $CB/CM = AB/AM$ et $CM/CA = BM/BA$. Puisque les relations (Iso) caractérisent les centres isodynamiques, cela montre bien que C est un centre isodynamique du triangle ABM [15].

Nous retrouverons les centres isodynamiques au paragraphe **V-9.5.8**. L'invariance sous l'effet des permutations est aussi une propriété des birapports équiharmoniques, mais nous avons encore du matériel à déblayer avant cela.

8.4. La configuration de Fermat–Torricelli



Cette configuration est intéressante, même si elle n'est pas forcément très spectaculaire ; remarquons-y tout de même le concours de trois cercles et

[15] Cette résistance à la permutation est à rapprocher de celle de l'orthocentre : si H est l'orthocentre de ABC, alors C est l'orthocentre de ABH.

deux concours de trois droites[16]. *Sont à remarquer aussi des égalités de longueurs, quoiqu'elles ne se voient pas directement sur le dessin.*

*Nous détaillerons en particulier une configuration intéressante de certains couples de triangles, que l'on désigne par le terme d'*orthologie. *Cette configuration est à mettre en parallèle avec certains des concours de droites apparaissant dans la figure.*

Partons d'un plan affine euclidien orienté, et d'un triangle ABC. Pour des raisons qui apparaîtront dans la section **V-8.5.1** qui suit, et dans laquelle nous avons regroupé les démonstrations analytico-topologiques nécessaires, nous supposerons qu'aucun des angles de ce triangle n'a une mesure principale supérieure ou égale à $2\pi/3$. Conformément à nos conventions, nous supposons le triangle ABC tel que le repère affine $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ soit *direct*.

Nous construisons alors les triangles équilatéraux directs $BA'C$, $CB'A$ et $AC'B$, et désignons par A'', B'' et C'' les centres des cercles circonscrits à ces triangles.

Nous voyons tout de suite que les droites $A'A''$, $B'B''$ et $C'C''$ concourent au centre O du cercle circonscrit à ABC ; en effet, la droite $A'A''$ est une médiatrice du triangle $BA'C$, mais c'est aussi une médiatrice du triangle ABC, et il en va de même des droites $B'B''$ et $C'C''$.

Comme le suggère la figure, le triangle $A''B''C''$ est équilatéral direct. En effet, si l'on identifie le plan euclidien à $\mathbb{C}$ et que l'on désigne par a, b et c les affixes des sommets du triangle ABC, alors les affixes de A', B' et C' sont respectivement $a' = -\mathrm{j}c - \mathrm{j}^2 b$, $b' = -\mathrm{j}a - \mathrm{j}^2 c$ et $c' = -\mathrm{j}b - \mathrm{j}^2 a$[17].

Les points A'', B'' et C'' sont aussi les centres de gravité de ces triangles et on donc pour affixes $a'' = \dfrac{b - \mathrm{j}c - \mathrm{j}^2 b + c}{3}$, $b'' = \dfrac{c - \mathrm{j}a - \mathrm{j}^2 c + a}{3}$ et $c'' = \dfrac{a - \mathrm{j}b - \mathrm{j}^2 a + b}{3}$. On vérifie alors tout de suite que $a'' + \mathrm{j}b'' + \mathrm{j}^2 c'' = 0$, et le résultat s'ensuit.

On peut d'ailleurs vérifier que $a+b+c = a'+b'+c' = a''+b''+c''$, d'où suit que les triangles ABC, $A'B'C'$ et $A''B''C''$ ont le même centre de gravité.

Introduisons à présent le point Φ, désigné sous le nom de *point de Fermat-Torricelli* du triangle ABC, en lequel la fonction φ de FERMAT qui au point M du plan associe $MA + MB + MC$[18] atteint son minimum.

Nous établirons dans cette section **V-8.5.1** que les angles $\widehat{A\Phi B}$, $\widehat{B\Phi C}$ et $\widehat{C\Phi A}$ ont une mesure égale à $2\pi/3$. Le point Φ appartient donc aux

[16] Il y a même un troisième concours : celui des droites AA'', BB'' et CC'' que nous n'avons pas représenté car il rendait la figure illisible.

[17] C'est une conséquence du **V-8.1**.

[18] Voir au **V-8.5.1**.

cercles circonscrits aux triangles $AC'B$, $BA'C$ et $CB'A$ [19]. Cela montre en particulier que, parmi les droites ΦA, ΦB et ΦC, chacune est bissectrice du couple formé par les deux autres.

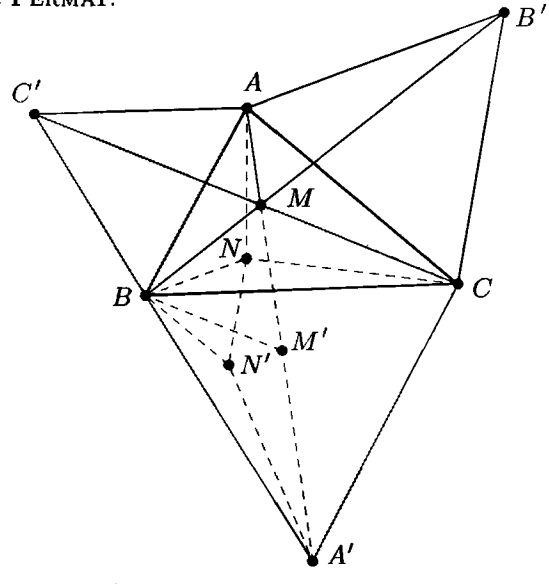
Les cercles circonscrits aux triangles $AC'B$ et $CB'A$ se coupent en A, mais aussi en Φ ; cela montre que les points A et Φ sont symétriques par rapport à la droite des centres de ces deux cercles, savoir la droite $C''B''$: cela fournit donc un procédé simple de construction du point Φ.

Considérons le triangle (équilatéral) $A''B''C''$; les symétriques orthogonaux du point Φ par rapport aux côtés du triangle sont donc les points A, B et C. Or, le centre du cercle circonscrit à ABC est le point O. Il résulte du **III-5.3** que les points O et Φ sont conjugués isogonaux par rapport au triangle $A''B''C''$ [20].

Nous établissons à présent que les droites AA', BB' et CC' concourent au point Φ, et que l'on a les égalités entre distances

$$\Phi A + \Phi B + \Phi C = AA' = BB' = CC' .$$

En particulier, la valeur commune de ces distances est le minimum de la fonction φ de FERMAT.



Si Ω est un point du plan, nous notons en toute généralité ϱ_Ω la rotation de centre Ω et d'angle $\pi/3$.

[19] Cela résulte du **V-9.4**. Le cercle circonscrit à $AC'B$, par exemple, est le lieu des points M tels que l'angle $\widehat{AMB}$ ait une mesure *modulo* π égale à $-\pi/3$.

[20] Puisque ce triangle est équilatéral, ils sont aussi conjugués isotomiques ; en effet, dans le cas d'un triangle équilatéral, les formules barycentriques de ces deux transformations coïncident.

Les droites BB' et CC' ne sont pas parallèles car le triangle ABB' est l'image par ϱ_A du triangle $AC'C$; en effet, ϱ_A envoie C' sur B et C sur B'. L'angle orienté $(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{BB'})$ a une mesure égale à $+\pi/3$. Désignons par M le point d'intersection de ces deux droites : nous allons montrer que $M = \Phi$, et que M appartient aussi à la droite AA'.

En d'autres termes, M est le point de concours des droites AA', BB' et CC', ce qui fournit un second procédé de construction de ce point.

Les conditions $0 < \widehat{A} < 2\pi/3$, $0 < \widehat{B} < 2\pi/3$ et $0 < \widehat{C} < 2\pi/3$ montrent que les triangles CAC', $CC'B$, ABB' et BCB' sont directs. Les droites BB' et CC' se coupent donc à l'intérieur du triangle ABC et l'on a $\widehat{CMB} = +2\pi/3$. En outre, puisque, encore une fois, la rotation ϱ_A envoie la droite CC' sur la droite BB', le point A appartient à une bissectrice du couple (BB', CC').

Vu la mesure de l'angle $\widehat{CMB}$, on en déduit que les mesures des angles $\widehat{CMA}$ et $\widehat{AMB}$ sont aussi égales à $2\pi/3$. Il s'ensuit que $M = \Phi$ et que $M \in AA'$, puisque l'on a aussi $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}) = +2\pi/3$.

Le théorème de PTOLÉMÉE, voir **V-7.2**, appliqué au quadrilatère convexe inscriptible $MBA'C$, montre que

$$MB \times A'C + MC \times A'B = MA' \times BC\,.$$

Comme $BA'C$ est équilatéral, on en tire $MB + MC = MA'$. Comme la rotation ϱ_B envoie AA' sur $C'C$, il existe un point $M' \in AA'$ tel que $M = \varrho_B(M')$, et le triangle MBM' est équilatéral. Comme $MB < MA'$, le point M' est sur le segment MA'. Comme ϱ_B envoie le segment $M'A'$ sur le segment MC, on en déduit l'égalité de distances $M'A' = MC$.

In fine, on a $MA + MB + MC = AM + MA' = AA'$. Par symétrie des rôles de ces longueurs, on en déduit aussi que $AA' = BB' = CC'$, mais nous le savions déjà puisque les segments AA', BB' et CC' se déduisent les uns des autres par des rotations.

Si N est un autre point du plan, le même raisonnement, où l'on introduit le point $N' = (\varrho_B)^{-1}(N)$, montre d'ailleurs que

$$NA + NB + NC = AN + NN' + N'A' \geqslant AA'\,.$$

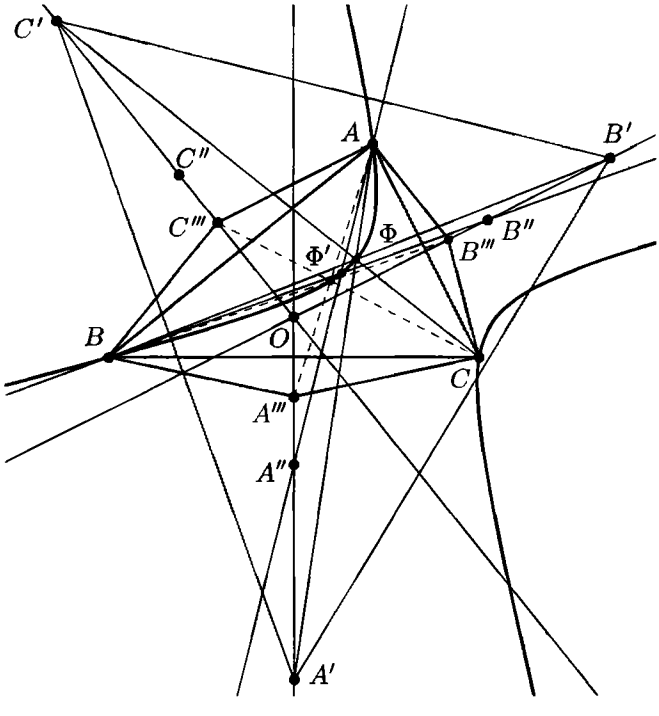
Ainsi, cela confirme que le minimum de la fonction de FERMAT est atteint au point Φ.

Évoquons à présent les situations d'*orthologie* entre triangles. Pour commencer, considérons les triangles ABC et $A''B''C''$; nous voyons que les perpendiculaires menées respectivement de A, de B et de C aux « côtés opposés de l'autre triangle », savoir respectivement $B''C''$, $C''A''$ et $A''B''$, concourent (au point Φ, voir *supra*).

Nous allons établir au **V-8.5.2** que cette situation est symétrique, c'est-à-dire que les perpendiculaires respectives menées de A'', B'' et C'' aux côtés BC, CA et AB, concourent également[21]. Ici, nous l'avons déjà mis en évidence : le point de concours est le point O.

Or, les triangles ABC et $A'B'C'$ sont également orthologiques : les droites perpendiculaires à BC, CA et AB menées de A', B' et C' sont les médiatrices du triangle ABC et concourent en O. Donc, les perpendiculaires à $B'C'$, $C'A'$ et $A'B'$ menées de A, B et C, qui sont d'ailleurs les droites AA'', BB'' et CC'', concourent.

Nous n'avons pu représenter ces trois droites sur la figure *supra*, déjà chargée, mais nous le faisons sur la figure suivante et désignons par Φ' le point de concours de ces trois dernières droites, qui est le *point de Napoléon* du triangle. La configuration obtenue est elle aussi remarquable : les points Φ et Φ' sont alignés avec O, et appartiennent à une hyperbole équilatère célèbre, l'*hyperbole de Kiepert*. Cette hyperbole passe aussi par les sommets du triangle, ainsi que l'orthocentre H et le centre de gravité G!



Cette figure illustre aussi la définition de l'hyperbole de KIEPERT : on construit des triangles (directs ou non) $AC'''B$, $BA'''C$ et $CB'''A$ isocèles

[21] Et nous disons donc que les triangles ABC et $A''B''C''$ sont *orthologiques*.

respectivement en C''', A''' et B''' et deux à deux directement semblables. Les droites AA''', BB''' et CC''' concourent, et le lieu des points de concours est l'hyperbole (privée du point H, qui en est un « point-limite »).

Dans cette construction, le point de FERMAT correspond à trois triangles isocèles qui sont même équilatéraux directs, et le point de NAPOLÉON au cas une mesure de l'angle BAC''' est égale à $\pi/3$.

8.5. Annexe

8.5.1. La fonction de FERMAT

Pour l'instant, nous nous plaçons dans un plan affine euclidien, et considérons un triangle ABC (non aplati), mais sans hypothèse particulière quant aux angles. Nous désignons par φ la *fonction de Fermat* qui au point M du plan associe $MA + MB + MC$, somme de ses distances aux sommets du triangle et par m la borne inférieure de $\varphi(M)$ lorsque M décrit le plan.

Nous allons montrer que $m > 0$ et que φ « atteint » cette borne inférieure en un unique *point Φ. Nous montrerons que ce point Φ est soit l'un des sommets du triangle soit un point « strictement intérieur » à celui-ci, et caractériserons ces deux cas à l'aide des angles aux sommets.*

1. La fonction φ admet un *infimum* strictement positif, et il est atteint. Posons en effet $\mu = \varphi(A) = AB + AC > 0$ et désignons par Δ le disque fermé de centre A et de rayon μ.

Nous voyons déjà que $m \leqslant \mu$; en outre, lorsque $M \notin \Delta$, on a

$$\varphi(M) > AM > \mu .$$

Ainsi, on a aussi $m = \mathrm{Inf}_{M\in\Delta}\varphi(M)$. Puisque Δ est compact, il existe un point Φ tel que $\varphi(\Phi) = m$. En outre, $m > 0$ puisque la fonction de FERMAT ne s'annule en aucun point.

2. Unicité du point Φ. *Nous commençons par remarquer que, si M'' est le milieu d'un segment MM', on a $2AM'' \leqslant AM + AM'$, avec égalité si, et seulement si, M appartient au segment AM' ou M' appartient au segment AM.* Dans tous les cas, l'égalité entraîne l'alignement des points A, M et M'.

En effet, on part de l'identité du parallélogramme $4AM''^2 = 2AM^2 + 2AM'^2 - MM'^2$. L'inégalité annoncée équivaut à

$$2AM^2 + 2AM'^2 - MM'^2 \leqslant (AM + AM')^2$$

soit encore à $(AM - AM')^2 \leqslant MM'^2$, c'est-à-dire à $|AM - AM'| \leqslant MM'$. Cela établit le résultat, ainsi que le cas d'égalité.

Par conséquent, avec les mêmes notations, on a

$$\begin{cases} 2AM'' \leqslant AM + AM' \\ 2BM'' \leqslant BM + BM' \\ 2CM'' \leqslant CM + CM'. \end{cases}$$

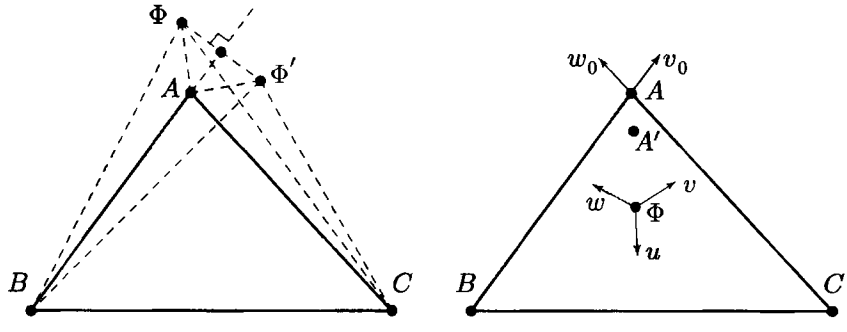
Il s'ensuit que $2\varphi(M'') \leqslant \varphi(M) + \varphi(M')$. Comme cette inégalité a été obtenue par addition de trois inégalités (de même sens), l'égalité a lieu si, et seulement si, ces trois inégalités sont des égalités. Si $M \neq M'$, l'égalité entraîne que les trois sommets du triangle appartiennent à la droite MM', ce qui est impossible. On a donc $2\varphi(M'') < \varphi(M) + \varphi(M')$ chaque fois que $M \neq M'$.

De cela suit que le point Φ, en lequel φ prend la valeur m, est unique. En effet, s'il en existait deux, disons Φ_1 et Φ_2, en désignant par Φ_3 le milieu de $\Phi_1\Phi_2$, on aurait, $2\varphi(\Phi_3) < \varphi(\Phi_1) + \varphi(\Phi_2) = 2m$, ce qui contredirait le fait que m est l'*infimum* de φ.

Remarque. Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, x_0 un élément de E et f une application continue de E dans $\mathbb{R}$.

1. Si $f(x) \to +\infty$ lorsque $\|x - x_0\| \to +\infty$ [22], alors f est minorée et sa borne inférieure est atteinte [23].
2. Si, de plus, $2f(x + x') < f(x) + f(x')$ chaque fois que $x' \neq x \in E$ [24], alors le minimum de f est atteint en un point *unique*.

3. Localisation du point Φ



Dans cette section, nous discutons la position du point Φ en lequel est atteint le minimum de la fonction φ.

[22] L'image réciproque par f de tout compact de $\mathbb{R}$ est alors un compact de E ; l'application f est alors dite *propre*.

[23] Ce, pour la même raison qu'au **1**.

[24] Du fait de l'hypothèse de continuité de f, cette propriété équivaut à dire que f est *strictement convexe*.

Pour cela, nous remarquons que le point Φ ne peut être strictement extérieur au triangle ABC. En effet, supposons que, par exemple, les points C et Φ soient strictement de part et d'autre de la droite AB, comme sur la figure de gauche. Considérons alors le point Φ', symétrique orthogonal de Φ par rapport à ce côté.

Par construction, on a alors les égalités de longueurs $\Phi' A = \Phi A$ et $\Phi' B = \Phi B$. En revanche, on a $\Phi' C < \Phi C$ puisque C est du même côté que Φ' de la médiatrice de $\Phi\Phi'$, qui est AB.

On en conclut que $\varphi(\Phi') < \varphi(\Phi)$, ce qui est absurde. *En conclusion, le point Φ appartient à l'intérieur au sens large du triangle, c'est-à-dire incluant* a priori *les segments BC, CA et AB.*

Comme cela a été annoncé supra, *nous allons montrer qu'en fait le point Φ, soit est intérieur strictement au triangle, soit en est un sommet, puis caractériser chacun de ces cas à l'aide des trois angles aux sommets.*

Remarquons en particulier que la fonction φ est différentiable sur l'ouvert $\Omega = E \setminus \{A, B, C\}$. Plus précisément, si $M \in \Omega$ et si h est un vecteur, on a

$$\varphi(M + h) = \varphi(M) + (u + v + w \mid h) + \mathrm{o}(h),$$

où u, v, w désignent respectivement les vecteurs unitaires $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM}, \dfrac{\overrightarrow{BM}}{BM}, \dfrac{\overrightarrow{CM}}{CM}$.

Si le point Φ est dans Ω, qui est ouvert, la fonction φ atteint *a fortiori* en ce point un extremum local, de sorte que Φ est un point critique de φ. On en déduit que, pour ce point, $u + v + w = 0$, voir la figure de droite. Comme ces trois vecteurs sont unitaires, on a la valeur commune suivante des mesures angulaires

$$(\widehat{\Phi B, \Phi C}) = (\widehat{\Phi C, \Phi A}) = (\widehat{\Phi A, \Phi B}) = \frac{2\pi}{3}\cdot$$

Montrons pour terminer que Φ est dans l'intérieur strict du triangle ABC si, et seulement si, les angles aux sommets $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont tous les trois dans $]\,0\,, 2\pi/3\,[$ et que, sinon, le point Φ est l'un des trois sommets du triangle.

En effet, si par exemple on a $\widehat{A} \geqslant 2\pi/3$ [25], aucun point $M \in \Omega$ ne peut vérifier $(\widehat{MB, MC}) = 2\pi/3$ s'il n'est strictement extérieur au triangle. Vu tout ce qui précède, le minimum de φ est donc atteint en l'un des sommets. Comme les côtés issus de A ont tous les deux une longueur inférieure au troisième, on a donc $\Phi = A$ et $m = AB + AC$.

Au contraire, si $\widehat{A} < 2\pi/3$, montrons que le minimum ne peut être atteint au point A. En effet, puisque l'application $M \longmapsto MB + MC$ est différentiable

[25] Dans un triangle, un seul angle au sommet est autorisé à excéder $2\pi/3$.

au point A, on a, pour tout vecteur h,

$$\varphi(A+h) = \varphi(A) + \|h\| + (v_0 + w_0 \mid h) + \mathrm{o}(h)\,,$$

où l'on a posé $v_0 = \overrightarrow{BA}/BA$ et $w_0 = \overrightarrow{CA}/CA$.

Choisissons $h = -\lambda(v_0 + w_0)$, où le réel positif λ tend vers 0 ; ainsi, le point $A' = A + h$ se déplace sur la bissectrice intérieure de l'angle CAB, et à l'intérieur du triangle, voir la figure de droite. On a alors

$$\varphi(A') = \varphi(A) + \lambda\|v_0 + w_0\| - \lambda\|v_0 + w_0\|^2 + \mathrm{o}(\lambda)\,.$$

Du fait que $\alpha < 2\pi/3$, on a $\|v_0 + w_0\| > 1$, et $\varphi(A') < \varphi(A)$ pour $\lambda > 0$ assez petit. Le minimum de φ n'est donc pas atteint au point A et, pour les mêmes raisons, si les deux autres angles aux sommets sont $< 2\pi/3$, il ne l'est pas non plus au point B ni au point C.

Dans ce cas, puisque, par exemple, un point M situé entre B et C sur le côté BC vérifie $(\widehat{MB}, \widehat{MC}) = \pi$, et non $(\widehat{MB}, \widehat{MC}) = 2\pi/3$, le point Φ est strictement intérieur à ABC.

8.5.2. L'orthologie

Soit deux triangles non aplatis ABC et $A'B'C'$ d'un plan affine euclidien E, associé à l'espace vectoriel E_0 ; les familles $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$ sont alors des bases de E_0. Nous désignons par φ l'automorphisme de E_0 qui à $\overrightarrow{AB}$ associe $\overrightarrow{A'B'}$ et à $\overrightarrow{AC}$ associe $\overrightarrow{A'C'}$.

On a alors l'équivalence entre les deux assertions qui suivent.

1. *Les perpendiculaires menées de A à $B'C'$, de B à $C'A'$ et de C à $A'B'$ concourent.*
2. *L'automorphisme φ est autoadjoint*[26].

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits *orthologiques* s'ils vérifient l'une ou l'autre de ces propriétés équivalentes.

Démonstration. Notons pour simplifier u et v pour $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, de sorte que $\overrightarrow{A'B'} = \varphi(u)$ et que $\overrightarrow{A'C'} = \varphi(v)$. Définissons à présent l'application suivante Φ, de E dans $\mathbb{R}$:

$$M \longmapsto \left(\overrightarrow{AM} \,\middle|\, \overrightarrow{B'C'}\right) + \left(\overrightarrow{BM} \,\middle|\, \overrightarrow{C'A'}\right) + \left(\overrightarrow{CM} \,\middle|\, \overrightarrow{A'B'}\right).$$

L'application Φ est constante, car, pour M et N dans E,

$$\begin{aligned}\Phi(N) - \Phi(M) &= \left(\overrightarrow{MN} \,\middle|\, \overrightarrow{B'C'}\right) + \left(\overrightarrow{MN} \,\middle|\, \overrightarrow{C'A'}\right) + \left(\overrightarrow{MN} \,\middle|\, \overrightarrow{A'B'}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{MN} \,\middle|\, \overrightarrow{0}\right) = 0\,.\end{aligned}$$

[26] Un endomorphisme φ d'un espace vectoriel euclidien E_0 est dit *autoadjoint*, ou *symétrique*, si $(\varphi(X) \mid Y) = (X \mid \varphi(Y))$ pour tout couple $(X, Y) \in E_0^2$.

La valeur de cette constante peut être calculée au point A ; elle vaut donc $\left(\overrightarrow{BA} \,|\, \overrightarrow{C'A'}\right) + \left(\overrightarrow{CA} \,|\, \overrightarrow{A'B'}\right)$, c'est-à-dire encore $\big(u \,|\, \varphi(v)\big) - \big(v \,|\, \varphi(u)\big)$.

Si les trois perpendiculaires de l'énoncé concourent en un point H, on a $\Phi(H) = 0$, car les trois produits scalaires entrant dans la définition de $\Phi(H)$ sont nuls. Il s'ensuit que $\big(u \,|\, \varphi(v)\big) - \big(v \,|\, \varphi(u)\big) = 0$ et que φ est autoadjoint ; pour le voir, il suffit de vérifier que

$$\big(\varphi(xu + yv) \,|\, x'u + y'v\big) = \big(xu + yv \,|\, \varphi(x'u + y'v)\big)\,,$$

pour tout choix des scalaires x, y, x', y' [27].

Réciproquement, si φ est autoadjoint, la constante $\big(u \,|\, \varphi(v)\big) - \big(v \,|\, \varphi(u)\big)$ est nulle. Remarquons alors que, puisque les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ ne sont pas colinéaires, les perpendiculaires menées de A à $B'C'$ et de B à $C'A'$ concourent et nommons-en H le point d'intersection.

Il suffit de montrer que H appartient aussi à la troisième perpendiculaire, c'est-à-dire que $\left(\overrightarrow{CH} \,|\, \overrightarrow{A'B'}\right) = 0$. Or, cela découle de

$$0 = \Phi(H) = \underbrace{\left(\overrightarrow{AH} \,|\, \overrightarrow{B'C'}\right)}_{=0} + \underbrace{\left(\overrightarrow{BH} \,|\, \overrightarrow{C'A'}\right)}_{=0} + \left(\overrightarrow{CH} \,|\, \overrightarrow{A'B'}\right).$$

La réciproque est établie et, avec elle, l'équivalence.

Corollaire. Puisque φ est un automorphisme autoadjoint, son inverse φ^{-1} est également autoadjoint [28]. De l'équivalence *supra* on déduit que la relation d'orthologie est symétrique. En d'autres termes, la propriété 1 reste inchangée si on échange les rôles des triangles ABC et $A'B'C'$, mais le point de concours des trois droites définies après la permutation n'a bien entendu aucune raison de rester le même.

8.5.3. Orthologie et isogonalité

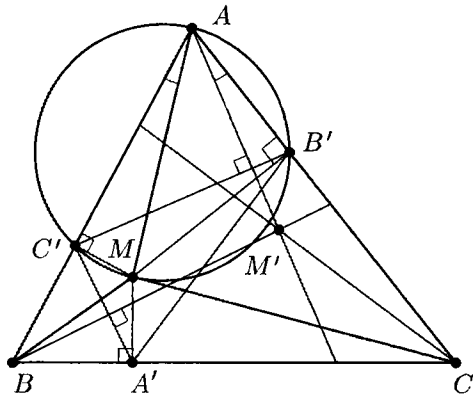
Soit un triangle ABC et un point M générique du plan (nous regarderons les cas particuliers à la fin). Ce point se projette en A', B' et C' sur les côtés BC, CA et AB. Les triangles $A'B'C'$ et ABC sont orthologiques puisque les perpendiculaires issues de A' à BC, de B' à CA et de C' à AB concourent précisément au point M.

Il y a donc également orthologie des triangles ABC et $A'B'C'$. *Ainsi, les perpendiculaires issues de A à $B'C'$, de B à $C'A'$ et de C à $A'B'$ concourent en un point M', et nous allons établir qu'il s'agit du conjugué isogonal de*

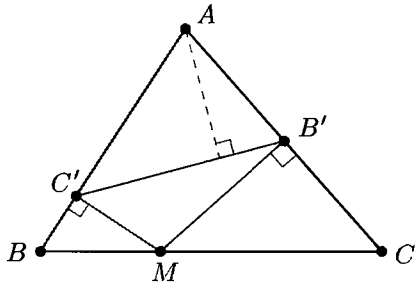
[27] Il suffit de développer les termes des deux membres pour vérifier l'égalité annoncée.

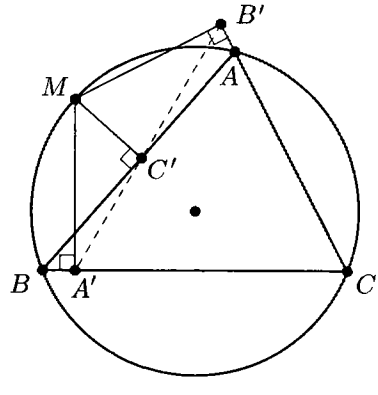
[28] Cela résulte du fait que φ^{-1} et $(\varphi^{-1})^*$ sont deux inverses à droite de φ, ce qui se vérifie immédiatement.

M par rapport au triangle ABC.



Le cercle de diamètre AM passe par les points B' et C' (voir les angles droits) ; Les angles $\widehat{C'AM}$ et $\widehat{C'B'M}$ ont même mesure (propriété de l'angle inscrit). Comme l'angle $\widehat{AB'M}$ est droit, les angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{M'AC}$ ont même mesure. Le même raisonnement effectué avec les angles $\widehat{CBM}$ et $\widehat{M'BA}$, puis avec les angles $\widehat{ACM}$ et $\widehat{M'CB}$, établissent le résultat.





Si M est sur un côté, BC par exemple, voir figure de gauche, on a $A' = M$. Or, le point A appartient aux perpendiculaires issues de A à $B'C'$, de B à $C'A'$ et de C à $A'B'$. Le conjugué isogonal est bien le point A.

En revanche, si M appartient au cercle circonscrit à ABC, les points A', B' et C' sont alignés sur la droite de SIMSON de M. Le triangle $A'B'C'$ est alors dégénéré et il n'est plus question d'orthologie. Toutefois, les perpendiculaires issues de A à $B'C'$, de B à $C'A'$ et de C à $A'B'$ sont parallèles et concourent... en le point à l'infini de la direction orthogonale à la droite de SIMSON de M.

9. Homographies, conformité et birapport

9.1. Les homographies en tant qu'applications conformes

Nous considérons ici $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel euclidien, et donc à plus forte raison normé **réel** (de dimension finie), ce qui donne un sens aux notions de *différentiabilité*, en relation avec la propriété d'espace normé, d'*angle* et de *similitude*, en relation avec la propriété d'espace euclidien.

Nous énonçons dans cette section les propriétés de conservation des angles par les homographies, et les appliquons ensuite au cas particulier de l'inversion.

Le domaine de définition Ω d'une homographie $h : z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ (où $ad - bc \neq 0$) est toujours un ouvert de $\mathbb{C}$: c'est $\mathbb{C}$ tout entier lorsque $c = 0$, et c'est $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ dans le cas contraire.

Les propriétés annoncées découlent en fait de l'*holomorphie* de l'application h. Nous préférons en donner pour commencer une preuve élémentaire.

Voici le résultat essentiel de cette section : avec les notations précédentes, l'homographie h est différentiable[29] sur Ω. En outre, si $z_0 \in \Omega$, la différentielle $\mathrm{d}h_{z_0}$ de h au point z_0 est définie par

$$\xi \in \mathbb{C} \longmapsto \underbrace{\frac{ad-bc}{(cz_0+d)^2}}_{A} \xi \cdot$$

Étant de la forme $\xi \in \mathbb{C} \longmapsto A\xi$, où $A \in \mathbb{C}^*$, cette différentielle est une similitude (vectorielle) directe (de rapport le module $|A|$, et d'angle tout argument de A *modulo* 2π).

Pour établir cela, nous utilisons la définition de la différentielle présentée sous forme d'*application linéaire tangente*. Supposons $z_0 \in \Omega$; il existe un $\varrho > 0$ tel que la boule ouverte $\mathrm{B}(z_0, \varrho)$ soit incluse dans Ω[30]. Pour un complexe ξ de module $< \varrho$, on a $z_0 + \xi \in \Omega$ et

$$h(z_0+\xi) - h(z_0) = \frac{a(z_0+\xi)+b}{c(z_0+\xi)+d} - \frac{az_0+b}{cz_0+d} = \frac{(ad-bc)\xi}{(c(z_0+\xi)+d)(cz_0+d)} \cdot$$

Or, $c(z_0 + \xi) + d \to cz_0 + d \neq 0$ lorsque $\xi \to 0$, de sorte que

$$\frac{ad-bc}{(c(z_0+\xi)+d)(cz_0+d)} = \frac{ad-bc}{(cz_0+d)^2} + \mathrm{o}(1)\,,$$

[29] Et même de classe C^∞ ! Mais nous ne le démontrerons pas puisque, d'une part, nous n'aurons pas besoin de pousser plus loin la différentiation et, d'autre part, parce que c'est une conséquence de l'holomorphie de h.

[30] Parce que Ω est un ouvert, et qu'il contient z_0.

et l'on a $h(z_0+\xi)-h(z_0)=A\xi+\underbrace{\xi\,o(1)}_{=o(\xi)}$. C'est bien dire que dh_{z_0} existe et a l'expression annoncée.

L'application h est holomorphe sur l'ouvert Ω, par exemple en tant que fonction rationnelle. Comme $h'(z_0)=\dfrac{ad-bc}{(cz_0+d)^2}$ pour tout $z_0\in\Omega$, on retrouve la différentiabilité de h en tout $z_0\in\Omega$ ainsi que l'expression de la différentielle en ce point.

En conséquence, si on se donne un arc γ de classe C^1, défini sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'ouvert Ω, et régulier pour une valeur du paramètre $t_0\in I$ [31], alors le paramètre t_0 est régulier pour l'arc $\Gamma=h\circ\gamma$ et l'on a

$$\Gamma'(t_0)=dh_{z_0}(\gamma'(t_0))=\frac{ad-bc}{(cz_0+d)^2}\gamma'(t_0)\,,$$

avec $z_0=\gamma(t_0)$.

[C'est une conséquence de la formule de dérivation des applications composées et de l'injectivité de dh_{z_0}.]

De cela suit maintenant la propriété pour h d'être une *application conforme* : si deux arcs γ_1 et γ_2, définis et de classe C^1 sur des intervalles I_1 et I_2, à valeurs dans Ω, prennent la même valeur z_0 pour deux valeurs régulières de leur paramètre, respectivement $t_1\in I_1$ et $t_2\in I_2$, alors l'angle (orienté, *modulo* 2π) des vecteurs tangents en t_1, respectivement t_2, aux arcs images $\Gamma_1=h\circ\gamma_1$ et $\Gamma_2=h\circ\gamma_2$ est égal à celui des vecteurs tangents à γ_1 et γ_2 pour les mêmes valeurs respectives de leur paramètre :

$$\angle(\Gamma_1'(t_1),\Gamma_2'(t_2))\equiv\angle(\gamma_1'(t_1),\gamma_2'(t_2))\pmod{2\pi}\,,$$

où le symbole $\angle$ signifie « angle orienté ». Cela découle des propriétés des similitudes directes.

En particulier, si γ_1 et γ_2 sont tangents en z_0, alors Γ_1 et Γ_2 le sont aussi en $h(z_0)$ [32]. Mais, surtout, si γ_1 et γ_2 sont orthogonaux en z_0, alors Γ_1 et Γ_2 le sont aussi en $h(z_0)$.

L'inversion géométrique a occupé une place notable dans les programmes de « Mathélém » puis de son ultime avatar, la Terminale C. À ce niveau, il était illusoire de donner une définition abordable de la notion de *différentielle*, et la notion de *tangente* est longtemps restée limitée au cas des courbes usuelles, droites et coniques notamment, pour lesquelles une définition géométrique était possible.

De ce fait, la propriété générale de conservation des angles des tangentes [33] était

[31] Cela signifie que le vecteur dérivée $\gamma'(t_0)$ est non nul.

[32] Pour cela, la différentiabilité de h aurait suffi.

[33] Mais l'inversion géométrique ne conserve que les angles non orientés, puisqu'elle se déduit d'une inversion analytique par composition par une symétrie droite orthogonale et que cette dernière est une isométrie gauche.

admise, et les applications pratiques se limitaient au contact ou à l'orthogonalité des droites ou des cercles, ce qui autorisait déjà une grande variété d'exercices et de problèmes.

9.2. Interprétation géométrique des homographies

Puisque nous savons ce que représentent géométriquement les inversions, nous pouvons en déduire une expression des homographies comme composées d'applications plus simples.

Nous savons déjà interpréter les applications de la forme $z \longmapsto az+b$ comme des *similitudes directes* du plan complexe. Il nous reste à étudier le cas des homographies les plus générales.

Pour cela, écrivons la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{aZ+b}{cZ+d}$, lorsque $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$,

$$\frac{aZ+b}{cZ+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\frac{1}{Z+d/c}.$$

Ainsi, l'homographie h définie par $z \longmapsto \dfrac{aZ+b}{cZ+d}$ se décompose sous la forme $h = h_2 \circ H \circ h_1$, où h_1 est la translation définie par $z \longmapsto z+d/c$, où H est l'inversion analytique définie par $z \longmapsto 1/z$ et enfin h_2 la similitude définie par $z \longmapsto \dfrac{a}{c} - \dfrac{ad-bc}{c^2}z$.

Ces trois « briques élémentaires » permettent donc de reconstituer par composition toutes les homographies.

9.3. Homographies, droites et cercles

Reprenons dans cette section les conventions adoptées au **V-5**. *Nous allons voir comment les homographies agissent sur l'ensemble des « cercles-droites », dont les éléments sont* grosso modo *les cercles et les droites de* $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ [34].

On considère $\mathbb{C}$ comme plan affine euclidien réel, et appelle *cercle-droite* une partie de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ qui est de la forme $\mathscr{C}$, où $\mathscr{C}$ est un cercle de $\mathbb{C}$, ou de la forme $\mathscr{D} \cup \{\infty\}$, où $\mathscr{D}$ est une droite de $\mathbb{C}$. Une partie de la forme $\mathscr{D} \cup \{\infty\}$ sera appelée une *droite complétée*

Un cercle-droite est entièrement déterminé par la donnée de trois de ses points (distincts) : un cercle par trois points (c'est alors un cercle circonscrit) et une droite complétée par trois points alignés, ou par deux points et le symbole ∞.

[34] Nous continuerons à qualifier de *point* un élément de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, même ∞.

Voici le résultat central de cette section : *l'image d'un cercle-droite par une homographie h est un cercle-droite.*

Cet énoncé justifie à lui seul cet amalgame que nous avons effectué entre les cercles et les droites du plan euclidien.

Il est immédiat, et nous ne le démontrerons donc pas, que cette propriété est vraie pour une homographie de la forme $z \longmapsto az + b$ (avec $a \neq 0$), c'est-à-dire une translation ou similitude. D'ailleurs, l'image par une telle homographie d'une cercle est encore un cercle, et celle d'une droite complétée une droite complétée.

Considérons une homographie h de la forme $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, avec $ad-bc \neq 0$ et $c \neq 0$. On a alors, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$,

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{z+d/c}\cdot$$

Ainsi, l'on a $h = h_2 \circ H \circ h_1$, où les homographies H, h_1 et h_2 sont définies par $h_1(\infty) = h_2(\infty) = \infty$ et

$$h_1(z) = z + \frac{d}{c}, \qquad h_2(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}z, \qquad H(z) = \begin{cases} 1/z & \text{si } z \in \mathbb{C}^* \\ \infty & \text{si } z = 0 \\ 0 & \text{si } z = \infty\,. \end{cases}$$

Comme h_1 et h_2 sont des translations ou des similitudes, il suffit de vérifier que l'image par H d'un cercle-droite est un cercle-droite. Pour cela, il y a quatre cas à envisager :

Si $\mathscr{D}$ est une droite passant par l'origine, $\mathscr{D} \setminus \{0\}$ est l'image d'une paramétrisation de la forme $t \in \mathbb{R}^* \longmapsto te^{i\vartheta}$, où $\vartheta \in \mathbb{R}$ est donné. Alors, $H(\mathscr{D} \setminus \{0\})$ est l'image de la paramétrisation $t \in \mathbb{R}^* \longmapsto te^{-i\vartheta}$, de sorte que $H(\mathscr{D} \cup \{\infty\}) = H(\mathscr{D} \setminus \{0\}) \cup \{0, \infty\}$ est bien une droite complétée.

Si $\mathscr{C}$ est un cercle passant par l'origine, partons d'une équation cartésienne de celui-ci par rapport au repère orthonormé $\mathscr{R}$, $X^2 + Y^2 + aX + bY = 0$, avec $(a,b) \neq (0,0)$.

Puisque $\mathscr{C}$ passe par l'origine, $H(\mathscr{C})$ contient ∞ ; comme $\infty \notin \mathscr{C}$, l'origine n'appartient pas à $H(\mathscr{C})$. Si $z \in \mathbb{C}^*$, le point $M(z)$ appartient à $H(\mathscr{C})$ si, et seulement si, $M(1/z)$ appartient à $\mathscr{C}$. Or, si $z = x + iy$, on a $1/z = (x - iy)/(x^2 + y^2)$, de sorte que $M(1/z) \in \mathscr{C}$ si, et seulement si,

$$\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + a\frac{x}{x^2+y^2} - b\frac{y}{x^2+y^2} = 0\,.$$

Cela équivaut à $ax - by + 1 = 0$.

En conclusion, l'image de $\mathscr{C}$ par H est la droite d'équation $ax - by + 1 = 0$ complétée par ∞.

Soit maintenant une droite $\mathscr{D}$ ne passant pas par l'origine. Elle a une équation cartésienne de la forme $aX + bY + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $c \neq 0$, soit encore $aX/c + bY/c + 1 = 0$. Le même calcul que précédemment montre alors que $H(\mathscr{D} \cup \{\infty\})$ est le cercle d'équation $X^2 + Y^2 + aX/c - bY/c = 0$.

Reste enfin le cas d'un cercle $\mathscr{C}$ ne passant pas par l'origine ; il a alors une équation cartésienne de la forme $X^2 + Y^2 + aX + bY + c = 0$, avec $c \neq 0$. Comme il ne contient ni l'origine ni ∞, son image ne contient pas non plus ni ∞ ni l'origine. Pour un $z \neq 0$, le même principe montre encore que $M(z) \in H(\mathscr{C})$ équivaut à

$$\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + a\frac{x}{x^2+y^2} - b\frac{y}{x^2+y^2} + c = 0,$$

c'est-à-dire à $x^2 + y^2 + ax/c - by/c + 1/c = 0$. Cela montre que $H(\mathscr{C})$ est un cercle ne passant pas par l'origine [35].

Cette disjonction de cas ne complique pas notre compréhension de la situation : si $\mathscr{C}$ est un cercle-droite contenant l'origine, son image contient ∞ et est donc une droite complétée. Sinon, c'est un cercle. Si $\mathscr{C}$ est une droite complétée, elle contient ∞ et son image passe donc par l'origine ; sinon, elle n'y passe pas.

Il était intéressant de faire le résumé précédent du fait que l'inversion analytique $z \neq 0 \longmapsto 1/z$ intervient souvent dans les problèmes afférents aux homographies. Il n'est pas inutile pour autant de généraliser cette discussion pour le cas d'une homographie quelconque (mais le fait de passer ou non par l'origine n'est plus une propriété en soi dans ce cas plus général).

Nous savons comment les translations et les similitudes agissent sur les droites et les cercles ; considérons donc une homographie h de la forme $z \neq -d/c \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, avec $c \neq 0$ et toujours les conventions $h(-d/c) = \infty$ et $h(\infty) = a/c$. Le point $M(-d/c)$ [36] sera appelé *pôle* de l'homographie h.

De ce qui suit, on conclut que *l'image par une homographie d'un cercle-droite $\mathscr{C}$ est une droite complétée si $\mathscr{C}$ en contient le pôle, et un cercle dans le cas contraire.*

Nous avons aussi défini l'inversion *géométrique* $\hbar$, de pôle $M(a)$, où $a \in \mathbb{C}$, et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ et avons signalé que $\hbar$ n'était autre qu'une inversion analytique suivie d'une symétrie orthogonale.

---

[35] Objection ! L'équation cartésienne $X^2 + Y^2 + aX/c - bY/c + 1/c = 0$ est-elle toujours celle d'un cercle ? Si $\mathscr{C}$ contient au moins un point, il en est de même de son image. Cela vous convient-il ?

[36] On rappelle que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'une homographie n'est définie qu'à multiplication près par un complexe non nul. Toutefois, la valeur de $-d/c$ est bien indépendante du choix de ce facteur.

Puisqu'une symétrie orthogonale est un (anti)déplacement, ce que nous venons d'énoncer pour les homographies vaut encore pour les inversions géométriques. Toutefois, un résultat antérieur de cette section est la conservation des angles des tangentes par une homographie ; ici, une inversion géométrique remplace un angle (*modulo* 2π) par son opposé, du fait que les symétries orthogonales sont, encore une fois, des antidéplacements. L'inversion orthogonale respecte en revanche le contact et l'orthogonalité de deux courbes.

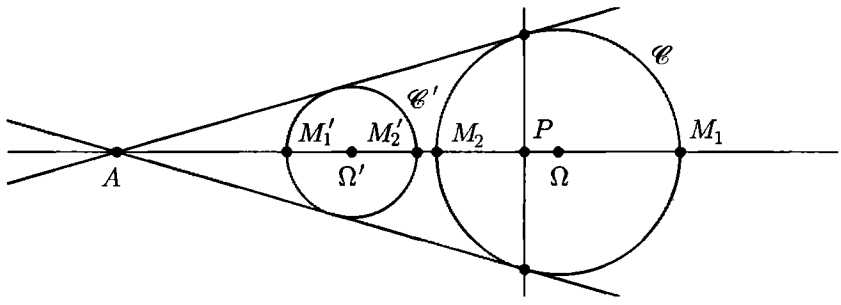
Il est à noter que l'inversion géométrique $\hbar_0$ de pôle l'origine et de rapport 1 est définie notamment par $z = x + \mathrm{i}y \neq 0 \longmapsto \dfrac{x + \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$. Les calculs qui la font intervenir n'introduisent donc pas des signes *moins* comme ce fut le cas avec H.

En outre, si $z = \varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} \in \mathbb{C}^*$, alors $\hbar_0(z) = \dfrac{1}{\varrho} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$ et cela permet des calculs aisés en représentation polaire, sans l'irruption de ces signes *moins* intempestifs.

Note. Une inversion géométrique de pôle A, n'est pas une transformation affine (elle ne respecte même pas l'alignement). De ce fait, si un cercle $\mathscr{C}$ a pour image un cercle $\mathscr{C}'$, il n'y a *aucune* raison pour que les centres Ω et Ω' de ces deux cercles se correspondent par l'inversion.

Si $\Omega = A$, il est facile de vérifier que $\Omega' = A$ aussi. Sinon, la droite $A\Omega'$ coupe $\mathscr{C}'$ en deux points M_1' et M_2'. Au **V-9.5**, nous verrons que la division $M_1'M_2'\Omega'\infty$ est harmonique, et qu'il en va de même de la division des quatre images de ces points par l'inversion. Appelons M_1, M_2 et P les images respectives de M_1', M_2' et Ω' : la division M_1M_2PA est donc harmonique. Vu que la droite $A\Omega$ est un axe de symétrie de la figure, il s'ensuit que P est le point en lequel cette droite coupe la *polaire* de A par rapport au cercle $\mathscr{C}$. C'est donc de ce point P, et non du point Ω, que Ω' est l'image par l'inversion.

Reconventionnellement, c'est le point P' en lequel la droite $A\Omega'$ coupe la polaire de A par rapport à $\mathscr{C}'$, et non Ω', qui est l'image de Ω par l'inversion.



À titre d'exercice, on vérifiera que si une inversion géométrique de pôle A envoie une droite Δ ne passant pas par A sur un cercle Γ, alors le centre de ce cercle est l'image par l'inversion du symétrique orthogonal de A par rapport à Δ [37].

9.4. Arcs capables et cercles d'APOLLONIUS

Dans cette section, nous retrouvons grâce à ce qui précède deux théorèmes classiques de Géométrie euclidienne plane.

Soit deux points distincts A et B d'un plan affine euclidien orienté P, et un angle $\vartheta \notin \pi\mathbb{Z}$. Alors, l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M tels qu'une mesure de l'angle orienté $\widehat{AMB}$ soit égale à ϑ (*modulo* π) est un cercle passant par A et B, mais privé de ces deux points.

Dans la pratique, on conviendra que A et B appartiennent à $\mathscr{C}$ [38], de sorte que $\mathscr{C}$ est un cercle complet.

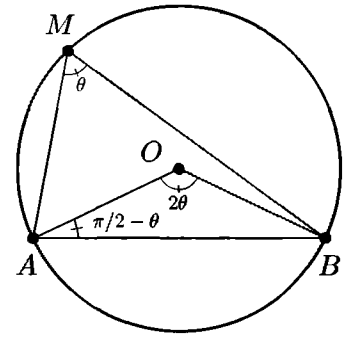
En effet, identifions P à $\mathbb{C}$ après en avoir choisi un repère orthonormé direct. Soit a et b les affixes de A et de B, alors, pour $M \neq A \neq B$, $M(z) \in \mathscr{C}$ si, et seulement si, on peut écrire $\dfrac{z-b}{z-a} = te^{i\vartheta}$, avec $t \in \mathbb{R}^*$.

Soit alors h l'homographie définie par $z \neq a \longmapsto \dfrac{z-b}{z-a}$; on voit que $\mathscr{C}$ est l'image par h^{-1} de la droite $\mathscr{D}$ d'angle polaire ϑ privée de l'origine. Or, h^{-1} est définie par $z \neq 1 \longmapsto \dfrac{az-b}{z-1}$, de sorte que la droite $\mathscr{D}$ ne passe pas par le pôle de h^{-1}.

Vu le **V-9.3**, l'ensemble $\mathscr{C}$ est bien un cercle, privé toutefois des images des complexes $h^{-1}(\infty)$ et $h^{-1}(0)$, c'est-à-dire respectivement de $A = M(a)$ et de $B = M(b)$.

La dénomination d'*arc capable* provient du fait que l'on peut imposer que $\widehat{AMB}$ soit égal à ϑ, mais *modulo* 2π cette fois. Dans ce cas, on n'obtient plus un cercle, mais seulement l'un des deux arcs limités par les points A et B ; pour l'autre arc, $\widehat{AMB}$ est égal à $\pi + \vartheta$, toujours *modulo* 2π.

La construction du cercle $\mathscr{C}$ est facile : le centre O appartient à la médiatrice et l'angle



[37] On remarquera par exemple que le projeté orthogonal de A sur Δ est le point de Δ *le plus proche* de A et que, de ce fait, son image par l'inversion est le point de Γ *le plus éloigné* de A, c'est-à-dire l'opposé diamétral de A sur ce cercle.

[38] Ce d'autant plus volontiers que, par exemple, l'angle $\widehat{AAB}$ n'est pas défini.

$\widehat{AOB}$ est égal à 2ϑ (*modulo* 2π), ce qui suffit à déterminer ce point (par exemple, O est à l'intersection de la médiatrice de AB et de la demi-droite d'origine A faisant l'angle $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ avec $\overrightarrow{AB}$). La connaissance du centre O et du point A permet alors la construction.

Une autre application classique est celle des *cercles d'Apollonius*. Cette fois, on se donne deux points distincts A et B d'un plan affine euclidien P et un réel $k > 0$. On désigne par $\mathscr{A}$ l'ensemble des points M tels que $MB = kMA$.

Si $k = 1$, l'ensemble $\mathscr{A}$ est la médiatrice de AB. Nous allons établir que, si $k \neq 1$, $\mathscr{A}$ est un cercle centré sur la droite AB, que l'on appelle le *cercle d'Apollonius divisant le segment AB dans le rapport k*.

Supposons donc $k \neq 1$; il est alors clair que ni A ni B n'appartiennent à $\mathscr{A}$. On identifie encore une fois P à $\mathbb{C}$ après en avoir choisi un repère orthonormé direct. Soit a et b les affixes de A et de B ; si $z \in \mathbb{C}$, le point $M(z) \in \mathscr{A}$ si, et seulement si, $\dfrac{|z-b|}{|z-a|} = k$, ce qui équivaut à dire qu'il existe un réel ϑ tel que $\dfrac{z-b}{z-a} = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$.

La suite est analogue à celle du cas précédent : soit h l'homographie définie par $z \neq a \longmapsto \dfrac{z-b}{z-a}$; on voit que $\mathscr{A}$ est l'image par h^{-1} du cercle $\mathscr{C}_k$ de centre l'origine, et de rayon k. Or, le pôle de h^{-1} est 1, qui n'appartient pas à $\mathscr{C}_k$ [39]. L'ensemble $\mathscr{A}$ est donc bien un cercle. Il est centré sur la droite AB , car il est manifeste que cette droite est un axe de symétrie de $\mathscr{A}$.

Centré sur AB, le cercle $\mathscr{A}$ coupe cette droite en deux points M_1 et M_2. Or, si M est l'un de ces deux points, on a $\overline{MB} = \varepsilon\, k\, \overline{MA}$, avec $\varepsilon = \pm 1$. Vu les résultats du **I-3**, cela implique que M est le barycentre de $(A, \varepsilon\, k)$ et de $(B, 1)$. Or, chaque valeur de ε donne exactement un barycentre.

Cela établit que l'un des deux points d'intersection, disons M_1, est le barycentre de $(A, +k)$ et de $(B, 1)$ et que l'autre, M_2 donc, est le barycentre de $(A, -k)$ et de $(B, 1)$. En particulier, le point M_1 appartient alors au segment $[AB]$ et M_2 lui est extérieur (du côté de A si $k > 1$, et du côté de B si $k < 1$).

Remarquons aussi que

$$\frac{\overline{M_2A}}{\overline{M_2B}} : \frac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1B}} = \frac{1/k}{-1/k} = -1\,.$$

Il s'ensuit que la division ABM_1M_2 est harmonique, voir au **II-2.7**.

[39] Ce n'est pas le cas lorsque $k = 1$; le fait que l'on trouve alors une droite est conforme à notre discussion générale.

La section **I-5.1** nous fournit les coordonnées barycentriques du centre Ω du cercle, qui est le milieu du segment M_1M_2 : Ω est le barycentre de $(A, +k(1-k)-k(1+k))$ et de $(B, (1-k)+(1+k))$, c'est-à-dire le barycentre de $(A, -k^2)$ et de $(B, 1)$.

Ce résultat peut s'obtenir de façon classique, grâce au calcul suivant : on introduit le point Ω', barycentre de $(A, -k^2)$ et de $(B, 1)$. Pour tout point M du plan, on a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM}^2 - k^2\overrightarrow{AM}^2 &= \overrightarrow{B\Omega' + \Omega'M}^2 - k^2\overrightarrow{A\Omega' + \Omega'M}^2 \\ &= \overrightarrow{B\Omega'}^2 - k^2\overrightarrow{A\Omega'}^2 + (1-k^2)\overrightarrow{\Omega'M}^2,\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{B\Omega'} - k^2\overrightarrow{A\Omega'} = 0$ (propriété du barycentre).

Il s'ensuit que

$$M \in \mathscr{A} \iff \overrightarrow{\Omega'M}^2 = \frac{\overrightarrow{B\Omega'}^2 - k^2\overrightarrow{A\Omega'}^2}{k^2-1} = \frac{(k^4-k^2)\overrightarrow{A\Omega'}^2}{k^2-1} = k^2\overrightarrow{A\Omega'}^2.$$

Cela confirme que $\mathscr{A}$ est non vide, qu'il s'agit d'un cercle de centre Ω' (et donc que $\Omega' = \Omega$).

On remarque aussi que le rayon du cercle $\mathscr{A}$ est $R = kA\Omega$, de sorte que $\overline{\Omega A}\,\overline{\Omega B} = R^2$. Nous verrons au chapitre **VI** que cela traduit l'*orthogonalité* dudit cercle et de tout cercle passant par A et B.

9.5. Le birapport

9.5.1. Définition et formules

Le *birapport* est un invariant précieux en Géométrie projective. Ici, nous allons essentiellement en approfondir les applications géométriques. Une étude plus exhaustive est à trouver dans les ouvrages **[2]** et **[18]** cités en bibliographie.

Considérons quatre éléments a, b, c et d dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, avec $a \neq b \neq c$. Nous allons voir qu'il existe alors une *unique* homographie h telle que [40]

$$h(a) = 0\,, \quad h(b) = \infty\,, \quad h(c) = 1\,.$$

Dans ces conditions, on définit le *birapport* $\varrho = [a, b, c, d]$ comme étant l'élément $h(d) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

[40] De ce résultat suit immédiatement que si l'on a dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ deux triplets (a, b, c) et (a', b', c') tels que $a \neq b \neq c$ et $a' \neq b' \neq c'$, il existe une *unique* homographie h telle que $h(a) = a'$, $h(b) = b'$ et $h(c) = c'$. En termes savants, le groupe des homographies agit *simplement transitivement* sur l'ensemble des triplets d'éléments distincts de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Comme un triplet de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est une *base (projective)* de la droite $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ si, et seulement si, il est formé de trois éléments distincts, tout cela n'est qu'un cas particulier des propriétés générales des applications projectives.

Le cas le plus fréquent est celui où nos quatre éléments sont distincts deux à deux, et $\neq \infty$. On a alors

$$[a,b,c,d] = \frac{d-a}{d-b} : \frac{c-a}{c-b}.$$

C'est cette expression qui explique le mot birapport.

Si maintenant $d = \infty$, nous obtiendrons grâce à la définition $[a,b,c,\infty] = \frac{c-b}{c-a}$. Tout se passe comme si $\frac{\infty - a}{\infty - b} = 1$ dans le double quotient précédent.

Si $a = \infty$, la formule ci-dessus semble indéterminée :

$$[\infty,b,c,d] = \frac{d-\infty}{d-b} : \frac{c-\infty}{c-b} = \frac{\infty}{\infty},$$

mais la définition conduira à l'expression $\frac{c-b}{d-b}$: tout se passe comme si l'on avait le droit de récrire $\frac{d-\infty}{d-b} : \frac{c-\infty}{c-b}$ sous la forme $\underbrace{\frac{d-\infty}{c-\infty}}_{=1} : \frac{d-b}{c-b}$.

Dans les faits, il s'agit bien de cela, mais il n'en demeure pas moins qu'il faudra traiter le symbole ∞ avec des précautions.

Vérifions les assertions précédentes : supposons d'abord a, b et c distincts de ∞ ; on vérifie alors immédiatement que les seules homographies envoyant a sur 0 et b sur ∞ sont celles de la forme $z \longmapsto \lambda \frac{z-a}{z-b}$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Une telle homographie envoie de plus c sur 1 si, et seulement si, $\lambda = \frac{c-b}{c-a}$. Cela établit bien l'existence et l'unicité de h et donne la valeur du birapport :

$$[a,b,c,d] = \begin{cases} \dfrac{d-a}{d-b} : \dfrac{c-a}{c-b} & \text{si} \quad d \neq \infty \\ \dfrac{c-b}{c-a} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque l'un des quatre éléments est ∞, le plus simple est d'écrire le birapport sous la forme

$$[a,b,c,d] = \frac{(d-a)(c-b)}{(d-b)(c-a)}.$$

On voit alors que chaque élément figure une fois au numérateur et une fois au dénominateur ; on barre alors chacune des parenthèses contenant le symbole ∞ : par exemple, si $d = \infty$, on obtient bien le résultat *supra*.

Si par exemple $a = \infty$, cette méthode donne $\frac{c-b}{d-b}$, mais nous n'avons pas encore justifié que cela est conforme avec notre définition. Or, les homo-

graphies envoyant ∞ sur 0 et b sur ∞ sont celles de la forme $z \longmapsto \dfrac{\lambda}{z-b}$ et une telle homographie envoie c sur 1 si, et seulement si, $\lambda = c - b$. Le birapport, égal par définition à $h(d)$, vaut bien $\dfrac{c-b}{d-b}$.

Le lecteur est invité à terminer la démonstration en envisageant les cas où $b = \infty$ ou $c = \infty$.

Nous allons étudier les propriétés du birapport et en décrire des applications géométriques.

9.5.2. Birapport et permutations

Le groupe $\mathfrak{S}_4$ des permutations des indices $\{1,2,3,4\}$ possède vingt-quatre éléments. Pourtant, nous allons voir qu'il n'existe au maximum que six valeurs distinctes du birapport de quatre éléments (distincts) de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ lorsqu'on effectue sur eux ces permutations[41]*. Cela mettra en évidence quelques contributions intéressantes de la théorie des groupes.*

Soit a_1, a_2, a_3 et a_4 dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, deux à deux distincts. Désignons par ϱ le birapport $[a_1, a_2, a_3, a_4]$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, désignons par ϱ^σ le birapport $\left[a_{\sigma^{-1}(1)}, a_{\sigma^{-1}(2)}, a_{\sigma^{-1}(3)}, a_{\sigma^{-1}(4)}\right]$ (dans lequel on effectue la permutation inverse σ^{-1} sur les indices[42]).

Par souci de lisibilité, nous allons plutôt désigner maintenant par a, b, c et d les quatre arguments du birapport. Si σ est la transposition qui échange les indices 1 et 2, le birapport devient

$$[b, a, c, d] = \frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)}.$$

Il est immédiat qu'il est égal à $1/\varrho$. La même chose se produit si σ échange les indices 3 et 4.

Le cas où σ échange les indices 1 et 3 est bien moins trivial : en effet, le birapport devient

$$\frac{d-c}{d-b} : \frac{a-c}{a-b},$$

et il n'y a pas de relation immédiate entre ϱ^σ et ϱ. Mais revenons à la définition : soit h l'homographie qui envoie a, b et c respectivement sur 0, ∞ et 1 ; alors, $h(d)$ est le birapport $[a, b, c, d]$. Nous voulons aussi une homographie h' qui envoie cette fois c, b et a respectivement sur 0, ∞ et 1.

---

[41] Le birapport présuppose un ordre ; *a priori*, $[a, b, c, d]$ et $[b, d, a, c]$ sont des éléments distincts de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

[42] L'intervention de σ^{-1} étonne toujours un peu. Supposons que σ soit la permutation circulaire $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 1$: la définition de ϱ^σ est celle de $[a_4, a_1, a_2, a_3]$. Les quatre éléments ont bien, eux, subi la permutation circulaire dans le « sens » désiré : le premier est devenu le deuxième, etc.

Rien de plus facile : il suffit de permuter les symboles 0 et 1, grâce à l'homographie h_0 définie par $z \longmapsto 1 - z$. Comme $h_0(\infty) = \infty$, l'homographie $h' \overset{\text{déf}}{=} h_0 \circ h$ a bien les propriétés attendues. On a donc

$$[c, b, a, d] = h'(d) = 1 - h(d) = 1 - [a, b, c, d] .$$

Nous laissons le lecteur vérifier que, si σ_0 est définie par $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ (et $4 \mapsto 4$), alors $\varrho^{\sigma_0} = \dfrac{\varrho - 1}{\varrho}$.

Si nous voulons étudier l'effet de la permutation circulaire $\sigma : 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 1$, les choses semblent se compliquer encore , car, avec $[d, a, b, c]$, la variable d s'est placée parmi les trois premières. Ici, nous pouvons décomposer cette permutation en deux autres permutations : si l'on note (ij) la transposition qui échange i et j, avec $i \neq j$, on a $\sigma = \sigma_0 \circ (34)$, où σ_0 est le permutation décrite dans l'exemple précédent. Il suffit donc de composer les transformations trouvées précédemment :

$$z \longmapsto \frac{1}{z} \longmapsto \frac{\dfrac{1}{z} - 1}{\dfrac{1}{z}} = 1 - z ,$$

de sorte que $\varrho^{\sigma} = 1 - \varrho$.

Finalement, on trouverait que, à partir de ϱ, les permutations donnent au plus les six valeurs qui suivent [43] :

$$\varrho, \ 1 - \varrho, \ \frac{1}{\varrho}, \ \frac{\varrho}{\varrho - 1}, \ \frac{\varrho - 1}{\varrho}, \ \frac{1}{1 - \varrho} .$$

Dans la liste précédente, la première permutation citée est l'identité, la deuxième, la troisième et la quatrième sont d'*ordre* deux : elles vérifient $h \circ h = \mathrm{Id}$ (mais $h \neq \mathrm{Id}$). Enfin, les deux dernières sont d'ordre trois : elles vérifient $h \circ h \circ h = \mathrm{Id}$ (mais $h \neq \mathrm{Id}$).

On notera que ces homographies ne dépendent que des permutations σ envisagées, et non des valeurs des complexes a, b, c et d sur lesquels elles opèrent.

---

[43] Jusqu'à présent, nous avons seulement défini le birapport $[a, b, c, d]$ dans le cas où $a \neq b \neq c$, mais sans exclure que d puisse être égal à l'un des trois autres éléments. Plus précisément, on a $[a, b, c, a] = 0$, $[a, b, c, b] = \infty$ et $[a, b, c, c] = 1$ (cela résulte de la définition même du birapport, ou bien sûr de la formule obtenue ensuite).

Nous pouvons utiliser désormais l'action des permutations sur le birapport pour en généraliser la définition au cas où une égalité (et une seule) existe entre a, b, c et d. Par exemple, $[a, b, a, d] = 1/[a, b, d, a] = 1/0 = \infty$; nous serions arrivé à la même conclusion en extrapolant la formule :

$$[a, b, a, d] = \frac{d - a}{d - b} : \frac{a - a}{a - b} = \infty .$$

Il n'y en a donc pas vingt-quatre, mais six ; or, 6 divise 24 : faisons le lien entre cette divisibilité et l'importante notion de *morphisme de groupes*.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, appelons h_σ l'homographie qui à ϱ associe ϱ^σ ; par exemple, si $\sigma = (12)$, on a $h_\sigma(\varrho) = 1/\varrho$ pour tout ϱ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Nous avons désigné par $\mathrm{H}_2(\mathbb{C})$ le groupe des homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Il est alors immédiat que l'application $\mathbf{H}$ de $\mathfrak{S}_4$ dans $\mathrm{H}_2(\mathbb{C})$ qui à σ associe h_σ possède la propriété suivante, qui fait de cette application un *morphisme* du groupe $\mathfrak{S}_4$ dans le groupe $\mathrm{H}_2(\mathbb{C})$:

Quelles que soient σ et σ' dans $\mathfrak{S}_4$, on a $h_{\sigma'\circ\sigma} = h_{\sigma'} \circ h_\sigma$.

Le *noyau* $\operatorname{Ker}\mathbf{H}$ de ce morphisme (qui est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_4$) est l'ensemble des σ pour lesquelles h_σ est l'application identique de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. On établit facilement que ce noyau est formé de l'identité $\varepsilon \in \mathfrak{S}_4$ et des trois permutations suivantes :

$$\sigma_1 = (12)(34), \quad \sigma_2 = (13)(24), \quad \sigma_3 = (14)(23).$$

Ce noyau comporte donc quatre éléments ; on sait qu'il n'existe à isomorphisme près que deux groupes à quatre éléments, l'un et l'autre commutatifs : $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ici, c'est au second que notre noyau est isomorphe, par exemple parce qu'aucun des éléments du noyau n'est d'ordre 4, alors que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ possède deux éléments ayant cet ordre.

L'affaire est entendue : l'image de $\mathbf{H}$, qui est l'ensemble des homographies de la forme h_σ, est un sous-groupe de $\mathrm{H}_2(\mathbb{C})$ isomorphe au quotient $\mathfrak{S}_4/\operatorname{Ker}\mathbf{H}$, qui possède bien 24/4 éléments.

L'image de $\mathbf{H}$, groupe à six éléments, est également isomorphe à un groupe connu. Il n'existe à isomorphisme près que deux groupes à six éléments, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{S}_3$. L'image est isomorphe au second, par exemple parce qu'elle ne contient aucun élément d'ordre 6, ou encore parce qu'elle n'est pas un groupe commutatif (l'une et l'autre des ces assertions se vérifie facilement). Ce groupe à six éléments est appelé le *groupe du birapport* et nous le désignerons par $\mathfrak{B}$.

On peut aussi dresser la liste des homographies qui conservent le triplet $\{0, \infty, 1\}$; on s'aperçoit alors qu'elle est constituée de six éléments et que ce sont précisément les six homographies que nous avons trouvées dans l'image de $\mathbf{H}$. Cela permet d'interpréter d'une certaine manière $\mathfrak{B}$ comme le groupe des permutations du triplet $\{0, \infty, 1\}$. On a pour cela besoin entre autres de la remarque suivante, dont la vérification est facile : deux homographies qui prennent les mêmes valeurs en trois points distincts de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sont égales.

Ainsi, on comprend mieux pourquoi nous avons trouvé trois homographies d'ordre deux et deux d'ordre trois : ce sont celles qui correspondent respectivement aux transpositions et aux permutations circulaires dans le triplet $\{0, \infty, 1\}$. Par exemple, l'homographie $\varrho \longmapsto \dfrac{\varrho}{\varrho - 1}$ échange 1 et ∞ (et laisse 0 fixe).

Pour certaines valeurs de ϱ, notre liste comporte moins de six éléments ! Cela se produit pour une valeur donnée de ϱ si, et seulement si, il existe deux permutations $\sigma \neq \sigma'$ telles que $h_\sigma(\varrho) = h_{\sigma'}(\varrho)$.

Il semble nécessaire de résoudre $\mathbf{C}_2^6 = 15$ équations dans $\mathbb{C}$ (du second degré seulement, mais tout de même...) En fait, $h_\sigma(\varrho) = h_{\sigma'}(\varrho)$ a lieu si, et seulement si, on a $h_{\sigma\circ\sigma'^{-1}}(\varrho) = \varrho$, avec $\sigma \circ \sigma'^{-1}$ différente de l'identité.

Puisque $h_{\sigma\circ\sigma'^{-1}} \in \mathfrak{B}$ pour toute couple de permutations (σ, σ'), il nous reste seulement à résoudre les équations de la forme $h_\sigma(\varrho) = \varrho$, de sorte que notre pensum descend à 5 équations, et on peut même l'abaisser encore un peu. Comment ? Voir la réponse en note [44].

Finalement, après résolution de ces équations, nous retrouvons pour ϱ les valeurs 0, ∞ et 1 déjà remarquées, mais aussi d'autres éléments, dont la liste suit :

$$\left\{ -1, 2, 1/2, \underbrace{-e^{2i\pi/3}}_{-j}, \underbrace{-e^{-2i\pi/3}}_{-j^2} \right\}.$$

Dans le groupe du birapport, chaque homographie permute entre eux les éléments 0, ∞ et 1 ; chaque homographie agit de même sur le triplet $\{-1, 2, 1/2\}$ que l'on appelle l'*orbite harmonique* et également sur la paire $\{-j, -j^2\}$ que l'on appelle l'*orbite équiharmonique*.

Cette découverte de l'orbite harmonique justifie à elle seule l'étude faite dans cette section. Elle montre en effet que, si la calcul d'un birapport $[a, b, c, d]$ *donne la valeur* 2 *par exemple, on peut le rendre harmonique, c'est-à-dire égal à* -1, *par une permutation convenable des complexes considérés. Par exemple,* $[c, b, a, d] = 1 - [a, b, c, d] = -1$, *de sorte que le birapport* $[c, b, a, d]$ *est harmonique.*

Puisque les images de quatre complexes ayant un birapport harmonique forment une configuration remarquable (que nous étudierons ultérieurement), cela vaudra aussi, à permutation près, pour le cas d'un birapport égal à 2.

Enfin, rattachons le terme d'*orbite* utilisé *supra* à la terminologie des *actions de groupes*.

Désignons par ε l'homographie identique qui est l'élément neutre de $\mathfrak{B}$ et posons, pour $h \in \mathfrak{B}$ et $z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$,

$$h \cdot z = h(z).$$

Cela définit une loi externe de $\mathfrak{B} \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ qui a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \varepsilon \cdot z = z \\ \forall (h, h', z) \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}), h \cdot (h' \cdot z) = (h \circ h') \cdot z. \end{cases}$$

[44] Dans notre liste des éléments de $\mathfrak{B}$, la sixième homographie est la composée de la cinquième par elle-même. Or $h \circ h(z) = z \iff h(z) = z$ lorsque $h \circ h \circ h = \mathrm{Id}$.

Ces propriétés sont exactement celles qu'il fallait vérifier pour affirmer que le groupe $\mathfrak{B}$ *agit* (à gauche) sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Si $z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, on définit le *stabilisateur* de z sous cette action comme étant la partie $\mathfrak{B}^z$ suivante de $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B}^z = \{h \in \mathfrak{B} \mid \quad h \cdot z = z\} ,$$

et l'*orbite* $\mathfrak{B} \cdot z$ comme étant la partie suivante de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$:

$$\mathfrak{B} \cdot z = \{h \cdot z \,, \text{où } h \text{ décrit } \mathfrak{B}\} .$$

Le stabilisateur $\mathfrak{B}^z$ d'un élément $z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est toujours un sous-groupe de $\mathfrak{B}$, il est en général réduit à $\{\varepsilon\}$, sauf précisément lorsque

$$z \in \{0, \infty, 1, -1, 2, 1/2, -\mathrm{j}, -\mathrm{j}^2\} .$$

Pour chacun des six premiers éléments de cette liste, le stabilisateur est un sous-groupe à deux éléments de $\mathfrak{B}$, isomorphe donc à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et à trois éléments pour chacun des deux derniers, isomorphe donc à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Il est immédiat que les orbites de deux complexes sont, soit égales, soit *disjointes*. Lorsque $z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ne figure pas dans la liste précédente, son orbite possède six éléments. Lorsque $\mathfrak{B}^z$ possède deux, respectivement trois, éléments, l'orbite de z contient trois, respectivement deux, éléments. Ces résultats sont conformes à la formule suivante, vraie chaque fois qu'un groupe G **fini** agit sur un ensemble E :

$$\forall z \in E, \operatorname{Card} G = \operatorname{Card}(G^z) \times \operatorname{Card}(G \cdot z) .$$

Voici maintenant deux exercices, qui seront corrigés en fin de chapitre.

a. Fractions rationnelles invariantes. On appelle fonction rationnelle sur $\mathbb{C}$ toute fonction quotient de deux fonctions polynomiales. Le domaine de définition d'une fonction rationnelle $z \longmapsto \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, où P et Q sont deux fonctions polynomiales, est l'ensemble des z complexes qui n'annulent pas le dénominateur Q[45].

Une fonction rationnelle F est *invariante* sous l'action de $\mathfrak{B}$ si $F \circ h = F$ pour toute homographie $h \in \mathfrak{B}$, et elle *sépare* les orbites si $F(z) \neq F(z')$ chaque fois que z et z' appartiennent à deux orbites différentes de l'action de $\mathfrak{B}$.

Avec ces définitions, l'exercice consiste à déterminer une fonction rationnelle F invariante sous l'action de $\mathfrak{B}$ et qui en sépare les orbites.

[45] Si on impose que les polynômes P et Q soient **premiers entre eux**, le couple (P, Q) devient alors unique à un facteur multiplicatif non nul près. Dans ces conditions, on peut prolonger la fonction rationnelle $f = P/Q$ en une fonction de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ en posant $f(z) = \infty$ lorsque $Q(z) = 0$ et en définissant $f(\infty)$ comme il suit : $f(\infty) = \infty$ si $\deg(P) > \deg(Q)$, $f(\infty) = 0$ si $\deg(P) < \deg(Q)$ et, enfin, si P et Q sont de même degré k, c'est-à-dire $P(X) = a_k X^k + \cdots$ et $Q(X) = b_k X^k + \cdots$, avec $a_k b_k \neq 0$, alors $f(\infty) = a_k/b_k$. Cette définition est cohérente malgré la non-unicité du couple (P, Q).

Il n'y a pas unicité de la réponse : si f convient, toute fonction rationnelle de la forme $H \circ f$, où H est une homographie, convient aussi. Nous chercherons donc une solution aussi « esthétique » que possible !

b. Orbites et corps finis. Pour traiter cet exercice, on conseille d'effectuer auparavant les calculs du **V-9.5.2** conduisant à la détermination des orbites « singulières » de l'action de $\mathfrak{B}$ sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, c'est-à-dire l'orbite harmonique et l'orbite équiharmonique, afin de bien discerner les changements dus au remplacement de $\mathbb{C}$ par un corps fini.

Soit K un corps (commutatif) fini, de caractéristique p, nombre premier de ce fait. On sait alors que le cardinal de K est de la forme p^n, où $n \in \mathbb{N}^*$. On peut encore adjoindre à K un symbole ∞ et définir les six homographies constituant $\mathfrak{B}$ en tant qu'applications de $K \cup \{\infty\}$ dans lui-même, puisque les coefficients intervenant dans la définition de celles-ci sont tous dans l'ensemble $\{0, \pm 1\}$.

On demande de déterminer le nombre d'orbites de $K \cup \{\infty\}$ sous l'action de $\mathfrak{B}$. Attention, les cas $p = 2$ et $p = 3$ sont à étudier à part.

9.5.3. Birapport et homographies

Nous énonçons et prouvons une propriété fondamentale des homographies qui est la « conservation » du birapport. Cela est en fait quasiment contenu dans la définition du birapport que nous avons adoptée.

Considérons quatre éléments distincts a, b, c et d dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, ainsi qu'une homographie h. Nous avons alors l'identité de conservation suivante :

$$[h(a), h(b), h(c), h(d)] = [a, b, c, d] .$$

[*Cela reste vrai, mais perd de son intérêt, lorsque deux de ces quatre éléments (et deux seulement) sont égaux. La vérification est alors immédiate dans ce cas.*]

En effet, il existe une homographie h_0 qui envoie a, b et c sur 0, ∞ et 1 respectivement. On sait alors que $[a, b, c, d] = h_0(d)$.

Considérons à présent l'homographie $H = h_0 \circ h^{-1}$; elle envoie $h(a)$, $h(b)$ et $h(c)$ sur 0, ∞ et 1 respectivement. Puisque $[h(a), h(b), h(c), h(d)] = H(h(d)) = h_0(d)$, le résultat est établi.

Cette propriété possède une réciproque, que nous énonçons à présent : *soit, dans* $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, *deux quadruplets d'éléments distincts,* (a_1, a_2, a_3, a_4) *et* (a'_1, a'_2, a'_3, a'_4). *Il existe une homographie* h *telle que* $h(a_k) = a'_k$ *pour tout* k *si, et seulement si,*

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = [a'_1, a'_2, a'_3, a'_4] .$$

Vu ce qui vient d'être établi, cette condition est nécessaire.

Réciproquement, supposons cette égalité vraie. Il existe une homographie h_0 envoyant a_1, a_2 et a_3 respectivement sur 0, ∞ et 1 et une homographie h'_0 envoyant a'_1, a'_2 et a'_3 respectivement sur 0, ∞ et 1. On a alors

$$h_0(a_4) = [\,a_1, a_2, a_3, a_4\,] = [\,a'_1, a'_2, a'_3, a'_4\,] = h'_0(a'_4)\,.$$

En conséquence, $h_0(a_k) = h'_0(a'_k)$ pour tout k, de sorte que $h = (h_0)^{-1} \circ h'_0$ convient.

9.5.4. Les homographies, les involutions et leurs points fixes

Grâce au birapport, nous allons pouvoir paramétrer la quasi-totalité des homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. *Commençons par approfondir la notion de point fixe d'une homographie.*

Soit une homographie h de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, associée à une matrice inversible complexe $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ [46]. On dit que $z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est un ***point fixe*** de h si $h(z) = z$.

Si $c \neq 0$, alors ∞ n'est pas point fixe de h, et $z \in \mathbb{C}$ en est un si, et seulement si, $cz^2 + dz = az + b$. Cette équation du second degré admet donc deux solutions distinctes ou une solution double.

Lorsque $c = 0$, on a $\det(M) = ad$, de sorte que $ad \neq 0$. Un $z \in \mathbb{C}$ est point fixe de h si, et seulement si, $az + b = dz$. Si $a \neq d$, l'homographie h (qui est une similitude directe distincte d'une translation) possède un point fixe $z \in \mathbb{C}$, mais cette fois, ∞ en est aussi point fixe. Il n'y aura pas d'inconvénient à considérer que h possède *deux* points fixes dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Enfin, si $a = d \neq 0$, l'homographie h est maintenant la translation $z \longmapsto z + \dfrac{b}{d}$ dont tout élément de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est point fixe si $b = 0$ (h est l'identité), ou dont seul ∞ est point fixe si $b \neq 0$. Dans ce dernier cas, nous dirons que ∞ en est point fixe *double*.

Nous distinguerons donc deux types d'homographies : les homographies *régulières* qui admettent au moins deux points fixes distincts dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire les homographies admettant exactement deux points fixes distincts, ainsi que l'identité) et les homographies *singulières* (ou *paraboliques*)

[46] Voir le **V-5**. On rappelle en particulier que M n'est définie qu'à un facteur multiplicatif non nul près, et le lecteur est invité à vérifier que les résultats énoncés ici ne dépendent pas du choix de ce facteur.

qui admettent un point fixe double dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ [47].

Voici un énoncé important, qui donne une relie birapport et points fixes d'une homographie : soit h une homographie de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ admettant (au moins) deux points fixes (distincts) α et β dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Alors, il existe un $k \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\}$ [48] tel que

$$\forall z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{\alpha, \beta\}\ , [\alpha, \beta, z, h(z)] = k\,.$$

Nous pourrons appeler cette valeur de k le *birapport* de l'homographie h. Toutefois, si on échange α et β, k est remplacé par $1/k$, de sorte que le birapport k ne dépend pas que de h.

Démonstration. Supposons d'abord que $\alpha \neq \beta \neq \infty$, définissons l'homographie h_0 par $h_0(z) = \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ puis l'homographie $H = h_0 \circ h \circ h_0^{-1}$.

Puisque $h_0(\alpha) = 0$ et que $h_0(\beta) = \infty$, on a $H(0) = h_0(h(\alpha)) = h_0(\alpha) = 0$ et de même $H(\infty) = \infty$. Or, une homographie qui laisse fixes 0 et ∞ est de la forme $z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \longmapsto kz$, avec $k \in \mathbb{C}^*$. On a donc $h_0(h(z)) = kh_0(z)$, c'est-à-dire

$$(\mathscr{F}) \qquad \frac{h(z)-\alpha}{h(z)-\beta} = k\,\frac{z-\alpha}{z-\beta}\,,$$

pour tout $z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{\alpha, \beta\}$, et c'est bien dire que $[\alpha, \beta, z, h(z)] = k$.

Si maintenant $\beta = \infty$, h est de la forme $z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \longmapsto k(z-\alpha) + \alpha$ et le résultat annoncé s'en déduit immédiatement.

Il est à noter que, avec ces notations, pour tout $z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{\alpha, \beta\}$, il existe un unique $z' \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ tel que $[\alpha, \beta, z, z'] = k$ et que cela implique que ce z' n'est autre que $h(z)$. Cela montre aussi que, réciproquement, si on se donne $\alpha \neq \beta \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{C}^*$, il existe une unique homographie h telle que $[\alpha, \beta, z, h(z)] = k$ pour tout $z \neq \alpha$ et $\neq \beta$.

De la formule $\mathscr{F}$ *supra* on déduit facilement que, si deux homographies h et h' admettent les deux mêmes points fixes $\alpha \neq \beta$ (énoncés dans le même ordre) et admettent respectivement pour birapport k et k', alors $h' \circ h$

[47] On vérifie sans peine que le discriminant de l'équation « aux points fixes » $cz^2 + dz = az + b$ est égal à $(a-d)^2 + 4bc$ et que ce scalaire est aussi le discriminant du polynôme caractéristique $X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$ de M. Ainsi, une homographie distincte de l'identité est régulière ou singulière selon que « la » matrice à laquelle elle est associée admet deux valeurs propres distinctes ou une valeur propre double. Comme l'homographie identique est considérée comme régulière, nous pouvons en déduire que la matrice associée à une homographie régulière est diagonalisable et que celle associée à une homographie singulière *n'est pas* diagonalisable.

[48] Ou, si l'on préfère, un $k \in \mathbb{C}^*$, quoique cette façon d'introduire k exclue moins explicitement le symbole ∞.

admet ces mêmes points fixes et a $k'k$ pour birapport [49].

En particulier, si h admet α et β comme points fixes et k comme birapport, $h^{<2>} \overset{\text{déf}}{=} h \circ h$ admet les mêmes points fixes, et k^2 comme birapport, $h^{<3>} \overset{\text{déf}}{=} h \circ h^{<2>}$ admet les mêmes points fixes, et k^3 comme birapport, etc.

Cas particuliers. Toujours avec les mêmes notations, on voit que h est l'identité si, et seulement si, $k = 1$. Il est plus intéressant de noter que h est une involution (distincte de l'identité) si, et seulement si, $k = -1$. Ces deux valeurs de k ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on énonce les points fixes.

Il est important de remarquer qu'une involution h est toujours régulière. C'est clair si $h = \mathrm{Id}$; sinon, elle est associée à une matrice inversible $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $\mathrm{tr}\,(M) = a + d = 0$, voir le lemme 1 du **V-6**. Si cette matrice avait une valeur propre double λ, on aurait $\lambda + \lambda = \mathrm{tr}\, M = 0$, de sorte que $\lambda = 0$: cela contreviendrait à l'inversibilité de M.

En résumé, une involution distincte de l'identité est entièrement déterminée par la donnée de ses deux points fixes α et β : quel qu'en soit l'ordre, on a $k = -1$ et l'image z' de z ($\neq \alpha$ et $\neq \beta$) est l'unique élément tel que $[\alpha, \beta, z, z'] = -1$ [50]. Nous en verrons plus loin une construction géométrique (voir au **V-9.5.6**).

Plus généralement, une homographie admettant α et β comme points fixes et k comme birapport, est d'*ordre* $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire vérifie $h^{<n>} = \mathrm{Id}$ et $h^{<p>} \neq \mathrm{Id}$ pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$ si, et seulement si, k est de la forme $e^{2\ell i\pi/n}$, où ℓ et n sont premiers entre eux.

Ces considérations nous permettent d'expliciter les suites récurrentes du type $z_{n+1} = h(z_n)$, lorsque h est une homographie régulière. Par exemple, déterminons la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $z_0 = a \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ donné et $z_{n+1} = \dfrac{z_n}{2z_n + 3}$ pour $n \geqslant 0$.

Les points fixes de l'homographie $z \overset{h}{\longmapsto} \dfrac{z}{2z+3}$ sont 0 et -1, et l'on vérifie que pour $z \neq 0$ et $z \neq -1$ on a aussi $h(z) \neq 0$ et $\neq -1$, et

$$\frac{h(z)}{h(z)+1} = \frac{1}{3}\frac{z}{z+1}\,.$$

Ainsi, on a tout de suite l'alternative : soit $a \in \{0, -1\}$ et dans ce cas (z_n) est

[49] En particulier, l'ensemble $H_{\alpha,\beta}$ des homographies admettant deux points fixes donnés est un *sous-groupe commutatif* de $\mathrm{H}_2(\mathbb{C})$, le groupe des homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. L'application $h \longmapsto k$, de $H_{\alpha,\beta}$ à valeur dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ est un isomorphisme. Le groupe $H_{0,\infty}$ est celui des homographies $z \longmapsto kz$, avec $k \in \mathbb{C}^*$: il représente un bon modèle de sous-groupe puisque la valeur de k se lit directement dans l'expression de l'homographie. C'est d'autant plus un modèle que nous avons établi que les autres $H_{\alpha,\beta}$ lui sont conjugués par le biais de l'automorphisme intérieur décrit *supra*, c'est-à-dire $h \longmapsto h_0 \circ h \circ h_0^{-1}$.

[50] Nous disons dans ce cas que la division $[\alpha\beta zz']$ est ***harmonique***.

la suite constante (a), soit $a \notin \{0, -1\}$ et dans ce cas $\dfrac{z_n}{z_n+1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \dfrac{a}{a+1}$, d'où l'on tire la valeur de z_n (ainsi que l'existence d'une limite de z_n lorsque $n \to +\infty$, savoir $\ell = 0$).

On peut aussi savoir pour quelles valeurs de a la suite (z_n) est à valeurs différentes de ∞. Puisque l'homographie $z \longmapsto z/(z+1)$ envoie ∞ sur 1, il suffit d'exclure les valeurs de a pour lesquelles la suite $n \longmapsto (1/3)^n a/(a+1)$ prend la valeur 1. Ainsi, la suite (z_n) est à valeurs finies si, et seulement si, $a \neq \infty$ et $a \notin \{-3^n/(3^n-1)\,,\text{où}\, n \in \mathbb{N}\}$.

Les homographies singulières ont un autre mode de génération : si l'homographie h admet ∞ pour point fixe unique, elle est de la forme $z \longmapsto z+k$, avec $k \neq 0$ et $\neq \infty$, et si elle admet $\alpha \in \mathbb{C}$ pour point fixe unique, il existe un scalaire $k \in \mathbb{C}^*$ tel que, pour tout $z \neq \alpha$,

$$\frac{1}{h(z)-\alpha} - \frac{1}{z-\alpha} = k\,.$$

Démonstration. Il n'y a que dans le cas d'une translation $z \longmapsto z+k$, avec $k \neq 0$ et $\neq \infty$, que nous ayons trouvé ∞ comme point fixe double.

Supposons donc que le point fixe double est $\alpha \in \mathbb{C}$ et définissons l'homographie h_0 par $h_0(z) = \dfrac{1}{z-\alpha}$ puis l'homographie $H = h_0 \circ h \circ h_0^{-1}$. Puisque $h_0(\alpha) = \infty$ et que $h(\alpha) = \alpha$, on voit que ∞ est point fixe de H. En outre $H(z) = z$ si, et seulement si, $h(h_0^{-1}(z)) = h_0^{-1}$ si, et seulement si, $h_0^{-1}(z) = \alpha$ si, et seulement si, $z = h_0(\alpha) = \infty$.

Donc, ∞ est l'unique point fixe de l'homographie H et cette dernière est de la forme $z \longmapsto z+k$, avec $k \neq 0$ et $\neq \infty$. On en conclut que, pour $z \neq \alpha$, $\dfrac{1}{h(z)-\alpha} = \dfrac{1}{z-\alpha} + k$, comme cela a été annoncé.

Réciproquement, si on se donne $\alpha \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{C}$, il existe une unique homographie h telle que $h(\alpha) = \alpha$ et $1/(h(z)-\alpha) = 1/(z-\alpha) + k$ pour $z \neq \alpha$. Cette homographie est l'identité si $k = 0$ et admet α comme unique point fixe sinon. Si l'on fixe α et que l'on fasse varier k dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des homographies ainsi obtenues est-un sous-groupe commutatif de $\mathrm{H}_2(\mathbb{C})$, isomorphe cette fois au groupe additif $\mathbb{C}$.

Le traitement des suites récurrentes associées à des homographies singulières est analogue : soit à titre d'exemple la suite récurrente $z_{n+1} = 2z/(z+2)$, avec $z_0 = a \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

L'homographie $z \longmapsto 2z/(z+2)$ admet 0 comme point fixe unique et l'on a, pour $z \neq 0$,

$$\frac{1}{h(z)-0} - \frac{1}{z-0} = \frac{1}{2}.$$

Donc, si $a = 0$, on a $z_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et, sinon, $1/z_n = \dfrac{1}{a} + n$ pour tout n,

c'est-à-dire $z_n = n/(na+1)$. La suite (z_n) est à valeurs finies si, et seulement si, $a \neq \infty$ et $a \notin \{-1/n, \text{où } n \in \mathbb{N}^*\}$.

9.5.5. Birapport, droites et cercles

Le birapport va nous permettre d'énoncer des conditions d'alignement ou de cocyclicité et nous allons retrouver les images des cercles-droites par des homographies.

Nous partons d'un plan affine euclidien orienté P rapporté à un repère orthonormé. Soit A, B et C trois points distincts dans P, et a, b et c leurs affixes dans $\mathbb{C}$. Alors, ces points sont alignés si, et seulement si, $[a, b, c, \infty] \in \mathbb{R}$.

En effet, ce birapport est égal à l'inverse de $\dfrac{c-a}{c-b}$, c'est-à-dire donc à $(c-b)/(c-a)$, et ce quotient est réel si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $c - b = \lambda(c-a)$. Cette dernière égalité équivaut à $\overrightarrow{BC} \in \text{Vect}\,(\overrightarrow{AC})$, c'est-à-dire à l'alignement des points A, B et C.

Si A, B, C et D sont quatre points distincts dans P, d'affixes respectifs a, b, c et d, ils sont *cocycliques* [51] ou alignés, si, et seulement si, le birapport $\varrho \overset{\text{déf}}{=} [a, b, c, d]$ est **réel**.

On a $\dfrac{d-a}{d-b} = \varrho \dfrac{c-a}{c-b}$; désignons par h l'homographie $z \longmapsto [a, b, c, z]$; on a donc $h(d) = \varrho$.

Si $\varrho \in \mathbb{R}$, alors $h(d)$ appartient à $\mathbb{R}$, qui est une droite vectorielle de $\mathbb{C}$. Comme $h(a) = 0$, on a $h(a) \in \mathbb{R}$ et de même $h(b) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ puisque $h(b) = \infty$. Enfin, $h(c) = 1 \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $h(a)$, $h(b)$, $h(c)$ et $h(d)$ appartiennent à la droite complétée $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, de sorte que a, b, c et d appartiennent à l'image de cette droite par h^{-1}, image qui est donc un cercle-droite, vu le **V-9.3.**

Réciproquement, si a, b, c et d sont sur un même cercle-droite $\mathscr{C}$, leurs images par h appartiennent au cercle-droite $h(\mathscr{C})$, qui est une droite complétée puisque $h(b) = \infty \in h(\mathscr{C})$, et qui est plus précisément la droite réelle complétée puisque $h(a) = 0$ et $h(c) = 1$. Ainsi, $h(d) \in \mathbb{R}$; on a enfin $\varrho = [a, b, c, d] = [h(a), h(b), h(c), h(d)] = [0, \infty, 1, h(d)] = h(d)$, ce qui achève la démonstration.

Interprétons géométriquement cette condition. On sait qu'un argument *modulo* π [52] du complexe $(d-a)/(d-b)$ est l'angle orienté $(\widehat{BD, AD})$ et qu' un argument *modulo* π du complexe $(c-a)/(c-b)$ est l'angle orienté $(\widehat{BC, AC})$. Un argument du birapport ϱ est donc $(\widehat{BD, AD}) - (\widehat{BC, AC})$,

[51] C'est-à-dire situés sur un même cercle.

[52] Et même *modulo* 2π, mais cette précision n'est pas utile.

c'est-à-dire encore $(\widehat{CA,CB}) - (\widehat{DA,DB})$. Ce birapport est donc réel si, et seulement si, $(\widehat{CA,CB})$ et $(\widehat{DA,DB})$ sont congrus *modulo* π, c'est-à-dire si, et seulement si, les points $ABCD$ sont cocycliques ou alignés.

Autrement dit, si l'on se donne A, B, C, le lieu des points $M(z)$ tels que le birapport $[a, b, c, z]$ soit réel est le cercle-droite passant par A, B, C. Quel est en revanche le lieu des points $M(z)$ tels que le birapport $[a, b, c, z]$ soit de module 1 ? Cette condition équivaut à

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \left|\frac{c-a}{c-b}\right|,$$

c'est-à-dire à $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{CA}{CB}$. Le lieu cherché est donc le cercle-droite d'APOLLONIUS lieu des points M tels que $MA/MB = k$, avec $k = CA/CB$ (ce cercle-droite est une droite, en l'occurrence la médiatrice de AB, lorsque $k = 1$, c'est-à-dire lorsque C est lui-même sur cette médiatrice). Ce cercle-droite sera noté $\mathscr{A}_{ABC}$ au paragraphe suivant.

Exercice. S'inspirer de ce qui précède pour retrouver ce cercle-droite comme image d'un cercle par une certaine homographie.

Dans les deux paragraphes qui suivent, nous étudions deux configurations intéressantes issues de la notion de birapport.

9.5.6. Les quadrangles harmoniques

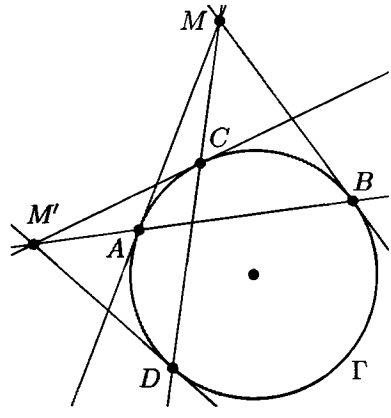
Avec les notations du paragraphe précédent, nous dirons qu'un quadrangle, ou *quadruplet*, (A, B, C, D) formé de quatre points distincts est *harmonique* si le birapport de leurs affixes $[a, b, c, d]$ est égal à -1. Par extension et pour alléger nos énoncés, nous appliquerons au quadruplet $\{a, b, c, d\}$ la même terminologie qu'au quadrangle (A, B, C, D).

Du **V-9.5.2** découle que l'on conserve l'harmonie d'un quadruplet en en permutant les deux premiers et/ou les deux derniers éléments, ou bien en en permutant le premier avec le troisième **et** le deuxième et le quatrième.

Si le quadruplet (A, B, C, D) est harmonique, nous dirons que C et D sont conjugués (sous-entendu harmoniquement) par rapport à A et B, ou que D est le conjugué (harmonique) de C par rapport à A et B.

Si quadruplet (A, B, C, D) est harmonique, ces quatre points sont cocycliques ou alignés, puisque, *a fortiori*, le birapport $[a, b, c, d]$ est réel. Le cas de quatre points alignés est évoqué au **II-2.7** et présente moins d'intérêt dans le cadre actuel ; nous l'écarterons donc.

Supposons donc nos quatre points sur un cercle Γ, et observons la figure ci-contre. Nous allons justifier les propriétés que l'on y trouve, lorsque le quadrangle A, B, C, D est harmonique.



Considérons l'involution h de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, de points fixes a et b, voir le **V-9.5.4**. Du fait que $[a, b, c, d] = -1$, on a $h(c) = d$. Or, cette involution stabilise le cercle Γ ; en effet, trois points (au moins) de Γ ont leur image dans Γ : on a bien $h(a) = a$, $h(b) = b$ et $h(c) = d$. Vu le **V-5.4**, toute involution stabilisant le cercle Γ est une involution de FRÉGIER [53].

Puisque a et b sont fixés par h, le centre de l'involution appartient aux tangentes en A et B au cercle : c'est donc le point M de la figure (éventuellement à l'infini, si les points A et B sont diamétralement opposés) et on a l'alignement des points M, C et D, voir le **V-5.4**.

Puisque le quadrangle $CDAB$ est aussi harmonique, on a aussi l'alignement des points M', A et B, où M' est le point d'intersection des tangentes en C et en D.

Cela fournit en particulier une construction géométrique du point D complétant A, B et C en un quadrangle harmonique : si les points A, B, C sont alignés, la construction est décrite au **II-2.7** et nous supposons donc ces trois points non alignés.

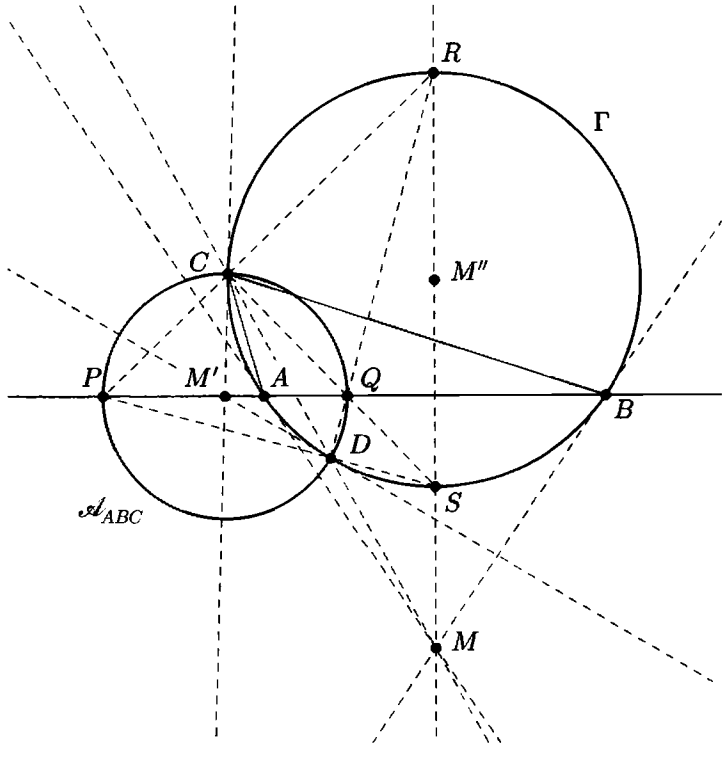
Construisons alors le cercle Γ circonscrit à ABC ; le point D est le point où la droite MC recoupe Γ, M étant le point d'intersection des tangentes en A et en B au cercle.

Nous n'avons pas encore exploité une autre propriété du birapport harmonique : certes, il est réel, mais il est aussi de module 1. Au **V-9.5.5**, nous avons établi que l'ensemble des $M(z)$ tels que $[a, b, c, z]$ soit de module 1 est le cercle-droite d'APOLLONIUS que nous avons noté $\mathscr{A}_{ABC}$. Cela montre donc que $D \in \mathscr{A}_{ABC}$.

Puisque nous savons construire le point D, nous en déduisons une construction du cercle-droite $\mathscr{A}_{ABC}$! Si c'est un cercle, il est centré sur la médiatrice de CD, ainsi que sur la droite AB, voir au **V-8.3**. Or, puisque les tangentes à Γ en C et D se coupent en M', ce point est équidistant de C et de D, donc sur la médiatrice de CD, et il est aussi sur AB : le centre de $\mathscr{A}_{ABC}$ est donc M', et ce cercle est alors entièrement connu puisque nous savons

[53] À vrai dire, nous l'avons établi pour le cercle unité, mais c'est bien sûr valable pour tout cercle de rayon > 0.

aussi qu'il passe par C[54].



Lorsque $\mathscr{A}_{ABC}$ est un cercle, cette figure est riche d'enseignements. Nous savons en effet que les tangentes à Γ en C et D se coupent en M' : les angles $\widehat{M'CM''}$ et $\widehat{M'DM''}$, où M'' est le centre de Γ, sont droits. Cela signifie que les cercles Γ et $\mathscr{A}_{ABC}$ sont *orthogonaux*, c'est-à-dire qu'ils se coupent à angle droit.

Le cercle $\mathscr{A}_{ABC}$ coupe la droite AB en deux points, P et Q. On a donc $PA/PB = QA/QB = CA/CB$. Ainsi,

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} : \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1,$$

de sorte que la division $ABPQ$ est harmonique.

Comme $CP \perp CQ$, puisque PQ est un diamètre du cercle $\mathscr{A}_{ABC}$, on en dé-

[54] Ce cercle-droite est une droite lorsque C est sur la médiatrice de AB ; le point D s'y trouve alors aussi, et $\mathscr{A}_{ABC}$ est alors cette médiatrice.

duit que CA et CB ont pour bissectrices CP et CQ [55] : voir au **IV-2.3.2.**

Appelons R et S les points où les droites (orthogonales) CP et CQ recoupent respectivement le cercle Γ : ces points sont diamétralement opposés sur ce cercle et donc alignés avec M'' ; nous allons établir qu'ils sont aussi alignés avec M.

En effet, puisque CS est une bissectrice de (CA, CB), les angles inscrits dans Γ que sont $\widehat{ACS}$ et $\widehat{SCB}$ sont égaux, et donc les angles au centre $\widehat{AM''S}$ et $\widehat{SM''B}$ sont aussi égaux. Donc, R est effectivement sur la médiatrice de AB, et il en est de même de S. On a donc l'alignement $MM''RS$. Pour la même raison, on a également les alignements PCR et PDS.

Nous avons appelé h l'involution de points fixes a et b ; considérons aussih', l'involution de points fixes c et d : puisque l'on a $[c, d, a, b] = -1$, on a $h'(a) = b$ et $h'(b) = a$. Puisque $h(c) = d$ et que $h(d) = c$, on a $h \circ h'(a) = b$, $h \circ h'(b) = a$, $h \circ h'(c) = d$ et $h \circ h'(d) = c$.

L'homographie $(h \circ h')^{<2>}$ a donc quatre points fixes : a, b, c et d. C'est donc l'identité, de sorte que $h'' \overset{\text{déf}}{=} h \circ h'$ est aussi une involution [56], distincte de h et de h'. Elle a donc deux points fixes e et f, distincts de a, b, c et d.

Puisque $h''(a) = b$, on a donc $[e, f, a, b] = -1$, et de même $[e, f, c, d] = -1$. Nous avons donc obtenu trois paires, (a, b), (c, d) et (e, f), deux à deux conjuguées harmoniques : on dit que le *sextangle*, ou *sextuple*, (a, b, c, d, e, f) est *harmonique*.

En d'autres termes, tout quadrangle harmonique (a, b, c, d) « s'étend » en un sextangle harmonique (a, b, c, d, e, f). Cette « extension » est unique : si (a, b, c, d, e', f') en est une autre, alors $(e', f') = (e, f)$, à l'ordre près.

En effet, si h''' est l'involution de points fixes e' et f', alors $h'''(a) = b$, $h'''(b) = a$, puisque $[e', f', a, b] = -1$ et de même $h'''(c) = d$ et $h'''(d) = c$, d'où suit que $h''' = h''$.

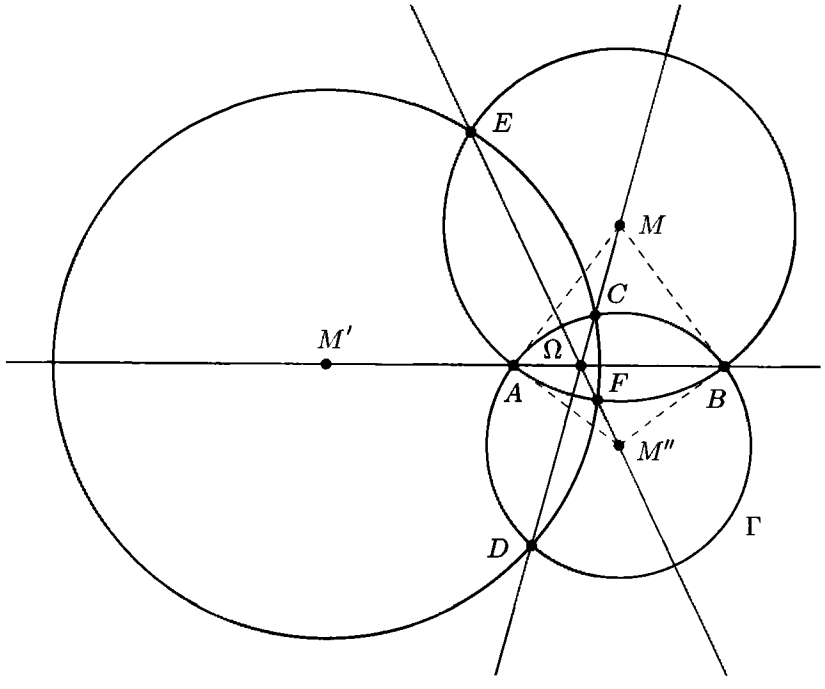
Appelons E et F les images des complexes E et F et voyons comment les construire. De l'égalité $[a, b, e, f] = -1$ suit que A, B, E, et F sont cocycliques (ou alignés), et de même pour les points C, D, E et F.

---

[55] Cela fournit au passage un autre mode de construction du cercle d'Apollonius : les bissectrices de (CA, CB) recoupent la droite AB en des points P et Q, diamétralement opposés sur le cercle cherché.

[56] Notons que lorsque deux involutions h et h' sont telles que $h \circ h'$ est encore une involution, alors elles commutent. En effet, $h \circ h'$ est son propre inverse, mais admet aussi $h' \circ h$ pour inverse ; ces « deux » inverses coïncident donc.

Il suffit donc de savoir construire les cercles-droites contenant ces deux quadrangles.

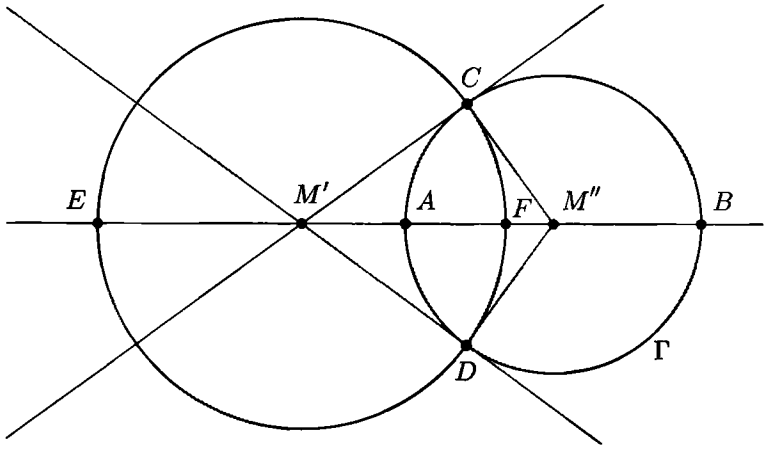


Observons la figure. Si A et B ne sont pas diamétralement opposés sur Γ, les tangentes en ces points se coupent en M. Comme les cercles-droites $ABCD$ et $ABEF$ sont orthogonaux, ces deux droites sont les normales en A et B au cercle-droite $ABEF$; donc, $ABEF$ est un cercle et M en est le centre, de sorte que l'on peut construire ce cercle grâce à son centre et au point A par exemple. Le même principe s'applique à la construction du cercle-droite $CDEF$, lorsque C et D ne sont pas diamétralement opposés sur Γ. Dans ce cas, les cercles $ABEF$ et $CDEF$ sont sécants en E et F (n'importe lequel des deux points d'intersection est alors E).

Nous observons aussi le concours des droites AB, CD et EF en un point Ω. D'après une définition qui apparaîtra au paragraphe **VI-2.3**, ce point Ω n'est autre que le *centre radical* des cercles $ABCD$, $ABEF$ et $CDEF$.

Si par exemple A et B sont diamétralement opposés sur Γ, mais non pas C et D, la construction précédente s'applique pour le cercle-droite $CDEF$, qui est un cercle, mais $ABEF$ est une droite : c'est donc la droite AB, qui est un diamètre du cercle $CDEF$ puisqu'elle passe par son centre. Les

points E et F sont alors diamétralement opposés sur le cercle $CDEF$.



Enfin, si A et B d'une part, C et D d'autre part, sont diamétralement opposés sur Γ, alors $ABEF$ est la droite AB et $CDEF$ est la droite CD. Ces deux droites se coupent au centre M'' du cercle Γ, ainsi qu'au point ∞. En outre, le quadrilatère $ABCD$ est un carré, puisque les diamètres AB et CD sont des cercles-droites orthogonaux.

Trop simple, cette situation ne mérite pas une figure, mais elle est à la base d'un joli exercice proposé par Rached MNEIMNÉ, exercice qui sera corrigé en fin de chapitre.

Exercice. Sous-groupes de $\mathbf{H}_2(\mathbb{C})$ formés d'involutions. Soit G un groupe multiplicatif ; on dit qu'un sous-groupe H est un *2-sous-groupe* si l'on a $x^2 = 1_G$ pour tout $x \in H$. On dit d'une homographie involutive de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ qu'elle est une involution *propre* si elle est différente de l'identité.

1. Soit h et h' deux involutions propres distinctes, de points fixes respectifs $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$. Montrer que h et h' commutent si, et seulement si, $[a, b, c, d] = -1$. Vérifier que, dans ce cas, $h' \circ h$ est une involution propre.

2. Soit H un 2-sous-groupe de $\mathrm{H}_2(\mathbb{C})$; montrer que H est commutatif. En déduire que H ne peut avoir que 1, 2 ou 4 éléments, puis décrire tous les sous-groupes H vérifiant cette propriété.

On désigne par σ l'application de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ définie par $\sigma(z) = \overline{z}$ si $z \in \mathbb{C}$ et $\sigma(\infty) = \infty$. On dit qu'une application de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans lui-même est une *antihomographie* si elle est de la forme $h \circ \sigma$, où $h \in \mathrm{H}_2(\mathbb{C})$.

3. Montrer que l'ensemble Möb formé de toutes les homographies et de toutes les antihomographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans lui-même. [*On l'appelle le* groupe de Möbius *de la droite projective complexe* $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.]

4. Vérifier que le sextangle $(0, \infty, 1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i})$ est harmonique et que les trois couples qui le constituent sont les points fixes respectifs des homographies

$$h_1 : z \longmapsto -z, \quad h_2 : z \longmapsto \frac{1}{z}, \quad h_3 : z \longmapsto -\frac{1}{z}.$$

Vérifier que $H = \{h_0 = \mathrm{Id}, h_1, h_2, h_3\}$ est un 2-sous-groupe de $\mathrm{H}_2(\mathbb{C})$ isomorphe à $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^2$ et que l'ensemble

$$H' = \left\{h_i \circ \sigma^j \text{, où } 0 \leqslant i \leqslant 3 \text{ et } 0 \leqslant j \leqslant 1\right\}$$

est un 2-sous-groupe de Möb isomorphe à $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^3$.

Le sextangle harmonique $S_0 = (0, \infty, 1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i})$ de cet exercice est en quelque sorte un modèle parmi les sextangles harmoniques : si $S = (a, b, c, d, e, f)$ est un sextangle harmonique, il existe une homographie h qui envoie respectivement les éléments de S sur ceux de S_0, à l'exception des deux derniers qui peuvent être permutés.

En effet, soit h l'homographie qui envoie a, b et c sur 0, ∞ et 1. Alors, elle envoie d sur le birapport $[a, b, c, d]$, c'est-à-dire $h(d) = -1$ puisque (a, b, c, d) est un quadrangle harmonique. Comme h respecte le birapport, les quadrangles $\big(0, \infty, h(e), h(f)\big)$ et $\big(1, -1, h(e), h(f)\big)$ sont harmoniques. Or, nous avons établi qu'un quadrangle harmonique s'étend de façon unique en un sextangle harmonique ; on a donc, à l'ordre près, $\{h(e), h(f)\} = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.

9.5.7. Harmonie, formes quadratiques et trace

Ce paragraphe plus abstrait peut être réservé à une seconde lecture. Nous abordons ici un aspect plus projectif de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ et interprétons les quadrangles harmoniques à l'aide de relations sur les formes quadratiques.

Une autre façon de voir $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est de le considérer comme l'ensemble des droites (vectorielles) du $\mathbb{C}$–espace vectoriel $\mathbb{C}^2$. Plus précisément, si l'on choisit pour une droite de $\mathbb{C}^2$ un vecteur directeur $v = (a, b)$, il lui correspond le complexe $z = a/b$ si $b \neq 0$ [57] et le symbole ∞ lorsque $b = 0$. Nous appellerons π la bijection de l'ensemble des droites de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ainsi définie.

Les notions fondamentales de ce chapitre trouvent toutes une interprétation classique grâce à cette façon d'appréhender $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$: une étude exhaustive est à trouver dans l'ouvrage d'ARNAUDIÈS et BERTIN, **[2]**, ou celui de MNEIMNÉ, **[18]**, cités en bibliographie.

[57] Ce qui ne dépend pas du choix du vecteur directeur, unique à multiplication près par un scalaire complexe non nul.

Revenons néanmoins sur la notion d'homographie. À une matrice inversible complexe $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on associe naturellement l'isomorphisme linéaire f de $\mathbb{C}^2$ défini par $X \longmapsto MX$. Si D est une droite vectorielle de $\mathbb{C}^2$, alors $f(D)$ en est une aussi et l'on (re)définit l'homographie h de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ associée à M par $h(z) = \pi(f(\pi^{-1}(z)))$ pour $z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Cela recoupe notre définition habituelle : si $z \neq \infty$, il est l'image par π de la droite $D = \mathrm{Vect}\,(z, 1)$ dont l'image par f est la droite

$$D' = \mathrm{Vect}\,(az + b \times 1, cz + d \times 1)\,.$$

Dès lors, $h(z) = \pi(D')$ est le nombre complexe $(az+b)/(cz+d)$ si $cz+d \neq 0$, et ∞ sinon.

Au contraire, si $z = \infty$, il est l'image par π de la droite $D = \mathrm{Vect}\,(1, 0)$ dont l'image par f est la droite $D' = \mathrm{Vect}\,(a\times 1+b\times 0, c\times 1+d\times 0) = \mathrm{Vect}\,(a, c)$. On a bien $h(\infty) = a/c$, si $c \neq 0$, et ∞ sinon.

Cette définition a l'énorme avantage de ne pas obliger à considérer à part le cas de ∞ dans les calculs ; en outre, elle explique tout de suite (et de manière plus instructive que le calcul) pourquoi $h' \circ h$ est associée à $M'M$ lorsque h est associée à M et h' à M'.

Elle fait également mieux le lien entre points fixes d'une homographie h et valeurs propres de la matrice M à laquelle elle est associée. Dire en effet que $z = \pi(D)$ est fixe par h revient à dire que $f(D) = D$, autrement dit que D est une droite stable par f [58].

Cela étant, à une matrice symétrique complexe $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ on peut associer la forme quadratique q définie sur $\mathbb{C}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par

$$Z = (z_1, z_2) \longmapsto q(Z) = az_1^2 + 2bz_1z_2 + cz_2^2\,,$$

dont la forme polaire φ est définie sur $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ par

$$Z = (z_1, z_2), Z' = (z_1', z_2') \longmapsto \varphi(Z, Z') = az_1z_1' + b(z_1z_2' + z_1'z_2) + cz_2z_2'\,.$$

Si $\det S \neq 0$, le trinôme $az_1^2 + 2bz_1z_2 + cz_2^2$ a un discriminant non nul, de sorte qu'il se factorise sous la forme $(\alpha z_1 + \beta z_2)(\alpha' z_1 + \beta' z_2)$, les vecteurs (α, β) et (α', β') étant non colinéaires dans $\mathbb{C}^2$. Il s'ensuit que $q^{-1}(\{0\})$ est la réunion des deux droites (vectorielles) D_1 et D_2 d'équations respectives $\alpha_1 z_1 + \beta_1 z_2 = 0$ et $\alpha_2 z_1 + \beta_2 z_2 = 0$.

Maintenant, à ces deux droites, on associe $\zeta_1 = \pi(D_1)$ et $\zeta_2 = \pi(D_2)$; nous dirons que la paire (ζ_1, ζ_2) est la *projection* de $q^{-1}(\{0\})$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Nous

[58] Et l'on sait qu'une droite est stable par f si, et seulement si, ses vecteurs directeurs sont des vecteurs propres de f.

avons ainsi défini une application de l'ensemble des matrices symétriques inversibles complexes d'ordre 2 dans l'ensemble $\mathscr{P}$ des paires de points (distincts) de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ [59].

Inversement, soit $\zeta_1 \neq \zeta_2$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$; soit les deux droites D_1 et D_2 dont les images par π sont ζ_1 et ζ_2. Par exemple, si $\zeta_1 \neq \infty$, on a $D_1 = \text{Vect}(\zeta_1, 1)$ et $D_1 = \text{Vect}(1, 0)$ sinon. La droite D_1 a alors pour équation $\ell_1(z_1, z_2) = 0$, où $\ell(z_1, z_2) = z_1 - \zeta_1 z_2$ dans le premier cas et $\ell(z_1, z_2) = z_2$ dans le second. On définit de même une équation $\ell_2(z_1, z_2) = 0$ pour D_2.

Il est alors immédiat que $q = \ell_1 \times \ell_2$ est une forme quadratique (non dégénérée) sur $\mathbb{C}^2$ et que $q^{-1}(\{0\}) = D_1 \cup D_2$. Bien sûr, q n'est définie qu'à un scalaire multiplicatif non nul près, du fait de la non-unicité des équations de D_1 et de D_2. La matrice S de q relativement à la base canonique de $\mathbb{C}^2$ est inversible, et elle aussi définie à un scalaire multiplicatif non nul près.

Voici le résultat essentiel de ce paragraphe, qui met en relation ces définitions avec la notion de quadrangle harmonique : *soit S et S' deux matrices symétriques inversibles complexes d'ordre 2, q et q' les formes quadratiques qui leur sont associées et soit enfin (ζ_1, ζ_2) et (ζ_1', ζ_2') les paires de points de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ obtenues par projection de $q^{-1}(\{0\})$ et de $q'^{-1}(\{0\})$.*

Les assertions suivantes sont alors équivalentes.

1. *Le quadrangle $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_1', \zeta_2')$ est harmonique.*
2. *Il existe une base de du plan vectoriel $\mathbb{C}^2$ qui soit orthogonale pour q' et isotrope pour q* [60].
3. *La matrice $S'S^{-1}$ est de trace nulle.*

En effet, supposons que $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $S' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$, avec $ac - b^2 \neq 0$ et $a'c' - b'^2 \neq 0$, de sorte que $q(Z) = az_1^2 + 2bz_1z_2 + cz_2^2$ et $q'(Z) = a'z_1^2 + 2b'z_1z_2 + c'z_2^2$. Supposons par exemple que $a \neq 0$, le cas contraire se traitant de façon plus simple, d'ailleurs.

L'ensemble $q^{-1}(\{0\})$ est la réunion de deux droites D_1 et D_2 ; ainsi, la seule façon de construire une base (Z_1, Z_2) de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs annulant q est de choisir, à l'ordre près, $Z_1 \neq 0 \in D_1$ et $Z_2 \neq 0 \in D_2$.

Dès lors, l'assertion **3** équivaut à $\varphi'(Z_1, Z_2) = 0$. Si l'on détaille les composantes canoniques de Z_1 et Z_2 : $Z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}^2$ et $Z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}^2$,

[59] Le *cône isotrope* de q, c'est-à-dire $q^{-1}(\{0\})$, est une « conique » projective de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, le mot conique étant entre guillemets non pas parce que le corps de base est $\mathbb{C}$, mais parce que $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est de dimension 1. Si S est inversible, q est non dégénérée et cette conique projective est une paire de points. Si $\det S = 0$, elle « dégénère » en un point double. Il ne faut pas s'étonner qu'une conique soit si pauvre en points : la raison en est encore que l'espace projectif $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ n'est que de dimension 1 !

[60] C'est-à-dire une base dont les vecteurs sont orthogonaux vis-à-vis de la forme polaire φ' de q' et annulent q.

la condition $\varphi'(Z_1, Z_2) = 0$ équivaut à

$$a'x_1x_2 + b'(x_1y_2 + y_1x_2) + c'y_1y_2 = 0.$$

Or, le vecteur $(1,0)$ n'annule pas q puisque $a \neq 0$; c'est dire que $y_1y_2 \neq 0$ et que notre condition équivaut à

$$a'\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2} + b'\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2}\right) + c' = 0.$$

Mais, les relations entre coefficients et racines de l'équation $q(Z) = 0$ donnent

$$\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2} = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} = -2\frac{b}{a}.$$

Finalement, la condition cherchée est $a'c/a - 2b'b/a + c' = 0$, soit encore

$$ac' - 2bb' + a'c = 0.$$

Un calcul trivial montre que $\operatorname{tr}(S'S^{-1}) = \dfrac{ac' - 2bb' + ac'}{ac - b^2}$, ce qui établit l'équivalence des assertions **2** et **3** au cas où $a \neq 0$. La même formule s'obtient dans le cas contraire.

Montrons maintenant que les assertions **1** et **3** sont équivalentes. Supposons que $aa' \neq 0$, ce qui est encore une fois le cas à la fois le plus général et le moins trivial. Nous devons trouver une condition nécessaire et suffisantepour que le quadrangle $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_1', \zeta_2')$ soit harmonique.

D'abord, cela équivaut à la condition $\mathscr{C}$:

$$(\zeta_2' - \zeta_1)(\zeta_1' - \zeta_2) + (\zeta_2' - \zeta_2)(\zeta_1' - \zeta_1) = 0.$$

En effet, si $[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_1', \zeta_2'] = -1$, il suffit de réduire au même dénominateur ; réciproquement, si $\mathscr{C}$ est vraie, on a $\zeta_2' \neq \zeta_2$, car, sinon, $\zeta_2' = \zeta_1$, et cela implique que S est non inversible, ou $\zeta_2 = \zeta_1'$, et cela implique que S' est non inversible. De même, $\mathscr{C}$ implique $\zeta_1' \neq \zeta_1$ et la réciproque est immédiate.

En développant $\mathscr{C}$, on voit qu'elle équivaut à son tour à

$$2(\zeta_1\zeta_2 + \zeta_1'\zeta_2') - (\zeta_1 + \zeta_2)(\zeta_1' + \zeta_2') = 0,$$

c'est-à-dire à $2(c/a + c'/a') - 4bb'/aa' = 0$, c'est-à-dire enfin à $ac' + ca' - 2bb' = 0$, cqfd.

La forme ψ qui à deux matrices symétriques complexes $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $S' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ associe $ac' + ca' - 2bb'$ est bilinéaire et symétrique. La symétrie peut paraître surprenante au vu des conditions **2** et **3** qui sont dissymétriques, mais elle se comprend mieux vu la condition équivalente $\mathscr{C}$ qui, elle, est

tout à fait symétrique : le quadrangle $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_1', \zeta_2')$ est harmonique si, et seulement si, le quadrangle $(\zeta_1', \zeta_2', \zeta_1, \zeta_2)$ est harmonique !

Si $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\psi(S,S) = 2(ac - b^2) = 2\det(S)$; cela montre que $\psi/2$ est la forme polaire de la forme quadratique qui à S associe son déterminant. Cela n'est pas non plus une surprise : le terme $ac' + ca' - 2bb'$ provient, dans les calculs *supra*, de l'expression $\mathrm{tr}(S'S^{-1})$ lorsque S est inversible.

Or, $S^{-1} = \dfrac{\widetilde{S}}{\det(S)}$, où $\widetilde{S}$ est la transposée de la comatrice de S, savoir $\widetilde{S} = \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$, de sorte que $\psi(S,S') = \mathrm{tr}(S'\widetilde{S})$.

Ainsi, $\psi(S,S) = \mathrm{tr}(S\widetilde{S}) = \mathrm{tr}(\det(S) \times \mathrm{Id}_2) = 2\det(S)$.

Ces considérations nous permettent de préciser quelques-unes des propriétés générales des quadrangles harmoniques.

Dans ce qui suit, nous dirons de deux matrices symétriques complexes S et S' qu'elles sont *conjuguées* si $\psi(S,S') = 0$ [61].

Pour commencer, il ne peut pas y avoir plus de trois couples dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ qui forment deux à deux des quadrangles harmoniques (autrement dit, il n'y a pas d'espoir de définir des octangles harmoniques). Cela revient à démontrer que, si des matrices symétriques $S_1, S_2, \ldots, S_k$ inversibles complexes d'ordre 2 sont deux à deux conjuguées, alors $k \leqslant 3$.

En effet, il suffit de montrer que la famille $(S_1, S_2, \ldots, S_k)$ est libre dans l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{S}_2(\mathbb{C})$ des matrices symétriques complexes d'ordre 2, espace vectoriel dont la dimension est 3.

Or, si $\sum_{p=1}^{k} \lambda_p S_p = 0$, avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^k$, alors on a aussi $\sum_{p=1}^{k} \lambda_p S_q^{-1} S_p = 0$ pour tout $q \in \{1, \ldots, k\}$. Prendre la trace des deux membres de cette égalité donne alors $2\lambda_q = 0$, et ce pour tout q. La famille est donc bien libre, et l'on a $k \leqslant \dim \mathfrak{S}_2(\mathbb{C})$.

Ensuite, il n'existe pas de sextuple harmonique formé d'éléments dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Nous avons déjà rencontré un sextuple formé de quatre éléments dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, mais aussi de deux éléments non réels : $(0, \infty, 1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i})$. C'est donc le maximum réalisable de réels.

En effet, soit une paire (ξ_1, ξ_2) d'éléments distincts de $\mathbb{R}$; on l'obtient par projection de $q^{-1}(\{0\})$, où $q(Z) = (z_1 - \xi_1 z_2)(z_1 - \xi_2 z_2)$, forme quadra-

[61] Nous dirons cela afin de ne pas créer d'ambiguïtés : normalement, il fallait parler d'*orthogonalité* par rapport à ψ. Cela étant, la notion préexistante d'orthogonalité pour une matrice rendait ce choix discutable.

tique de matrice $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -\xi_1-\xi_2 \\ -\xi_1-\xi_2 & 2\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}$ qui est réelle et de déterminant strictement négatif; plus précisément $\det(S) = -\dfrac{(\xi_1-\xi_2)^2}{4}$.

Il en va de même d'une paire (ξ, ∞), obtenue à partir de la forme quadratique $q(Z) = (z_1 - \xi z_2)z_2$, de matrice $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\xi \end{pmatrix}$, elle aussi de déterminant strictement négatif.

L'existence d'un sextuple harmonique dans $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ entraînerait l'existence d'une famille libre $\mathscr{B} = (S_1, S_2, S_3)$ de matrices symétriques **réelles** deux à deux conjuguées et de déterminant < 0 et $\mathscr{B}$ serait une base de $\mathfrak{S}_2(\mathbb{R})$.

Or, la restriction ψ_0 de la forme bilinéaire ψ à $\mathfrak{S}_2(\mathbb{R})$ est de signature $(1,2)$, puisque l'on a la décomposition en carrés

$$2ac - 2b^2 = \frac{(a+c)^2}{2} - \frac{(a-c)^2}{2} - 2b^2.$$

En outre, la matrice de cette restriction par rapport à la base $\mathscr{B}$ serait

$$M = \begin{pmatrix} 2\det(S_1) & 0 & 0 \\ 0 & 2\det(S_2) & 0 \\ 0 & 0 & 2\det(S_3) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la signature de ψ_0 serait $(0,3)$, ce qui est contradictoire.

Enfin, nous avons vu que tout quadruple harmonique s'étend de façon unique en un sextuple harmonique. Cela signifie que toute paire (S_1, S_2) de matrices inversibles conjuguées dans $\mathfrak{S}_2(\mathbb{C})$ peut être complétée en une base de cet espace formée de matrices inversibles deux à deux conjuguées, et ce de manière unique à un coefficient multiplicatif non nul près.

Avec ces notations, posons

$$V = \mathrm{Vect}(S_1, S_2) \quad \text{et} \quad V^\circ = \{S \in \mathfrak{S}_2(\mathbb{C}), \forall \Sigma \in V, \psi(\Sigma, S) = 0\}.$$

L'*orthogonal* V° de V relativement à ψ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{S}_2(\mathbb{C})$; il est trivial que ψ est une forme bilinéaire non dégénérée, de sorte que $\dim V^\circ = 3 - \dim V = 1$.

En outre, une matrice S_3 réalisant la complétion désirée doit être inversible et dans V°.

Commençons par démontrer que $V \oplus V^\circ = \mathfrak{S}_2(\mathbb{C})$. Vu la valeur des dimensions de ces sous-espaces, il suffit de montrer que $V \cap V^\circ = \{0\}$. Or, c'est le cas, car la matrice de la restriction $\psi_{|V}$ relativement à la base (S_1, S_2) de V est la matrice inversible $\begin{pmatrix} 2\det(S_1) & 0 \\ 0 & 2\det(S_2) \end{pmatrix}$.

Le choix de S_3 non nulle dans la droite vectorielle V° est unique, à un coefficient multiplicatif (non nul) près. Il reste à vérifier qu'une telle matrice S_3

est forcément inversible. Or, $\mathscr{B} = (S_1, S_2, S_3)$ est une base de $\mathfrak{S}_2(\mathbb{C})$ et la matrice de ψ par rapport à $\mathscr{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2\det(S_1) & 0 & 0 \\ 0 & 2\det(S_2) & 0 \\ 0 & 0 & 2\det(S_3) \end{pmatrix}.$$

Comme ψ est non dégénérée, cette matrice est inversible et l'on a bien $\det(S_3) \neq 0$.

9.5.8. Les quadrangles équiharmoniques

En gardant le même principe de notations, nous dirons qu'un quadrangle, ou *quadruplet*, (A, B, C, D) formé de quatre points distincts est *équiharmonique* si le birapport des affixes $[a, b, c, d]$ appartient à $\{-\mathrm{j}, -\mathrm{j}^2\}$.

Nous avons un premier modèle de quadrangle équiharmonique ; rappelons que nous supposons donné P, plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O; i, j)$, que nous l'identifions à $\mathbb{C}$ et que nous complétons P par un symbole ∞ que nous considérons comme l'image du symbole ∞ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Nous énonçons donc : *un triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, le quadrangle (A, B, C, ∞) est équiharmonique.*

En effet, $[a, b, c, \infty] = \dfrac{c-b}{c-a}$. Alors, ce birapport vaut $-\mathrm{j}^2$ si, et seulement si, $c - b + \mathrm{j}^2(c-a) = 0$, ce qui équivaut à $a + jb + \mathrm{j}^2 c = 0$. De même, ce birapport vaut $-\mathrm{j}$ si, et seulement si, $a + \mathrm{j}^2 b + \mathrm{j}c = 0$ et ces deux égalités caractérisent respectivement les triangles équilatéraux directs et indirects, voir le **V-8.1**.

Soit maintenant trois points distincts du plan euclidien P, d'affixes a, b et c. Si le triangle ABC n'est pas équilatéral, il existe deux points M et M' à distance finie dont les affixes m et m' vérifient $[a, b, c, m] = -\mathrm{j}$ et $[a, b, c, m'] = -\mathrm{j}^2$: en effet, l'application qui à $z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ associe $[a, b, c, z] \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est une homographie, et donc une bijection de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sur lui-même. Sachant cela, m et m' sont les antécédents de $-\mathrm{j}$ et de $-\mathrm{j}^2$ par cette homographie, et ces antécédents sont distincts de ∞.

Les points M et M' sont de vieilles connaissances : nous avons vu qu'une permutation des lettres (a, b, c, m) conserve le birapport équiharmonique $[a, b, c, m]$ ou le remplace par $-\mathrm{j}^2$. En particulier, les complexes $[a, b, c, m]$, $[b, c, a, m]$ et $[c, a, b, m]$ sont tous les trois de module 1. De cela suivent les relations entre distances

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}, \qquad \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}, \qquad \frac{MC}{MA} = \frac{BC}{BA}.$$

Le point M' vérifie bien entendu des relations analogues.

Or, au **V-8.3**, nous avons montré qu'elles caractérisent les centres isodynamiques du triangle : ce sont donc les points M et M'.

Dans ce même paragraphe, nous avons signalé que C est un centre isodynamique du triangle ABM : c'est, là encore, une conséquence de l'action sur les birapports équiharmoniques d'une permutation des variables.

Si le triangle ABC est équilatéral, nous avons établi également qu'un des centres isodynamiques est le point ∞, l'autre étant le centre du triangle. Notre introduction du point ∞ permet donc un énoncé qui ne mette pas à part les triangles équilatéraux.

Remarque. Vu les relations (Iso), les centres isodynamiques M et M' (même à l'infini), sont les points d'intersection des trois cercles-droites d'APOLLONIUS $\mathscr{A}_{ABC}$, $\mathscr{A}_{BCA}$ et $\mathscr{A}_{CAB}$ définis au **V-9.5.6**. Il suffit de savoir en construire deux sur les trois, et nous avons vu dans ce paragraphe comment en obtenir une construction géométrique.

9.5.9. Formule des six birapports et applications

Soit huit éléments distincts a, b, c, d, t, u, v, w dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$; on a alors le résultat étonnant suivant, attribué par MICHÈLE AUDIN à Daniel PERRIN :

$$[a,b,v,w]\,[b,c,t,w]\,[c,a,u,w]\,[t,u,c,d]\,[u,v,a,d]\,[v,t,b,d] = 1\,.$$

Une fois cette formule écrite, on peut en élargir sensiblement les hypothèses : il suffit de supposer en effet que les éléments constitutifs des six birapports sont distincts. Cela autorise les égalités $t = a$, $u = b$, $v = c$ et/ou $w = d$.

Quant à la démonstration, elle s'obtient par simple écriture du produit. Si par exemple les huit éléments sont $\neq \infty$, le membre de gauche de la formule est

$$\frac{(w-a)(v-b)(w-b)(t-c)(w-c)(u-a)(d-t)(c-u)(d-u)(a-v)(d-v)(b-t)}{(w-b)(v-a)(w-c)(t-b)(w-a)(u-c)(d-u)(c-t)(d-v)(a-u)(d-t)(b-v)}\,.$$

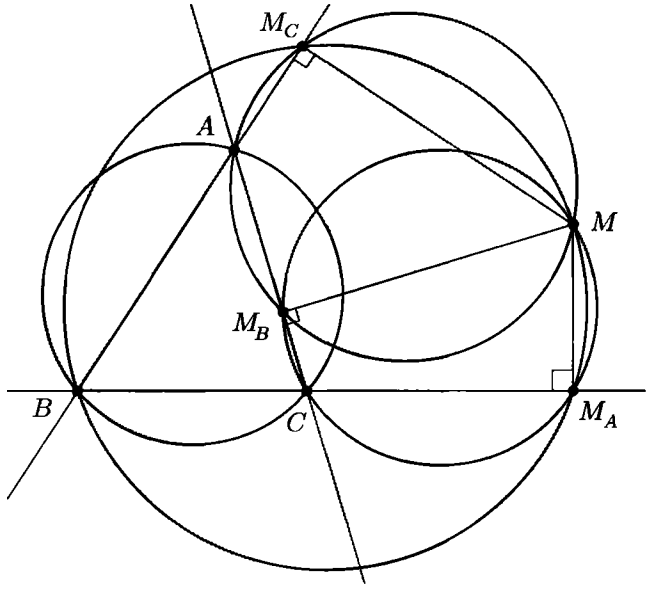
Ainsi, cette expression vaut $1^6 \times (-1)^6$ après simplification.

Le principe utile pour la suite est le suivant : si cinq de ces birapports sont réels, le sixième l'est aussi, et cela peut nous permettre de déduire un résultat de cocyclicité après vérification de cinq autres cocyclicités. De même, si cinq de ces birapports sont de module 1, le sixième l'est aussi.

Voici une première application tonitruante[62] : **la droite de SIMSON.** Soit un vrai triangle ABC du plan P, et $M \notin \{A, B, C\}$ situé dans ce plan. On appelle M_A, M_B et M_C les projetés orthogonaux de M sur les côtés BC, CA et AB. Montrer que ces trois points sont alignés si, et seulement

[62] Mais qui n'est pas une découverte pour nous.

si, M appartient au cercle circonscrit à ABC.



Appelons $a, b, c, m, \alpha, \beta, \gamma$ les affixes des points A, B, C, M, M_A, M_B et M_C.

Les points M_B et M_C appartiennent au cercle de diamètre AM puisque les angles $\widehat{AM_BM}$ et $\widehat{AM_CM}$ sont droits. Nous en déduisons que le birapport $[a, m, \beta, \gamma]$ est réel. Il en va de même des birapports $[b, m, \gamma, \alpha]$ et $[c, m, \alpha, \beta]$, ainsi que de tous ceux que l'on obtient par une permutation interne à l'un de ces birapports.

En outre, l'alignement de M_A, M_B et M_C équivaut à la réalité du birapport $[\alpha, \beta, \gamma, \infty]$ et l'appartenance de M au cercle ABC à la réalité du birapport $[a, b, c, m]$. Il s'agit tout simplement d'ordonner convenablement nos sept affixes, ainsi que ∞, pour utiliser au mieux notre formule. L'ordre prévisible $a\,b\,c\,m\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\infty$ qui respecte la symétrie des rôles respectifs des points A, B, C et des points M_A, M_B, M_C ... échoue !

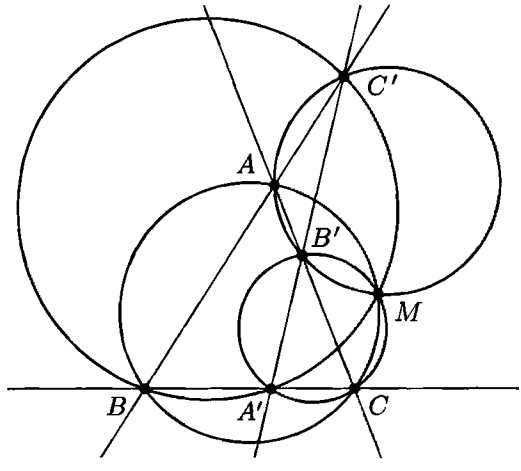
En revanche, l'ordre mélangé $a\,b\,\gamma\,\infty\,\alpha\,\beta\,c\,m$ donne le résultat attendu : on a en effet

$$[a, b, c, m]\,[b, \gamma, \alpha, m]\,[\gamma, a, \beta, m]\,[\alpha, \beta, \gamma, \infty]\,[\beta, c, a, \infty]\,[c, \alpha, b, \infty] = 1$$

Parmi ces six birapports, le deuxième et le troisième sont réels, nous savons pourquoi ; le cinquième et le sixième le sont parce que nous avons les alignements M_BCA et CM_AB. Donc, le quatrième est réel si, et seulement si, le premier l'est.

Voici à présent un second exemple : le théorème **des quatre cercles circonscrits**.

Exercice. Des cercles circonscrits concourants. Soit un vrai triangle ABC du plan P, et A', B', C' des points choisis sur les côtés respectifs BC, CA et AB, mais distincts de A, B et C. Les cercles circonscrits à $AB'C'$ et $A'BC'$ se coupent en C' et en un point M. Montrer que M appartient aussi au cercle circonscrit à $A'B'C$, et que M appartient au cercle circonscrit à ABC si, et seulement si, A', B' et C' sont alignés.



Vous connaissez la règle du jeu ; à vous de jouer. La solution est en fin de chapitre.

10. Corrigé des exercices

10.1. Les exercices du paragraphe V-4

L'exercice V-4.a

On suppose par exemple que le cercle Γ est de rayon 1 et centré à l'origine. On a donc $a' = \dfrac{a \times a\cdot(b+c) - b\cdot c(a+a)}{a\cdot a - b\cdot c} = \dfrac{a(ab+ac-2bc)}{a^2-bc}$. Introduisons les *fonctions symétriques élémentaires* $\sigma_1 = a+b+c, \sigma_2 = bc+ca+ab$ *et* $\sigma_3 = abc$; on a donc encore $a' = \dfrac{a\sigma_2 - 3\sigma_3}{a^2-bc}$ et aussi

$$\overline{a'} = \frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{2}{bc}\right)}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{bc}} = \frac{c+b-2a}{bc-a^2} = \frac{3a-\sigma_1}{a^2-bc}.$$

On obtient b', c' et leurs conjugués par permutation circulaire sur a, b et c. La condition d'alignement équivaut à la nullité du déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a\sigma_2 - 3\sigma_3 & b\sigma_2 - 3\sigma_3 & c\sigma_2 - 3\sigma_3 \\ 3a - \sigma_1 & 3b - \sigma_1 & 3c - \sigma_1 \\ a^2 - bc & b^2 - ca & c^2 - ab \end{vmatrix}.$$

Soustrayons la première colonne aux deux autres ; on a encore

$$\Delta = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a\sigma_2 - 3\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_2 \\ 3a - \sigma_1 & 3 & 3 \\ a^2 - bc & b+a+c & c+a+b \end{vmatrix} = 0.$$

Cqfd.

L'exercice V-4.b

Supposons que le cercle circonscrit au triangle (abc) soit le cercle-unité. Les symétriques de m ont alors pour affixes par rapport aux droites (bc), (ca) et (ab) respectivement $b + c - bc\overline{m}$, $c + a - ca\overline{m}$ et $a + b - ab\overline{m}$. Ces trois points sont alignés si, et seulement si, le déterminant qui suit est nul :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b + c - bc\overline{m} & c + a - ca\overline{m} & a + b - ab\overline{m} \\ \overline{b} + \overline{c} - \overline{bc}m & \overline{c} + \overline{a} - \overline{ca}m & \overline{a} + \overline{b} - \overline{ab}m \end{vmatrix}.$$

Or, en développant Δ avec la règle de SARRUS, on voit qu'il est de la forme $i(A\overline{m}m + B\overline{m} + \overline{B}m + C)$, avec A et C réels. L'ensemble (E) d'équation $\Delta = 0$ est donc celle d'un cercle, de l'ensemble vide, ou, si $A = 0$, d'une droite ou éventuellement du plan entier. Mais Δ est nul lorsque $m \in \{a, b, c\}$ (cela se vérifie par l'observation de celui-ci, ou par la remarque que deux des trois symétriques sont confondus). Cela empêche (E) d'être une droite ou l'ensemble vide.

Enfin, (E) n'est pas non plus le plan entier : si $m = 0$, ses projections sur les côtés du triangle en sont les milieux, donc non alignés, et ses trois symétriques ne sont pas alignés non plus. En conclusion, c'est bien un cercle que l'on obtient, et c'est le cercle circonscrit à (abc).

Reste à vérifier que, si $|m| = 1$, l'orthocentre, d'affixe $a+b+c$ est alors aussi sur la droite joignant les trois symétriques, c'est-à-dire que le déterminant suivant est nul :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b + c - bc\overline{m} & c + a - ca\overline{m} & a + b + c \\ \overline{b} + \overline{c} - \overline{bc}m & \overline{c} + \overline{a} - \overline{ca}m & \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} \end{vmatrix}.$$

Pour cela, on procède presque comme avec Δ : l'ensemble (E') d'équation (en m) $\Delta' = 0$ est un cercle, l'ensemble vide, une droite ou le plan entier.

Maintenant, (E') contient a, notamment car la droite qui projette a sur (bc) contient l'orthocentre, et de même il contient b. Il contient aussi c, car alors les symétriques de c par rapport à (bc) et ca sont confondus. On exclut comme *supra* la possibilité pour (E') d'être le plan entier, et donc (E') est encore le cercle circonscrit à (abc). L'alignement attendu est donc une conséquence de l'égalité $|m| = 1$.

L'exercice V-4.c

Nous allons, pour les calculs, généraliser notre étude au cas où la droite D_ϑ joint les points A_ϑ et B_ϑ d'affixes respectifs $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$ et $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\vartheta}$, où m est un entier différent de 0 et de ± 1. Autrement dit, $m = 2$ dans notre exercice. Soit donc ϑ et ϑ' donnés. Posons $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$, $b = \mathrm{e}^{m\mathrm{i}\vartheta}$, $c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta'}$ et $d = \mathrm{e}^{m\mathrm{i}\vartheta'}$. Les droites D_ϑ et $D_{\vartheta'}$ ont des vecteurs normaux dirigées par les bissectrices respectives des paires de droites $\left(OA_\vartheta, OB_\vartheta\right)$ et $\left(OA_{\vartheta'}, OB_{\vartheta'}\right)$. Leurs angles polaires sont donc $\dfrac{(m+1)\vartheta}{2}$ et $\dfrac{(m+1)\vartheta'}{2}$: elles ne sont pas parallèles pour ϑ' proche de ϑ. L'affixe de leur point d'intersection est alors $m_{\vartheta,\vartheta'} = \dfrac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd} = \dfrac{z^{m+1}(z' + z'^m) - z'^{m+1}(z + z^m)}{z^{m+1} - z'^{m+1}}$, où l'on a posé pour simplifier $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$ et $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta'}$. Si on met un peu d'ordre dans cette expression, on obtient

$$m_{\vartheta,\vartheta'} = \frac{(zz')^m(z - z') + zz'(z^m - z'^m)}{z^{m+1} - z'^{m+1}}.$$

Comme $\lim\limits_{z' \to z} \dfrac{z^k - z'^k}{z - z'} = kz^{k-1}$ lorsque k est un entier relatif [63], la limite de $m_{\vartheta,\vartheta'}$ lorsque $\vartheta' \to \vartheta$ est donc $\dfrac{z^{2m} + mz^2 z^{m-1}}{(m+1)z^m} = \dfrac{z^m + mz}{m+1}$.

À noter que la limite trouvée est $\dfrac{ma + b}{m+1}$: la limite M_ϑ du point $m_{\vartheta,\vartheta'}$, qui est le point où la droite touche son enveloppe [64], est le barycentre des points A_ϑ et B_ϑ affectés des coefficients respectifs m et 1.

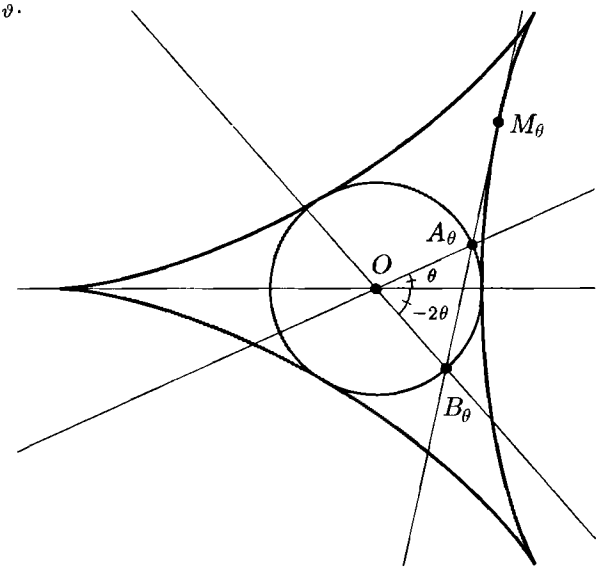
Revenons au cas $m = 2$; pour mieux reconnaître le lieu de M_ϑ, faisons-lui subir la translation $M \longmapsto M' = M + \dfrac{1}{3}$; on a $M'_\vartheta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta} + 2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta})}{3} = \dfrac{2(1 + \cos\vartheta)}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$. Le lieu obtenu est une cardioïde, comme le suggérait la

[63] Lorsque $k \geqslant 0$, factoriser le numérateur ; lorsque $k = -\ell < 0$, réduire $z^{-\ell} - z'^{-\ell}$ au même dénominateur $(zz')^\ell$ puis factoriser. Il n'est pas nécessaire d'invoquer des fonctions méromorphes pour si peu.

[64] On appelle ce point le *point caractéristique* de la droite variable.

figure ! À noter que b décrit le cercle-unité dans le même sens que a, mais deux fois plus vite.

En faisant varier l'entier m, on peut obtenir toutes les épi- et hypocycloïdes ; par exemple, pour $m = -2$, on a $a = e^{i\vartheta}$ et $b = e^{-2i\vartheta}$, on obtient cette fois une hypocycloïde à trois rebroussements. Le point caractéristique de la droite variable est dans ce cas le barycentre de A_ϑ et de B_ϑ affectés des coefficients respectifs -2 et 1 : c'est donc le symétrique de B_ϑ par rapport au point A_ϑ.



L'exercice V-4.d

On vérifie que ce déterminant Δ est de la forme $i(A\bar{z}z+B\bar{z}+\overline{B}z+D)$, avec $A = \frac{1}{i}\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}$, réel non nul, et D réel. Donc $\Delta = 0$ est l'équation d'un cercle, ou de l'ensemble vide. On vérifie ensuite qu'il vaut 0 lorsque $z = \dfrac{z_i + z_j}{2}$, avec $i \neq j$. Ce cercle n'est pas vide et passe par les trois milieux des côtés du triangle : c'en est donc le cercle d'EULER.

L'exercice V-4.e

Supposons pour simplifier que le cercle circonscrit à ABC est de rayon 1, et faisons en sorte que l'affixe du point O soit nul. Appelons a, b et c les affixes de A, B et C ; ce sont des complexes de module 1.

À la page **226**, nous avons établi que l'affixe du point C' est $c' = a+b-ab\bar{z}$, où $z = \dfrac{a+b+c}{3}$. De même, celui du point B' est $b' = a + c - ac\bar{z}$. Si on

désigne par G' le point tel que $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}$, nous devons montrer que $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que les complexes $b'-z+c'-z$ et a sont égaux à un facteur multiplicatif *réel* λ près.

Or, puisque $\bar{a}a = \bar{b}b = \bar{c}c = 1$, on a $b'-z+c'-z = \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}ab\bar{c} - \frac{1}{3}ac\bar{b}$. Le réel $\lambda = \dfrac{2 - b\bar{c} - c\bar{b}}{3}$ convient donc[65].

L'exercice V-4.f

Adoptons les mêmes hypothèses et notations que pour l'exercice **f**. Une équation du côté BC est $z = b + c - bc\bar{z}$; voir page **226**. Il est en outre facile de vérifier que la médiatrice Δ_A a pour équation $\bar{a}z + a\bar{z} = 1$. L'affixe ω_A du point Ω_A est donc « la » solution du système

$$\begin{cases} z + bc\bar{z} &= b + c \\ \bar{a}z + a\bar{z} &= 1\,. \end{cases}$$

Or, $bc - a^2 \neq 0$ puisque le triangle n'est pas isocèle en A. Ce système admet donc une unique solution $\omega_A = \dfrac{abc - a^2(b+c)}{bc - a^2}$ et on obtient de même les complexes ω_B et ω_C par permutation circulaire puisque le triangle n'est pas non plus isocèle en B ou en C.

En outre, le conjugué de $abc - a^2(b+c)$ est $a - (b+c)$, car $\bar{a} = 1/a$, etc.

Ainsi, l'alignement demandé, qui équivaut à la nullité du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega_A & \overline{\omega_A} \\ 1 & \omega_B & \overline{\omega_B} \\ 1 & \omega_C & \overline{\omega_C} \end{vmatrix},$$

équivaut aussi à la nullité du déterminant

$$\Delta' = \begin{vmatrix} bc - a^2 & abc - a^2(b+c) & b + c - a \\ ca - b^2 & abc - b^2(c+a) & c + a - b \\ ab - c^2 & abc - c^2(a+b) & a + b - c \end{vmatrix}.$$

Or, si on soustrait dans Δ' la première ligne à la seconde, cette dernière devient $L_2 = (a-b)L$, avec

$$L = (a + b + c, bc + ca + ab, 2)\,.$$

Si, de même, on soustrait dans Δ' la première ligne à la troisième, cette dernière devient $L_3 = (a-c)L$. Cela établit bien que le déterminant Δ' est nul, et, partant, Δ est nul aussi.

[65] À noter que $\lambda > 0$.

Dès lors, la droite Δ qui contient les points alignés Ω_A, Ω_B et Ω_C est axe de symétrie de chacun des trois cercles Γ_A, Γ_B et Γ_C. Comme ces trois cercles passent par O, ils passent aussi par le symétrique O' de O par rapport à Δ.

L'exercice V-4.g

Appelons a, b, c, z les affixes de A, B, C, M respectivement. Les affixes de A', B', C' sont alors $-a, -b$ et $-c$. Les affixes de A'', B'' et C'' sont respectivement $Z_a = \dfrac{bc(z-a)+za(b+c)}{bc+za}$, $Z_b = \dfrac{ca(z-b)+zb(c+a)}{ca+zb}$ et $Z_c = \dfrac{ab(z-c)+zc(a+b)}{ab+zc}$. Il suffit de démontrer que ces trois complexes ont le même argument *modulo* π. Ainsi, on aura établi que leurs images sont effectivement alignées avec O.

Or, les numérateurs figurant dans les expressions de ces trois complexes sont égaux à $z(bc+ca+ab)-abc$; il suffit donc de vérifier que les dénominateurs ont même argument *modulo* π. Si l'on pose $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$, $c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$ et $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$, alors, par exemple,

$$bc + za = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta+\gamma)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\vartheta)} = \underbrace{2\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha-\vartheta}{2}}_{\in\mathbb{R}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta+\gamma+\vartheta)/2},$$

et la conclusion s'ensuit.

L'exercice V-4.h

Supposons pour simplifier que le cercle Γ est de rayon 1, et faisons en sorte que les affixes des points A et B soient conjugués [66].

Appelons a, x, y, z, t les affixes de A, P, Q, R, S ; ce sont des complexes de module 1. L'affixe du point B est alors $b = \overline{a}$ et celui du point M est $m = \dfrac{a+\overline{a}}{2}$. On a donc $\overline{a}a = 1$, $a + b = 2m$ et $\overline{m} = m$.

Du fait que PQ et RS passent par M, on a

$$\begin{cases} m = x + y - mxy \\ m = z + t - mzt\,. \end{cases}$$

Les affixes des points M' et M'' sont donc

$$\begin{cases} m' = \dfrac{\overbrace{(a+b)}^{=2m}xz - (x+z)\overbrace{ab}^{=1}}{xz - \underbrace{ab}_{=1}} \\ m'' = \dfrac{2myt - (y+t)}{yt-1}\,. \end{cases}$$

[66] Cela revient à faire en sorte que l'axe des ordonnées soit parallèle à AB.

Montrer à présent que M est le milieu de $M'M''$ revient à montrer que

$$\frac{2mxz-(x+z)}{xz-1}+\frac{2myt-(y+t)}{yt-1}=2m\,.$$

Après réduction au même dénominateur, cela revient à

$$4mxyzt-2m(xz+yt)-xy(z+t)-zt(x+y)+(x+y)+(z+t)$$
$$=2mxyzt-2m(xz+yt)+2m\,.$$

Les termes $2m(xz+yt)$ se simplifient dans les deux membres, et on vérifie aisément l'égalité attendue en remplaçant $x+y$ et $z+t$ par leurs valeurs respectives $m(xy+1)$ et $m(zt+1)$.

10.2. Les exercices du paragraphe V-9

L'exercice a

Numérotons les homographies constituant le groupe du birapport :

$$f_0(z)=z\,,\,f_1(z)=1-z\,,\,f_2(z)=\frac{1}{z}\,,f_3(z)=\frac{z}{z-1}\,,f_4(z)=\frac{z-1}{z}\,,f_5(z)=\frac{1}{1-z}\,.$$

Un principe consiste à poser $F(z)=\sum_{k=0}^{5}(f_k(z))^p$, où p est un entier naturel à choisir [67]. Cela garantit déjà que F est invariante sous l'action de $\mathfrak{B}$: en effet, si $h\in\mathfrak{B}$, $F\circ h$ est la somme des six mêmes éléments, mais permutés éventuellement.

Reste à faire en sorte que F sépare les orbites. Bien sûr, on ne peut essayer $p=0$ car on obtient alors pour F la constante 6, qui ne les sépare pas.

Pour $p=1$, le résultat obtenu est $F=3$; en effet, on a $f_0+f_1=f_2+f_4=f_3+f_5=1$. Cette constante ne convient pas davantage.

Pour $p=2$, on a cette fois $F(z)=\dfrac{2z^6-6z^5+9z^4-8z^3+9z^2-6z+2}{z^2(z-1)^2}$.

Ce candidat semble sérieux.

Pour le valider, donnons-nous un $z_0\in\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Si $z_0\in\{0,\infty,1\}$, on a $F(z_0)=\infty$ et aucun autre $z\in\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ne vérifie $F(z)=\infty$. Déjà, F sépare l'orbite $\{0,\infty,1\}$ de toutes les autres orbites.

Supposons $z_0\neq 0\neq\infty\neq 1$; l'équation en z

$$F(z)=F(z_0)$$

est polynomiale de degré effectif 6 une fois qu'on l'a réduite au même dénominateur. Elle a donc au plus six solutions distinctes (dont z_0 lui-même,

[67] Chercher $p\in\mathbb{Z}$ ne donnerait pas plus de latitude : en effet, remplacer p par $-p$ remplace chaque $(f_k(z))^p$ par son inverse ; cela ne fait que permuter les termes de la somme.

bien sûr) ; comme F est invariante sous l'action de $\mathfrak{B}$, tous les éléments de l'orbite $\mathfrak{B} \cdot z_0$ satisfont cette équation. Il n'y a donc pas d'autres solutions.

Reste donc à considérer le cas où $z_0 \in \{-1, 2, 1/2, -\mathrm{j}, -\mathrm{j}^2\}$. On a alors $F(-1) = 21/2$ et on vérifie sans (trop de) peine que les solutions de l'équation $F(z) = 21/2$ sont $\{-1, 2, 1/2\}$, toutes les trois doubles. Cette liste est précisément celle de l'orbite harmonique, celle de -1.

Enfin, on a $F(-\mathrm{j}) = -3$ et on vérifie que les solutions de l'équation $F(z) = -3$ sont $\{-\mathrm{j}, -\mathrm{j}^2\}$, toutes les trois triples. Cette liste est précisément celle de l'orbite équiharmonique, celle de $-\mathrm{j}$.

En conclusion, nous avons établi par contraposition que F sépare les orbites.

Cela étant, nous allons enjoliver un peu ce résultat. Si nous posons $G(z) = 2F(z) + 6$, nous voyons que $G(0) = \infty$, $G(-1) = 27$ et $G(-\mathrm{j}) = 0$; en outre, vu ce qui précède, $-\mathrm{j}$ et $-\mathrm{j}^2$ sont zéros triples de G, de sorte que le numérateur de G se factorise lui aussi. On obtient plus précisément

$$G(z) = \frac{4(z^2 - z + 1)^3}{z^2(z-1)^2},$$

formule plus présentable et plus simple à retenir [68].

Remarque. Nous avons cherché une solution sous forme de *somme de Newton* des scalaires $f_k(z)$; un principe tout aussi fructueux aurait été de la chercher sous la forme d'une *fonction symétrique élémentaire* de ces mêmes scalaires, par exemple

$$\sigma_2 = \sum_{0 \leqslant k < l \leqslant 5} f_k(z) f_l(z)$$

L'exercice b

Précisons une convention : lorsque K est un corps, nous désignerons par 0 l'élément nul de K, par 1 l'unité de K, avec $1 \neq 0$, par 2 l'élément $1 + 1$,

[68] La fraction rationnelle $G/27$ est étroitement liée à l'*invariant modulaire* d'une cubique. Voir pour cela le livre d'ARNAUDIÈS-BERTIN, **[2]**, cité en bibliographie. À noter que ce livre propose comme fraction invariante et séparante $\Lambda(z) = \dfrac{(z^2 - z + 1)^3}{(z+1)^2(z-2)^2(2z-1)^2}$. Nous nous permettrons de préférer la nôtre, qui a l'avantage de n'envoyer à l'infini que les éléments de l'orbite inintéressante $\{0, \infty, 1\}$, celle qui correspond aux birapports de quatre complexes non tous distincts.

Les deux fractions sont liées par la formule $\Lambda = \dfrac{G}{4(G-27)}$. Vérifier cela conduit à vérifier la formule

$$4(z^2 - z + 1)^3 = 27z^2(z-1)^2 + (z+1)^2(z-2)^2(2z-1)^2.$$

Elle fournit au passage une solution non triviale de l'*équation de Halphen* $P^3 = Q^2 + R^2$, où P, Q et R sont des polynômes. Voir encore ARNAUDIÈS-BERTIN.

par 3 l'élément $2+1$, etc., et de même par -1 l'opposé de 1, par -2 celui de 2, etc. Si K est de caractéristique p, où p est un entier premier non nul, cette convention se traduira par les égalités suivantes **entre éléments du corps** K : $-p=p=0$, $-p+1=p+1=1$, etc.

Conservons les notations de l'exercice précédent. Nous avons vu qu'un complexe $z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ possède une orbite à six éléments sauf si, et seulement si, il satisfait à l'une des équations $f_k(z)=z$, où $1 \leqslant k \leqslant 5$. Ces équations sont respectivement équivalentes à $2z=1$, $z^2=1$, $z(z-2)=0$ et $z^2-z+1=0$, puisque les équations $f_4(z)=z$ et $f_5(z)=z$ sont équivalentes.

Lorsque K est fini, on conserve bien sûr ces conditions, mais la discussion change ; il n'est sans doute pas inutile de revenir sur les équations du second degré sur un corps (commutatif) K quelconque.

Considérons le polynôme $P(X)=X^2+pX+q \in K[X]$ et posons $\Delta = p^2-4q$; pour que P soit scindé, il faut que le ***discriminant*** Δ soit le carré d'un élément de K[69]. En effet, si $P(X)=(X-x_1)(X-x_2)$, alors

$$(x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_2x_1=(-p)^2-4q=\Delta\,,$$

et Δ est le carré de $x_2-x_1 \in K$. Cela montre également que, si P a deux zéros distincts, alors Δ est non nul.

En outre, si K est de caractéristique $\neq 2$, la réciproque est vraie : si $\Delta=\delta^2$, avec $\delta \in K$, alors $P(X)=(X-x_1)(X-x_2)$, où x_1 et x_2 sont définis par

$$2x_1=-p-\delta \quad \text{et} \quad 2x_2=-p+\delta\,.$$

Lorsque K est de caractéristique 2, ce résultat tombe en défaut et il faudra donc considérer à part le cas de cette caractéristique[70]. En outre, les discriminants des équations que nous avons à discuter, savoir $x^2-1=0$, $x(x-2)=0$ et $x^2-x+1=0$ sont respectivement 4, 4 et -3 : le cas de la caractéristique 3, qui annule le troisième discriminant, est donc aussi à envisager à part.

Nous remarquons enfin que deux parmi les trois équations du second degré introduites *supra* ont toutes leurs solutions dans K ; appelons $p_K \in \{0,1,2\}$ le nombre de solutions **distinctes**[71] dans K de l'équation $z^2-z+1=0$, qui est la seule à ne pas se factoriser trivialement.

Nous pouvons désormais aborder le calcul du nombre d'orbites.

---

[69] Dire que Δ est *positif* n'a de sens que si K est un corps ordonné, ce qui ne se produit pas si K est fini, mais n'est de toute façon intéressant que si $K=\mathbb{R}$.

[70] D'ailleurs, si K est de caractéristique 2, on a $p^2-4q=p^2$, de sorte que Δ est toujours un carré. Pourtant, l'équation $x^2+px+q=0$ n'a pas toujours des solutions, comme en témoigne l'exemple de l'équation $x^2+x+1=0$ lorsque $K=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

[71] Comme nous allons devoir dénombrer des ensembles d'éléments de K, une éventuelle solution double d'une équation du second degré ne comptera que pour un.

1) Si K est de caractéristique 2, l'équation $2z = 1$ se réduit à $0 = 1$, c'est-à-dire que seul le symbole ∞ vérifie $1 - z = z$ dans $K \cup \{\infty\}$. De même, $z^2 = 1$ n'admet que 1 comme solution, puisque $-1 = 1$; enfin, $z(z-2) = 0$ n'admet que 0 comme solution.

L'équation $z^2 - z + 1 = 0$ peut *a priori* ne pas avoir de solution (c'est le cas lorsque $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par exemple) ; sinon, elle a deux solutions distinctes puisque $\Delta = -3 = 1 \neq 0$ ou aussi puisque leur somme est 1 (si z_1 est une solution, l'autre est $z_2 = 1 - z_1 = 1 + z_1 \neq z_1$).

Nous avons désigné par p_K le nombre de solutions dans K de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$: tous les éléments de $K \cup \{\infty\}$ sont donc dans une orbite à six éléments, sauf $p_K + 3$ d'entre eux (qui sont 0, ∞, 1, qui se répartissent dans une orbite, et les éventuelles solutions de la dernière équation, qui se répartissent le cas échéant dans une deuxième orbite).

Comme $K \cup \{\infty\}$ possède $2^n + 1$ éléments, on a donc $2^n + 1 = p_k + 3 + 6q$, où q est le nombre des orbites à six éléments. On vérifie facilement par récurrence que 2^n est congru à 2 *modulo* 6 lorsque n est impair, et à 4 *modulo* 6 lorsque n est pair. Dans le premier cas, on a donc $p_K = 0$ et $q = \dfrac{2^n - 2}{6}$: il y a donc $q + 1$ orbites. Dans le second cas, on a $p_K = 2$ et $q = \dfrac{2^n - 4}{6}$: il y a cette fois $q + 2$ orbites.

2) Si K est de caractéristique 3, l'équation $2z = 1$ a pour solution $z = -1$, puisque $-2 = 1$ (ainsi que la solution ∞ dans $K \cup \{\infty\}$). L'équation $z^2 = 1$ a deux solutions distinctes : -1 et 1 alors que l'équation $z(z-2) = 0$ a pour solutions 0 et 2, cette dernière étant égale à -1. Enfin, le discriminant de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ est -3, c'est-à-dire 0, et il n'y a donc qu'une racine double, savoir $z = -1$! En d'autres termes, toutes ces équations n'ont à elles toutes que les solutions $0, 1, -1, \infty$, et elles sont bien deux à deux distinctes. Plus précisément, ses solutions se répartissent en deux orbites : $\{0, \infty, 1\}$ et $\{-1\}$.

Si q est le nombre des orbites à six éléments, on a donc cette fois $3^n + 1 = 4 + 6q$. Ainsi, $q = \dfrac{3^n - 3}{6} = \dfrac{3^{n-1} - 1}{2}$ et le nombre total d'orbites est $\dfrac{3^{n-1} + 3}{2}$.

3) Lorsque K est de caractéristique $p \geqslant 5$, désignons par ω l'inverse de 2 (quoiqu'on puisse *à la rigueur* le noter $1/2$). Il est immédiat que les éléments $0, \infty, 1, -1, 2$ et ω sont deux à deux disjoints dans $K \cup \{\infty\}$ et qu'aucun de ces éléments n'est solution de $z^2 - z + 1 = 0$. Par exemple, on ne peut avoir $\omega^2 - \omega + 1 = 0$, car sinon $\underbrace{4\omega^2}_{=1} - \underbrace{4\omega}_{=2} + 4 = 0$, c'est-à-dire $3 = 0$, ce qui est faux.

En outre, p_K ne peut être égal à 1 puisque le discriminant du polynôme $X^2 - X + 1$ est $-3 \neq 0$. Les orbites singulières sont donc au nombre de deux si $p_K = 0$ et de trois si $p_K = 2$.

Si q est le nombre des orbites à six éléments, on a donc cette fois $p^n + 1 = p_K + 6 + 6q$.

Il est donc crucial de déterminer le reste de $p^n + 1$ *modulo* $6 = 2 \times 3$; cela ne pose pas de problème pour le reste *modulo* 2, car l'entier $p^n + 1$ est de toute façon pair.

Si p est de la forme $4k + 1$, il est immédiat par récurrence que p^n est de la forme $3K + (-1)^n$. Si n est impair, $p^n + 1$ est donc un multiple de 6 et on a donc forcément $p_K = 0$. On a alors $q = \dfrac{p^n - 5}{6}$ et le nombre d'orbites est égalà $q + 2 = \dfrac{p^n + 7}{6}$. De même, si n est pair, on ne peut avoir que $p_K = 2$. On a alors $q = \dfrac{p^n - 7}{6}$ et le nombre d'orbites est égal à $q + 3 = \dfrac{p^n + 11}{6}$.

Si p est de la forme $4k - 1$, il est immédiat par récurrence que p^n est toujours de la forme $3K + 1$. La distinction selon la parité de n est alors inutile : on ne peut avoir que $p_K = 2$. On a alors $q = \dfrac{p^n - 7}{6}$ et le nombre d'orbites est égal à $q + 3 = \dfrac{p^n + 11}{6}$.

Remarque Dans un corps commutatif K, l'existence d'une solution de $z^2 - z + 1 = 0$ équivaut à l'existence d'une solution de $z^2 - z + 1 = 0$ (poser $z' = -z$). Or $z^2 + z + 1 = 0$ *implique* $z^3 = 1$ et bien sûr $z \neq 0$.

Si maintenant K est un corps fini, de cardinal p^n avec $p \neq 3$, le groupe multiplicatif $K^* = K \setminus \{0\}$ est cyclique, de cardinal $p^n - 1$. Ainsi, si $p^n - 1$ n'est pas un multiple de 3, aucun élément de K^* n'est d'ordre 3 ; l'équation $z^3 = 1$ n'admet que la solution $z = 1$ et donc $p_K = 0$.

Au contraire, si $p^n - 1$ est un multiple de 3, il existe dans K^* un $z \neq 1$ tel que $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$. Ainsi, $p_K > 0$ et donc $p_K = 2$. Nous retrouvons ainsi toutes les étapes de la discussion précédente.

10.3. L'exercice du paragraphe V-9.5.6

1. Posons dans cette seule question $h'' = h' \circ h$ et $h''' = h \circ h'$. Si h et h' commutent, on a $h'''(a) = h''(a)$, c'est-à-dire $h'(a) = h(h'(a))$ et $h'''(b) = h''(b)$, c'est-à-dire $h'(b) = h(h'(b))$. Cela montre que $h'(a)$ et $h'(b)$ sont les points fixes de h, c'est-à-dire a et b à l'ordre près. On ne peut avoir $h'(a) = a$ et $h'(b) = b$, car, sinon, $h' = h$, ce qui est exclu. Donc h' échange a et b. Donc $[c, d, a, b] = -1$ et le quadrangle (a, b, c, d) est harmonique.

Réciproquement, si $[a,b,c,d] = -1$, alors h et h' envoient $\{a,b,c,d\}$ respectivement sur $\{a,b,d,c\}$ et $\{b,a,c,d\}$, de sorte que h'' et h''' envoient toutes deux $\{a,b,c,d\}$ sur $\{b,a,d,c\}$. On a donc bien $h'' = h'''$.

Lorsque h et h' commutent, on a $h'' = h' \circ h \neq \mathrm{Id}$ (car, sinon, $h' = h$) et $h'' \circ h'' = h' \circ h \circ h \circ h' = h' \circ h' = \mathrm{Id}$. Ainsi, f'' est une involution propre.

2. Soit H un 2-sous-groupe de $H_2(\mathbb{C})$. Il est commutatif, car, si h et h' sont dans H, alors $h' \circ h$ admet comme inverse $h' \circ h$ elle-même (puisque $h' \circ h \in H$) ainsi que $h \circ h'$. L'unicité de l'inverse permet de conclure.

Si $H = \{\mathrm{Id}\}$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, H contient aussi une involution propre h. Si $H = \{\mathrm{Id}, h\}$, il n'y a rien à démontrer.

Sinon, H contient une involution propre $h' \neq h$. Appelons $\{a,b\}$ et $\{c,d\}$ les points fixes de h et de h'. Nous avons vu au **V-9.5.6** que $h \circ h'$ admet comme points fixes e et f, qui complètent $\{a,b,c,d\}$ en un sextuple harmonique.

Alors, H ne peut contenir une involution propre h'' distincte de h, de h' et de $h \circ h'$: ses points fixes e'' et f'' formeraient alors un quadrangle harmonique avec $\{a,b\}$ et avec $\{c,d\}$ et l'unicité vue au **V-9.5.6** montrerait alors que $h'' = h \circ h'$, ce qui est absurde.

En conséquence, les 2-sous-groupes H ont bien un cardinal dans la liste demandée et sont de la forme $\{\mathrm{Id}\}$, $\{\mathrm{Id}, h\}$, où h est une involution propre, ou enfin $\{\mathrm{Id}, h, h', h \circ h'\}$, où h et h' sont deux involutions propres distinctes et qui commutent.

3. Si h est l'homographie associée à la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, désignons par $\overline{h}$ l'homographie associée à la matrice $\overline{M} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$. Il est immédiat que $\sigma \circ h = \overline{h} \circ \sigma$.

Cela étant, voici les vérifications non triviales nécessaires pour établir le caractère de sous-groupe de Möb.

- Si h et h' sont des homographies, alors $(h \circ \sigma) \circ h' \in$ Möb. En effet, $(h \circ \sigma) \circ h' = (h \circ \overline{h'}) \circ \sigma \in$ Möb.
- Si h est une homographie, alors $(h \circ \sigma)^{-1} \in$ Möb. En effet, $(h \circ \sigma)^{-1} = \sigma \circ h^{-1} = \overline{h^{-1}} \circ \sigma$.

4. Tout ce qui concerne H est conséquence de l'application de la question **2.** aux involutions propres h_1 et h_2 qui commutent, sachant que $h_3 = h_2 \circ h_1$.

En outre, H est isomorphe à $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^2$ puisque c'est un groupe à quatre éléments sans élément d'ordre 4.

Les propriétés de H' sont dues, elles, au fait que σ commute avec toutes les involutions h_i, de sorte que H' est un 2-sous-groupe de Möb, isomorphe au

groupe produit $H \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et donc aussi au groupe additif $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ [72].

Regardons aussi les éléments de ce groupe H' : que du beau monde ! h_1 est la symétrie par rapport à l'origine, σ est la symétrie par rapport à l'axe réel, $h_1 \circ \sigma$ est la symétrie par rapport à l'axe $\mathrm{i}\mathbb{R}$ [73]. Ensuite, h_2 est l'inversion analytique de pôle 0 et de rapport 1, voir au **V-7.1**, h_3 est l'inversion analytique de pôle 0 et de rapport -1, tandis que $h_2 \circ \sigma$ est l'inversion géométrique de pôle 0 et de rapport 1 et $h_3 \circ \sigma$ l'inversion géométrique de pôle 0 et de rapport -1 : la première admet comme ensemble de points fixes le cercle unité, et la seconde n'a aucun point fixe (mais laisse globalement stable le cercle unité).

En d'autres termes, $h_2 \circ \sigma$ envoie $z = \varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$, avec $\varrho \neq 0$, sur $z' = \dfrac{1}{\varrho} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$, et $h_3 \circ \sigma$ l'envoie sur $-\dfrac{1}{\varrho} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$.

10.4. L'exercice du paragraphe V-9.5.9

Appelons a, b, c, m, a', b', c' les affixes des points A, B, C, M, A', B, C'. Appliquons la formule des six birapports à la famille $a, b, c, m, a', b', c', \infty$. Les cinq birapports suivants sont réels, du fait des hypothèses d'alignement ou de cocyclicité : $[a, b, c', \infty]$, $[b, c, a', \infty]$ et $[c, a, b', \infty]$ (alignement) puis $[b', c', a, m]$ et $[c', a', b, m]$ (cocyclicité). Le birapport restant, qui est $[a', b', c, m]$ est donc réel, de sorte que A', B', C, M sont cocycliques.

Ensuite, appliquons la formule à la famille $a, b, c', \infty, a', b', c, m$. Parmi les six birapports obtenus, $[b, c', a', m]$ et $[c', a, b', m]$ sont réels pour des raisons de cocyclicité, tandis que $[b', c, a, \infty]$ et $[c, a', b, \infty]$ le sont pour des raisons d'alignement. Reste alors les birapports $[a, b, c, m]$ et $[a', b', c', \infty]$; l'un est réel si, et seulement si, l'autre l'est, ce qui établit l'équivalence entre l'appartenance de M au cercle ABC et l'alignement $A'B'C'$.

[72] En revanche, Möb n'est pas isomorphe au produit $H_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; il n'est que le *produit semi-direct* de $H_2(\mathbb{C})$ et de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

[73] $V = \{\mathrm{Id}, h_1, \sigma, h_1 \circ \sigma\}$ forme un 2-sous-groupe composé exclusivement d'isométries. Il est isomorphe, comme H, au *Vierergruppe* de KLEIN, célèbre sous-groupe distingué d'ordre 4 du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$.

« Sermo in circulis est liberior. »
(Dans les cercles, on a plus de liberté de parole.)
CICÉRON, *Epistulæ ad Atticum, 2, 18.*

Chapitre VI

Les cercles du plan euclidien

Dans tout ce chapitre, nous considérerons un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O\,;i,j)$. À la différence de ce que nous avons fait au chapitre **V**, nous mettrons bien plus à contribution le couple de coordonnées (x,y) des points du plan que le complexe z qu'il définit. La raison de cela est que nous verrons dans ce plan un espace réel de dimension 2 plutôt qu'un espace complexe de dimension 1.

Le fait que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos ne nous a pas été d'un grand secours dans le précédent chapitre : nous n'allons donc pas payer chèrement le retour au corps des réels.

En revanche, nous continuerons à profiter de tous les attraits de $\mathbb{C}$ en matière de Géométrie plane, tant euclidienne que « circulaire ».

De même qu'une configuration d'au moins trois points alignés ou d'au moins trois droites concourantes peut être remarquable, celle d'au moins trois cercles concourants peut également mériter le détour : nous avons déjà mis en évidence de tels exemples, ne serait-ce qu'au **IV-1.3**. Là, il s'agissait d'établir qu'un certain point appartenait à quatre cercles. Nous avons, pour ce faire, exploité géométriquement une situation où les cercles n'apparaissaient pas en tant que tels, mais en tant que coniques de neuf points particulières.

Dans ce chapitre, comme l'indique son titre, les cercles jouent au contraire un rôle prépondérant et une forme quadratique, que nous qualifierons de *fondamentale*, va venir équiper un « certain » espace vectoriel lié naturellement aux équations cartésiennes de cercles. *Grosso modo*, cet outil mesure la réalité d'un cercle, puis, si ce cercle est réel, le carré de son rayon.

Une forme quadratique ne demande qu'à être polarisée : la forme bilinéaire symétrique qui en résulte renseigne sur les positions relatives de deux cercles donnés : sont-ils disjoints, tangents, sécants, voire orthogonaux ?

Notre forme fondamentale q n'est ni positive, ni négative. Eh bien, tant mieux ! Le tout euclidien finirait par être lassant... Au contraire, puisque la restriction de q à un plan vectoriel peut avoir toute sorte de signature, nous la corrélerons aux différentes classes de *faisceaux de cercles* et mettrons par là même en évidence tout l'intérêt de cet invariant.

Étudier pour elle-même une figure aussi simple que le cercle : c'est plus qu'un retour aux sources !

1. Les équations formelles des cercles-droites

Nous n'avons certes pas utilisé le fait que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, mais, dans ce chapitre, le corps de base sera le plus souvent $\mathbb{R}$, qui ne l'est pas. De ce seul fait, les équations formelles *que nous rencontrerons pourront représenter aussi bien l'ensemble vide que des cercles (ou des droites) bien réels. La raison en est que ces équations sont alors les objets génériques de structures algébriques plus maniables, telles que les espaces vectoriels ou les espaces projectifs réels.*

1.1. Polynômes et équations formelles

Avec les notations *supra*, on associe à tout quadruplet $(a,b,c,t) \in \mathbb{R}^4$ le polynôme en deux variables $\mathbf{P}_{a,b,c,t}(X,Y) \overset{\text{déf}}{=} t(X^2+Y^2) - 2aX - 2bY + c$. L'ensemble $\mathscr{P}$ de ces polynômes est un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $\mathbb{R}[X,Y]$.

Nous appellerons *équation formelle d'un cercle-droite* toute équation de la forme

$$\mathbf{E}_{a,b,c,t} : \qquad \mathbf{P}_{a,b,c,t} = 0\,, \quad \text{où } (a,b,c,t) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}\,.$$

Si le vecteur $V = (a,b,c,t) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, nous écrirons plus synthétiquement $\mathbf{E}_V$ pour $\mathbf{E}_{a,b,c,t}$.

Nous n'écartons donc pas *a priori* l'équation $X^2+Y^2+1=0$, bien qu'elle représente l'ensemble vide. De façon plus précise, la partie de P représentée par l'équation précédente est un cercle (éventuellement vide, ou réduit à un point) si $t \neq 0$, une droite si $t = 0$ mais $(a,b) \neq (0,0)$, l'ensemble vide si $a = b = t = 0$ mais $c \neq 0$ [1].

[1] C'est bien ainsi qu'il faut comprendre le mot formel : les équations formelles ainsi définies sont celles de droites, de cercles, mais aussi de formes « dégénérées » de ceux-ci.

Remarquons aussi que, avec les notations précédentes, si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\mathbf{E}_{\lambda a,\lambda b,\lambda c,\lambda t}$ et $\mathbf{E}_{a,b,c,t}$ représentent la même partie de $\mathbb{R}$. La réciproque est vraie *partiellement* : il est clair que les équations $X^2+Y^2+1=0$ et $X^2+Y^2+2=0$ représentent toutes deux l'ensemble vide sans être toutefois proportionnelles[2] ; en revanche, si deux équations formelles de cercles-droites représentent une partie **non vide** de P, fût-ce un seul point, alors elles sont proportionnelles[3].

Bien que trois paramètres suffisent pour définir l'équation formelle d'un cercle, la présence du paramètre t en facteur devant X^2+Y^2 a de multiples avantages : elle permet notamment d'englober les droites et les cercles dans un même « type » d'équation ; nous préciserons ce point de vue au **VI-1.3.**

Avant de passer à la suite, simplifions notre terminologie : **toute** équation de la forme $\mathbf{E}_{a,b,c,t}$ sera appelée tout simplement une *équation formelle*, et toute partie de P représentée par une telle équation sera appelée un *cercle-droite*. Nous parlerons du *cercle* d'équation $\mathbf{E}_{a,b,c,t}$ lorsque t sera supposé non nul, de la *droite* d'équation $\mathbf{E}_{a,b,c,0}$ dans le cas contraire, et donc de *cercle-droite* d'équation $\mathbf{E}_{a,b,c,t}$ en l'absence d'hypothèse quant à t. Dans tous les cas, nous désignerons par $\mathbf{C}_{a,b,c,t}$ (ou $\mathbf{C}_V$) le cercle-droite d'équation $\mathbf{E}_{a,b,c,t}$ (ou $\mathbf{E}_V$) ; nous pourrons le désigner par $\mathbf{D}_{a,b,c,0}$ (ou $\mathbf{D}_V$) lorsqu'il s'agira plus particulièrement d'une droite.

Comme nous aurons souvent à distinguer les droites des cercles-droites « généraux », nous désignerons par $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé des vecteurs V de la forme $(a,b,c,0)$.

1.2. La forme quadratique fondamentale

La forme quadratique que nous allons définir permet de « mesurer » la réalité d'un cercle, et son rayon le cas échéant, ainsi que le contact ou l'orthogonalité de deux cercles.

Lorsqu'un cercle a une équation $\mathbf{E}_{a,b,c,t}$, avec $t \neq 0$, il a aussi l'équation

$$X^2+Y^2-2\frac{a}{t}X-2\frac{b}{t}Y+\frac{c}{t}=0\,,$$

soit encore $(X-a/t)^2+(Y-b/t)^2=(a^2+b^2-ct)/t^2$.

---

[2] Nous considérerons toujours comme *distinctes* deux équations formelles non proportionnelles, même si toutes deux représentent l'ensemble vide, et comme *distincts* deux cercles-droites ayant des équations formelles distinctes, même s'ils sont vides tous les deux.

[3] Par exemple, les équations du cercle de centre $M(\alpha,\beta)$ et de rayon $R \geqslant 0$ sont toutes proportionnelles à $X^2+Y^2-2\alpha X-2\beta Y+\alpha^2+\beta^2-R^2=0$.

Définissons une forme quadratique q, appelée *forme quadratique fondamentale*, sur $\mathbb{R}^4$ par

$$q(V) = a^2 + b^2 - ct\,,$$

pour tout vecteur $V = (a, b, c, t) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$.

Nous venons donc d'établir que le cercle $\mathbf{C}_V$, avec $V = (a, b, c, t)$ et $t \neq 0$, est vide [4] si, et seulement si, $q(V) < 0$, qu'il est de rayon nul [5] si, et seulement si, $q(V) = 0$ et qu'il est de rayon > 0 [6] si, et seulement si, $q(V) > 0$. Lorsque $q(V) \geqslant 0$, le rayon du cercle est donné par $R = \sqrt{q(V)}/|t|$ et le centre a pour coordonnées $(a/t, b/t)$.

C'est ce que nous avons laissé entrevoir dans l'introduction de ce chapitre : si $t = 1$, c'est-à-dire si nous écrivons l'équation cartésienne d'un cercle sous la forme la plus canonique qui soit, alors on a $R^2 = q(V)$, de sorte que q mesure bien le *carré* du rayon d'un cercle réel.

Toutefois, il sera commode de parler du centre *du cercle* $\mathbf{C}_V$, *avec* V *de cette forme, même lorsque* $q(V) < 0$ *: il sera alors toujours défini comme le point* Ω *de coordonnées* $(a/t, b/t)$.

Ainsi, on a la formule $q(V) = t^2(O\Omega^2 - c/t)$.

Il est à noter que le signe de $q(V)$ ne change par lorsque l'on remplace V par λV, avec $\lambda \neq 0$ et que, dans les mêmes conditions, le rayon éventuel ne change pas non plus : il est remplacé en effet par $|\lambda|R/|\lambda|$.

La forme quadratique fondamentale mesure bien également la dégénérescence ou non d'une **droite** : soit la droite D d'équation $\mathbf{E}_V$, où $V = (a, b, c, 0) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. On a $q(V) = a^2 + b^2$, de sorte que la droite D est une vraie droite si, et seulement si, $q(V) > 0$, car cela équivaut à $(a, b) \neq (0, 0)$ et l'ensemble vide si, et seulement si, $q(V) = 0$, car cela équivaut à $a = b = 0$ et $c \neq 0$.

Dans tous les cas, le cercle-droite $\mathbf{C}_V$ est, lorsque $q(V) > 0$, un « vrai » cercle, c'est-à-dire de rayon non nul, ou une « vraie » droite, et les cas dégénérés diffèrent sensiblement selon que t est nul ou non : dans le cas d'un cercle, on a un cercle-point lorsque $q(V) = 0$ et l'ensemble vide lorsque $q(V) < 0$ et dans celui d'une droite, on a l'ensemble vide lorsque $q(V) = 0$, le cas $q(V) < 0$ ne se produisant jamais [7].

---

[4] On dit souvent aussi *cercle sans point réel*.

[5] On parle alors d'un *cercle de rayon nul* ou d'un *cercle-point*.

[6] On dit souvent aussi *cercle réel*.

[7] Toutefois, la section **VI-1.3** nous conduira à compléter le plan P par un point à l'infini ∞ ; il sera alors toujours possible de considérer qu'une droite d'équation $\mathbf{E}_V$, avec $a = b = t = 0$ et $c \neq 0$, dégénère en le singleton $\{\infty\}$. Avec cette convention, un cercle-droite d'équation $\mathbf{E}_V$ avec $q(V) = 0$ est alors toujours un singleton, ce qui renforce l'unité des résultats de la discussion.

Nous allons pouvoir traduire un certain nombre de propriétés à l'aide de cette forme quadratique.

Faisons d'ores et déjà quelques remarques : on a la décomposition en carrés de formes linéaires indépendantes $q(V) = a^2+b^2-\dfrac{(c+t)^2-(c-t)^2}{4}$; ainsi, la signature de q est $(3,1)$ et q est non dégénérée [8]. En outre, la forme polaire de q est la forme bilinéaire symétrique φ [9] définie sur $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ par

$$\varphi(V,V') = aa' + bb' - \frac{ct'+tc'}{2},$$

avec $V = (a,b,c,t)$ et $V' = (a',b',c',t')$ dans $\mathbb{R}^4$.

Le scalaire $\varphi(V,V')$ a lui aussi une interprétation géométrique dans le cas où $\mathbf{C}_V$ et $\mathbf{C}_{V'}$ sont deux cercles non vides.

Désignons par Ω et Ω' les centres respectifs de ces deux cercles, par R et R' leurs rayons. Le produit scalaire $\left(\overrightarrow{O\Omega} \,\middle|\, \overrightarrow{O\Omega'}\right)$ est égal à $\dfrac{aa'+bb'}{tt'}$, et nous avons $c/t = O\Omega^2 - R^2$ et $c'/t' = O\Omega'^2 - R'^2$, de sorte que

$$\varphi(V,V') = tt'\left(\left(\overrightarrow{O\Omega} \,\middle|\, \overrightarrow{O\Omega'}\right) - \frac{O\Omega^2 - R^2 + O\Omega'^2 - R'^2}{2}\right).$$

Ainsi, après les simplifications, on obtient $\varphi(V,V') = tt'(R^2 + R'^2 - d^2)/2$, où d désigne la distance $\Omega\Omega'$.

Avant d'en tirer les premières conclusions, faisons quelques rappels à propos des formes bilinéaires et quadratiques. Cela ne sera sans doute pas inutile puisque nous aurons à manipuler une forme quadratique « non positive ».

Soit E est un espace vectoriel réel de dimension finie, f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et q la forme quadratique définie par $q(x) = f(x,x)$ pour $x \in E$. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on désigne par F° le *sous-espace orthogonal* de F, ou plus simplement l'*orthogonal* de F, défini par :

$$F^\circ = \{y \in E\,, \quad \forall x \in F \; f(x,y) = 0\}\,.$$

De la non-dégénérescence de f suivent les formules

$$\dim E = \dim F + \dim F^\circ \quad \text{et} \quad (F^\circ)^\circ = F\,.$$

Ces formules ne se distinguent pas de celles du cas bien connu d'un espace euclidien ; en revanche, il n'y a aucune raison pour que $F \cap F^\circ = \{0\}$ [10].

[8] En revanche, lorsque V est de la forme $(a,b,c,0)$, nous venons de voir que $q(V) = a^2+b^2$. Autrement dit, la restriction de q à $F = \mathbb{R}^3 \times \{0\}$ est $(2,0)$, c'est-à-dire que q_F est positive, mais dégénérée. Nous interpréterons cela plus loin en disant que le réseau des droites du plan est un réseau *singulier*.

[9] On rappelle que φ est l'unique forme bilinéaire symétrique telle que $q(V) = \varphi(V,V)$ pour tout vecteur V.

[10] Cela serait automatique si f était un produit scalaire.

Lorsque c'est le cas, on a donc $E = F \oplus F^\circ$. Il est bon de savoir aussi que $F \cap F^\circ = \{0\}$ si, et seulement si, la restriction de la forme f à $F \times F$ est non dégénérée. Nous qualifierons de *singulier* un sous-espace vectoriel F pour lequel la condition $F \cap F^\circ = \{0\}$ *n'est pas* vérifiée. Voir par exemple au **VI-6.4** la fin du corrigé d'un exercice.

Au **VI-3.2**, *nous appliquerons ces résultats au cas où* $E = \mathscr{P}$ *et où* f *est la forme polaire de la forme quadratique fondamentale* q.

1.3. Interprétation projective

Cette brève section peut être reportée à une seconde lecture. Comme elle se fonde sur la construction axiomatique de l'Annexe **B**, *un rapide survol de cet appendice ne sera pas superflu.*

Nous pouvons dès maintenant résumer ce que nous savons déjà sous l'angle de la Géométrie projective. Cela est rendu possible par la constatation que deux équations formelles (non nulles) proportionnelles définissent le même cercle-droite.

Nous avons indiqué que l'ensemble $\mathscr{P}$ des polynômes de la forme $\mathbf{P}_{a,b,c,t}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $\mathbb{R}[X,Y]$; en effet, la famille $(X^2+Y^2, X, Y, 1)$ en est une base.

Considérons la forme linéaire τ qui à $\mathbf{P}_{a,b,c,t} \in \mathscr{P}$ associe $t \in \mathbb{R}$; l'espace vectoriel $\mathscr{P}$ contient alors deux parties privilégiées ; d'une part, le sous-espace vectoriel $\mathscr{P}_0 \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Ker}\tau$ formé des polynômes

$$\mathbf{P}_{a,b,c,0}(X,Y) = -2aX - 2bY + c\,,$$

et d'autre part le sous-espace affine $\mathscr{P}_1$ formé des polynômes

$$\mathbf{P}_{a,b,c,1}(X,Y) = 1(X^2+Y^2) - 2aX - 2bY + c$$

pour lesquels la forme τ prend la valeur 1.

Toute équation $P(X,Y) = 0$, où P est un élément non nul de $\mathscr{P}_0$, est l'équation formelle d'une droite, et toute équation $P(X,Y) = 0$, où P est un élément de $\mathscr{P}_1$, *a fortiori* non nul, est l'équation formelle d'un cercle.

Considérons l'espace projectif réel $\mathbb{P}_3$ de dimension 3, qui est l'ensemble quotient de $\mathscr{P} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $\mathbf{r}$ définie par

$$\forall (P,P') \in (\mathscr{P} \setminus \{0\})^2\,, \quad P\,\mathbf{r}\,P' \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ P' = \lambda P\,,$$

et désignons par σ la surjection canonique de $\mathscr{P} \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{P}_3$ (elle associe à tout vecteur P non nul sa classe d'équivalence *modulo* $\mathbf{r}$).

Il est traditionnel de qualifier de *points* les éléments d'un espace projectif ; si $M \in \mathbb{P}_3$, nous appellerons *(quadruplet de) coordonnées homogènes* de M tout vecteur $V = (a,b,c,t) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tel que $M = \sigma(\mathbf{P}_{a,b,c,t})$. Les

coordonnées homogènes d'un point de $\mathbb{P}_3$ ne sont donc définies qu'à un facteur multiplicatif non nul près.

Par abus de langage, si $M = \sigma(\mathbf{P}_{a,b,c,t})$, avec $(a,b,c,t) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, nous pourrons donc parler aussi du cercle-droite d'équation $\mathbf{E}_M$.

Que venons-nous de faire ? Tout simplement de compléter l'espace affine $\mathscr{P}_3$ (de dimension 3) des équations formelles des cercles *du plan en un espace projectif (de dimension 3 également). Cet espace projectif n'est autre que celui des équations formelles des* cercles-droites.

Par abus d'écriture, désignons encore par q la forme quadratique qui à $P = \mathbf{P}_{x,y,z,t} \in \mathbb{R}^4$ associe $x^2 + y^2 - zt$. L'ensemble $C_0 = q^{-1}(\{0\})$ des vecteurs isotropes [11] pour la forme quadratique ainsi définie est un cône, le *cône isotrope* de q, et il n'est pas réduit à $\{0\}$ puisque q n'est ni définie positive, ni définie négative. L'image $\sigma(C_0 \setminus \{0\})$ est une quadrique projective $\mathscr{Q}$ de $\mathbb{P}_3$, d'équation homogène $X^2 + Y^2 - ZT = 0$.

L'espace affine usuel $\mathbb{R}^3$ s'identifie naturellement à une partie de $\mathbb{P}_3$: la restriction de σ à l'hyperplan affine de $\mathbb{R}^4$ d'équation $T = 1$ est injective, et on en identifie l'image à $\mathbb{R}^3$. Plus précisément, on identifie le point (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ avec l'image par σ du polynôme $\mathbf{P}_{x,y,z,1}$.

Dans ces conditions, l'intersection $\mathscr{Q}_0$ de $\mathscr{Q}$ avec $\mathbb{R}^3$ est la quadrique affine d'équation $X^2 + Y^2 - Z = 0$. Cette quadrique est un paraboloïde elliptique [12].

Pour l'instant, nous ne représentons pas ce paraboloïde par une figure, car cela ne présenterait pas d'intérêt à ce stade. En revanche, cela sera fait au **VI-3.2** *dans un contexte plus riche et plus instructif.*

Cette quadrique affine possède un paramétrage naturel :

$$(u,v) \in \mathbb{R}^2 \overset{\Phi}{\longmapsto} (u,v,u^2+v^2) \in \mathscr{Q}_0 .$$

On peut comprendre ce paramétrage comme il suit : à un point m du plan P, de coordonnées $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on associe le cercle-point d'équation $(X-u)^2 + (Y-v)^2 = 0$, c'est-à-dire aussi d'équation $\mathbf{E}_V$, avec $V = (u,v,u^2+v^2,1) \in C_0$. Le point $\Phi(m) \in \mathscr{Q}_0$ n'est alors autre que $\sigma(V)$. Tout s'est donc passé comme si nous avions identifié un point du plan euclidien P avec le cercle-point dont il est le centre (et l'unique élément, en même temps).

Reconventionnellement, cette interprétation suggère maintenant une manière naturelle de compléter P par « des » points à l'infini. L'image par Φ

[11] Rappelons qu'un vecteur *isotrope* pour une forme quadratique q est tout simplement un vecteur qui l'annule. Rappelons aussi qu'un *cône* est une partie d'un espace vectoriel stable par toutes les homothéties $x \longmapsto \lambda x$.

[12] C'est même un paraboloïde de révolution si l'on munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.

du plan P n'est autre que la quadrique affine $\mathscr{Q}_0$ et Φ possède une application réciproque Ψ, qui au point $M \in \mathscr{Q}_0$ de coordonnées homogènes $(x, y, z, 1)$ associe le point $m \in P$ de coordonnées (x, y).

Or, le complémentaire de $\mathscr{Q}_0$ dans $\mathscr{Q}$ est l'ensemble des points de $\mathscr{Q}$ dont les coordonnées homogènes sont de la forme $(x, y, z, 0)$, avec $x^2+y^2-z\times 0 = 0$, c'est-à-dire encore de la forme $(0, 0, z, 0)$, avec $z \neq 0$. Toutes ces coordonnées homogènes sont proportionnelles entre elles et donc le complémentaire est formé d'un seul point q_∞, de coordonnées homogènes $(0, 0, 1, 0)$.

Il est donc naturel de compléter P par *un* point à l'infini, comme au chapitre **V**. Nous le nommerons ∞ et poserons $\Psi(q_\infty) = \infty$. Il est à noter que cette construction dépend *a priori* du choix d'un repère orthonormé direct de P. Il est facile de voir qu'elle en est en fait indépendante.

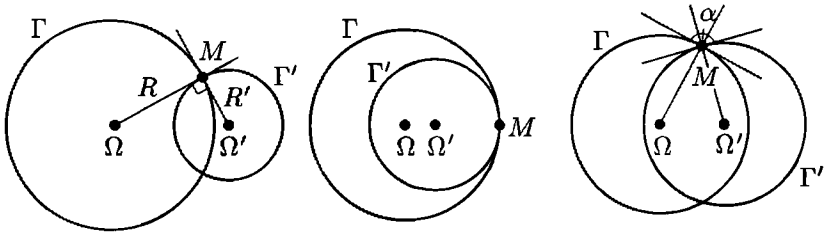
Le cercle-droite d'équation formelle $\mathbf{P}_{0,0,1,0} = 0$, c'est-à-dire d'équation $1 = 0$ doit être considéré comme une droite, puisqu'élément de $\operatorname{Ker}\tau$, mais sans point à distance finie. Comme c'est en outre un élément de $\mathscr{Q}$, nous l'appellerons la *droite-point à l'infini* [13].

1.4. Orthogonalité, contact, intersection, équation tangentielle

Orthogonalité de deux cercles-droites

*On sait bien que les notions d'*orthogonalité ou de contact *entre cercles-droites se traduisent très bien en termes de relations algébriques. Nous allons voir dans cette section que la forme quadratique fondamentale et sa forme polaire φ sont de très bons outils pour manipuler ces propriétés.*

Nous allons commencer par le cas de deux cercles, puis étendre les résultats obtenus au cas d'une ou de deux droites.



Soit Γ et Γ' deux cercles, de rayons respectifs R et R' supposés pour l'instant strictement positifs, et de centres Ω et Ω'. On dit qu'ils sont *orthogonaux* s'ils sont sécants et si les tangentes en leurs points d'intersection sont orthogonales [14].

[13] Comme nous avons parlé de *cercle-point*.

[14] Vu que la figure formée par deux cercles admet un axe de symétrie, si cette propriété d'orthogonalité est vérifiée en un point d'intersection, elle l'est aussi en l'autre.

Il est immédiat que cela implique que $R^2 + R'^2 = \Omega\Omega'^2$, vu le théorème de PYTHAGORE appliqué au triangle rectangle $\Omega M\Omega'$, où M est l'un des points d'intersection.

Inversement, si cette égalité est vérifiée, les deux cercles sont sécants et orthogonaux. En effet, ils sont sécants, car on a

$$|R - R'| < \Omega\Omega' < R + R',$$

ce que l'on vérifie par élévation au carré, du fait que la double inégalité précédente équivaut à

$$R^2 - 2RR' + R'^2 < R^2 + R'^2 < R^2 + 2RR' + R'^2.$$

Maintenant, supposons que Γ et Γ' ont pour équation $\mathbf{E}_V$ et $\mathbf{E}_{V'}$, avec $V = (a, b, c, t)$ et $V' = (a', b', c', t')$, où $tt' \neq 0$. Nous savons que $2\varphi(V, V') = tt'(R^2 + R'^2 - \Omega\Omega'^2)$, formule qui a été établie au **VI-1.2**. La condition $R^2 + R'^2 = \Omega\Omega'^2$ équivaut donc à $\varphi(V, V') = 0$.

Nous avons de la chance pour ce qui concerne la terminologie : les cercles Γ et Γ' sont *orthogonaux* si, et seulement si, les vecteurs V et V' sont *orthogonaux* vis-à-vis de la forme bilinéaire symétrique φ [15].

Cette propriété subsiste-t-elle dans les cas particuliers ?

Remplaçons Γ' par la droite non vide Δ' d'équation $\mathbf{E}_{a',b',c',0}$, c'est-à-dire $-2a'X - 2b'Y + c' = 0$. La condition $\varphi(V, V')$ équivaut à $2aa' + 2bb' - c't = 0$ et cela équivaut à dire que $\Omega \in \Delta'$. Cette dernière condition équivaut à dire que Δ' est un diamètre de Γ. Dans ce cas, droite et cercles sont sécants et la condition d'orthogonalité des tangentes reste vraie en leurs points d'intersection.

Vu la symétrie de φ, il est inutile d'envisager le cas où c'est le cercle Γ qui est remplacé par une droite.

Remplaçons les deux cercles par deux droites non vides, respectivement Δ et Δ'. Avec les mêmes notations, $\varphi(V, V') = aa' + bb'$, de sorte que l'on a $\varphi(V, V') = 0$ si, et seulement si, les deux droites sont (sécantes et) orthogonales.

Reste enfin le cas où l'un des deux cercles-droites est un cercle de rayon nul. Or, on vérifie facilement que si $\mathbf{C}_V$ est un cercle de rayon nul et $\mathbf{C}_{V'}$ un cercle-droite, alors $\varphi(V, V') = 0$ si, et seulement si, l'unique point de $\mathbf{C}_V$ appartient à $\mathbf{C}_{V'}$ [16]. On ne peut plus évidemment parler de tangente en *le* point d'un cercle-point, mais nous prendrons cela comme définition de l'orthogonalité : le cercle de rayon nul Γ est *orthogonal* au cercle-droite Γ' si, et seulement si, l'unique point de Γ appartient à Γ'.

[15] Et il est traditionnel de dire que deux vecteurs orthogonaux vis-à-vis de φ le sont vis-à-vis de q.

[16] Et, en particulier, $\mathbf{C}_{V'}$ est automatiquement non vide.

Par extension, l'égalité $\varphi(V,V')=0$ reste possible lorsque $\mathbf{C}_V$ ou $\mathbf{C}_{V'}$ est l'ensemble vide, mais cela n'a plus d'interprétation géométrique intéressante.

Comme première application, déduisons-en qu'il n'existe pas quatre cercles-droites non vides deux à deux orthogonaux.

Supposons le contraire, et appelons-les $\mathbf{C}_{V_i}$, où $1\leqslant i\leqslant 4$. Les vecteurs V_i sont deux à deux orthogonaux pour φ et vérifient $q(V_i)\neq 0$ pour tout i. La famille $\mathscr{B}=(V_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ est donc libre[17] dans $\mathbb{R}^4$: c'en est donc une base et la matrice de q relativement à $\mathscr{B}$ est

$$M=\begin{pmatrix} q(V_1) & 0 & 0 & 0\\ 0 & q(V_2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & q(V_3) & 0\\ 0 & 0 & 0 & q(V_4)\end{pmatrix}.$$

Or, les coefficients diagonaux de cette matrice sont positifs ou nuls, de sorte que la signature de q est $(r,0)$, où r est le nombre de termes diagonaux >0. Cela contredit le fait que cette signature est $(3,1)$.

En revanche, des configurations de trois cercles-droites non vides deux à deux orthogonaux existent : voir pour cela la figure du **V-9.5.6**, page **286**.

Contact de deux cercles-droites

Commençons encore une fois par l'étude du contact de deux cercles de rayon >0, que nous désignons par $\mathbf{C}_V$ et $\mathbf{C}_{V'}$, avec $q(V)>0$ et $q(V')>0$. Nous conservons nos notations quant à leur centre et à leur rayon.

Ces deux cercles sont tangents si, et seulement si, il existe $\varepsilon=\pm 1$ tel que $\Omega\Omega'=|R+\varepsilon R'|$, avec $\varepsilon=-1$ en cas de contact intérieur et $\varepsilon=+1$ en cas de contact extérieur. Cela équivaut à $\Omega\Omega'^2=R^2+2\varepsilon RR'+R'^2$; or, nous savons depuis le **VI-1.2** que $2\varphi(V,V')=tt'(R^2+R'^2-\Omega\Omega'^2)$.

Nous avons donc obtenu la condition équivalente $\varphi(V,V')=-\varepsilon\, tt'RR'$. Maintenant, nous avons $R=q(V)/|t|$ et $R'=q(V')/|t'|$: nous avons donc intérêt à choisir $t=t'=1$[18], et ainsi $R=\sqrt{q(V)}$, $R'=\sqrt{q(V')}$ et la condition se simplifie en $\varphi(V,V')=-\varepsilon\sqrt{q(V)q(V')}$.

---

[17] C'est une propriété classique : toute famille de vecteurs non isotropes et deux à deux orthogonaux pour une forme bilinéaire est libre. Vérifions cela ici, avec les notations de l'énoncé : si $\sum_{i=1}^{4}\lambda_i V_i=0$, alors $\varphi(V_j,\sum_{i=1}^{4}\lambda_i V_i)=0$ pour tout j. Or, cette expression vaut aussi $\lambda_j\underbrace{\varphi(V_j,V_j)}_{\neq 0}$. On en déduit que les λ_j sont tous nuls.

[18] Ce choix est le plus naturel puisque la forme habituelle de l'équation d'un cercle est $X^2+Y^2+\ldots=0$. Bien entendu, la simplification recherchée s'effectue dès que $tt'>0$, en particulier dès que $t>0$ et $t'>0$.

Si on ne cherche pas à préciser la nature du contact, intérieur ou extérieur, la condition précédente prend la forme simple $\big(\varphi(V,V')\big)^2 - q(V)q(V') = 0$, sans que l'on ait à supposer $t = t' = 1$.

D'ailleurs, supposons que les cercles $\mathbf{C}_V$ et $\mathbf{C}_{V'}$ sont deux cercles tangents de rayon > 0, et intéressons-nous à l'expression $\Phi(\lambda) = q(\lambda V - V')$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. On a aussi $\Phi(\lambda) = \lambda^2 q(V) - 2\lambda\varphi(V,V') + q(V')$ pour tout λ. Cela montre que Φ est un trinôme de degré effectif 2, et de discriminant nul ; ce trinôme s'annule donc pour $\lambda_0 = \dfrac{\varphi(V,V')}{q(V)} = \dfrac{q(V')}{\varphi(V,V')}$ [19].

Posons alors $W = \lambda_0 V - V'$. Puisque $q(W) = 0$, le cercle-droite $\mathbf{C}_W$ est un cercle-point ; or, on a aussi $\varphi(V,W) = \lambda_0 q(V) - \varphi(V,V') = 0$ ainsi que $\varphi(V',W) = \lambda_0\varphi(V,V') - q(V') = 0$. Cela montre $\mathbf{C}_W$ est réduit à un singleton inclus dans $\mathbf{C}_V \cap \mathbf{C}_{V'}$. Ce singleton est donc le point de contact de ces deux cercles tangents. Le même principe s'applique au point de contact d'une droite tangente à un cercle de rayon > 0.

Dans le cas où les deux cercles sont distincts, V et V' ne sont pas colinéaires ; posons alors $F = \mathrm{Vect}\,(V,V')$, sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$ dont $\mathscr{B}_0 = (V,V')$ est une base. La matrice de la restriction φ_F de φ à $F \times F$ est, relativement à $\mathscr{B}_0$:

$$M = \begin{pmatrix} q(V) & \varphi(V,V') \\ \varphi(V,V') & q(V') \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la condition de contact est plus simplement encore $\det M = 0$. Cela équivaut donc à dire que φ_F est dégénérée.

Si on s'intéresse plus généralement à la position relative des deux cercles, on est amené à comparer $\Omega\Omega'$, $|R - R'|$ *et* $R + R'$.

Plus précisément, les deux cercles sont sécants si, et seulement si, $|R-R'| < \Omega\Omega' < R + R'$ *et disjoints si, et seulement si,* $\Omega\Omega' > R + R'$ *ou* $\Omega\Omega' < |R - R'|$. *En reprenant les calculs qui viennent d'être faits, on voit que cela équivaut respectivement à* $q(V)q(V') - \big(\varphi(V,V')\big)^2 > 0$ *et à* $q(V)q(V') - \big(\varphi(V,V')\big)^2 < 0$ [20].

On vérifie facilement que ces résultats s'étendent au cas où $\mathbf{C}_V$ *et/ou* $\mathbf{C}_{V'}$ *sont des droites.*

---

[19] Ce dernier dénominateur ne peut être nul, car alors on aurait $q(V)q(V') = 0$.

[20] On peut interpréter cette caractérisation à l'aide de la forme quadratique q_F, où $F = \mathrm{Vect}\,(V,V')$: les cercles $\mathbf{C}_V$ et $\mathbf{C}_{V'}$ sont sécants si, et seulement si, q_F est définie positive, disjoints si, et seulement si, q_F est de signature $(1,1)$ et tangents si, et seulement si, q_F est dégénérée. Nous retrouverons, au **VI-3.2**, la même discussion ; pour passer de celle de la section actuelle à celle ainsi citée, il suffit d'introduire le faisceau de cercles contenant C_V et $\mathrm{C}_{V'}$.

Si maintenant $\mathbf{C}_V$ est un cercle-point, on a $q(V) = 0$ et la condition de contact équivaut à $\varphi(V, V') = 0$. Nous avons vu que cela équivaut à dire que l'unique point de $\mathbf{C}_V$ appartient à $\mathbf{C}_{V'}$.

Nous prendrons là encore cela comme définition du contact d'un cercle-point et d'un cercle (mais les notions de contact extérieur ou intérieur perdent tout leur sens). Cette définition vaut aussi pour le contact d'un cercle-point et d'une droite, avec encore la même caractérisation.

Nous n'avons pas encore envisagé le cas du contact d'un cercle et d'une droite non vide. Nous savons que le cercle $\mathbf{C}_V$ et la droite $\mathbf{D}_{V'}$ sont tangents si, et seulement si, la distance d du centre du cercle à la droite est égal au rayon R du cercle (nous caractériserons cela plutôt par $d^2 = R^2$).

La droite $\mathbf{D}_{V'}$ a pour équation $-2a'X - 2b'Y + c' = 0$. On a donc comme condition équivalente

$$\underbrace{\frac{\left(-2a'a/t - 2b'b/t + c'\right)^2}{4(a'^2 + b'^2)}}_{d^2} = \underbrace{\frac{a^2 + b^2 - ct}{t^2}}_{R^2},$$

ou, plus simplement $(2aa' + 2bb' - tc')^2 = 4(a'^2 + b'^2)(a^2 + b^2 - ct)$. Or, $q(V) = a^2 + b^2 - ct$, $q(V') = a'^2 + b'^2$ et $\varphi(V, V') = aa' + bb' - \dfrac{c \times 0 + tc'}{2}$. L'égalité précédente équivaut ici aussi à $\big(\varphi(V, V')\big)^2 = q(V)q(V')$ [21].

On l'aura compris : les droites se comportent bel et bien comme des cas particuliers de cercles, un peu comme s'il s'agissait de cercles centrés à l'infini. Cela justifie que l'on ait introduit les équations formelles de cercles-droites, qui forment un espace projectif autorisant des énoncés plus généraux que ceux issus de l'espace affine des équations de cercles. Les occasions ne manqueront pas de confirmer cette remarque.

Voici pour finir le cas de deux droites : pour des vecteurs non nuls $V = (a, b, c, 0)$ et $V' = (a', b', c', 0)$, on a $\big(\varphi(V, V')\big)^2 = q(V)q(V')$ si, et seulement si, les droites $\mathbf{D}_V$ et $\mathbf{D}_{V'}$ sont parallèles [22]. Si l'on convient qu'une droite vide est tangente à toute droite, mais n'est tangente à aucun cercle [23],

[21] À noter que la condition $d^2 > R^2$ équivaut à la disjonction de la droite et du cercle et que la condition $d^2 < R^2$ équivaut à leur concours en deux points. Ces deux conditions équivalent respectivement à $\big(\varphi(V, V')\big)^2 > q(V)q(V')$ et à $\big(\varphi(V, V')\big)^2 < q(V)q(V')$.

[22] En effet, $\big(\varphi(V, V')\big)^2 = q(V)q(V') \iff (aa' + bb')^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)$ et cela équivaut à la colinéarité des vecteurs (a, b) et (a', b') : c'est le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

[23] Ce qui est conforme à notre interprétation projective : une droite vide peut être assimilée au singleton $\{\infty\}$, or, ∞ appartient à toutes les droites et n'appartient à aucun cercle.

la caractérisation précédente s'étend encore au cas du contact d'une droite vide et d'un cercle-droite.

L'équation tangentielle d'un cercle

*Les résultats précédents vont nous permettre d'obtenir une expression simple de l'*équation tangentielle *d'un cercle de rayon > 0 donné, c'est-à-dire d'obtenir une condition nécessaire et suffisante simple pour qu'une droite soit tangente à ce cercle.*

En effet, soit le cercle $\mathbf{C}_V$, avec $V = (a, b, c, t)$ où $t \neq 0$ et $q(V) > 0$; alors, nous venons d'établir que la droite $\mathbf{D}_{V'}$, avec $V' = (a', b', c', 0)$ est tangente à $\mathbf{C}_V$ si, et seulement si,

$$Q_0(V') \overset{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} q(V') & \varphi(V, V') \\ \varphi(V, V') & q(V) \end{vmatrix} = 0 .$$

Appelons Q l'application qui à $X \in \mathbb{R}^4$ associe $q(X)q(V) - \big(\varphi(V, X)\big)^2$. Nous allons vérifier que Q est une forme quadratique. Ainsi, cela établira que Q_0 est une forme quadratique, puisque c'est la restriction de Q à $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ [24].

Pour ce faire, introduisons la forme bilinéaire symétrique suivante, définie sur $\mathbb{R}^4$:

$$\Phi(X, Y) = \varphi(X, Y)q(V) - \varphi(X, V)\varphi(Y, V) .$$

Que Φ soit une forme bilinéaire symétrique est immédiat à vérifier ; comme $Q(X) = \Phi(X, X)$ pour tout X dans $\mathbb{R}^4$, nous avons bien montré que Q est une forme quadratique (et nous avons au passage mis sa forme polaire en évidence).

Montrons que la signature de Q_0 est $(2, 1)$. Pour cela, supposons que le repère orthonormé $\mathscr{R} = (O\,; i, j)$ a son origine au centre de $\mathbf{C}_V$, de sorte que l'équation de ce cercle est $X^2 + Y^2 - R^2 = 0$, avec $R > 0$. Cela revient à dire que nous faisons en sorte que $V = (0, 0, -R^2, 1)$.

Dans ces conditions, si $V' = (a', b', c', 0)$, alors

$$Q_0(V') = R^2\big(a'^2 + b'^2\big) - \Big(\frac{c'}{2}\Big)^2 .$$

Ainsi, la forme quadratique Q_0 est décomposée en carrés et cela établit la valeur de la signature.

Il est intéressant d'étudier Q_0 en toute généralité, en mêlant arguments algébriques et arguments géométriques. Cette étude peut être omise en première lecture.

[24] Mais on remarquera bien que, à la différence de q, ni la forme Q ni la forme Q_0 ne sont intrinsèques : l'une et l'autre dépendent du choix du vecteur V.

La forme quadratique Q est dégénérée; en effet, on a $\Phi(X,V)=0$ pour tout X dans $\mathbb{R}^4$. Maintenant, retrouvons le fait que la forme Q_0 est au contraire non dégénérée, et plus précisément de signature $(2,1)$.

En effet, nous exhibons un plan vectoriel F_0 de $\mathbb{R}^3\times\{0\}$ tel que Q_{F_0} soit définie positive. Considérons pour cela l'ensemble $\mathscr{E}$ des V' de la forme $(a,b,c,0)$ et $(a,b)\neq(0,0)$, tels que la droite $\mathbf{D}_{V'}$ soit **orthogonale** à $\mathbf{C}_V$. Pour de tels V', on a $\varphi(V,V')=0$ et donc $Q(V')>0$. Posons alors $F_0=\mathrm{Vect}(\mathscr{E})=\mathscr{E}\cup\{0\}$. On ne peut avoir $\dim(F_0)=0$ puisque $\mathscr{E}\neq\emptyset$, ni $\dim(F_0)=1$ puisque, sinon, tous les $V'\in\mathscr{E}$ seraient colinéaires et seule une droite serait orthogonale à $\mathbf{C}_V$. On ne peut pas non plus avoir $\dim(F_0)=3$, car, sinon, *toutes* les droites du plan seraient orthogonales à $\mathbf{C}_V$.

Donc, $\dim(F_0)=2$, de sorte que F_0 ainsi déterminé convient. Puisque la restriction de Q à ce sous-espace vectoriel est définie positive, la signature de Q_0 ne peut être que de la forme $(2,0)$, $(2,1)$ ou $(3,0)$.

Or, si elle était de la forme $(3,0)$, Q_0 serait définie positive et aucun vecteur V' non nul dans $\mathbb{R}^3\times\{0\}$ ne l'annulerait. Cela signifierait que le cercle $\mathbf{C}_V$ n'admet aucune tangente! De même, si elle était de la forme $(2,0)$, Q_0 serait positive et l'ensemble des V' dans $\mathbb{R}^3\times\{0\}$ annulant Q_0 serait une droite vectorielle. Là encore, ce serait absurde, car le cercle $\mathbf{C}_V$ n'admettrait qu'une seule tangente.

1.5. Homographies et forme quadratique fondamentale

Cette section plus abstraite peut être réservée à une seconde lecture.

Plaçons-nous toujours dans un plan euclidien, identifié à $\mathbb{C}$ grâce à un repère orthonormé $\mathscr{R}$, et complétons-le par un point à l'infini ∞. Si h est une homographie de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, nous savons non seulement qu'elle conserve globalement l'ensemble des cercles-droites, mais encore que h préserve un certain nombre de propriétés de ces objets : l'image d'un cercle-point est encore un cercle-point, les images de deux cercles-droites tangents (ou orthogonaux) sont encore des cercles-droites tangents (ou orthogonaux).

Cela suggère qu'une homographie possède une action privilégiée sur l'ensemble des équations formelles ainsi que sur la forme quadratique fondamentale q. C'est précisément ce que nous développerons dans la présente section.

Si $V=(a,b,c,t)\in\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$, désignons pour simplifier par $\mathbf{P}_V$ le polynôme $\mathbf{P}_{a,b,c,t}(X,Y)=t(X^2+Y^2)-2aX-2bY+c$. Si nous posons $Z=X+\mathrm{i}Y$ et $p=a+\mathrm{i}b$, il se met aussi sous la forme $t\overline{Z}Z-\overline{p}Z-p\overline{Z}+c$, ainsi que sous la forme matricielle

$$\mathbf{P}_V(X,Y)=(\overline{Z}\ \overline{1})\mathscr{A}_V\begin{pmatrix}Z\\1\end{pmatrix},\quad\text{avec}\quad\mathscr{A}_V=\begin{pmatrix}t&-p\\-\overline{p}&c\end{pmatrix}.$$

Nous constatons immédiatement que

$$-\det(\mathscr{A}_V)=\overline{p}p-ct=a^2+b^2-ct=q(V).$$

Nous remarquons aussi que la matrice $\mathscr{A}_V$ est *hermitienne* : on a en effet ${}^t\overline{\mathscr{A}_V} = \mathscr{A}_V$.

Si $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, nous lui associons l'homographie h_M qui à $z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ associe $\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$.

Dans un premier temps, nous construisons une loi de composition externe (notée $\diamond$), de $GL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$, traduisant en termes d'équations formelles le passage de $\mathbf{C}_V$ à $h_M(\mathbf{C}_V)$.

Nous confondons pour cela le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec le complexe $z = x + iy$.

Dans ces conditions, soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $V \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$; l'homographie $(h_M)^{-1}$ est définie par

$$Z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \longmapsto \frac{\delta Z - \beta}{-\gamma Z + \alpha}.$$

En outre, nous écrivons $\mathbf{P}_V(X, Y)$ sous la forme $t\overline{Z}Z - \overline{p}Z - p\overline{Z} + c$, avec $Z = X + iY$ et $p = a + ib$. Le point (X, Y) appartient donc à $h_M(\mathbf{C}_V)$ si, et seulement si, $(h_M)^{-1}(X, Y)$ appartient à $\mathbf{C}_V$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\mathbf{P}_V\big((\delta Z - \beta)/(-\gamma Z + \alpha)\big) = 0$. Or, un calcul montre tout de suite que

$$\mathbf{P}_V((\delta Z - \beta)/(-\gamma Z + \alpha)) = \frac{T\overline{Z}Z - \overline{P}Z - P\overline{Z} + C}{|-\gamma Z + \alpha|^2},$$

où l'on a la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} T & -P \\ -\overline{P} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\delta} & -\overline{\gamma} \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -p \\ -\overline{p} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Appelons $M \diamond V$ le vecteur $(T, \operatorname{Re} P, \operatorname{Im} P, C)$ et N la matrice $\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$; nous avons donc la formule matricielle

$$\mathscr{A}_{M \diamond V} = {}^t\overline{N} \mathscr{A}_V N \qquad (\mathscr{F})$$

ainsi que $\mathbf{P}_V\big((h_M)^{-1}(Z)\big) = \dfrac{\mathbf{P}_{M \diamond V}(Z)}{|-\gamma Z + \alpha|^2}$ pour tout $z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ [25].

Il est à noter que la matrice N n'est pas la matrice inverse M^{-1}, mais la transposée de la comatrice de M, c'est-à-dire aussi $\det(M) M^{-1}$; nous n'avons pas à nous embarrasser de ce facteur non nul $\det(M)$ puisque $h_{M \diamond V} = h_{\lambda M \diamond V}$ pour tout complexe $\lambda \neq 0$.

[25] En réalité, nous n'avons établi cette formule que pour Z tel que $Z \neq \infty$ et $-\gamma Z + \alpha \neq 0$, mais elle s'étend sans difficulté aux deux valeurs particulières ainsi exclues.

De tout cela suit que, si $V \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, une équation formelle de $h_M(\mathbf{C}_V)$ est $\mathbf{E}_{M\diamond V}$, ou plus simplement que $h_M(\mathbf{C}_V) = \mathbf{C}_{M\diamond V}$.

Voici les principales propriétés de cette loi de composition, propriétés dont la vérification est triviale vu la formule $q(V) = -\det(\mathscr{A}_V)$ ainsi que la formule $\mathscr{F}$.

- Pour M fixée dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $V \in \mathbb{R}^4 \longmapsto M\diamond V$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$. En outre, $q(M\diamond V) = |\det(M)|^2 q(V)$.
- Soit $V \in \mathbb{R}^4$, alors $\mathrm{Id}_4 \diamond V = V$ et, pour M et M' dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on a $(MM')\diamond V = M(M'\diamond V)$.

L'on peut résumer ces propriétés en disant que (par la loi $\diamond$) le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *agit linéairement* sur $\mathbb{R}^4$.

Ces propriétés correspondent à ce que nous pressentions : si $\mathbf{C}_V$ est un cercle-point et M une matrice inversible, alors $h_M(\mathbf{C}_V)$ est un cercle-point ; en effet, ce cercle n'est autre que $\mathbf{C}_{M\diamond V}$ et on a $q(M\diamond V) = |\det(M)|^2 q(V) = 0$.

De même, pour tout couple (V, V') de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, on a $4\varphi(V, V') = q(V + V') - q(V - V')$ [26] ; on en déduit que

$$\varphi(M\diamond V, M\diamond V') = |\det(M)|^2 \varphi(V, V'),$$

pour toute matrice inversible M et tout couple (V, V') de vecteurs de $\mathbb{R}^4$. De cela suit immédiatement que h_M respecte le contact et l'orthogonalité des cercles-droites [27], ce que nous savions.

Désignons, pour $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, par $[M\diamond]$ l'endomorphisme $V \longmapsto M\diamond V$ de $\mathbb{R}^4$. Nous allons faire le lien entre les endomorphismes de cette forme et les *similitudes* relativement à q. Commençons par définir cette notion.

Nous définissons comme il suit le groupe $\mathrm{Sim}(q)$ [28] des *similitudes* de $\mathbb{R}^4$ relativement à q :

$$\mathrm{Sim}(q) = \left\{ f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4),\quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^*,\quad q \circ f = \alpha q \right\}.$$

La propriété pour $\mathrm{Sim}(q)$ d'être un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^4)$ est triviale. Puisque, avec nos notations, $q(M\diamond V) = |\det(\mathrm{M})|^2 q(V)$, nous avons établi que, pour tout $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, l'endomorphisme $[M\diamond]$ appartient à $\mathrm{Sim}(q)$.

En outre, si $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, le déterminant de l'endomorphisme $[M\diamond]$ est toujours > 0. En effet, le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est connexe (par arcs) [29] et l'application qui à $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ associe $\det([M\diamond])$ est continue. Or, pour tout

[26] C'est l'*identité de polarisation*.

[27] Mais elle ne respecte pas nécessairement le contact intérieur ni le contact extérieur.

[28] Une autre notation classique de ce groupe est $\mathrm{Sim}(3,1)$, en référence à la signature de la forme quadratique q. Cette information suffit, car, si deux formes quadratiques q_1 et q_2 ont la même signature (r, s), à l'ordre près des entiers r et s, alors les groupes $\mathrm{Sim}(q_1)$ et $\mathrm{Sim}(q_2)$ sont isomorphes.

[29] Pour cette propriété classique, voir par exemple **[19]**.

M inversible, $[M\diamond] \in \mathrm{Sim}(q) \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4)$ et cela montre que la fonction réelle $M \longmapsto \det([M\diamond])$ ne s'annule pas. Du théorème des valeurs intermédiaires suit que cette fonction est de signe (strict) constant. Enfin, pour $M_0 = \mathrm{Id}_2$, on a tout de suite $\det([M_0\diamond]) = 1 > 0$ et nous pouvons conclure.

Nous allons en fait démontrer que, réciproquement, pour tout $f \in Sim(q)$ de déterminant> 0, il existe une matrice $M \in GL_2(\mathbb{C})$ et un scalaire $\lambda \neq 0$ tels que $f(V) = \lambda M\diamond V$ pour tout vecteur V.

Cette démonstration, quoiqu'intéressante, est un peu longue ; nous en ferons la matière de la prochaine section.

En revanche, on ne peut pas espérer que le résultat subsiste si l'on impose de plus que $\lambda = 1$, c'est-à-dire $f(V) = M\diamond V$ pour tout vecteur V. En effet, lorsque $v_0 = (0,0,1,1)$, la matrice $\mathscr{A}_{v_0}$ est la matrice identité Id_2 et, pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on a tout de suite $\mathrm{tr}(\mathscr{A}_{M\diamond v_0}) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 > 0$.

Or, l'application $f_0 = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$, qui à V associe $-V$ est une similitude de $\mathbb{R}^4$ relativement à q, de déterminant $(-1)^4 > 0$, mais on a $\mathrm{tr}(\mathscr{A}_{-v_0}) = -2 < 0$. Cela établit que f_0 n'est pas de la forme $V \longmapsto M\diamond V$.

Donc, nous ne pouvons pas nous passer de l'introduction du terme multiplicatif non nul λ.

Toutefois, la présence de ce terme multiplicatif n'est pas gênante puisque les équations $\mathbf{E}_{\lambda M\diamond V}$ et $\mathbf{E}_{M\diamond V}$ représentent toujours le même cercle-droite.

Au **V-9.5.6**, nous avons fait le connaissance du *groupe de Möbius*, noté Möb, qui contient comme sous-groupe le groupe des homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Il est possible de faire agir de même les *antihomographies* sur $\mathbb{R}^4$: par exemple, avec les mêmes notations que *supra*, on a

$$\mathbf{P}_V(1/\overline{Z}) = \frac{c\overline{Z}Z - \overline{p}Z - p\overline{Z} + t}{|Z|^2}$$

lorsque $V = (a,b,c,t)$. Cela établit que $\mathbf{P}_V(1/\overline{Z}) = \dfrac{\mathbf{P}_{\mathbf{i}(V)}(Z)}{|Z|^2}$, où $\mathbf{i}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice canonique

$$M_{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cet endomorphisme est encore une fois une similitude relativement à q, mais de déterminant -1, strictement négatif.

En généralisant, on définirait une seconde action $(M,V) \longmapsto M * V$ en associant à $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ l'antihomographie $\hat{h}_M$ définie par $z \longmapsto \dfrac{\alpha\overline{z} + \beta}{\gamma\overline{z} + \delta}$ et

en adaptant les calculs *supra* [30]. Ainsi, une démonstration analogue à celle qui va suivre montrerait que *pour tout* $f \in Sim(q)$ *de déterminant* < 0, *il existe une matrice* $M \in GL_2(\mathbb{C})$ *et un scalaire* $\lambda \neq 0$ *tels que* $f(V) = \lambda M * V$ *pour tout vecteur* V.

Interprétation projective. Pour toute homographie h de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, il existe une matrice M dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $h = h_M$, la matrice M étant unique à un coefficient multiplicatif non nul près, voir au **V-5.1**. Ainsi, si M et M' sont inversibles et vérifient $h_M = h_{M'}$, alors M et M' sont proportionnelles, et donc $M \diamond V$ et $M' \diamond V$ le sont aussi pour tout vecteur V.

Cela montre que $\mathbf{E}_{M \diamond V}$ et $\mathbf{E}_{M' \diamond V}$ sont proportionnelles, et donc définissent un même élément de $\mathbb{P}_3$, défini au **VI-1.3**. En d'autres termes, nous avons une action du groupe $\mathbb{H}_2(\mathbb{C})$ des homographies sur $\mathbb{P}_3$ (que nous noterons $\cdot$) et telle que, si $h = h_M$ et E est la classe de $\mathbf{E}_V$ *modulo* $\mathbf{r}$, alors $h \cdot E$ est la classe de $\mathbf{E}_{M \diamond V}$ *modulo* $\mathbf{r}$.

De même, si $\hat{h}$ est une antihomographie et E un élément de $\mathbb{P}_3$, nous pouvons définir $\hat{h} \cdot E$ comme étant la classe *modulo* $\mathbf{r}$ de $\mathbf{E}_{M * V}$, si M est telle que $\hat{h} = \hat{h}_M$ et V tel que E soit la classe de $\mathbf{E}_V$ *modulo* $\mathbf{r}$.

Rappelons que nous avons noté $\mathscr{Q}$ la quadrique projective d'équation $X^2 + Y^2 - ZT = 0$. Dans ces conditions, pour toute application projective f laissant stable $\mathscr{Q}$, il existe un élément $H \in$ Möb tel que $f(E) = H \cdot E$ pour tout $E \in \mathbb{P}_3$ [31].

1.6. La démonstration en suspens

Nous conservons bien entendu les notations de la section précédente. Nous nous plaçons toujours dans $\mathbb{C}$ complété par ∞, et nous identifions toujours un point de ce plan avec son affixe.

Soit alors f dans $\mathrm{Sim}(q)$ et de déterminant>0. Par touches successives, nous allons nous ramener à un cas très simple, pour lequel nous pourrons conclure.

Une première remarque a son importance tout de suite : *soit* f *un automorphisme de* $\mathbb{R}^4$ *; si l'on a un scalaire réel* α *tel que* $q\big(f(V)\big) = \alpha q(V)$ *pour tout* V *dans* $\mathbb{R}^4$, *alors* $\alpha > 0$.

En effet, la formule $q(V) = \alpha q\big(f^{-1}(V)\big)$ montre que α ne peut être nul. Supposons-le < 0 ; comme q est de signature $(3, 1)$, il existe un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3 tel que q restreinte à F soit définie positive.

[30] De même, nous désignerons par $[M*]$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ qui à un vecteur V associe $M * V$.

[31] Le groupe $\mathrm{PO}(\mathscr{Q})$ des applications projectives de $\mathbb{P}_3$ qui laissent $\mathscr{Q}$ stable est un sous-groupe du groupe $H(\mathbb{P}_3)$ de toutes les applications projectives. Ce sous-groupe est isomorphe à Möb ; voir **[18]**.

La restriction de q à $f(F)$, de dimension 3 également, est donc définie négative. Cela contredit la valeur de la signature de q.

Cette remarque ne vaut pas pour n'importe quelle forme quadratique. Par exemple, si nous munissons $\mathbb{R}^2$ de la forme quadratique q' qui à $v = (x, y)$ associe $x^2 - y^2$, et si l'on pose $f(v) = (y, x)$ pour tout $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors f est un automorphisme, mais on a $q \circ f = -f$ [32] !

Soit donc f automorphisme donné et $\alpha > 0$ tel que $q \circ f = \alpha q$. Si nous posons $f' = f/\sqrt{\alpha}$, alors l'automorphisme f' vérifie $q \circ f' = q$. Puisque nous cherchons seulement à réaliser l'égalité $f = \lambda[M\diamond]$, nous pouvons remplacer f par f' et supposer désormais que $\alpha = 1$.

Soit $\mathscr{B}_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$. Posons $\varepsilon_i' = f(\varepsilon_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$; ainsi, pour tout (i, j),

$$\varphi(\varepsilon_i', \varepsilon_j') = \varphi\big(f(\varepsilon_i), f(\varepsilon_j)\big) = \varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j)\,.$$

En effet, la formule $\varphi\big(f(V), f(V')\big) = \varphi(V, V')$ résulte de l'*identité de polarisation* appliquée à l'égalité entre formes quadratiques $q \circ f = q$.

Le cercle-droite $\mathbf{C}_{\varepsilon_1}$ a pour équation $-2X = 0$. C'est donc l'axe Oy, et, de même, $\mathbf{C}_{\varepsilon_2}$ est l'axe Ox.

Le cercle-droite $\mathbf{C}_{\varepsilon_3}$ a pour équation $1 = 0$; vu nos conventions, c'est le singleton $\{\infty\}$. De même, le cercle-droite $\mathbf{C}_{\varepsilon_4}$ a pour équation $X^2 + Y^2 = 0$. C'est le cercle-point réduit à l'origine.

Puisque $q(\varepsilon_3') = q(f(\varepsilon_3)) = 0$, le cercle-droite $\mathbf{C}_{\varepsilon_3'}$ est un singleton $\{z_3\}$, où $z_3 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. De même, $\mathbf{C}_{\varepsilon_4'}$ est un singleton $\{z_4\}$, où $z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, avec $z_4 \neq z_3$. Les points z_3 et z_4 appartiennent à $\mathbf{C}_{\varepsilon_1'}$ et à $\mathbf{C}_{\varepsilon_2'}$ puisque, par exemple, $\varphi(\varepsilon_1', \varepsilon_3') = \varphi(\varepsilon_1', \varepsilon_4') = 0$. En particulier, ces cercles-droites ne sont pas des singletons [33].

Choisissons dans $\mathbf{C}_{\varepsilon_2'}$ un élément z_2 différent de z_3 et de z_4 (nous verrons un peu plus tard l'intérêt de ce choix). Vu le **V-9.5.1**, nous savons qu'il existe une (unique) homographie $\mathfrak{h}$ telle que $\mathfrak{h}(z_2) = 1$, $\mathfrak{h}(z_3) = \infty$ et $\mathfrak{h}(z_4) = 0$. Par exemple, si $z_2 \neq z_3 \neq z_4 \neq \infty$, l'homographie $\mathfrak{h}$ est celle définie par $z \longmapsto \big((z - z_4)(z_2 - z_3)\big)/\big((z - z_3)(z_2 - z_4)\big)$. Choisissons une matrice $N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathfrak{h} = h_N$ et posons $g = (N\diamond) \circ f$.

Nous posons alors $\varepsilon_i'' = g(\varepsilon_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$. Comme N. est une similitude, la composée g en est encore une et nous pouvons toujours choisir N pour que $q \circ g = 1 \times q$. On a donc encore $\varphi(\varepsilon_i'', \varepsilon_j'') = \varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ pour tout (i, j).

---

[32] Si q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, de signature (r, s), et f un automorphisme, alors $q \circ f$ est une forme quadratique de même signature, alors que, pour $\alpha < 0$, αq est une forme quadratique de signature (s, r). L'égalité $q \circ f = \alpha q$ avec $\alpha < 0$ est donc exclue lorsque $r \neq s$.

[33] Mais nous le savions déjà : $q(\varepsilon_1') \neq 0$.

Par construction, $\mathbf{C}_{\varepsilon_3''} = \mathfrak{h}(\mathbf{C}_{\varepsilon_3'})$ est le singleton $\{\infty\}$ et $\mathbf{C}_{\varepsilon_4''}$ est le singleton $\{0\}$.

Puisque $\varphi(\varepsilon_1'', \varepsilon_3'') = \varphi(\varepsilon_1'', \varepsilon_4'') = 0$, le cercle-droite $\mathbf{C}_{\varepsilon_1''}$ passe par ∞ et par 0 : c'est donc une droite passant par 0. De même, $\mathbf{C}_{\varepsilon_2''}$ en est une aussi, et ces deux droites sont orthogonales puisque $\varphi(\varepsilon_1'', \varepsilon_2'' = 0)$. Maintenant, la droite $\mathbf{C}_{\varepsilon_2''} = \mathfrak{h}(\mathbf{C}_{\varepsilon_2'})$ passe aussi par $\mathfrak{h}(z_2) = 1$; c'est donc l'axe Ox, de sorte que la droite $\mathbf{C}_{\varepsilon_1''}$ est l'axe Oy (car cette droite orthogonale à Ox passe par O).

Après toute cette phase de préparation, nous voyons que les $\mathbf{E}_{\varepsilon_i''}$ sont aussi des équations des $\mathbf{C}_{\varepsilon_i}$ respectivement. On en déduit que chaque ε_i'' est proportionnel respectivement à ε_i : appelons, pour tout i, λ_i le scalaire réel tel que $\varepsilon_1'' = \varepsilon_i$.

On a $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, car par exemple $q(\varepsilon_1) = q(\varepsilon_1'') = \lambda_1^2 q(\varepsilon_1)$ et $q(\varepsilon_1) \neq 0$ (mais on ne peut rien dire de semblable pour λ_3 ou λ_4). On a aussi $\lambda_3\lambda_4 = 1$, car $\varphi(\varepsilon_3, \varepsilon_4) = \varphi(\varepsilon_3'', \varepsilon_4'') = \lambda_3\lambda_4\varphi(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ et $\varphi(\varepsilon_3, \varepsilon_4) \neq 0$.

La matrice de g dans la base canonique est la matrice diagonale $G = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, dont le déterminant est $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = \lambda_1\lambda_2$. Comme $\det(f) > 0$ par hypothèse et que nous savons que $\det(N.) > 0$, alors $\det(g) > 0$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$.

Ainsi, G est aussi de la forme $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3, 1/\lambda_3)$ c'est-à-dire encore $G = \lambda_3\,\mathrm{Diag}(\lambda_1/\lambda_3, \lambda_1/\lambda_3, 1, 1/\lambda_3^2)$.

Comme $1/\lambda_1 = \lambda_1$, on en déduit que $g = \lambda_3 H\diamond$, où $H = \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; en d'autres termes, h_H est l'homothétie $z \longmapsto \lambda_1\lambda_3 z$.

Nous pouvons conclure : $\lambda_3 H\diamond = N \diamond \circ f$, et donc $f = \lambda_3(N^{-1}H)\diamond$: c'est bien une expression de la forme annoncée.

1.7. Résumé des principaux résultats de ce paragraphe

Rappelons que nous désignons par q la forme quadratique fondamentale qui à $V = (a, b, c, t) \in \mathbb{R}^4$ associe $a^2 + b^2 - ct$ et que, si V est fixé dans $\mathbb{R}^4$, nous désignons par Q la forme quadratique qui à $V' \in \mathbb{R}^4$ associe $q(V)q(V') - \big(\varphi(V, V')\big)^2$.

Nature d'un cercle-droite

Soit un vecteur $V = (a, b, c, t) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. Si $t \neq 0$, alors $\mathbf{C}_V$ est du type *cercle*. Plus précisément, on a ce qui suit.

- $\mathbf{C}_V$ est un cercle de rayon non nul si, et seulement si, $q(V) > 0$. Dans ce cas, son centre est le point $\Omega(a/t, b/t)$ et son rayon a pour valeur $\sqrt{q(V)}/|t|$.

- $\mathbf{C}_V$ est un cercle de rayon nul, ou cercle-point, si, et seulement si, $q(V) = 0$. Dans ce cas, il est réduit au point $\Omega(a/t, b/t)$.
- $\mathbf{C}_V$ est vide si, et seulement si, $q(V) < 0$.

Si, au contraire, $t = 0$, alors $\mathbf{C}_V$ est du type *droite*. Plus précisément,

- $\mathbf{C}_V$ est une droite si, et seulement si, $q(V) > 0$.
- $\mathbf{C}_V$ est vide si, et seulement si, $q(V) = 0$. Cela se produit si, et seulement si, V est de la forme $(0, 0, c, 0)$, avec $c \neq 0$. Si on complète le plan euclidien P par ∞, on conviendra que $\mathbf{C}_V = \{\infty\}$, **y compris pour la suite de ces rappels.**
- Il est impossible que $q(V) < 0$.

Orthogonalité de deux cercles-droites

Rappelons que nous avons étendu la notion d'orthogonalité de deux cercles-droites non vides $\mathbf{C}_V$ et $\mathbf{C}_{V'}$ au cas où l'un au moins des deux, disons $\mathbf{C}_{V'}$, est réduit à un point, c'est-à-dire lorsque $q(V') = 0$: on dit alors que $\mathbf{C}_V$ est orthogonal à $\mathbf{C}_{V'}$ si, et seulement si, l'unique point de $\mathbf{C}_{V'}$ appartient à $\mathbf{C}_V$.

Avec cette convention, les cercles-droites $\mathbf{C}_V$ et $\mathbf{C}_{V'}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\varphi(V, V') = 0$.

Contact de deux cercles-droites

C'est dans le cas de deux cercles $\mathbf{C}_V$ et $\mathbf{C}_{V'}$, tous deux de rayon > 0 que nous avons le résultat le plus précis, en ceci qu'il distingue le contact *intérieur* du contact *extérieur* : si l'on a fait en sorte que V soit de la forme $(a, b, c, 1)$ et V' de la forme $(a', b', c', 1)$, alors ces deux cercles sont tangents intérieurement, respectivement extérieurement, si, et seulement si, $\sqrt{q(V)q(V')}$ est égal à $+\varphi(V, V')$, respectivement à $-\varphi(V, V')$.

Dans le cas de deux cercles-droites non vides, nous avons établi le résultat suivant, pour lequel les quatrièmes composantes respectives de V et de V' n'ont plus à être supposées égales à 1 : $\mathbf{C}_V$ et $\mathbf{C}_{V'}$ sont respectivement *sécants*, *tangents* et *disjoints* selon que $q(V)q(V') - \big(\varphi(V, V')\big)^2$ est respectivement strictement positif, nul et strictement négatif. Ici, lorsque l'un des deux cercles-droites est réduit à un point, la notion de *contact* coïncide avec celle d'*orthogonalité*.

2. L'axe radical. Version géométrique

Au chapitre **II**, *nous avons défini algébriquement l'axe radical de deux cercles. Cette définition était rendue nécessaire par l'établissement d'un catalogue de méthodes en calcul barycentrique. Nous allons reprendre ces notions, cette fois géométriquement, dans un cadre où elles se manipulent mieux. Le calcul barycentrique ne peut évidemment pas l'emporter dans tous les domaines !*

2.1. Puissance d'un point par rapport à un cercle

La notion de puissance est liée aux cercles. Rien d'étonnant à ce que nous l'ayons passée sous silence dans les chapitres précédents, plus dévoués à la gloire des coniques.

Dans un plan euclidien P rapporté à un repère orthonormé, les cercles ont *une* équation privilégiée parmi toutes leurs équations possibles : il s'agit de leur unique équation de la forme $\mathbf{E}_V$, où V est lui-même de la forme $(a, b, c, 1)$ [34]. Un vecteur V tel que $\tau(V) = 1$ sera dit *normalisé*. En d'autres termes, la forme privilégiée est celle qui s'écrit

$$1(X^2 + Y^2) - 2aX - 2bY + c = 0\,.$$

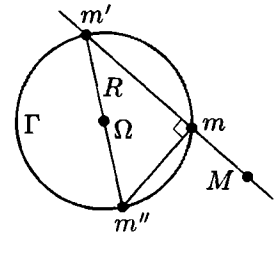
En outre, la valeur $\tau(V)$ de la quatrième composante d'un vecteur V résiste à un changement de repère orthonormé, comme le montre un calcul trivial.

Il n'en est pas de même pour les autres types d'équation des ensembles usuels (droites, coniques, courbes algébriques, etc.) : si on qualifiait par exemple de *privilégiée* une équation de droite de la forme $pX + qY + r = 0$, où « le » vecteur normal (p, q) est de norme 1, ce n'est pas *une*, mais *deux* équations de ce type que l'on obtiendrait, « le » vecteur normal n'étant défini qu'au coefficient multiplicateur ± 1 près.

Les équations des coniques génériques n'ont pas davantage une forme privilégiée...

Au vocable *privilégié* nous préférerons le mot *canonique*. L'existence, donc, d'une équation canonique d'un cercle, de la forme $\mathbf{P}_V(X, Y) = 0$, avec V normalisé, nous amène à nous intéresser à la fonction polynomiale $\mathbf{P}_V$. Dans cette section, nous allons donner de $\mathbf{P}_V$ une définition géométrique lorsque le cercle $\Gamma = \mathbf{C}_V$ est non vide.

Soit donc $V \in \mathbb{R}^4$, normalisé et tel que le cercle $\Gamma = \mathbf{C}_V$ soit non vide. Désignons par Ω le centre de ce cercle et R son rayon.



Nous établissons que, si M est un point de P, alors *pour toute droite passant par M et coupant Γ en deux*[35] *points m et m', le produit $\overline{Mm}\,\overline{Mm'}$ est égal à $\Omega M^2 - R^2$, c'est-à-dire encore à $\mathbf{P}_V(M)$. En particulier, cette valeur ne dépend pas du choix de la sécante.*

[34] Rappelons que nous avons désigné par τ la forme linéaire qui à $V = (a, b, c, t) \in \mathbb{R}^4$ associe t.

[35] Nous convenons bien entendu que $m = m'$ lorsque la droite est tangente en m à Γ.

Désignons par m'' l'opposé diamétral de m'. Le triangle $m''mm'$ est rectangle en m et l'on a donc, avec nos notations,

$$\overline{Mm}\,\overline{Mm'} = \left(\overrightarrow{Mm} \,\middle|\, \overrightarrow{Mm'}\right) = \left(\overrightarrow{Mm''} \,\middle|\, \overrightarrow{Mm'}\right)$$
$$= \left(\overrightarrow{M\Omega} - \overrightarrow{\Omega m'} \,\middle|\, \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega m'}\right) = \Omega M^2 - R^2.$$

Enfin, que cette valeur soit égale à $\mathbf{P}_V(M)$ est immédiat : il suffit de se rappeler l'égalité entre polynômes

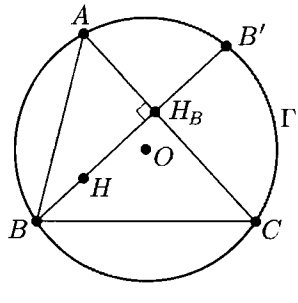
$$X^2 + Y^2 - 2aX - 2bY + c = (X-a)^2 + (Y-b)^2 - \underbrace{(a^2 + b^2 - c)}_{R^2}.$$

Que le cercle Γ soit vide ou non, nous appellerons *puissance* de M par rapport à Γ la valeur de $\mathbf{P}_V(M)$. Nous la noterons aussi $\mathbf{p}_\Gamma(M)$ pour faire référence au cercle Γ plutôt qu'à son équation formelle.

Nous obtenons tout de suite quelques propriétés de cette fonction polynomiale, lorsque Γ est non vide.

1. Le point M est respectivement extérieur à Γ, sur Γ, ou intérieur à Γ selon que $\mathbf{p}_\Gamma(M)$ est respectivement > 0, $=0$, ou < 0.
2. Si une tangente à Γ menée d'un point M extérieur à Γ touche ce cercle au point m, alors on a $Mm^2 = \mathbf{p}_\Gamma(M)$ [36].
3. Soit deux cercles Γ et Γ' non vides, le cercle Γ étant centré en un point Ω et ayant R pour rayon, alors ils sont orthogonaux si, et seulement si, on a
$$R^2 = \mathbf{p}_{\Gamma'}(\Omega).$$
En effet, si l'on appelle Ω' et R' le centre et le rayon de Γ', alors l'orthogonalité des deux cercles équivaut à $R^2 + R'^2 = \Omega\Omega'^2$, et le résultat est établi puisque $\mathbf{p}_\Gamma(M) = \Omega\Omega'^2 - R'^2$.

Un exemple intéressant de calcul de puissance est celui de $\mathbf{p}_\Gamma(H)$, où Γ est le cercle circonscrit à un triangle ABC et H en est l'orthocentre.



[36] Cela ne traduit rien de plus que la relation de PYTHAGORE dans le triangle $Mm\Omega$, rectangle en m.

Désignons par H_B le pied de la hauteur issue de B, et B' le point où cette hauteur recoupe Γ. On a donc $\mathbf{p}_\Gamma(H) = \overline{HB}\,\overline{HB'}$. Or, $\overline{HB'} = 2\overline{HH_B}$, car le symétrique de H par rapport au côté AC appartient à Γ ; ce symétrique est donc le point B'.

Enfin, $\overline{HB}\cdot\overline{HH_B} = \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HH_B} = \overrightarrow{HB}\cdot(\overrightarrow{HH_B} + \overrightarrow{H_BA})$.

Cela montre donc que $\mathbf{p}_\Gamma(H) = 2\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}$, ainsi que toutes les formules obtenues par permutation circulaire sur les sommets.

Nous compléterons cette formule à l'occasion de la correction d'un exercice, au **VI-6.2**.

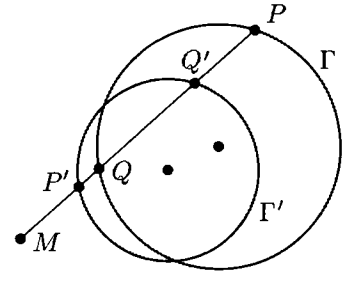
2.2. Cercles laissés stables par une inversion

Au **V-7.1**, nous avons décrit les *inversions géométriques* et le lecteur y trouvera les propriétés essentielles de ces transformations ; en l'absence d'ambiguïté dans l'actuelle section, nous les qualifierons tout simplement d'*inversions*.

Soit **I** l'inversion de pôle M et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ donnés. Soit un cercle Γ ne passant pas par M et Γ' son image par **I**, qui est également un cercle. *Nous établissons ici que*

$$\mathbf{p}_\Gamma(M) \times \mathbf{p}_{\Gamma'}(M) = k^2.$$

En effet, du point M menons une sécante PQ au cercle Γ. Posons $P' = \mathbf{I}(P)$ et $Q' = \mathbf{I}(Q)$. Nous avons $\overline{MP}\,\overline{MP'} = \overline{MQ}\,\overline{MQ'} = k$.



En outre, la droite $P'Q'$, qui coïncide avec la droite PQ, est une sécante menée de M à Γ'. On en déduit effectivement que $\mathbf{p}_\Gamma(M)\,\mathbf{p}_{\Gamma'}(M) = \overline{MP}\,\overline{MQ}\,\overline{MP'}\,\overline{MQ'} = k^2$.

Déterminons maintenant tous les cercles Γ *stables par* **I**. Il est immédiat que, si un cercle Γ est centré en M lui-même, et de rayon $R > 0$, alors Γ' est le cercle centré en M et de rayon $|k|/R$[37].

En conséquence, *le seul cercle centré en* M *et stable par* **I** *est celui dont le rayon vaut* $\sqrt{|k|}$.

Soit à présent un cercle non centré en M et ne passant pas non plus par M. Alors, *ce cercle est stable par* **I** *si, et seulement si, on a* $\mathbf{p}_\Gamma(M) = k$.

[37] Ne pas oublier que k peut être strictement négatif. À noter que k a la « dimension » du **carré** d'une longueur, de même d'ailleurs que la puissance d'un point par rapport à un cercle.

De la formule $\mathbf{p}_\Gamma(M)\,\mathbf{p}_{\Gamma'}(M) = k^2$ nous tirons la condition nécessaire

$$\Gamma' = \Gamma \Longrightarrow \mathbf{p}_\Gamma(M) = \pm k\,.$$

Supposons dans un premier temps que $\mathbf{p}_\Gamma(M) = k$. Si P est un point de Γ, alors la droite MP recoupe Γ en un point Q, avec $Q = P$ si MP est tangente à Γ. Comme on a $\overline{MP}\,\overline{MQ} = \mathbf{p}_\Gamma(M) = k$, on a $Q = \mathbf{I}(P)$.

Comme on a choisi P arbitraire sur Γ, cela montre que $\mathbf{I}(\Gamma) \subset \Gamma$; comme $\mathbf{I}$ est une involution, cela montre que $\Gamma \subset \mathbf{I}(\Gamma)$ et donc que $\mathbf{I}(\Gamma) = \Gamma$.

Si, au contraire, on a $\mathbf{p}_\Gamma(M) = -k$, montrons que $\Gamma' \neq \Gamma$, ce qui achèvera la démonstration.

Appelons $\mathbf{I}'$ l'inversion de pôle le point M et de rapport $-k$. Il est immédiat que $\mathbf{I} = \sigma \circ \mathbf{I}'$, où σ est la symétrie centrale par rapport à M. Comme $\mathbf{p}_\Gamma(M) = -k$, on a $\mathbf{I}'(\Gamma) = \Gamma$ et donc $\mathbf{I}(\Gamma) = \sigma(\Gamma) \neq \Gamma$, cqfd.

En d'autres termes, si l'on se donne un cercle Γ centré en un point Ω et de rayon $R > 0$, les inversions laissant Γ stable sont les suivantes :
- *les inversions de pôle Ω et de rapport $\pm R^2$* [38] ;
- *pour tout point $M \notin \Gamma \cup \{\Omega\}$, l'inversion de pôle M et de rapport $\mathbf{p}_\Gamma(M)$.*

Remarque. Avec les notations précédentes, soit un point $M \notin \Gamma \cup \{\Omega\}$ et l'inversion $\mathbf{I}$ de pôle M et de rapport $\mathbf{p}_\Gamma(M)$. Que dire de l'application $\mathbf{i}$ de Γ sur lui-même induite par $\mathbf{I}$?

Nous venons de voir que, si P est un point de Γ, $\mathbf{I}(P)$ est le point de Γ où la droite MP recoupe ce cercle. Or, au **V-5.4**, nous avons appelé cette application l'*involution de Frégier* de centre M (relative au cercle Γ) et, dans le cas du cercle-unité, nous avons vu qu'elle est induite sur Γ par une homographie h.

Or, cette homographie n'est pas $\mathbf{I}$, qui est une *anti* homographie. Donnons-en une expression ici. Supposons pour cela que Γ est centré en O, l'origine du repère, mais ne supposons pas que $R = 1$ (cette hypothèse avait été faite au chapitre **V**, car elle conduisait à des expressions plus simples, sans pour autant nuire à la généralité).

Soit a l'affixe du point M ; le rapport de l'inversion est alors $k = \mathbf{p}_\Gamma(M)$, c'est-à-dire $OM^2 - R^2$, soit encore $\overline{a}a - R^2$. Soit z l'affixe du point générique $P \in \Gamma$ et Z celui de son image $\mathbf{I}(P)$; on a $Z - a = (\overline{a}a - R^2)/\overline{(z-a)}$, soit encore $Z = \dfrac{a\overline{z} - R^2}{\overline{z} - \overline{a}}$.

Nous n'avons pas pour l'instant une expression homographique. En revanche, si nous multiplions haut et bas par $-z$, on a, sachant que $\overline{z}z = R^2$

[38] Celle de rapport $+R^2$ laisse fixes tous les points de Γ (d'ailleurs Γ est l'ensemble des points fixes de $\mathbf{I}$) et celle de rapport $-R^2$ induit sur Γ la symétrie de centre Ω.

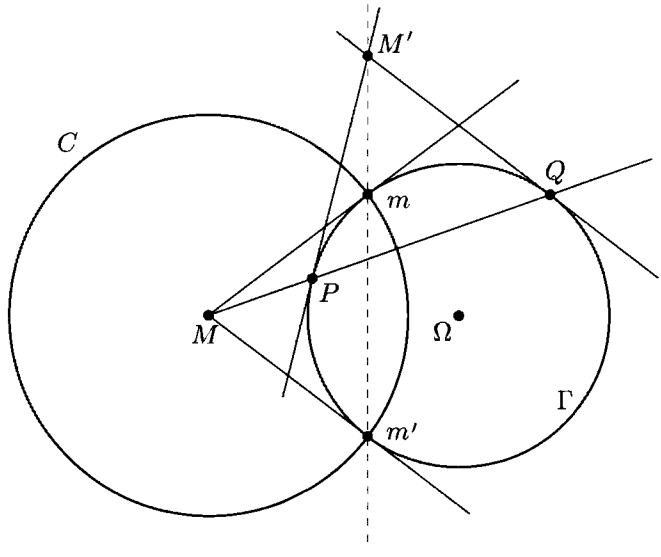
puisque $P \in \Gamma$,

$$Z = \frac{R^2 z - aR^2}{\bar{a}z - R^2},$$

qui est, cette fois, de la forme attendue.

Comme toute involution de FRÉGIER, **i** possède zéro ou deux points fixes dans Γ[39]. Si le point M appartient au disque ouvert de frontière Γ, $k = \mathbf{p}_\Gamma(M)$ est strictement négatif, et **I** n'a aucun point fixe. *A fortiori*, son induit **i** n'en a pas non plus.

Dans le cas contraire, on a $k > 0$ et l'ensemble des points fixes de **I** est le cercle C de centre M et de rayon $\sqrt{k}$ (au chapitre **V**, nous l'avons appelé le *cercle* de l'inversion **I**). Puisque, du point M, on peut mener à Γ deux tangentes qui le touchent en des points m et m', on a $Mm^2 = Mm'^2 = M\Omega^2 - R^2 = k$, de sorte que les points m et m' sont sur C. Ce sont donc deux points fixes de **i**, et il n'y en a pas d'autres.



La figure montre la construction des points fixes m et m' de **i** lorsque M est extérieur à Γ. Si $P \in \Gamma$ et $Q = \mathbf{I}(P)$, alors le quadrangle $mm'PQ$ est harmonique (voir au **V-9.5.6**). Sur la figure, on peut retrouver la propriété comme il suit : les tangentes à Γ en m et en m' se coupent au point M qui est aligné avec P et Q. Le quadrangle $mm'PQ$ est donc bien harmonique. À noter que la droite mm' est la polaire de M par rapport à Γ.

---

[39] Ici, on peut le constater directement : si $\mathbf{I}(P) = P$, alors $z = \dfrac{R^2 z - aR^2}{\bar{a}z - R^2}$ et z est solution d'une équation du second degré.

2.3. L'axe radical de deux cercles

Nous avons déjà défini cette droite au **II-2.13** *; ici, nous allons en donner un éclairage différent grâce à la notion de puissance par rapport à des cercles.*

Nous énonçons donc : *soit deux cercles* Γ *et* Γ' *définis par des équations formelles non proportionnelles. L'ensemble des points* M *tels que* $\mathbf{p}_\Gamma(M) = \mathbf{p}_{\Gamma'}(M)$ *est une droite, éventuellement réduite au point* ∞ [40]. *On l'appelle l'*axe radical *des cercles* Γ *et* Γ'.

Pour établir cela, nous écrivons $\Gamma = \mathbf{C}_V$ et $\Gamma' = \mathbf{C}_{V'}$, où les vecteurs $V = (a, b, c, 1)$ et $V' = (a', b', c', 1)$ sont normalisés et, vu nos hypothèses, distincts. Rappelons que nous définissons les centres Ω et Ω' de ces cercles, même s'ils sont vides ; leurs coordonnées respectives sont (a, b) et (a', b').

On a alors tout de suite l'égalité fonctionnelle $\mathbf{p}_\Gamma - \mathbf{p}_{\Gamma'} = \mathbf{P}_{V-V'}$. Comme $V - V' \in \mathrm{Ker}(\tau)$, l'ensemble Δ des M tels que $\mathbf{p}_\Gamma(M) = \mathbf{p}_{\Gamma'}(M)$ est bien une droite.

D'ailleurs, une équation de Δ est $(a - a')X + (b - b')Y - \dfrac{c - c'}{2} = 0$. Cela montre que Δ est une droite si, et seulement si, $\Omega \neq \Omega'$, c'est-à-dire si, et seulement si, Γ et Γ' ne sont pas concentriques. S'ils le sont au contraire, alors $\Delta = \{\infty\}$. Lorsque $\Omega \neq \Omega'$, l'équation obtenue pour Δ montre aussi que Δ est orthogonale à la droite $\Omega\Omega'$.

Supposons maintenant Γ et Γ' non vides et non concentriques, de rayons respectifs R et R'. Si M est un point du plan, on a alors

$$\mathbf{p}_\Gamma(M) - \mathbf{p}_{\Gamma'}(M) = \Omega M^2 - \Omega' M^2 - (R^2 - R'^2)\,.$$

Désignons par ω le milieu du segment $\Omega\Omega'$; on a, pour tout point M,

$$\Omega M^2 - \Omega' M^2 = 2\big(\overrightarrow{\Omega\Omega'} \,\big|\, \overrightarrow{\omega M}\big)\,.$$

Ainsi, Δ est aussi l'ensemble des points M tels que $\big(\overrightarrow{\Omega\Omega'} \,\big|\, \overrightarrow{\omega M}\big) = \dfrac{R^2 - R'^2}{2}$.

Nous retrouvons là le fait que Δ est orthogonale à la droite $\Omega\Omega'$; nous remarquons aussi que Δ passe par ω si, et seulement si, les cercles sont de même rayon [41].

Nous retrouvons maintenant la construction de l'axe radical de deux cercles distincts non vides *qui a été donnée au* **II-2.13**.

Soit deux cercles non vides $\Gamma \neq \Gamma'$, de centres Ω et Ω' ; nous remarquons que tout point commun éventuel M à ces deux cercles est sur leur axe radical. En effet, pour un tel point, on a $\mathbf{p}_\Gamma(M) = \mathbf{p}_{\Gamma'}(M) = 0$.

[40] Rappelons que cette droite particulière a été appelée la *droite-point à l'infini*.

[41] Que cette condition soit *suffisante* était clair, pour des raisons de symétrie.

Si les deux cercles sont sécants en M et M', l'axe radical est la droite MM'. S'ils sont tangents en un point M, leur axe radical est leur tangente commune en M ; en effet, il passe par M et est orthogonal à la droite $\Omega\Omega'$.

Reste le cas de deux cercles disjoints. Reportons-nous à la figure de la page **81** ; la construction y est décrite, à l'aide de deux cercles auxili aires Γ_1 et Γ_2. Maintenant, à la lumière de ce qui précède, le principe est sans doute plus clair : les droites m_1m_2 et $m_1'm_2'$ sont les axes radicaux respectifs de (Γ, Γ_1) et de (Γ', Γ_1). Leur point d'intersection M_1 vérifie donc par construction $\mathbf{p}_\Gamma(M) = \mathbf{p}_{\Gamma_1}(M)$ et $\mathbf{p}_{\Gamma'}(M) = \mathbf{p}_{\Gamma_1}(M)$.

Donc, $\mathbf{p}_\Gamma(M) = \mathbf{p}_{\Gamma'}(M)$, de sorte que M_1 est sur l'axe radical Δ de Γ et de Γ'. Ensuite, le second cercle auxiliaire Γ_2 fournit un second point de Δ.

D'ailleurs, puisque nous savons désormais que la droite Δ est orthogonale à la droite $\Omega\Omega'$, un cercle auxiliaire aurait suffi, la connaissance de l'un des deux points M_1 ou M_2 suffisant pour le tracé de cette droite.

Remarque 1. Soit trois cercles Γ, Γ' et Γ'' de centres respectifs Ω, Ω' et Ω'' (distincts et) non alignés. Alors, il existe un unique point Ω_0 qui ait même puissance par rapport à ces trois cercles. On l'appelle le *centre radical* de ces trois cercles.

En effet, les axes radicaux Δ' et Δ'' des cercles Γ et Γ' d'une part, Γ et Γ'' d'autre part, sont concourants, puisqu'orthogonaux aux droites non parallèles $\Omega\Omega'$ et $\Omega\Omega''$ respectivement. Soit Ω_0 leur point de concours. On a donc $\mathbf{p}_\Gamma(\Omega_0) = \mathbf{p}_{\Gamma'}(\Omega_0)$ et $\mathbf{p}_\Gamma(\Omega_0) = \mathbf{p}_{\Gamma''}(\Omega_0)$, de sorte que Ω_0 a même puissance par rapport à ces trois cercles. En outre, ce point est *unique* puisqu'il est *nécessairement* le point de concours de Δ' et de Δ''.

Dans la construction précédente, le point M_1 est le centre radical des cercles Γ, Γ' et Γ_1 et il appartient *a fortiori* à l'axe radical de Γ et Γ'.

Remarque 2. Aussi bien au **II-2.13** que dans cette section, c'est par *soustraction* des équations de deux cercles que l'on obtient celle de leur axe radical, qui est une droite. Comme ces équations de ces cercles ne sont définies qu'à une constante multiplicative non nulle près, il s'est agi les deux fois de les mettre sous une forme telle qu'elles « diffèrent » de l'équation d'une droite.

Cette mise en forme s'est révélée plus naturelle ici. Faut-il s'en étonner ? C'est bien sûr le contraire qui eût été étonnant : le choix d'une représentation euclidienne est évidemment plus adaptée aux manipulations d'équations de cercles, alors que les équations barycentriques se sont montrées plus « généralistes », pour ce qui concernait les coniques en général, et les coniques circonscrites en particulier.

Voici à présent un exercice, consistant en trois questions.

Exercice. Birapport et cocyclicité.

a) Dans un plan euclidien, on donne des points M, N, N', P, P' distincts ; on suppose les alignements MNN' et MPP' sur deux droites distinctes. On suppose en outre que

$$\overline{MN}\cdot\overline{MN'} = \overline{MP}\cdot\overline{MP'}\,.$$

Montrer que les points N, N', P, P' sont cocycliques. [*Indication : montrer que le cercle circonscrit à $NN'P$ passe aussi par P'.*]

b. Soit une conique $\mathscr{C}$ et un point $M \notin \mathscr{C}$. On mène de M trois sécantes distinctes à $\mathscr{C}$, qui la coupent en N, N', P, P', Q, Q'. On suppose enfin que

$$\overline{MN}\cdot\overline{MN'} = \overline{MP}\cdot\overline{MP'} = \overline{MQ}\cdot\overline{MQ'}$$

Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle.

c. Étudier la possibilité de placer sur une conique $\mathscr{C}$ six points distincts N, N', P, P', Q, Q' tels que les points P, P', Q, Q' soient sur un même cercle Γ, que Q, Q', N, N' soient sur un même cercle Γ' et que N, N', P, P' soient sur un même cercle Γ'', ces trois cercles devant être tous distincts.

Le corrigé de la totalité de cet exercice se trouve en fin de chapitre.

3. Faisceaux de cercles

Les faisceaux de cercles *sont des cas particuliers de faisceaux de coniques. Toutefois, comme un cercle contient nécessairement les points cycliques du complété projectif complexe de notre plan affine euclidien, il ne restera plus que deux points de base (ou un point de base double) à fixer. Certaines propriétés des faisceaux de cercles dépendront donc essentiellement de la* réalité *des points de base.*

3.1. Définition et classification

Au **VI-1.3**, nous avons désigné par $\mathscr{P}$ l'espace vectoriel (de dimension 4) des polynômes de la forme $\mathbf{P}_{a,b,c,t}$; nous avons également désigné par $\mathbb{P}_3$ l'espace projectif associé à cet espace vectoriel. On appelle alors *faisceau de cercles-droites* toute famille de cercles-droites dont les équations formelles appartiennent à une droite (projective) incluse dans $\mathbb{P}_3$ [42]. Cette terminologie étant un peu lourde, nous dirons plus simplement *faisceau de cercles* chaque fois que la famille en question ne sera pas un banal faisceau de droites : ce cas particulier peut se présenter, vu notre définition, et nous

[42] Si on veut éviter de parler de *droite projective*, on pourra dire qu'un faisceau de cercles est un ensemble de cercles-droites de la forme $\mathbf{C}_V$, où $V \neq 0$ décrit un plan vectoriel $\mathscr{V}$ de $\mathbb{R}^4$.

verrons qu'il n'y a pas lieu de l'exclure, ce afin de ne pas restreindre la généralité des énoncés sur les faisceaux orthogonaux.

En vertu de notre définition, l'ensemble des équations formelles des cercles-droites d'un faisceau est de la forme

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0\,,$$

où P_1 et P_2 sont deux éléments non proportionnels donnés dans $\mathscr{P}$, et où le couple (λ_1, λ_2) décrit $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Cette droite projective est bien de « dimension » 1, bien qu'elle soit décrite à l'aide des **deux** paramètres λ_1 et λ_2. En effet, deux couples proportionnels (λ_1, λ_2) et (λ_1', λ_2') dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définissent deux équations formelles proportionnelles, donc définissent le même cercle-droite.

Nous allons classifier les faisceaux de cercles à l'aide des droites qu'ils contiennent et, secondairement, à l'aide des cercles-points qu'ils contiennent. Cela pourrait paraître artificiel, mais cette disjonction de cas traduit toutes les configurations géométriques représentées par les faisceaux de cercles.

Avant toute chose, remarquons que si un faisceau de cercles est défini à l'aide des équations formelles $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$, on ne change pas la famille de cercles-droites en remplaçant les polynômes P_1 et P_2 par des polynômes P_1' et P_2' tels que $\mathrm{Vect}\,(P_1', P_2') = \mathrm{Vect}\,(P_1, P_2)$.

Nous avons désigné par τ la forme linéaire qui à $\mathbf{P}_{a,b,c,t} \in \mathscr{P}$ associe $t \in \mathbb{R}$. Envisageons un faisceau $\mathscr{F}$ de cercles-droites défini par les équations formelles $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$ comme *supra*. Plusieurs cas sont possibles.

Cas I. Si P_1 et P_2 sont dans $\mathrm{Ker}\,\tau$, alors $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ est dans $\mathrm{Ker}\,\tau$ quels que soient λ_1 et λ_2. Le faisceau de cercles-droites « dégénère » en un faisceau linéaire de droites.

On sait alors que $\mathscr{F}$ est, soit l'ensemble des droites passant par un point donné du plan euclidien (on parle alors de *faisceau de droites concourantes*), soit l'ensemble des droites ayant une direction donnée (on parle alors de *faisceau de droites parallèles*)[43].

Nous désignerons respectivement par **I.A** et **I.B** ces deux types de faisceaux de droites.

Dans tous les cas qui suivent, $\mathscr{V} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Vect}\,(P_1, P_2)$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}\,\tau$: l'intersection de ces deux sous-espaces vectoriels est donc de dimension 0 ou 1. Or, la première de ces deux valeurs est exclue puisque la somme des dimensions de ces espaces, savoir $2 + 3$, excède strictement celle de $\mathscr{P}$. Donc, $\mathscr{V} \cap \mathrm{Ker}\,\tau$ est une droite vectorielle Δ.

[43] Dans le cadre projectif, ces deux notions s'unifient : un faisceau de droites parallèles devient un faisceau de droites passant par un point donné, mais à l'infini.

Cas II. Si l'on a $\Delta = \mathrm{Vect}(P_\infty)$, avec $P_\infty = \mathbf{P}_{0,0,1,0}$, alors on peut compléter $\{P_\infty\}$ en une base (P, P_∞) de $\mathscr{V}$. Le polynôme P n'étant pas dans $\mathrm{Ker}\,\tau$, on peut supposer qu'il est de la forme

$$P(X,Y) = (X-a)^2 + (Y-b)^2 + c\,.$$

L'équation générale d'un cercle-droite élément de $\mathscr{F}$ est donc

$$\lambda_1\big((X-a)^2 + (Y-b)^2 + c\big) + \lambda_2 = 0\,.$$

Les valeurs non nulles de λ_1 fournissent alors l'équation générale des cercles centrés au point Ω de coordonnées (a,b). Pour $\lambda_1 = 0$ (et $\lambda_2 \neq 0$), on obtient la droite-point à l'infini [44].

Dans le cas ainsi décrit, nous dirons que $\mathscr{F}$ est un *faisceau de cercles concentriques*. À noter que ces cercles sont sans point réel lorsque $\lambda_1 \neq 0$ et $c + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$, d'où encore une fois l'intérêt de faire apparaître le caractère *formel* d'une équation de cercle-droite.

À noter également que l'axe radical de deux cercles de $\mathscr{F}$ est la droite-point à l'infini, voir au **VI-2.3**, c'est-à-dire effectivement encore un élément de $\mathscr{F}$.

Cas III. Dans le cas restant à décrire, Δ est de la forme $\mathrm{Vect}(P_2')$, avec P_2' de la forme $\mathbf{P}_{a',b',c',0}$ où $(a',b') \neq (0,0)$. On pourra donc supposer que $\mathscr{V} = \mathrm{Vect}(P_1, P_2')$, avec P_1 tel que

$$P_1(X,Y) = (X-a)^2 + (Y-b)^2 + c\,.$$

La droite d'équation $P_2'(X,Y) = 0$ est élément de $\mathscr{F}$; quitte à effectuer un changement de repère, on peut toujours supposer que cette droite est l'axe Oy. Quitte à effectuer un second changement de repère conservant l'axe Oy, on peut aussi supposer que le cercle $\mathbf{C}_{P_1}$ est centré sur l'axe Ox.

Les éléments de $\mathscr{F}$ ont donc une équation formelle générale de la forme

$$\lambda_1\big((X-a)^2 + Y^2 + c\big) + \lambda_2 X = 0\,.$$

Cherchons les éventuels cercles-points du faisceau $\mathscr{F}$. Puisqu'une équation formelle n'est définie qu'à un coefficient multiplicateur non nul près, cherchons les cercles-points d'équation formelle

$$(X-a)^2 + Y^2 + c - 2\mu X = 0\,.$$

La mise sous forme canonique de cette équation fournit $(X-a-\mu)^2 + Y^2 = (a+\mu)^2 - (a^2+c)$. On obtient donc un cercle-point si, et seulement si, $(a+\mu)^2 = (a^2+c)$.

[44] Tout se passe comme si cette droite-point était la figure-limite que l'on obtient en faisant tendre vers $+\infty$ le rayon d'un cercle centré en Ω. Le faisceau $\mathscr{F}$ contient également un cercle-point (et un seul) dans l'acception classique du terme : il s'agit du cercle-point $\{\Omega\}$.

Nous avons donc les trois sous-cas suivants.

Cas III.A. Lorsque $a^2 + c > 0$, $\mathscr{F}$ possède deux cercles-points à distance finie. On les obtient pour les deux valeurs suivantes de μ : $\mu_1 = -a + \sqrt{a^2 + c}$ et $\mu_2 = -a - \sqrt{a^2 + c}$. Ils ont pour équations formelles respectives $\underbrace{(X - a - \mu_1)^2 + Y^2}_{P_1'(X,Y)} = 0$ et $\underbrace{(X - a - \mu_2)^2 + Y^2}_{P_2'(X,Y)} = 0$. Donc, P_1' et P_2' sont des éléments non proportionnels de $\mathscr{V}$, et l'on a aussi $\mathscr{V} = \mathrm{Vect}\,(P_1', P_2')$.

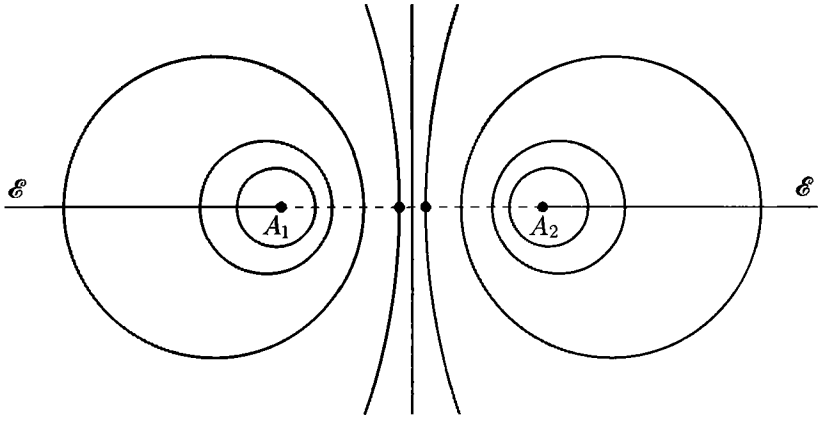
En outre, appelons A_1 et A_2 les points de coordonnées respectives $(a+\mu_1, 0)$ et $(a + \mu_2, 0)$; pour tout point M de coordonnées (x, y), on a $P_1'(x, y) = A_1M^2$ et $P_2'(x, y) = A_2M^2$. Une autre façon d'écrire l'équation générique d'un cercle-droite de $\mathscr{F}$ est donc $\lambda_1' A_1M^2 + \lambda_2' A_2M^2 = 0$.

Pour $\lambda_1'\lambda_2' > 0$, un tel cercle-droite est vide, c'est le cercle-point $\{ A_1 \}$ pour $\lambda_2' = 0$ et $\lambda_1' \neq 0$, et le cercle-point $\{ A_2 \}$ pour $\lambda_1' = 0$ et $\lambda_2' \neq 0$. Enfin, pour $\lambda_1'\lambda_2' < 0$, ce cercle-droite est le cercle d'APOLLONIUS défini par l'équation $A_2M/A_1M = k$, avec $k = \sqrt{-\lambda_1'/\lambda_2'}$ [45].

En d'autres termes, les cercles-droites du faisceau $\mathscr{F}$ sont les cercles d'APOLLONIUS divisant le segment donné A_1A_2 dans tous les rapports possibles. Toutefois, la terminologie retenue pour un tel faisceau ne mentionne pas ce mathématicien Grec : le faisceau $\mathscr{F}$ est appelé le *faisceau à points de* PONCELET A_1 et A_2, ou encore le *faisceau à points-limites* A_1 et A_2.

Il est immédiat que la médiatrice de A_1A_2 est l'axe radical de deux quelconques des cercles du faisceau, aussi l'appelle-t-on l'*axe radical* du faisceau $\mathscr{F}$. Nous venons de voir que cet axe radical est lui-même élément du faisceau.

La figure qui suit représente quelques-uns des cercles-droites d'un tel faisceau.



[45] Rappelons qu'il s'agit d'une droite, la médiatrice du segment A_1A_2, lorsque $k = 1$.

Le centre du cercle d'APOLLONIUS d'équation $A_2M/A_1M = k$, avec $k \neq 1$, est le barycentre de $(A_1, -k^2)$ et de $(A_2, 1)$, voir au **V-9.4**. De cela suit que le centre d'un tel cercle appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$ formé de la droite A_1A_2 [46] privée de l'intervalle ouvert $]A_1, A_2[$. Lorsque k décrit $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, l'ensemble de ces barycentres décrit $\mathscr{E}$ tout entier. Au **VI-3.3**, nous verrons comment construire effectivement le cercle du faisceau centré en un point donné Ω de $\mathscr{E}$.

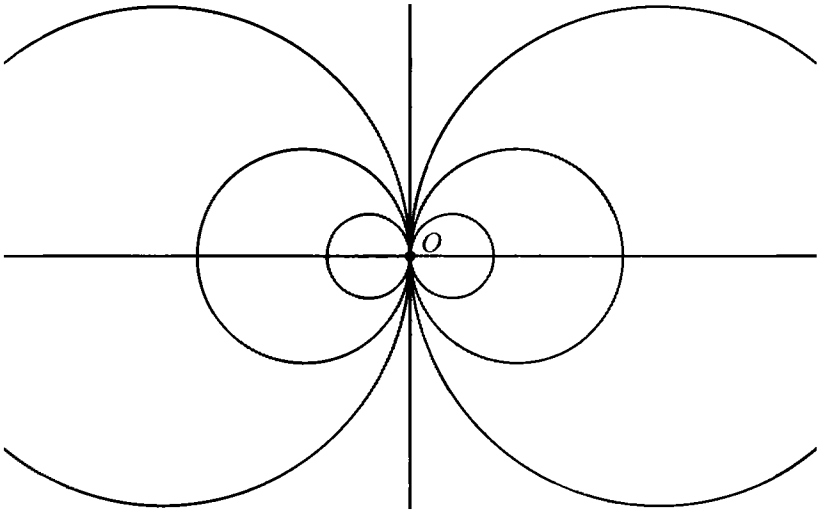
Cas III.B. Lorsque $a^2 + c = 0$, $\mathscr{F}$ contient exactement un cercle-point, obtenu cette fois pour la valeur $\mu = -a$.

Ce cercle a pour équation formelle $X^2 + Y^2 = 0$ et il est donc réduit à l'origine O du repère. Nous allons vérifier que $\mathscr{F}$ est l'ensemble des cercles-droites tangents en O à l'axe Oy, en convenant que cette définition inclut également le cercle-point $\{O\}$ et l'axe Oy.

En effet, l'équation formelle générique d'un élément de $\mathscr{F}$ autre que Oy est maintenant $(X - a - \mu)^2 + Y^2 = (a + \mu)^2$. Il s'agit d'un cercle centré en un point de Ox et passant par O. Ce cercle est bien tangent en O à Ox. Inversement, tout cercle tangent en O à Ox a bien une équation de cette forme.

Nous parlerons dans ce cas d'un *faisceau de cercles tangents*. L'axe radical de deux cercles du faisceau est leur tangente commune, appelée encore l'*axe radical* du faisceau. Le lieu des centres est l'axe Ox, tout entier cette fois.

La figure qui suit représente quelques-uns des cercles-droites d'un tel faisceau.



[46] C'est-à-dire ici l'axe Ox, vu le choix de notre repère.

Cas III.C. Lorsque $a^2 + c < 0$, $\mathscr{F}$ ne contient aucun cercle-point. Néanmoins, cette fois, le cercle $\mathbf{C}_{P_1'}$ coupe l'axe Oy en les deux points distincts B_1 et B_2 de coordonnées respectives $(0, \sqrt{-a^2 - c})$ et $(0, -\sqrt{-a^2 - c})$.

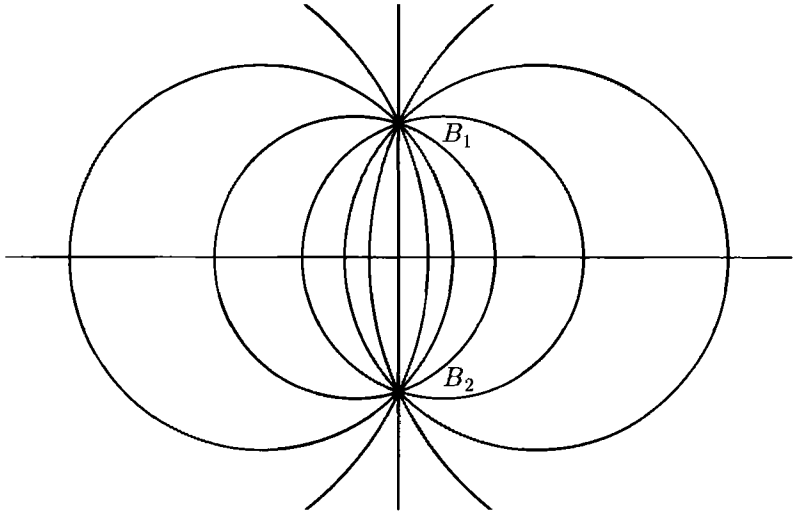
Ainsi, tous les éléments de $\mathscr{F}$ passent par ces deux points puisque leurs coordonnées, annulant séparément P_1' et P_2', annulent aussi toute combinaison linéaire de ces deux polynômes.

Montrons alors que $\mathscr{F}$ est l'ensemble des cercles-droites passant par B_1 et B_2. En effet, il reste à vérifier que tout cercle-droite passant par ces deux points est élément de $\mathscr{F}$. C'est bien le cas pour l'axe Oy. Quant à un cercle passant par ces deux points, il est centré sur Ox (qui est la médiatrice de B_1B_2) et a de ce fait une équation de la forme $X^2 + Y^2 - 2\alpha X + \beta = 0$. Comme il passe par B_1, on a $\beta = a^2 + c$ et on peut écrire l'équation du cercle sous la forme

$$(X - a)^2 + Y^2 + c + 2(a - \alpha)X = 0,$$

ce qui est effectivement une combinaison linéaire des équations formelles $\mathbf{E}_{P_1'}$ et $\mathbf{E}_{P_2'}$.

Nous parlerons cette fois d'un *faisceau à points de base*, les points B_1 et B_2 étant appelés les *points de base* de $\mathscr{F}$. Le lieu des centres des cercles de $\mathscr{F}$ est l'axe Ox tout entier. L'axe radical de deux cercles du faisceau est l'axe Oy, appelé encore l'*axe radical* du faisceau. La figure qui suit représente quelques-uns des cercles-droites d'un tel faisceau.



Dans une note de bas de page du paragraphe **IV-1.2**, nous avons évoqué les faisceaux de coniques les plus généraux. Faisons le lien ici avec les faisceaux de cercles : si nous considérons un plan euclidien réel comme plongé dans le plan

projectif *complexe* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, alors nous caractérisons les cercles comme les coniques passant par les points cycliques I et J. Les faisceaux de cercles à points de base A et B sont maintenant les faisceaux des coniques passant par I, J, A et B : ce sont des faisceaux (de coniques) à quatre points de base.

Il en va de même des faisceaux à points de PONCELET, mais les quatre points de base sont alors tous *complexes*. Par exemple, les cercles du faisceau à points de PONCELET de coordonnées cartésiennes $(1,0)$ et $(-1,0)$ ont pour équations formelles (en coordonnées homogènes)

$$\lambda(X^2+Y^2+1)+\mu XT=0\,,$$

avec $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ et passent tous, outre par les points cycliques, par les points de coordonnées homogènes $(\mathrm{i},0,1)$ et $(-\mathrm{i},0,1)$.

Enfin, les faisceaux de cercles tangents sont des cas particuliers de faisceaux de coniques tangentes.

Exercice. Des équations bien symétriques.

Nous terminons cette section par un exercice, proposé en substance à la sagacité de certains candidats à l'oral de l'École polytechnique, en 2006. Il sera corrigé en fin de chapitre.

Dans un plan euclidien orienté P, on donne un triangle ABC non rectangle[47], on désigne par O le centre du cercle circonscrit à ABC et par H l'orthocentre. Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, on désigne par $\mathscr{C}_\lambda$ l'ensemble des points $M\in P$ vérifiant l'équation $\mathscr{E}_\lambda$:

$$\frac{\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}+\frac{\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}+\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}=\lambda\,.$$

Établir que la famille des $\mathscr{C}_\lambda$ est un faisceau de cercles concentriques, que $\mathscr{C}_1$ est le cercle circonscrit au triangle et que $\mathscr{C}_{-1}$ passe par H.

3.2. Propriétés algébriques des faisceaux

Ici, la forme quadratique fondamentale joue un rôle essentiel, et nous allons établir en particulier des situations géométriques *qui sont en fait la traduction de la signature de cette forme quadratique.*

Nous avons vu, dans la section précédente, que les équations formelles des cercles-droites d'un faisceau décrivent un plan $\mathscr{V}$ (privé du polynôme nul) inclus dans $\mathscr{P}$. En outre, si σ désigne la projection de $\mathscr{P}\setminus\{0\}$ sur $\mathbb{P}_3$, alors $\sigma(\mathscr{V}\setminus\{0\})$ est une droite projective $\Delta\subset\mathbb{P}_3$. Enfin, nous avons désigné par $\mathscr{Q}$ la quadrique projective d'équation homogène $X^2+Y^2-ZT=0$ dans $\mathbb{P}_3$.

[47] Cette hypothèse sert seulement à garantir la non-nullité des dénominateurs intervenant dans les diverses expressions.

Avant d'en venir à l'étude algébrique des faisceaux, il nous reste à introduire une notion importante, celle de faisceau *orthogonal* à un faisceau donné. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{P}$, nous avons, au **VI-1.2**, désigné par F° son orthogonal vis-à-vis de la forme polaire de q (que nous appellerons pour simplifier son orthogonal *vis-à-vis de* q) et nous avons vu que la dimension de F° vérifie la relation

$$\dim(F) + \dim(F^\circ) = \underbrace{\dim(\mathscr{P})}_{=4}.$$

Ainsi, si $\mathscr{V}$ est un plan vectoriel, son orthogonal $\mathscr{V}^\circ$ en est un aussi. Si $\mathscr{F}$ est le faisceau défini comme ensemble des $\mathbf{C}_V$, où V décrit $\mathscr{V} \setminus \{0\}$, alors le *faisceau orthogonal* $\mathscr{F}^\circ$ est l'ensemble des $\mathbf{C}_W$, où W décrit $\mathscr{V}^\circ \setminus \{0\}$.

De façon plus géométrique, $\mathscr{F}^\circ$ est défini comme l'ensemble des cercles-droites orthogonaux à *tous* les éléments de $\mathscr{F}$.

Nous allons à présent interpréter algébriquement la classification des faisceaux de cercles-droites.

Cas I. Nous savons que le plan $\mathscr{V}$ est inclus dans l'hyperplan d'équation $T = 0$ dans $\mathscr{P}$. Les deux sous-cas rencontrés se distinguent par la signature de $q_{\mathscr{V}}$, où q désigne la forme quadratique fondamentale.

Soit un faisceau $\mathscr{F}$ de droites concourantes. Supposons le repère choisi de sorte que ces droites concourent en O. L'équation générale des droites de $\mathscr{F}$ est alors $-2\lambda_1 X - 2\lambda_2 Y = 0$ [48], de sorte que ces droites sont de la forme $\mathbf{D}_{\lambda_1,\lambda_2,0,0}$. Or, $q(\mathbf{P}_{\lambda_1,\lambda_2,0,0}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$. La signature de $q_{\mathscr{V}}$ est donc $(2,0)$. *Le fait que* $q_{\mathscr{V}}$ *est définie positive traduit le fait que toutes les droites d'un tel faisceau sont réelles et non réduites à un point.*

En d'autres termes, la droite projective Δ ne rencontre pas $\mathscr{Q}$ puisque $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$ ne s'annule que pour le couple (λ_1, λ_2) nul.

Soit un faisceau $\mathscr{F}$ de droites parallèles. Supposons le repère choisi de sorte que ces droites soient les parallèles à Ox. L'équation générale des droites de $\mathscr{F}$ est alors $-2\lambda Y + \mu = 0$, de sorte que ces droites sont de la forme $\mathbf{D}_{0,\lambda,\mu,0}$. Or, $\mathbf{P}_{0,\lambda,\mu,0} = \lambda^2$. La signature de $q_{\mathscr{V}}$ est donc $(1,0)$.

Cette fois, la droite Δ rencontre $\mathscr{Q}$ en son point à l'infini et $q_{\mathscr{V}}$ est positive, mais non définie positive. *Le fait que* $q_{\mathscr{V}}$ *s'annule pour* $\lambda = 0$ *traduit le fait que* $\mathbf{D}_{0,0,1,0}$ *est « dégénérée ».*

Se distinguant vis-à-vis de q, les deux sous-types du type **I** se distinguent aussi par leurs orthogonaux : *alors que l'orthogonal d'un faisceau de type* **I.B** *est un faisceau du* même *type, l'orthogonal d'un faisceau du type* **I.A** *est un faisceau du type* **II**.

[48] Avec $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$.

En effet, supposons le repère choisi de sorte que $\mathscr{F}$, du type **I.B**, soit défini par les équations $-2\lambda Y + \mu = 0$. Alors, le cercle-droite $\mathbf{C}_{a,b,c,t}$ appartient à $\mathscr{F}^\circ$ si, et seulement si, on a

$$0 \times a + \lambda \times b + \frac{\mu \times t + 0 \times c}{2} = 0,$$

pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Cela équivaut à $b = t = 0$; le faisceau orthogonal cherché est donc l'ensemble des $\mathbf{C}_{a,0,c,0}$, où (a, c) décrit $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Ce faisceau est l'ensemble des droites parallèles à l'axe Oy et il est bien du type annoncé.

Un calcul en tout point analogue établit que, si $\mathscr{F}$ est l'ensemble des droites d'équation $-2\lambda_1 X - 2\lambda_2 Y = 0$, alors $\mathscr{F}^\circ$ est l'ensemble des cercles d'équation formelle $\lambda(X^2 + Y^2) + \mu = 0$: c'est l'ensemble des cercles-droites centrés à l'origine, et il est lui aussi du type annoncé.

Cas II. Lorsque $\mathscr{F}$ est un faisceau de cercles concentriques, supposons le repère choisi de sorte que l'origine soit le centre commun à ces cercles. L'équation formelle générale des éléments de $\mathscr{F}$ est alors $\lambda_1(X^2+Y^2)+\lambda_2 = 0$ et l'élément général de $\mathscr{F}$ est donc de la forme $\mathbf{C}_{0,0,\lambda_2,\lambda_1}$. Or, pour le vecteur $(0, 0, \lambda_2, \lambda_1)$, la forme quadratique fondamentale q prend la valeur $-\lambda_1\lambda_2$.

La signature de $q_{\mathscr{V}}$ est donc $(1, 1)$: q prend donc des valeurs positives, la valeur 0 et des valeurs négatives; le faisceau contient par conséquent des cercles réels, deux cercles-points (si l'on compte la droite-point à l'infini) et des cercles sans points réels.

Encore une fois, un calcul simple montre que le faisceau orthogonal $\mathscr{F}^\circ$ est alors du type **I.B** : c'est le faisceau des droites passant par O.

Au vu de l'étude des ces deux cas, nous énonçons déjà : *si $\mathscr{F}$ est le faisceau des droites parallèles à une direction donnée, son orthogonal est celui des droites de direction orthogonale. Si $\mathscr{F}$ est le faisceau des droites concourant en Ω, son orthogonal est celui des cercles-droites centrés en ce point. Si $\mathscr{F}$ est le faisceau des cercles-droites centrés en Ω, son orthogonal est celui des droites concourant en ce point.*

Cas III.A. Si $\mathscr{F}$ est le faisceau à points de PONCELET A et B, supposons le repère choisi de sorte que ces points aient pour coordonnées $(0, \alpha)$ et $(0, -\alpha)$, avec $\alpha \neq 0$. Alors, l'équation formelle générale des éléments de $\mathscr{F}$ est

$$\lambda_1(X^2 + Y^2 + \alpha^2) - 2\lambda_2 Y = 0.$$

En effet, une base de $\mathscr{V}$ est formée des polynômes $P_1(X, Y) = X^2+(Y-\alpha)^2$ et $P_2(X, Y) = X^2 + (Y + \alpha)^2$ de sorte qu'une base de cet espace est aussi formée des polynômes $\dfrac{P_1 + P_2}{2}$ et $\dfrac{P_1 - P_2}{2\alpha}$.

Ainsi, ces cercles-droites sont donc les $\mathbf{C}_{0,\lambda_2,\alpha^2\lambda_1,\lambda_1}$. La forme q prend sur ces vecteurs les valeurs $\lambda_2^2 - \alpha^2\lambda_1^2$, et $q_{\mathscr{V}}$ est donc de signature $(1, 1)$. Là

Cette figure illustre géométriquement trois des situations qui viennent d'être décrites. Nous savons qu'un faisceau s'interprète comme une droite projective dans l'espace $\mathbb{P}_3$; nous savons aussi que le centre d'un cercle $\mathbf{C}_{a,b,c,t}$ (avec $t \neq 0$) a pour coordonnées $(a/t, b/t)$. Nous avons identifié naturellement l'espace affine canonique $\mathbb{R}^3$ avec une partie de $\mathbb{P}_3$ en identifiant le triplet (a, b, c) avec le point de coordonnées homogènes $(a, b, c, 1)$ de $\mathbb{P}_3$. Ainsi, l'application qui à $\mathbf{E}_{a,b,c,1}$ associe son centre, de coordonnées $(a/1, b/1)$ s'interprète comme la projection canonique de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, que nous appellerons xOy.

Dans $\mathbb{P}_3$, oublions les points à l'infini et oublions donc le point à l'infini d'un faisceau de type **II** ou **III**. Il nous reste une droite affine D et il est facile de vérifier que l'oubli de ce point à l'infini ne nous fait perdre que l'unique droite du faisceau, c'est-à-dire son axe radical. Pour ne pas compliquer nos notations, appelons toujours $\mathscr{F}$ un tel faisceau, même une fois débarrassé de son point à l'infini.

Un cercle $\mathbf{E}_{a,b,c,1}$ est de rayon > 0, de rayon nul ou sans point réel si, et seulement si, respectivement on a $a^2 + b^2 - c > 0$, $a^2 + b^2 - c = 0$ ou $a^2 + b^2 - c < 0$; cela signifie qu'à un point M de D « sous » la quadrique affine $\mathscr{Q}_0$ d'équation $X^2 + Y^2 - Z = 0$, ou élément de cette quadrique, correspond un cercle non vide du faisceau, et dont le centre est la projection orthogonale de M sur xOy.

Le faisceau $\mathscr{F}$ est de type **II** si, et seulement si, la droite D est verticale. Tous les points de D ont la même projection sur xOy (c'est normal : il s'agit d'un faisceau de cercles *concentriques*). Enfin, les points de D correspondant à un cercle non vide forment une demi-droite, c'est-à-dire l'ensemble des points de D situés « sous » $\mathscr{Q}_0$.

Si le faisceau $\mathscr{F}$ est de type **III**, la droite D n'est pas verticale. Elle peut alors rencontrer la quadrique en zéro, un ou deux points selon, respectivement, que $\mathscr{F}$ contient zéro, un ou deux cercles-points. Cela discrimine donc respectivement les sous-cas **III.C**, **III.B** et **III.A**.

Dans le cas **III.B**, il y a contact de D et de $\mathscr{Q}_0$ puisque l'intersection est réduite à un point double. Dans le cas **III.A**, une partie de D est intérieure à la quadrique, ce qui explique que l'ensemble des centres des cercles réels de $\mathscr{F}$ n'est pas une droite entière, mais seulement la partie non pointillée sur la figure. Moins intéressant, le cas **III.C**, où D et $\mathscr{Q}_0$ sont disjointes, n'a pas été représenté.

Remarque 1. Au **VI-1.4**, nous avons établi que deux cercles-droites $\mathbf{C}_P$ et $\mathbf{C}_{P'}$ sont respectivement sécants, tangents ou disjoints selon que la restriction de la forme quadratique fondamentale à $\mathscr{V} = \mathrm{Vect}(P, P')$ admet pour signature $(2,0)$, $(1,0)$ ou $(1,1)$.

Cela confirme notre classification des faisceaux de cercles-droites : ceux de type **I.A** ou **III.C** ont des éléments deux à deux sécants et la signature trouvée pour $q_{\mathscr{V}}$ est bien $(2,0)$. Pour le type **III.B**, on obtient $(1,0)$ et on peut considérer que le cas **I.B** donne le même résultat : l'intersection de deux droites parallèles est réduite au point à l'infini, qui peut être considéré comme cercle-point. Il est alors normal de considérer comme tangents deux cercles-droites dont l'intersection est un cercle-point, comme c'est le cas de deux vrais cercles tangents. Enfin, les types **II** et **III.A** correspondent à des éléments deux à deux disjoints : la signature est effectivement $(1,1)$.

Remarque 2. Si $\mathscr{V}$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$, on n'a pas toujours $\mathscr{V} \cap \mathscr{V}^\circ = \mathbb{R}^4$. Cette intersection est réduite à $\{0\}$ si, et seulement si, $q_{\mathscr{V}}$ est non dégénérée, c'est-à-dire de signature $(2,0)$ ou $(1,1)$[50]. Au contraire, si elle est égale à $(1,0)$ ou à $(0,1)$, on a $\mathscr{V} \cap \mathscr{V}^\circ \neq \{0\}$.

En termes de faisceaux, cela signifie que, si $\mathscr{F}$ est un faisceau de cercles-droites, alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}^\circ$ est *non vide* lorsque $\mathscr{F}$ est du type **I.B** ou du type **III.B**, et vide dans les autres cas.

En effet, si $\mathscr{F}$ est un faisceau de droites parallèles, alors la droite-point à l'infini appartient à ce faisceau et est orthogonale à toutes les droites de $\mathscr{F}$. De même, si $\mathscr{F}$ est le faisceau des cercles tangents à une droite Δ en un point A, alors le cercle-point $\{A\}$ est dans $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}^\circ$.

3.3. Quelques constructions relatives aux faisceaux

Comme dans le cas plus général des faisceaux linéaires de coniques, il reste un degré de liberté dans la famille des cercles d'un faisceau. Nous étudions ici l'existence de cercles d'un faisceau vérifiant une condition supplémentaire.

3.3.1. Cercle d'un faisceau passant par un point

Nous allons dans un premier temps nous demander comment construire le cercle-droite $\mathscr{C}$ d'un faisceau $\mathscr{F}$ donné passant par un point M donné du plan euclidien.

Il n'y a aucune difficulté à cela si $\mathscr{F}$ est, par exemple, un faisceau à points de base A et B : le problème revient tout bonnement à faire passer un cercle-droite par A, B et M et il s'agit donc du cercle circonscrit au triangle ABM lorsque M n'est pas sur la droite AB ou de la droite AB dans le cas contraire[51].

La construction ne présente guère plus de difficultés dans le cas d'un faisceau de cercles tangents, mais devient intéressante dans le cas d'un faisceau $\mathscr{F}$ à points de PONCELET, que nous appellerons A et B par exemple.

[50] La signature $(0,2)$ est exclue, du fait du théorème de SYLVESTER.

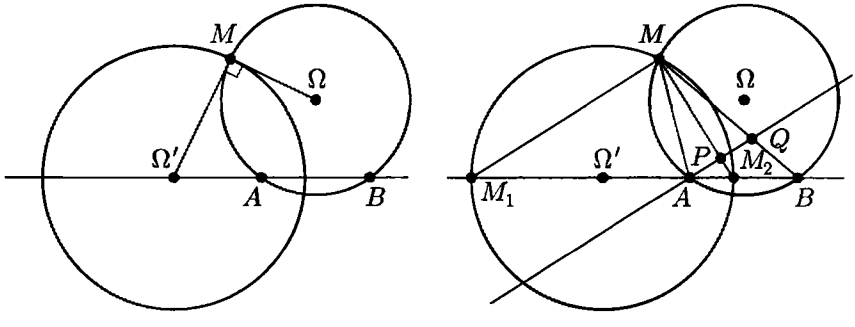
[51] Bien entendu, le problème est sans intérêt si $M \in \{A, B\}$.

La difficulté apparente provient du fait que, mis à part le point donné, on ne connaît aucun autre point du cercle à construire.

Le cercle-droite à construire est-il une droite ? La seule droite de $\mathscr{F}$ est la médiatrice de AB, et c'est donc le cercle-droite cherché si, et seulement si, le point M est sur cette médiatrice. Excluons maintenant ce cas particulier.

Pour traiter le cas général où M n'est pas sur la médiatrice de AB, faisons appel à l'astuce qui consiste à considérer le faisceau $\mathscr{F}^\circ$ orthogonal à $\mathscr{F}$: c'est le faisceau à points de base A et B ; si M n'est pas non plus sur la droite AB, le cercle circonscrit au triangle ABM est un cercle de $\mathscr{F}^\circ$; appelons Ω le centre de ce cercle.

Comme $\mathscr{C}$ passe par M et est orthogonal au cercle circonscrit ABM, son centre se situe sur la perpendiculaire en M à la droite ΩM, et il est en outre sur la droite AB. Vu nos hypothèses sur M, ces deux droites sont sécantes et nous en déduisons le centre Ω' du cercle $\mathscr{C}$. Connaissant le centre et un point de ce cercle, nous achevons la construction, comme sur la figure de gauche.



Avec les mêmes hypothèses, la figure de droite nous montre une autre construction possible : les bissectrices extérieure et intérieure issues de M dans le triangle MAB, qui ne sont pas parallèles à la droite AB, coupent cette dernière en des points M_1 et M_2. Le cercle $\mathscr{C}$ est alors le cercle de diamètre M_1M_2.

Voici deux démonstrations, l'une et l'autre faisant appel aux résultats du chapitre I.

La première consiste en un calcul de coordonnées barycentriques : appelons respectivement a, b et c les longueurs MB, MA et AB ; le centre I du cercle inscrit dans le triangle MAB est alors le barycentre du triplet (A, B, M) avec les masses respectives (a, b, c). La droite MI, bissectrice intérieure issue de M, coupe donc BC en le point M_2 barycentre du couple (A, B) avec les masses respectives (a, b). On a donc $\overline{AM_2}/\overline{BM_2} = -b/a$ et, de la même façon, $\overline{AM_1}/\overline{BM_1} = +b/a$.

De cela suit que M_1 et M_2 satisfont bien les égalités

$$AM_1/BM_1 = AM_2/BM_2 = AM/BM\,,$$

de sorte que ces deux points appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ et y sont diamétralement opposés, puisqu'alignés avec son centre.

D'ailleurs, on a

$$\frac{\overline{AM_2}/\overline{BM_2}}{\overline{AM_1}/\overline{BM_1}} = -1\,,$$

et cela montre que la division ABM_1M_2 est harmonique.

Passons à présent à une autre démonstration du même résultat : appelons M_1 et M_2 les points où le cercle $\mathscr{C}$ coupe AB ; nous avons établi au **V-9.4** que la division ABM_1M_2 est harmonique. En outre, les droites MM_1 et MM_2 sont orthogonales puisque M_1M_2 est un diamètre de $\mathscr{C}$.

Inspirons-nous du même principe que celui utilisé au début du **IV-2.3.2** : la parallèle en A à MM_1 coupe MM_2 en P et MB en Q ; si M_∞ est le point à l'infini de la droite MM_1, la division $AQM_\infty P$ est harmonique, comme l'était ABM_1M_2.

Le point P étant le conjugué harmonique par rapport à AQ du point à l'infini de la droite AQ (parallèle à MM_1), on en déduit que P est le milieu du segment AQ. La droite MP est à la fois une hauteur et une médiane du triangle AMQ et c'en est donc aussi la bissectrice (intérieure) issue de M. L'autre bissectrice est donc la droite MM_1 et cela justifie la construction.

Lorsque le point M est au contraire sur AB, les constructions précédentes échouent et nous procédons alors comme il suit : si M est le milieu du segment AB, alors $\mathscr{C}$ est encore une fois la médiatrice de ce segment. Si M est distinct de ce milieu, ainsi que des points A et B eux-mêmes, on construit le point M' de la droite AB tel que la division $ABMM'$ soit harmonique (voir la construction de ce conjugué à la fin du **II-2.7**). Le cercle $\mathscr{C}$ est alors le cercle de diamètre MM'. Cela résulte des résultats généraux du **V-9.4.**

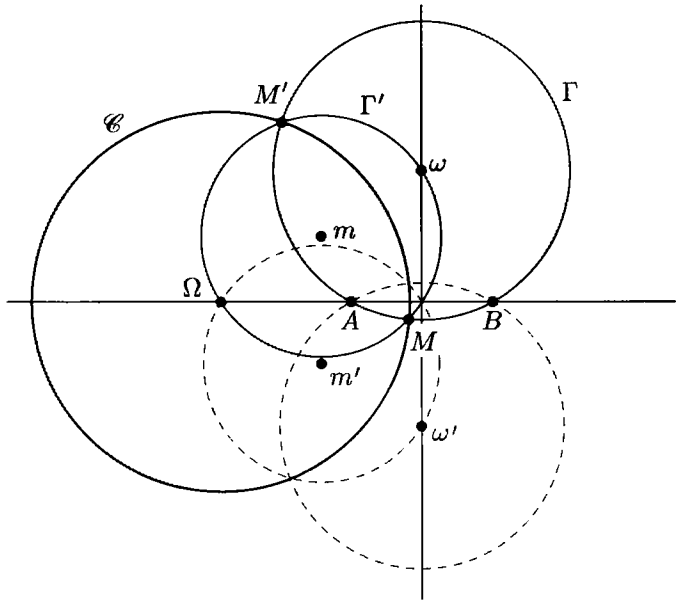
3.3.2. Cercle d'un faisceau ayant un centre donné

Imposer la position du centre d'un cercle revient en fait à imposer deux conditions et non pas une seule, puisque cela revient à fixer deux *coefficients dans l'équation normalisée de ce cercle. En d'autres termes, l'existence d'un cercle d'un faisceau donné ayant un centre donné n'est pas garantie. Ce n'est d'ailleurs pas pour rien que le lieu des centres des cercles d'un faisceau n'est pas le plan tout entier, mais seulement une portion de droite.*

Encore une fois, il n'y a aucune gloire à savoir construire le cercle d'un faisceau à points de base A et B et centré en un point Ω donné (sur la

médiatrice de AB, faute de quoi le cercle n'existerait pas). Le cas d'un faisceau de cercles tangents n'est guère passionnant, lui non plus.

En revanche, comment construire le cercle $\mathscr{C}$ du faisceau $\mathscr{F}$ à points de PONCELET A et B et centré en un point Ω donné ? Vu ce que nous savons, ce cercle existe si, et seulement si, Ω est situé sur la droite AB, mais privée du segment $[A, B]$.



Comme on le voit sur cette figure, nous mettons à contribution le faisceau orthogonal $\mathscr{F}^\circ$, qui est le faisceau à points de base A et B : si nous choisissons un point ω sur la médiatrice du segment AB qui est la droite des centres du faisceau $\mathscr{F}^\circ$, nous pouvons tracer le cercle Γ centré en ω et passant par A et B. Le cercle $\mathscr{C}$ cherché est le cercle orthogonal à ce dernier et centré en Ω. Rappelons qu'il passe par les points d'intersection M et M' de Γ et du cercle Γ' de diamètre $\omega\Omega$. Le choix d'un autre centre ω' conduit à des points d'intersection différents, mais le cercle obtenu est bien entendu le même.

Remarquons également que le rayon R du cercle $\mathscr{C}$ vérifie $R^2 = \overline{\Omega A} \cdot \overline{\Omega B}$. C'est une conséquence de la dernière propriété vue à la fin du **VI-2.1**. On peut la vérifier aussi directement en choisissant comme point ω le milieu de AB ; on a alors avec ce choix $R^2 = \omega\Omega^2 - \omega A^2$ et le résultat s'ensuit.

3.3.3. Cercles d'un faisceau tangents à une droite donnée

Une fois encore, limitons-nous aux faisceaux linéaires $\mathscr{F}$ pour lesquels le problème est non trivial : celui des faisceaux à points de base ou ceux à

points de PONCELET. Nous envisageons d'abord la première forme ; l'étude, analogue, de la seconde forme sera laissée sous forme d'exercice corrigé.

On donne donc deux points de base A et B (distincts), et une droite Δ ; remarquons que le problème se formule aussi sans référence à la notion de faisceau : *construire les cercles $\mathscr{C}$ passant par A et B et tangents à Δ.*

Il se peut qu'aucun cercle passant par ces deux points ne soit tangent à Δ. C'est le cas par exemple lorsque les points A et B sont de part et d'autre de la droite Δ [52].

Le problème ne présente ni intérêt ni difficulté lorsque Δ passe par A ou par B et nous allons de ce fait supposer que A et B appartiennent à un même demi-plan *ouvert* de frontière Δ.

Désignons par $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ les paraboles de directrice Δ et de foyers respectifs A et B. Nous allons établir qu'*un point Ω du plan est le centre d'un cercle répondant au problème si, et seulement si, c'est un point d'intersection de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{P}'$.*

C'est effectivement nécessaire : si le cercle de centre Ω et de rayon R convient, la distance $A\Omega$ et la distance de Ω à Δ sont égales à R. Ainsi, $\Omega \in \mathscr{P}$ et, de même, $\Omega \in \mathscr{P}'$.

Inversement, soit $\Omega \in \mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$. Désignons alors par R la distance de Ω à Δ. On a alors les égalités de distances $A\Omega = B\Omega = R$. Tout cela établit que le cercle de centre Ω et de rayon R est tangent à Δ (par définition même de R), et passe par A et B. Remarquons que Ω est sur la médiatrice de AB et que, pour chaque point d'intersection, il existe un cercle et un seul vérifiant les propriétés attendues.

Nous supposerons aussi, dans un premier temps, que Δ n'est pas parallèle à la droite AB (mais étudierons quand même ce cas particulier). Nous établissons à présent que, vu les hypothèses faites, *l'intersection des paraboles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ consiste en exactement deux points.* Il existe donc exactement deux cercles tangents à Δ passant par A et B.

En effet, choisissons un repère orthonormé du plan tel que Δ soit l'axe Ox et que les coordonnées de A et de B soient respectivement de la forme (a, b) et $(-a, c)$ [53]. Puisque A et B sont dans un même demi-plan ouvert de frontière Δ, on a alors $bc > 0$ et, puisque Δ n'est pas parallèle à AB, on a établi que $c \neq b$.

[52] En effet, si *a contrario* un tel cercle existe, alors le segment AB est inclus dans le disque dont ce cercle est la frontière, et ce disque est lui-même situé dans un des demi-plans fermés limités par la droite Δ.

[53] Un tel repère existe : soit A' et B' les projections orthogonales de A et B sur Δ ; alors, l'origine O est le milieu de $A'B'$, l'axe Ox est la droite Δ et l'axe Oy la médiatrice de $A'B'$. L'orientation des axes est alors arbitraire.

Les paraboles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont pour équations cartésiennes respectives

$$(X-a)^2+(Y-b)^2=Y^2$$

et

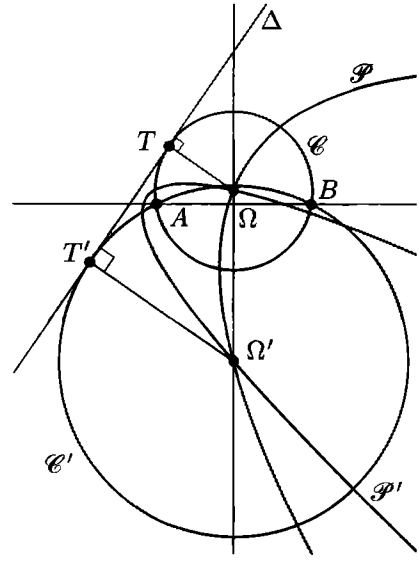
$$(X+a)^2+(Y-c)^2=Y^2.$$

On élimine Y entre ces deux équations en multipliant la première par c, la seconde par b et en soustrayant. L'abscisse d'un point d'intersection vérifie alors

$$\underbrace{(c-b)}_{\neq 0}X^2-2a(c+b)X+(a^2-bc)(c-b)=0\,.$$

Le discriminant réduit de cette équation de degré *effectif* 2 est égal à $(4a^2+(c-b)^2)bc$, strictement positif. Le résultat annoncé en découle immédiatement [54].

Le nombre de points d'intersection de deux coniques non dégénérées distinctes peut aller jusqu'à quatre. Ici, il s'abaisse à deux : la raison en est qu'une parabole est tangente à la droite de l'infini de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ en le point à l'infini de son axe. Ici, les deux paraboles ont même direction d'axe et sont donc tangentes en leur point à l'infini commun. Ce point compte pour deux dans le dénombrement évoqué *supra*. Le phénomène est analogue à celui observé pour les intersections de cercles : deux cercles (distincts) passent de toute façon par les points cycliques, et il ne leur reste donc *au plus* que deux points d'intersection réels.



En maintes circonstances, cette jolie construction nous aurait suffi, mais nous allons l'agrémenter d'une autre à la règle et au compas. L'étude précédente n'aura pas été inutile, qui a fourni le nombre de cercles solutions et une figure simple à interpréter. Ce qui suit va nous permettre d'approfondir la situation géométrique sous-jacente.

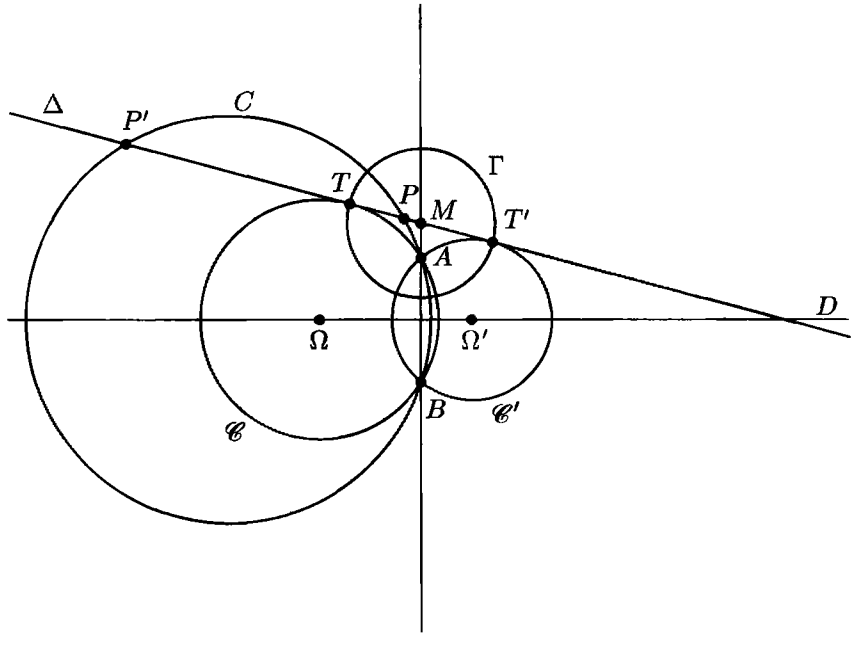
Encore une fois, nous faisons appel au faisceau orthogonal $\mathscr{F}^\circ$, pour lequel les points A et B sont des points de PONCELET. Appelons T le point de

[54] Remarquer qu'à chaque x solution de l'équation de cette dernière équation correspond un y et un seul vérifiant les équations des deux paraboles.

contact avec Δ d'un cercle $\mathscr{C}$ solution du problème et Γ le cercle de $\mathscr{F}^\circ$ passant par T. Comme Γ est une normale à ce dernier cercle, il est centré en un point M de Δ. Ce point M est donc l'intersection de Δ et de la droite AB.

Réciproquement, soit M le point d'intersection de Δ et de la droite AB. Si M est *entre* A et B, le problème n'a pas de solution puisqu'aucun cercle de $\mathscr{F}^\circ$ n'a son centre entre A et B. Si M n'appartient pas au segment AB, un seul cercle Γ de $\mathscr{F}^\circ$ est centré en M ; ce cercle coupe AB, qui en est un diamètre, en deux points T et T'. Soit alors $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles circonscrits respectivement à ABT et ABT' : ils appartiennent au faisceau $\mathscr{F}$ et sont orthogonaux à Γ en T et T' respectivement. Donc, ils sont tangents à Δ respectivement en ces deux points, et ce sont les cercles cherchés.

Dans la figure qui suit, tout en longueur, nous avons dû représenter AB verticalement :



Cette figure, mieux que la précédente, fait apparaître le rôle joué par le point M : c'est le milieu du segment TT' et il est aligné avec A et B. Le point M étant sur l'axe radical des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, le calcul qui suit confirme l'égalité des distances MT et MT' :

$$MT^2 = \mathrm{p}_{\mathscr{C}}(M) = \mathrm{p}_{\mathscr{C}'}(M) = MT'^2.$$

Si C est un autre cercle du faisceau $\mathscr{F}$ et qu'il coupe Δ en P et P', alors la division $TT'PP'$ est harmonique. Voici pourquoi : puisque l'on a $C \in \mathscr{F}$

et $\Gamma \in \mathscr{F}^\circ$, les cercles C et Γ sont orthogonaux. Ainsi, on a

$$\mathbf{p}_\Gamma(M) = \overline{MT}\cdot\overline{MT'} = -\mathbf{p}_{\mathscr{C}}(M) = -\overline{MP}\cdot\overline{MP'}\,.$$

Comme M est le milieu de TT', cela suffit pour établir le résultat [55].

Ce résultat est un cas particulier d'une propriété bien plus générale des *faisceaux linéaires de coniques* ; nous en avons vu des exemples au **IV-1**. Considérons une droite Δ ne passant par aucun point de base d'un faisceau $\mathscr{F}$ de coniques, c'est-à-dire telle que les coniques de $\mathscr{F}$ ne passent pas toutes par un même point de Δ. Soit alors un point P de Δ, éventuellement à l'infini ; par ce point passe alors une conique de $\mathscr{F}$ et une seule et cette conique recoupe Δ en un point P', éventuellement à l'infini ou éventuellement confondu avec P si la conique est tangente à Δ. L'application h qui à P associe P' est bien sûr involutive, et on vérifierait facilement que c'est une homographie de la droite Δ [56]. On l'appelle l'*involution de* DÉSARGUES induite par $\mathscr{F}$ sur Δ.

Nous sommes presque, mais seulement presque, dans la situation du **V-9.5.4** : le corps de base étant $\mathbb{R}$ et non $\mathbb{C}$, l'application h peut en effet ne pas avoir deux points fixes. Néanmoins, si elle en admet deux, T et T', alors $h(T) = T$ et $h(T') = T'$ de sorte que deux coniques de $\mathscr{F}$ sont tangentes à Δ, en T et en T' respectivement. En outre, comme au **V-9.5.4**, si $P \neq T \neq T'$ est un point de Δ et si $P' = h(P)$, alors le birapport $[T, T', P, P']$ est égal à -1, ce qui correspond bien à une division harmonique.

Notons que la possibilité d'absence de points fixes a été constatée dans l'étude *supra* : cela se produit lorsque A et B sont de part et d'autre de Δ.

Le cas particulier qu'il nous reste à traiter, celui du parallélisme entre Δ et AB, est un cas dégénéré du précédent. Avec les mêmes notations, on a que $b = c$, et l'abscisse d'un point d'intersection des paraboles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ est cette fois solution de l'équation du *premier* degré

$$\underbrace{(c-b)}_{=0}X^2 - 2a(c+b)X + (a^2 - bc)\underbrace{(c-b)}_{=0} = 0\,.$$

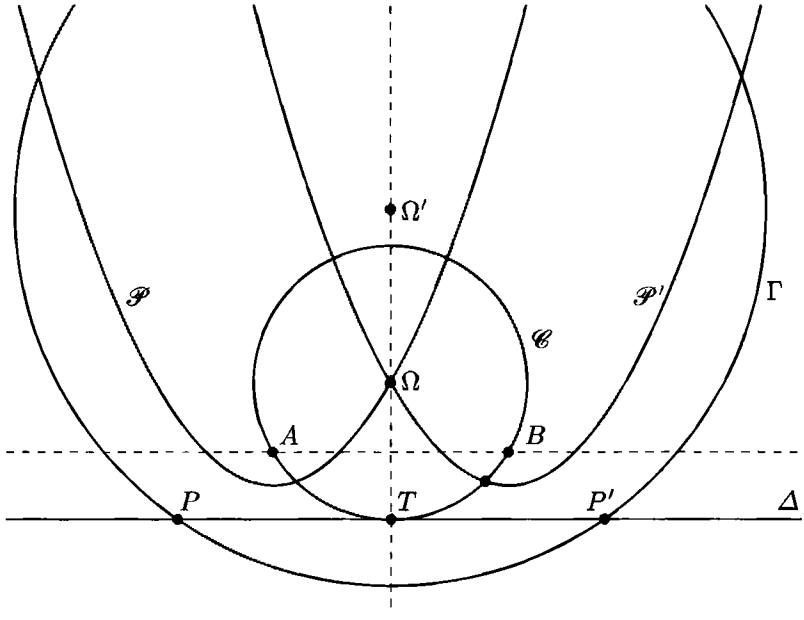
Nos deux paraboles ne se coupent plus qu'en un point Ω désormais, mais bien sûr toujours sur la médiatrice de AB.

Il n'y a plus qu'un seul cercle $\mathscr{C} \in \mathscr{F}$ tangent à Δ, en un point T, et l'involution de DÉSARGUES induite sur Δ est banalement la symétrie par

[55] Reprenons un calcul fait au **V-9.5.7** : choisissons un repère affine de la droite Δ ayant son origine en M et appelons (t, t', p, p') les abscisses des points T, T', P et P'. Comme dans la section citée, la division est harmonique si, et seulement si, on a $2(tt' + pp') = (t + t')(p + p')$. Comme $t + t' = 0$, cela équivaut à $tt' = -pp'$ et c'est bien ce que nous avons établi.

[56] C'est-à-dire une application de la droite Δ (complétée par son point à l'infini) sur elle-même, et qui conserve le birapport.

rapport à H, ce que résume la figure qui suit :



La droite AB elle-même est un cercle-droite du faisceau, et son centre est à l'infini sur la médiatrice de AB ; on peut considérer la droite AB comme tangente à Δ en leur point commun à l'infini. Tout se passe comme si le second point de contact T' était à l'infini sur Δ : c'est conforme avec notre description de l'involution de DÉSARGUES ; étant la symétrie par rapport à T admet alors T et T' comme points fixes.

Les deux exercices qui suivent seront corrigés en fin de chapitre.

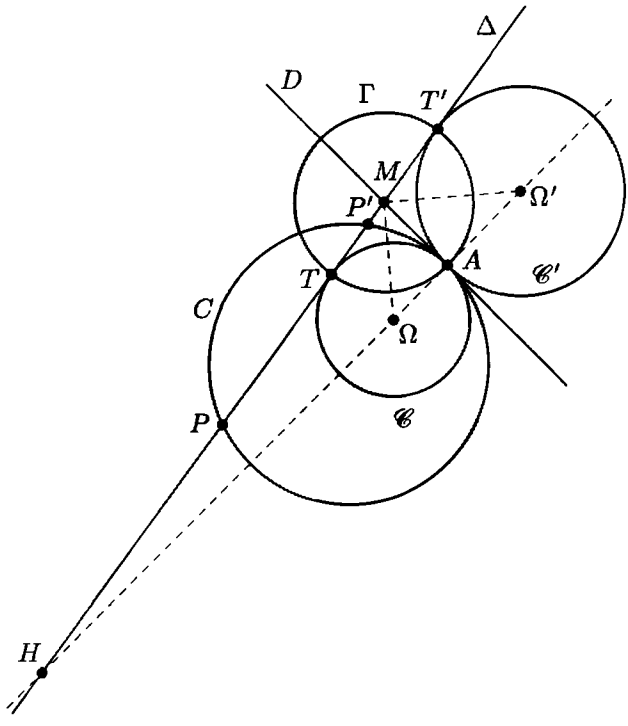
a. Étudier les cercles d'un faisceau $\mathscr{F}$ à points de PONCELET A et B tangents à une droite Δ. On se limitera au cas général : Δ n'est pas parallèle à AB et ne passe pas par A ni par B.

b. Deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, centrés en des points Ω et Ω', sont tangents extérieurement en un point A, la tangente commune en A à ces cercles étant appelée D. Une autre tangente commune à ces cercles, en des points T et T', coupe D en un point M et $\Omega\Omega'$ en un point H.

Montrer que l'on a l'égalité de distances $MA = MT = MT'$ et que le triangle $\Omega M\Omega'$ est rectangle en M. En déduire la valeur de la distance MA en fonction des rayons des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Montrer que les divisions $HA\Omega\Omega'$ et $HH'TT'$ sont harmoniques, où H' désigne la projection orthogonale de A sur Δ.

Un cercle C tangent en A à D coupe Δ en des points P et P'. Montrer que la division $TT'PP'$ est harmonique.



3.3.4. Centres d'homothétie et faisceaux

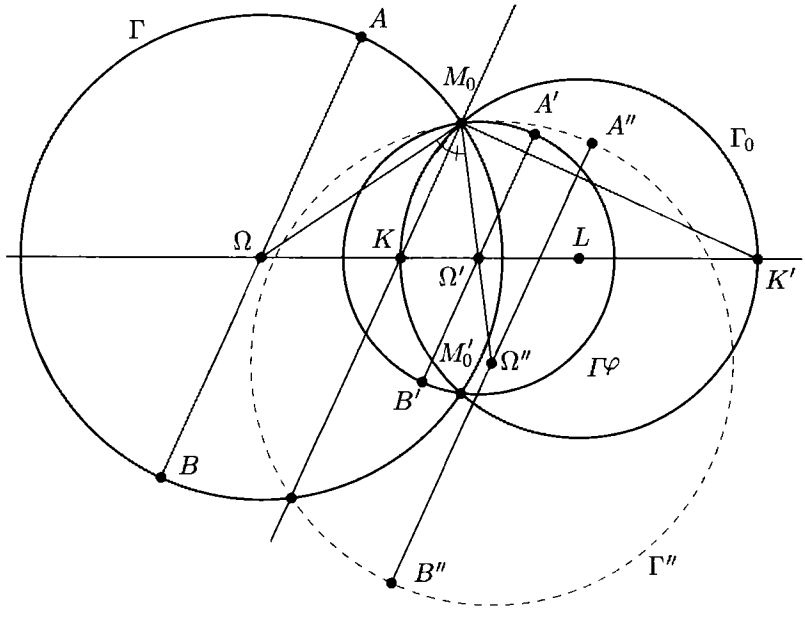
Dans cette section, nous justifions une construction des centres d'homothétie envoyant un cercle sur un cercle qui lui est sécant, en relation avec la notion de faisceau de cercles.

Supposons deux cercles Γ et Γ', centrés en des points distincts Ω et Ω' et de rayons distincts $R \neq R'$, sécants en deux points distincts M_0 et M_0'. On sait alors qu'il existe exactement deux homothéties qui envoient Γ sur Γ'. Les centres de celles-ci sont les points K et K' de la droite $\Omega\Omega'$ qui vérifient

$$\frac{\overline{K\Omega}}{\overline{K\Omega'}} = -\frac{R}{R'} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{K'\Omega}}{\overline{K'\Omega'}} = +\frac{R}{R'}.$$

Ainsi, le point K appartient au segment $\Omega\Omega'$ et le point K' lui est extérieur. En outre, on a $\Omega M_0 = \Omega M_0' = R$ et $\Omega' M_0 = \Omega' M_0' = R'$, de sorte que les quatre points K, K', M_0 et M_0' appartiennent au cercle d'Apollonius Γ_0 défini par l'équation $M\Omega/M\Omega' = R/R'$. Comme ce cercle coupe la droite $\Omega\Omega'$ en K et K', ces deux points sont diamétralement opposés. Cela montre que les angles KM_0K' et $KM_0'K'$ sont droits. Cela montre aussi que Γ_0

appartient au faisceau à points de base engendré par Γ et Γ'.



Les égalités *supra* entre quotients de longueurs orientées montrent que la division $\Omega\Omega' KK'$ est harmonique. Puisque, de plus, l'angle KM_0K' est droit, le même raisonnement qu'au **VI-3.3.1** montre que les droites M_0K et M_0K' sont les bissectrices (respectivement intérieure et extérieure) du triangle $\Omega\Omega' M_0$ au point M_0, ce qui autorise une construction des points K et K'.

Désignons par s la symétrie orthogonale par rapport à la droite M_0K ; l'image Ω'' de Ω par s est donc alignée avec M_0 et Ω'. Ainsi, le cercle $\Gamma'' = s(\Gamma)$ est tangent extérieurement en M_0 au cercle Γ' ; comme les rayons respectifs de ces deux cercles sont R et R', l'homothétie h de centre M_0 et de rapport R'/R envoie Γ'' sur Γ'. Nous avons donc construit une similitude (indirecte) de centre M_0 qui envoie Γ sur Γ' : c'est $\sigma = h \circ s$ [57].

Enfin, construisons, sur les cercles Γ et Γ', les diamètres AB et $A'B'$ parallèles à MK, de telle sorte que AB et $A'B'$ soient de même sens, comme sur la figure. Le segment $A''B'' = s(AB)$ est parallèle à AB, et donc aussi à $A'B'$. En outre, on a $A' = h(A'')$ et $B' = h(B'')$; de ce fait, $M_0A'A''$ et $M_0B'B''$ sont alignés et cela établit une dernière propriété de la figure :

[57] Le cercle Γ'' se déduit aussi de Γ par une rotation ϱ de centre M_0. Ainsi, la similitude directe $h \circ \varrho$ admet aussi M_0 comme centre et répond aussi au problème.

À noter que le lieu des centres des similitudes envoyant Γ sur Γ' est précisément le cercle Γ_0.

MK et MK' sont aussi les bissectrices au point M_0 des triangles AM_0A' et BM_0B'.

Remarque. Un mot sur le cas de deux cercles Γ et Γ' disjoints et de rayons distincts[58] : nous établissons que l'appartenance de Γ, Γ' et du cercle de diamètre KK' à un même faisceau subsiste, si K et K' désignent les centres des homothéties envoyant Γ sur Γ'. Cette fois, le faisceau est à points de PONCELET, puisque deux de ses cercles sont disjoints.

On peut toujours choisir un repère orthonormé du plan de telle sorte que $K = O$ et que Γ et Γ' soient centrés sur Ox. Dans ce cas, Γ a une équation cartésienne de la forme

$$(X-a)^2 + Y^2 - R^2 = 0.$$

Si k est le rapport de l'homothétie de centre O envoyant Γ sur Γ', on vérifiera qu'une équation de Γ' est

$$(X-ka)^2 + Y^2 - k^2R^2 = 0.$$

Le centre K' de la seconde homothétie est le conjugué harmonique de O par rapport aux centres Ω et Ω' des cercles. On trouvera comme coordonnées de ce point le couple $\left(\frac{2ka}{k+1}, 0\right)$. On notera que $k \neq \pm 1$, puisque les cercles sont de rayons différents.

Ainsi, le cercle de diamètre KK' a pour équation

$$X^2 + Y^2 - \frac{2ka}{k+1}X = 0.$$

On en déduit que ces trois cercles appartiennent à un même faisceau : en effet, la troisième de ces équations cartésiennes est combinaison linéaire des deux premières avec les coefficients $\frac{k^2}{k^2-1}$ et $\frac{-1}{k^2-1}$.

3.4. Action du groupe de MÖBIUS sur les faisceaux

3.4.1. Prolégomènes algébriques

Cette section fait suite au **VI-1.5** *; de ce fait, elle pourra être omise en première lecture. Tous les principes géométriques qui sont développés dans la section suivante y sont mis en œuvre de manière indépendante.*

Au **VI-3.2**, nous avons déterminé la signature de la restriction de la forme quadratique fondamentale q au plan $\mathscr{V}$ des équations formelles des cercles-droites d'un faisceau $\mathscr{F}$, Nous appellerons ici *signature* du faisceau $\mathscr{F}$ la signature de $q_{\mathscr{V}}$. Nous constatons à présent que, parmi les six types de faisceaux, on peut effectuer des groupements deux par deux de ceux qui ont même signature.

[58] Et nous laissons au lecteur le soin de faire les calculs analogues dans le cas de deux cercles de rayons distincts, mais tangents, et d'étudier également le cas de cercles distincts de même rayon.

- Les faisceaux de droites concourantes (type **I.A**) et les faisceaux à points de base (type **III.C**) ont pour signature $(2,0)$.
- Les faisceaux de cercles concentriques (type **II**) et les faisceaux à points de PONCELET (type **III.A**) ont pour signature $(1,1)$.
- Les faisceaux de droites parallèles (type **I.B**) et les faisceaux de cercles tangents (type **III.B**) ont pour signature $(1,0)$.

Considérons à présent l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$ muni de la forme quadratique q; si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ sont deux plans vectoriels tels que $q_{\mathcal{V}}$ et $q_{\mathcal{V}'}$ aient la même signature, alors le théorème de WITT[59], voir **[6]**, garantit qu'il existe f, endomorphisme q–orthogonal[60] de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathcal{V}' = f(\mathcal{V})$.

Choisissons un tel f; alors, f est *a fortiori* une similitude pour q, voir au **VI-1.5**, et, de ce fait, il existe une matrice $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $f = [M\diamond]$; pour la même raison, il existe également une matrice $M' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et un scalaire $\lambda' \neq 0$ tel que $f = [M'*]$.

Tout cela montre en particulier que, si deux faisceaux $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ ont la même signature, alors il existe une homographie h de $\mathbb{C}$, identifié à $\mathbb{R}^2$, et une antihomographie h' de $\mathbb{C}$ qui envoient l'ensemble des cercles-droites de $\mathscr{F}$ sur celui des cercles-droites de $\mathscr{F}'$.

Dans la section qui suit, nous allons expliciter de telles transformations.

3.4.2. Étude géométrique

Si h est une homographie de $\mathbb{C}$, et $\mathscr{F}$ un faisceau de cercles-droites, nous désignerons par $h(\mathscr{F})$ le faisceau *image* de $\mathscr{F}$ par h, c'est-à-dire le faisceau défini par les équations formelles $h \cdot \mathbf{E}_V$, où $\mathbf{E}_V$ décrit le plan $\mathcal{V}$ des équations formelles des éléments de $\mathscr{F}$.

Commençons par envisager les similitudes *euclidiennes* de $\mathbb{C}$, identifié à $\mathbb{R}^2$: elles sont définies par $s : \ z \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \longmapsto az + b$, où $a \neq 0$ et b sont des complexes.

Il est immédiat que le faisceau image $s(\mathscr{F})$ est du même type que $\mathscr{F}$. Par exemple, si $\mathscr{F}$ est du type **III.C** et admet A et B comme points de base, alors son image admet $s(A)$ et $s(B)$ comme points de base. De même, si $\mathscr{F}$ est l'ensemble des cercles tangents à une droite Δ en un point $A \in \Delta$, alors son image est l'ensemble des cercles tangents à la droite $s(\Delta)$ en le point $s(A)$.

Plus précisément, si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont deux faisceaux du même type, il existe au moins une similitude s telle que $\mathscr{F}' = s(\mathscr{F})$. Par exemple, si $\mathscr{F}$ est l'ensemble des cercles tangents à une droite Δ en un point $A \in \Delta$ et si $\mathscr{F}'$

[59] Ernst WITT était Allemand. On veillera donc à prononcer son nom *vitt* et non *ouitt*.
[60] C'est-à-dire tel que $q \circ f = q$.

est l'ensemble des cercles tangents à une droite Δ' en un point $A' \in \Delta'$, alors on choisit pour s une similitude qui envoie A sur A' et Δ sur Δ' [61].

Un énoncé analogue vaut pour chacun des cinq autres types de faisceaux.

Pour brouiller un peu mieux les cartes, c'est-à-dire échanger les types de faisceaux (en respectant les signatures, ce qui est obligatoire), il nous suffira de faire appel aux *inversions géométriques*.

Rappelons ce dont il s'agit [62] : l'inversion (géométrique) $\mathscr{I}$ de pôle $a \in \mathbb{C}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est l'involution qui échange a et ∞ et qui à $z \neq a \neq \infty$ associe Z défini par

$$(Z - a) \times (\overline{z - a}) = k\,.$$

On a donc, dans ce dernier cas, $Z = \dfrac{a\bar{z} + k - \bar{a}a}{\bar{z} - \bar{a}}$ et cela confirme que $\mathscr{I}$ est une *anti*homographie.

Si A, m et M sont les points d'affixes respectifs a, z et Z, avec $z \neq a \neq \infty$, alors le point M est l'unique point de la droite Am à vérifier $\overline{AM} \cdot \overline{Am} = k$. Nous dirons encore que $\mathscr{I}$ est l'inversion de pôle A et de rapport k.

Si D est une droite passant par A, elle est invariante par $\mathscr{I}$; si D est une droite ne passant pas par A, son image est un cercle passant par A et la perpendiculaire en A à D en est un diamètre.

Si Γ est un cercle passant par A, son image est une droite ne passant pas par A, perpendiculaire au diamètre de Γ passant par A. Enfin, si Γ est un cercle ne passant pas par A, son image est un cercle ne passant pas par A, et les centres de ces deux cercles sont alignés avec A.

Supposons A et k choisis ; comme on le voit, pour déterminer la nature de l'image par $\mathscr{I}$ d'un cercle-droite Γ, il suffit de savoir si cette image contient ou non ∞, c'est-à-dire si Γ passe ou non par A. De même, cette image passe par A si, et seulement si, Γ contient ∞.

Dès lors, si $\mathscr{F}$ est un faisceau de droites parallèles (type **I.B**) et $\mathscr{I}$ comme *supra*, alors la droite Δ_0 du faisceau qui passe par A est invariante par l'inversion, et les images de toutes les autres droites sont des *cercles* passant par A. Le faisceau $\mathscr{I}(\mathscr{F})$ n'est donc pas du type **I** et ne peut donc qu'être du type **III.B**, puisque sa signature reste $(1, 0)$. Effectivement, tout cercle de ce dernier faisceau passe par A et est tangent en ce point à Δ_0 (en effet, une droite $\Delta \in \mathscr{F}$ ne rencontre Δ_0 en aucun point à distance finie, et donc leurs images par **I** ne se rencontrent pas en un autre point que A).

En remplaçant $\mathscr{I}$ par $\hat{h} = s \circ \mathscr{I}$, où s est une similitude euclidienne bien choisie, on établit que, pour tout faisceau $\mathscr{F}$ du type **I.B** et tout faisceau $\mathscr{F}'$

[61] Et il en existe, ne serait-ce que $h = \varrho \circ \tau$, où τ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et ϱ *une* des rotations qui envoient $\tau(\Delta)$ sur Δ'.

[62] Se reporter au **V-9.3**.

du type **III.B**, il existe une antihomographie h envoyant le premier sur le second. Le résultat subsiste si on échange les rôles de ces deux faisceaux.

Le même raisonnement permet de traiter chacun des autres cas. Si $\mathscr{F}$ est le faisceau de type **I.A** des droites passant par un point M, alors il est invariant par $\mathscr{I}$ si $M = A$ et, sinon, son image est le faisceau à points de base A et $\mathscr{I}(M)$. La signature est respectée.

De même, si $\mathscr{F}$ admet M et M', différents de A, comme points de base, son image admet $\mathscr{I}(M)$ et $\mathscr{I}(M')$ comme points de base. Si, au contraire, $A = M \neq M'$, l'image est le faisceau des droites passant par $\mathscr{I}(M')$.

Bien entendu, pour tout faisceau du type **I.A** et tout faisceau du type **III.C**, il existe une antihomographie envoyant le premier sur le second, et une autre envoyant le second sur le premier.

Si $\mathscr{F}$ est le faisceau des cercles centrés en un point $\Omega \neq A$, alors un (et un seul) de ces cercles passe par A et son image est une droite. Les autres cercles ne passent pas par A et leurs images sont des cercles ; étant les images de cercles deux à deux disjoints, ce sont des cercles deux à deux disjoints.

Les seuls faisceaux contenant une droite et, à part elle, des cercles tous disjoints sont les faisceaux à points de PONCELET. Ici, les points A et Ω sont les seuls points du plan par lesquels ne passe aucun cercle de rayon > 0 de $\mathscr{I}(\mathscr{F})$ et ce sont donc les points de PONCELET du faisceau image.

Si $\mathscr{F}$ est le faisceau des cercles centrés en A lui-même, il est invariant par $\mathscr{I}$.

Enfin, si $\mathscr{F}$ est à points de PONCELET $M \neq M'$, distincts de A, son image admet $\mathscr{I}(M)$ et $\mathscr{I}(M')$ comme points de PONCELET. Si l'on a au contraire $A = M \neq M'$, alors l'image est le faisceau des cercles centrés en $\mathscr{I}(M')$.

Encore une fois, si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont des faisceaux donnés, l'un du type **I.A** et l'autre du type **III.C**, ou bien l'un du type **II** et l'autre du type **III.B**, il existe une antihomographie envoyant le premier sur le second et une autre envoyant le second sur le premier.

Pour retrouver sans difficulté le groupement des types de faisceaux deux par deux, on pourra les classifier selon le nombre de cercles-droites-points. Il n'y en a aucun dans un faisceau à points de base, ni dans un faisceau de droites concourantes ; il y en a un dans un faisceau de cercles tangents, ou dans un faisceau de droites parallèles (la droite-point à l'infini) et il y en a deux dans un faisceau à points de PONCELET *ainsi que dans un faisceau de cercles concentriques, l'un d'entre eux étant à l'infini.*

Exercice. Les réseaux de cercles.

Pour clore cette section, nous proposons l'exercice suivant, corrigé en fin de chapitre : on appelle *réseau* de cercles-droites, ou plus simplement *réseau*

tout ensemble de cercles-droites du type $\mathbf{C}_V$, où $V \neq 0$ décrit un sous-espace vectoriel $\mathscr{V}$ de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$.

a. On demande alors de classifier les réseaux et d'étudier l'action des inversions sur l'ensemble qu'ils constituent.

b. À titre d'exemple, en déduire que si l'on donne Γ, cercle de rayon > 0, et un point $M_0 \notin \Gamma$, alors l'ensemble des cercles-droites passant par M_0 et orthogonaux à Γ est un faisceau $\mathscr{F}$ du type **III.C** dont M_0 est l'un des points de base. Quel est alors l'autre point de base ? Décrire l'involution de DÉSARGUES induite par $\mathscr{F}$ sur un diamètre du cercle Γ.

3.4.3. Applications

Avant de voir avec quelle efficacité l'inversion permet l'étude de l'alternative de STEINER, *montrons quelle contribution elle apporte à des études plus simples. Il sera alors intéressant pour le lecteur de comparer ces méthodes avec celles mises en œuvre dans les constructions géométriques de ce paragraphe.*

a. Étant donné un faisceau à points de PONCELET A et B, et un point $M \neq A \neq B$, cherchons à construire le cercle-droite $\mathscr{C}$ du faisceau passant par M.

Soit $\mathscr{I}$ une inversion géométrique de pôle A ; alors, le faisceau image est le faisceau $\mathscr{F}'$ des cercles de centre $\mathscr{I}(B)$. Le cercle-droite $\mathscr{I}(\mathscr{C})$ est donc le cercle-droite $\mathscr{C}'$ de centre $\mathscr{I}(B)$ et passant par $\mathscr{I}(M) \neq \mathscr{I}(B) \neq \infty$.

Donc, le cercle-droite $\mathscr{C}$ cherché n'est autre que $\mathscr{I}^{-1}(\mathscr{C}')$, soit encore $\mathscr{I}(\mathscr{C}')$. Discutons-en la nature : $\mathscr{C}$ est un cercle si $\mathscr{C}'$ ne passe pas par A, et une droite dans le cas contraire. Or, $A \in \mathscr{C}'$ si, et seulement si, on a l'égalité de longueurs $\underbrace{\mathscr{I}(B)}_{B'} A = \mathscr{I}(B) \underbrace{\mathscr{I}(M)}_{M'}$.

En outre, vu la formule du **V-7.1**, on a

$$B'A = B'M' \iff \frac{k}{BA} = k\frac{BM}{AB \times AM} \iff AM = BM,$$

et cette dernière assertion équivaut à dire que M appartient à la médiatrice de AB.

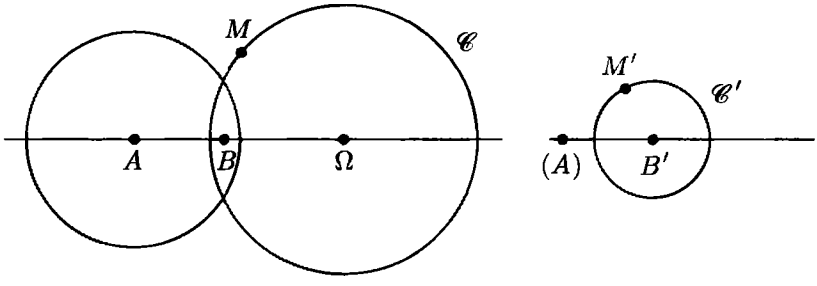
Dans la figure qui suit, nous avons représenté deux copies de $\mathbb{R}^2$: dans la demi-figure de gauche, les points A, B et M ainsi que le cercle $\mathscr{C}$ et, dans celle de droite, leurs images respectives par $\mathscr{I}$ [63].

C'est par souci de lisibilité que nous n'avons pas porté les points et leurs inverses sur la même figure. Toutefois, si l'on préfère voir dans ce qui suit

[63] Du moins, celles qui ne sont pas à l'infini ; il n'y a donc pas de point A'.

une figure unique, on peut la reconstituer en faisant subir à la figure de droite la translation qui amène le point noté (A) en A.

Les mêmes conventions seront valables dans toute cette section.

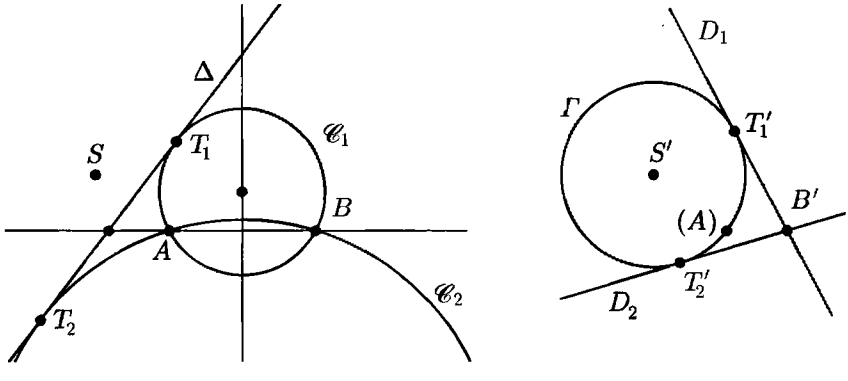


b. Reprenons à présent la recherche des cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, s'ils existent, passant par A et B, distincts donnés, et tangents à une droite Δ donnée ne passant pas par un de ces deux points et non parallèle à AB.

Appliquons à la figure une inversion $\mathscr{I}$ (géométrique) de pôle le point A. Le point B a une image B', et la droite Δ a pour image un cercle Γ passant par A. Le problème revient alors à trouver les droites D_1 et D_2 passant par B' tangentes à Γ, les cercles cherchés étant les images de ces droites par $\mathscr{I}$.

Sachant que $B' \notin \Gamma$ et selon que B' est intérieur ou extérieur à Γ, on obtient donc zéro ou deux droites, et il y a donc zéro ou deux cercles répondant à la question.

Comme le centre S' de Γ est l'image par $\mathscr{I}$ du symétrique S de A par rapport à Δ [64], on vérifie facilement que l'existence de deux cercles solutions équivaut au fait que Δ ne rencontre pas le segment AB, équivalence que nous avons déjà établie.



[64] Voir la fin du **V-9.3.**

4. L'alternative de STEINER

Nous nous proposons d'étudier ici l'existence d'une chaîne fermée de cercles tangents[65] *et qui soient également tangents à deux cercles donnés.* L'alternative de Steiner *réside en le fait que, soit une telle chaîne n'existe pas, soit il en existe une infinité.*

4.1. Les coniques reviennent

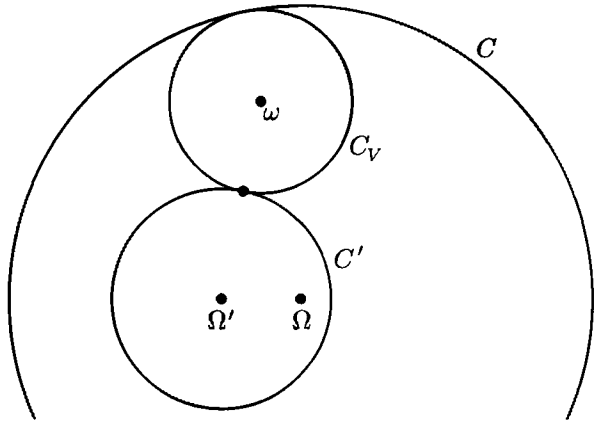
De peur de lasser le lecteur, qui a **déjà dégusté** des coniques à toutes les sauces dans les chapitres **II**, **III** et **IV**, nous n'avons guère mis au menu de ce chapitre que des droites et des cercles[66]. Pourtant, les coniques réapparaissent dans l'exemple qui suit, à la faveur de leur équation bifocale.

Si nous nous donnons deux cercles C et C', de rayon > 0, étudions l'ensemble des vecteurs V tels que le cercle $\mathbf{C}_V$ soit tangent à ces deux cercles.

Que l'on procède pour cela de façon algébrique ou géométrique, on est confronté à de nombreux cas particuliers, selon la position de C' par rapport à C et selon la nature du contact, extérieur ou intérieur, de $\mathbf{C}_V$ avec C et de celui de $\mathbf{C}_V$ avec C'. Nous nous limiterons à un cas, les autres étant tout à fait analogues

Supposons par exemple que C' est intérieur à C et que l'on cherche les V tels que $\mathbf{C}_V$ soit tangent extérieurement à C', le contact avec C étant nécessairement intérieur. Nous désignerons par $\mathscr{E}$ l'ensemble des cercles répondant à la question.

La figure qui suit montre un exemple de cette situation, avec un des cercles possibles $\mathbf{C}_V$. Dépouillée pour l'instant, elle ne cessera de s'enrichir au fur et à mesure de notre progression.



[65] Dans un sens qui sera défini dans ce paragraphe.

[66] Mis à part quelques inoffensives paraboles dans le paragraphe précédent.

Commençons par une étude géométrique du problème. Désignons par Ω et Ω' les centres de C et de C', par R et R' leurs rayons, par ω le centre de $\mathbf{C}_V$, et r son rayon.

Si $\mathbf{C}_V$ convient, on a les égalités de distances $\Omega\omega = R - r$ et $\Omega'\omega = R' + r$. Cela implique que $\Omega\omega + \Omega'\omega = R + R'$, c'est-à-dire que ω appartient à l'ellipse Γ de foyers Ω et Ω' et de longueur du grand axe $2a = R + R'$. Cette ellipse est une « vraie » ellipse, car $\Omega\Omega' < 2a$ [67] ; cela découle du fait que C' est intérieur à C.

Pour établir qu'inversement tout point de Γ est effectivement le centre d'un cercle de la famille, il est important de démontrer que Γ est incluse dans le disque ouvert $D(\Omega, R)$, c'est-à-dire qu'elle est « intérieure » à C, et qu'elle ne rencontre pas le disque fermé $D'(\Omega', R')$ c'est-à-dire qu'elle est « extérieure » à C'. Nous établissons la première propriété et laissons la seconde en exercice.

Puisque Ω est un foyer de Γ, un équation polaire de Γ dans un repère polaire bien choisi d'origine Ω est $\varrho = \dfrac{p}{1 - e\cos\vartheta}$ [68].

Comme la valeur maximale de ϱ est $p/(1-e) = (b^2/a)/(1-c/a) = c + a$, il reste à montrer que $2c + 2a < 2R$; or cela revient à vérifier que $\Omega\Omega' + R + R' < 2R$, ce qui est effectivement le cas.

Cela étant acquis, si un point ω vérifie $\Omega\omega + \Omega'\omega = R + R'$, on peut poser $r = R - \Omega\omega$. Alors, $r > 0$ puisque l'ellipse Γ est « intérieure » au cercle C. Par construction, le cercle de centre ω et de rayon r est tangent intérieurement à C. Comme on a aussi $\Omega'\omega = R + r$, ce cercle est également tangent extérieurement à C'. Ce cercle est en outre unique une fois son centre choisi sur Γ, puisque son rayon est nécessairement $R - \Omega\omega$.

Résumons ! Nous venons d'établir que le lieu des centres des cercles $\mathbf{C}_V$ répondant à la question est (dans ce cas particulier) *toute* l'ellipse Γ de foyers Ω et Ω' et de longueur du grand axe $R + R'$ et que, pour tout point $\omega \in \Gamma$, on peut construire exactement un cercle (et de rayon> 0) qui soit tangent à C et C'.

Venons-en à présent à l'étude algébrique de cette question.

Supposons que les cercles C et C' ont pour équations respectives $\mathbf{E}_U$ et $\mathbf{E}_{U'}$, avec $U = (\alpha, \beta, \gamma, 1)$ et $U' = (\alpha', \beta', \gamma', 1)$. Les conditions de contact de $\mathbf{C}_V$

[67] Si on avait eu $\Omega\Omega' = 2a$, l'ellipse eût été réduite au segment $[\Omega, \Omega']$; elle eût été vide si on avait eu $\Omega\Omega' < 2a$.

[68] Il suffit de choisir comme axe polaire Ωx la droite $\Omega\Omega'$, et d'orienter cet axe de sorte que Ω' ait une abscisse (strictement) positive.

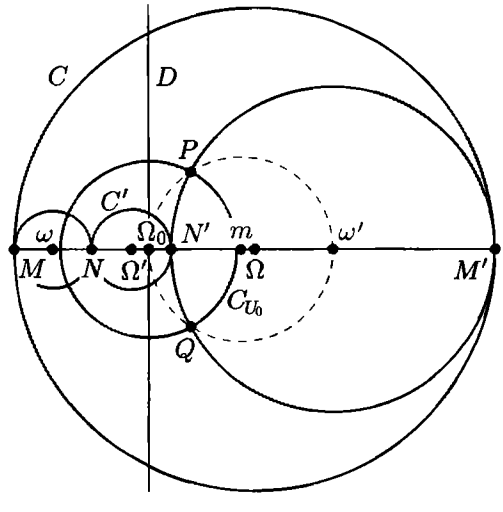
avec C (intérieurement) et avec C' (extérieurement) s'écrivent

$$\begin{cases} \sqrt{q(U)q(V)} &= +\varphi(U,V) \\ \sqrt{q(U')q(V)} &= -\varphi(U',V). \end{cases}$$

Ce système implique la relation $\varphi(U_0,V)=0$, où $U_0 = \dfrac{U}{\sqrt{q(U)}} + \dfrac{U'}{\sqrt{q(U')}}$; on vérifie facilement que le cercle-droite C_{U_0} d'équation $\mathbf{E}_{U_0}$ est un cercle de rayon>0. Puisque $U_0 \in \mathrm{Vect}\,(U,U')$, le cercle C_{U_0} appartient au faisceau engendré par les cercles C et C', qui est à points de PONCELET puisque C et C' sont disjoints.

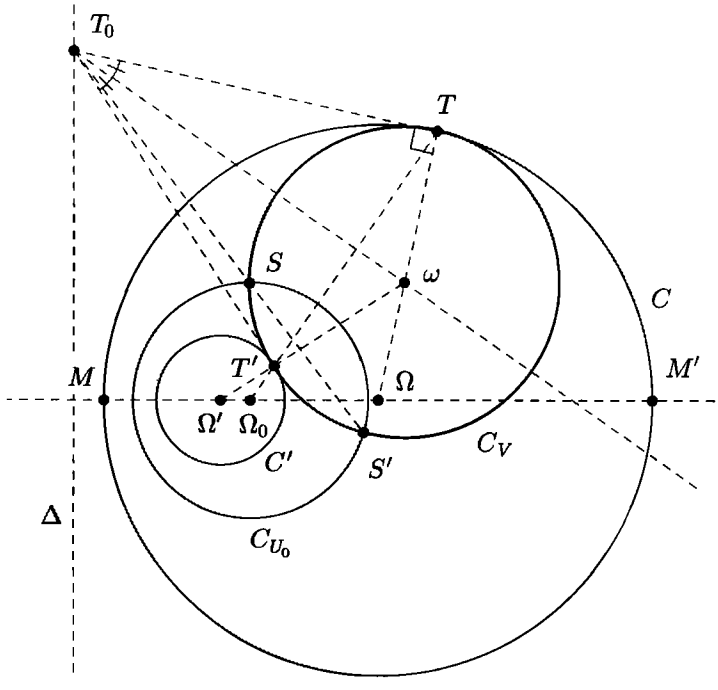
Vu que $\varphi(U_0,V)=0$, tous les cercles de $\mathscr{E}$ sont **orthogonaux** à C_{U_0}. En particulier, si on désigne par Ω_0 le centre de ce cercle et r_0 son rayon, la puissance de Ω_0 par rapport à tous les cercles de $\mathscr{E}$ est égale à r_0^2. En particulier, le point Ω_0 appartient à l'axe radical de toute paire de cercles de $\mathscr{E}$. Nous l'appellerons le *centre radical* de $\mathscr{E}$. Cette définition est cohérente avec celle du **VI-2.3** : le point Ω_0 est en effet le centre radical de tout triplet de cercles de $\mathscr{E}$.

Cela nous fournit une construction géométrique du cercle C_{U_0}. En effet, nous pouvons déjà construire deux cercles de la famille $\mathscr{E}$: la droite $\Omega\Omega'$ coupe C en deux points M et M', et C' en N et N'. Nous les supposons ordonnés comme sur la figure qui suit, c'est-à-dire de façon que M et N soient d'un même côté de Ω'. Ainsi, les cercles de diamètres respectifs MN et $M'N'$ sont dans $\mathscr{E}$, et leur axe radical D, que l'on sait construire, coupe orthogonalement $\Omega\Omega'$ en un point a_0. Or, $a_0 = \Omega_0$, car le cercle C_{U_0}, appartenant au faisceau engendré par les cercles C et C', est centré sur la droite $\Omega\Omega'$ et a_0 est le seul point de cette droite à avoir même puissance par rapport aux deux derniers cercles construits. On sait enfin construire le cercle de centre Ω_0 et orthogonal au cercle de diamètre $M'N'$, ce qui achève la construction de C_{U_0} [69].



[69] Si ω' est le milieu de $M'N'$, le cercle de diamètre $\Omega_0\omega'$ coupe le cercle de diamètre $M'N'$ en deux points P et Q. Le cercle cherché a pour centre Ω_0 et passe par P (et Q).

Nous proposons maintenant deux constructions géométriques du cercle $\mathbf{C}_V$ *de* $\mathscr{E}$ *qui touche* C *en un point* T *donné, la construction du cercle de* $\mathscr{E}$ *qui touche* C' *en un point* T' *donné étant analogue.*



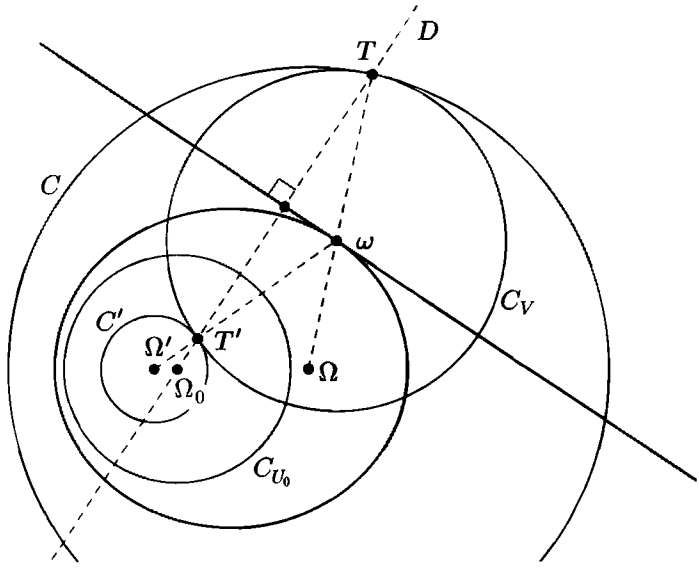
Appelons Δ l'axe radical des cercles C et C' ; si T est l'un des deux points M ou M' précédents, la construction a déjà été faite. Sinon, la tangente à C en T coupe Δ en un point T_0, dont la puissance par rapport à C est strictement positive. Comme il est sur l'axe radical de C et de C', sa puissance par rapport à C' est strictement positive aussi ; choisissons le point T' de C' tel que T_0T' soit tangent à C' et que Ω' et T soient *de part et d'autre* de la droite T_0T' [70].

Comme T_0 est sur Δ, les distances T_0T et T_0T' sont égales : les perpendiculaires en T à T_0T et en T' à T_0T' se coupent donc en un point ω équidistant des points T et T'. Par construction, le cercle C_V de centre ω et passant par T (et T') est tangent en T à C et en T' à C'.

Explicitons une seconde construction à l'aide de la figure de la page **367** ; la demi-droite Ω_0T coupe le cercle C' en un point T'. Les droites ΩT et $\Omega'T'$ se coupent en le centre ω du cercle $\mathbf{C}_V$ cherché. On peut achever alors la construction de ce cercle puisque l'on en connaît le centre et un point,

[70] Cela exclut l'un des deux points de contact des tangentes menées de T_0 à C'.

le point T par exemple.



Nous allons justifier cette construction, et montrer en outre que la médiatrice de TT' est la tangente à Γ en ω comme cela se voit sur la figure ci-dessus.

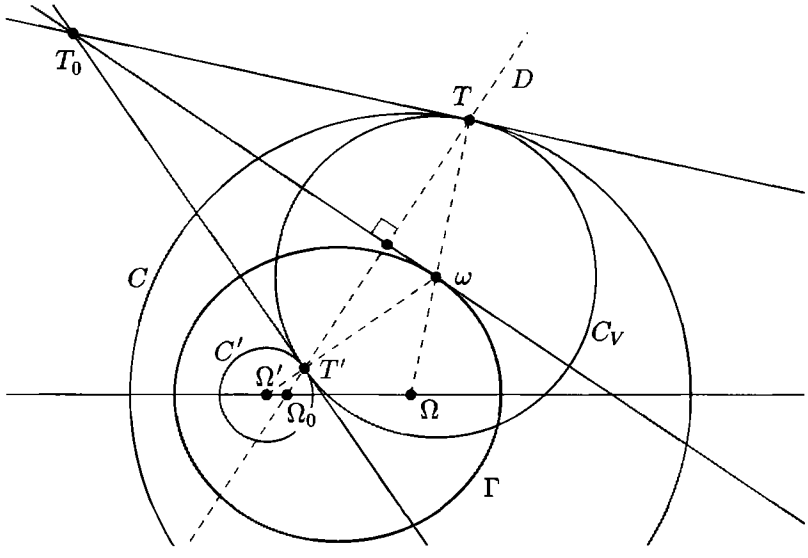
Nous savons déjà, au vu de la première construction, que le cercle C_V existe ; nous avons vu en outre au **VI-1.4** que, puisque $\mathbf{C}_V \in \mathscr{E}$, et puisque les cercles $C = \mathbf{C}_U$ et $\mathbf{C}_V$ sont tangents, le cercle-point $\mathbf{C}_W$, où l'on a posé $W = \dfrac{\varphi(U,V)}{q(U)}U - V$, est réduit au point de contact de ces deux cercles. De même, le cercle-point $\mathbf{C}_{W'}$, où $W' = \dfrac{\varphi(U',V)}{q(U')}U' - V$, est réduit au point de contact des cercles $C' = \mathbf{C}_{U'}$ et $\mathbf{C}_V$.

Établissons ensuite que les cercles $\mathbf{C}_{U_0}$, $\mathbf{C}_W$ et $\mathbf{C}_{W'}$ appartiennent à un même faisceau. Cela revient à montrer que les vecteurs U_0, W et W' sont liés. Or, on a aussi $\dfrac{\varphi(U,V)}{q(U)} = +\dfrac{\sqrt{q(V)}}{\sqrt{q(U)}}$ et $\dfrac{\varphi(U',V)}{q(U)} = -\dfrac{\sqrt{q(V)}}{\sqrt{q(U')}}$; on a alors la relation linéaire

$$\frac{W - W'}{\sqrt{q(V)}} = \underbrace{\frac{U}{\sqrt{q(U)}} + \frac{U'}{\sqrt{q(U')}}}_{U_0}.$$

En particulier, les centres de ces trois cercles sont alignés, savoir Ω_0, T et T', et on conclut alors. À noter que nous avons établi au passage que $\mathbf{C}_{U_0}$ appartient au faisceau à points de PONCELET T et T'.

Comme ω est le centre du cercle $\mathbf{C}_V$ qui passe par T et T', le point ω est sur la médiatrice de TT'. Pour établir que cette médiatrice est tangente à Γ en ω, il reste à montrer que c'est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{\Omega'\omega\Omega}$, c'est-à-dire aussi la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{T'\omega T}$. Or, cette dernière propriété est triviale dans le triangle isocèle $T'\omega T$.



Nous lisons d'autres propriétés dans les figures précédentes. En particulier, la polaire de T_0 par rapport au cercle $\mathbf{C}_V$ est la droite TT', voir le chapitre **V**. En outre, la polaire de Ω_0 par rapport à ce même cercle est la droite SS' qui joint les points d'intersection de $\mathbf{C}_V$ et de $\mathbf{C}_{U_0}$, puisque ces deux cercles sont orthogonaux.

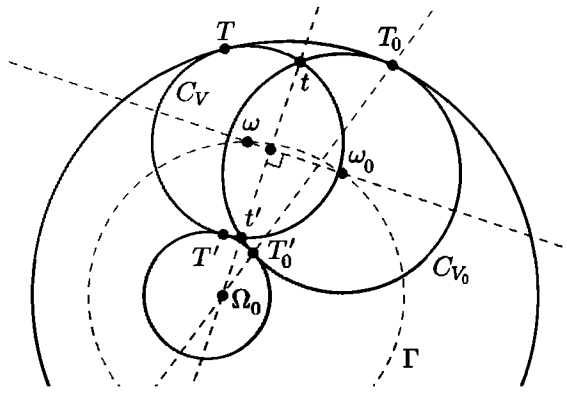
Comme TT' passe par Ω_0, le quadrangle $TT'SS'$ est harmonique, se reporter au **V-9.5.6**, et donc la droite SS' passe aussi par T_0.

4.2. Un détour par les enveloppes de cercles

Dans l'étude précédente, il est apparu que, avec les notations utilisées, les points Ω_0, T et T' sont alignés, et que la médiatrice de TT' est tangente au lieu Γ décrit par ω. Ces propriétés se sont imposées d'elles-mêmes en relation avec la théorie des *enveloppes de cercles*. Nous nous contenterons de les énoncer heuristiquement, du fait que la démonstration algébrique rigoureuse a été effectuée *supra*.

Dans la figure qui suit, nous représentons le cercle $\mathbf{C}_V$ qui touche C en un point T ainsi qu'un cercle $\mathbf{C}_{V_0}$ qui touche C en un point T_0 proche de T. Sur la figure, le point T_0 est « assez loin » de T, faute de quoi elle serait

illisible, les points t, T_0' et T' venant à se confondre.



Nous savons que l'axe radical tt' de $\mathbf{C}_V$ et de $\mathbf{C}_{V_0}$ passe par Ω_0 et que la médiatrice de tt' est la *droite des centres* $\omega\omega_0$ qui est une corde de Γ. Faisons tendre T_0 vers T ; alors, les points t et t' tendent respectivement vers T et T' et la corde $\omega\omega_0$ tend vers la tangente à Γ en ω. De cela suit l'alignement de $\Omega_0 TT'$ et la propriété de la médiatrice.

*Il a été question ici d'*enveloppes *de cercles, car les cercles de la famille $\mathscr{E}$ restent tangents aux cercles C et C', que l'on qualifie alors d'*enveloppes *des cercles* $\mathbf{C}_V$.

Remarque. Voici comment Rached MNEIMNÉ explique géométriquement la situation qui vient d'être décrite : avec les notations précédentes, il existe une homothétie h_1 qui envoie le cercle C sur le cercle $\mathbf{C}_V$, homothétie dont le centre est le point de contact T de ces deux cercles. De même, une homothétie h_2 de centre T' envoie le cercle $\mathbf{C}_V$ sur le cercle C'.

La composée $h = h_2 \circ h_1$ envoie alors le cercle C sur le cercle C'. Or, h est une homothétie ou une translation, mais cette seconde éventualité est exclue puisque C et C' n'ont pas le même rayon. Donc, h est une homothétie et son centre T'' est sur la droite joignant les centres des deux cercles, c'est-à-dire la droite $\Omega\Omega'$. Remarquons aussi que le rapport λ de cette homothétie est négatif[71] ; on a donc $\lambda = -r/R$.

Revenons maintenant à la figure de la page **369** : l'homothétie h envoie les points M et M' respectivement sur les points N' et N ; en effet, par exemple, $M \in C \cap \Omega\Omega'$ et donc $h(M) \in C' \cap \Omega\Omega' = \{N, N'\}$. On a donc $h(M) = N'$ puisque le rapport λ de l'homothétie h est négatif.

[71] En effet, h_1 a un rapport positif, mais h_2 un rapport négatif. L'homothétie de rapport positif envoyant C sur C' est celle dont le centre est extérieur à ces deux cercles. Son centre est le conjugué harmonique de T'' par rapport à $\Omega\Omega'$.

On en conclut que $\overline{T''N'} = \lambda \overline{T''M}$ et $\overline{T''N} = \lambda \overline{T''M'}$, de sorte que

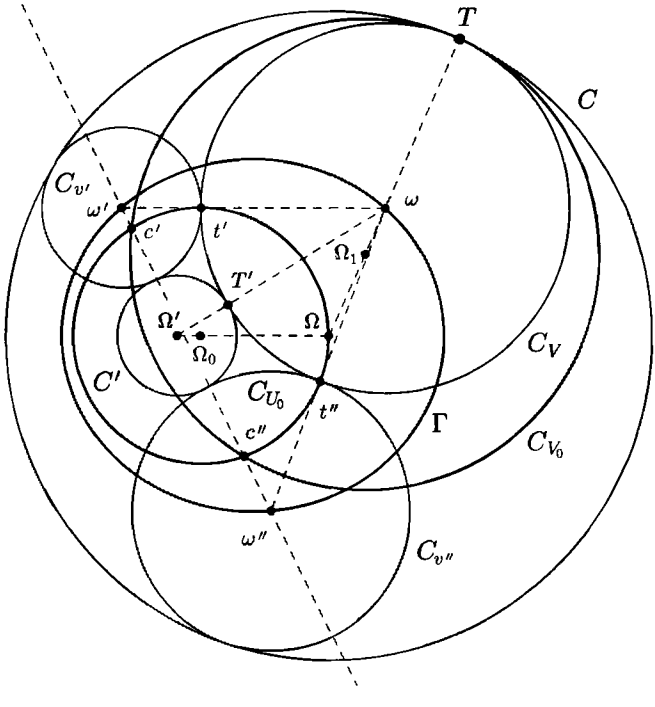
$$\overline{T''M} \cdot \overline{T''N} = \overline{T''M'} \cdot \overline{T''N'}$$

Autrement dit, T'' est sur l'axe radical des cercles de diamètre MN et $M'N'$. On en conclut comme précédemment que $T'' = \Omega_0$. En prime, nous avons obtenu la relation $R\,\overline{\Omega_0\Omega'} = -r\,\overline{\Omega_0\Omega}$.

4.3. Une chaîne de cercles

La situation se corse ! Gardant toujours les mêmes notations, montrons qu'étant donné un cercle $\mathbf{C}_V$ *dans la famille* $\mathscr{E}$*, il existe deux cercles* $\mathbf{C}_{v'}$ *et* $\mathbf{C}_{v''}$ *de cette famille qui soient aussi tangents extérieurement à* $\mathbf{C}_V$.

On peut ainsi construire une suite « récurrente » [72] de cercles $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{E}$ telle que C_0 soit le cercle donné $\mathbf{C}_V$ et telle que C_{k+1} soit tangent extérieurement à C_k et distinct de C_{k-1}.



Nous savons que le cercle $\mathbf{C}_V$ est orthogonal au cercle $\mathbf{C}_{U_0}$; le centre ω du premier est donc extérieur à $\mathbf{C}_{U_0}$. Par ω nous pouvons donc mener deux

[72] Et même deux suites, l'une tournant dans le sens direct et l'autre dans le sens rétrograde.

tangentes à $\mathbf{C}_{U_0}$; elles recoupent l'ellipse Γ respectivement en des points ω' et ω''.

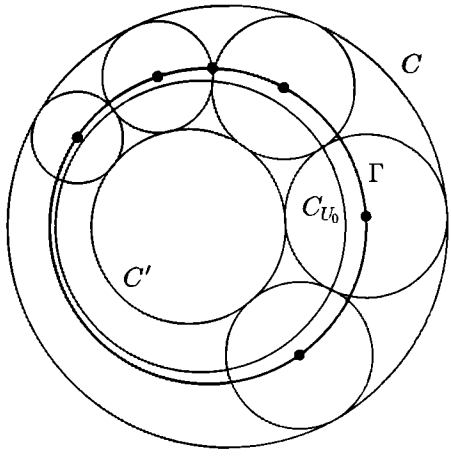
Établissons que les deux cercles de $\mathscr{E}$ centrés respectivement en ω' et ω'' sont tangents extérieurement à $\mathbf{C}_V$.

En effet, soit par exemple le cercle $\mathbf{C}_{v'} \in \mathscr{E}$ centré en ω'. Il est orthogonal à $\mathbf{C}_{U_0}$; or, la droite $\omega\omega'$ est par construction tangente à $\mathbf{C}_{U_0}$: le point t' où elle touche $\mathbf{C}_{U_0}$ appartient à $\mathbf{C}_{v'}$ du fait de l'orthogonalité, mais aussi à $\mathbf{C}_V$ pour la même raison. Comme t' appartient au segment $[\omega\omega']$, nous avons bien établi le contact de $\mathbf{C}_{v'}$ avec $\mathbf{C}_V$ en ce point. Il en va de même des cercles $\mathbf{C}_{v''}$ et $\mathbf{C}_V$ en un point t''.

En outre, $\mathbf{C}_{v'}$ et $\mathbf{C}_{v''}$ sont les deux seuls cercles à vérifier ces propriétés : si un cercle $\mathbf{C}_W \in \mathscr{E}$ de centre ω_W est tangent extérieurement à $\mathbf{C}_V$, alors la droite $\omega\omega_W$ est tangente à Γ. Or, du point ω on ne peut mener que les deux tangentes précédentes, et chacune ne recoupe Γ qu'en un point.

Signalons, *pour la bonne bouche*, une propriété mise en évidence sur la figure de la page **374** : si $\mathbf{C}_V \in \mathscr{E}$ est tangent en T à C, alors, de même que tous les cercles tangents intérieurement à C et extérieurement à C' sont orthogonaux au cercle $\mathbf{C}_{U_0}$, tous les cercles tangents intérieurement à C et extérieurement à $\mathbf{C}_V$ sont orthogonaux au cercle $\mathbf{C}_{V_0}$, où $V_0 = \dfrac{U}{\sqrt{q(U)}} + \dfrac{U_0}{\sqrt{q(U_0)}}$. Appartenant au faisceau engendré par C et $\mathbf{C}_V$, qui est un faisceau de cercles tangents, le cercle $\mathbf{C}_{V_0}$ est tangent en T à C et est centré en un point Ω_1 situé sur la droite ΩT.

Le cercle $\mathbf{C}_{v'}$ étant orthogonal à $\mathbf{C}_{U_0}$ et à $\mathbf{C}_{V_0}$, son centre ω' est sur l'axe radical de ces deux cercles, ici la droite appelée $c'c''$. Il en va bien sûr de même du point ω''.



4.4. Et si la chaîne se refermait

Partons à nouveau de deux cercles C et C' situés l'un par rapport à l'autre comme précédemment et choisissons un entier $n \geqslant 3$. Donnons-nous encore un point $T \in C$ et construisons une suite récurrente de cercles $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{E}$ telle que C_0 soit le cercle $\mathbf{C}_V \in \mathscr{E}$ qui touche C en T et telle que C_{k+1} soit tangent extérieurement à C_k et distinct de C_{k-1}.

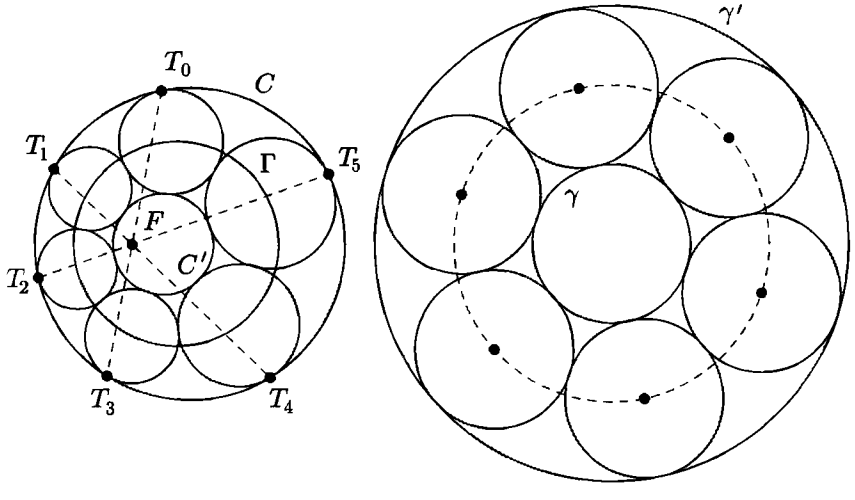
Nous allons établir que, si le cercle C_n coïncide avec le cercle C_0 pour un choix particulier de T, alors cela se produit **quel que soit** *le choix de T.* Ce résultat constitue ce que l'on nomme l'*alternative*, ou le *porisme*, de STEINER.

4.4.1. La preuve classique

Le résultat est trivial dans le cas de deux cercles C et C' concentriques, de centre commun un point Ω. En effet, si l'on choisit par exemple de faire « tourner » les cercles C_k dans le sens direct, on vérifie sans difficulté que le centre du cercle C_{k+1} se déduit de celui de C_k par la rotation de centre Ω et d'angle ϑ défini par $\sin\dfrac{\vartheta}{2} = \dfrac{R-r}{R+r}$ où, rappelons-le, R et r désignent les rayons de C et de C'.

Cet angle est indépendant de T; autrement dit, pour que la chaîne se referme au bout de n itérations, il faut et il suffit que $n \operatorname{Arc}\sin\dfrac{R-r}{R+r} \in \pi\mathbb{Z}$.

Cela ne dépend évidemment pas du choix du point de contact initial T.



L'explication de la présence du point F sur la figure de gauche sera fournie au **VI-4.4.3.**

C'est ce que l'on constate sur la figure de droite ci-dessus, où l'on a choisi $R = 3r$, de sorte que $\sin \vartheta/2 = 1/2$, et donc $\vartheta = \pi/3$. On a alors $C_{k+6} = C_k$ pour tout k, ce quel que soit le choix du point T initial.

Pour le cas général de deux cercles disjoints C et C', le second étant intérieur au premier, la preuve résulte de l'idée suivante : *une fois le plan euclidien orienté assimilé à $\mathbb{C}$ et complété par un point noté ∞, il existe une inversion (géométrique) $\mathscr{I}$ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ qui envoie les cercles C et C' sur deux cercles concentriques.*

Démontrons cela ; la conclusion ne sera plus alors qu'une formalité.

Puisque les cercles C et C' sont disjoints, le faisceau $\mathscr{F}$ qu'ils engendrent est un faisceau à points de PONCELET. Ces deux points de PONCELET sont situés sur la droite $\Omega\Omega'$ et l'un des deux seulement est intérieur au cercle C'. Appelons-le P, l'autre étant un point $P' \neq P$.

Soit $\mathscr{I}$ l'inversion de pôle P telle que $\mathscr{I}(P) = P'$; l'image par $\mathscr{I}$ du faisceau $\mathscr{F}^\circ$ est le faisceau de droites de base P' et donc $\mathscr{I}$ envoie le faisceau $\mathscr{F}$ sur le faisceau des cercles de centre P'. *A fortiori*, les cercles $\mathscr{I}(C)$ et $\mathscr{I}(C')$ sont concentriques, de centre P'. Cette inversion convient donc bien.

Soit maintenant les cercles concentriques $\gamma = \mathscr{I}(C)$ et $\gamma' = \mathscr{I}(C')$ [73]. Supposons que $T \in C$ soit tel que l'on ait $C_n = C_0$, où $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la « chaîne » de cercles définie *supra*.

Vu que le point P est intérieur à C', il n'est sur aucun des cercles C_k, et les images $\mathscr{I}(C_k)$ sont donc également des cercles.

Or, nous avons vu au **V-9.1** qu'une inversion conserve le contact de deux courbes. De cela suit que les cercles $\mathscr{I}(C_k)$ sont tangents aux cercles γ et γ', que $\mathscr{I}(C_{k+1})$ est tangent à $\mathscr{I}(C_k)$, et distinct de $\mathscr{I}(C_{k-1})$. Comme $\mathscr{I}(C_0)$ est tangent en $\mathscr{I}(T)$ à $\gamma = \mathscr{I}(C)$, la propriété s'applique à toute chaîne de cercles construite à partir de γ et de γ'.

Or, si $(C'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une chaîne construite à partir de C et C', la suite $\mathscr{I}(C'_k)$ est une chaîne construite à partir de γ et γ' : elle se referme bien après n itérations.

Convaincant ? *Pas tout à fait ! Il reste à vérifier que la « qualité » des contacts : intérieurs ou extérieurs selon les cas, est respectée...*

Par construction, le point P est intérieur au cercle C', donc extérieur aux cercles de la famille $\mathscr{E}$. Si C_k est un des cercles d'une chaîne, l'inversion $\mathscr{I}$ envoie donc l'extérieur de C_k sur l'extérieur de $\mathscr{I}(C_k)$. Il s'ensuit que C_{k+1} est tangent extérieurement à C_k si, et seulement si, $\mathscr{I}(C_{k+1})$ est tangent extérieurement à $\mathscr{I}(C_k)$. La même remarque vaut pour le contact de chaque C_k avec C ou avec C'.

[73] Il est à remarquer que γ est intérieur à γ' puisque le pôle d'inversion P a été choisi intérieur aux cercles C er C'.

4.4.2. Une preuve algébrique

Conservons toujours les mêmes notations et hypothèses. Appelons comme précédemment P et P' les points de PONCELET du faisceau engendré par les cercles C et C', en supposant que P est intérieur à C', et donc à C.

Nous montrons dans cette section qu'il existe une application linéaire bijective f de $\mathbb{R}^4$ sur lui-même telle que, si $\mathbf{C}_V \in \mathscr{E}$, alors les cercles $\mathbf{C}_{v'}$, où $v' = f(V)$, et $\mathbf{C}_{v''}$, où $v'' = f^{-1}(V)$, sont les deux cercles de $\mathscr{E}$ tangents extérieurement à $\mathbf{C}_V$.

Ainsi, nous mettrons en relation la périodicité d'une chaîne de cercles dans $\mathscr{E}$ avec l'existence d'un entier $n \geqslant 3$ tel que $f^n = Id_{\mathbb{R}^4}$.

Nous désignons par τ_0 la forme linéaire qui à $V = (a, b, c, t) \in \mathbb{R}^4$ associe t. Adaptons une base de $\mathbb{R}^4$ à notre problème. Le cercle-point P a une équation formelle de la forme $\mathbf{E}_{V_0}$, où V_0 est de la forme $(a_0, b_0, c_0, 1)$, avec $a_0^2 + b_0^2 - c_0 = 0$. De même, le cercle-point P' a une équation formelle de la forme $\mathbf{E}_{V_0'}$, où le quadruplet V_0' est de la forme $(a_0', b_0', c_0', 1)$, avec ${a_0'}^2 + {b_0'}^2 - c_0' = 0$. Puisque $P \neq P'$, le réel $R \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{\| PP' \|}{2}$ est > 0 et on a $\varphi(V_0, V_0') = \dfrac{0^2 + 0^2 - (2R)^2}{2} = -2R^2$, voir au **VI-1.2**. En particulier, les vecteurs V_0 et V_0' sont linéairement indépendants.

La droite $\Delta = PP'$, qui est aussi la droite $\Omega\Omega'$, a une équation formelle de la forme $\mathbf{E}_W$, où le vecteur W est de la forme $(a_1, b_1, c_1, 0)$, avec $q(W) = {a_1}^2 + {b_1}^2 > 0$. Supposons cette équation choisie de sorte que $q(W) = R^2$, ce qui est toujours possible grâce à une multiplication de W par un scalaire *ad hoc*. On a aussi $\varphi(V_0, W) = \varphi(V_0', W) = 0$, puisque les points P et P' appartiennent à la droite Δ.

Enfin, le cercle de diamètre PP' a une équation formelle de la forme $\mathbf{E}_{W'}$, où W' est de la forme $(a_1, b_1, c_1, 1)$, avec $q(W') = R^2$ puisque R est précisément le rayon de ce cercle. On a aussi $\varphi(V_0, W') = \varphi(V_0', W') = 0$, puisque les points P et P' appartiennent à C_0. On a enfin $\varphi(W, W')$ puisque Δ est un diamètre de C_0. En particulier, les vecteurs W et W' sont linéairement indépendants.

De cela suit que $\mathscr{B} = (V_0, V_0', W, W')$ est une base de $\mathbb{R}^4$ [74] : en effet, par construction, (V_0, V_0') est une base d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$, (W, W') est une base de F°, l'orthogonal de F relativement à φ, et $\mathbb{R}^4 = F \oplus F^\circ$, puisque le faisceau à points de PONCELET P et P' n'est pas singulier.

[74] On ne change pas une équipe qui gagne. Nous avons utilisé une base construite sur le même principe au **VI-1.5**.

En outre, la matrice de φ par rapport à $\mathscr{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2R^2 & 0 & 0 \\ -2R^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix}.$$

Appartenant au faisceau à points de PONCELET P et P', les cercles C et C' ont des équations formelles de la forme $\mathbf{E}_{X_0}$ et $\mathbf{E}_{X'_0}$, où X_0 est de la forme $V_0 - \ell V'_0$, avec $\ell \neq 0$, et X'_0 est de la forme $V_0 - \ell' V'_0$, avec $\ell' \neq 0$.

Du fait que P est intérieur à C et à C', on vérifie facilement que ℓ et ℓ' sont dans $]\,0\,,1\,[$; du fait que C' est intérieur à C, on vérifie aussi que $\ell' < \ell$.

On a $0 < q(X_0) = q(V_0 - \ell V'_0) = 4\ell R^2$. Nous avons encore $\mathbf{C}_X = \mathbf{C}_{X_0}$, si nous remplaçons X_0 par $X = X_0/\sqrt{\ell}$; ainsi, le vecteur X est, lui, de la forme $\alpha V_0 - \beta V'_0$, où $\alpha\beta = 1$ et $\alpha > 1$. De même, nous pouvons remplacer X'_0 par le vecteur $X' = X'_0/\sqrt{\ell'} = \alpha' V_0 - \beta' V'_0$, où $\alpha'\beta' = 1$ et $\alpha' > 1$ [75]. Cette mise en forme n'a rien de gratuit : on a $\tau_0(X) = \dfrac{1-\ell}{\sqrt{\ell}} > 0$ et de même $\tau_0(X'_0) > 0$; or, une note au bas de la page **320** a prouvé l'intérêt d'avoir la propriété $tt' > 0$.

Dans ces conditions, on a $q(X) = q(X') = 4R^2$.

Soit $V \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tel que $\mathbf{C}_V \in \mathscr{E}$ et $\tau_0(V) > 0$; alors, des conditions $\varphi(V, X) = +\sqrt{q(V)\,q(X)}$ et $\varphi(V, X') = -\sqrt{q(V)\,q(X')}$ suit la condition nécessaire $\varphi(V, U_0) = 0$, avec

$$U_0 = \frac{X}{\sqrt{q(X)}} + \frac{X'}{\sqrt{q(X')}} = \frac{\alpha V_0 - \beta V'_0}{2R} + \frac{\alpha' V_0 - \beta' V'_0}{2R}$$
$$= \frac{(\alpha + \alpha')V_0 - (\beta + \beta')V'_0}{2R}.$$

Donc, si $V = pV_0 + p'V'_0 + rW + r'W'$, $\mathbf{C}_V \in \mathscr{E}$ implique que

$$-(\beta + \beta')p + (\alpha + \alpha')p' = 0\,.$$

Oublions pour l'instant la condition $\tau_0(V) > 0$; puisque V n'est défini qu'à un scalaire multiplicatif non nul près, nous choisirons $p = \alpha + \alpha'$, $p' = \beta + \beta'$ et nous supposerons désormais que tous les cercles de $\mathscr{E}$ ont une équation formelle de la forme $\mathbf{E}_V$, avec $V = pV_0 + p'V'_0 + rW + r'W'$, où les valeurs de p et de p' sont celles qui viennent d'être déterminées.

[75] Précédemment, nous avions supposé que $C = \mathbf{C}_U$ et $C' = \mathbf{C}_{U'}$; les vecteurs X et X' sont proportionnels respectivement à U et U' puisqu'ils définissent respectivement les mêmes cercles. Pour la suite de ce calcul, les vecteurs X et X' se révéleront plus commodes.

Nous désignerons par $\mathfrak{R}$ l'ensemble des vecteurs V de la forme $pV_0+p'V_0'+rW+r'W'$ (ainsi, l'ensemble des cercles-droites $\mathbf{C}_V$, où $V \in \mathfrak{R}$, est le *réseau* des cercles-droites orthogonaux au cercle $\mathbf{C}_{U_0}$).

Soit donc $V = pV_0+p'V_0'+rW+r'W' \in \mathbb{R}^4$; on a $q(V) = (r^2+r'^2-4pp')R^2$: il est bon de noter que p et p' sont > 0 par construction et que, de ce fait, le cercle-droite $\mathbf{C}_V$ est non vide si, et seulement si, $r^2 + r'^2 \geqslant 4pp'$. Fixons $V \in \mathfrak{R}$ et supposons que $\mathbf{C}_V \in \mathscr{E}$; nous allons vérifier que $\tau_0(V) > 0$. Déjà, on ne peut avoir $\tau_0(V) = 0$, car, vu leur position relative, les cercles C et C' ne peuvent avoir une droite tangente en commun.

Supposons alors $\tau_0(V) < 0$; puisque $\mathbf{C}_V$ est tangent intérieurement à C, on a la formule $-\varphi(V, X_0) = \sqrt{q(X_0)\, q(V)}$, le signe $-$ provenant du fait que $\tau_0(V) < 0$:

$$\underbrace{-\,2(p\beta - p'\alpha)R^2}_{\varphi(V,X)} = 2R\sqrt{q(V)}\,.$$

De cela suit $p\beta - p'\alpha < 0$. Or, $p\beta - p'\alpha = (\alpha + \alpha')\beta - (\beta + \beta')\alpha = \alpha'\beta - \beta'\alpha = \sqrt{\ell/\ell'} - \sqrt{\ell'/\ell} > 0$, du fait que $0 < \ell' < \ell < 0$. L'hypothèse est donc absurde, et l'on a bien $\tau_0(V) > 0$.

Par conséquent, si $V \in \mathfrak{R}$, on a $\mathbf{C}_V \in \mathscr{E}$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} (p\beta - p'\alpha)R &= \sqrt{q(V)} \\ (p\beta' - p'\alpha')R &= -\sqrt{q(V)}\,. \end{cases}$$

(La seconde relation traduit le contact extérieur de $\mathbf{C}_V$ et de C'.) Maintenant, puisque V est de la forme $pV_0 + p'V_0' + rW + r'W'$, il est immédiat que la première condition implique la seconde, de sorte que, pour V de cette forme, $\mathbf{C}_V \in \mathscr{E}$ si, et seulement si, $(p\beta - p'\alpha)R = \sqrt{q(V)}$. Comme on a $q(V) = (r^2 + r'^2 - 4pp')R^2$, cela équivaut aussi à $\sqrt{r^2 + r'^2 - 4pp'} = p\beta - p'\alpha$.

Puisque $p\beta - p'\alpha > 0$, cette équation équivaut à $r^2+r'^2-4pp' = (p\beta-p'\alpha)^2$, c'est-à-dire, après développement, à $r^2 + r'^2 = (p\beta + p'\alpha)^2$.

L'ensemble des V vérifiant cette équation est donc une *ellipse* Γ_0, mais n'est pas en général un cercle, du fait que la base $\mathscr{B}$ n'est pas en général orthonormale. En outre, nous avons vu que, si $V = (a, b, c, t) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ est tel que $\mathbf{C}_V$ soit un cercle, alors le centre en est le point $\mathscr{C}(V)$ de coordonnées affines $(a/t, b/t)$, c'est-à-dire de coordonnées homogènes $(a, b, t) \neq (0, 0, 0)$. Le lieu Γ des centres des cercles éléments de $\mathscr{E}$ est donc bien une conique, comme nous l'avions vu géométriquement puisque c'est l'image de Γ_0 par l'application homographique $V \mapsto \mathscr{C}(V)$.

Enfin, il nous reste à définir l'application linéaire f promise.

Soit $\mathcal{V} = pV_0 + p'V_0' + sW + s'W'$, avec $s^2 + s'^2 = (p\beta + p'\alpha)^2$; le cercle $\mathbf{C}_{\mathcal{V}}$ est tangent intérieurement à C et extérieurement à C'. Il est en plus tangent extérieurement à $\mathbf{C}_V$ si, et seulement si, $\varphi(V, \mathcal{V}) = -\sqrt{q(V)\,q(\mathcal{V})}$. Cela équivaut à $rs + r's' - 4pp' = -(p\beta - p'\alpha)^2$.

Or, il existe un scalaire ϑ tel que $\cos\vartheta = \dfrac{4pp' - (p\beta - p'\alpha)^2}{(p\beta + p'\alpha)^2}$. En effet, il suffit de vérifier que

$$-(p\beta + p'\alpha)^2 \leqslant 4pp' - (p\beta - p'\alpha)^2 \leqslant (p\beta + p'\alpha)^2.$$

La première inégalité est triviale (elle équivaut à $-4pp' \leqslant 4pp'$) et la seconde découle de

$$4pp' - (p\beta - p'\alpha)^2 \leqslant 4pp' + (p\beta - p'\alpha)^2 = (p\beta + p'\alpha)^2.$$

On notera que les inégalités annoncées sont même strictes. Choisissons un tel ϑ et définissons alors $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ par sa matrice F_ϑ relativement à la base $\mathscr{B}$:

$$F_\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Il est alors immédiat que f est inversible et que la condition $rs+r's'-4pp' = -(p\beta - p'\alpha)^2$ équivaut à : $\mathcal{V} = f(V)$ ou $\mathcal{V} = f^{-1}(V)$: en effet, si on munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique $(\,\cdot \mid \cdot\,)$ et si l'on pose $\xi = {}^t(r, r')$ et $\xi' = {}^t(s, s')$, la relation $rs + r's' - 4pp' = -(p\beta - p'\alpha)^2$ équivaut à $(\xi \mid \xi') = \cos\vartheta \|\xi\| \|\xi'\|$.

Dès lors, s'il existe un cercle non vide $\mathbf{C}_V \in \mathscr{E}$ à partir duquel la chaîne $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$, où $C_0 = \mathbf{C}_V$, se referme après n itérations, avec $n \geqslant 3$, alors on a $f^n(V) = V$. Montrons que cela implique $\cos n\vartheta = 1$ (et donc $\sin n\vartheta = 0$), de sorte que $f^n = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$.

En effet, la matrice de f^n relative à $\mathscr{B}$ est $F_{n\vartheta}$ et un calcul montre immédiatement que, si $\cos n\vartheta \neq 1$, le sous-espace propre de f^n associé à la valeur propre 1 est $\mathrm{Vect}\,(V_0, V_0')$. C'est absurde, car aucun $V \in \mathfrak{R}$ tel que $\mathbf{C}_V \neq \emptyset$ n'appartient à ce sous-espace (se rappeler la condition $r^2 + r'^2 \geqslant 4pp'$). Donc, on a bien $f^n = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$ et on en déduit que la chaîne se referme pour tout vecteur $V \in \mathfrak{R}$ de départ.

4.4.3. Pour aller plus loin

La preuve algébrique précédente est certes un peu pénible, car technique ; en effet, la nécessité de distinguer contact extérieur *et contact* intérieur *a conduit à des vérifications répétitives quoiqu'indispensables.*

Pourtant, elle permet aussi un approfondissement de certaines des propriétés qui auront pu être mises en lumière aussi bien par notre approche géométrique que par l'approche algébrique.

En particulier, on vérifie tout de suite que, pour tout vecteur $V = \alpha V_0 + \alpha' V_0' + \beta W + \beta' W'$, on a $q\big(f(V)\big) = q(V)$ [76]. Cherchons donc une homographie h de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $V \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, on ait $\mathbf{C}_{f(V)} = h\big(\mathbf{C}_V\big)$. *L'existence de h est garantie par un résultat énoncé au* **VI-1.5**. *Nous allons en construire une de manière effective dans ce qui suit, en nous laissant guider par le contexte géométrique.*

Pour simplifier les notations, nous confondrons un point du plan euclidien complété avec son affixe dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Nous savons que $\mathbf{C}_{V_0}$ est le cercle-point $\{P\}$ et que $f(V_0) = V_0$: on doit avoir $h(P) = P$; de même, on doit avoir $h(P') = P'$. Vu le **V-9.5.4**, il existe un $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $[P, P', M, h(M)] = k$ pour tout point M. Vérifions réciproquement que $k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$ convient, si ϑ est le réel défini à la fin du **VI-4.4.2.**

Pourquoi penser à cette *valeur de k ? Dans le contexte du problème, il est naturel de faire en sorte que C et C' soient aussi invariants par h. Or, en passant aux modules dans la formule* $[P, P', M, M'] = k$, *où* $M' = h(M)$, *on a la formule entre distances* $|k| = \dfrac{PM'}{P'M'} : \dfrac{PM}{P'M}$; *comme* $PM/P'M$ *est constant lorsque M décrit C, on doit donc avoir* $|k| = 1$. *Puisque* ϑ *intervient naturellement dans le problème, on songe alors à* $k = e^{i\vartheta}$.

Puisque la distance PP' est égale à $2R$, on peut toujours supposer que le repère orthonormé du plan euclidien a été choisi tel que les affixes de P et de P' soient respectivement R et $-R$. Dans ce cas, une équation du cercle-point P est $(X - R)^2 + Y^2 = 0$, et on en déduit que $V_0 = (R, 0, -R^2, 1)$. On a de même $V_0' = (-R, 0, R^2, 1)$.

La droite PP' est l'axe Ox, d'équation $Y = 0$. Seulement, le vecteur $w = (0, -1/2, 0, 0)$ ne vérifie pas la condition $q(w) = R^2$. Nous prendrons pour cela le vecteur colinéaire $W = (0, -R, 0, 0)$. De même, le cercle de diamètre PP' a pour équation $X^2 + Y^2 - R^2 = 0$, de sorte que $W' = (0, 0, -R^2, 1)$.

La définition de h par le birapport : $[P, P', M, h(M)] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$ équivaut, si on appelle z et Z les affixes de M et de $h(M)$, à

$$\frac{Z - R}{Z + R} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\,\frac{z - R}{z + R},$$

soit encore, après un petit calcul, à $z = R\,\dfrac{\gamma Z + R\mathrm{i}\sigma}{Z\mathrm{i}\sigma + R\gamma}$, avec $\gamma = \cos\dfrac{\vartheta}{2}$ et $\sigma = \sin\dfrac{\vartheta}{2}$.

[76] Comme, de plus, $\det(f) = +1$, cela établit que $f \in \mathrm{SO}(q)$.

L'équation $\mathbf{E}_{V_0}$ n'est autre que $|z-R|^2 = 0$. Or, les formules *supra* montrent que

$$z - R = R\,\frac{(\gamma - \mathrm{i}\sigma)(Z - R)}{Z\mathrm{i}\sigma + R\gamma},$$

de sorte que $|z - R|^2 = R^2\,\dfrac{|Z - R|^2}{|Z\mathrm{i}\sigma + R\gamma|^2}$.

Appelons M la matrice $\begin{pmatrix} R\gamma & -R^2\mathrm{i}\sigma \\ -\mathrm{i}\sigma & R\gamma \end{pmatrix}$, choisie de sorte que $h = h_M$; tout cela montre que $M \diamond V_0 = R^2 V_0$ (voir la définition au **VI-1.5**).

On établit par des calculs analogues que $M \diamond V_0' = R^2 V_0'$, que $M \diamond W = R^2(W\cos\vartheta + W'\sin\vartheta)$ et que $M \diamond W' = R^2(-W\sin\vartheta + W'\cos\vartheta)$.

La matrice de l'application $\widetilde{M}$ définie par $V \longmapsto M \diamond V$ par rapport à $\mathscr{B}$ est donc $R^2 F_\vartheta$. C'est bien dire que $\widetilde{M} = R^2 f$. En outre, nous savons que $h(\mathbf{C}_V) = \mathbf{C}_{M \diamond V}$ pour tout V dans $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. Donc, pour tout V non nul :

$$h(\mathbf{C}_V) = \mathbf{C}_{M \diamond V} = \mathbf{C}_{R^2 f(V)}\,.$$

Enfin, puisque deux équations formelles $\mathbf{E}_{f(V)}$ et $\mathbf{E}_{R^2 f(V)}$ sont proportionnelles, nous avons bien montré que $h(\mathbf{C}_V) = \mathbf{C}_{f(V)}$ pour tout V non nul dans $\mathbb{R}^4$ [77].

Puisque cette homographie h convient et que l'on a $[P, P', M, M'] = k$, avec $|k| = 1$ et $M' = h(M)$, pour tout point M, la propriété d'invariance par h de tout cercle du faisceau à points de PONCELET P et P' (et en particulier des cercles C et C') est acquise : c'est une conséquence de la remarque faite *supra*, savoir $PM'/P'M'$: $PM/P'M = 1$ en relation avec la constance du rapport $PM/P'M$ lorsque M décrit un cercle de ce faisceau.

Nous faisons à présent le lien entre l'homographie h ainsi définie et les chaînes de cercles de la section **VI-4.3**.

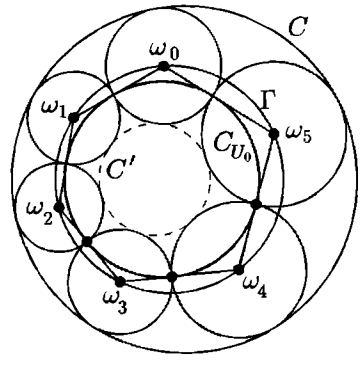
Nous avons toujours nos deux cercles C et C', avec C' intérieur à C et disjoint de celui-ci, l'homographie h construite à partir d'eux, et nous nous donnons un point $T \in C$. Soit alors $\mathbf{C}_V$ le cercle de $\mathscr{E}$ tangent en T à C et tangent extérieurement à C'. Le cercle-droite $f(V) = h(\mathbf{C}_V)$ est tangent à $h(C) = C$ au point $h(T)$ et tangent à $h(C') = C'$ (voir au **V-9.1**).

Autrement dit, dans une chaîne de cercles, *c'est par l'homographie h que l'on passe du point de contact avec C d'un cercle C_k de la chaîne au pont de contact avec C du cercle « suivant » C_{k+1}*. La même remarque vaut avec la suite des points de contact avec le cercle C'.

[77] Si l'on utilise les notations du **VI-4.4.1**, on a aussi $h = \mathscr{I}^{-1} \circ \varrho_\vartheta \circ \mathscr{I}$, où ϱ_ϑ désigne la rotation de centre P' et d'angle ϑ.

En particulier, cela explique la présence du point F mystérieux de la figure de la page **376**. En effet, supposons que notre chaîne de cercles est de période paire $2m$, avec $m \in \mathbb{N}^*$ (cette période avait la valeur 6 dans la figure en question). Dans ce cas, on a $f^{2m} = \mathrm{Id}$ et f^m est une involution ; en d'autres termes, on passe du point de contact T_k de C_k avec C au point de contact T_{k+m} de C_{k+m} avec C par une involution. Le point F n'est donc autre que le point de FRÉGIER de cette involution, et cela explique les alignements rencontrés sur la figure, puisque, avec $m = 3$, nous avons tracé les segments T_0T_3, T_1T_4 et T_2T_5. Rien de tel à attendre en revanche d'un cycle de longueur impaire.

Examinons à présent la figure qui suit : si nous partons d'un point $\omega_0 \in \Gamma$, où Γ est la conique lieu des centres des cercles de $\mathscr{E}$, nous avons vu comment construire le cercle $C_0 \in \mathscr{E}$ centré en ω_0 et nous avons montré que l'on obtient le centre ω_1 du cercle C_1 qui « suit » le cercle C_0 dans la chaîne en menant par ω_0 les deux tangentes à $\mathbf{C}_{U_0}$ et en choisissant comme point ω_1 l'un des points où ces tangentes recoupent Γ.



De proche en proche, on obtient ainsi une suite de points $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$, chaque ω_k étant le centre du cercle C_k de la chaîne, et telle que la droite $\omega_k\omega_{k+1}$ soit tangente au cercle $\mathbf{C}_{U_0}$. Si la chaîne se referme au bout de n itérations, nous avons construit un n-agone (un polygone à n côtés) inscrit dans Γ et circonscrit à $\mathbf{C}_{U_0}$. Vu tout ce qui précède, *le fait que cette chaîne se referme après n itérations ne dépend pas du choix du point initial $\omega_0 \in \Gamma$.*

Or, on dispose du résultat suivant, dû à PONCELET : soit deux coniques non dégénérées γ et γ' et un entier $n \geqslant 3$; si, à partir d'un point $m_0 \in \gamma$ on peut construire un n-agone inscrit dans γ : $m_0m_1 \ldots m_{n-1}m_n$, avec $m_n = m_0$, tel que m_km_{k+1} soit tangente à γ' pour tout $k \in \{0 \ldots \ldots \ldots n-1\}$, alors on peut effectuer cette construction à partir de **tout** point $M_0 \in \gamma$.

Ce résultat constitue l'*alternative de Poncelet*. Pourtant, il ne faut pas croire que ce qui précède en soit une preuve générale, car, dans le contexte de l'alternative de STEINER, la situation des coniques Γ et $\mathbf{C}_{U_0}$ n'est pas générique. Ici, on peut prouver qu'il existe une *homographie* $\mathfrak{h}$ de Γ sur elle-même telle que $\omega_{k+1} = \mathfrak{h}(\omega_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En toute généralité, une telle homographie n'existe pas et la démonstration de l'alternative de PONCELET est beaucoup plus cachée que celle que nous venons d'effectuer ici. Une bonne référence pour ce dernier point est l'ouvrage **[1]** de J.-M. ARNAUDIÈS, *Équations différentielles*, cité en bibliographie.

5. Voyage dans l'espace (des cercles-droites)

5.1. Exposé du problème

Nous sommes toujours dans le cadre de la Géométrie euclidienne plane : un plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O\,;i,j)$. En outre, nous nous donnons trois faisceaux de cercles et notre intérêt va se porter sur les faisceaux de cercles qui rencontrent *les trois faisceaux donnés, c'est-à-dire sur les faisceaux qui contiennent au moins un cercle-droite dans chacun des trois faisceaux donnés. Pour ne pas nous enliser dans des études de cas interminables, nous accepterons ici des cercles-droites de la forme $\mathbf{C}_V$ même si $q(V) < 0$.*

Ce problème possède une interprétation géométrique naturelle : nous avons appelé $\mathbb{P}_3$ l'espace projectif de dimension 3 quotient de $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ par la relation de colinéarité, puis identifié le point de $\mathbb{P}_3$ de coordonnées homogènes $V = (a,b,c,t)$ avec le cercle-droite $\mathbf{C}_V$.

Un faisceau de cercles étant ainsi identifié avec une droite (projective) de $\mathbb{P}_3$, dire qu'un faisceau contient au moins un cercle-droite dans chacun de trois faisceaux donnés revient à dire qu'une droite de $\mathbb{P}_3$ rencontre trois droites données de $\mathbb{P}_3$.

Cette situation géométrique est classique : si les trois droites données d'un espace affine de dimension 3 sont en *position générale*, c'est-à-dire deux à deux non coplanaires et non toutes les trois parallèles à un même plan, les droites qui les rencontrent sont les génératrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe. Dans le cas où les trois droites sont deux à deux non coplanaires, mais toutes les trois parallèles à un même plan, les droites qui les rencontrent sont les génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique. Ensuite, toutes les sortes de dégénérescences se rencontrent, selon le concours ou le parallélisme éventuel de deux, voire trois, de ces droites.

Dans les exemples qui suivent, nous traitons deux cas dégénérés puis un cas plus générique.

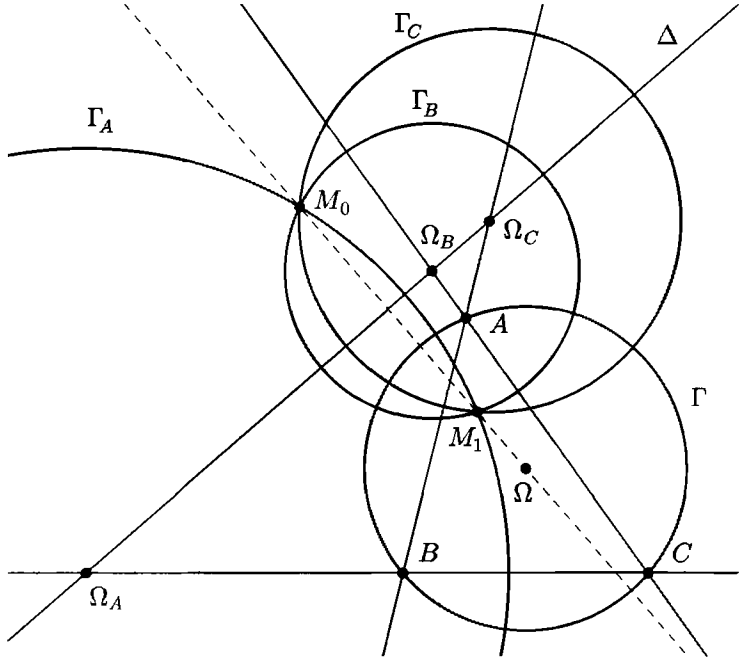
5.2. Les trois faisceaux d'Apollonius

Dans un plan affine euclidien, considérons un triangle non aplati ABC et choisissons les trois faisceaux comme il suit : le faisceau $\mathscr{F}_A$ est le faisceau à points de Poncelet B et C et les faisceaux $\mathscr{F}_B$ et $\mathscr{F}_C$ sont définis de manière analogue.

Que dire des faisceaux qui les rencontrent tous les trois ?

Remarquons d'abord que le cercle circonscrit Γ au triangle ABC est orthogonal à tous les cercles des faisceaux tels que $\mathscr{F}_A$, puisque $(\mathscr{F}_A)^\circ$ est le

faisceau à points de base C et D, qui contient Γ. Les trois faisceaux donnés appartiennent donc à un même plan projectif Π de $\mathbb{P}_3$. Un faisceau $\mathscr{F}$ les rencontre donc tous les trois si, et seulement si, il est lui-même inclus dans Π, c'est-à-dire si, et seulement si, il est constitué de cercles-droites orthogonaux à Γ.



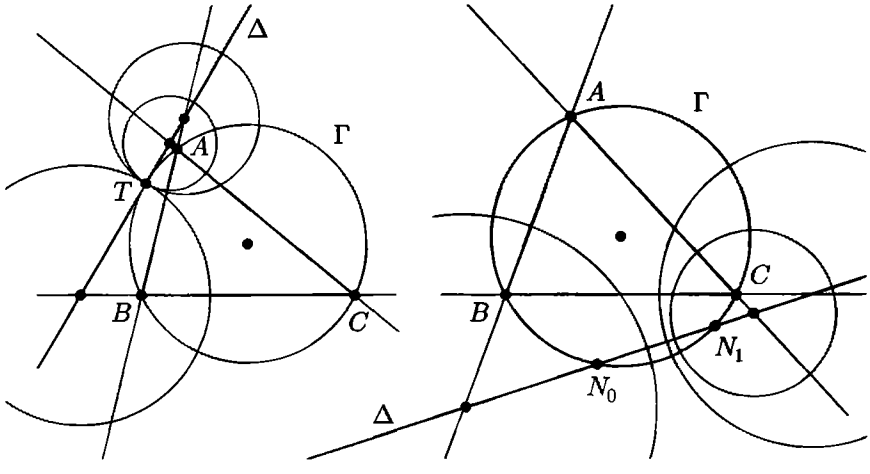
Cette figure illustre *un* des cas particuliers de la configuration : ici, nous choisissons une droite Δ disjointe de Γ et considérons le faisceau $\mathscr{F}$ des cercles-droites orthogonaux à Γ et centré sur Δ.

Puisque Δ coupe les côtés du triangle en des points Ω_A, Ω_B et Ω_C extérieurs à Γ, on peut construire des cercles de rayons > 0 centrés en ces points et orthogonaux à Γ. Ces trois cercles, appelés Γ_A, Γ_B et Γ_C appartiennent à un même faisceau $\mathscr{F}$. Ce faisceau est à points de base puisqu'il ne contient que des cercles-droites non triviaux. Nous avons appelé M_0 et M_1 ces points de base ; ils sont alignés avec Ω, centre de Γ et la droite qui porte ces trois points est orthogonale à Δ.

D'autres cas sont possibles : si Δ est tangente à Γ en un point T, le faisceau $\mathscr{F}$ ainsi construit est un faisceau de cercles tangents en T. Enfin, si Δ coupe Γ en deux points N_0 et N_1, alors $\mathscr{F}$ admet ces deux points comme points de PONCELET, puisque ce sont les centres de deux cercles-points du faisceau. Selon la position de Δ, il est possible que deux des points Ω_A, Ω_B

et Ω_C soient intérieurs à Γ. Dans ce cas, les cercles correspondants sont vides.

La figure qui suit illustre deux de ces exemples : à gauche, la droite Δ est tangente à Γ en T ; à droite, elle est sécante à Γ, mais coupe les côtés du triangle en des points extérieurs à Γ.



Parmi les situations ainsi mises en évidence, deux sont intéressantes. Rappelons que, puisque le faisceau $\mathscr{F}_A$ admet B et C comme points de PONCELET, les cercles-droites qu'il contient sont des cercles d'APOLLONIUS du segment BC, et il en va de même des deux autres faisceaux donnés.

Or, le faisceau $\mathscr{F}_A$ contient en particulier la médiatrice du segment BC et, de même, les deux autres contiennent respectivement les médiatrices de CA et de AB. Maintenant, ces trois médiatrices appartiennent à un même faisceau $\mathscr{F}$ puisqu'elles concourent (en le point Ω). Nous avons donc là un exemple ancestral de faisceau du type recherché. Notons aussi que les trois médiatrices sont des diamètres de Γ et lui sont donc bien orthogonales.

La seconde configuration intéressante est plus cachée. Le lecteur est invité à se reporter à la figure du **V-8.3**. Là, nous avions commencé par construire les trois cercles Γ_A, Γ_B et Γ_C : par exemple, le premier était le lieu des points M tels que $MB/MC = AB/AC$. Nous avions établi qu'ils concouraient en les *centres isodynamiques* du triangle ABC et, de ce fait, cela revenait à prouver qu'ils appartiennent à un même faisceau. La droite Δ n'est alors autre que le lieu des centres des cercles du faisceau, et elle passe bien entendu par les points Ω_A, Ω_B et Ω_C.

5.3. Trois faisceaux concourants

Conservons le triangle ABC de la section précédente, et appelons encore Γ le cercle circonscrit de celui-ci. Cette fois, nous définissons le faisceau $\mathscr{F}'_A$ comme le faisceau à points de base B et C. C'est donc le faisceau orthogonal au faisceau appelé $\mathscr{F}_A$ précédemment, et nous définissons $\mathscr{F}'_B$ et $\mathscr{F}'_C$ à l'avenant.

Ces trois nouveaux faisceaux sont concourants, car ils ont précisément en commun le cercle Γ. En revanche, aucun plan ne les contient tous les trois : sinon, il existerait un vecteur V non nul tel que $\mathbf{C}_V$ soit orthogonal aux trois faisceaux. Or, seul le cercle-point $\{A\}$ est orthogonal à la fois à $\mathscr{F}'_B$ et à $\mathscr{F}'_C$, mais il n'est pas orthogonal à $\mathscr{F}'_A$.

Dans ces conditions, un faisceau $\mathscr{F}'$ les rencontre tous les trois si, et seulement si, il contient leur intersection, c'est-à-dire le cercle Γ.

Cette configuration n'a d'intérêt que parce que nous connaissons explicitement de tels faisceaux : celui des cercles-droites centrés en O, ou celui engendré par Γ et par le cercle d'EULER Γ', lorsque ABC n'est pas équilatéral. L'axe radical de ce faisceau est alors l'axe orthique du triangle, voir le **II-2.13**.

5.4. Pour terminer en beauté

Nous partons encore une fois d'un triangle ABC ni isocèle ni rectangle, et nous appelons A', B' et C' les symétriques respectifs des sommets par rapport aux côtés opposés. Nous appelons $\mathscr{F}_A$, $\mathscr{F}_B$ et $\mathscr{F}_C$ les faisceaux à points de base respectifs (A, A'), (B, B') et (C, C'). *La famille* $\mathbf{F}$ *des faisceaux* $\mathscr{F}$ *rencontrant ces trois faisceaux va se révéler beaucoup plus complexe que les deux précédentes.*

En plus de la figure de la page **233**, à laquelle nous renvoyons le lecteur, nous avons jalonné cette étude de plusieurs autres figures, dans les quelques pages qui suivent. L'idéal aurait été de disposer de ces figures et du texte sur une page de gauche et une de droite[78]. Faute de pouvoir réaliser cela, nous invitons le lecteur à tracer sa propre figure, fût-ce à main levée, ce afin de suivre plus aisément les explications qu'il va trouver.

Remarquons d'abord que les axes radicaux des trois faisceaux sont respectivement AA', BB' et CC', c'est-à-dire les hauteurs du triangle, qui concourent en l'orthocentre H du triangle. Un premier faisceau $\mathscr{F}_1 \in \mathbf{F}$

[78] Le typographe les nomme respectivement *fausse page* et *belle page*.

possible est donc le faisceau de droites de base H [79].

Reportons-nous à présent à la figure de la page **233**, et à l'exercice qu'elle illustre ; nous avons construit là la droite Δ qui porte l'intersection Ω_A de la médiatrice de OA avec BC et les deux autres points définis de même. Étant centré sur BC et passant par A, le cercle Γ_A de centre Ω_A et qui passe par A fait partie du faisceau $\mathscr{F}_A$, et, de même, les cercles analogues Γ_B et Γ_C font partie des faisceaux $\mathscr{F}_B$ et $\mathscr{F}_C$ respectivement. En outre, ces trois cercles sont dans un même faisceau $\mathscr{F}_2$ puisqu'ils concourent en O et en son symétrique O' par rapport à Δ. C'est bien dire que $\mathscr{F}_2 \in \mathbf{F}$. La droite des centres de ce faisceau est Δ et son axe radical est OO', la droite orthogonale en O à Δ.

Nous pouvons déterminer aussi un faisceau $\mathscr{F}_A^0 \in \mathbf{F}$ dont la droite des centres soit le côté BC du triangle. Il n'y a d'ailleurs qu'une manière de le construire : le cercle-droite de ce faisceau qui appartient aussi à $\mathscr{F}_B$ doit être centré sur AC et passer par les points B et B'. Étant centré sur BC *et* sur AC, il ne peut qu'être centré en C. C'est donc le cercle γ de centre C et de rayon CB (il passe alors effectivement aussi par B'). De même, le cercle γ' de centre B et de rayon BC appartient à $\mathscr{F}_C$ et est centré sur BC. Les cercles γ et γ' se coupent en deux points D et D' [80]

Maintenant, les points A et D sont distincts (puisque le triangle ABC n'est pas isocèle, et donc *a fortiori* n'est pas équilatéral) et la médiatrice de AD, qui a donc bien un sens, n'est pas parallèle à BC ; sinon, on aurait $A \in DD'$ et le triangle ABC serait isocèle en A. Donc, cette médiatrice coupe BC en un point Ω_A^0 équidistant de A et de D. Le cercle γ'' centré en ce point et passant par A passe aussi par D, et donc aussi par A' et D' puisque ces derniers sont les symétriques de A et D par rapport à BC.

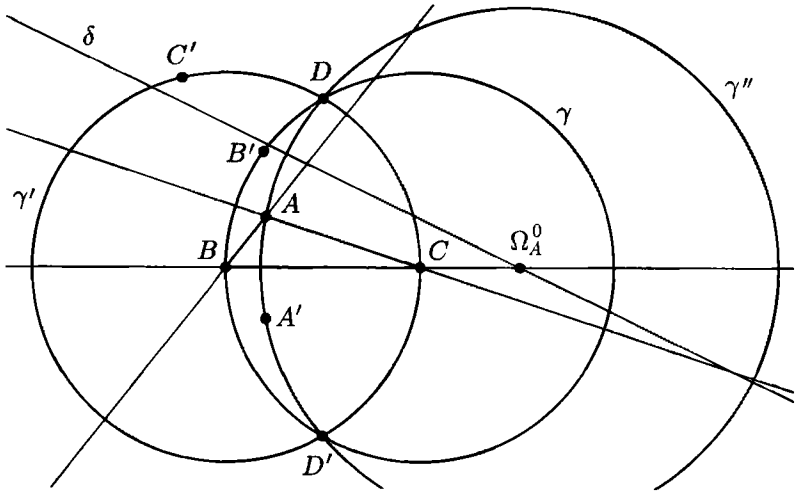
Inversement, les cercles γ, γ' et γ'' sont bien dans un même faisceau $\mathscr{F}_A^0$ (celui à points de base D et D') et la droite des centres de ce faisceau est bien BC.

On peut aussi bien sûr procéder de même pour construire un faisceau $\mathscr{F}_B^0$ et un faisceau $\mathscr{F}_C^0$ ayant respectivement CA et AB comme droites des centres.

---

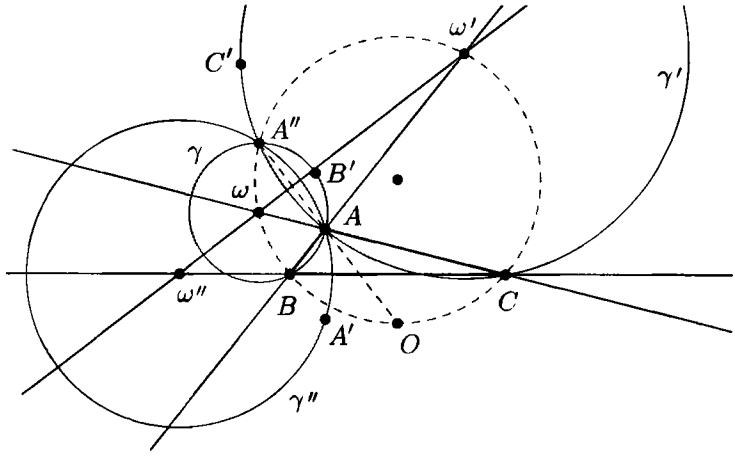
[79] Nous avons choisi un triangle ABC générique, mais le choix de nos trois faisceaux n'est pas générique : en effet, les axes radicaux de trois faisceaux ne concourent pas en général. Le fait que le lieu des centres des faisceaux $\mathscr{F} \in \mathbf{F}$ reste tangent à une parabole, et non à une conique générique, est lié à cette particularité. En effet, pour le faisceau $\mathscr{F}_1$, la droite des centres est rejetée à l'infini ; or le contact avec la droite de l'infini caractérise les paraboles.

[80] Mais oui ! C'est une construction classique : les points D et D' sont les deux points tels que les triangles BCD et BCD' soient équilatéraux.



Nous n'en restons pas là : nous pouvons encore détailler la construction de six autres faisceaux dans **F**. En voici une, les cinq autres étant analogues.

Le cercle circonscrit γ à ABB' [81] est centré sur la médiatrice de BB', qui est AC. De même, le cercle circonscrit γ' à ACC' est centré sur AB. Appelons ω et ω' ces deux centres. Les cercles γ et γ' se coupent en A, et donc en un second point $A'' \neq A$ puisque les points A, ω et ω' ne sont pas alignés.



Attardons-nous quelques instants sur cette figure, fort digne d'intérêt : les

[81] Ce cercle a bien un sens, car ces trois points sont non alignés ; sinon, le triangle ABC serait rectangle en A.

triangles $B\omega A$ et $A\omega' C$ sont isocèles et ont le même angle en A. De cela suit que les angles $\widehat{B\omega A}$ et $\widehat{A\omega' C}$ sont égaux. Donc, les points $BC\omega\omega'$ sont cocycliques. Le cercle qui passe par ces quatre points passe aussi par O, centre du cercle circonscrit à ABC, et par A''. En effet, les médiatrices de AB et AC sont respectivement $O\omega$ et $O\omega'$. Donc, les angles $\widehat{\omega O\omega'}$ et $\widehat{BAC}$ sont égaux *modulo* π, de même que les angles $\widehat{\omega B\omega'}$ et $\widehat{BAC}$.

Il s'ensuit que $\omega BO\omega'$ sont cocycliques, et on procède de même pour montrer que A'' est aussi sur ce cercle.

D'ailleurs, O est l'orthocentre du triangle $\omega A\omega'$ puisque l'on a $O\omega \perp A\omega'$ et $O\omega' \perp A\omega$. Donc AA'' est la troisième hauteur de ce triangle, et cela montre que OAA'' sont alignés.

En particulier, la droite $\omega\omega'$ n'est pas parallèle à BC ; sinon, OA serait orthogonal à BC et le triangle ABC serait isocèle en A. Cette droite coupe donc BC en un point ω'', et le cercle γ'' centré en ce point et passant par A passe aussi par A''.

Les cercles γ, γ' et γ'' sont donc dans un même faisceau et nous avons ainsi construit un faisceau élément de $\mathbf{F}$.

Nous pouvons en construire cinq autres : un premier en remplaçant A par A' dans la définition de γ et de γ' puis quatre autres encore en échangeant par symétrie des rôles de A, B et C.

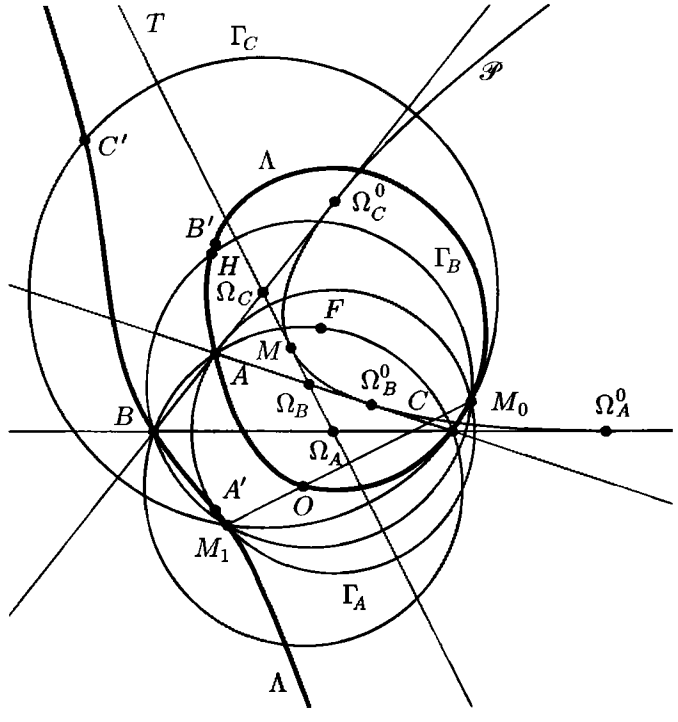
Voici les résultats essentiels que l'on obtient à propos de la famille $\mathbf{F}$; les démonstrations, qui ressortissent plutôt au calcul barycentrique, se trouvent dans l'Annexe **A**.

Tout d'abord, il existe une parabole $\mathscr{P}$ tangente aux trois côtés du triangle ABC telle que la famille des droites des centres des faisceaux $\mathscr{F} \in \mathbf{F}$ soit la famille des tangentes à $\mathscr{P}$. Comme tangentes particulières à $\mathscr{P}$ se trouvent donc toutes les droites des centres des faisceaux précédemment construits, mais nous ne les avons pas représentées sur la figure afin d'en préserver la lisibilité. Les points de contact de $\mathscr{P}$ avec les trois côtés du triangle sont précisément les points Ω_A^0, Ω_B^0 et Ω_C^0.

La directrice de $\mathscr{P}$ est l'axe d'EULER OH du triangle ; les symétriques de cette droite par rapport aux trois côtés se coupent en un point F du cercle circonscrit à ABC, point qui est le foyer de $\mathscr{P}$.

Enfin, il est remarquable que le point O appartient à l'axe radical de chacun des faisceaux de la famille $\mathbf{F}$.

La figure qui suit rassemble une partie des informations précédentes.



La courbe bipartite Λ qui apparaît sur cette figure n'a pas encore été étudiée. Il s'agit du lieu des points de base des faisceaux de $\mathbf{F}$. Détaillons-en ici quelques-unes des propriétés les plus intéressantes.

Cette courbe a un air de famille avec celle étudiée au **IV-3.4** et que nous avions appelée Γ_δ. C'est en effet une cubique circulaire, et elle passe par les points de base des faisceaux particuliers que nous avons décrits précédemment, notamment donc les points A, B, C, A', B', C', O et H.

Tout cela demande des calculs, aussi n'en donnons-nous que les étapes principales nécessaires à la compréhension de la situation.

Plaçons-nous dans l'espace projectif $\mathbb{P}_3$ des équations des cercles-droites. Nous ne savons pas grand-chose des points de base d'un faisceau, mais nous savons que les cercles-points d'un faisceau correspondent aux intersections de la droite projective des équations des cercles-droites de ce faisceau avec le cône isotrope C_0 défini au **VI-1.3**. Le bon réflexe est donc de considérer les *orthogonaux* des faisceaux de $\mathbf{F}$: les points de base des faisceaux de $\mathbf{F}$ sont les cercles-points des faisceaux orthogonaux à ces faisceaux.

Dire qu'un faisceau $\mathscr{F}$ rencontre les faisceaux $\mathscr{F}_A$, $\mathscr{F}_B$ et $\mathscr{F}_C$ équivaut à dire que son orthogonal $\mathscr{F}^\circ$ rencontre les orthogonaux $\mathscr{F}_A^\circ$, $\mathscr{F}_B^\circ$ et $\mathscr{F}_C^\circ$ de

ces trois faisceaux. Il est facile de voir que deux quelconques de ces faisceaux ne sont pas coplanaires. Dans ces conditions, l'ensemble des droites rencontrant les trois droites données $\mathscr{F}_A^\circ$, $\mathscr{F}_B^\circ$ et $\mathscr{F}_C^\circ$ est une quadrique réglée **Q** (voir par exemple **[4]**, exercices du chapitre XII du tome IV).

Une équation homogène de cette quadrique est $Q(X,Y,Z,T)=0$, où Q est une forme quadratique non dégénérée. Des considérations générales sur les courbes algébriques montrent alors que le lieu Λ est une courbe algébrique de degré $\leqslant 4$. Ici, nous allons préciser le degré effectif grâce à un calcul.

Remarquons tout d'abord que $Q(0,0,1,0)=0$. En effet, considérons le faisceau des cercles-droites centrés en l'orthocentre H du triangle ABC; ce faisceau rencontre les trois faisceaux orthogonaux $\mathscr{F}_A^\circ$, $\mathscr{F}_B^\circ$ et $\mathscr{F}_C^\circ$: par exemple, il existe un cercle centré en H et orthogonal à tous les cercles passant par A et A' [82]. Comme le cercle-droite de coordonnées homogènes $(0,0,1,0)$ appartient à ce faisceau (c'en est le point à l'infini), le résultat annoncé s'ensuit.

Puisque son terme en Z^2 est nul, la forme quadratique Q est donc de la forme

$$Q(X,Y,Z,T)=Z\underbrace{(uX+vY+wT)}_{\ell(X,Y,T)}-Q'(X,Y,T)\,,$$

où Q' est une forme quadratique en les variables X, Y et T. Le lieu Λ est donc l'ensemble des points de coordonnées homogènes (X,Y,T) dans le plan tels que le système linéaire en Z

$$\begin{cases} X^2+Y^2 &= ZT \\ Z\cdot\ell(X,Y,T) &= Q'(X,Y,T) \end{cases}$$

admette une solution. Il est alors immédiat qu'une équation homogène de Λ, obtenue par élimination de Z entre les deux équations du système précédent, est

$$\ell(X,Y,T)\cdot(X^2+Y^2)=T\cdot Q'(X,Y,T)$$

Cette équation définit bien une cubique circulaire à condition que $(u,v)\neq(0,0)$ [83]. C'est effectivement le cas : si l'on avait $u=v=0$, alors on aurait aussi $w\neq 0$ puisque la non-dégénérescence de Q implique la non-nullité de

[82] C'est plus précisément le cercle lieu des points M tels que

$$HM^2=\overline{HA}\cdot\overline{HA'}$$

La vérification de cette propriété repose entre autres sur le fait que H appartient à la droite AA'. À noter que ce cercle peut ne pas être réel.

[83] En effet, le degré de l'équation en (X,Y) est alors effectivement 3, et la cubique est *circulaire*, car elle passe par les points cycliques, dont les coordonnées homogènes $(1,\pm\mathrm{i},0)$ vérifient l'équation obtenue. La cubique a alors une direction asymptotique réelle, parallèle à la droite d'équation $\ell(X,Y,T)=0$. En fait, cette direction est celle de l'axe d'EULER du triangle ABC.

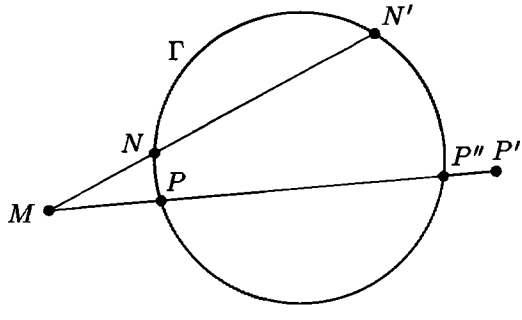
ℓ. L'équation précédente montrerait alors que Λ est la réunion de la droite à l'infini et d'une conique. Cette conique, contenant les trois points alignés A, A' et H contiendrait toute la droite AA' et de même les droites BB' et CC'. C'est bien sûr impossible.

Expliquons la raison heuristique de ce qui précède : une droite du plan projectif complexe $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, d'équation homogène $pX + qY + sT = 0$ est la projection du plan de l'espace $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ ayant la même équation, mais considérée par rapport au quadruplet (X, Y, Z, T). Ce plan coupe les quadriques d'équations respectives $Z \cdot \ell(X, Y, T) = Q'(X, Y, T)$ et $X^2 + Y^2 = ZT$ selon deux coniques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ qui ont en commun le point à l'infini de coordonnées homogènes $(0, 0, 1, 0)$ [84]. Ces coniques se coupent donc en trois autres points. Il faut donc s'attendre que toute droite du plan $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ coupe le complété projectif complexe de Λ en trois points, ce qui suggère que Λ est une cubique. En l'absence de ce point commun $(0, 0, 1, 0)$, c'est quatre points d'intersection qu'il fallait attendre et donc une courbe de degré 4 (une *quartique*) comme lieu Λ.

6. Corrigé des exercices

6.1. L'exercice du VI-2.3

a. Faisons un dessin faux pour prouver le vrai :



Les points N, N', P ne sont pas alignés. Appelons Γ le cercle passant par ces trois points ; sur la figure, Γ ne passe pas *a priori* par P'.

La sécante MP recoupe Γ en un point P''. On a donc

$$\mathrm{p}_\Gamma(M) = \overline{MN} \cdot \overline{MN'} = \overline{MP} \cdot \overline{MP''}$$

Vu les hypothèses, on en déduit que $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = \overline{MP} \cdot \overline{MP''}$. Puisque $M \neq P$, cela entraîne que $P' = P''$. Ainsi, P' est bien sur Γ, donc cocyclique avec N, N' et P.

[84] D'où l'intérêt d'avoir mis en évidence la présence de ce point.

b. Choisissons un repère orthonormé avec origine au point M. L'équation de $\mathscr{C}$ est de la forme $\Phi(X,Y)=0$, avec

$$\Phi(X,Y)=aX^2+2bXY+cY^2+2dX+2eY+f\,.$$

Les trois sécantes menées de M à $\mathscr{C}$ ont pour équation paramétrique respectivement $(X=t\cos\vartheta_i, Y=t\sin\vartheta_i)$, avec $1\leqslant i\leqslant 3$, où t désigne le paramètre de circulation et où les ϑ_i sont deux à deux distincts *modulo* π.

Pour $i=1$, la sécante coupe $\mathscr{C}$ en des points dont les paramètres sont solutions de l'équation en t

$$\underbrace{(a\cos^2\vartheta_1+2b\cos\vartheta_1\sin\vartheta_1+c\sin^2\vartheta_1)}_{\overset{\text{déf}}{=}A_1\,(\neq 0)}t^2+2(d\cos\vartheta_1+e\sin\vartheta_1)t+f=0\,.$$

Comme ces points d'intersection sont N et N', on en déduit que $\overline{MN}\,\overline{MN'}$ est le produit des racines[85] de cette équation, c'est-à-dire f/A_1. On procède de même pour les deux autres sécantes, et de l'hypothèse suit $A_1=A_2=A_3$.

Il reste à vérifier que, puisque la fonction F définie par $\vartheta\in\mathbb{R}\longmapsto a\cos^2\vartheta+2b\cos\vartheta\sin\vartheta+c\sin^2\vartheta$ prend trois fois la même valeur dans un intervalle d'amplitude π, alors $a=c$ et $b=0$. Ainsi, on aura bien établi que $\mathscr{C}$ est un cercle.

Linéarisons F : on a, pour tout ϑ, $2F(\vartheta)=a'\cos 2\vartheta+b'\sin 2\vartheta+c'$, avec $a'=a-c, b'=2b$ et $c'=a+c$. On a ensuite $2F(\vartheta)=\varrho\cos(2\vartheta-\vartheta_0)+c'$, avec $\varrho=\sqrt{a'^2+b'^2}$, $\cos\vartheta_0=a'/\varrho$ et $\sin\vartheta_0=b'/\varrho$.

Si $\varrho\neq 0$, on voit tout de suite que F prend chacune de ses valeurs deux fois et non trois dans tout intervalle d'amplitude π. Donc, *a contrario*, on a $\varrho=0$, c'est-à-dire $a=c$ et $b=0$. Cqfd.

c. Avec les notations de l'énoncé, on remarque tout de suite que les trois cercles sont deux à deux sécants : par exemple, N et N' appartiennent à $\Gamma'\cap\Gamma''$, et donc $\Gamma'\cap\Gamma''=\{N,N'\}$ puisque $\Gamma'\neq\Gamma''$.

Il y a donc deux possibilités.

1. Soit les centres des trois cercles ne sont pas alignés. Dans ce cas, ils ont un centre radical M ; en outre l'axe radical des cercles Γ' et Γ'' est la droite NN', et cela montre que $M\in NN'$. De même, $M\in PP'$ et $M\in QQ'$.
   Comme M est le centre radical des trois cercles, on a
   $$\overline{MN}\cdot\overline{MN'}=\overline{MP}\cdot\overline{MP'}=\overline{MQ}\cdot\overline{MQ'}\,.$$
   Vu la question **b.**, cela montre que $\mathscr{C}$ est un cercle, et donc que $\Gamma=\Gamma'=\Gamma''$, ce qui est contradictoire.

[85] Cela résulte du choix du vecteur **unitaire** $(\cos\vartheta,\sin\vartheta)$ pour paramétrer cette droite.

2. Soit les centres des trois cercles sont sur une même droite Δ. Les points N et N' sont donc symétriques par rapport à cette droite, ainsi que les points P et P' et que les points Q et Q'.
Or, par les cinq points N, N', P, P', Q passe au moins une conique $\mathscr{C}$. Admettons pour l'instant que Δ est axe de symétrie de $\mathscr{C}$: alors, le point Q' appartient aussi à $\mathscr{C}$.
Réciproquement, on peut obtenir la configuration recherchée ainsi qu'il suit : on se donne une droite Δ ; on construit trois cercles centrés sur Δ deux à deux sécants, et toute conique passant par cinq de leurs six points d'intersection (deux à deux) passe aussi par le sixième.

Il reste à établir le résultat admis dans le second cas *supra*. Choisissons un repère orthonormé tel que Δ soit l'axe Ox. Une équation de $\mathscr{C}$ est alors de la forme $\Phi(X,Y) = 0$, avec

$$\Phi(X,Y) = aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2dX + 2eY + f\,.$$

Les coordonnées des six points sont de la forme

$$N(x,y)\,, N'(x,-y)\,, P(x',y')\,, P'(x',-y')\,, Q(x'',y'') \text{ et } Q'(x'',-y'')\,,$$

avec $yy'y'' \neq 0$ puisque les six points sont distincts. On a donc

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \quad , \quad ax^2-2bxy+cy^2+2dx-2ey+f=0$$

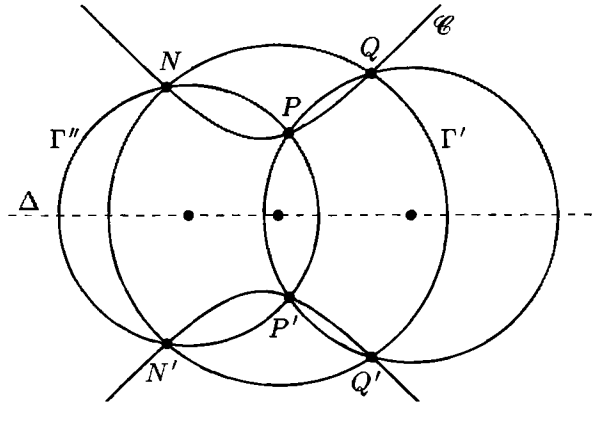
$$ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + 2dx' + 2ey' + f = 0$$

et

$$ax'^2 - 2bx'y' + cy'^2 + 2dx' - 2ey' + f = 0\,.$$

On en déduit par soustraction que $(bx + e)y = 0$ et $(bx' + e)y' = 0$, puis $bx + e = bx' + e = 0$. Or, $x \neq x'$ puisque, sinon, N, N', P, P' seraient alignés. On en conclut que $b = e = 0$, de sorte que $\mathscr{C}$ est bien symétrique par rapport à Ox, c'est-à-dire par rapport à Δ.

La figure qui suit illustre la configuration qui vient d'être mise en évidence :



6.2. L'exercice du VI-3.1

Donnons-nous un repère orthonormé direct du plan, avec origine au point O ; si, par exemple, (x_A, y_A), etc., sont les coordonnées des sommets du triangle, une équation cartésienne de $\mathscr{C}_\lambda$ est de la forme

$$\lambda_A\big((X-x_B)(X-x_C)+(Y-y_B)(Y-y_C)\big)+ \\ +\lambda_B\big((X-x_C)(X-x_A)+(Y-y_C)(Y-y_A)\big)+ \\ +\lambda_C\big((X-x_A)(X-x_B)+(Y-y_A)(Y-y_B)\big)=\lambda\,,$$

avec $\lambda_A = \dfrac{1}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}} = \dfrac{1}{2bc\cos\widehat{A}}$, etc.

Si on développe ces équations, on obtient des expressions de la forme

$$(\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C)(X^2+Y^2)-2uX-2vY+w=\lambda\,,$$

dans lesquelles u et v sont indépendants de λ. Une fois que nous aurons vérifié que $\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C \neq 0$, nous aurons bien établi qu'il s'agit d'un faisceau de cercles concentriques.

Or, $\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C = \dfrac{a/\cos\widehat{A}+b/\cos\widehat{B}+c/\cos\widehat{C}}{2abc}$ et le numérateur n'est pas nul. En effet, $(a/\cos\widehat{A}, b/\cos\widehat{B}, c/\cos\widehat{C})$ sont les coordonnées barycentriques de H et la somme de ces trois composantes est donc $\neq 0$.

Maintenant, il est immédiat de vérifier que A, B et C satisfont l'équation $\mathscr{E}_1$. Cela montre que $\mathscr{C}_1$ passe par ces trois points : c'est donc le cercle circonscrit Γ au triangle ABC. Cela nous apprend en outre que tous les cercles du faisceau sont centrés en O (et donc que $u=v=0$).

Reste à établir que

$$\frac{\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}+\frac{\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}}{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}+\frac{\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}}{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}=-1\,.$$

Pour cela, appelons a, b et c les affixes des sommets du triangle, une fois P identifié à $\mathbb{C}$ grâce au choix du repère orthonormé direct. Supposons en outre que le rayon R du cercle circonscrit est égal à 1, ce qui est toujours possible au prix d'une homothétie de centre O. L'affixe de H est donc $a+b+c$.

En outre, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \operatorname{Re}\big((b-a)\overline{(c-a)}\big)$. Comme $\overline{a}=1/a$, etc., on a aussi

$$2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\operatorname{Re}\big((b-a)(1/c-1/a)\big) = (b-a)(1/c-1/a)+(c-a)(1/b-1/a)\,,$$

c'est-à-dire encore $\dfrac{(b-a)(a-c)(b+c)}{abc}$. On procède de même avec les nu-

mérateurs, et l'on est conduit à vérifier que

$$\frac{(a+b)(a+c)(b-c)+(b+c)(b+a)(c-a)+(c+a)(c+b)(a-b)}{(c-b)(b-a)(a-c)}=1.$$

Or, cela résulte d'une vérification triviale (développer haut et bas les produits)[86].

Remarque. Le résultat étant établi, nous ne faisons plus l'hypothèse, uniquement simplificatrice, que $R=1$. Au **VI-2.1**, nous avons établi la formule suivante,

$$\mathrm{p}_\Gamma(H)=2\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}.$$

En outre, cette puissance vaut aussi OH^2-R^2. Nous pouvons donc écrire, après factorisation de la formule faisant l'objet de l'exercice,

$$\frac{OH^2-R^2}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}+\frac{1}{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}+\frac{1}{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}\right)}_{=\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C}=-1.$$

Or,

$$\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C=\frac{a/\cos\widehat{A}+b/\cos\widehat{B}+c/\cos\widehat{C}}{2abc}=2R\frac{\operatorname{tg}\widehat{A}+\operatorname{tg}\widehat{B}+\operatorname{tg}\widehat{C}}{8R^3\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}}.$$

En outre, $\operatorname{tg}\widehat{A}+\operatorname{tg}\widehat{B}+\operatorname{tg}\widehat{C}=\operatorname{tg}\widehat{A}\cdot\operatorname{tg}\widehat{B}\cdot\operatorname{tg}\widehat{C}$, car $\operatorname{tg}\widehat{C}=\operatorname{tg}(\pi-\widehat{A}-\widehat{B})=-\dfrac{\operatorname{tg}\widehat{A}+\operatorname{tg}\widehat{B}}{1-\operatorname{tg}\widehat{A}\cdot\operatorname{tg}\widehat{B}}$.

De tout cela suit que $OH^2=R^2(1-8\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C})$. En particulier, on a établi que $\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}\leqslant 1/8$, avec égalité si, et seulement si, $OH=0$, c'est-à-dire si, et seulement si, le triangle ABC est équilatéral.

Cette dernière majoration résulte aussi d'une étude d'extrema : si on remarque que $\cos\widehat{C}=-\cos(\widehat{A}+\widehat{B})$, alors, majorer $\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}$ revient à majorer la fonction F de classe C^1 définie par

$$F(\widehat{A},\widehat{B})\overset{\text{déf}}{=}-\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos(\widehat{A}+\widehat{B}),$$

où le couple $(\widehat{A},\widehat{B})$ décrit l'ouvert $\Omega\in\mathbb{R}^2$ défini par le système d'inégalités

$$\widehat{A}>0,\quad \widehat{B}>0,\quad \widehat{A}+\widehat{B}<\pi.$$

La fonction F admet un seul point critique dans Ω, au point $(\pi/3,\pi/3)$.

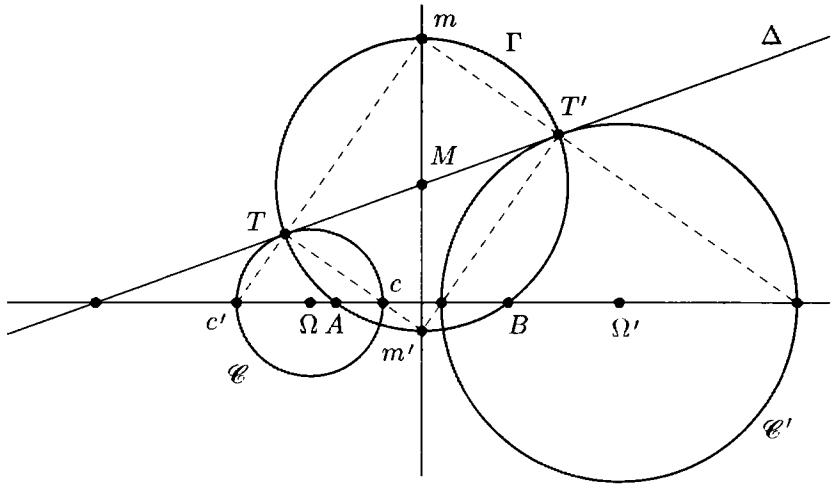
[86] On peut aussi raisonner par factorialité dans l'anneau $\mathbb{C}[X,Y,Z]$. En effet, $P(X,Y,Z)=(X+Y)(X+Z)(Y-Z)+(Y+Z)(Y+X)(Z-X)+(Z+X)(Z+Y)(X-Y)$ admet comme facteur $(Z-Y)(Y-X)(X-Z)$ puisque $P(X,X,Z)=P(X,Y,X)=P(X,Y,Z)=0$. On conclut alors à la proportionnalité de ces deux polynômes grâce à un argument de degré, et à leur égalité grâce à une évaluation de $P(0,1,2)$ par exemple.

Un raisonnement de topologie et de calcul différentiel confirme alors que cette fonction admet un maximum absolu en ce point, égal à $1/8$.

En revanche, la fonction F n'atteint pas de minimum sur Ω. Elle possède une borne inférieure (non atteinte) égale à -1. Si la majoration $F(\widehat{A},\widehat{B}) \leqslant 1/8$ ne fait que traduire l'inégalité $OH^2 \geqslant 0$, la minoration $F(\widehat{A},\widehat{B}) > -1$ confirme la majoration $OH^2 < 9R^2$, c'est-à-dire encore $OH < 3R$. Puisque $OH = 3OG$, elle consiste tout simplement à dire que le centre de gravité G appartient au disque de frontière Γ.

6.3. Les exercices du VI-3.3.3

L'exercice a



Aidons-nous de la figure *supra*. Comme dans l'étude du cas d'un faisceau à points de base, appelons $\mathscr{F}$ le faisceau à points de PONCELET A et B, et $\mathscr{F}^\circ$ son faisceau orthogonal, dont A et B sont *points de base*.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle solution, et T le point en lequel il touche Δ. Alors, encore une fois, le cercle de $\mathscr{F}^\circ$ qui passe par T est centré sur Δ : le centre M de ce cercle est donc à l'intersection de Δ et de la médiatrice de AB.

Réciproquement, soit M le point ainsi défini ; il existe un cercle Γ de $\mathscr{F}^\circ$ (et un seul) centré en M, et il coupe Δ en deux points T et T'. Il existe donc deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ solutions : ce sont les cercles de $\mathscr{F}$ passant respectivement par T et T' et nous avons vu comment les construire.

Un examen attentif de la figure permet de simplifier la construction : le cercle Γ coupe la médiatrice de AB en deux points m et m', et les droites Tm et Tm' coupent AB en des points c et c'. Le cercle $\mathscr{C}$ est alors le cercle de diamètre cc'. On a de même une construction analogue pour $\mathscr{C}'$.

En effet, soit σ la similitude de centre T d'angle $-\pi/2$ envoyant M sur Ω, centre de $\mathscr{C}$. On a alors $\mathscr{C} = \sigma(\Gamma)$; de même, on a $AB = \sigma(mm')$, car l'image de mm' est perpendiculaire à mm' et passe par $\Omega = \sigma(M)$.

Donc, $\sigma(m)$ et $\sigma(m')$ sont à l'intersection de $\mathscr{C}$ et de AB. Or, on a aussi l'orthogonalité des droites Tm et Tm' [87] et celle des droites Tm et $\sigma(Tm) = T\sigma(m)$.

De cela suit l'alignement $Tm'\sigma(m)$ et, de même, l'alignement $Tm\sigma(m')$. Les points $\sigma(m)$ et $\sigma(m')$ sont donc à l'intersection de AB et, respectivement, de Tm' et de Tm, ce qu'il restait à établir.

L'exercice b

Considérons le faisceau $\mathscr{F}$ des cercles tangents à D en A ; le faisceau orthogonal est le faisceau des cercles centrés sur D et passant par A. Le point M est sur l'axe radical de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{C}'$. Comme MT et MA sont les tangentes à $\mathscr{C}$ menées de M et que MT' et MA sont les tangentes à $\mathscr{C}'$ menées de M, on a donc

$$\mathrm{p}_{\mathscr{C}}(M) = \mathrm{p}_{\mathscr{C}'}(M) = MA^2 = MT^2 = MT'^2,$$

d'où suit l'égalité de distances $MA = MT = MT'$.

Les droites $M\Omega$ et $M\Omega'$ sont donc bissectrices respectivement des couples (MT, MA) et (MA, MT'). Comme on a l'alignement TMT', on en déduit l'orthogonalité des droites $M\Omega$ et $M\Omega'$. Si l'on désigne par R et R' les rayons respectifs des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, on a

$$MA^2 = M\Omega^2 - R^2 = M\Omega'^2 - R'^2 \quad \text{et} \quad \Omega\Omega' = R + R'.$$

Du théorème de PYTHAGORE appliqué au triangle $\Omega M\Omega'$ suit alors que $MA = \sqrt{RR'}$.

Ensuite, on a $A\Omega/A\Omega' = R/R'$, mais aussi $H\Omega/H\Omega' = R/R'$, car H est un centre d'homothétie envoyant $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$. On a donc, en termes de quotients de longueurs orientées :

$$\frac{\overline{\Omega'H}}{\overline{\Omega'A}} : \frac{\overline{\Omega H}}{\overline{\Omega A}} = -1,$$

et cela montre que la division $HA\Omega\Omega'$ est harmonique. Les projections orthogonales de ces quatre points sur Δ sont respectivement $HH'TT'$ et le théorème de THALÈS montre alors tout de suite que la division $HH'TT'$ est également harmonique.

Enfin, les points T et T' sont les points fixes de l'involution de DÉSARGUES induite par $\mathscr{F}$ sur Δ. Puisque C est un cercle de $\mathscr{F}$, il coupe Δ en deux

[87] Puisque T appartient au cercle de diamètre mm'.

points P et P' homologues dans cette involution, de sorte que la division $TT'PP'$ est elle aussi harmonique.

Ce résultat découle aussi de l'orthogonalité des cercles Γ et C :

$$\mathbf{p}_C(M) = \overline{MP}\cdot\overline{MP'} = -MT^2 = \overline{MT}\cdot\overline{MT'}$$

À noter que si on choisit pour C le cercle de diamètre AH, on voit que ce cercle coupe Δ en H et H', et l'on retrouve ainsi le fait que la division $TT'HH'$ est harmonique.

6.4. L'exercice du VI-3.4.2

a. Soit un réseau $\mathscr{R}$, c'est-à-dire un ensemble de cercles-droites du type $\mathbf{C}_V$, où $V \neq 0$ décrit un sous-espace vectoriel $\mathscr{V}$ donné, de dimension 3, de $\mathbb{R}^4$. Puisque la forme quadratique fondamentale q de $\mathbb{R}^4$ est non dégénérée, l'orthogonal $\mathscr{V}^\circ$ de $\mathscr{V}$ est une droite vectorielle. L'on a aussi $\mathscr{V} = (\mathscr{V}^\circ)^\circ$, et le réseau $\mathscr{R}$ est donc l'ensemble des cercles-droites orthogonaux à un certain cercle-droite $\mathscr{C}_0$ (éventuellement vide) d'équation formelle

$$t_0(X^2+Y^2) - 2a_0X - 2b_0Y + c_0 = 0\,.$$

Si $t_0 \neq 0$, une translation d'origine nous ramène au cas où $a_0 = b_0 = 0$ et on peut supposer que $t_0 = 1$. Supposons donc tout cela.

Un cercle-droite d'équation formelle $t(X^2+Y^2) - 2aX - 2bY + c = 0$ appartient donc à $\mathscr{R}$ si, et seulement si, on a la relation d'orthogonalité $0 \times a + 0 \times b + (c + c_0t)/2 = 0$. Le réseau $\mathscr{R}$ est donc l'ensemble des cercles-droites d'équation formelle

$$t(X^2+Y^2-c_0) - 2aX - 2bY = 0\,.$$

Cela montre que $\mathscr{R}$ est l'ensemble des droites passant par O réuni avec l'ensemble des cercles $\mathscr{C}$ tels que $\mathbf{p}_{\mathscr{C}}(O) = -c_0$.

La valeur prise par la forme quadratique fondamentale pour le vecteur $(a, b, -c_0t, t)$ étant $a^2 + b^2 + c_0t^2$, on en déduit que la signature de q_V est $(3,0)$, $(2,0)$ ou $(2,1)$ selon que c_0 est respectivement > 0, nul ou < 0.

Comme le rôle joué par l'origine du repère découle d'une translation préalable de l'origine, nous énonçons : *les réseaux ainsi obtenus sont constitués des droites passant par un point M_0 donné et des cercles par rapport auxquels M_0 a une puissance donnée*[88].

Ce point M_0 pourra être appelé le *centre radical* du réseau puisqu'il a la même puissance par rapport à tous les cercles de $\mathscr{R}$. À noter que, si $c_0 = 0$, le réseau $\mathscr{R}$ est l'ensemble des cercles-droites passant par M_0.

[88] Et la signature de q_V est $(3,0)$, $(2,0)$ ou $(2,1)$ selon que cette puissance, à savoir $-c_0$, est respectivement < 0, nulle ou > 0, c'est-à-dire selon que, respectivement, $\mathscr{C}_0$ est vide, de rayon nul ou de rayon > 0.

Si $t_0 = 0$, mais que $(a_0, b_0) \neq (0,0)$, alors $\mathscr{C}_0$ est une droite, et un changement de repère orthonormé préalable nous ramène au cas où une équation de cette droite est $X = 0$.

Un cercle-droite d'équation formelle $t(X^2 + Y^2) - 2aX - 2bY + c = 0$ appartient dans ce cas à $\mathscr{R}$ si, et seulement si, on a la relation d'orthogonalité $a = 0$. Le réseau $\mathscr{R}$ est donc l'ensemble des cercles-droites d'équation formelle

$$t(X^2 + Y^2) - 2bY + c = 0\,,$$

auquel cas $\mathscr{R}$ est constitué des droites orthogonales à l'axe Oy et des cercles centrés sur cet axe. La forme quadratique fondamentale prend la valeur $b^2 - ct$, de sorte que la signature de q_V est toujours $(2,1)$.

Comme le rôle joué par l'origine du repère découle d'un changement préalable de repère, nous énonçons : *les réseaux ainsi obtenus sont constitués des droites orthogonales à une droite donnée et des cercles centrés sur cette droite.*

Enfin, si $a_0 = b_0 = t_0 = 0$, c'est-à-dire si $\mathscr{C}_0$ est la droite-point à l'infini, on trouve de même que $\mathscr{R}$ est l'ensemble des droites du plan et que la signature de q_V est $(2,0)$.

En conclusion de cette classification, nous avons obtenu cinq type de réseaux, et trois valeurs possibles pour la signature. La signature $(3,0)$ n'a été obtenue qu'une fois, ce qui signifie que les (anti)homographies conservent l'ensemble des réseaux ayant cette signature, c'est-à-dire les réseaux de cercles *orthogonaux à un cercle vide*.

Le théorème de WITT fournit la même certitude théorique que dans le cas des faisceaux. Si $\mathscr{R}$ est un réseau de cercles-droites orthogonaux à un cercle-droite $\mathscr{C}_0$ de rayon > 0, alors une inversion $\mathscr{I}$ le transforme en le réseau des cercles-droites orthogonaux au cercle-droite $\mathscr{I}(\mathscr{C}_0)$. De cela suit que, si deux réseaux sont de signature $(2,1)$, on peut construire une antihomographie qui envoie le premier sur le second.

Reste le cas des réseaux de signature $(2,0)$; comme l'ensemble des droites du plan est aussi l'ensemble des cercles-droites passant par ∞, on voit que, si deux réseaux sont de signature $(2,0)$, on peut construire une inversion qui envoie le premier sur le second. Par exemple, pour que l'image du réseau des cercles-droites passant par M_0 soit le réseau des droites du plan, il suffit de placer le pôle de l'inversion au point M_0 lui-même.

À noter que, avec les notations *supra*, la restriction $q_{\mathscr{V}}$ est non dégénérée dans le cas de réseaux de signature $(3,0)$ ou $(2,1)$. On a bien dans ce cas $\mathscr{V} \cap \mathscr{V}^\circ = \{0\}$, de sorte qu'aucun cercle-droite du réseau n'est orthogonal au réseau.

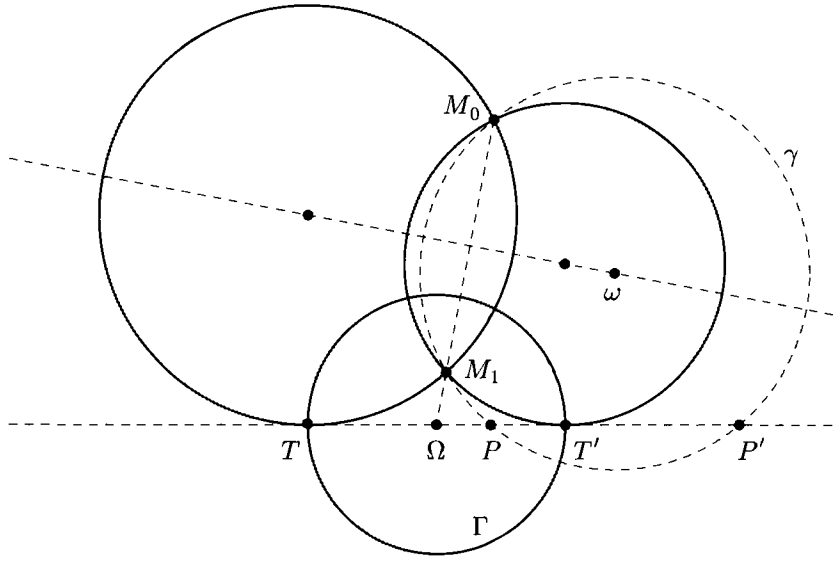
En revanche, le contraire se produit lorsque la signature est $(2,0)$, et l'on a même $\mathscr{V}^\circ \subset \mathscr{V}$. Dans le cas du réseau des cercles-droites passant par $M_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, le cercle-droite réduit à $\{M_0\}$ est orthogonal à tout le réseau. Les réseaux ainsi obtenus pourront être qualifiés de *singuliers*, voir au **VI-1.2**.

b. Désignons par $\mathscr{R}$ le réseau des cercles-droites passant par M_0 et par $\mathscr{R}'$ celui des cercles-droites orthogonaux à Γ. Les équations formelles des éléments de ces réseaux sont de la forme $\mathbf{E}_V$, où $V \neq 0$ appartient respectivement à deux hyperplans de $\mathbb{R}^4$, que nous appellerons $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$.

On n'a pas $\mathscr{V} = \mathscr{V}'$, car, par exemple, le cercle-point $\{M_0\}$ n'est pas orthogonal à Γ, puisque $M_0 \notin \Gamma$. Ainsi, $\mathscr{V} \cap \mathscr{V}'$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$, et $\mathscr{R} \cap \mathscr{R}'$ est un faisceau de cercles, que nous appellerons $\mathscr{F}$.

Appelons Ω et R le centre et le rayon de Γ ; soit γ un cercle de $\mathscr{F}$: la droite ΩM_0 recoupe γ en un point M_1, et l'on a $\overline{\Omega M_0} \cdot \overline{\Omega M_1} = R^2$, du fait de l'orthogonalité de Γ et de γ.

Il en découle que le point M_1 se déduit de M_0 par l'inversion de pôle Ω et de rapport R^2. Puisque M_1 ne dépend pas du choix de γ, on en déduit que M_0 et M_1 sont les deux points de base du faisceau $\mathscr{F}$, qui est donc de type **III.C**.



Soit T et T' deux points de Γ, diamétralement opposés. Le cercle circonscrit à M_0M_1T appartient au faisceau $\mathscr{F}$, et il est donc orthogonal à Γ. De ce fait, il est tangent à la droite TT', et il en va de même du cercle M_0M_1T'.

Les points T et T' sont donc les points fixes de l'involution de DÉSARGUES induite sur le diamètre TT'. En particulier, si un cercle γ du faisceau rencontre TT' en P et P', alors la division $TT'PP'$ est harmonique.

Annexe A

Compléments de calcul barycentrique

1. Vecteurs et coordonnées barycentriques

Nous étendons à présent la notion de coordonnées barycentriques *aux vecteurs du plan d'un triangle.*

Soit un triangle de référence ABC d'un plan supposé seulement affine pour commencer. Nous avons vu, au **I-2**, comment associer à un vecteur $\overrightarrow{v}$ un triplet de composantes barycentriques (x, y, z) vérifiant $x + y + z = 0$.

En particulier, si deux points M et M' ont des coordonnées barycentriques normalisées respectives (x, y, z) et (x', y', z'), les composantes barycentriques du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sont, comme on peut bien sûr le prévoir, $(x' - x, y' - y, z' - z)$.

En effet, on a $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{AM'} = y'\overrightarrow{AB} + z'\overrightarrow{AC}$, de sorte que $\overrightarrow{MM'} = (y' - y)\overrightarrow{AB} + (z' - z)\overrightarrow{AC}$. La première composante est alors $-(y' - y) - (z' - z)$, c'est-à-dire $x' - x$ puisque $x + y + z = x' + y' + z' = 1$.

Si les coordonnées barycentriques (x, y, z) et (x', y', z') des deux points ne sont pas normalisées, il est nécessaire de les normaliser à l'aide d'une division par $x + y + z$ et $x' + y' + z'$ respectivement avant des les soustraire. Si le résultat du calcul laisse un dénominateur, on ne pourra pas s'en débarrasser, faute de quoi le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ serait remplacé par un vecteur colinéaire.

Toutefois, un vecteur colinéaire peut suffire dans certains cas, tels que la vérification d'un parallélisme ou d'une orthogonalité. Cela donnerait un

résultat faux dans la vérification de l'égalité de deux vecteurs, ou, dans le cadre euclidien, dans le calcul d'une longueur.

Appelons $[\vec{u}, \vec{v}]$ le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ relativement à la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; on a alors, en notant (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) leurs composantes barycentriques,

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

En effet, additionnons toutes les lignes à la première ; sachant que $u_1 + u_2 + u_3 = v_1 + v_2 + v_3 = 0$, on peut alors développer ce déterminant par rapport à la nouvelle première ligne. Il est égal à $3(u_2v_3 - u_3v_2)$, le facteur 3 se simplifiant ensuite avec le coefficient en facteur. En même temps, on a $\vec{u} = u_2\overrightarrow{AB} + u_3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = v_2\overrightarrow{AB} + v_3\overrightarrow{AC}$: on a bien

$$[\vec{u}, \vec{v}] = (u_2v_3 - u_3v_2) \underbrace{\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]}_{=1} .$$

Si le plan est euclidien et orienté, on peut établir de même une formule donnant l'aire orientée d'un triangle $A'B'C'$, connaissant les coordonnées barycentriques normalisées (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) et (c_1, c_2, c_3) des trois sommets. On a alors, en désignant par $\mathscr{A}$ l'aire orientée du triangle ABC et par $\mathscr{A}'$ celle du triangle $A'B'C'$,

$$\mathscr{A}' = \mathscr{A} \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\Delta} .$$

En effet, avec les mêmes notations, $\mathscr{A}' = \mathscr{A}\left[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right]$ et l'on a $\overrightarrow{A'B'} = (b_2 - a_2)\overrightarrow{AB} + (b_3 - a_3)\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'C'} = (c_2 - a_2)\overrightarrow{AB} + (c_3 - a_3)\overrightarrow{AC}$. De cela suit que $\mathscr{A}' = \mathscr{A}\big((b_2 - a_2)(c_3 - a_3) - (b_3 - a_3)(c_2 - a_2)\big)$. On obtient le même résultat en additionnant dans Δ toutes les lignes à la première puis en soustrayant la première colonne à chacune des deux autres et enfin en développant par rapport à la première ligne.

Exercice. Soit, dans un plan affine euclidien, un triangle ABC non rectangle. On désigne par H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C. Déterminer l'aire $\mathscr{A}'$ du triangle orthique $H_AH_BH_C$ en fonction de l'aire $\mathscr{A}$ de ABC et des angles aux sommets.

Les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H sont

$$(a/\cos\widehat{A}, b/\cos\widehat{B}, c/\cos\widehat{C}) .$$

Les coordonnées barycentriques de H_A sont donc $(0, b/\cos\widehat{B}, c/\cos\widehat{C})$, mais elles ne sont pas normalisées.

Comme

$$\frac{b}{\cos\widehat{B}}+\frac{c}{\cos\widehat{C}}=\frac{b\cos\widehat{C}+c\cos\widehat{B}}{\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}}$$
$$=\frac{2R(\sin\widehat{B}\cos\widehat{C}+\sin\widehat{C}\cos\widehat{B})}{\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}}=\frac{a}{\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}},$$

les coordonnées normalisées de H_A sont $(0, b\cos\widehat{C}/a, c\cos\widehat{B}/a)$ et l'aire cherchée est donc, après permutation circulaire sur les éléments métriques du triangle,

$$\mathscr{A}'=\mathscr{A}\begin{vmatrix}0 & a\cos\widehat{C}/b & a\cos\widehat{B}/c\\ b\cos\widehat{C}/a & 0 & b\cos\widehat{A}/c\\ c\cos\widehat{B}/a & c\cos\widehat{A}/b & 0\end{vmatrix}.$$

On a alors tout de suite $\mathscr{A}'=\mathscr{A}\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}$.

Si le triangle ABC est rectangle, le triangle orthique est aplati et donc d'aire nulle. Si le triangle est équilatéral, le triangle orthique se déduit de ABC par une homothétie de rapport $1/2$ et son aire est $\mathscr{A}/2^2$. Dans les deux cas, la formule ci-dessus donne bien le résultat attendu.

Supposons notre plan affine euclidien, et établissons une formule donnant le produit scalaire $(\vec{u}\mid\vec{v})$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés par leurs composantes barycentriques (u_1,u_2,u_3) et (v_1,v_2,v_3). Nous avons

$$(\vec{u}\mid\vec{v})=bc\cos\widehat{A}\,u_1v_1+ca\cos\widehat{B}\,u_2v_2+ab\cos\widehat{C}\,u_3v_3.$$

On pourrait obtenir des formules plus simples, mais ayant le défaut de ne pas faire jouer aux éléments du triangle des rôles symétriques.

On a en effet

$$(\vec{u}\mid\vec{v})=(u_1\overrightarrow{MA}+u_2\overrightarrow{MB}+u_3\overrightarrow{MC}\mid v_1\overrightarrow{M'A}+v_2\overrightarrow{M'B}+v_3\overrightarrow{M'C}),$$

pour tout M et tout M' dans le plan. Choisissons $M=A$ et $M'=B$; alors

$$(\vec{u}\mid\vec{v})=(u_2\overrightarrow{AB}+u_3\overrightarrow{AC}\mid v_1\overrightarrow{BA}+v_3\overrightarrow{BC}).$$

Développons ce produit grâce à sa propriété de bilinéarité :

On a $(\overrightarrow{AB}\mid\overrightarrow{BA})=-c^2$, $(\overrightarrow{AB}\mid\overrightarrow{BC})=-ca\cos\widehat{B}$, etc. Ainsi, on obtient

$$(\vec{u}\mid\vec{v})=-u_2v_1\,c^2-u_2v_3ca\cos\widehat{B}-u_3v_1cb\cos\widehat{A}+u_3v_3ab\cos\widehat{C}.$$

Dans cette formule, remplaçons v_3 par $-(v_1+v_2)$ et u_3 par $-(u_1+u_2)$. On

a enfin pour $\left(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{BC}\right)$ la formule attendue :

$$u_2v_1c\underbrace{(-c + a\cos\widehat{B} + b\cos\widehat{A})}_{=0} + u_1v_1bc\cos\widehat{A} + u_2v_2ca\cos\widehat{B} + u_3v_3ab\cos\widehat{C}\,.$$

Posons, pour $X = {}^t(x, y, z)$ et $X' = {}^t(x', y', z')$ dans $\mathbb{R}^3$,

$$f(X, X') = bc\cos\widehat{A}\,xx' + ca\cos\widehat{B}\,yy' + ab\cos\widehat{C}\,zz'\,.$$

L'application f est une forme bilinéaire symétrique et la forme quadratique associée q définie par $q(X) = bc\cos\widehat{A}x^2 + ca\cos\widehat{B}y^2 + ab\cos\widehat{C}z^2$ n'est pas toujours définie positive : en effet, l'un des trois cosinus peut être négatif ou nul. Toutefois, ici l'expression du produit scalaire est « restreinte » à des couples de vecteurs appartenant à l'hyperplan $\mathscr{H}$ d'équation $x+y+z = 0$. Vérifions que la restriction de q à $\mathscr{H}$ est bien définie positive. En effet, si $z = -(x + y)$, on a

$$\begin{aligned} q(X) &= b\underbrace{(c\cos\widehat{A} + a\cos\widehat{C})}_{b}x^2 + 2ab\cos\widehat{C}xy + a\underbrace{(c\cos\widehat{B} + b\cos\widehat{C})}_{a} \\ &= (bx + a\cos\widehat{C}y)^2 + a^2\sin^2\widehat{C}y^2, \end{aligned}$$

et il est immédiat que les termes de cette somme de carrés ne s'annulent tous les deux que si, et seulement si, $x = y = 0$.

2. Nombre de droites de SIMSON passant par un point donné

Rappelons les notations du **II-4.2.5** : nous avons assimilé le plan affine euclidien à $\mathbb{C}$ et nous sommes ramené au cas où les sommets du triangle ont des affixes a, b et c de module 1. La droite de SIMSON d'un point M du cercle circonscrit, d'affixe z de module 1, coupe le cercle d'EULER en les points H_M et H'_M d'affixes respectifs $\dfrac{a+b+c}{2} + \dfrac{z}{2}$ et $\dfrac{a+b+c}{2} - \dfrac{abc}{2z^2}$.

Lorsque ces deux points sont distincts, un point U d'affixe u appartient à la droite $H_MH'_M$, c'est-à-dire à la droite de SIMSON du point M, si, et seulement si, [1]

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a+b+c}{2} + \dfrac{z}{2} & \dfrac{a+b+c}{2} - \dfrac{abc}{2z^2} & u \\ \dfrac{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}}{2} + \dfrac{\overline{z}}{2} & \dfrac{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}}{2} - \dfrac{\overline{abc}}{2\overline{z}^2} & \overline{u} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

[1] Voir le chapitre **V**.

Soustrayons à la première ligne $\dfrac{a+b+c}{2}$ fois la troisième et à la seconde ligne $\dfrac{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}}{2}$ fois la troisième. Si nous posons $v = u - \dfrac{a+b+c}{2}$, l'équation en u devient

$$\begin{vmatrix} \dfrac{z}{2} & -\dfrac{abc}{2z^2} & v \\ \dfrac{\overline{z}}{2} & -\dfrac{\overline{abc}}{2\overline{z^2}} & \overline{v} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Rappelons-nous que $\overline{z} = 1/z$ puisque z est de module 1 et que, de même, $\overline{abc} = 1/abc$. L'équation précédente devient, après développement du déterminant, simplification par -1 et réduction au même dénominateur $1/4abcz^3$,

$$z^6 - 2vz^5 + 2abc\overline{v}z^4 - 2abcvz^2 + 2a^2b^2c^2\overline{v}z - a^2b^2c^2 = 0 .$$

On peut, dans cette expression, factoriser puis simplifier par $z^3 + abc$, puisque les points H_M et H'_M sont distincts. Nous obtenons alors l'équation $\mathscr{E}$ plus simple

$$z^3 - 2vz^2 + 2abc\overline{v}z - abc = 0 .$$

La droite de SIMSON de M est tangente au cercle d'EULER lorsque les points H_M et H'_M sont confondus, c'est-à-dire lorsque $z^3 + abc = 0$. On vérifie alors sans difficulté que l'équation $\mathscr{E}$ obtenue *supra* convient encore dans ce cas. L'équation $\mathscr{E}$ obtenue peut être considérée (si on revient à la variable $u = v + \dfrac{a+b+c}{2}$) comme une équation de la droite de SIMSON du point M d'affixe z. Toutefois, nous allons désormais fixer u, et donc v, pour discuter le nombre des droites de SIMSON passant le point d'affixe u.

Si on fixe le complexe u, le complexe $v = u - \dfrac{a+b+c}{2}$ est alors bien déterminé. L'équation $\mathscr{E}$ est une équation polynomiale en z, de degré effectif 3. Pourquoi ne pas en conclure alors, puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, qu'il y a trois solutions en z, comptées avec leurs multiplicités ?

L'obstacle qui subsiste est le suivant : nous cherchons des solutions de module 1, et non pas simplement des solutions dans $\mathbb{C}$. Il se peut donc très bien que les trois solutions de $\mathscr{E}$ soient de module 1 (mais elles ne sont pas obligatoirement distinctes), mais il se peut aussi qu'une seule le soit.

En effet, il est immédiat de vérifier que si z_1 satisfait $\mathscr{E}$, alors $z \neq 0$ et $z_2 = 1/\overline{z_1}$ est solution aussi : cela résulte de l'égalité suivante, valable pour tout complexe z non nul :

$$z^3\,\overline{P(1/\overline{z})} = -\overline{abc}\,P(z)$$

Si $|z_1| \neq 1$, alors $|z_2| \neq |z_1| \neq 1$: z_2 est donc une autre solution, et elle est aussi de module $\neq 1$. Alors, la troisième solution z_3 vérifie $z_1z_2z_3 = abc$; on a donc $z_3 = \dfrac{abc}{z_1z_2}$ qui, elle, est bien de module 1.

Si l'une des solutions n'est pas de module 1, il en existe une autre qui n'est pas de module 1 : nous avons donc bien établi que par tout point du plan passe une ou trois droites de SIMSON, si on en compte le nombre en fonction de la multiplicité des solutions z_i correspondantes.

D'ailleurs, si l'équation possède une racine double z_0, l'égalité *supra* permet de montrer que $1/\overline{z_0}$ est aussi racine double. Comme le nombre de racines, comptées avec leurs multiplicité, ne peut excéder 3, cela montre que, dans ce cas, $z_0 = 1/\overline{z_0}$ et donc que z_0 est de module 1. La dernière racine est alors abc/z_0^2, également de module 1.

Notons quelques remarques : si par le point d'affixe u passent trois droites de SIMSON distinctes, les affixes z_1, z_2 et z_3 vérifient $z_1 + z_2 + z_3 = 2v = 2u - (a + b + c)$. Comme les points d'affixes respectifs z_i sont sur le cercle unité, l'orthocentre du triangle qu'ils forment a pour affixe $2u - (a+b+c)$. Cet orthocentre est le symétrique de l'orthocentre du triangle ABC, d'affixe $a + b + c$, par rapport au point d'affixe u.

Si $u = \dfrac{a+b+c}{2}$, affixe du centre du cercle d'EULER du triangle ABC, alors $v = 0$ et l'équation $\mathscr{E}$ devient $z^3 - abc = 0$. Les images de ces solutions dans le plan euclidien forment un triangle équilatéral. On vérifie tout de suite qu'il en est de même du triangle formé par les droites de SIMSON de ces trois points.

3. Intersection d'une conique et d'une droite

3.1. Retour vers la classification des coniques

Soit un plan affine P ; nous savons que, relativement à un repère affine de ce plan, toute équation (cartésienne) polynomiale du second degré en (X, Y)

$$\underbrace{\alpha X^2 + 2\beta XY + \gamma Y^2 + 2\delta X + 2\varepsilon Y + \zeta}_{\Phi(X,Y)} = 0$$

représente, lorsque le triplet (α, β, γ) n'est pas nul, une conique Γ éventuellement dégénérée. Nous n'insistons pas sur les « formes » possibles des coniques dégénérées, puisque nous allons devoir les reprendre une par une dans la section qui suit.

En revanche, il est utile de rappeler la discussion du *genre* de Γ, en introduisant la forme quadratique q de $\mathbb{R}^2$ qui à un vecteur (X, Y) associe $\alpha X^2 + 2\beta XY + \gamma Y^2$. La matrice de q par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $\Delta = \alpha\gamma - \beta^2$.

Lorsque $\Delta > 0$, la conique Γ est du genre ellipse. Lorsque $\Delta = 0$, elle est du genre parabole et nous aurons besoin de remarquer que, « au signe près », la forme quadratique q est un carré parfait : si $\alpha > 0$, on peut écrire $q(X,Y) = (aX + bY)^2$, avec $a = \sqrt{\alpha}$; si $\alpha < 0$, on a de même $q(X,Y) = -(aX + bY)^2$, avec $a = \sqrt{-\alpha}$ et enfin, si $\alpha = 0$, on a forcément $\beta = 0$ de sorte que $q(X,Y) = \pm(bY)^2$, avec $b = \sqrt{|\gamma|}$ [2].

Si Γ est une parabole non dégénérée et que nous choisissions un repère affine tel que la direction asymptotique de Γ soit parallèle à Oy, l'équation cartésienne de Γ est de la forme $Y = \alpha X^2 + \delta X + \zeta$. Il est alors immédiat que *toute* droite parallèle à Oy coupe Γ en un point.

Enfin, lorsque $\Delta < 0$, la conique est du genre hyperbole. La forme q se factorise sous la forme $q(X,Y) = (aX + bY)(cX + dY)$, puisque le **discriminant** du trinôme $\alpha X^2 + 2\beta XY + \gamma Y^2$ est ici > 0.

Plus précisément, si Γ est une hyperbole non dégénérée et que nous choisissions un repère affine tel que l'axe Oy soit une asymptote de Γ, l'équation cartésienne de Γ prend la forme très simple $Y = \dfrac{k_1X^2 + k_2X + k_3}{X}$, avec $k_3 \neq 0$, ou encore $k_1X^2 - XY + k_2X + k_3 = 0$ si l'on préfère une équation réellement du second degré [3]. Il est alors immédiat que toute droite parallèle à Oy coupe Γ en un point, *à l'exception* de la droite Oy elle-même qui en est disjointe.

C'est justement cette exception qui va nous permettre, dans la section qui suit, de caractériser les hyperboles et leurs asymptotes [4].

3.2. Caractérisation des hyperboles et de leurs asymptotes

Nous rappelons l'énoncé que nous avons laissé en suspens lors de la construction des droites de SIMSON passant par un point donné du plan, et qui vise à caractériser, parmi les coniques, les hyperboles non dégénérées et, parmi les droites du plan, les asymptotes de ces hyperboles : *soit une conique* Γ *et une direction* $\vec{D}$ *de droites; si toutes les droites de direction* $\vec{D}$ *coupent* Γ *en au plus un point et qu'il existe une droite* D_0 *de direction* $\vec{D}$ *qui ne rencontre pas* Γ, *alors* Γ *est une hyperbole non dégénérée,* $\vec{D}$ *en est une direction asymptotique et* D_0 *en est une asymptote.*

[2] On peut aussi invoquer la décomposition en carrés de la forme quadratique q : si $\Delta = 0$, cette forme est de signature $(1,0)$ ou $(0,1)$ puisque nous l'avons aussi supposée non nulle.

[3] Bien entendu, on peut même parvenir à l'équation cartésienne encore plus simple $XY = k$, avec $k \neq 0$, en faisant en sorte que Ox soit l'autre asymptote de Γ.

[4] On notera tout de même que lorsqu'une conique admet une direction asymptotique, alors elle est du genre parabole ou hyperbole et, si Oy est parallèle à une telle direction, le degré par rapport à Y de l'équation cartésienne s'abaisse à 1.

Nous allons procéder par élimination ! Si Γ est une conique dégénérée, montrons qu'aucune direction de droites ne vérifie l'hypothèse de cet énoncé.

C'est clair si la conique est vide, ou une ellipse réduite à un point. Si Γ est une parabole non vide dégénérée, c'est-à-dire la réunion de deux droites parallèles Δ et Δ' (éventuellement confondues), c'est encore vrai : il suffit de le vérifier pour la direction $\overrightarrow{D}$ des droites Δ et Δ' (toute droite ayant cette direction est disjointe de Γ ou la coupe en une infinité de points) puis pour toute autre direction (toute droite ayant une telle direction coupe Γ en un seul point, mais n'en est jamais disjointe). Enfin, cela reste encore vrai si Γ est une hyperbole dégénérée, c'est-à-dire la réunion de deux droites sécantes Δ et Δ' : il suffit de distinguer le cas où la direction $\overrightarrow{D}$ est celle de l'une des deux droites, ou une autre direction.

Abordons maintenant le cas des coniques non dégénérées.

- Si Γ est une ellipse, c'est une conique bornée. Il est alors immédiat que toute direction de droites contient une infinité de droites disjointes de Γ. Aucune direction ne vérifie donc les hypothèses de l'énoncé.
- Si Γ est une parabole, choisissons un repère affine tel que l'axe Oy soit, parmi les droites de direction $\overrightarrow{D}$, une de celles qui rencontre Γ en un point et que ce point soit précisément O. Alors, Γ a une équation cartésienne de la forme
$$(aX + bY)^2 + cX + dY = 0\,.$$
Comme l'axe Oy rencontre Γ en un seul point, l'équation $bY^2 + dY = 0$ n'a qu'une solution. C'est dire que, soit $b = 0$, soit $d = 0$.
Si $b = 0$, l'équation cartésienne de Γ devient $aX^2 + cX + dY = 0$. Alors, $d \neq 0$ (sinon, la parabole serait dégénérée) et donc toute droite de direction Oy rencontre Γ. Cela contredit l'hypothèse [5].
Si $b \neq 0$ et $d = 0$, l'équation cartésienne de Γ devient $(aX+bY)^2+cX = 0$. Alors, $c \neq 0$ (sinon, la parabole serait dégénérée). Coupons Γ par la droite verticale d'équation cartésienne $X = \lambda$; cela revient à résoudre l'équation suivante en Y : $(a\lambda + bY)^2 + c\lambda = 0$. Or, si $c > 0$, respectivement $c < 0$, cette équation n'a pas de solutions pour $\lambda > 0$, respectivement $\lambda < 0$. Là encore, cela contredit l'hypothèse [6].
- Si Γ est une hyperbole, choisissons un repère affine tel que l'axe Oy soit, parmi les droites de direction $\overrightarrow{D}$, une de celles qui rencontre Γ en un point et que ce point soit précisément O. Alors, Γ a une équation cartésienne

[5] À noter que l'axe de cette parabole est de direction Oy. Dans ce cas, toute droite parallèle à Oy rencontre bien Γ en un point, et aucune ne fait exception.

[6] À noter que, dans ce cas, l'axe Oy est tangent à la parabole : c'est le seul cas possible d'une droite non parallèle à l'axe de Γ, mais qui ne rencontre cette conique qu'en un point. En revanche, les droites parallèles à Oy rencontrent Γ « génériquement », c'est-à-dire en zéro ou deux points.

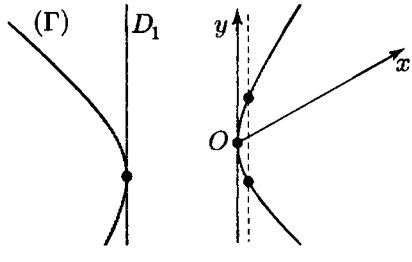
de la forme

$$(aX + bY)(a'X + b'Y) + cX + dY = 0\,.$$

Comme l'axe Oy rencontre Γ en un seul point, l'équation $bb'Y^2 + dY = 0$ n'a qu'une solution. C'est dire que, soit $bb' = 0$, soit $d = 0$.

Cette fois, seul l'un des deux cas est à exclure ! Supposons que $d = 0$ et coupons Γ par la droite verticale d'équation cartésienne $X = \lambda$; cela revient à résoudre l'équation suivante en Y : $(a\lambda+bY)(a'\lambda+b'Y)+c\lambda = 0$. Le discriminant de cette équation est, comme on le vérifie facilement, $\Delta = (ab' - a'b)^2\lambda^2 - 4bb'c\lambda$. Ce discriminant s'annule pour $\lambda = 0$, ce qui est normal puisque Oy ne rencontre Γ qu'en un point, mais aussi pour $\lambda = \dfrac{4bb'c}{(ab' - a'b)^2} \neq 0$ [7] et cela contredit notre hypothèse : il existe une *seconde* droite D_1 dans la direction $\vec{D}$ qui ne rencontre Γ qu'en un point.

Comme le suggère la figure ci-contre, il y avait d'autres façons d'aboutir à une contradiction, par exemple, en établissant qu'il existe $\lambda_0 > 0$ assez petit pour que, quel que soit $\lambda \in]\,0\,,\lambda_0\,[$, l'une au moins des droites d'équation cartésienne $X = +\lambda$ ou $X = -\lambda$ coupe Γ en deux points.



Il ne reste enfin que le cas $d \neq 0$ et $bb' = 0$, sans pour autant que $b = b' = 0$ (sinon, Γ serait une parabole). Supposons par exemple $b = 0$ et $b' \neq 0$. L'équation cartésienne de Γ est alors $aX(a'X+b'Y)+cX+dY = 0$, avec aussi $a \neq 0$ (sinon, Γ serait une droite). Une autre expression de l'équation cartésienne est maintenant $Y = -\dfrac{X(aa'X + c)}{ab'X + d}$, où la fraction rationnelle en X qui constitue le membre de droite est irréductible (faute de quoi Γ serait dégénérée), et on constate non sans plaisir que toute droite verticale rencontre Γ en un seul point, à l'exception de l'asymptote verticale, d'équation $ab'X + d = 0$.

Alors, pourquoi tant de cas ? La raison est que, dans la construction géométrique qui est à l'origine de cette discussion (voir le **II-4.2.5**), nous ne pouvions compter les intersections entre droites et coniques « avec leurs multiplicités ». Comme cela transparaît dans la discussion précédente, une droite et une conique ont mainte façon de n'avoir qu'un point d'intersection : notamment être tangentes (deux points d'intersection confondus en un seul) ou avoir un point à l'infini commun (abaissement du degré).

[7] En effet, $ab' - a'b \neq 0$, car, sinon, les formes linéaires $aX + bY$ et $a'X + b'Y$ seraient proportionnelles et Γ serait une parabole.

De même, pour une droite, être disjointe d'une conique ne signifie pas lui être asymptote. Cela résulte du fait que $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos et qu'une équation du second degré peut ne pas avoir de solutions. C'est cette éventualité qui nous a obligé à envisager le cas où Γ est une ellipse.

4. Intersection d'une conique et d'une courbe algébrique

4.1. Représentation paramétrique d'une conique circonscrite

Dans cette section, nous considérons une conique non dégénérée $\mathscr{C}$, circonscrite à un triangle de référence ABC, et en choisissons une équation barycentrique, de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$, avec $pqr \neq 0$.

Afin de paramétrer $\mathscr{C}$, nous allons mettre en œuvre le principe suivant : toute droite passant par A « recoupe » la conique en un unique « second » point, les guillemets venant du fait que cette droite peut la recouper en A lui-même, si c'est la tangente en A, ou en un point à l'infini si elle est parallèle à une direction asymptotique de $\mathscr{C}$.

Nous énonçons donc : *un point M appartient à la conique $\mathscr{C}$ si, et seulement si, ses coordonnées barycentriques sont de la forme*

$$\Delta(v,w) \overset{\text{déf}}{=} \big(pvw, w(rw - qv), -v(rw - qv)\big)\,,$$

où (v,w) est un couple non nul de réels.

À noter que ces coordonnées barycentriques sont des fonctions polynomiales homogènes de degré 2.

Dans l'énoncé qui précède, nous acceptons que la somme des trois coordonnées barycentriques indiquées soit nulle, ce qui correspond au cas d'un point M à l'infini.

En effet, une droite passant par A admet une équation barycentrique de la forme $vY + wZ = 0$, avec$(v,w) \neq (0,0)$. Un calcul montre alors immédiatement qu'elle coupe la conique $\mathscr{C}$ en A et en le point de coordonnées barycentriques $\Delta(v,w)$.

Inversement, le point $A \in \mathscr{C}$ est obtenu par exemple pour $(v,w) = (r,q) \neq (0,0)$ et, si $M \neq A$ est un autre point de $\mathscr{C}$, la droite AM passe par A et a donc bien une équation barycentrique de la forme $vY + rZ = 0$. Le calcul précédent établit bien que le point M a pour coordonnées barycentriques le triplet $\Delta(v,w)$.

Remarque 1. Nous avons bien redémontré au passage que la tangente en A à $\mathscr{C}$ a pour équation barycentrique $rY + qZ = 0$. En exercice, on

pourra vérifier que le point M est à l'infini si, et seulement si,

$$qv^2 + (p - q - r)vw + rw^2 = 0\,,$$

et retrouver le nombre de directions asymptotiques réelles de $\mathscr{C}$ en fonction du signe de l'expression $p^2 + q^2 + r^2 - 2(qr + rp + pq)$.

Remarque 2. Notons que, par construction, si un point M est intersection de $\mathscr{C}$ avec les droites d'équations barycentriques respectives $vY + wZ = 0$ et $v'Y + w'Z = 0$, alors ces deux droites coïncident, de sorte que les couples (v, w) et (v', w') sont proportionnels. La réciproque de cela est, elle aussi, immédiate.

Remarque 3. La forme que nous avons obtenue pour la représentation paramétrique de $\mathscr{C}$ est assez simple, du fait qu'elle est *circonscrite*. S'il s'était agi d'une conique quelconque du plan (non dégénérée et en particulier non vide ni réduite à un point), nous aurions également abouti à une représentation paramétrique à l'aide de polynômes homogènes de degré 2, mais plus compliquée, en faisant de la même manière pivoter une droite autour d'un point M_0 choisi sur $\mathscr{C}$.

4.2. Un cas particulier du théorème de BEZOUT

Avec les mêmes hypothèses et notations que dans la section **A-4.1**, *nous montrons à présent que la conique $\mathscr{C}$ (non dégénérée !) coupe une courbe algébrique Γ de degré $n \geqslant 1$ donné en au plus $2n$ points*[8], *sauf si on a l'inclusion $\mathscr{C} \subset \Gamma$.*

On trouvera au **II-2.2** un énoncé plus général du théorème de BEZOUT, dont l'énoncé *supra* constitue un cas particulier.

En effet, soit $P(X, Y, Z) = 0$ une équation barycentrique de Γ, où P est un polynôme homogène de degré n.

Vu la représentation paramétrique de $\mathscr{C}$ vue au **A-4.1**, il suffit de remarquer que le point M de $\mathscr{C}$, de coordonnées barycentriques $\Delta(v, w)$, appartient aussi à Γ si, et seulement si, le couple (v, w) annule le polynôme $Q \in \mathbb{R}[V, W]$ défini par la formule

$$Q(V, W) = P\big(pVW, W(rW - qV), -V(rW - qV)\big)\,.$$

Or, on a tout de suite l'identité $Q(TV, TW) = T^{2n}Q(V, W)$. Si Q est nul, cela signifie que $\mathscr{C}$ est incluse dans Γ, cas que nous avons écarté. Donc, $Q \neq 0$ et il est homogène de degré $2n$.

[8] En fait, il y en a *exactement* $2n$ pourvu que l'on plonge le plan affine dans un plan projectif complexe et que l'on compte soigneusement chaque point d'intersection avec sa multiplicité dans l'équation résolvante qui suit. Nous ne détaillerons pas ce raffinement, d'autant plus que même l'interprétation géométrique de cette multiplicité est un peu délicate à appréhender. Pour cela, on consultera utilement **[22]**.

Le lemme qui suit va nous permettre de conclure sans avoir besoin d'invoquer la *factorialité* de l'anneau $\mathbb{R}[V,W]$.

Lemme. *Si $R \in \mathbb{R}[V,W]$ est un polynôme homogène non nul de degré p, si k est un entier $\geqslant 1$, et si les couples de scalaires (v_i,w_i), pour $1 \leqslant i \leqslant k$, deux à deux non proportionnels, annulent R, alors ce polynôme est divisible dans $\mathbb{R}[V,W]$) par $\prod_{1\leqslant i\leqslant k} (w_iV - v_iW)$. En particulier, on a $k \leqslant p$.*

En effet, le résultat est vrai si $k = 1$: R est de la forme $R(V,W) = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j V^j W^{p-j}$ et l'on a $\sum_{j=0}^{p} \lambda_j v_1^j w_1^{p-j} = 0$.

Si $w_1 = 0$, on a $\lambda_p = 0$ et le résultat est immédiat puisqu'alors $v_1 \neq 0$ et que W se factorise dans R.

Sinon, puisque R est homogène, on peut supposer que $w_1 = 1$ et l'on a $\sum_{j=0}^{p} \lambda_j v_1^j = 0$. On a donc aussi $W^p \sum_{j=0}^{p} \lambda_j v_1^j = 0$, de sorte que

$$R(V,W) = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j \left(V^j W^{p-j} - v_1^j W^p\right) = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j W^{p-j} \underbrace{\left(V^j - v_1^j W_1^j\right)}_{=(V-v_1W)S_j},$$

où $S_j = \sum_{1\leqslant \ell\leqslant j-1} V^\ell (v_1W)^{j-1-\ell}$, ce qui achève le résultat.

Supposons à présent que la propriété soit établie pour toute famille de $k-1$ couples, avec $k \geqslant 2$, et supposons k couples deux à deux non proportionnels satisfaisant les hypothèses du lemme. Vu l'hypothèse de récurrence, il existe un polynôme $R' \in \mathbb{R}[V,W]$ tel que

$$R(V,W) = R'(V,W) \prod_{1\leqslant i\leqslant k-1} (w_iV - v_iW).$$

De cela suit que R' est (non nul et) homogène de degré $p-(k-1)$. Or, on a $\prod_{1\leqslant i\leqslant k-1} (w_iv_k - v_iw_k) \neq 0$, vu les hypothèses de non-proportionnalité des couples, alors que $R(v_k,w_k) = 0$. Il s'ensuit que $R'(v_k,w_k) = 0$ et que $w_kV - v_kW$ divise R' ; le lemme en découle alors.

À présent, nous concluons quant à la majoration du nombre de points de $\mathscr{C} \cap \Gamma$: si les points deux à deux distincts M_i, où $1 \leqslant i \leqslant k$, appartiennent à cette intersection, alors $k \leqslant 2n$.

En effet, choisissons pour chaque M_i un couple (v_i,w_i) non nul tel que les coordonnées barycentriques de M_i soient $\Delta(v_i,w_i)$. Alors les couples

(v_i, w_i) sont deux à deux non proportionnels, voir la remarque 2 du **A-4.1**, et l'on a $Q(v_i, w_i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$, avec $Q \neq 0$ homogène de degré $2n$. Le résultat découle alors du lemme.

Remarque 1. Le résultat tombe en défaut si $\mathscr{C}$ dégénère en la réunion de deux droites distinctes D_1 et D_2. En effet, si la droite D_1 est incluse dans la courbe Γ, mais non pas la droite D_2, alors $\mathscr{C} \cap \Gamma$ possède une infinité de points sans que la conique soit incluse dans Γ.

Remarque 2. De notre résultat suit que l'intersection d'une conique non dégénérée et d'une autre conique consiste en au plus quatre points.

De même, l'intersection d'une conique non dégénérée et d'une cubique [9] consiste en au plus six points, sauf si, et seulement si, la conique est incluse dans la cubique (et celle-ci se décompose alors en la réunion de la conique et d'une droite : voir l'explication *infra* dans cette même section).

Remarque 3. De ce même résultat suit également que deux coniques non dégénérées (distinctes) possèdent au plus quatre tangentes communes. En relation avec le **A-5.4.1**, on obtient des calculs tout à fait analogues une fois que l'on a établi que l'équation tangentielle d'une conique est de la forme $Q(U, V, W) = 0$, où Q est un polynôme homogène irréductible de degré 2.

4.3. Le théorème de PASCAL

Nous allons ici nous limiter à établir une seule implication dans l'énoncé de ce théorème, qui est en fait une condition nécessaire et suffisante, et de donner seulement un aperçu de la réciproque, beaucoup plus simple : *soit six points A, B, C, A', B', C' appartenant à une conique non dégénérée $\mathscr{C}$. Alors les points M_1, M_2, M_3, intersections respectives des droites BC' et CB', CA' et AC', AB' et BA', sont alignés.*

Soit $F(X, Y, Z) = 0$ une équation barycentrique de $\mathscr{C}$, polynomiale homogène de degré 2 ; la droite BC' possède une équation barycentrique de la forme $P_1(X, Y, Z) \overset{\text{déf}}{=} u_1 X + v_1 Y + w_1 Z = 0$, et on définit de même P_2, P_3, Q_1, Q_2 et Q_3 pour les droites CA', AB', $B'C$, $C'A$ et $A'B$.

Posons $P = P_1 P_2 P_3$ et $Q = Q_1 Q_2 Q_3$; les courbes d'équations barycentriques respectives $P(X, Y, Z) = 0$ et $Q(X, Y, Z) = 0$ sont des cubiques décomposées en la réunion de trois droites. Choisissons sur $\mathscr{C}$ un septième point, noté M, de coordonnées barycentriques (x, y, z) et distinct des six points précédents : $M \neq A \neq A'$, etc.

[9] Une cubique peut se décomposer en la réunion d'une conique et d'une droite, voire en la réunion de trois droites.

Posons $\lambda = \dfrac{P(x,y,z)}{Q(x,y,z)}$, le dénominateur n'étant pas nul puisque le point M n'appartient à aucune des droites d'équation barycentrique $Q_i = 0$. Posons enfin $R = P - \lambda Q$: le polynôme R n'est pas nul[10] et est homogène de degré 3. La courbe d'équation barycentrique $R(X,Y,Z) = 0$ est une cubique Γ, et elle coupe $\mathscr{C}$ en les six points A, A', etc. (par construction de P et de Q) et en le point M, par construction de λ.

De la remarque 2 de la section précédente suit que $\mathscr{C} \subset \Gamma$, et du **II-2.3** suit que F divise R dans $\mathbb{R}[X,Y,Z]$: il existe donc un polynôme homogène F' de degré 1 tel que $R = FF'$. Il est alors immédiat que les points M_i, où $1 \leqslant i \leqslant 3$, appartiennent à la droite d'équation barycentrique $F'(X,Y,Z) = 0$; ainsi, ils sont bien alignés.

Pour établir la réciproque, on peut commencer par définir F', polynôme homogène de degré 1, tel que les points M_i appartiennent à la droite Δ d'équation barycentrique $F'(X,Y,Z) = 0$. En outre, on choisit M_4, un quatrième point de cette droite, et on détermine le scalaire μ tel que la cubique Γ' d'équation barycentrique $R'(X,Y,Z) = 0$, où $R' \overset{\text{déf}}{=} P - \mu Q$ passe par M_4, sachant qu'elle passe déjà automatiquement par les trois premiers M_i. On aura vérifié également sans difficulté que $R' \neq 0$; comme l'intersection $\Delta \cap \Gamma'$ contient quatre points distincts, on établit de même que Γ' se décompose en la réunion de Δ et d'une conique $\mathscr{C}$; alors, les six points initiaux A, A', etc., appartiennent à cette conique.

Exemple. Si la réciproque est plus simple à établir que le sens direct, c'est tout de même elle qui fournit les exemples les plus intéressants. En effet, chercher l'équation barycentrique d'une conique passant par six points est moins trivial que chercher celle d'une droite passant par trois points alignés.

Prenons donc un triangle de référence ABC et définissons nos six droites par leurs équations barycentriques respectives :

$$\begin{cases} P_1(X,Y,Z) \overset{\text{déf}}{=} X + 3Z = 0 & P_2(X,Y,Z) \overset{\text{déf}}{=} -X + Y = 0 \\ P_3(X,Y,Z) \overset{\text{déf}}{=} Y + 2Z = 0 & Q_1(X,Y,Z) \overset{\text{déf}}{=} -2X - 3Y = 0 \\ Q_2(X,Y,Z) \overset{\text{déf}}{=} 2Y + Z = 0 & Q_3(X,Y,Z) \overset{\text{déf}}{=} -X + Z = 0\,. \end{cases}$$

On vérifiera aisément que les points définis respectivement par $P_1 = Q_1 = 0$, $P_2 = Q_2 = 0$ et $P_3 = Q_3 = 0$ sont à l'infini, de coordonnées barycentriques $(3,-2,-1)$, $(1,1,-2)$ et $(1,-2,1)$, donc alignés. Par conséquent, il existe une conique contenant les points A, B, C ainsi que les points A', B', C' définis respectivement par $P_2 = Q_3 = 0$, $P_3 = Q_1 = 0$ et $P_1 = Q_2 = 0$.

Choisissons un quatrième point sur la droite de l'infini, par exemple celui de coordonnées barycentriques $(1,0,-1)$. La cubique d'équation barycentrique

[10] Le vérifier grâce à un point M' situé sur une seule des six droites.

$P_1P_2P_3 - \lambda Q_1Q_2Q_3 = 0$ passe par ce point pour $\lambda = 1$. On a alors la factorisation de $P_1P_2P_3 - Q_1Q_2Q_3$:

$$(P_1P_2P_3 - Q_1Q_2Q_3)(X,Y,Z) = (X+Y+Z)(9YZ - 4ZX - 5XY)\,.$$

Ainsi, la conique a pour équation barycentrique $9YZ - 4ZX - 5XY = 0$.

Vérifions. Le point A' a pour coordonnées barycentriques $(1,1,1)$ et il appartient effectivement à cette conique. La même confirmation vaut pour les points B' et C'. Nous avons choisi le triangle de sorte que la conique soit circonscrite : les calculs auraient été à peine plus compliqués dans le cas le plus général.

5. Tangentes à une courbe algébrique

5.1. L'identité d'EULER

Avant de formuler quoi que ce soit, nous avons besoin de l'identité suivante, valable pour tout polynôme *homogène* à plusieurs indéterminées sur le corps $\mathbb{R}$.

Soit $\Pi \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ *homogène de degré* $\delta \in \mathbb{N}$, *c'est-à-dire vérifiant, dans* $\mathbb{R}[T, X_1, \ldots, X_n]$,

$$\Pi(TX_1, TX_2, \ldots, TX_n) = T^\delta\, \Pi(X_1, X_2, \ldots, X_n)\,, \qquad (1)$$

alors on a la formule, dite identité d'EULER, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial \Pi}{\partial X_k} = \delta\, \Pi.$

Dérivons en effet (1) par rapport à T ; il vient

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial \Pi}{\partial X_k}(TX_1, TX_2, \ldots, TX_n) = \delta T^{\delta-1} \Pi(X_1, X_2, \ldots, X_n)\,.$$

On obtient le résultat annoncé en substituant la valeur 1 à T dans la formule précédente.

Exercice. Établir la réciproque de ce résultat : l'identité d'EULER implique l'homogénéité.

5.2. L'équation d'une tangente

Soit un plan affine P, et un triangle de référence ABC. Soit $\Pi(X,Y,Z)$ un polynôme homogène de degré δ. Soit M_0 de coordonnées barycentriques (x,y,z) vérifiant

$$\begin{cases} \Pi(x,y,z) = 0 \\ \left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial X}(x,y,z), \dfrac{\partial \Pi}{\partial Y}(x,y,z), \dfrac{\partial \Pi}{\partial Z}(x,y,z)\right) \neq (0,0,0)\,. \end{cases}$$

Alors, la partie $\mathscr{P}$ du plan d'équation barycentrique $\Pi(X,Y,Z)=0$ admet une tangente en M_0, d'équation barycentrique

$$X\frac{\partial\Pi}{\partial X}(x,y,z)+Y\frac{\partial\Pi}{\partial Y}(x,y,z)+Z\frac{\partial\Pi}{\partial Z}(x,y,z)=0\,.$$

On vérifiera sans problème que cette formule généralise celle donnant l'équation barycentrique de la tangente en un point d'une conique circonscrite non dégénérée.

Démonstration. Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$, une équation affine de $\mathscr{P}$ est $F(X,Y)\overset{\text{déf}}{=}\Pi(1-X-Y,X,Y)=0$, où F est donc de classe C^1. Les coordonnées affines de M_0 sont $\left(\alpha=\dfrac{y}{x+y+z},\beta=\dfrac{z}{x+y+z}\right)$; calculons les dérivées partielles de F en ce point :

$$\frac{\partial F}{\partial X}(\alpha,\beta)=\frac{\partial\Pi}{\partial Y}-\frac{\partial\Pi}{\partial X}$$
$$\frac{\partial F}{\partial Y}(\alpha,\beta)=\frac{\partial\Pi}{\partial Z}-\frac{\partial\Pi}{\partial X}\,,$$

où les dérivées partielles figurant dans le membre de droite sont prises au point $(1-\alpha-\beta,\alpha,\beta)$. Si ces deux dérivées sont nulles, alors les trois dérivées partielles de Π au point $(1-\alpha-\beta,\alpha,\beta)$ prennent la même valeur λ, non nulle vu nos hypothèses. L'identité d'Euler donne alors

$$\begin{aligned}(1-\alpha-\beta)\frac{\partial\Pi}{\partial X}+\alpha\frac{\partial\Pi}{\partial Y}+\beta\frac{\partial\Pi}{\partial Z}&=\\ &=\lambda(1-\alpha-\beta+\alpha+\beta)=\\ &=\delta\,\Pi(1-\alpha-\beta,\alpha,\beta)=\\ &=\delta\,\frac{\Pi(x,y,z)}{(x+y+z)^\delta}=0\,,\end{aligned}$$

où les dérivées partielles figurant dans le premier membre sont prises au point $(1-\alpha-\beta,\alpha,\beta)$. De cela suit que $\lambda=0$, ce qui est absurde.

Le théorème des fonctions implicites garantit donc l'existence de la tangente en M et en fournit une équation affine :

$$(X-\alpha)\frac{\partial F}{\partial X}(\alpha,\beta)+(Y-\beta)\frac{\partial F}{\partial Y}(\alpha,\beta)=0\,.$$

Il reste maintenant à revenir à nos coordonnées barycentriques, ce qui se fait grâce aux formules donnant les dérivées partielles de F au point (α,β)

et grâce aux substitutions suivantes dans la formule précédente :

$$\begin{cases} X \longleftarrow \dfrac{Y}{X+Y+Z} \\ Y \longleftarrow \dfrac{Z}{X+Y+Z} \\ \alpha \longleftarrow \dfrac{y}{x+y+z} \\ \beta \longleftarrow \dfrac{z}{x+y+z}\,. \end{cases}$$

Pour ce faire, on réduira préalablement le membre de gauche au même dénominateur, et l'on calculera successivement les coefficients en X, Y et Z. À titre d'exemple, le coefficient du terme en X est le suivant, où les dérivées partielles sont prises au point (x,y,z) :

$$-y\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}-\frac{\partial\Phi}{\partial X}\Big)-z\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial Z}-\frac{\partial\Phi}{\partial X}\Big)\,.$$

Or, $-y\dfrac{\partial\Phi}{\partial Y}-z\dfrac{\partial\Phi}{\partial Z}$ est égal à $x\dfrac{\partial\Phi}{\partial X}-\delta\underbrace{F(x,y,z)}_{=0}$ vu l'identité d'EULER et il s'ensuit que le coefficient en X est $(x+y+z)\dfrac{\partial\Phi}{\partial X}(x,y,z)$. Le calcul des deux autres coefficients se fait de manière analogue, le terme non nul $(x+y+z)$ étant en facteur. *In fine*, on simplifie par $(x+y+z)$.

5.3. Tangentiel et inversion isogonale

Nous avons désigné par Φ_δ le membre de gauche de l'équation barycentrique de Γ_δ ; si $F\in\Gamma_\delta$ a pour coordonnées barycentriques (x,y,z) [11], désignons par p, q et r les dérivées partielles premières de Φ_δ au point (x,y,z) :

$$p=\frac{\partial\Phi_\delta}{\partial X}(x,y,z),\quad q=\frac{\partial\Phi_\delta}{\partial Y}(x,y,z),\quad r=\frac{\partial\Phi_\delta}{\partial Z}(x,y,z)\,.$$

Nous avons démontré au **A-5** qu'une équation barycentrique de la tangente en F à Γ_δ est alors $pX+qY+rZ=0$. Cherchons celle de la tangente en F' : il est immédiat de vérifier la formule suivante, vraie pour tout triplet (x,y,z) de réels non nuls,

$$x^2y^2z^2\Phi_\delta(a^2/x,b^2/y,c^2/z)=a^2b^2c^2\Phi_\delta(x,y,z)\,.$$

[11] Nous les supposerons non nulles, ayant déjà conclu quant aux points de Γ_δ situés sur les côtés de ABC.

Dérivons cela par rapport à x : on obtient

$$2xy^2z^2\Phi_\delta(a^2/x,b^2/y,c^2/z) - a^2y^2z^2\frac{\partial\Phi_\delta}{\partial X}(a^2/x,b^2/y,c^2/z) = \\ = a^2b^2c^2\frac{\partial\Phi_\delta}{\partial X}(x;y,z)\,.$$

Or, $\Phi_\delta(a^2/x,b^2/y,c^2/z) = 0$ si $F \in \Gamma_\delta$; soit $p' = \dfrac{\partial\Phi_\delta}{\partial X}(a^2/x,b^2/y,c^2/z)$, de sorte que $y^2z^2p' = -b^2c^2p$.

Les mêmes calculs avec q' et r' montrent que le triplet (p',q',r') est proportionnel à $(px^2/a^2, qy^2/b^2, ry^2/c^2)$.

Or une équation barycentrique de la tangente en F' est $p'X+q'Y+r'Z = 0$; on peut donc l'écrire aussi sous la forme

$$pXx^2/a^2 + qYy^2/b^2 + rZz^2/c^2 = 0\,.$$

Une droite n'est jamais bitangente à une cubique (sauf si celle-ci se décompose en la réunion de cette droite et d'une conique). Ce « bicontact » ne se produit donc pas dans le cas général et les deux tangentes se coupent donc en un point que nous appelons provisoirement K [12], de coordonnées barycentriques

$$\big(qr(z^2/c^2 - y^2/b^2), rp(x^2/a^2 - z^2/c^2), pq(y^2/b^2 - x^2/a^2)\big)\,.$$

Le point $\mathbf{I}(K)$ a alors pour coordonnées barycentriques

$$\big(p(x^2/a^2 - z^2/c^2)(y^2/b^2 - x^2/a^2),\ q(y^2/b^2 - x^2/a^2)(z^2/c^2 - y^2/b^2), \\ r(z^2/c^2 - y^2/b^2)(x^2/a^2 - z^2/c^2)\big)\,.$$

Cela étant fait, cherchons en quel point K' la droite FF' recoupe Γ_δ. Une équation barycentrique de FF' est

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a^2yz & b^2zx & c^2xy \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \\ = (c^2y^2 - b^2z^2)xX + (a^2z^2 - c^2x^2)yY + (b^2x^2 - a^2y^2)zZ = 0\,.$$

L'un au moins des coefficients de cette équation barycentrique est non nul ; supposons que c'est $(b^2x^2 - a^2y^2)z$ par exemple.

L'équation de FF' équivaut alors à une équation de la forme $Z = uX+vY$, avec

$$u = -\frac{x(c^2y^2 - b^2z^2)}{z(b^2x^2 - a^2y^2)} \qquad v = -\frac{y(a^2z^2 - c^2x^2)}{z(b^2x^2 - a^2y^2)}\,.$$

L'ensemble des points d'intersection de Γ_δ avec la droite FF' est donné par

[12] À ce stade, rien ne prouve que $K = T$.

le système

$$\begin{cases} \overbrace{\Phi_\delta(X,Y,uX+vY)}^{\psi(X,Y)} & = & 0 \\ Z & = & uX+vY\,. \end{cases}$$

Mais ψ est un polynôme homogène de degré 3 en (X,Y) et on en connaît déjà deux facteurs du premier degré : $(yX-xY)$ et (b^2zxX-a^2zyY) puisque les coordonnées barycentriques de F et de F' le vérifient respectivement.

Il est alors facile de terminer la factorisation de ψ : un calcul un peu fastidieux montre alors que les coordonnées barycentriques de K' sont $(x'',y'',z''=ux''+vy'')$, avec

$$x''=\frac{\mu b^2v^2+\nu c^2v}{a^2b^2c^2} \qquad y''=-\frac{\lambda a^2u^2+\nu c^2u}{a^2b^2c^2}\,,$$

et un calcul simple, mais également un peu long, montre que le point K' coïncide avec $\mathbf{I}(K)$.

Comme $K'\in\Gamma_\delta$ par construction, on a aussi $K=\mathbf{I}(K')\in\Gamma_\delta$ et le résultat annoncé s'ensuit : K est bien le tangentiel $T=\tau(F)=\tau(F')$ et la droite FF' recoupe Γ_δ au point $\mathbf{I}(T)$, c'est-à-dire aussi le point K'.

Dans les calculs qui viennent d'être effectués, on n'aura pas manqué de remarquer la présence de facteurs du type $z^2/c^2-y^2/b^2$ dans l'expression des coordonnées barycentriques de $\mathbf{I}(K)$. Si, par exemple, $z/c=+y/b$, le point F appartient à la bissectrice intérieure de ABC issue de A ; en effet, la droite d'équation barycentrique $Y/b=Z/c$ passe par le point A et par le centre I du cercle inscrit, de coordonnées barycentriques (a,b,c).

Dans ces conditions, le calcul *supra* montre que $\mathbf{I}(K)=A$ et donc que le point F', aligné avec A et F, est aussi sur cette même bissectrice. Le tangentiel commun aux points F et F' est alors l'inverse isogonal de A, c'est-à-dire le point A'.

Voyons donc comment construire les points d'intersection autres que A de Γ_δ avec la bissectrice intérieure β de ABC issue de A, cette construction échouant lorsque cette intersection est réduite à $\{A\}$. La même construction s'applique aux cinq autres bissectrices du triangle, de même qu'aux bissectrices des autres triangles formés à l'aide de trois parmi les quatre droites considérées.

Soit M un point de β ; comme cette droite est (globalement) stable par $\mathbf{I}$, son inverse isogonal $M'\in\beta$, ainsi que le milieu de MM' [13]. En outre, les droites BM et BM' sont symétriques par rapport à la bissectrice intérieure

[13] Ce milieu a un sens si M' n'est pas à l'infini. Cela se produit au contraire lorsque $F_0\in\beta$; dans ce cas, la bissectrice ne coupe la cubique qu'en A et F_0 et toute construction est inutile.

de ABC issue de B. Si, en outre, $M \in \Gamma_\delta$, le milieu de MM' appartient à Δ, la droite de NEWTON.

Si $\beta \parallel \Delta$, le point M ne peut donc exister et la construction échoue. Supposons donc que β et Δ se coupent en un point S. Appelons alors σ l'application affine induite sur β par la symétrie centrale par rapport à S.

Un point de $\beta\backslash\{A\}$ a des coordonnées barycentriques de la forme (at, bu, cu), avec $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et son inverse isogonal a pour coordonnées barycentriques

$$(a^2bcu^2, b^2actu, c^2abtu),$$

soit encore (au, bt, ct) : cette dernière expression est linéaire par rapport aux paramètres (t, u) et cela montre que l'application $\mathbf{i}$ induite sur β par $\mathbf{I}$ est une homographie. L'image de A par $\mathbf{i}$ n'est pas définie *a priori*, mais nous prendrons pour $\mathbf{i}(A)$ le point A'' de coordonnées barycentriques $(0, b, c)$, c'est-à-dire le point d'intersection de β avec BC [14].

Ce qui précède montre que $M \in \Gamma_\delta \cap \beta$ si, et seulement si, $\sigma(M) = \mathbf{i}(M)$, ce qui équivaut encore à $\sigma'(M) = M$, où $\sigma' = \sigma^{-1} \circ \mathbf{i} = \sigma \circ \mathbf{i}$, qui est encore une homographie de la droite β.

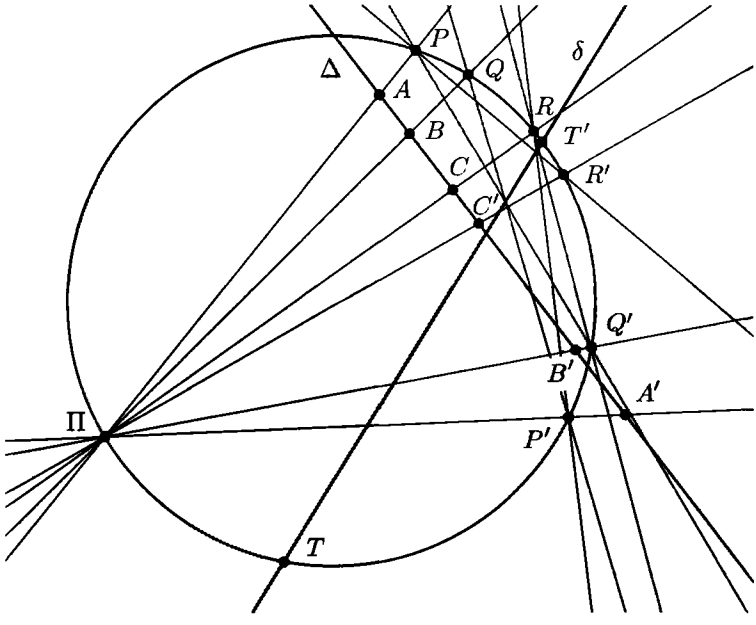
Or, il existe une construction des points fixes (réels) d'une homographie d'une droite, à condition que l'on connaisse les images de trois points de cette droite. Comme nous savons construire $\mathbf{i}(M)$ et $\sigma(M)$ pour tout point de β, cela ne pose effectivement aucun problème.

On a par exemple $\mathbf{i}(A) = A''$, et donc $\sigma'(A) = \sigma(A'')$. On a aussi $\sigma'(A'') = \sigma(A)$. Enfin, le centre I du cercle inscrit, qui est sur β, est fixé par $\mathbf{i}$ et on a enfin $\sigma'(I) = \sigma(I)$.

Revenons à des notations tout à fait générales, c'est-à-dire indépendantes des noms que nous avons attribués aux objets intervenant dans l'étude de Γ_δ : une homographie h est définie sur une droite Δ, et on connaît les images A', B' et C' de trois points A, B et C de Δ. On choisit une conique $\mathscr{C}$ du plan, par exemple un cercle, et un point $\Pi \in \mathscr{C}$. Les droites ΠA, ΠB, ΠC, $\Pi A'$, $\Pi B'$, $\Pi C'$ recoupent $\mathscr{C}$ respectivement en P, Q, R, P', Q', R' [15].

[14] Ce choix est judicieux à tout point de vue : il est compatible avec l'expression $(at, bu, cu) \longmapsto (au, bt, ct)$ lorsque $u = 0$; en outre, les droites $BA'' = BC$ et BA sont bien symétriques par rapport à la bissectrice intérieure de ABC issue de B et, enfin, on a aussi $\mathbf{i}(A'') = A$, ce qui fait que $\mathbf{i}$ reste une involution de la droite β complétée par son point à l'infini.

[15] Comme toujours, si une droite passant par Π est tangente à $\mathscr{C}$, nous dirons qu'elle la recoupe au point Π lui-même. Si par exemple le point A' est à l'infini, nous conviendrons que $\Pi A'$ est la parallèle à Δ menée de Π.



D'après le théorème de PASCAL, les points d'intersection

$$QR' \cap Q'R \qquad RP' \cap R'P, \qquad PQ' \cap P'Q$$

sont alignés sur une droite δ. Si δ est disjointe de $\mathscr{C}$, alors h n'a pas de point fixe ; si elle lui est tangente en un point T_0, alors le point fixe de h est unique et c'est le point d'intersection de Δ avec ΠT_0 ; enfin, si δ coupe $\mathscr{C}$ en deux points T et T', h a deux points fixes qui sont les points d'intersection de ΠT et de $\Pi T'$ avec Δ.

La preuve de cette construction se trouve dans l'ouvrage de BERGER, **[6]**, et celui de FRESNEL, **[12]**, cités en bibliographie.

Il n'est pas essentiel de montrer une figure illustrant chacun des cas particuliers. Dans celle qui suit, il y a effectivement deux points d'intersection de δ avec $\mathscr{C}$. Toutefois, nous n'avons pas tracé ΠT et $\Pi T'$ sur cette figure déjà extrêmement chargée.

5.4. L'équation tangentielle d'une conique

5.4.1. Généralités

De façon très générale, un triangle de référence ABC étant choisi dans un plan affine, on appelle *équation tangentielle* d'une courbe algébrique Γ d'équation barycentrique $\Phi(X, Y, Z) = 0$, où Φ est un polynôme homogène

non constant, une relation $\Psi(u,v,w) = 0$ caractérisant les droites d'équation barycentrique $uX + vY + wZ = 0$ *tangentes* à Γ.

Cette définition pose plus de problèmes qu'elle n'en résout, car il faut s'entendre sur la notion de *contact* entre droite et courbe. Par exemple, la *cubique* Γ d'équation barycentrique $\Phi(X,Y,Z) \overset{\text{déf}}{=} X^3 - Y^2Z = 0$ possède un point de rebroussement en C, et la tangente de rebroussement en ce point est le côté CA du triangle. L'équation barycentrique de cette droite est $Y = 0$ et elle a, au point C, une intersection *triple* avec Γ, puisque $\Phi(X,0,Z) = X^3$ a un zéro triple en $X_0 = 0$.

Or, considérons une droite passant par C, mais distincte de cette tangente : elle a une équation barycentrique de la forme $X = aY$, et $\Phi(aY,Y,Z) = a^3Y^3 - Y^2Z = (a^3Y - Z)Y^2$. Cette droite a avec Γ une intersection *double*, mais ne lui est pourtant pas tangente au sens « classique ».

Le même phénomène se produit avec la conique dégénérée Γ d'équation barycentrique $\Phi(X,Y,Z) \overset{\text{déf}}{=} YZ = 0$, c'est-à-dire la conique réunion des côtés AB et AC. Toute droite passant par A possède un point d'intersection (au moins) double avec Γ. Par exemple, celle d'équation barycentrique $Z = -Y$ puisque $\Phi(X,Y,-Y) = -Y^2$; pis encore, la droite AB elle-même a une intersection d'ordre « infini » avec Γ puisque $\Phi(X,Y,0)$ est le polynôme nul.

Les difficultés surviennent donc notamment des courbes ayant des points singuliers, ou de celles qui se décomposent (ce dernier cas étant un cas ultime du premier).

Pour éviter d'entrer dans ces considérations qui nous emmèneraient trop loin, nous nous limiterons aux équations tangentielles des **coniques non dégénérées**, c'est-à-dire celles qui contiennent au moins deux points distincts, et qui ne sont pas la réunion d'une famille de droites [16].

Si une conique non dégénérée Γ contient deux points distincts, elle contient au moins trois points A, B et C non alignés, et nous pouvons prendre le triangle ABC comme triangle de référence. L'équation barycentrique de Γ, conique circonscrite, est alors de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$, avec $pqr \neq 0$, c'est-à-dire encore, après multiplication par 2, ${}^t\xi U\xi = 0$, avec $\xi = {}^t(X,Y,Z)$ et

$$U = \begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Si nous prenons un triangle de référence quelconque, les formules de changement de coordonnées barycentriques conduisent à une équation barycentrique de Γ de la forme ${}^t\xi V\xi = 0$, où V est une matrice symétrique

[16] Voir toutefois la remarque à la fin de cette section.

inversible d'ordre 3, c'est-à-dire à une équation de la même forme que dans le cas d'une conique circonscrite, mais avec une matrice plus générale.

L'équation tangentielle de Γ *se déduit alors de manière particulièrement simple de l'équation barycentrique ; si l'on pose* $\Xi = {}^t(u,v,w)$, *il s'agit en effet de* ${}^t\Xi V^{-1}\Xi = 0$. *En particulier, cette équation tangentielle est encore polynomiale homogène de degré* 2 [17].

Démontrons le résultat annoncé, dans le cas d'un triangle de référence quelconque. Il résulte de la section **A-5** que, si la droite D d'équation barycentrique $uX + vY + wZ = 0$ est tangente à la conique Γ d'équation barycentrique ${}^t\xi V\xi = 0$, alors il existe un point M de coordonnées barycentriques (x,y,z) tel que D ait aussi pour équation barycentrique $(x\,y\,z)\,V\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} = 0$. Cela montre que $\underbrace{(u\,v\,w)}_{{}^t\Xi} = \lambda\underbrace{(x\,y\,z)}_{{}^t\xi}V$, pour un λ réel non nul.

On en déduit que $\lambda\,{}^t\xi = {}^t\Xi V^{-1}$ et, puisque V est symétrique, que $\lambda\xi = V^{-1}\Xi$. Or, $M \in \Gamma$ et l'on a donc ${}^t\xi V\xi = 0$, de sorte que ${}^t\Xi\underbrace{V^{-1}VV^{-1}}_{=V^{-1}}\Xi = 0$ après simplification par λ^2.

Inversement, établissons que, si Ξ vérifie l'équation ${}^t\Xi V^{-1}\Xi = 0$, avec $\Xi = {}^t(u,v,w)$ triplet non nul, alors la droite D d'équation barycentrique $(X\,Y\,Z)\Xi = uX + vY + wZ = 0$ est tangente à Γ.

Il suffit pour cela de poser $\xi = V^{-1}\Xi$; on a alors ${}^t\xi V\xi = {}^t\Xi\underbrace{V^{-1}VV^{-1}}_{=V^{-1}}\Xi =$ ${}^t\Xi V^{-1}\Xi = 0$ et cela montre que le point M de coordonnées barycentriques ${}^t\xi$ appartient à Γ. En outre, la tangente en M à Γ a pour équation barycentrique $(X\,Y\,Z)V\xi = 0$, c'est-à-dire encore $(X\,Y\,Z)\Xi = 0$: on reconnaît là l'équation barycentrique de la droite D.

Il est à noter que, si W est une matrice symétrique inversible d'ordre 3, il existe au plus une conique non dégénérée $\mathscr{C}$ dont l'équation tangentielle soit $(u\,v\,w)W\,{}^t(u\,v\,w) = 0$. En effet, le seul choix possible pour V est $V = W^{-1}$ et, inversement, comme V est symétrique inversible d'ordre 3, elle convient si, et seulement si, la conique d'équation barycentrique ${}^t\xi V\,{}^t\xi = 0$ contient au moins deux points [18].

Avec cette notation, si la conique $\mathscr{C}$ admet un centre, il admet pour coordonnées barycentriques le triplet $(1,1,1) \times V^{-1}$, c'est-à-dire le triplet $(1,1,1) \times W$: cela résulte de la discussion faite au **II-2.4**. Si la conique

[17] Alors que la situation se complique pour les courbes algébriques de degré supérieur : si Γ est de degré n, l'équation tangentielle a un degré $\leqslant n(n-1)$.

[18] Mais cette condition n'est pas automatiquement vérifiée (penser au cas où $W = \mathbf{I}_3$ par exemple). Tous les cas ont été envisagés dans la section **II-2.1**.

est une parabole, le triplet obtenu par ce produit correspond à un point à l'infini, celui de l'axe de la conique.

Remarque. Lorsqu'une conique Γ dégénère en la réunion de deux droites distinctes D_1 et D_2, les remarques liminaires de cette section montrent qu'il est judicieux de considérer qu'une droite est tangente à Γ si, et seulement si, elle passe par le point d'intersection de D_1 et de D_2 (éventuellement à l'infini en cas de parallélisme des deux droites). Enfin, si Γ dégénère en une droite double D, toute droite du plan peut être considérée comme tangente à Γ.

On peut alors, dans n'importe lequel de ces deux cas dégénérés, chercher à quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $\Xi = {}^t(u,v,w)$ la droite d'équation barycentrique $uX + vY + wZ = 0$ est tangente à Γ. Une telle équation sera toujours appelée *équation tangentielle* de Γ[19].

Si l'on considère alors une matrice V symétrique réelle d'ordre 3 telle qu'une équation barycentrique de Γ soit ${}^tXVX = 0$, alors un calcul analogue donne comme équation tangentielle ${}^t\Xi\widetilde{V}\Xi = 0$, où $\widetilde{V}$ désigne la transposée de la comatrice de V.

Il est important de remarquer que cette formule inclut le cas des coniques Γ non dégénérées, c'est-à-dire le cas des matrices V inversibles, puisqu'alors les matrices V^{-1} et $\widetilde{V}$ sont proportionnelles.

La raison profonde qui rend ici $\widetilde{V}$ plus générale que V^{-1} est qu'en fait l'équation tangentielle fait intervenir, non pas $\mathbb{R}^3$, mais la puissance extérieure seconde $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$. Comme cet espace vectoriel est encore de dimension 3[20], nous avons pu l'identifier implicitement avec $\mathbb{R}^3$ et rester dans un cadre vectoriel classique.

En revanche, si nous nous s'intéressions à une condition pour qu'une droite d'un espace de dimension 3, cette fois, soit tangente à une *quadrique*, nous ne pourrions nous en tirer à si bon compte car c'est bien à partir de $\bigwedge^2(\mathbb{R}^4)$, de dimension 6, qu'il faudrait chercher cette condition.

5.4.2. Dualité, équations barycentriques et équations tangentielles

Reprenons les définitions et notations du **III-4.2.** Considérons une conique Γ non dégénérée, d'équation barycentrique $\Phi(X,Y,Z) = 0$ et d'équation tangentielle $\Phi'(U,V,W) = 0$, où Φ et Φ' sont des formes quadratiques non dégénérées définies sur $\mathbb{R}^3$.

Puisque Φ est non dégénérée, nous pouvons introduire la conique non dégénérée Γ_1 d'*équation tangentielle* $\Phi(U,V,W) = 0$ et, puisque Φ' est non dégénérée, nous pouvons aussi considérer la conique non dégénérée Γ_2 d'*équation barycentrique* $\Phi'(X,Y,Z) = 0$.

Par définition même, on a alors ce qui suit.

---

[19] Cette généralisation serait de peu d'intérêt dans cet ouvrage. Elle deviendrait cruciale si l'on s'intéressait à des problèmes tels que la construction de la *conique harmoniquement attachée à deux coniques*.

[20] À vrai dire, le cadre idéal est plutôt l'espace projectif de dimension 2 déduit de cet espace vectoriel.

1. Le point M *appartient à* $\Gamma \iff$ la droite $\delta(M)$ est *tangente à* Γ_1.
2. La droite Δ *est tangente à* $\Gamma \iff$ le point $\delta(\Delta)$ *appartient à* Γ_2.

Dans la section suivante, nous allons donner un exemple d'application de cette dualité. Essentiellement, il s'agit de substituer à une démonstration portant sur des équations tangentielles une démonstration portant sur des équations barycentriques, ou *vice-versa*. Bien entendu, on met à contribution le catalogue des correspondances détaillées au **III-4.2**.

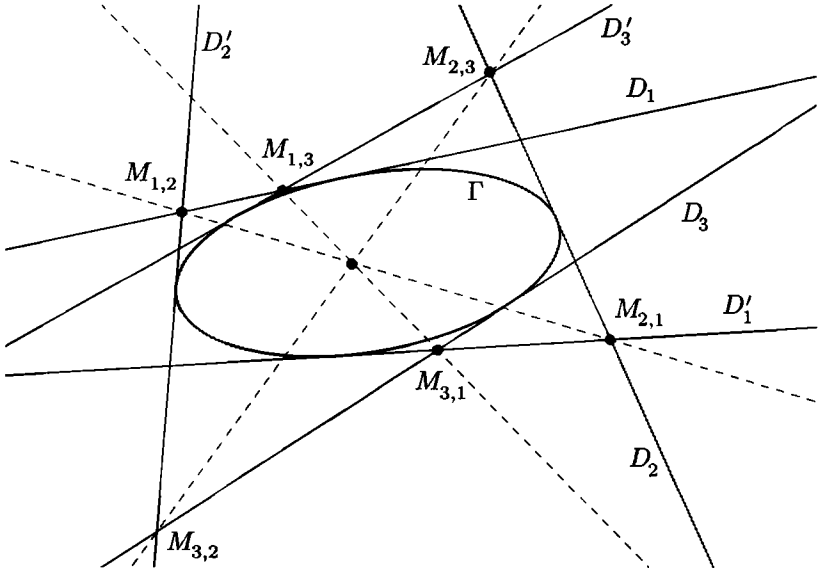
5.4.3. Dualité et théorème de BRIANCHON

Notre récompense va être de déduire sans coup férir, c'est-à-dire par un argument général mais sans calcul, le théorème de BRIANCHON à partir du théorème de PASCAL.

En voici l'énoncé : supposons six droites $D_1, D_2, D_3, D'_1, D'_2, D'_3$ dont trois quelconques ne sont pas concourantes. On désigne par $M_{i,j}$ le point de concours, éventuellement à l'infini, de D_i et de D'_j.

Dès lors, *il existe une conique tangente à ces six droites si, et seulement si, les droites* $M_{2,3}M_{3,2}$, $M_{3,1}M_{1,3}$ *et* $M_{1,2}M_{2,1}$ *concourent.*

Si on se représente les six droites comme les six côtés d'un hexagone, cela équivaut à dire que les trois droites joignant les sommets opposés de celui-ci concourent.



En effet, posons $N_i = \delta(D_i)$ et $N'_j = \delta(D'_j)$ pour i et j dans $\{1, 2, 3\}$. Trois quelconques de ces points ne sont pas alignés et la droite duale du point $M_{i,j}$

est alors la droite $N_iN'_j$, de même que le dual de la droite $M_{i,j}M_{j,i}$, pour $i \neq j$, est alors le point $P_{i,j}$ d'intersection de $N_iN'_j$ et de $N_jN'_i$.

La condition est nécessaire. Si les six droites sont tangentes à une conique Γ', alors cette conique est non dégénérée puisque, sinon, il existerait trois droites concourantes dans cette famille. Soit $\Phi'(U,V,W) = 0$ une équation tangentielle quadratique de Γ ; les six points $N_1, \ldots, N'_3$ appartiennent donc à la conique d'*équation barycentrique* $\Phi'(X,Y,Z) = 0$.

Le théorème de PASCAL montre alors que les points $P_{2,3}$, $P_{3,1}$ et $P_{1,2}$ sont alignés. Cela établit que les droites $M_{2,3}M_{3,2}$, $M_{3,1}M_{1,3}$ et $M_{1,2}M_{2,1}$ concourent.

La condition est suffisante. Si les trois droites $M_{2,3}M_{3,2}$, $M_{3,1}M_{1,3}$ et $M_{1,2}M_{2,1}$ concourent, les points $P_{2,3}$, $P_{3,1}$ et $P_{1,2}$ sont alignés. Le théorème de PASCAL montre alors que les six points $N_1, \ldots, N'_3$ appartiennent à une même conique Γ, d'équation barycentrique quadratique $\Phi(X,Y,Z) = 0$. Puisque les six points sont trois à trois non alignés, la conique Γ est non dégénérée, et les six droites sont tangentes à la conique d'*équation tangentielle* $\Phi(U,V,W) = 0$. Le résultat est établi.

5.4.4. Le cas des coniques inscrites

Intéressons-nous aux coniques non dégénérées inscrites dans un triangle de référence ABC, c'est-à-dire tangentes aux trois côtés de ce triangle. Il résulte de la section précédente qu'une telle conique Γ, que nous qualifierons d'*inscrite* [21] pour simplifier, a une équation tangentielle de la forme $(u\,v\,w)W\,{}^t(u\,v\,w) = 0$, où $W = (w_{i,j})$ est une matrice symétrique inversible d'ordre 3.

Or, le côté BC, d'équation barycentrique $X = 0$, est tangent à Γ si, et seulement si, $w_{1,1} = 0$. De la même façon, on vérifie que les trois côtés sont tangents à Γ si, et seulement si, les trois termes diagonaux de W sont nuls. Cela équivaut à dire que W est de la forme

$$W = \begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire « de la même forme » que la matrice donnant l'équation barycentrique d'une conique circonscrite. En outre, W doit être inversible, ce qui équivaut à $pqr \neq 0$. Inversement, si W est de cette forme, alors $V = W^{-1}$ est symétrique inversible d'ordre 3 et, surtout, la conique d'équation barycentrique ${}^t\xi V\,{}^t\xi = 0$ contient au moins deux points. En effet, nous avons vu à la fin de la section **II-2.1** que la signature d'une matrice symétrique

[21] Parce que c'est le terme consacré. Cela étant, une parabole inscrite dans un triangle y est plutôt exinscrite.

de la forme $\begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix}$ était $(2,1)$ ou $(1,2)$ lorsque $pqr \neq 0$. Comme la matrice V est de même signature que W [22], V admet aussi pour signature $(2,1)$ ou $(1,2)$, et la conique d'équation barycentrique ${}^t\xi V\, {}^t\xi = 0$ est une « vraie » ellipse, parabole ou hyperbole (mais qui n'a aucune raison d'être circonscrite).

À noter en outre qu'une conique Γ non dégénérée est une parabole si, et seulement si, la droite de l'infini, d'équation barycentrique $X + Y + Z = 0$, est tangente à Γ. Cela revient à dire que le vecteur ${}^t(1\,1\,1)$ vérifie l'équation tangentielle de cette conique.

On peut enfin se demander à quoi correspond une équation de la forme

$$(u\,v\,w)W\,{}^t(u\,v\,w) = 0$$

lorsque la matrice W est symétrique d'ordre 3, mais non inversible. Le seul cas intéressant est celui où la signature de W est $(1,1)$, de sorte que l'équation précédente se factorise en le produit de deux formes linéaires **non nulles** :

$$(a_1u + b_1v + c_1w)(a_2u + b_2v + c_2w) = 0\,.$$

Dans ce cas, chaque équation de la forme $a_iu + b_iv + c_iw = 0$, où $i \in \{1,2\}$, correspond à l'ensemble des droites passant par le point M_i (éventuellement à l'infini) de coordonnées barycentriques (a_i, b_i, c_i). On dit alors que la conique d'équation tangentielle $(u\,v\,w)W\,{}^t(u\,v\,w) = 0$ *dégénère en la réunion de deux faisceaux linéaires de droites*. On dit parfois aussi que cette conique *dégénère en deux points* ; une droite lui sera considérée comme tangente si, et seulement si, elle passe par l'un au moins des deux points M_1 ou M_2.

On peut aussi considérer le cas où la signature de W est $(1,0)$ ou $(0,1)$, de sorte que l'équation précédente se factorise (au signe près) en le carré d'une forme linéaire **non nulle** :

$$\pm(au + bv + cw)^2 = 0\,.$$

Dans ce cas, cela reviendrait à « fusionner » les deux points du cas précédent et on dirait que la conique *dégénère en un faisceau linéaire (double) de droites* ou *dégénère en un point double*.

Comme on le voit, les cas dégénérés d'équations tangentielles n'ont rien à voir avec ceux des équations cartésiennes ou barycentriques classiques. Nous ne nous en étonnerons pas : une ellipse de foyers F et F', de demi-grand axe $a > 0$ et de demi-distance focale c, avec $a > c$, est le lieu des points vérifiant l'*équation bifocale* $MF + MF' = 2a$, alors que, dans le cas dégénéré où $a = c$, cette équation est celle du **segment** FF'. C'est encore une forme dégénérée différente ; on peut dire qu'à chaque mode de représentation des coniques correspondent des cas dégénérés propres.

[22] En effet, ses valeurs propres sont les inverses de celles de W, de sorte que ces deux matrices ont respectivement autant de valeurs propres de chaque signe.

Pour les sections qui suivent, nous n'aurons plus besoin de donner de nom à des matrices symétriques d'ordre 3 servant à définir des équations tangentielles. Nous pourrons réutiliser les lettres U, V et W pour qualifier les paramètres formels intervenant dans de telles équations.

Ainsi, écrire par exemple qu'une conique non dégénérée admet une équation tangentielle de la forme $pVW + qWU + rUV = 0$ reviendra à écrire que la droite d'équation barycentrique $uX + vY + wZ = 0$ est tangente à cette conique si, et seulement si, on a $pvw + qwu + ruv = 0$.

Remarque. Nous avons une situation analogue à celle décrite au **II-2.1** : *si on se donne cinq droites dont trois quelconques ne concourent pas, alors il existe exactement une conique non dégénérée qui leur soit tangente.*

Cela s'établit comme dans la section rappelée *supra* : on commence par choisir un triangle de référence porté par trois de ces cinq droites, et on recherche « les » coniques inscrites qui soient aussi tangentes aux deux autres droites. On en trouve alors une et une seule.

Si, parmi cinq droites, trois concourent, mais non pas quatre, alors on observe, comme au **II-2.1**, un cas de dégénérescence : il existe une seule conique solution, mais dégénérée : c'est celle qui est réunion de deux faisceaux de droites, la base de l'un étant le point de concours des trois droites, et celle du second le point de concours des deux autres. Là encore, la forme de dégénérescence observée est celle décrite dans *cette* section.

5.4.5. Retour sur un exercice

À titre d'exemple, retrouvons l'équation tangentielle du cercle inscrit dans le triangle de référence ABC : comme c'est une conique inscrite, c'est sous cette forme que l'on obtiendra un résultat de la façon la plus simple.

Cette équation est de la forme $pVW + qWU + rUV = 0$, et nous écrivons que le centre de la conique est le point I, de coordonnées barycentriques (a, b, c), voir **I-10.**

Vu ce qui précède, nous avons la relation

$$\begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

De cela suit, après résolution de ce système linéaire en les inconnues p, q, r,

$$(p, q, r) = \frac{1}{2}(b + c - a, c + a - b, a + b - c),$$

de sorte qu'une équation tangentielle du cercle inscrit est $(b+c-a)VW + (c+a-b)WU + (a+b-c)UV = 0$.

En dépit des apparences, elle est proportionnelle à celle trouvée au **IV-3.3** ; en effet, si on appelle R le rayon du cercle circonscrit au triangle,

$$a+b-c = 2R(\sin\widehat{A}+\sin\widehat{B}-\sin\widehat{C}) = \\ = 4R\Big(\sin\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}-\sin\frac{\widehat{C}}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2}\Big).$$

Maintenant, $\dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\widehat{C}}{2}$, et donc

$$a+b-c = 4R\cos\frac{\widehat{C}}{2}\Big(\cos\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}-\cos\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\Big) \\ = 8R\cos\frac{\widehat{C}}{2}\sin\frac{\widehat{A}}{2}\sin\frac{\widehat{B}}{2}\cdot$$

On a donc

$$a+b-c = 8R\sin\frac{\widehat{A}}{2}\sin\frac{\widehat{B}}{2}\sin\frac{\widehat{C}}{2}\operatorname{cotg}\frac{\widehat{C}}{2},$$

et nous retrouvons l'équation tangentielle citée, au facteur de proportionnalité $8R\sin\dfrac{\widehat{A}}{2}\sin\dfrac{\widehat{B}}{2}\sin\dfrac{\widehat{C}}{2}$ près.

Des généralités de cette section résulte que les droites qui joignent les sommets aux points de contact du cercle avec les côtés opposés concourent en le point de coordonnées barycentriques $\big(1/(b+c-a),1/(c+a-b),1/(a+b-c)\big)$ ou, si l'on préfère, $\big(\operatorname{tg}(\widehat{A}/2),\operatorname{tg}(\widehat{B}/2),\operatorname{tg}(\widehat{C}/2)\big)$. Ce point est appelé le *point de* GERGONNE du triangle ABC.

On sait qu'il y a trois autres cercles tangents aux trois côtés du triangle ABC, qui sont les cercles *exinscrits*, voir au **IV-1.1**. On en obtient les équations tangentielles respectives en remplaçant l'une des trois longueurs a, b ou c par son opposé : on pourra vérifier cela en exercice.

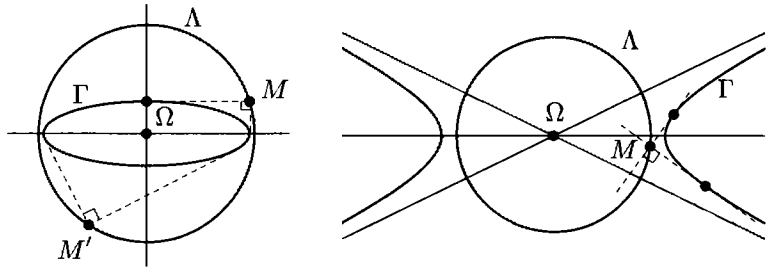
On n'oubliera pas que l'on obtient les équations barycentriques de ces cercles en faisant appel aux matrices inverses de celles intervenant dans les calculs que nous venons de mener.

5.4.6. Équations tangentielles et lieux orthoptiques

Dans cette section, nous ne détaillerons pas tous les calculs mais énoncerons un certain nombre de résultats intéressants en soi. Nous commençons par rappeler une définition.

Si Γ est une conique d'un plan affine euclidien, on appelle *lieu orthoptique* de Γ l'ensemble Λ des points d'intersection de deux tangentes à Γ orthogonales. Nous rappelons à présent les principaux résultats dans ce domaine (voir **[6]**).

- Si Γ est une ellipse, de centre Ω et de demi-longueurs des axes a et b, alors Λ est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$.
- Si Γ est une parabole, alors Λ en est la directrice.
- Si Γ est une hyperbole, de centre Ω et de demi-longueurs des axes, respectivement focal et non focal, a et b, alors Λ est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{a^2-b^2}$.



Cela demande une petite explication : si $a > b$, Λ est en fait le cercle indiqué, mais privé de quatre points. On convient toutefois de considérer que Λ est ce cercle *entier* [23].

Si $a = b$, autrement dit si Γ est une hyperbole équilatère, deux tangentes à Γ ne sont jamais orthogonales, mais les deux asymptotes le sont, et se coupent en Ω. Si l'on considère les asymptotes de Γ comme des tangentes particulières, alors Λ est bien le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{a^2-b^2}$, c'est-à-dire de rayon nul.

Si $a < b$, ce qui se produit si, et seulement si, l'excentricité de Γ vérifie $e > \sqrt{2}$, alors Λ est vide.

Ces rappels effectués, venons-en à l'objet essentiel de cette section : *nous allons donner une formule simple liant l'équation barycentrique du lieu orthoptique Λ d'une conique Γ et l'équation tangentielle de cette dernière.*

Supposons en effet qu'un triangle de référence ABC soit donné et que l'équation tangentielle de Γ soit de la forme $\Phi = 0$, où

$$\Phi(U,V,W) = \lambda U^2 + \mu V^2 + \nu W^2 + 2(pVW + qWU + rUV),$$

alors l'équation barycentrique du lieu orthoptique Λ est $\Psi = 0$, où

$$\Psi(X,Y,Z) = \Delta\,(a^2YZ + b^2ZX + c^2XY) + (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)(X+Y+Z),$$

[23] Si l'on considère les asymptotes de Γ comme des tangentes particulières, ce qui est le cas si on plonge la figure dans le plan projectif réel, alors on obtient le cercle entier.

avec

$$\begin{cases} \Delta &= -\Phi(1,1,1) = -(\lambda+\mu+\nu+2(p+q+r)) \\ \alpha &= \mu c^2 + 2p\,bc\cos\widehat{A} + \nu b^2 \\ \beta &= \nu a^2 + 2q\,ca\cos\widehat{B} + \lambda c^2 \\ \gamma &= \lambda b^2 + 2r\,ab\cos\widehat{C} + \mu a^2\,. \end{cases}$$

Entendons-nous bien : ce n'est pas que cette expression soit particulièrement *simple*, mais elle a le mérite de lier *linéairement* les coefficients de Φ et ceux de Ψ.

Faisons maintenant quelques remarques.

- Lorsque $\Delta \neq 0$, ce qui équivaut au fait que Γ *n'est pas* une parabole[24], l'équation barycentrique ainsi obtenue est bien celle d'un cercle, éventuellement vide ou réduit à un point : voir pour cela le **II-2.13**. En outre, la droite d'équation barycentrique $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$ est l'axe radical de Λ et du cercle circonscrit au triangle ABC.
- Lorsque $\Delta = 0$, ce qui équivaut au fait que Γ est une parabole, on voit que Λ dégénère en la réunion de la droite Λ_0 d'équation barycentrique $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$ et de la droite de l'infini. La droite Λ_0 est donc alors la directrice de la parabole Γ.

  D'ailleurs, si Γ est une parabole, elle est inscrite dans le triangle ABC si, et seulement si, on a de plus $\lambda = \mu = \nu = 0$. Dans ce cas, puisque $\Delta = 0$, on a aussi $p+q+r = 0$.

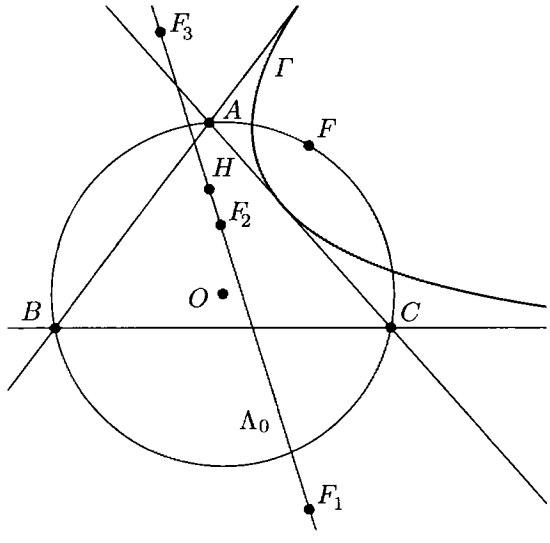
  Les coefficients α, β et γ prennent alors une forme plus simple et une équation barycentrique de la directrice Λ_0 est aussi, après simplification par $2abc$, de la forme $d = 0$, avec

$$d(X,Y,Z) = \frac{p\cos\widehat{A}}{a}X + \frac{q\cos\widehat{B}}{b}Y + \frac{r\cos\widehat{C}}{c}Z\,.$$

  On vérifie que l'orthocentre H du triangle ABC appartient à cette droite : si par exemple le triangle n'est pas rectangle, la valeur au point H du polynôme d est $p+q+r$, c'est-à-dire 0.

  Nous avons là une propriété classique de la parabole, liée à la droite de STEINER : si une parabole Γ de foyer F est inscrite dans un triangle ABC, alors le point F appartient au cercle circonscrit à ABC, et la directrice de Γ contient les symétriques F_1, F_2 et F_3 de F par rapport aux côtés du triangle ainsi que l'orthocentre H de celui-ci.

[24] En effet, Γ est une parabole si, et seulement si, la droite de l'infini lui est tangente, c'est-à-dire si, et seulement si, le vecteur $(1,1,1)$ annule Φ ; or, justement, $\Delta = -\Phi(1,1,1)$.



5.5. Un mot sur les faisceaux tangentiels de coniques

Au lieu de s'intéresser aux coniques passant par quatre points donnés, nous leur imposons ici d'être tangentes *à quatre droites. Toujours* quatre *conditions !*

5.5.1. Introduction

Commençons cette section par un exercice. On donne un triangle de référence ABC et une conique $\mathscr{C}$ inscrite non dégénérée, distincte d'une parabole, d'équation tangentielle $pVW + qWU + rUV = 0$. Une droite T tangente à $\mathscr{C}$ et d'équation barycentrique $uX + vY + wZ = 0$ coupe les côtés BC, CA et AB en T_A, T_B et T_C respectivement. Montrer que les milieux respectifs de AT_A, BT_B et CT_C sont alignés avec le centre $I_{\mathscr{C}}$ de la conique.

Appelons respectivement T'_A, T'_B et T'_C ces trois milieux, et (x, y, z) les coordonnées barycentriques de $I_{\mathscr{C}}$. Il suffit de montrer que ce centre est aligné avec les deux premiers milieux par exemple.

Or, T coupe BC en le point T_A de coordonnées barycentriques $(0, w, -v)$ et on vérifiera que les coordonnées barycentriques du milieu T'_A de AT_A sont alors $(w - v, w, -v)$. De même, celles de T'_B sont $(-w, u - w, u)$. Montrons alors la nullité de

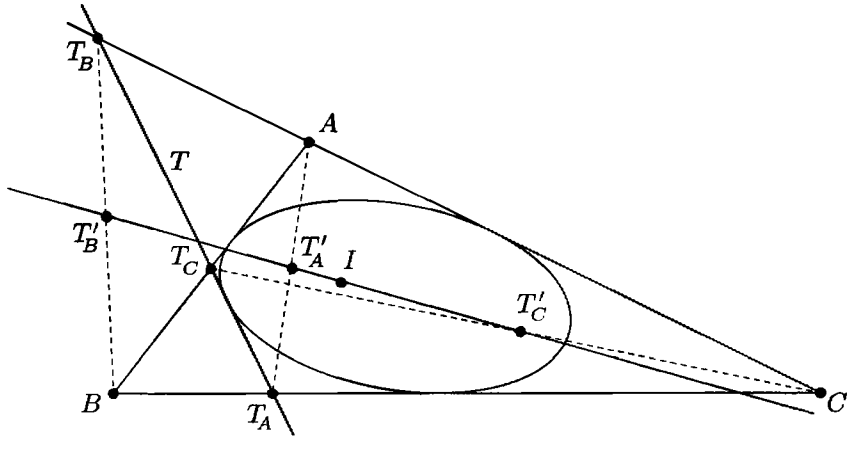
$$\Delta = \begin{vmatrix} w - v & w & -v \\ -w & u - w & u \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Or, $\Delta = vw(y+z-x) + wu(z+x-y) + uv(x+y-z)$; en outre, comme pour le cas du cercle inscrit, on a

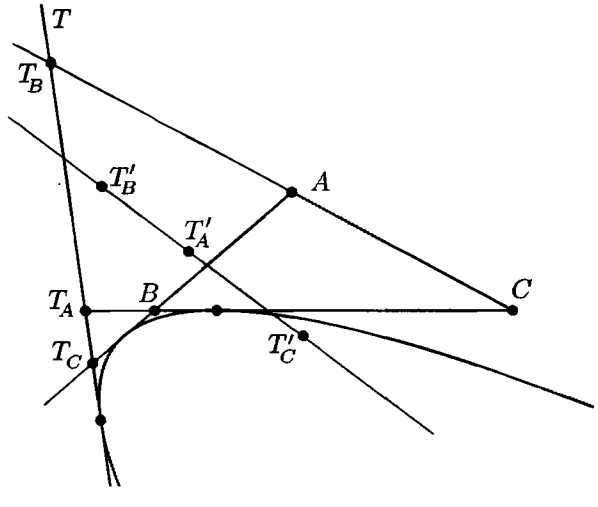
$$(p,q,r) = \frac{1}{2}(y+z-x, z+x-y, x+y-z),$$

de sorte que $D = 2(pvw+qwu+ruv) = 0$ puisque (u,v,w) satisfait l'équation tangentielle de la conique.

Bien entendu, si $\mathscr{C}$ est une parabole, son centre est le point à l'infini de son axe, et les trois milieux sont sur une droite parallèle à cet axe[25].



La figure qui suit illustre le cas d'une parabole :



[25]Cette propriété fournit donc une construction simple de la direction de l'axe d'une parabole dont on connaît quatre tangentes.

5.5.2. Les faisceaux tangentiels

Nous citons ici quelques résultats obtenus dans l'étude des *faisceaux tangentiels de coniques*, c'est-à-dire l'étude de l'ensemble des coniques satisfaisant des équations tangentielles (relatives à un triangle de référence) de la forme $pVW + qWU + rUV = 0$, où le triplet non nul (p, q, r) vérifie la relation $u_0p + v_0q + wr_0 = 0$ (les scalaires non nuls u_0, v_0 et w_0 étant donnés), ce qui fait de ces équations un pendant des équations barycentriques des coniques d'un faisceau linéaire.

Nous avons vu au **A-5.4.4** que ces équations tangentielles représentent une « vraie » conique chaque fois que $pqr \neq 0$. En revanche, il y a trois équations tangentielles dégénérées correspondant à l'annulation de pqr ; il s'agit de $w_0WU - v_0UV = 0$, $-w_0VW + u_0UV = 0$ et $v_0VW - u_0WU = 0$. Selon la terminologie du **A-5.4.4**, les trois coniques correspondantes dégénèrent en deux points, la première par exemple en la paire (A, A'), où les coordonnées barycentriques de A' sont $(0, -v_0, w_0)$; d'ailleurs, le point A' appartient à la droite Δ d'équation barycentrique $X/u_0 + Y/v_0 + Z/w_0 = 0$. De même, les deux autres coniques dégénèrent respectivement en la paire (B, B'), où les coordonnées barycentriques de B' sont $(u_0, 0, -w_0)$ et en la paire (C, C'), où les coordonnées barycentriques de C' sont $(-u_0, v_0, 0)$; en outre, les points B' et C' sont eux aussi situés sur la droite Δ.

On peut alors vérifier les propriétés suivantes.

- Une conique non dégénérée appartient à ce faisceau si, et seulement si, elle est inscrite dans le triangle ABC et est tangente à Δ. On pourra faire le parallèle avec les faisceaux linéaires : ici, nous avons un faisceau tangentiel « à quatre droites de base ».
- Le centre d'une telle conique est aligné avec les milieux des segments AA', BB' et CC', milieux que l'on peut considérer comme les « centres » des coniques dégénérées du faisceau. Pas de conique des neuf points ici : les centres des coniques d'un faisceau tangentiel décrivent une banale droite[26].

Dans l'exemple du **A-5.5.1**, la conique $\mathscr{C}$ appartient au faisceau tangentiel à droites de base BC, CA, AB et T (qui joue le rôle de Δ), et les points A', B' et C' sont respectivement les points T_A, T_B et T_C.

6. Étude de la famille F de la section VI-5.4

Supposons que l'origine du repère orthonormé de référence a été placée au point O, centre du cercle circonscrit au triangle ABC, et supposons que le rayon de ce cercle est égal à 1. Identifions alors le plan euclidien à $\mathbb{C}$ et

[26] On l'appelle la *droite de Newton* du faisceau.

appelons a, b et c les affixes des points A, B et C. Plutôt que d'écrire un vecteur $V \in \mathbb{R}^4$ sous la forme $(\alpha, \beta, \gamma, t)$[27], nous l'écrirons $V = (z, \gamma, t)$, avec $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$, mais toujours γ et t réels.

Le cercle de $\mathscr{F}_A$ centré en B a pour équation complexe $\overline{(z-b)}(z-b) = \overline{(a-b)}(a-b)$ puisqu'en outre il passe par A. Ce cercle est donc $\mathbf{C}_V$, avec $V = (b, \underbrace{-\bar{a}a + \bar{a}b + \bar{b}a}_{=\gamma}, 1)$. Comme $\bar{a}a = 1$, l'expression de γ se simplifie en $\bar{a}b + \bar{b}a - 1$.

Nous utiliserons aussi la formule $\gamma = \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} - 1 = \dfrac{a^2 + b^2 - ab}{ab}$, même si elle dissimule la réalité du terme γ. On obtient ensuite une représentation analogue $\mathbf{C}_{V'}$ du cercle de $\mathscr{F}_A$ centré en C.

Prenons le triangle ABC comme triangle barycentrique de référence. Soit Δ une droite d'équation barycentrique $uX + vY + wZ = 0$, où $(u, v, w) \notin \mathrm{Vect}(1, 1, 1)$. Si elle n'est pas parallèle à BC[28], elle coupe cette droite en le point de coordonnées barycentriques $(0, w, -v)$. Le cercle de $\mathscr{F}_A$ centré en ce point est donc $\mathbf{C}_{wV - vW'}$. Si la droite Δ est au contraire parallèle à BC, c'est-à-dire si $w = v$, la même formule donne l'axe radical du faisceau $\mathscr{F}_A$, qui est bien « centré à l'infini ».

Par permutation des rôles des complexes a, b et c, on obtient aussi une expression des cercles de $\mathscr{F}_B$ et $\mathscr{F}_C$ centrés sur Δ.

Ces trois cercles appartiennent à un même faisceau si, et seulement si, la matrice *symbolique* suivante est de rang < 3 :

$$M = \begin{pmatrix} wb - vc & w\dfrac{a^2+b^2-ab}{ab} - v\dfrac{a^2+c^2-ac}{ac} & w - v \\ uc - wa & u\dfrac{b^2+c^2-bc}{bc} - w\dfrac{b^2+a^2-ab}{ab} & u - w \\ va - ub & v\dfrac{c^2+a^2-ca}{ca} - u\dfrac{c^2+b^2-cb}{cb} & v - u \end{pmatrix} \overset{!}{\in} \mathfrak{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

En effet, les trois cercles en question sont les $\mathbf{C}_{V_i}$, avec $1 \leqslant i \leqslant 3$, et où les V_i sont les lignes de M. Comme la première composante de chaque V_i est complexe, elle compte pour deux composantes réelles ; la matrice M est alors effectivement dans $\mathfrak{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ et nous l'avons qualifiée de *symbolique* puisqu'il a fallu en interpréter la taille et les coefficients.

En outre, la condition nécessaire et suffisante cherchée est bien que les V_i forment une famille liée, et donc que le rang de M soit < 3.

---

[27] Les lettres a, b et c seront réservées aux affixes des sommets du triangle. Question d'antériorité !

[28] Pour ne pas compliquer inutilement, nous n'étudierons pas le cas d'une droite Δ parallèle à un des côtés du triangle. À part les côtés eux-mêmes, aucune ne convient en fait.

Appelons C, C', C'' les colonnes de cette matrice, la première étant complexe et « comptant pour deux ». Dire que le rang de M' est < 3 équivaut à dire que les *quatre* déterminants réels suivants sont nuls : $D' = \mathrm{Det}(\mathrm{Re}\,C, \mathrm{Im}\,C, C')$, $D'' = \mathrm{Det}(\mathrm{Re}\,C, \mathrm{Im}\,C, C'')$, $d = \mathrm{Det}(\mathrm{Re}\,C, C', C'')$ et enfin $d' = \mathrm{Det}(\mathrm{Im}\,C, C', C'')$.

Or, il est immédiat que $d = d' = 0$ si, et seulement si, le déterminant complexe $D = \mathrm{Det}(C, C' + C'', C'')$ est nul[29]. On obtient la valeur de D en additionnant les lignes à la première, ce qui permet de développer ensuite par rapport à cette ligne. On a alors

$$D = \underbrace{(u(c-b) + v(a-c) + w(b-a))}_{D_1}\underbrace{((\lambda_b - \lambda_c)vw + (\lambda_c - \lambda_a)wu + (\lambda_a - \lambda_b)uv)}_{D_2},$$

avec $\lambda_a = b/c + c/b$, $\lambda_b = c/a + a/c$ et $\lambda_c = a/b + b/a$.

Ainsi, D est le produit des deux facteurs D_1 et D_2. Maintenant, $D_1 = 0$, c'est-à-dire $u(c-b) + v(a-c) + w(b-a) = 0$, équivaut à $u = v = w$.

On peut l'établir de deux façons : d'abord, en remarquant que cette condition implique $u(\overline{c} - \overline{b}) + v(\overline{a} - \overline{c}) + w(\overline{b} - \overline{a}) = 0$, puisque les coefficients u, v et w sont réels. On vérifie alors que le système $\mathscr{S}$

$$\begin{cases} u(c-b) + v(a-c) + w(b-a) &= 0 \\ u(\overline{c}-\overline{b}) + v(\overline{a}-\overline{c}) + w(\overline{b}-\overline{a}) &= 0 \end{cases}$$

est de rang 2 et que l'espace vectoriel des solutions de $\mathscr{S}$ est donc de dimension 1. Comme tout élément de $\mathrm{Vect}(1,1,1)$ vérifie ce système, il n'y a pas d'autres solutions. La droite Δ a pour équation barycentrique $X + Y + Z = 0$: c'est la droite de l'infini.

Une autre manière de procéder est de constater que $\mathscr{S}$ équivaut à dire que la droite Δ passe par les points cycliques, voir au **IV-3.1**. Cela montre donc que Δ est la droite de l'infini et cela confirme le premier résultat.

Les calculs précédents excluaient les droites Δ parallèles à un côté du triangle. Est-ce à dire que certaines droites vérifiant l'équation tangentielle trouvée ne conviennent pas? Par exemple, si Δ est parallèle à AB, on a $u = v$. Or, dans ce cas, D_2 devient $(\lambda_a - \lambda_b)u(u - w)$, de sorte que D_2 s'annule si, et seulement si, $u = v = 0$ ou $u = v = w\,(\neq 0)$. Le premier cas correspond à $\Delta = AB$, mais l'étude des cas particuliers a établi que AB peut être considéré comme une droite Δ particulière, et le second cas correspond à la droite de l'infini, que nous acceptons aussi. Ainsi, *toutes les droites Δ vérifiant l'équation tangentielle $D_2 = 0$ conviennent.*

Enfin, l'équation $D_2 = 0$ est l'équation tangentielle d'une conique inscrite, voir au **A-5.4.4.** Comme le vecteur $(1,1,1)$ annule D_2, on en déduit qu'il s'agit d'une parabole ; nous la désignerons par $\mathscr{P}$.

[29] À noter que D n'est autre que le déterminant de M' considérée comme élément de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.

Il convient toutefois encore de vérifier que cette conique n'est pas dégénérée, c'est-à-dire que les coefficients de D_2, comme $\lambda_b - \lambda_c$, sont tous non nuls. Or,

$$\lambda_b - \lambda_c = \frac{(a^2 - bc)(c - b)}{abc},$$

et ce terme est bien non nul : $c \neq b$ est évident, et $a^2 \neq bc$ résulte de l'hypothèse que le triangle *ABC n'est pas* isocèle, voir au **V-3.2** [30].

Nous avons vu aussi au **A-5.4.4** que la connaissance de *cinq* tangentes est nécessaire pour la détermination d'une conique. Nous connaissons déjà les trois côtés du triangle, et l'étude des faisceaux particuliers effectuée au **VI-5.4** nous en a fourni largement assez.

On notera d'ailleurs que la connaissance de *quatre* tangentes « à distance finie » suffit pour la détermination d'une parabole, la droite à l'infini jouant le rôle de cinquième tangente. On notera aussi que le rôle de la droite de l'infini n'est pas une nouveauté à ce stade : dès le début de la section **VI-5.4**, nous avons signalé que le concours des axes radicaux des faisceaux $\mathscr{F}_A$, $\mathscr{F}_B$ et $\mathscr{F}_C$ impliquait la présence de la droite à l'infini parmi les droites des centres des faisceaux de **F**.

Mais ce n'est pas terminé ! Il nous reste à étudier l'annulation des déterminants D' et D''.

Formons un produit matriciel par bloc dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$:

$$(\operatorname{Re} C, \operatorname{Im} C, C') \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{J}.$$

Il est immédiat que ce produit est la matrice $(C, \overline{C}, C')$ et que $\det(J) = -2\mathrm{i}$. Ainsi,

$$-2\mathrm{i}D' = \begin{vmatrix} wb - vc & w/b - v/c & w\dfrac{a^2+b^2-ab}{ab} - v\dfrac{a^2+c^2-ac}{ac} \\ uc - wa & u/c - w/a & u\dfrac{b^2+c^2-bc}{bc} - w\dfrac{b^2+a^2-ba}{ab} \\ va - ub & v/a - u/b & v\dfrac{c^2+a^2-ca}{ca} - u\dfrac{c^2+b^2-cb}{cb} \end{vmatrix}.$$

[30] Il n'existe jamais, pour une parabole non dégénérée, deux tangentes distinctes et parallèles. Comme les trois côtés du triangle sont des tangentes particulières à $\mathscr{P}$, cela explique que nous n'ayons pas trouvé d'autres tangentes parallèles à un des côtés.

Pour la même raison, on a

$$(\mathscr{E}) \qquad -2\mathrm{i}D'' = \begin{vmatrix} wb-vc & w/b-v/c & w-v \\ uc-wa & u/c-w/a & u-w \\ va-ub & v/a-u/b & v-u \end{vmatrix}.$$

Commençons par $-2\mathrm{i}D''$, d'aspect plus engageant ; écrivons-en la première ligne sous la forme

$$L_1 = w(b, 1/b, 1) - v(c, 1/c, 1)$$

et les deux autres lignes sous des formes analogues. Comme la fonction déterminant est trilinéaire, cette écriture de chaque ligne comme combinaison linéaire de deux lignes nous fournit la valeur de D'' comme somme de $2^3 = 8$ termes, dont six sont nuls : l'un de ces six termes nuls est par exemple

$$(-v)\cdot u\cdot(-u)\begin{vmatrix} c & 1/c & 1 \\ c & 1/c & 1 \\ b & 1/b & 1 \end{vmatrix}$$

Ne subsistent alors dans $-2\mathrm{i}D''$ que les deux termes suivants :

$$-2\mathrm{i}D'' = w\cdot u\cdot v\cdot\begin{vmatrix} b & 1/b & 1 \\ c & 1/c & 1 \\ a & 1/a & 1 \end{vmatrix} - v\cdot w\cdot u\cdot\begin{vmatrix} c & 1/c & 1 \\ a & 1/b & 1 \\ b & 1/b & 1 \end{vmatrix}$$

Du fait de l'antisymétrie de la fonction déterminant, il en résulte que D'' vaut toujours 0.

Appelons C''' la deuxième colonne du déterminant $-2\mathrm{i}D''$ dans la formule $(\mathscr{E})$ ci-dessus ; un calcul rapide montre que l'on a

$$\delta C''' = \lambda C + \mu C''$$

avec

$$\begin{cases} \delta = u(b-c) + v(c-a) + w(a-b) & = -D_1 \\ \lambda = u(1/b-1/c) + v(1/c-1/a) + w(1/a-1/b) & = -\overline{D_1} \\ \mu = u(b/c-c/b) + v(c/a-a/c) + w(a/b-b/a)\,. \end{cases}$$

Donc, $-2\mathrm{i}\delta D' = \det(C, \lambda C + \mu C'', C')$ Ainsi, de la trilinéarité de la fonction déterminant suit que $2\mathrm{i}D_1 D' = -\mu \underbrace{\det(C, C', C'')}_{=D=D_1 D_2}$.

Nous en déduisons que $D' = \dfrac{\mathrm{i}}{2}\mu\, D_2$ lorsque $D_1 \neq 0$. La formule reste vraie lorsque $D_1 = 0$ puisque, dans ce cas, Δ est la droite de l'infini et la formule devient $0 = 0$.

En résumé, $D_2 = 0$ est une condition nécessaire d'appartenance des trois cercles considérés à un même faisceau, et nous venons de voir que, récipro-

quement, cette condition implique que le rang de M est < 3. L'ensemble des droites qui conviennent est bien l'ensemble des tangentes à la parabole $\mathscr{P}$.

Remarque. Le terme μ en facteur dans D' est nul si, et seulement si,

$$u(b/c - c/b) + v(c/a - a/c) + w(a/b - b/a) = 0$$

Cela n'est pas exactement une condition barycentrique, car les « coefficients » $b/c - c/b$, etc., ne sont pas réels. Ce sont toutefois des imaginaires purs et on remet tout en ordre en les divisant par 2i.

Ainsi, si on pose $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$ et $c = e^{i\gamma}$, alors, par exemple,

$$b/c - c/b = 2i\sin(\beta - \gamma) = -2i\sin 2\widehat{A}$$

Cela établit que $\mu = 0$ si, et seulement si, $u\sin 2\widehat{A} + v\sin 2\widehat{B} + w\sin 2\widehat{C} = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, la droite Δ passe par le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, c'est-à-dire le point O : voir pour cela au **I-10** les coordonnées barycentriques du point O.

Si on appelle C_O le cercle-point $\{O\}$, on vérifiera facilement que la condition $D' = 0$ équivaut au concours ou au parallélisme des axes radicaux de C_O avec les cercles-droites $\mathbf{C}_{V_i}$, où $1 \leqslant i \leqslant 3$. Or, précisément, si Δ passe par O, ces trois axes radicaux sont orthogonaux à Δ et sont donc effectivement parallèles.

En conclusion, cette mise en facteur de μ dans D' ne correspond donc pas à une quelconque propriété du point O, en tant que centre du cercle circonscrit par exemple, mais simplement au fait que ce point a été choisi comme origine du repère.

Au moins, ce terme parasite, en se factorisant, aura eu l'avantage de faire passer de 3 à 2 le degré de l'équation tangentielle caractérisant les droites Δ. Cela se produit aussi chaque fois que les faisceaux $\mathscr{F}_A$, $\mathscr{F}_B$ et $\mathscr{F}_C$ ont été choisis de manière suffisamment générique.

Nous avons aussi annoncé que, lorsqu'ils sont éléments d'un faisceau, les cercles-droites $\mathbf{C}_{V_i}$ ont un axe radical passant par 0, c'est-à-dire que les puissances $\mathbf{p}_{\mathbf{C}_{V_i}}(O)$ sont toutes les trois égales.

Or, la puissance de O par rapport à $\mathbf{C}_{V_1}$ par exemple est

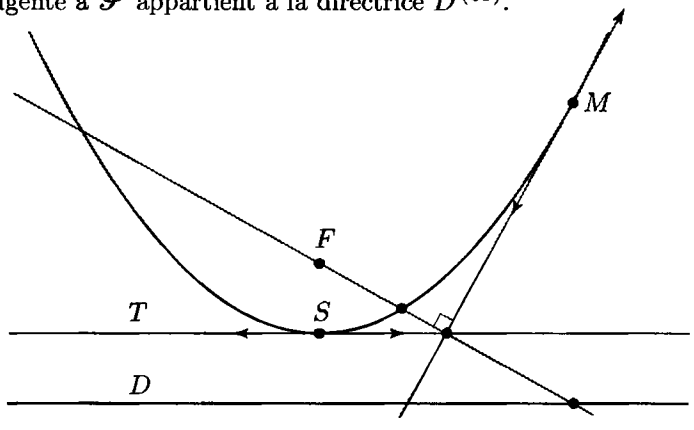
$$\frac{1}{w - v} \times \left(w\frac{a^2 + b^2 - ab}{ab} - v\frac{a^2 + c^2 - ac}{ac} \right),$$

avec des formules analogues pour les deux autres puissances, voir page **439**. En conséquence, O est sur l'axe radical de $\mathbf{C}_{V_1}$ et $\mathbf{C}_{V_2}$ si, et seulement si,

$$(u - w)(w(\lambda_c - 1) - v(\lambda_b - 1)) = (w - v)(u(\lambda_a - 1) - w(\lambda_c - 1)).$$

Or, en développant et réduisant cette équation, on obtient exactement l'équation tangentielle $D_2 = 0$, vérifiée chaque fois que les $\mathbf{C}_{V_i}$ sont dans un même faisceau. Comme il en va de même pour la condition $\mathbf{p}_{\mathbf{C}_{V_1}}(O) = \mathbf{p}_{\mathbf{C}_{V_3}}(O)$, nous avons bien établi le résultat.

Reste enfin à déterminer les « éléments » de la parabole $\mathscr{P}$: foyer et directrice. Soit F le foyer de $\mathscr{P}$; nous savons que le symétrique de F par rapport à une tangente à $\mathscr{P}$ appartient à la directrice D [31].



Choisissons comme tangentes les trois côtés du triangle ; comme les symétriques de F par rapport à ces côtés sont sur D, ils sont alignés et l'exercice **c.** du **V-4** montre que F appartient au cercle circonscrit à ABC et que l'orthocentre H, étant aligné avec les trois symétriques, appartient à la directrice D.

Pour établir à présent que la directrice est l'axe d'EULER OH, sachant que H est sur cette directrice, il suffit d'établir l'orthogonalité du vecteur $\overrightarrow{OH}$ et d'un vecteur directeur de l'axe de $\mathscr{P}$.

Or, la remarque faite à la fin du **A-5.4.1** montre qu'un vecteur directeur de l'axe de $\mathscr{P}$ a pour coordonnées barycentriques le triplet

$$\frac{1}{2}(1,1,1)\begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix},$$

avec $p = \lambda_b - \lambda_c$, $q = \lambda_c - \lambda_a$ et $r = \lambda_a - \lambda_b$, c'est-à-dire encore le triplet $(\lambda_c - \lambda_b, \lambda_a - \lambda_c, \lambda_b - \lambda_a)$. Donc, un vecteur directeur de l'axe a pour composantes $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$, où

$$\begin{aligned} z = pa + qb + rc &= a(a/c + c/a - b/a - a/b) \\ &\quad + b(b/a + a/b - c/b - b/c) + c(c/b + b/c - a/c - c/a)\,. \end{aligned}$$

[31] C'est une propriété classique des paraboles. On pourra vérifier que si une parabole a une équation cartésienne mise sous la forme $X^2 = 2pY$, après choix d'un repère orthonormé, les coordonnées du foyer F sont $(0, p/2)$ et les coordonnées du symétrique de F par rapport à la tangente au point de coordonnées $(x, x^2/2p)$ sont $(x, -p/2)$, ce qui établit le résultat. De même, la projection orthogonale de F sur cette tangente appartient à la tangente au sommet : cette dernière se déduit de la directrice par l'homothétie de centre F et de rapport $1/2$.

On a encore

$$z = a^2(1/c - 1/b) + b^2(1/a - 1/c) + c^2(1/b - 1/a)\,.$$

Enfin, un vecteur directeur de OH a pour composantes $\big(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z\big)$, où $z' = a + b + c$.

L'orthogonalité de ces deux vecteurs équivaut à $\operatorname{Re}(\overline{z}z') = 0$, c'est-à-dire à la nullité de la partie réelle de

$$Z = \left(\frac{c-b}{a^2} + \frac{a-c}{b^2} + \frac{b-a}{c^2}\right)(a+b+c)\,.$$

On a alors tout de suite

$$Z = \frac{c^2-b^2}{a^2} + \frac{a^2-c^2}{b^2} + \frac{b^2-a^2}{c^2} + \frac{c-b}{a} + \frac{a-c}{b} + \frac{b-a}{c}\,,$$

et on vérifie alors que $\overline{Z} = -Z$; les calculs ne sont pas détaillés ici, mais on utilise le fait que, par exemple, le conjugué de $(c-b)/a$ est $a/c - a/b$, alors que Z contient les opposés de ces mêmes termes. Ainsi, $\overline{z}z'$ est bien de partie réelle nulle.

Une manière plus élégante de voir les choses était de factoriser z : on a en effet

$$z = -\frac{(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)}{abc}\,.$$

Or, $z'' = \dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{abc}$ est un imaginaire pur, car son conjugué est $abc(1/b-1/c)(1/c-1/a)(1/a-1/b) = -z''$. Ainsi, les vecteurs représentés par z et z' sont bien orthogonaux[32].

7. Un exercice : hyperboles équilatères et faisceaux tangentiels

7.1. Énoncé

Dans le plan affine euclidien Π, on donne quatre droites, Δ_A, Δ_B, Δ_C et Δ' *en position générale*, c'est-à-dire deux à deux concourantes, et trois à trois non concourantes. Les droites Δ_B et Δ_C se coupent en A, les droites Δ_C et Δ_A en B, les droites Δ_A et Δ_B en C, et enfin la droite Δ' coupe les trois premières respectivement en A', B' et C'.

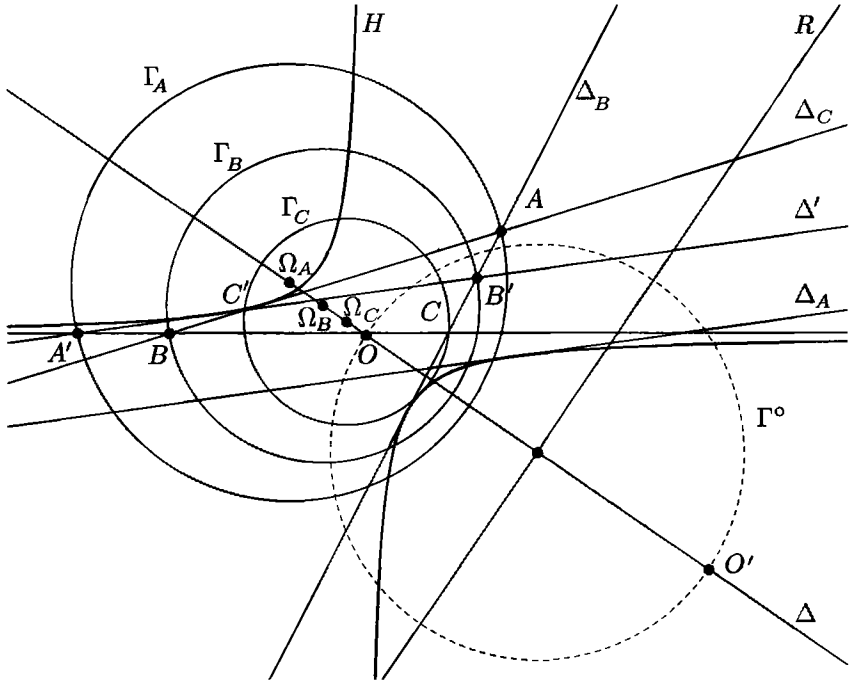
[32]Pourquoi penser à factoriser ? Parce que l'on s'aperçoit que z est une fonction polynomiale alternée en a, b et c, c'est-à-dire qui s'annule lorsque $a = b$, $b = c$ ou $c = a$. Après factorisation par $(b-c)$, etc., le facteur restant au numérateur ne peut qu'être de degré 1 et symétrique en les trois variables, c'est-à-dire de la forme $\lambda(a+b+c)$.

Sauf en cas d'ambiguïté, l'expression *les quatre droites* fera référence aux droites qui viennent d'être définies.

En outre, on fait l'hypothèse « générale » que les droites AA', BB' et CC' sont deux à deux concourantes ; on désigne alors par A'' le point d'intersection de BB' et CC', et on définit de même les points B'' et C''.

La donnée de quatre droites en position générale *est ce que l'on nomme aussi un* quadrilatère complet. *Les six points* $AA'BB'CC'$ *en sont les* sommets *et les droites* AA', BB' *et* CC' *les* diagonales.

1. Vérifier que les points A'', B'', C'' sont distincts et non alignés. On prendra désormais ce triangle comme triangle de référence dans les calculs barycentriques.
   Établir que l'ensemble Φ des hyperboles équilatères, dégénérées ou non, par rapport auxquelles ce triangle est autopolaire est un faisceau linéaire à quatre points de base, qui sont le centre du cercle inscrit et les trois centres des cercles exinscrits au triangle $A''B''C''$.
   Afin de ne pas compliquer inutilement nos notations, ces quatre points seront appelés I *pour le centre du cercle inscrit et respectivement* I_A, I_B *et* I_C *pour les trois autres, et non pas par exemple* $I_{A''}$.
   Établir que la conique des neuf points du faisceau linéaire Φ est le cercle Γ circonscrit au triangle $A''B''C''$.
2. On désigne à présent par $\mathscr{F}$ le faisceau *tangentiel* formé des coniques tangentes aux quatre droites.
   Établir que le triangle $A''B''C''$ est autopolaire par rapport à toutes les coniques éléments de $\mathscr{F}$.
   Discuter le nombre d'hyperboles équilatères éléments de $\mathscr{F}$ à l'aide des positions relatives de la droite de NEWTON Δ du faisceau $\mathscr{F}$ et du cercle Γ. Proposer une construction de ces hyperboles, lorsqu'il en existe.
   La droite Δ *est aussi appelée la* droite de Newton *du quadrilatère complet.*
3. Établir que les lieux orthoptiques des coniques de $\mathscr{F}$, et en particulier les trois cercles de diamètres respectifs AA', BB' et CC', appartiennent à un même faisceau linéaire $\mathscr{F}'$ de cercles-droites.
   Que représente pour $\mathscr{F}$ l'axe radical du faisceau $\mathscr{F}'$?
   Discuter selon la nature du faisceau $\mathscr{F}'$ l'existence d'hyperboles équilatères éléments de $\mathscr{F}$, et en proposer une seconde méthode de construction
   Par exemple, on pourra indiquer un moyen de construire cinq tangentes à ces hyperboles, ce qui suffit pour les construire. Quatre d'entre elles sont déjà données.



Dans cette figure, nous avons représenté les cercles de diamètre AA', BB' et CC', l'axe radical R du faisceau $\mathscr{F}'$, un cercle Γ° du faisceau orthogonal $(\mathscr{F}')^\circ$ [33], puis H, l'une des deux hyperboles équilatères du faisceau $\mathscr{F}$, et O le centre de celle-ci. À noter que les centres Ω_A, Ω_B et Ω_C des trois cercles, ainsi que le centre O de H, sont alignés sur la droite de NEWTON, *lieu des centres des coniques du faisceau $\mathscr{F}$.*

On pourra s'étonner des angles donnés sur la figure aux droites Δ_A, Δ_B, Δ_C et Δ' deux à deux; c'est à ce prix que l'on obtient l'existence d'hyperboles équilatères dans $\mathscr{F}$: voir les remarques dans la section suivante.

Enfin, nous n'avons représenté que l'une de ces hyperboles, la seconde étant « loin » des autres éléments de la figure; on en jugera par la position du second centre O'.

7.2. Corrigé

1. Prenons provisoirement ABC comme triangle de référence; la droite $A'B'C'$ a une équation barycentrique de la forme $X/u+Y/v+Z/w=0$, où $uvw \neq 0$.

[33] Plus précisément, au **A-7.3.3**, nous montrerons que le cercle Γ lui-même est élément du faisceau orthogonal $(\mathscr{F}')^\circ$.

Les points A', B' et C' ont donc pour coordonnées barycentriques respectives $(0,-v,w)$, $(u,0,-w)$ et $(-u,v,0)$. Ensuite, les trois droites AA', BB' et CC' ont pour équations barycentriques respectives $wY+vZ=0$, $wX+uZ=0$ et $vX+uY=0$.

Il est possible que $BB' \parallel CC'$: cela se produit si, et seulement si, $u(-u+v+w)=0$, preuve que notre hypothèse n'était pas superflue. Au contraire, comme nous avons supposé les droites AA', BB' et CC' deux à deux sécantes, les points A'', B'' et C'' ne sont pas à l'infini et ont pour coordonnées barycentriques respectives $(-u^2,uv,uw)$, $(vu,-v^2,vw)$ et $(wu,wv,-w^2)$. Un calcul de déterminant établit alors qu'effectivement ces trois points ne sont pas alignés et, donc, forment un triangle [34].

Désormais, c'est le triangle $A''B''C''$ qui sera notre triangle de référence, bien plus efficace que le triangle ABC, du fait des rôles symétriques qu'il fait jouer aux points A, A', aux points B, B' et aux points C, C'. Mais il fallait bien passer par le triangle ABC pour établir l'existence du triangle $\mathscr{T}=A''B''C''$.

Cela étant, l'équation barycentrique d'une conique $\mathscr{C}$ par rapport à laquelle $\mathscr{T}$ est autopolaire est de la forme $\lambda X^2+\mu Y^2+\nu Z^2=0$, où les coefficients (λ,μ,ν) ne sont pas tous nuls. Cette conique est une hyperbole équilatère si, et seulement si, les points cycliques I et J sont conjugués par rapport à elle.

Or, vu les conventions et notations du **IV-3.2**, les coordonnées barycentriques respectives des points cycliques sont $(z_c-z_b, z_a-z_c, z_b-z_a)$ et $(\overline{z_c-z_b}, \overline{z_a-z_c}, \overline{z_b-z_a})$ si nous désignons par z_a, z_b et z_c les affixes respectifs des points A'', B'' et C''.

Ainsi, ils sont conjugués par rapport à $\mathscr{C}$ si, et seulement si,

$$\lambda \underbrace{\overline{(z_c-z_b)}(z_c-z_b)}_{=\|B''C''\|^2} + \mu \underbrace{\overline{(z_a-z_c)}(z_a-z_c)}_{=\|C''A''\|^2} + \nu \underbrace{\overline{(z_b-z_a)}(z_b-z_a)}_{=\|A''B''\|^2} = 0$$

Désignons par a, b et c les longueurs respectives des côtés du triangle $\mathscr{T}$ [35] ; la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathscr{C}$ soit une hyperbole équilatère est donc $\lambda a^2+\mu b^2+\nu c^2=0$.

Le centre I du cercle inscrit au triangle $\mathscr{T}$ a pour coordonnées barycentriques (a,b,c) et il est immédiat qu'il appartient à toutes les coniques d'équation barycentrique de la forme $\lambda X^2+\mu Y^2+\nu Z^2=0$, lorsque $\lambda a^2+\mu b^2+\nu c^2=0$. Il en va de même des points I_A, I_B, I_C.

Inversement, toute conique d'équation barycentrique $\lambda X^2+\mu Y^2+\nu Z^2=0$ qui passe par ces quatre points est telle que $\lambda a^2+\mu b^2+\nu c^2=0$.

[34] Le déterminant d'ordre 3 ayant pour lignes les coordonnées barycentriques des points A'', B'' et C'' est égal à $4u^2v^2w^2$.

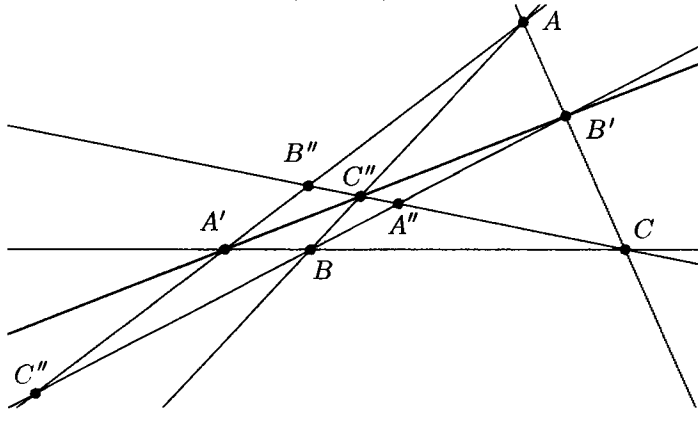
[35] Plutôt que a'', b'' et c'', mais il s'agit de notre triangle de référence.

Nous avons donc bien établi que l'ensemble Φ *est un faisceau linéaire à quatre points de base, qui sont le centre du cercle inscrit et les trois centres des cercles exinscrits au triangle* $A''B''C''$.

Puisque Φ est un faisceau linéaire d'hyperboles équilatères, le lieu des centres des coniques de Φ est un cercle, et plus précisément le cercle des neuf points du triangle $I_AI_BI_C$. Comme les points A'', B'', C'' sont les pieds des hauteurs de ce triangle, voir en page **171**, ce cercle des neuf points est le cercle circonscrit au triangle $\mathscr{T}$.

À noter que les coniques dégénérées du faisceau, au nombre de trois, sont les réunions des deux bissectrices issues d'un même sommet du triangle $\mathscr{T}$. Par exemple, la réunion des droites I_AI et I_BI_C est la réunion des deux bissectrices issues de A''.

2. Relativement au triangle de référence $\mathscr{T}$, la droite $A'B'C'$ a maintenant une équation barycentrique de la forme $\dfrac{X}{p}+\dfrac{Y}{q}+\dfrac{Z}{r}=0$, de sorte que les coordonnées barycentriques de A' sont $(0,-q,r)$, celles de B' sont $(p,0,-r)$ et celles de C' sont $(-p,q,0)$.



Cette figure montre trois quadruplets de points en conjugaison harmonique : $AA'B''C''$, $BB'C''A''$ et $CC'A''B''$, consulter pour cela le **II-2.7**.

Vu les résultats de ce paragraphe, les coordonnées barycentriques de A, B et C sont respectivement $(0,q,r)$, $(p,0,r)$ et $(p,q,0)$.

Pour établir que le triangle $\mathscr{T}$ est autopolaire par rapport aux coniques du faisceau tangentiel $\mathscr{F}$, cherchons l'équation tangentielle, puis concluons quant à l'équation barycentrique, de ces dernières.

Pour cela, remarquons que les coniques dégénérées de $\mathscr{F}$ sont les réunions de deux points, l'un étant à l'intersection de deux des quatre droites, et l'autre à l'intersection des deux autres. Ainsi, deux des quatre droites se coupent en A, ce sont les droites AB et AC, et les deux autres en A', ce sont les droites BC et $A'B'C'$. On obtient bien entendu de même

les coniques dégénérant en la réunion des points B et B' d'une part, et des points C et C' d'autre part [36].

Une droite d'équation barycentrique $uX + vY + wZ = 0$ passe par le point A, respectivement le point A', si, et seulement si, $qv + rw = 0$, respectivement $qv - rw = 0$. Une équation tangentielle de la conique dégénérant en les points A et A' est donc le produit de ces deux équations tangentielles, savoir $V^2q^2 - W^2r^2 = 0$. De même, une équation tangentielle de la conique dégénérant en les points B et B' est $W^2r^2 - U^2p^2 = 0$, de sorte que les équations tangentielles des coniques du faisceau sont de la forme $\lambda(V^2q^2 - W^2r^2) + \mu(W^2r^2 - U^2p^2) = 0$. Les matrices de ces équations tangentielles sont donc diagonales. Si une conique de ce faisceau est non dégénérée, la matrice de son équation barycentrique, qui en est la matrice inverse, est par conséquent également diagonale. Cela implique donc bien que le triangle $A''B''C''$ est autopolaire par rapport à ces coniques ; on vérifierait enfin qu'il en est de même des trois coniques dégénérées [37].

Le lieu des centres des coniques éléments de $\mathscr{F}$ est la droite de NEWTON Δ du faisceau $\mathscr{F}$. Rappelons que les milieux des segments AA', BB' et CC' appartiennent à cette droite, ce qui est plus qu'il n'en faut pour la construire géométriquement.

En conséquence, puisque $\mathscr{T}$ est autopolaire par rapport aux coniques de $\mathscr{F}$, une hyperbole équilatère est tangente aux quatre droites, c'est-à-dire est élément de $\mathscr{F}$, si, et seulement si, elle appartient à Φ *et* est centrée sur la droite de NEWTON Δ.

Une hyperbole équilatère est donc tangente aux quatre droites si, et seulement si, son centre est point d'intersection de Δ et du cercle circonscrit Γ à $\mathscr{T}$. Puisque deux coniques d'un faisceau linéaire à quatre points de base ayant le même centre sont égales, on en déduit que le nombre de ces hyperboles équilatères est précisément le nombre de points de $\Gamma \cap \Delta$. En d'autres termes, il y a zéro, une ou deux coniques de cette forme si, et seulement si, respectivement, Δ est extérieure, tangente ou sécante à Γ.

Si Ω est le centre d'une des hyperboles équilatères cherchées, on peut la construire grâce à *cinq* de ses points : I_A, I_B, I_C, I et par exemple le symétrique de l'un de ces quatre points par rapport à Ω.

3. Nous avons vu au **A-5.4.6** que le lieu orthoptique Λ d'une conique $\mathscr{C}$ est un cercle-droite, et que son équation barycentrique possède des coefficients fonctions *linéaires* du sextuplet non nul $(\lambda, \mu, \nu, p, q, r)$ des

[36] On dira naturellement que les points A et A', par exemple, sont des sommets *opposés* du quadrilatère complet formé par les quatre droites. Reformulons le résultat précédent : *les coniques dégénérées de $\mathscr{F}$ sont les réunions de deux sommets opposés du quadrilatère complet.*

[37] Une autre conséquence intéressante de ce fait sera exposée au **A-7.3.3**.

coefficients de l'équation tangentielle $\lambda U^2 + \mu V^2 + \nu W^2 + 2(pVW + qWU + rUV) = 0$ de $\mathscr{C}$. Puisque l'ensemble des valeurs de ce sextuplet est un hyperplan de $\mathbb{R}^6$, privé du sextuplet nul, alors les équations barycentriques des lieux orthoptiques Λ sont elles les aussi combinaisons linéaires de deux d'entre elles.

Ainsi, soit les lieux orthoptiques ne dépendent pas du choix de $\mathscr{C} \in \mathscr{F}$, soit ils appartiennent à un faisceau linéaire de cercles-droites. La première possibilité est exclue : en effet, le faisceau $\mathscr{F}$ contient une parabole $\mathscr{P}$, dont le lieu orthoptique est une droite, alors que les lieux orthoptiques des autres coniques du faisceau sont des cercles, éventuellement vides, mais en tout cas distincts d'une droite.

Nous savons donc désormais que les lieux orthoptiques Λ appartiennent à un *faisceau de cercles-droites* $\mathscr{F}'$. Nous dirons, selon notre jurisprudence, *faisceau de cercles* pour simplifier.

Une des coniques dégénérées de ce faisceau est la paire (A, A'), dont le lieu orthoptique est le cercle de diamètre AA' : vu le **A-5.4.4**, les tangentes à cette conique menées d'un point M sont les droites MA et MA' ; elles sont orthogonales si, et seulement si, M appartient au cercle de diamètre AA'. Il suit de cela que les cercles de diamètres respectifs AA', BB' et CC' appartiennent à $\mathscr{F}'$.

La droite de ce faisceau a déjà été caractérisée : c'est le lieu orthoptique de la parabole $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$, c'est-à-dire la directrice de celle-ci. Cette directrice est donc l'*axe radical* du faisceau $\mathscr{F}'$.

Le lieu orthoptique d'une conique est réduit à un singleton si, et seulement si, cette conique est une hyperbole équilatère : il s'agit donc de discuter la présence de cercles-points dans le faisceau $\mathscr{F}'$.

- **Cas 1.** Si $\mathscr{F}'$ est un faisceau à points de base, il ne contient aucun cercle-point et $\mathscr{F}$ ne contient donc aucune hyperbole équilatère. Cela se produit si, et seulement si, la droite Δ est extérieure à Γ.
- **Cas 2.** Si $\mathscr{F}'$ est un faisceau de cercles tangents, il contient un cercle-point et un seul, et $\mathscr{F}$ contient donc une unique hyperbole équilatère. Elle a alors pour centre le point de contact de Γ et de Δ. Cela se produit si, et seulement si, la droite Δ est tangente à Γ.
- **Cas 3.** Si $\mathscr{F}'$ est un faisceau à points de PONCELET, il contient exactement deux cercles-points, et $\mathscr{F}$ contient donc deux hyperboles équilatères. Elles ont alors pour centres respectifs les points d'intersection de Γ et de Δ. Cela se produit si, et seulement si, la droite Δ est sécante à Γ.

Puisque nous savons construire trois cercles particuliers du faisceau $\mathscr{F}'$, nous savons en reconnaître la nature. Dans le deuxième cas, le cercle-point du faisceau $\mathscr{F}'$ est le point de contact de deux cercles quelconques de celui-ci et, dans le troisième cas, les deux cercles-points de $\mathscr{F}'$ sont

les points de base du faisceau orthogonal $(\mathscr{F}')^\circ$. Dans tous les cas, nous savons donc construire ces éventuels cercles-points.
Comme le lieu orthoptique d'une hyperbole équilatère se réduit à son centre, nous savons donc déterminer les centres de ces hyperboles. Puisque nous en connaissons par hypothèse *quatre* tangentes, une cinquième est obtenue comme la symétrique de l'une des quatre premières par rapport au centre de l'hyperbole.

7.3. Remarques et compléments

7.3.1. La question de l'angle obtus

Nous justifions ici la forme inhabituelle donnée au triangle ABC dans notre corrigé : nous établissons en effet que, si un triangle ABC a ses trois angles aigus, aucune hyperbole équilatère n'y est inscrite.

En effet, on démontrerait de la même façon que l'ensemble des lieux orthoptiques des coniques inscrites dans ce triangle est un *réseau* de cercles-droites[38]. Or, un exemple de conique inscrite dégénérée est la réunion des faisceaux de droites de base A et A', où A' est sur la droite BC ; le lieu orthoptique de cette conique est le cercle de diamètre AA'. Mais, si H est l'orthocentre du triangle ABC, la puissance de H par rapport à ce cercle est $\left(\overrightarrow{HA} \,|\, \overrightarrow{HA'}\right)$, c'est-à-dire aussi $\left(\overrightarrow{HA} \,|\, \overrightarrow{HB}\right)$. Or, on a

$$\left(\overrightarrow{HB} \,|\, \overrightarrow{HC}\right) = \left(\overrightarrow{HC} \,|\, \overrightarrow{HA}\right) = \left(\overrightarrow{HA} \,|\, \overrightarrow{HB}\right),$$

et cela montre que H a même puissance par rapport à tous les cercles du type précédent, mais aussi par rapport à ceux que l'on obtient en échangeant les rôles des sommets du triangle.

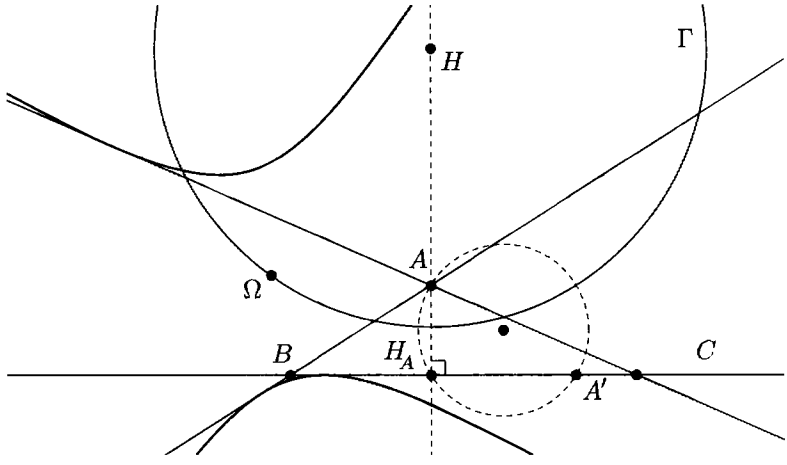
Donc, H est le centre radical de ce réseau de cercles-droites. Toutefois, si la puissance de H est strictement négative, il n'existe aucun cercle-point dans ce réseau, et donc aucun centre d'hyperbole équilatère, et c'est précisément ce qui se produit si H est entre A et A', c'est-à-dire lorsque le triangle est obtusangle.

À noter que si le triangle est rectangle, en A par exemple, une seule hyperbole équilatère convient, après repêchage : puisque les tangentes AB et AC sont orthogonales, le point A est le centre de l'hyperbole, et les côtés AB et AC en sont les asymptotes.

Il est alors facile de vérifier qu'il existe alors une hyperbole équilatère et une seule admettant ces deux asymptotes, et, de plus tangente à l'hypoténuse BC. Au contraire, si H est extérieur au triangle, le lieu des cercles-points du réseau est le cercle Γ de centre H et de rayon $\sqrt{\left(\overrightarrow{HA} \,|\, \overrightarrow{HB}\right)}$. La figure

[38] Voir l'exercice **VI-3.4.2** et son corrigé.

montre l'exemple d'une telle hyperbole, de centre $\Omega \in \Gamma$.



7.3.2. Le cas des cercles tangents

Le cas de l'unicité de l'hyperbole équilatère dans le faisceau tangentiel $\mathscr{F}$, qui se produit si, et seulement si, la droite Δ et le cercle Γ sont tangents, est remarquable en soi. Nous allons en effet établir à présent que *la droite de* NEWTON *est* tangente *au cercle circonscrit au triangle $A''B''C''$ si, et seulement si, chacun des centres des cercles exinscrits et inscrit $I_AI_BI_CI$ du triangle $A''B''C''$ appartient à l'une des droites BC, CA, AB et $A'B'C'$.*

Rappelons que, vu la section **A-7.2**, si la droite $A'B'C'$ a une équation barycentrique de la forme $\dfrac{X}{p}+\dfrac{Y}{q}+\dfrac{Z}{r}=0$, alors les coordonnées barycentriques de A, B et C sont respectivement $(0,q,r)$, $(p,0,r)$ et $(p,q,0)$ et celles de A', B' et C' sont respectivement $(0,-q,r)$, $(p,0,-r)$ et $(-p,q,0)$.

Un calcul montre alors facilement que les coordonnées barycentriques des milieux de AA', BB' et CC' sont respectivement $(0,-q^2,r^2)$, $(p^2,0,-r^2)$ et $(-p^2,q^2,0)$, de sorte que l'équation barycentrique de la droite de NEWTON est $\dfrac{X}{p^2}+\dfrac{Y}{q^2}+\dfrac{Z}{r^2}=0$.

À présent, l'équation barycentrique du cercle $A''B''C''$ est $a^2YZ+b^2ZX+c^2XY=0$, et l'équation tangentielle de ce cercle admet pour matrice

$$M=\begin{pmatrix} a^4 & -a^2b^2 & -a^2c^2 \\ -a^2b^2 & b^4 & -b^2c^2 \\ -a^2c^2 & -b^2c^2 & c^4 \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, la droite de NEWTON est tangente au cercle $A''B''C''$

si, et seulement si,

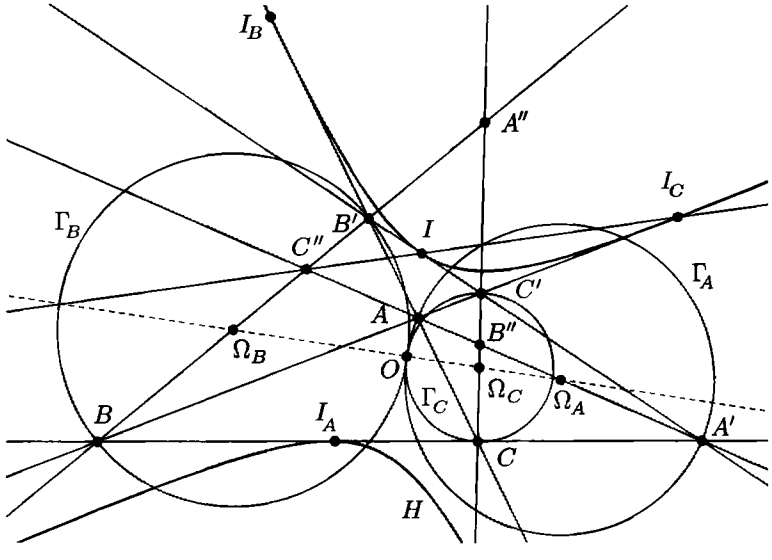
$$\frac{a^4}{p^4}+\frac{b^4}{q^4}+\frac{c^4}{r^4}-2\frac{b^2c^2}{q^2r^2}-2\frac{c^2a^2}{r^2p^2}-2\frac{a^2b^2}{p^2q^2}=0\,.$$

Or, cette équation se factorise en $-FF_1F_2F_3=0$, avec

$$\begin{cases} F=\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}+\dfrac{c}{r}\,, & F_1=-\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}+\dfrac{c}{r} \\ F_2=\dfrac{a}{p}-\dfrac{b}{q}+\dfrac{c}{r}\,, & F_3=\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}-\dfrac{c}{r}\,. \end{cases}$$

Autrement dit, le contact équivaut à l'annulation de l'un des facteurs F, F_1, F_2, F_3. Si, par exemple, $F=0$, alors le centre I du cercle inscrit satisfait l'équation barycentrique de la droite $A'B'C'$, mais, dans ce cas, l'équation barycentrique de la droite AB est $X/p+Y/q-Z/r=0$, et cela montre que le point I_C est sur cette droite. On vérifie de même que $I_A \in BC$ et $I_B \in CA$, et on établit les vérifications analogues en cas d'annulation de l'un des trois autres facteurs. Cela achève la démonstration annoncée.

La figure qui suit illustre ce cas de contact.



Complétons ces considérations par le propriété qui suit, valable dans le cas d'unicité de l'hyperbole équilatère : *les points de contact de l'hyperbole avec les quatre droites données sont précisément les points* I_A, I_B, I_C, I.

Supposons en effet encore une fois que $I \in A'B'C'$; désignons par H l'unique hyperbole équilatère tangente aux quatre droites et cherchons-en une équation barycentrique relativement au triangle $A''B''C''$.

L'ensemble des coniques passant par les points $I_AI_BI_CI$ est le faisceau linéaire Φ, et nous connaissons deux coniques dégénérées de ce faisceau : la première est par exemple réunion des droites I_AI et I_BI_C, d'équation barycentrique $c^2Y^2 - b^2Z^2 = 0$. Une autre est la réunion des droites I_BI et I_CI_A, d'équation barycentrique $-c^2X^2 + a^2Z^2 = 0$. On obtient donc les équations barycentriques de toutes les coniques éléments de Φ en faisant les combinaisons linéaires non triviales de ces deux équations, savoir

$$\lambda(c^2Y^2 - b^2Z^2) + \mu(-c^2X^2 + a^2Z^2) = 0$$

Ainsi, la matrice de cette équation barycentrique est

$$M_1 = \mathrm{Diag}(-\mu c^2, \lambda c^2, \mu a^2 - \lambda b^2)$$

et celle de son équation tangentielle est par exemple la (transposée de la) comatrice de M_1, savoir

$$M_2 = \mathrm{Diag}(\lambda c^2(\mu a^2 - \lambda b^2), -\mu c^2(\mu a^2 - \lambda b^2), -\lambda\mu c^4)\,.$$

Dans la matrice *supra*, nous pouvons simplifier par c^2, qui est en facteur. La droite $A'B'C'$ satisfait cette équation tangentielle si, et seulement si,

$$\frac{\lambda(\mu a^2 - \lambda b^2)}{p^2} - \frac{\mu(\mu a^2 - \lambda b^2)}{q^2} - \frac{\lambda\mu c^2}{r^2} = 0\,.$$

Compte tenu que $a/p + b/q + c/r = 0$, on vérifie que cette équation se simplifie en $-(b\lambda/p + \mu a/q)^2 = 0$, de sorte que les couples (λ, μ) solutions sont proportionnels à $(ap, -bq)$. Le point de contact de la droite $A'B'C'$ avec l'hyperbole H, obtenue pour un tel couple (λ, μ) admet alors pour coordonnées barycentriques $M_2 \times {}^t(1/p, 1/q, 1/r)$ et on vérifie facilement que ce point est bien le point I [39].

On procède ensuite de même pour les trois autres droites.

Nous ne sommes pas encore au bout de nos surprises : *le cercle circonscrit à $A''B''C''$ est centré sur l'axe radical du faisceau des cercles orthoptiques.* Ce résultat est aussi une conséquence de celui qui sera établi au **A-7.3.3**, mais une preuve directe est instructive aussi.

Rappelons que cet axe radical est la directrice de la parabole tangente aux quatre droites. Cherchons-en une équation tangentielle.

Une droite d'équation barycentrique $uX+vY+wZ = 0$ passe par le point A, respectivement le point A', si, et seulement si, $qv+rw = 0$, respectivement $qv - rw = 0$. Une équation tangentielle de la conique dégénérant en les

[39] Nous n'avons pas détaillé les calculs ; les coordonnées barycentriques obtenues sont

$$(1/bpqc^2, 1/apqc^2, -1/abr(aq + bp))\,,$$

et l'on remarque ensuite que $aq + bp = -cpq/r$.

points A et A' est donc le produit de ces deux équations tangentielles, savoir $V^2q^2 - W^2r^2 = 0$. De même, une équation tangentielle de la conique dégénérant en les points B et B' est $W^2r^2 - U^2p^2 = 0$, de sorte que les équations tangentielles des coniques de notre faisceau sont de la forme $\lambda(V^2q^2 - W^2r^2) + \mu(W^2r^2 - U^2p^2) = 0$ [40].

On obtient une parabole en écrivant que la droite de l'infini satisfait cette équation tangentielle, c'est-à-dire que $\lambda(q^2-r^2)+\mu(r^2-p^2) = 0$. L'équation tangentielle de la parabole du faisceau est donc par exemple

$$(p^2 - r^2)(V^2q^2 - W^2r^2) + (q^2 - r^2)(W^2r^2 - U^2p^2) = 0\,,$$

soit encore, après changement de tous les signes,

$$\underbrace{p^2(q^2 - r^2)}_{=\lambda}U^2 + \underbrace{q^2(r^2 - p^2)}_{=\mu}V^2 + \underbrace{r^2(p^2 - q^2)}_{=\nu}W^2 = 0\,.$$

L'équation barycentrique du lieu orthoptique de cette parabole, qui est l'axe radical cherché, est donnée par le résultat du **A-5.4.6** : on trouve

$$(\mu c^2 + \nu b^2)X + (\nu a^2 + \lambda c^2)Y + (\lambda b^2 + \mu a^2)Z = 0\,.$$

Établir que cette droite passe par le centre du cercle circonscrit à $A''B''C''$ équivaut à établir que

$$(\mu c^2 + \nu b^2)a\cos\widehat{A} + (\nu a^2 + \lambda c^2)b\cos\widehat{B} + (\lambda b^2 + \mu a^2)c\cos\widehat{C} = 0\,.$$

Vu les valeurs prises par les scalaires λ, μ et ν, le membre de gauche de cette formule est de la forme $\lambda'q^2r^2 + \mu'r^2p^2 + \nu'p^2q^2$, et il suffit de montrer que $\lambda' = \mu' = \nu' = 0$.

Or, par exemple,

$$\lambda' = ac(c\cos\widehat{A} + a\cos\widehat{C}) - ab(b\cos\widehat{A} + a\cos\widehat{B})\,.$$

Nous avons déjà rencontré ce calcul : si R est le centre de ce cercle circonscrit, on a $c = 2R\sin\widehat{C}$ et $a = 2R\sin\widehat{A}$, de sorte que

$$\begin{aligned} &c\cos\widehat{A} + a\cos\widehat{C} = 2R(\sin\widehat{C}\cos\widehat{A} + \sin\widehat{A}\cos\widehat{C}) \\ &= 2R\sin(\widehat{A} + \widehat{C}) = 2R\sin(\pi - \widehat{B}) = 2R\sin(\widehat{B}) = b\,. \end{aligned} \tag{1}$$

De même, $b\cos\widehat{A} + a\cos\widehat{B} = c$ et ainsi $\lambda' = abc - abc = 0$. Il en va de même des deux autres coefficients μ' et ν'. Le résultat est démontré.

[40] Les matrices de ces équations tangentielles sont donc diagonales. Si une conique de ce faisceau est non dégénérée, la matrice de son équation barycentrique est par conséquent également diagonale. Nous savons que cela implique que le triangle $A''B''C''$ est *autopolaire* par rapport à ces coniques ; une conséquence intéressante de ce fait sera exposée au **A-7.3.3**.

7.3.3. La circonscription harmonique

Dans cette section, nous gardons les notations des précédentes et faisons toujours l'hypothèse que les droites AA', BB' et CC' sont deux à deux sécantes.

Soit deux coniques Γ et Γ' d'un plan affine, avec l'hypothèse que Γ' est non dégénérée ; on dit que Γ est *harmoniquement circonscrite* à Γ' si elle est circonscrite à un triangle autopolaire par rapport à Γ'. Par parenthèse, on dit aussi dans ce cas que Γ' est *harmoniquement inscrite* dans Γ [41].

Si ces deux coniques ont relativement à un triangle de référence quelconque les équations barycentriques respectives ${}^tXMX = 0$ et ${}^tXM'X = 0$, alors Γ *est harmoniquement circonscrite à* Γ' *si, et seulement si,* $\mathrm{tr}(M'^{-1}M) = 0$.

Il est immédiat que cette condition est nécessaire : une remarque faite au **IV-2.2** montre que la valeur de $\mathrm{tr}(M'^{-1}M)$ ne dépend pas du choix du triangle de référence [42] : si nous examinons les matrices des équations barycentriques de ces coniques en référence à un triangle inscrit dans la première et autopolaire par rapport à la seconde, alors les termes diagonaux de M sont nuls, alors que la matrice M' est diagonale. Les termes diagonaux de $M'^{-1}M$ sont également nuls, de sorte que la trace de cette matrice est nulle.

Nous laissons la réciproque en exercice.

Si notre plan est supposé euclidien, on a le résultat suivant : *si un cercle* Γ *est harmoniquement circonscrit à une conique* Γ', *alors il est* orthogonal [43] *au lieu orthoptique de cette conique.* Nous admettrons ce résultat, qui s'établit par exemple à partir des formules du **A-5.4.6**.

Or, nous avons remarqué au **A-7.3.2** que le triangle $A''B''C''$ est autopolaire par rapport aux coniques du faisceau tangentiel $\mathscr{F}$. Le cercle circonscrit Γ à ce triangle est donc harmoniquement circonscrit à toutes ces coniques, et est donc orthogonal à leurs lieux orthoptiques, qui sont les cercles du faisceau $\mathscr{F}'$. Le cercle Γ appartient donc au faisceau orthogonal à $\mathscr{F}'$ [44].

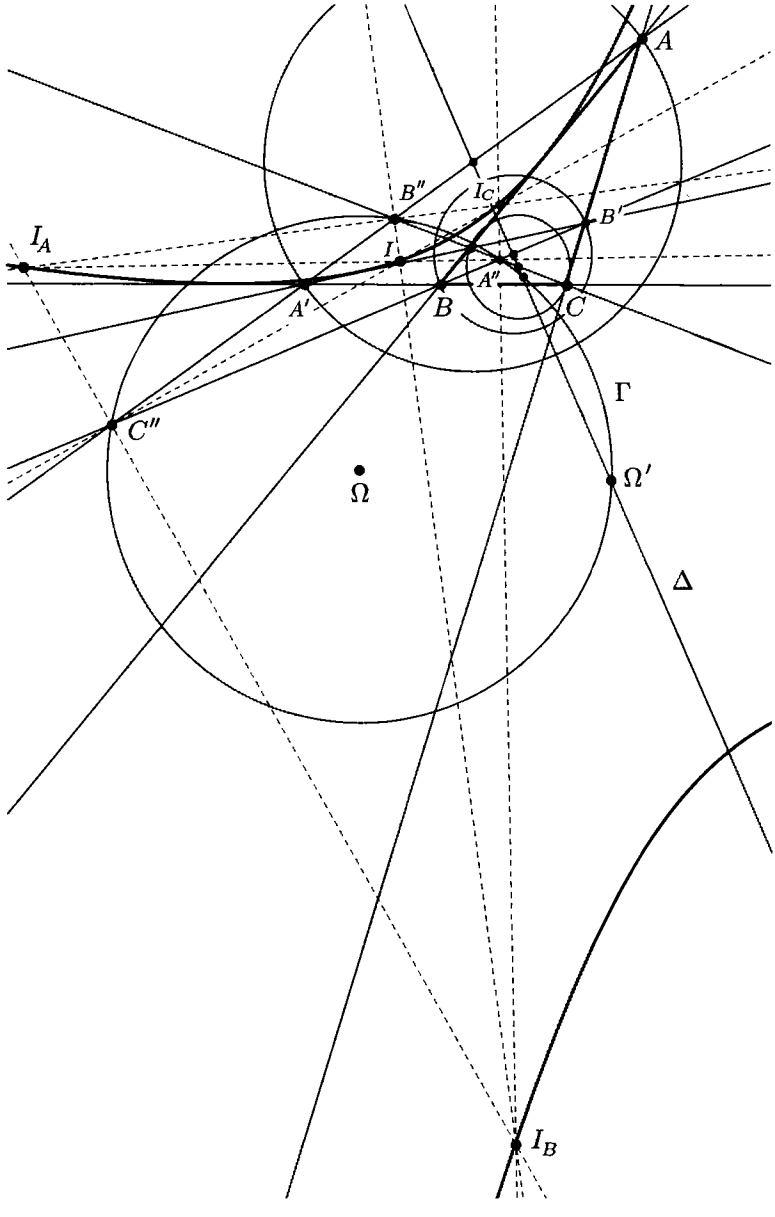
En particulier, ce cercle est centré sur l'axe radical du faisceau $\mathscr{F}'$, résultat que nous avons établi au **A-7.3.2**. Cela nous fournit à nouveau le résultat

[41] À noter en particulier que cela est dû à l'absence de symétrie de cette relation : si Γ est harmoniquement circonscrite à Γ', il est faux en général que Γ' le soit à Γ.

[42] Nous avons établi qu'un changement de triangle de référence remplace la matrice $M'^{-1}M$ par une matrice semblable et, partant, de même trace.

[43] La définition de l'orthogonalité se trouve au **VI-1.4.**

[44] Voir la définition et les propriétés des faisceaux orthogonaux au **VI-3.2.**



obtenu lors de la discussion du **A-7.2** : *si le faisceau $\mathscr{F}$ contient deux hyperboles équilatères, alors leurs centres respectifs appartiennent à* Γ. En effet, le lieu orthoptique d'une hyperbole équilatère est un cercle-point, et nous avons vu au **VI-3.2** qu'un cercle-point est orthogonal à un cercle si, et seulement si, son centre appartient à ce cercle ; cela établit le résultat.

La figure de la page précédente résume une grande partie de ces propriétés. Les points s'y bousculent quelle que soit la configuration adoptée ; aussi n'ont-ils pas tous été nommés. Comme dans la figure de la page **447**, une seule hyperbole équilatère a été représentée. Son centre, nommé Ω', est bien à l'intersection de la droite Δ et du cercle Γ.

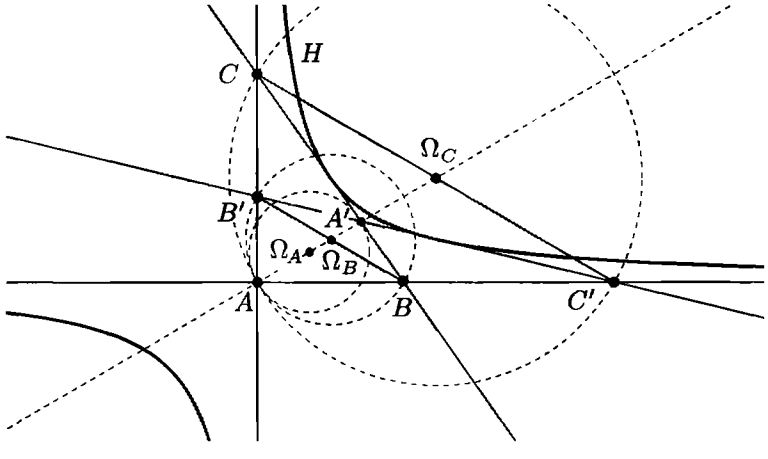
7.3.4. Le cas du parallélisme de BB' et de CC'

Nous avions toujours exclu le cas particulier où les droites AA', BB' et CC' ne sont pas sécantes deux à deux. Supposons à présent, avec nos notations que BB' et CC' sont parallèles ; nous n'allons pas reprendre toute l'étude des paragraphes précédents mais nous nous limiterons à examiner la configuration précédemment envisagée lorsque, de surcroît, les cercles de diamètres respectifs AA', BB' et CC' sont tangents (c'était le cas de l'unicité de l'hyperbole équilatère élément de $\mathscr{F}$; nous allons vérifier que l'unicité subsiste encore s'il y a ce parallélisme).

Un calcul barycentrique montre alors que AA' leur est sécante [45].

Par hypothèse, en outre, les cercles de diamètres respectifs AA', BB' et CC' sont tangents en un point O. Nous établissons alors ce qui suit.

- *Le point O coïncide avec l'un des points A et A'.*
- *La droite de* NEWTON *du faisceau tangentiel est la droite AA'. Si, par exemple, $O = A$, alors le triangle ABC est rectangle en A, les droites AB et AC sont les asymptotes de l'hyperbole équilatère H de ce faisceau, et A en est le centre* [46].



[45] D'ailleurs, la sécante $A'B'C'$ aux côtés du triangle ABC vérifie les hypothèses du théorème de MENELAÜS ; elle ne peut donc en même temps vérifier celles du théorème de CEVA.

[46] Sinon, $O = A'$ et on obtient les mêmes conclusions en échangeant les rôles de A et de A'.

En effet, puisque les cercles Γ_B et Γ_C de diamètres respectifs BB' et CC' sont tangents en O, il existe une homothétie h de centre O qui envoie le premier sur le second. Dès lors, $h(BB')$ est un diamètre de Γ_C, parallèle de plus à BB'. Cela montre que $CC' = h(BB')$.

On en déduit que $h(B) = C'$ et $h(B') = C$ *ou* $h(B) = C$ et $h(B') = C'$. Par exemple, dans le premier cas, on a les alignements OBC' et $OB'C$, de sorte que les droites BC' et $B'C$ se coupent en O ; comme elles se coupent en A, on a bien établi que $O = A$.

Si tel est le cas, le cercle Γ_A est tangent en A aux deux précédents, et AA' en est un diamètre. Cela prouve que les points A et A' appartiennent à la droite qui contient les centres de ces trois cercles, c'est-à-dire la droite de NEWTON du faisceau tangentiel.

Puisque les droites AB et AC sont deux tangentes orthogonales à H, cela montre que c'en sont les asymptotes[47] et que leur point d'intersection, c'est-à-dire le point A, en est le centre.

Nous avons annoncé l'unicité de l'hyperbole équilatère tangente aux quatre droites. Prenons, pour cela, un repère orthonormé d'origine A et d'axes respectifs AB et AC. Une hyperbole équilatère ayant ces axes pour asymptotes a nécessairement une équation cartésienne de la forme $XY = k$. La droite BC a une équation cartésienne de la forme $X/\alpha + Y/\beta = 1$, avec $\alpha\beta \neq 0$. On établit par un calcul simple que cette droite est tangente à l'hyperbole si, et seulement si, $k = \dfrac{\alpha\beta}{4}$, ce qui en établit à la fois existence et unicité.

D'ailleurs, si la droite $A'B'C'$ a une équation cartésienne de la forme $X/\alpha' + Y/\beta' = 1$, avec $\alpha'\beta' \neq 0$, le parallélisme $BB' \parallel CC'$ équivaut à $\alpha'\beta' = \alpha\beta$. Or, $\alpha\beta/2$ et $\alpha'\beta'/2$ sont précisément les aires des triangles que les droites BC et $B'C'$ découpent sur les asymptotes de l'hyperbole.

On retrouve donc dans cette condition l'expression d'une propriété classique : *les tangentes à une hyperbole découpent sur les asymptotes de celle-ci des triangles de même aire.*

[47] Au **A-5.4.6**, nous avons considéré cette extension de la notion de tangente à une hyperbole, extension d'ailleurs bienvenue dans le cadre de la Géométrie projective. Si on la refuse au contraire, alors l'hyperbole H n'existe pas et le cas de parallélisme est à exclure.

Annexe B

Axiomatisation des Géométries affine et projective

Dans cette brève annexe, nous discutons de quelques manières de définir des espaces affines, ou de les compléter projectivement. Pour ne pas sortir des notations traditionnelles, nous désignerons les points *d'un espace affine par des lettres majuscules, et les* vecteurs *par des lettres minuscules, quoique nous ayons tout fait pour que les uns et les autres appartiennent à un même ensemble.*

La définition retenue, inspirée par des suggestions de Rached MNEIMNÉ, *nous permet de définir facilement les barycentres ainsi que le complété projectif d'un espace affine. Comme elle ne* semble *pas directement équivalente à la définition traditionnelle d'espace affine, nous veillerons à bien relier les deux.*

1. Notion d'espace affine

1.1. Espaces affines

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de cardinal infini ; un ensemble E est appelé un $\mathbb{K}$–*espace affine* (de dimension finie) s'il existe un $\mathbb{K}$–espace vectoriel V de dimension finie et une forme linéaire non nulle φ dans $\mathscr{L}(V, \mathbb{K})$ tels que

$$E = \{M \in V \text{ tels que } \varphi(M) = 1\} .$$

On dira que E est *défini par* le couple (V, φ). Dans ce cas, l'hyperplan vectoriel (de V) $E_0 = \operatorname{Ker} \varphi$ est appelé la *direction* de E, ou l'*espace vectoriel associé à* E. Si E_0 est de dimension finie, on dira que E est de dimension finie et on définira la dimension de E comme étant celle de E_0. Enfin, on dira que V est le *vectorialisé* de E.

Avec ces notations, un élément $M \in E$ sera appelé un *point* alors qu'un élément $x \in E_0$ sera appelé un *vecteur*.

Exemple. Si E est un espace vectoriel, on peut en faire naturellement un espace affine ainsi qu'il suit : on considère l'espace vectoriel produit $E \times \mathbb{K}$ et on le munit de la forme linéaire non nulle φ qui au couple (X, t) associe t. Si on désigne par E^{aff} l'image réciproque du singleton $\{1\}$ par φ, c'est-à-dire $E \times \{1\}$, alors E^{aff} est un espace affine, et nous identifierons E et E^{aff} grâce à la bijection qui à $X \in E$ associe le couple $(X, 1) \in E^{\text{aff}}$.

À noter que si E est de dimension finie, alors E^{aff} a même dimension que E. Un cas particulier de cette situation est celle où $\mathbb{K}$ est considéré comme un espace vectoriel sur lui-même ; l'espace affine qui lui est associé par cette construction est alors la droite affine $\mathbb{K}^{\text{aff}}$.

Remarque. Pour ne pas compliquer nos énoncés, nous conviendrons que parler d'espace affine *réel*, respectivement *complexe*, sous-entend que le corps de base $\mathbb{K}$ est celui des réels, respectivement des complexes.

1.2. Sous-espaces affines

Toujours avec ces notations, une partie F de E est un *sous-espace affine* de E, soit si elle est vide, soit s'il existe un $M_0 \in F$ et un sous-espace vectoriel F_0 de E_0 tels que

$$F = \{M_0 + y\,,\ \text{où } y \text{ décrit } F_0\}\,.$$

On vérifie immédiatement que F_0 est alors unique, et donc bien déterminé, quoique M_0 ne le soit pas dès que F n'est ni vide ni réduit à un point. Le sous-espace vectoriel F_0 est alors appelé la *direction* de F.

On définira la *dimension* de F, sous-espace affine non vide[1], comme étant celle de F_0 **si elle est finie**, et on pourra dire de F que c'est une *droite affine* ou un *plan affine* si cette dimension est 1 ou 2, respectivement.

En outre, une partie F de E est un sous-espace affine si, et seulement si, il existe un sous-espace vectoriel V_F de V tel que $F = E \cap V_F$.

En effet, si $F = \emptyset$, on peut choisir $V_F = \{0\}$, et si, au contraire, F est de la forme $\{M_0 + y\,,\ \text{où } y \text{ décrit } F_0\}$, alors il est immédiat que $V_F = F_0 \oplus \operatorname{Vect}(M_0)$ convient.

[1] La valeur « logique » à attribuer à la dimension du sous-espace affine vide serait $-\infty$.

1.4. Applications affines

Soit deux espaces affines E et E' définis par des couples (V,φ) et (V',φ') respectivement. Une application f de E dans E' est dite *affine* si on peut la prolonger en une application $\hat{f} \in \mathscr{L}(V,V')$ telle que $\varphi' \circ \hat{f} = \varphi$ [3], c'est-à-dire encore

$$\forall x \in V,\ \varphi'\big(\hat{f}(x)\big) = \varphi(x)\,.$$

Réciproquement, si $\hat{f} \in \mathscr{L}(V,V')$ est telle que $\varphi' \circ \hat{f} = \varphi$, alors la restriction f de $\hat{f}$ à E envoie E dans E'. En effet, si $x \in E$, alors $\varphi'\big(\hat{f}(x)\big) = \varphi(x) = 1$, de sorte que $\hat{f}(x) \in E'$. Ainsi, cette restriction (*corestreinte* à E', c'est-à-dire « restreinte à l'arrivée » à E'), peut être considérée comme application de E dans E', et est affine par définition même.

D'une manière comme d'une autre, la définition implique que $\hat{f}$, qui envoie E dans E' par hypothèse, envoie aussi $E_0 = \operatorname{Ker}\varphi$ dans $E'_0 = \operatorname{Ker}\varphi'$. L'application $\overrightarrow{f}$, restriction de $\hat{f}$ à E_0 peut donc être considérée comme application linéaire de E_0 dans E'_0 [4] ; on l'appelle la *partie linéaire* de f.

Remarque. Cette définition pose un problème de *cohérence* ; en effet, il faudrait établir que $\overrightarrow{f}$ ne dépend pas du choix du prolongement $\hat{f}$ de f. Or, même $\hat{f}$ est déjà unique. Cela s'établit grâce aux deux remarques qui suivent [5], dans lesquelles $\hat{g}$ est également un prolongement linéaire de f.

1. Si $x \notin E_0$, alors $x' \overset{\text{déf}}{=} x/\varphi(x) \in E$, de sorte que $\hat{g}(x') = \hat{f}(x')$ puis $\hat{g}(x) = \hat{f}(x)$.
2. On choisit $x_0 \in E$. Dans ces conditions, pour tout $x \in E_0$, on a $x' \overset{\text{déf}}{=} x + x_0 \in E$, et on a $\hat{g}(x') = \hat{f}(x')$ puis $\hat{g}(x) = \hat{f}(x)$.

Cela étant acquis, on a, avec ces notations, la formule

$$\forall (M,N) \in E \times E, \overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f}\big(\overrightarrow{MN}\big)\,.$$

En effet, on a, pour tout couple (M,N),

$$f(N) - f(M) = \hat{f}(N) - \hat{f}(M) = \hat{f}(\underbrace{N-M}_{\in E_0}) = \overrightarrow{f}(N-M) = \overrightarrow{f}\big(\overrightarrow{MN}\big)\,.$$

Nous pourrons donc écrire aussi, lorsque $M \in E$ et $x \in E_0$,

$$f(M+x) = f(M) + \overrightarrow{f}(x)\,.$$

---

[3] Pour le lecteur qui connaît la notion de *transposition*, cela s'écrit plus synthétiquement sous la forme : ${}^t(\hat{f})(\varphi') = \varphi$.

[4] On dit alors qu'elle est *restreinte* à E_0 et *corestreinte* à E'_0.

[5] Une autre manière de comprendre ces deux remarques est de constater qu'elles établissent que $\operatorname{Vect}(E) = V$; ainsi, $\hat{f}$ et $\hat{g}$, applications linéaires qui coïncident sur E, coïncident aussi sur V tout entier.

Nous énonçons sans démonstration les résultats suivants, qui se vérifient sans difficulté :

- Si E est un espace affine, alors l'application identité Id_E de E dans E est une application affine et l'on a $\overrightarrow{\mathrm{Id}_E} = \mathrm{Id}_{E_0}$.
- Si f est une application affine d'un espace affine E dans un espace affine E' et g est une application affine de l'espace affine E' dans un espace affine E'', alors $g \circ f$ est une application affine de E dans E'' et l'on a

$$\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} .$$

1.5. Formes affines

Si E est un espace affine, une application f définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est appelée une *forme affine* si c'est une application affine de E dans $\mathbb{K}^{\mathbf{aff}}$. Avec ces notations, si E est défini par le couple (V, φ), alors f est une forme affine si, et seulement si, elle se prolonge en une application linéaire $\tilde{f}$ de V dans $\mathbb{K}$.

En effet, la droite affine $\mathbb{K}^{\mathbf{aff}}$ est définie par le couple $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ et la forme linéaire φ_0 qui à (x, y) associe y. Si, avec ces notations, $\tilde{f}$ existe, alors l'application qui à X dans E associe $(f(X), 1) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ se prolonge en l'application $\hat{f}$ de V dans $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ définie par $\hat{f}(X) = (\tilde{f}(X), \varphi(X))$ et l'on a bien, de plus, $\varphi_0 \circ \hat{f} = \varphi$.

Inversement, si f est la restriction à E d'une application linéaire $\hat{f}$ de V dans $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ vérifiant $\varphi_0 \circ \hat{f} = \varphi$, alors on a, pour tout $X \in V$,

$$\hat{f}(X) = \big(\ell(X), \varphi(X)\big) ,$$

où ℓ est une forme linéaire sur V. Cette forme linéaire est bien un prolongement de f à V. Cqfd.

Le résultat qui suit est laissé en exercice : si E est un espace affine, $\ell_1, \ldots, \ell_k$ des formes affines et $a_1, \ldots, a_k$ des scalaires, alors l'ensemble des $X \in E$ vérifiant $\ell_i(X) = a_i$ pour tout i entre 1 et k est un sous-espace affine de E (éventuellement vide).

1.6. Bijections affines

Dans cette section, nous nous intéressons aux applications affines bijectives d'un espace affine sur un autre, puis aux applications affines bijectives d'un espace affine sur lui-même.

Soit deux espaces affines E et E', définis respectivement par les couples (V, φ) et (V', φ'), et f une application affine de E dans E'.

Si $\hat{f}$ est associée à f comme au **B-1.4**, *nous établissons d'abord l'équivalence des trois assertions qui suivent.*

1. L'application affine$f$ est une injection de E dans E'.
2. L'application linéaire $\hat{f}$ est une injection de V dans V'.
3. L'application linéaire $\overrightarrow{f} = f_{|\mathrm{Ker}\,\varphi}$, c'est-à-dire la partie linéaire de f, est une injection de $E_0 = \mathrm{Ker}\,\varphi$ dans $E'_0 = \mathrm{Ker}\,\varphi'$.

En effet, si f est injective et que $\hat{f}(x) = 0$ pour un $x \in V$, alors $\varphi(x) = \varphi'(f(x)) = 0$ montre que $x \in E_0$. Choisissons alors $M \in E$; alors, $M + x \in E$ et $f(M + x) = f(M) + \overrightarrow{f}(x) = f(M)$ montre que $M + x = M$, du fait que f est injective. Nous avons bien établi que, pour $x \in V$, $\hat{f}(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$, de sorte que $\hat{f}$ est injective.

Si maintenant $\hat{f}$ est injective, alors $\mathrm{Ker}\,\overrightarrow{f} = \mathrm{Ker}\,\hat{f} \cap E_0 = \{0\}$, de sorte que $\overrightarrow{f}$ est injective.

Enfin, si $\overrightarrow{f}$ est injective et que $f(M) = f(N)$ pour M et N dans E[6], alors $N - M \in E_0$ et $\overrightarrow{f}(N - M) = 0$. Ainsi, $N - M = 0$ et $M = N$. Cela achève la preuve de l'équivalence des trois propriétés.

Nous établissons ensuite l'équivalence des trois assertions qui suivent.

1. L'application affine$f$ est une surjection de E sur E'.
2. L'application linéaire $\hat{f}$ est une surjection de V sur V'.
3. L'application linéaire $\overrightarrow{f} = f_{|\mathrm{Ker}\,\varphi}$, c'est-à-dire la partie linéaire de f, est une surjection de $E_0 = \mathrm{Ker}\,\varphi$ sur $E'_0 = \mathrm{Ker}\,\varphi'$.

En effet, si f est surjective et que $y \in V'$ soit donné, envisageons deux cas.
- Si $\varphi'(y) \neq 0$, alors $y' \overset{\text{déf}}{=} y/\varphi'(y) \in E'$ et, de ce fait, on peut choisir $x \in E$ tel que $y' = f(x')$. Ainsi, on a $y' = \hat{f}(x')$ et on a alors $y = \hat{f}(\varphi'(y)x')$, de sorte que y possède bien un antécédent par $\hat{f}$.
- Sinon, $\varphi'(y) = 0$. Choisissons $M'_0 \in E'$ et posons $M' = M'_0 + y \in E'$; ces deux éléments de E' ont des antécédents par f, disons M_0 et M par exemple. On a alors $y = \hat{f}(M - M_0)$ et y possède bien là encore un antécédent par $\hat{f}$.

Si $\hat{f}$ est surjective et que $y \in E'_0$ soit donné, choisissons-lui un antécédent par $\hat{f}$, disons $x \in V$. Comme $\varphi(x) = \varphi'(f(x)) = \varphi'(y) = 0$, l'élément x est aussi un antécédent de y par $\overrightarrow{f}$.

Enfin, si $\overrightarrow{f}$ est surjective et que $M' \in E'$ soit donné, choisissons $M_0 \in E$ et posons $M'_0 = f(M_0) \in E'$. Alors, $M' - M'_0 \in E'_0$ possède un antécédent x par $\overrightarrow{f}$ et on vérifie que $M_0 + x$ est un antécédent de M' par f. Cela achève la preuve de l'équivalence des trois propriétés.

[6] Il n'est pas question d'établir l'injectivité d'une *application affine* en passant par un noyau !

Sans qu'il soit nécessaire de l'écrire, on en conclut que l'on obtient une nouvelle chaîne d'équivalences en remplaçant le mot *surjective* par le mot *bijective* dans chacune des trois assertions de la chaîne d'équivalences précédente.

En particulier, on en déduit que si E et E' sont deux espaces affines et si f est une bijection affine de E sur E', alors f^{-1} est une bijection affine de E' sur E et l'on a $\overrightarrow{f^{-1}} = \left(\overrightarrow{f}\right)^{-1}$. Cela découle en particulier des résultats énoncés à la fin du **B-1.4**.

De tout cela suit que, si E est l'espace affine défini par le couple (V, φ), alors l'ensemble $\mathrm{GA}(E)$ des applications affines bijectives de E sur lui-même est un sous-groupe du groupe des bijections de E sur E. Ce sous-groupe s'appelle le *groupe affine* de E.

D'ailleurs, on vérifie facilement ce qui suit.

- L'ensemble $\mathrm{GL}(V, \varphi)$ des applications $F \in \mathrm{GL}(V)$ vérifiant $\varphi \circ F = \varphi$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ et l'application qui à $f \in \mathrm{GA}(E)$ associe $\hat{f} \in \mathrm{GL}(V, \varphi)$ est un isomorphisme de groupes.
- L'application σ qui à $f \in \mathrm{GA}(E)$ associe $\overrightarrow{f} \in \mathrm{GL}(E_0)$ est un morphisme surjectif de groupes. Le noyau de σ est l'ensemble des f telles que $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_{E_0}$, c'est-à-dire telles que $f(N) - f(M) = N - M$ pour tout couple de points dans E. En d'autres termes, $\mathrm{Ker}\,\sigma$ est le sous-groupe (distingué) $\mathscr{T}$ des *translations* de E.
  De cela on déduit, par factorisation du morphisme σ, que

$$\mathrm{GL}(E_0) \approx \mathrm{GA}(E)/\mathscr{T},$$

  où le symbole $\approx$ signifie *isomorphe à*. Cet isomorphisme correspond *grosso modo* à l'idée intuitive que l'on se fait d'un espace affine : c'est un espace vectoriel dont on a *oublié* l'origine ; ainsi, une application affine n'est plus obligée de conserver l'origine comme le fait une application linéaire et deux applications affines ont même partie linéaire si, et seulement si, elles sont égales *à translation près*.

1.7. L'espace des applications affines

Oui, mais quel genre d'espace ? Si E et E' sont des espaces affines, définis par des couples (V, φ) et (V', φ') respectivement, peut-on doter l'ensemble $\mathrm{Aff}(E, E')$ des applications affines de E dans E' d'une structure naturelle intéressante ?

En général, une structure d'espace vectoriel semble peu envisageable : comment combiner linéairement deux applications affines, du moins dans le cas général où l'espace affine d'arrivée n'est pas en même temps un espace vectoriel ?

En revanche, une structure naturelle d'espace affine se propose à nous. En effet, considérons l'ensemble $\mathscr{E}$ des applications linéaires $u \in \mathscr{L}(V, V')$ pour lesquelles il existe un scalaire λ_u tel que $\varphi' \circ u = \lambda_u \varphi$. Il est immédiat que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(V, V')$, que, pour u donné dans $\mathscr{E}$, le scalaire λ_u est unique et enfin que l'application Φ de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{K}$ qui à u associe λ_u est une forme linéaire non nulle.

L'espace affine défini par le couple $(\mathscr{E}, \Phi)$ s'identifie alors naturellement avec $\mathrm{Aff}(E, E')$: tout élément $f \in \mathrm{Aff}(E, E')$ est en effet la restriction à E d'un $\hat{f} \in \mathscr{E}$ pour lequel $\Phi(\hat{f}) = 1$. Réciproquement, si $F \in \mathscr{E}$ vérifie $\Phi(F) = 1$, alors sa restriction à E une application affine de E dans E'.

À noter que la direction de l'espace affine $\mathrm{Aff}(E, E')$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}\,\Phi$, est l'espace vectoriel des applications affines de E dans l'espace vectoriel $E'_0 = \mathrm{Ker}\,\varphi'$. Si E et E' sont de dimension finie, respectivement n et n', alors $\mathscr{L}(V, V')$ est de dimension $(n+1)(n'+1)$ et $\mathscr{E}$ en est un sous-espace vectoriel de dimension $(n+1)n' + 1$.

Pour le vérifier, anticipons les résultats du **B-2** : il suffit de choisir une base affine $\mathscr{B} = (X_0, \ldots, X_n)$ de E, une base affine $\mathscr{B}' = (X'_0, \ldots, X'_{n'})$ de E' et de montrer qu'une application $u \in \mathscr{L}(V, V')$ appartient à $\mathscr{E}$ si, et seulement si, la dernière ligne de sa matrice relativement aux bases $\mathscr{B}$ (de V) et $\mathscr{B}'$ (de V') est dans $\mathrm{Vect}(1, \ldots, 1)$.

1.8. Les espaces affines, canal historique

Cette section a pour seul dessein de prouver la cohérence de notre définition d'un espace affine avec la définition traditionnelle. Forcément assez abstraite, elle peut être réservée à une seconde lecture.

Les constructions que nous allons rencontrer sont, de toute façon, inévitables pour qui veut établir la possibilité de plonger un espace affine de dimension n comme hyperplan affine d'un espace vectoriel de dimension $n+1$.

La définition habituelle d'espace affine repose sur l'énoncé **E** qui suit.

On dit d'un ensemble E que c'est un *espace affine* sur un corps $\mathbb{K}$ s'il existe un $\mathbb{K}$–espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ et une application de $E \times \overrightarrow{E}$ dans E[7], qui à un couple $(M, \overrightarrow{u})$ associe un point noté $M + \overrightarrow{u}$, le tout vérifiant :

1. pour tout $M \in E$, l'application $\overrightarrow{u} \longmapsto M + \overrightarrow{u}$ est une bijection de $\overrightarrow{E}$ sur E.

[7] Nous la désignons comme une action *à droite*, du fait que la notation $M + \overrightarrow{u}$ est plus classique que la notation $\overrightarrow{u} + M$. Cela a peu d'importance puisque le groupe additif d'un espace vectoriel est abélien.

2. pour tout $M \in E$, on a $M + 0_{\vec{E}} = M$ et, pour tout couple (u, v) de $\vec{E}$,

$$(M + \vec{u}) + \vec{v} = M + (\vec{u} + \vec{v}).$$

Tout cela revient à dire qu'il existe une action simplement transitive du groupe additif de l'espace vectoriel $\vec{E}$ sur E définie par $(M, \vec{u}) \longmapsto M + \vec{u}$ ou plus simplement que ce groupe additif agit simplement transitivement sur E par les translations.

Si M et N sont deux points de E, on désignera par $N - M$ l'unique vecteur $\vec{u}$ tel que $N = M + \vec{u}$. Cette définition correspond à celle du *bipoint* $\overrightarrow{MN}$.

Pour distinguer cette dernière définition de la nôtre, nous dirons que E est un espace *préaffine* s'il satisfait à l'énoncé **E.**

En particulier, un espace vectoriel E est naturellement un espace préaffine : il suffit de choisir $\vec{E} = E$ et de faire agir le groupe additif $(E, +)$ sur E au moyen de l'addition interne elle-même.

En outre, au sens de cette définition, on dira que l'espace préaffine E est *de dimension finie* si l'espace vectoriel $\vec{E}$ l'est.

Enfin, si E et E' sont deux espaces préaffines, une application f de E dans E' est dite *préaffine* s'il existe $\vec{f} \in \mathscr{L}(\vec{E}, \vec{E'})$ telle que, pour tout M dans E et tout $\vec{u}$ dans $\vec{E}$, on ait

$$f(M + \vec{u}) = f(M) + \vec{f}(\vec{u}).$$

Il est trivial alors que $\vec{f}$ est alors unique ; on l'appelle là encore la *partie linéaire* de f.

Pour commencer, il est immédiat que, si E est un espace affine, alors notre définition permet de le munir naturellement d'une structure préaffine : s'il est défini par le couple (V, φ), alors on choisit pour $\vec{E}$ l'espace vectoriel $E_0 = \operatorname{Ker} \varphi$, et pour le vecteur $N - M$ celui que nous avons défini comme le *bipoint* $\overrightarrow{MN}$. La vérification des propriétés restantes de l'énoncé **E** est alors triviale.

Nous allons, inversement, établir que l'on peut plonger un espace préaffine de dimension finie n en tant qu'hyperplan affine d'un espace vectoriel de dimension $n + 1$, *puis établir l'*unicité *d'un tel plongement.*

Cette réciproque demande plus de travail, car un espace préaffine n'est pas par nature même plongé comme hyperplan (affine) d'un espace vectoriel. Comme nous le faisons depuis le début de cette annexe pour les espaces affines, nous nous limitons au cas où E est un espace préaffine **de dimension finie**.

Réciproquement donc, soit E un espace préaffine, satisfaisant à l'énoncé **E** ; l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ de dimension finie et l'application $(M,N) \longmapsto N-M$ étant ceux qui interviennent dans cette définition, construisons un couple (V,φ) et une application préaffine injective δ de E dans V, considéré comme espace préaffine, tels que $\delta(E)$ soit l'espace affine défini par le couple (V,φ). Par le biais de cette injection préaffine, cela nous autorise à considérer que E est lui-même défini par ce couple.

Considérons A l'ensemble des applications ℓ préaffines définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$[8].

Il est clair que A est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de E dans $\mathbb{K}$ et que les applications constantes de E dans $\mathbb{K}$ sont éléments de A : désignons par $\underline{1}$, élément de A, l'application prenant la valeur constante 1 sur E. Nous choisissons alors comme espace vectoriel V le dual A^* de A et comme forme linéaire φ de V dans $\mathbb{K}$ l'application qui à $\lambda \in A^*$ associe $\lambda(\underline{1})$. En outre, nous définissons une application δ, clairement injective, de E dans V comme il suit : à un point M de E on associe la forme linéaire $\delta(M) \in A^*$ vérifiant

$$\forall \ell \in A\,,\, \big(\delta(M)\big)(\ell) = \ell(M)\,.$$

Nous allons établir que E est l'ensemble des $M \in V$ vérifiant $\varphi\big(\delta(M)\big) = 1$, ce qui achève la preuve, puisque l'injectivité de δ nous autorise à identifier E avec son image $\delta(E)$.

Pour commencer, pour tout M dans E, on a $\varphi\big(\delta(M)\big) = \big(\delta(M)\big)(\underline{1})$, c'est-à-dire la valeur que prend la constante 1 au point M. C'est bien dire que $\varphi\big(\delta(M)\big) = 1$.

Réciproquement, soit une forme linéaire $L \in A^*$ vérifiant $\varphi(L) = 1$. Nous établissons que L est de la forme $\delta(M)$.

Afin de montrer que ce résultat ne tombe pas du ciel, envisageons le cas très particulier où $E = \overrightarrow{E} = \mathbb{K}^n$ et où l'application $(M,N) \longmapsto N-M$ est la soustraction ordinaire dans $\mathbb{K}^n$. Dans ce cas, l'ensemble A est l'espace vectoriel des applications ℓ de la forme

$$M = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b\,,$$

et un élément du dual de A est une application L de la forme suivante : à ℓ comme *supra* on associe $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \mu b$. Dire que $\varphi(L) = 1$, c'est-à-dire $L(\underline{1}) = 1$, revient à dire que $\mu = 1$.

En conséquence, on peut choisir pour M le point ${}^t(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

[8] Cela a un sens, puisque $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel, et *a fortiori* un espace préaffine.

Pour établir le résultat dans le cas général, choisissons un point $M_0 \in E$. Si $\ell \in A$, écrivons $\ell(M) - \ell(M_0) = \overrightarrow{\ell}(M - M_0)$ comme dans la définition traditionnelle. Cela établit que ℓ est la somme de l'application $\ell^* \in A$ qui à tout M associe $\overrightarrow{\ell}(M - M_0)$ et de l'application constante qui à tout M associe $\ell(M_0)$. Cette constante pourra être notée $\ell(M_0)\underline{1}$, élément de A.

On a $L(\ell) = L(\ell^*) + \ell(M_0)\underbrace{L(\underline{1})}_{=1}$. En outre, si h est une forme linéaire sur $\overrightarrow{E}$, l'application $M \longmapsto h(M - M_0)$ est un élément de A, que nous noterons h', et l'application qui à h associe $L(h')$ est une forme linéaire sur le dual de $\overrightarrow{E}$, c'est-à-dire un élément du *bidual* de $\overrightarrow{E}$.

Comme $\overrightarrow{E}$ est de dimension finie, il existe donc un vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$ tel que $L(h') = h(\overrightarrow{u})$ pour tout h.

Si $h = \overrightarrow{\ell}$, on a $h' = \ell^*$ et on a donc $L(\ell^*) = \overrightarrow{\ell}(\overrightarrow{u}) = \ell(M_0 + \overrightarrow{u}) - \ell(M_0)$. Ainsi, $L(\ell) = \ell(M_0 + \overrightarrow{u}) - \ell(M_0) + \ell(M_0) = \ell(M_0 + \overrightarrow{u})$, ce pour toute application préaffine $\ell \in A$.

Cela établit (enfin !) que $L = \delta(M_0 + \overrightarrow{u})$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que δ est préaffine, sa partie linéaire $\overrightarrow{\delta} \in \mathscr{L}(\overrightarrow{E}, A^*)$ étant définie, pour $\overrightarrow{u}$ élément de $\overrightarrow{E}$ par

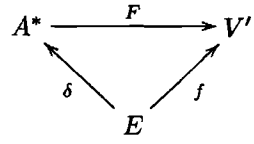
$$\ell \in A \longmapsto \overrightarrow{\ell}(\overrightarrow{u}).$$

Aussi bien dans la définition de δ que dans celle de $\overrightarrow{\delta}$, il a fallu redescendre sur Terre en deux étapes : A^* est en quelque sorte un *bidual* et il s'est donc agi de définir $\overrightarrow{\delta}(\overrightarrow{u})$ par son action sur les formes préaffines du type ℓ.

Nous n'avons pas encore justifié le calcul de la dimension de V. Si nous démontrons que A est de dimension finie égale à $n+1$, il en sera de même de son dual A^*. Or, si on choisit un point M_0 dans E et une base $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ de $\overrightarrow{E}$, alors il est immédiat que l'application qui à $\ell \in A$ associe le $(n+1)$-uplet $(\ell(M_0), \overrightarrow{\ell}(\overrightarrow{u_1}), \ldots, \overrightarrow{\ell}(\overrightarrow{u_n}))$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel A sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{n+1}$. Cela termine la démonstration.

À titre d'exercice, on pourra vérifier que la construction précédente répond au *problème universel* suivant : étant donné un espace préaffine E de dimension finie, construire un espace vectoriel V et une application préaffine injective δ de E dans V tels que pour toute application préaffine f de E dans un espace vectoriel V', il existe un $F \in \mathscr{L}(V, V')$ pour lequel $F \circ \delta = f$.

Le diagramme commutatif qui suit résume la situation :



Indications pour l'exercice. On suppose $V = A^*$ et δ construits comme *supra*, et on suppose donnée f, application préaffine de E dans un espace vectoriel V'. En utilisant une base de $\overrightarrow{E}$, établir qu'il existe des formes préaffines $\ell_1, \ldots, \ell_k$ définies sur E et des vecteurs $v'_1, \ldots, v'_k$ dans V' tels que

$$\forall M \in E, \quad f(M) = \sum_{i=1}^{k} \ell_i(M) v'_i .$$

En particulier, les ℓ_i sont des éléments de A ; soit alors un élément Δ de A^*, c'est-à-dire un élément du dual de A : les scalaires $\Delta(\ell_i)$ ont un sens, ce qui suggère de poser

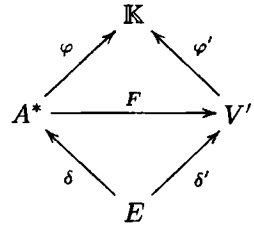
$$F(\Delta) = \sum_{i=1}^{k} \Delta(\ell_i) v'_i \in V' .$$

Il est alors immédiat que $F \in \mathscr{L}(A^*, V')$ et que $F \circ \delta = f$.

Ce problème universel prouve alors *dans un certain sens* l'unicité du couple (A^*, φ) et du *plongement* δ lorsque l'espace préaffine de dimension finie E est donné.

En effet, supposons construits également un couple (V', φ'), avec $\varphi' \neq 0 \in V'^*$ et une application préaffine injective δ' de E dans V' tels que, pour $M \in V'$, on ait $\varphi'(\overrightarrow{u}) = 1 \iff \overrightarrow{u} \in \delta'(E)$. De la preuve précédente résulte l'existence d'une application $F \in \mathscr{L}(A^*, V')$ telle que $\delta' = F \circ \delta$.

Cela suffit pour établir que F est un isomorphisme de A^* sur V' et que $\varphi' \circ F = \varphi$: c'est ainsi que nous entendons l'*unicité* annoncée.



En effet, si $\overrightarrow{u} \in V'$ et $\varphi'(\overrightarrow{u}) = 1$, alors il existe $M \in E$ tel que $\overrightarrow{u} = \delta'(M)$. On a alors $\overrightarrow{u} = F\big(\delta(M)\big) \in \mathrm{Im}\,(F)$. Donc, l'image de F contient l'hyper-

plan affine d'équation $\varphi'(\overrightarrow{U}) = 1$ dans V'; or cet hyperplan engendre vectoriellement V' [9], donc F est *surjective*.

Mais F est aussi *injective*. En effet, si $\overrightarrow{u} \in V$ et $F(\overrightarrow{u}) = 0$, alors on a nécessairement $\varphi(\overrightarrow{u}) = 0$. En effet, sinon, $\varphi(\overrightarrow{u}/\varphi(\overrightarrow{u})) = 1$ et $\overrightarrow{u}$ est de la forme $\delta(M)$, avec $M \in E$. Dans ce cas, on a

$$0 = F(\overrightarrow{u}/\varphi(\overrightarrow{u})) = F \circ \delta(M) = \delta'(M) = 1\,,$$

ce qui est absurde. À présent, montrons que l'on a aussi $\overrightarrow{u} = 0$. En effet, choisissons $M \in E$; de l'égalité $\varphi(\delta(M) + \overrightarrow{u}) = 1$ suit que $\delta(M) + \overrightarrow{u}$ est de la forme $\delta(M')$. On a donc

$$\delta'(M) = F(\delta(M)) = F(\delta(M) + \overrightarrow{u}) = F(\delta(M')) = \delta'(M')\,.$$

De l'injectivité de δ' suit alors que $M' = M$ puis que $\overrightarrow{u} = 0$ [10].

Enfin, du fait que $\varphi' \circ F \circ \delta = \underline{1} = \varphi \circ \delta$, il est immédiat que $\varphi' \circ F$ et φ coïncident en tout point de la partie génératrice $\delta(E)$ et donc sont égales, ce qui achève la démonstration.

2. Bases affines

2.1. Notions de base et de repère affines

Soit E un espace affine de dimension finie n, défini par un couple (V, φ). On appelle *base affine* de E toute base de V formée de $n+1$ vecteurs appartenant tous à E, et notée $(X_0, \ldots, X_n)$.

Avec la même hypothèse, on appelle *repère affine* de E la donnée d'un point $X_0 \in E$ et d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E_0 = \operatorname{Ker}\varphi$ (qui est de dimension n). Un tel repère est noté sous la forme $(X_0; e_1, \ldots, e_n)$; le point X_0 en est l'*origine* et les vecteurs e_i sont les *vecteurs de base* du repère.

Si $(X_0, \ldots, X_n)$ est une base affine de E, alors $(X_0; \overrightarrow{X_0X_1}, \ldots, \overrightarrow{X_0X_n})$ en est trivialement un repère affine. Inversement, si $(X_0; e_1, \ldots, e_n)$ est un repère affine de E, alors $(X_0, X_0 + e_1, X_0 + e_2, \ldots, X_0 + e_n)$ en est trivialement une base affine.

On a alors la proposition qui suit.

---

[9] Confer une remarque analogue au **B-1.4**.

[10] À l'aide d'une base de $\overrightarrow{E}$, on montre encore une fois que $\dim(V') = \dim(A^*) = \dim(\overrightarrow{E}) + 1$. Il s'ensuit que F, surjection linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension (finie), est une bijection. Nous avons préféré une démonstration directe de l'injectivité puisqu'ainsi l'hypothèse de finitude de la dimension était inutile. Cela montre que seule notre démonstration de l'existence du couple (V, φ) nécessite cette hypothèse.

Proposition. *Tout espace affine de dimension $n \geqslant 0$ possède des bases affines et des repères affines.*

Il suffit en effet de choisir un point X_0 de E et une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de l'espace vectoriel E_0. Dès lors, $(X_0; e_1, \ldots, e_n)$ est un repère affine de E et $(X_0, X_0 + e_1, X_0 + e_2, \ldots, X_0 + e_n)$ en est une base affine.

2.2. Coordonnées d'un point

Nous gardons les notations et conventions précédentes. Si l'on a un repère affine $\mathscr{R} = (X_0, X_0 + e_1, X_0 + e_2, \ldots, X_0 + e_n)$ de E, alors, pour tout vecteur $X \in E$, le bipoint $\overrightarrow{X_0X}$ appartient à E_0 et, de ce fait, est de façon unique combinaison linéaire des e_i :

$$\exists!(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \ \overrightarrow{X_0X} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i .$$

Le n–uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de scalaires est appelé le *n–uplet des coordonnées* du point X, par rapport au repère affine $\mathscr{R}$ s'il est nécessaire de le préciser. On dira le plus souvent qu'il s'agit *des coordonnées* [11] de X.

De même, si $\mathscr{B} = (X_0, \ldots, X_n)$ est une base affine de E, les coordonnées de X sont définies comme l'unique n–uple de scalaires $(x_2, \ldots, x_n)$ tel que

$$\overrightarrow{X_0X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{X_0X_i} .$$

2.3. Équations d'un sous-espace affine

Soit E un espace affine de dimension n, défini par le couple (X, φ), et soit F un sous-espace affine non vide de E. On a alors la

Proposition. *Il existe un entier k, des formes affines $\ell_1, \ldots, \ell_k$ et des scalaires $a_1, \ldots, a_k$ tels que l'ensemble des $X \in E$ vérifiant $\ell_i(X) = a_i$ pour tout i soit précisément F.*

Cela revient à dire que F peut être défini par un système d'équations linéaires. En outre, si p est la dimension de F, la valeur minimale possible de k est $n - p$, que l'on pourra appeler la *codimension* de F.

En effet, choisissons un M_0 dans F et appelons F_0 la direction de F. Comme F_0 est un sous-espace vectoriel de V, il existe $k + 1 = (n + 1) - p$

[11] On notera bien que $n + 1$ éléments sont « nécessaires » pour constituer un repère affine ou une base affine, si n est la dimension de E, mais que les coordonnées d'un point sont au « nombre » de n seulement.

formes linéaires $L_0, \dots, L_k$ définies sur V et telles que

$$F_0 = \bigcap_{i=0}^{k} \operatorname{Ker} L_i \,.$$

Comme $F_0 \subset \operatorname{Ker} \varphi$, on peut faire en sorte que $L_0 = \varphi$. Il est alors immédiat que F est l'ensemble des $X \in V$ tels que

$$\varphi(X) = \underbrace{\varphi(M_0)}_{=1}, L_1(X) = \underbrace{L_1(M_0)}_{\overset{\text{déf}}{=} a_1}, \dots, L_k(X) = \underbrace{L_k(M_0)}_{\overset{\text{déf}}{=} a_k} \,.$$

Désignons alors, par ℓ_i la restriction de L_i à E, pour i entre 1 et k ; alors F est l'ensemble des $X \in E$ [12] tels que

$$\ell_1(X) = a_1, \dots, \ell_k(X) = a_k \,.$$

Cela achève la démonstration.

3. Barycentres

3.1. Barycentre d'une famille finie de points massiques

Soit E un espace affine, défini par un couple (V, φ). Donnons-nous une famille [13] (finie) $\mathscr{F}$ de *points massiques*, c'est-à-dire de couples dans le produit $E \times \mathbb{K}$: $(M_1, \lambda_1), \dots, (M_p, \lambda_p)$.

On a $\varphi(M_i) = 1$ pour tout i, et donc $\varphi\Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i\Big) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$. Ainsi, si $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$, le point $G = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$ est dans E ; on l'appelle le *barycentre* de la famille $\mathscr{F}$.

Au contraire, si $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 0$, alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i \in E_0$ et ce *vecteur* pourra également être considéré comme un barycentre, dans ce cas particulier.

Cela étant, les propriétés classiques d'un barycentre se retrouvent avec cette définition ; entre autres, si M_0 est un point quelconque de E, on a, avec les notations *supra*, chaque fois que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$,

$$\Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\Big) \overrightarrow{M_0 M} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{M_0 M_i} \,.$$

[12] Et non plus des $X \in V$ cette fois

[13] On parle aussi de *système* de points massiques.

Propriété. Soit deux espaces affines E et E', définis respectivement par des couples (V,φ) et (V',φ'). Une application f de E dans E' est affine si, et seulement si, chaque fois qu'un point M de E est le barycentre d'une famille de points massiques $\{(M_i,\lambda_i)\}_{1\leqslant i\leqslant p}$, avec $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i \neq 0$, alors $f(M)$ est le barycentre de la famille de points massiques $\{(f(M_i),\lambda_i)\}_{1\leqslant i\leqslant p}$ [14].

La condition est nécessaire : si f est la restriction à E de $\hat{f}\in\mathscr{L}(V,V')$, alors, avec les notations précédentes, on a

$$f(M)=\hat{f}(M)=\hat{f}\Big(\sum\lambda_i M_i/\sum\lambda_i\Big)=\sum\lambda_i f(M_i)/\sum\lambda_i\,,$$

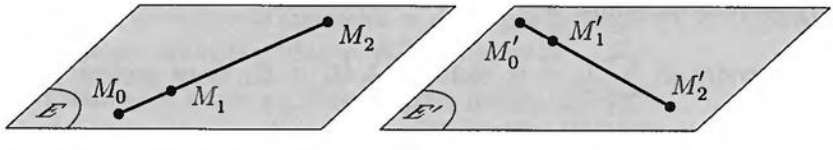
et le résultat s'ensuit.

Réciproquement, supposons que f conserve les barycentres. Nous allons étendre f en une application $\hat{f}\in\mathscr{L}(V,V')$ vérifiant $\varphi'\circ\hat{f}=\varphi$.

Soit $\overrightarrow{u}\in V$; si $\varphi(\overrightarrow{u})\neq 0$, nous posons $\hat{f}(\overrightarrow{u})=\varphi(\overrightarrow{u})f(\overrightarrow{u}/\varphi(\overrightarrow{u}))$, ce qui est cohérent puisque $\overrightarrow{u}/\varphi(\overrightarrow{u})\in E$. Choisissons un point $M_0\in E$; pour $\overrightarrow{u}\in E_0$, nous posons $\hat{f}(\overrightarrow{u})=f(M_0+\overrightarrow{u})-f(M_0)$, ce qui est également cohérent puisque $M_0+\overrightarrow{u}\in E$.

Il est immédiat que $\hat{f}$ est définie sur V, à valeurs dans V' et que $\varphi'\circ\hat{f}=\varphi$. Reste à vérifier que $\hat{f}$ est linéaire.

Par exemple, si $\overrightarrow{u}\in V$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, vérifions que $\hat{f}(\lambda\overrightarrow{u})=\lambda\hat{f}(\overrightarrow{u})$. C'est immédiat si $\varphi(\overrightarrow{u})\neq 0$; supposons au contraire que $\overrightarrow{u}\in E_0$.



Appelons M_1 et M_2 les points $M_0+\overrightarrow{u}\in E$ et $M_0+\lambda\overrightarrow{u}\in E$; appelons M'_0, M'_1 et M'_2 les images par f des points M_0, M_1 et M_2. Puisque M_2 est le barycentre du système $\big((M_0,1-\lambda),(M_1,\lambda)\big)$ et que f conserve les barycentres, alors M'_2 est le barycentre du système $\big((M'_0,1-\lambda),(M'_1,\lambda)\big)$.

C'est bien dire que $\hat{f}(\lambda\overrightarrow{u})=\lambda\hat{f}(\overrightarrow{u})$.

La vérification de l'additivité de $\hat{f}$ est analogue, et laissée en exercice.

[14] On dit alors qu'elle *conserve les barycentres*.

3.2. Coordonnées barycentriques

Soit E un espace affine de dimension n, défini par un couple (V, φ). Donnons-nous une base affine de E, que nous indexerons plutôt de 1 à $n+1$: $\mathscr{B} = (X_1, \ldots, X_{n+1})$.

Nous montrons que *pour tout point M de E, il existe un unique $(n+1)$-uplet de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ et que M soit le barycentre de la famille de points massiques $\{(X_i, \lambda_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$.*

Avec ces notations, le $(n+1)$-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ est appelé le $(n+1)$-*uplet des coordonnées barycentriques normalisées de M* ou plus simplement *les coordonnées barycentriques normalisées* de M.

Bien entendu, on parlera de coordonnées barycentriques de M chaque fois que l'on disposera d'un $(n+1)$-uplet de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \neq 0$ et que M soit le barycentre de la famille de points massiques (X_i, λ_i). On vérifie trivialement que les coordonnées barycentriques d'un point M sont alors définies de façon unique à un scalaire multiplicatif non nul près. En outre, si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ sont des coordonnées barycentriques de M et $s = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (\neq 0)$, alors *les* coordonnées barycentriques normalisées de M sont les λ_i / s.

Démonstration. Si deux $(n+1)$-uplets $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ et $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{n+1})$ vérifient cette propriété, on a $\sum_{i=1}^{n+1} (\lambda'_i - \lambda_i) X_i = 0$ et donc $\lambda'_i = \lambda_i$ pour tout i, puisque $\mathscr{B}$ est *aussi* une base de l'espace vectoriel V.

Maintenant, pour la même raison, il existe un $(n+1)$-uplet de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ tel que $M = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i X_i$. Puisque φ prend la valeur 1 en M et en tous les X_i, on en déduit que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, et l'existence est établie elle aussi.

On notera que les coordonnées barycentriques normalisées de $M \in E$ ne sont autres que les composantes du vecteur M par rapport à la base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel V.

3.3. Condition d'alignement

Pour illustrer l'intérêt de considérer un espace affine comme une partie (privilégiée) d'un espace vectoriel, revenons sur la *condition* d'alignement

de trois points d'un plan affine.

Donnons-nous un plan affine P défini par un couple (V,φ), où V est un espace vectoriel de dimension 3, et une base affine $\mathscr{B} = (A,B,C)$ de ce plan. Nous préférerons désigner par (x,y,z) les coordonnées barycentriques d'un point M. Soit alors trois points M_i, de coordonnées barycentriques (x_i,y_i,z_i) pour $1 \leqslant i \leqslant 3$. *Ces trois points sont alors alignés*[15] *si, et seulement si,*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

En effet, nous pouvons supposer que les coordonnées barycentriques ci-dessus sont normalisées. Si les trois points sont sur une droite affine D, on peut écrire D sous la forme $P \cap V'$, où V' est un plan vectoriel de V, voir au **B-1.2**. Ainsi, les trois points appartiennent à un sous-espace vectoriel de V de dimension < 3 et le déterminant *supra* est nul[16].

Réciproquement, si le déterminant est nul, alors les points M_i appartiennent à un même plan vectoriel $V' \subset V$. Posons alors $D = P \cap V'$; alors D est un sous-espace affine de P qui n'est pas vide puisqu'il contient M_1. Donc, D est de dimension $2-1$, et c'est donc une droite affine (contenant nos trois points).

Cette démonstration peut semble plus économique que celle faite au **I**. Elle ne l'est que compte tenu du travail qui a été fait au **B-1.2**.

3.4. Équations barycentriques de droites

Avec les mêmes hypothèses et notations que dans la section précédente, établissons le résultat propre aux équations barycentriques des droites.

Nous énonçons donc : *toute droite affine de P possède une équation barycentrique de la forme $aX + bY + cZ = 0$, avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et, réciproquement, toute équation barycentrique de cette forme, avec a, b et c non tous égaux, définit une droite affine.*

En effet, une droite affine D est de la forme $P \cap V'$, où V' est un plan vectoriel de V. À ce titre, V' possède une équation cartésienne de la forme $aX + bY + cZ = 0$, avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Ainsi, si (x,y,z) est le triplet des coordonnées barycentriques d'un point $M \in P$, triplet que l'on peut supposer normalisé, $M \in D$ si, et seulement si, $M \in V'$, c'est-à-dire encore si, et seulement si, $aX + bY + bZ = 0$.

[15] Trois points sont alignés si, et seulement si, ils appartiennent à une même droite affine incluse de E.

[16] Rappelons que les coordonnées barycentriques normalisées d'un point $M \in E$ sont aussi les composantes du vecteur M par rapport à la base $\mathscr{B}$

Inversement, soit une équation barycentrique de cette forme. Désignons par V' le plan vectoriel de V d'équation cartésienne $aX + bY + cZ = 0$ et par Δ la partie de P d'équation barycentrique $aX + bY + cZ = 0$. Ainsi, $\Delta = E \cap V'$, si bien que, soit Δ est vide, soit Δ est un sous-espace affine de dimension $2 - 1$, c'est-à-dire une droite.

Or, Δ est non vide si, et seulement si, le système linéaire

$$\begin{cases} aX + bY + cZ = 0 \\ X + Y + Z = 1 \end{cases}$$

admet des solutions. Or, si a, b et c ne sont pas tous égaux, il est de rang 2, il en admet donc. Sinon, si $a = b = c \neq 0$, il est manifestement incompatible, et cette discussion achève la démonstration.

Les conditions de parallélisme de deux droites, ou de concours de trois droites, se traitent de manière analogue.

4. Complétion projective et complexification

4.1. Complétion projective d'un espace affine

Considérons d'abord un espace vectoriel V ; nous pouvons définir l'*espace projectif* $\widetilde{V}$ (appelé aussi le *quotient projectif* de V) comme il suit : $\widetilde{V}$ est l'espace-quotient de l'ensemble $V \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $\mathbf{r}$ telle que, pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $V \setminus \{0\}$, $\overrightarrow{u}\,\mathbf{r}\,\overrightarrow{v}$ si, et seulement si, la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est liée.

Considérons à présent un espace affine E, défini par le couple (V, φ). Nous pouvons alors définir un espace projectif, que nous désignerons par $\mathbb{P}(E)$, comme étant l'espace projectif $\widetilde{V}$ qui vient d'être défini.

Comme E est inclus dans $V \setminus \{0\}$, nous allons identifier un point $M \in E$ avec sa classe *modulo* $\mathbf{r}$ dans $\mathbb{P}(E)$. Cette identification est licite, car deux points distincts sont dans deux classes distinctes ; en effet, pour M et M' dans E et $\lambda \in \mathbb{K}$, $M' = \lambda M'$ entraîne $\varphi(M') = \lambda\varphi(M)$, c'est-à-dire $\lambda = 1$ et, donc, $M' = M$.

Comme $E_0 \setminus \{0\}$ est inclus dans $V \setminus \{0\}$, nous pouvons identifier un vecteur non nul $\overrightarrow{u} \in E_0$ avec sa classe *modulo* $\mathbf{r}$ dans $\mathbb{P}(E)$. Cette identification est classique, mais abusive, car deux vecteurs non nuls de E_0 *peuvent* être proportionnels. Autrement dit, tous les vecteurs non nuls définissant la même *direction* vont ainsi se retrouver identifiés.

Ainsi, l'espace affine E apparaît comme un partie de l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$. On dit alors que $\mathbb{P}(E)$ est le *complété projectif* de E. Le complémentaire de E dans $\mathbb{P}(E)$ est l'ensemble des classes des éléments non nuls de $\operatorname{Ker}\varphi$,

c'est-à-dire des éléments non nuls de E_0 [17]. Ce complémentaire est appelé l'*hyperplan à l'infini* de $\mathbb{P}(E)$.

On dira d'un élément de $\mathbb{P}(E)$ que c'est un point *à distance finie* si c'est la classe d'un point M de E, et que c'est un point *à l'infini* dans le cas contraire. On dira pour préciser que c'est le point à l'infini *dans la direction de* $\overrightarrow{u}$ pour indiquer qu'il s'agit de la classe du vecteur non nul $\overrightarrow{u} \in E_0$.

Si E, défini par le couple (V, φ), est de dimension finie n, l'espace vectoriel E_0 est aussi de dimension n; quant à $\mathbb{P}(E_0)$, le complémentaire de E dans $\mathbb{P}(E)$, nous dirons qu'il est de dimension $n-1$ en tant qu'espace projectif ce qui est cohérent puisque, partant d'un espace vectoriel de dimension n, nous identifions dans une même classe d'équivalence tous les points d'une même droite vectorielle.

Exemple. Si E est une droite affine, alors E_0 est une droite vectorielle et tous les vecteurs non nuls de E_0 sont dans la même classe *modulo* **r**. En d'autres termes, le complété projectif de E est la réunion de E et d'un singleton formé d'un unique point à l'infini. Cela explique que nous ayons noté ∞ le point par lequel nous avons complété $\mathbb{C}$ en $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Au contraire, si E est un plan affine, l'ensemble des points à l'infini est cette fois une droite projective.

Donc, quand il s'agit de compléter $\mathbb{R}^2$, *la précision du corps de base n'est pas anodine. Considéré comme* $\mathbb{R}$*-espace affine,* $(\mathbb{R}^2)^{\mathscr{aff}}$ *est de dimension* 2 *et se complète par une* droite *à l'infini. Au contraire, identifié à* $\mathbb{C}^{\mathscr{aff}}$, *droite affine sur le corps des complexes, il se complète par le seul point à l'infini* ∞.

Nous avons rencontré les deux points de vue : le premier dans les chapitres de calcul barycentrique, et le second dans les chapitres **V** *et* **VI**.

Maintenant, si $\mathscr{B} = (X_1, \ldots, X_{n+1})$ est une base affine d'un espace affine de dimension finie n, et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ une famille de scalaires non tous nuls, il peut se produire deux choses :

- soit $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \neq 0$. Dans ces conditions, le barycentre du système de points massiques $\{(X_i, \lambda_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ est un point M de E [18], donc encore un point M à distance finie de $\mathbb{P}(E)$ (ou de E, par abus de langage);
- soit $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$. Dans ces conditions, $\overrightarrow{u} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i X_i$ est un élément de E_0, mais non nul puisque la famille $\{X_i\}$ est libre et que les λ_i sont non tous

[17] En d'autres termes, le complémentaire de E dans $\mathbb{P}(E)$ n'est autre que $\mathbb{P}(E_0)$.

[18] Et le $(n+1)$-uplet des l_i forme les coordonnées barycentriques de M.

4.2. Homographies

Soit un espace vectoriel V (de dimension finie) ; on en construit alors le quotient projectif $\widetilde{V}$ comme *supra*, à l'aide de la relation d'équivalence **r**.

Soit à présent un second espace vectoriel V' **de même dimension** ; on en construit de même le quotient projectif $\widetilde{V}'$ de manière analogue.

Si F est un isomorphisme d'espace vectoriel de V sur V', il « induit » une bijection de $\widetilde{V}$ dans $\widetilde{V}'$ définie comme il suit : si deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de V sont liés, alors leurs images $F(\overrightarrow{u})$ et $F(\overrightarrow{v})$ sont également deux vecteurs non nuls liés. Cela permet de définir une application bijective $\tilde{F}$ de $\widetilde{V}$ dans $\widetilde{V}'$, qui à la classe d'un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ dans $\mathbb{P}(E)$ associe celle de son image $F(\overrightarrow{u})$. Une bijection de $\widetilde{V}$ dans $\widetilde{V}'$ définie de la sorte s'appelle une *homographie*. Il est alors immédiat que la bijection réciproque $(\tilde{F})^{-1}$, de $\widetilde{V}'$ sur $\widetilde{V}$, est également une homographie. Plus précisément, c'est l'homographie $\widetilde{F^{-1}}$ construite à partir de l'isomorphisme F^{-1} de V' sur V.

Remarquons que si $F_0 = \lambda \mathrm{Id}_V$, avec $\lambda \neq 0$, alors l'homographie $\widetilde{F_0}$ de $\widetilde{V}$ sur lui-même qu'elle définit n'est autre que l'identité. De même, si F est un isomorphisme linéaire de V sur V', et si $F' = \lambda F$, avec $\lambda \neq 0$, les homographies $\widetilde{F}$ et $\widetilde{F'}$ coïncident. Cette remarque nous sera utile au **B-4.3.3.**

Il est immédiat que l'ensemble des homographies de $\widetilde{V}$ dans lui-même forme un sous-groupe du groupe des bijections de $\widetilde{V}$ sur lui-même. On l'appelle (sans surprise !) le *groupe des homographies* de $\widetilde{V}$, ou aussi le *groupe projectif* de $\widetilde{V}$. Plutôt que de parler d'une homographie de $\widetilde{V}$ dans lui-même, nous parlerons pour simplifier d'une homographie de $\widetilde{V}$.

Comme $\widetilde{V}$ est le quotient projectif de V, la notation la plus traditionnelle pour désigner ce groupe est $\mathrm{PGL}(V)$. Au chapitre **V**, nous avons toutefois préféré des notations plus adaptées, telle $\mathbf{H}_2(\mathbb{C})$ par exemple.

Pour la fin de cette section, nous nous limiterons à des homographies envoyant un complété projectif dans lui-même. Il est à noter que, si E est un espace affine de dimension finie, défini par un couple (V, φ), une homographie $\tilde{F}$ de $\mathbb{P}(E)$ n'envoie pas nécessairement E dans lui-même, car l'image de $M \in E$ par F peut appartenir à E_0 ; dans ce cas, l'image du point M est « à l'infini ».

Pourtant, si f est une application affine bijective de E sur E, elle se prolonge en une application linéaire bijective $\hat{f}$ de V dans V vérifiant $\varphi \circ \hat{f} = \varphi$. L'homographie $\tilde{f}$ définie à partir de $\hat{f}$ est alors un prolongement de f ; en particulier, elle envoie E dans E et le complémentaire de E dans $\mathbb{P}(E)$ dans lui-même.

Autrement dit, ce prolongement de l'application affine f en une homographie $\tilde{f}$ envoie tout point à distance finie sur un point à distance finie, et tout point à l'infini sur un point à l'infini.

Si l'on se donne une base affine $\mathscr{B} = (X_1, \ldots, X_{n+1})$ de E, alors, pour toute homographie $\tilde{F}$ induite par un automorphisme F, il existe une matrice inversible Φ dans $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ telles que, si un point $M \in E$ a pour coordonnées barycentriques le vecteur-colonne $\xi = {}^t(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$, alors son image a pour coordonnées barycentriques le vecteur-colonne $\Phi\xi$.

L'unicité de Φ est en défaut : elle n'est en fait définie qu'à multiplication près par un scalaire non nul. Pour établir l'existence de cette matrice, choisissons pour Φ la matrice Φ_0 de F par rapport à $\mathscr{B}$, qui est aussi une base de V. Il suffit alors de vérifier la formule lorsque le vecteur ξ est normalisé, et elle est triviale dans ce cas, sachant que les coordonnées barycentriques normalisées d'un point M de E coïncident avec les composantes du vecteur M relativement à la base $\mathscr{B}$.

Parmi ces expressions matricielles, à quoi reconnaît-on celles qui correspondent à des applications affines ? L'automorphisme F vérifie $\varphi \circ F = \varphi$ si, et seulement si, sa matrice Φ_0 par rapport à $\mathscr{B}$ vérifie

$$(1, 1, \ldots, 1)\Phi_0 = (1, 1, \ldots, 1).$$

À noter que, au **B-1.6**, nous avons désigné par $\mathrm{GL}(V, \varphi)$ le groupe des automorphismes F de V tels que $\varphi \circ F = \varphi$. La formule qui vient d'être établie caractérise ces automorphismes par leurs matrices relativement à une base affine de E.

Comme Φ n'est pas forcément égale à Φ_0, mais seulement à $\lambda\Phi_0$, avec $\lambda \neq 0$, alors Φ convient si, et seulement si, $(1, 1, \ldots, 1)\Phi$ et $(1, 1, \ldots, 1)$ sont liés, c'est-à-dire si, et seulement si, le vecteur ${}^t(1, \ldots, 1)$ est vecteur propre de ${}^t\Phi$.

Nous ne nous appesantirons pas davantage sur les homographies ; l'essentiel est surtout d'avoir généralisé les formules vues au **I-7.1** ou au **I-9**.

4.3. Extraction d'un espace affine d'un espace projectif

4.3.1. Les supplémentaires d'un sous-espace vectoriel

Cette construction, suggérée par Rached MNEIMNÉ, *est plus abstraite et pourra être réservée à une seconde lecture. Notre dessein est de munir d'une structure affine, dans un espace projectif, le complémentaire d'un hyperplan projectif.*

Cela revient, en d'autres termes, à effectuer la construction inverse *de la complétion projective d'un espace affine.*

Commençons par quelques généralités : nous munissons l'ensemble des supplémentaires d'un sous-espace vectoriel (strict) d'une structure affine.

Soit un espace vectoriel V de dimension finie, et un sous-espace vectoriel $W \neq V$ de V ; ce sous-espace vectoriel admet au moins un supplémentaire [20] ; considérons la *surjection canonique* $\sigma \in \mathscr{L}(V, V/W)$ de V dans l'espace vectoriel quotient V/W. À tout supplémentaire W' de W dans V on peut associer une *section* de σ, c'est-à-dire une application $s \in \mathscr{L}(V/W, V)$ telle que $\sigma \circ s = \mathrm{Id}_{V/W}$.

$$W \hookrightarrow V \underset{\sigma}{\overset{s}{\rightleftarrows}} V/W$$

En effet, $\mathrm{Ker}\,\sigma = W$, et W' est un supplémentaire de ce noyau. Donc la restriction de σ à W' est une bijection de W' sur $\mathrm{Im}\,\sigma = V/W$; nous la noterons $\sigma_{|W'}$. Il suffit alors de choisir $s = \imath \circ (\sigma_{|W'})^{-1}$, où $\imath$ est l'injection canonique de W' dans V.

Inversement, si s est une section de σ, alors $W' \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Im}\,s$ est un supplémentaire de W dans E. En effet, il est immédiat que $W \cap W' = \{0\}$ et que, pour tout $x \in E$, on a

$$x = \underbrace{(x - s \circ \sigma(x))}_{\in \mathrm{Ker}\,\sigma} + \underbrace{s \circ \sigma(x)}_{\in \mathrm{Im}\,s} .$$

Il existe donc une bijection entre l'ensemble des supplémentaires de W dans V et l'ensemble $\mathscr{E}$ des sections s de σ. C'est ce dernier ensemble que nous munissons d'une structure naturelle d'espace affine modelé sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}(V/W, V)$.

En effet, soit $\mathscr{V}$ l'ensemble des applications linéaires $s \in \mathscr{L}(V/W, V)$ pour lesquelles il existe $\lambda_s \in \mathbb{K}$ (nécessairement unique) tel que $\sigma \circ s = \lambda_s \mathrm{Id}_{V/W}$. Il est immédiat que $\mathscr{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(V/W, V)$ [21] et que l'application Φ qui à $s \in \mathscr{V}$ associe λ_s est une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{V}$, du fait que W possède au moins un supplémentaire.

De cela suit que l'ensemble $\mathscr{E}$ des sections de σ est l'espace affine défini par le couple $(\mathscr{V}, \Phi)$.

[20] C'est le cas parce que V est de dimension finie. C'est vrai aussi, sans hypothèse quant à la dimension de V, si W est un hyperplan de V, ou plus généralement un sous-espace vectoriel de codimension finie. Si l'on « accepte » l'axiome du choix, c'est même vrai quel que soit l'espace vectoriel V et son sous-espace vectoriel W.

[21] D'ailleurs, dans les constructions qui suivent, nous considérerons essentiellement le cas où W est un *hyperplan* de V. Dans ce cas, V/W est de dimension 1 et on a même $\mathscr{V} = \mathscr{L}(V/W, V)$.

L'espace vectoriel $\operatorname{Ker}\Phi$, qui dirige cet espace affine, est l'ensemble des s tels que $\sigma \circ s = 0$; il est donc naturellement isomorphe à $\mathscr{L}(V/W, W)$. Si V est de dimension finie n et W de dimension $p < n$, l'espace affine $\mathscr{E}$ est donc de dimension $(n-p)p$. Si W est un hyperplan, alors cette dimension est $n-1$, et $\mathscr{V}$ est donc de dimension n. Cette remarque nous servira au **B-4.3.3**

Cette construction nous permet à présent de décrire la construction inverse de celle du **B-4.1**.

Soit V un espace vectoriel, $\widetilde{V}$ l'espace projectif qui lui est associé, H un hyperplan de V, et $\widetilde{H}$ l'ensemble des classes *modulo* **r** des éléments non nuls de H. Le complémentaire $\widetilde{V} \setminus \widetilde{H}$ de $\widetilde{H}$ dans $\widetilde{V}$ est naturellement en bijection avec l'ensemble des droites vectorielles supplémentaires de H dans V.

En effet, un vecteur non nul $\vec{u} \in V$ appartient à $V \setminus H$ si, et seulement si, la droite vectorielle qu'il engendre appartient à $\mathscr{E}^H$. Deux vecteurs non nuls d'une même droite $D \in \mathscr{E}^H$ ont même classe *modulo* **r**, et deux vecteurs non nuls appartenant à deux droites de $\mathscr{E}^H$ distinctes ont des classes distinctes *modulo* **r**. Il s'ensuit que $\mathscr{E}^H$ s'identifie naturellement avec $\widetilde{V} \setminus \widetilde{H}$.

Appelons $\mathscr{E}^H$ l'ensemble des droites vectorielles supplémentaires de H dans E ; nous avons vu qu'il est naturellement en bijection avec $\mathscr{E}$: cette bijection permet donc de le munir à son tour canoniquement d'une structure d'espace affine [22].

En d'autres termes, le complémentaire dans le quotient projectif d'un espace vectoriel V du quotient projectif d'un hyperplan H de V s'identifie à un espace affine, que nous désignerons encore par $\mathscr{E}^H$. **Le quotient $\widetilde{V}$ est alors le complété projectif de $\mathscr{E}^H$ et $\widetilde{H}$ en est l'hyperplan à l'infini.**

Ce dernier point mérite d'être souligné : nous savons donc désormais, non seulement compléter projectivement un espace affine, mais encore extraire un espace affine d'un espace projectif sans perdre la mémoire, et donc l'information, de celui-ci [23].

Si V est de dimension finie $n+1$, alors H est de dimension n et $\mathscr{E}^H$ de dimension $(n+1-n)n = n$. C'est bien la valeur attendue, vu le **B-4.1**.

---

[22] On peut donc également faire de $\widetilde{V} \setminus \widetilde{H}$ un espace affine, pour la même raison.

[23] En termes sçavants, il y a *équivalence de catégories* entre la catégorie des couples (V, φ), où V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et φ une forme linéaire non nulle et la catégorie des couples $(\widetilde{V}, \widetilde{H})$, où $\widetilde{V}$ est un $\mathbb{K}$-espace projectif de dimension finie et $\widetilde{H}$ un hyperplan projectif de celui-ci.

Dès lors, on a $M = s(\xi)$, $M' = s'(\xi)$ et donc $m = \dfrac{s+s'}{2}(\xi)$. On en conclut que la droite δ, image de la section $\dfrac{s+s'}{2}$, est bien le milieu de la paire (D, D').

Avec les mêmes notations, la figure de droite nous invite à interpréter le bipoint $\overrightarrow{DD'}$, défini dans l'espace vectoriel dirigeant notre espace affine, c'est-à-dire encore le vecteur de la translation qui envoie D sur D'.

Avec les notations qui nous ont servi pour le premier exercice, le lecteur est invité à faire correspondre, grâce à la bijection *supra*, à cette translation l'application $s' - s$, qui associe à ξ un élément de P et, de ce fait, est une application linéaire de V/P dans P.

4.3.3. Un transport de structure

Conservons les notations des sections précédentes. Nous partons d'un espace projectif $\widetilde{V}$, quotient projectif d'un espace vectoriel de dimension finie V ; nous y choisissons un ***hyperplan projectif*** $\widetilde{H}$, où H est un hyperplan de E, et nous l'appelons l'***hyperplan à l'infini*** de $\widetilde{E}$.

Nous savons que le *complémentaire* de $\widetilde{H}$ dans $\widetilde{V}$ a une structure canonique d'espace affine, dirigé par $\mathscr{L}(V/H, H)$. *Nous établissons à présent que l'espace projectif $\widetilde{V}$ et le complété projectif de $\mathscr{E}^H$ sont canoniquement isomorphes.*

Par *isomorphes*, nous entendons qu'ils sont les images l'un de l'autre par une certaine homographie. La construction est ce qui suit.

Vu la définition du **B-4.2**, il va nous suffire de construire un isomorphisme linéaire (canonique) entre les espaces vectoriels associés, et, ici, il sera plus commode de définir un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{V}$ des applications linéaires s de V/H dans V vérifiant $\sigma \circ s \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_{V/H})$ sur l'espace vectoriel V.

Choisissons encore une fois un élément non nul ξ dans V/H ; à tout $s \in \mathscr{V}$, on associe le vecteur $s(\xi) \in V$, que nous notons $F(s)$. L'application F est bien sûr linéaire, et injective : si $s(\xi) = 0$, alors $s = 0$ puisque ξ engendre V/H (une droite vectorielle !) Or, si n désigne la dimension de V, l'espace $\mathscr{V}$ est aussi de dimension n[25], de sorte que l'application F est bijective.

Enfin, même si F dépend, à multiplication près par un scalaire non nul, du choix de ξ, l'homographie $\widetilde{F}$ qui lui est associée n'en dépend pas. Voir pour cela une remarque faite au **B-4.2**.

[25] La dimension de $\mathscr{V}$ est $(n - (n-1)) \times (n-1) + 1$.

4.3.4. Principe d'utilisation de ces constructions

Si un espace projectif apparaît dans un problème comme le complété projectif d'un espace affine, alors la notion d'*hyperplan à l'infini* et donc celle de *point à l'infini* ont un sens. Si, au contraire, nous partons d'un espace $\widetilde{V}$, quotient projectif d'un espace vectoriel quelconque V, alors un espace affine de la forme $\mathscr{E}^H$ ne prend de sens qu'après le *choix* de l'hyperplan H. Dire qu'un point est à l'infini est alors possible, mais cette notion *dépend* du choix de H.

Dans la section **B-4.10**, nous verrons justement que le genre d'une conique projective d'un plan projectif dépend de ses points d'intersection avec la droite de l'infini. Si ce plan est le complété d'un plan affine, la droite à l'infini est bien définie et on peut parler d'*ellipse*, de *parabole* ou d'*hyperbole*. Si on part de $\widetilde{V}$ comme quotient projectif d'un espace vectoriel de dimension trois, la droite à l'infini dépend d'un choix et ces trois notions se confondent.

En d'autres termes, la notion de *genre* d'une conique est une notion *affine* et non une notion *projective*.

Il en va de même de la notion de droites *concourantes* d'un plan projectif. Comme nous l'avons vu, deux droites projectives d'un plan projectif ont toujours un point d'intersection. Si un plan projectif $\widetilde{V}$ est le complété projectif d'un plan affine, dire que deux droites *sont parallèles* ou *concourent* a un sens, puisque l'on sait si leur point de concours est ou non à l'infini.

Si l'ensemble $\widetilde{V}$ n'est défini que comme quotient projectif, cette distinction s'estompe. On peut mettre cela à profit pour ramener des problèmes projectifs à des problèmes affines, en choisissant convenablement l'hyperplan à l'infini, et cela justifie le mal que nous nous sommes donné pour effectuer nos constructions.

La figure sur la page de droite montre comment on peut ramener la preuve du théorème général de DÉSARGUES à un problème plus simple. L'énoncé se décline comme il suit.

Soit deux triangles ABC et $A'B'C'$ d'un plan projectif. Si les droites AA', BB' et CC' concourent en un point M, alors les points d'intersection des côtés respectifs $BC \cap B'C'$, $CA \cap C'A'$ et $AB \cap A'B'$ sont alignés.

Si on appelle a et b les deux premiers points d'intersection, il s'agit de montrer que $c \in ab$. Choisissons la droite ab comme droite à l'infini ; il s'agit donc d'établir un cas particulier du théorème : si les droites BC et $B'C'$ sont parallèles, ainsi que les droites CA et $C'A'$, alors les droites AB et $A'B'$ le sont aussi. Or, c'est alors une conséquence immédiate du théorème de THALÈS.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et de prouver la réciproque de ce théorème.

En outre, si V et V' sont deux espaces vectoriels réels, et $f \in \mathscr{L}(V, V')$, on définit l'application linéaire $f^{\mathbf{C}}$ entre les $\mathbb{C}$–espaces vectoriels$V^{\mathbf{C}}$ et $V'^{\mathbf{C}}$ par

$$f^{\mathbf{C}}(v_1 + \mathrm{i}\, v_2) = f(v_1) + \mathrm{i}\, f(v_2)\,,$$

pour tout vecteur $v_1 + \mathrm{i}\, v_2 \in V^{\mathbf{C}}$.

Les propriétés *fonctorielles* suivantes de la complexification sont triviales à vérifier.
- Si f est l'identité de V, alors $f^{\mathbf{C}}$ est l'identité de $V^{\mathbf{C}}$.
- Si $f \in \mathscr{L}(V, V')$ et $g \in \mathscr{L}(V', V'')$, alors $(g \circ f)^{\mathbf{C}} = g^{\mathbf{C}} \circ f^{\mathbf{C}}$.

Enfin, on vérifie sans difficulté que, si V est un espace vectoriel réel de dimension finie n, alors $V^{\mathbf{C}}$ est un espace vectoriel complexe de dimension encore égale à n. Plus précisément, si $\mathscr{B}$ est une base de V, alors $\mathscr{B}$ reste une base de $V^{\mathbf{C}}$ considéré comme $\mathbb{C}$–espace vectoriel, après identification de V à une partie de $V^{\mathbf{C}}$ comme *supra*. Nous ne la noterons donc pas de manière différente.

En outre, si V et V' sont deux espaces vectoriels réels de dimension finie munis respectivement d'une base $\mathscr{B}$ et d'une base $\mathscr{B}'$, et $f \in \mathscr{L}(V, V')$, alors la matrice de $f^{\mathbf{C}} \in \mathscr{L}\big(V^{\mathbf{C}}, V'^{\mathbf{C}}\big)$ par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des $\mathbb{C}$–espaces vectoriels $V^{\mathbf{C}}$ et $V'^{\mathbf{C}}$ est la même que celle de f par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

Cela illustre un intérêt essentiel de la complexification : faire appel à un corps de base *algébriquement clos* en altérant au minimum les propriétés des objets rencontrés.

4.5. Complexification d'un espace affine réel

Soit un espace affine réel, c'est-à-dire un espace affine défini par un couple (V, φ), où V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. D'après la section précédente, on peut définir l'espace vectoriel complexe $V^{\mathbf{C}}$ et, puisque $\varphi \in \mathscr{L}(V, \mathbb{R})$, l'application $\varphi^{\mathbf{C}} \in \mathscr{L}(V^{\mathbf{C}}, \mathbb{R}^{\mathbf{C}})$. Puisque nous avons identifié $\mathbb{R}^{\mathbf{C}}$ à $\mathbb{C}$ et que, trivialement, $\varphi^{\mathbf{C}} \neq 0$, le couple $(V^{\mathbf{C}}, \varphi^{\mathbf{C}})$ définit un espace affine, complexe celui-ci, que nous appellerons le *complexifié* de l'espace affine réel E et noterons naturellement $E^{\mathbf{C}}$.

L'espace affine E s'injecte naturellement dans $E^{\mathbf{C}}$: au point $M \in E$ on associe le vecteur $M + \mathrm{i}0_V \in V^{\mathbf{C}}$, c'est-à-dire, si l'on préfère, le couple $(M, 0) \in V^{\mathbf{C}}$. C'est bien un élément de $E^{\mathbf{C}}$: $\varphi^{\mathbf{C}}\big(M + \mathrm{i}0_V\big) = \varphi(M) + \mathrm{i}0 = 1$.

Nous pouvons donc identifier E avec une partie de $E^{\mathbf{C}}$. Là encore, si E est un espace affine réel de dimension finie n, alors $E^{\mathbf{C}}$ est un espace affine

complexe de dimension encore égale à n. Plus précisément, si $\mathscr{B}$ est une base affine de E, alors $\mathscr{B}$ reste une base de $E^{\mathbb{C}}$ considéré comme $\mathbb{C}$–espace affine, après l'identification qui vient d'être opérée.

Si E et E' sont les espaces affines définis respectivement par les couples (V, φ) et (V', φ') et si f est une application affine de E dans E', restriction à E de $\hat{f} \in \mathscr{L}(V, V')$ vérifiant $\varphi' \circ \hat{f} = \varphi$, on peut définir $(\hat{f})^{\mathbf{C}} \in \mathscr{L}(V^{\mathbf{C}}, V'^{\mathbf{C}})$ et les propriétés fonctorielles du **B-4.4** montrent que l'on a $\varphi'^{\mathbf{C}} \circ (\hat{f})^{\mathbf{C}} = \varphi^{\mathbf{C}}$.

En d'autres termes, la restriction $f^{\mathbf{C}}$ de $(\hat{f})^{\mathbf{C}}$ à $E^{\mathbb{C}}$ est à valeurs dans $E'^{\mathbf{C}}$ et définit une application affine du premier vers le second.

Mutatis mutandis, on peut énoncer les propriétés fonctorielles de cette complexification :
- si f est l'identité de E, alors $f^{\mathbf{C}}$ est l'identité de $E^{\mathbb{C}}$;
- si $f \in \mathrm{Aff}(E, E')$ et $g \in \mathrm{Aff}(E', E'')$, alors $(g \circ f)^{\mathbb{C}} = g^{\mathbf{C}} \circ f^{\mathbb{C}}$.

4.6. Complexification d'un espace quadratique réel

Soit un espace quadratique réel, c'est-à-dire un espace vectoriel réel V, muni d'une forme bilinéaire symétrique f, dont on note q la forme quadratique associée : pour x dans E, $q(x) = f(x, x)$. On définit alors sur $V^{\mathbb{C}}$ la forme bilinéaire symétrique $f^{\mathbf{C}}$ définie, pour $x + \mathrm{i}y$ et $x' + \mathrm{i}y'$ dans $V^{\mathbb{C}}$, par

$$f^{\mathbb{C}}(x + \mathrm{i}y, x' + \mathrm{i}y') = f(x, x') - f(y, y') + (f(x, y') + f(y, x'))\mathrm{i} .$$

Muni d'une feuille de papier et d'un stylo, on vérifie que $f^{\mathbf{C}}$ est effectivement une forme bilinéaire symétrique [28] ; la forme quadratique $q^{\mathbb{C}}$ associée à $f^{\mathbb{C}}$ est alors définie, pour $x + \mathrm{i}y \in V^{\mathbf{C}}$ par

$$q^{\mathbb{C}}(x + \mathrm{i}y) = q(x) - q(y) + 2\mathrm{i}f(x, y) .$$

Encore une fois, on vérifie que, si V est en outre de dimension finie et muni d'une base $\mathscr{B}$, la matrice de $f^{\mathbf{C}}$ par rapport à la base $\mathscr{B}$ de $V^{\mathbf{C}}$ est la même que celle de f par rapport à la base $\mathscr{B}$ de V.

4.7. Espaces affines réels euclidiens

Un espace affine réel E défini par un couple (V, φ) est dit *euclidien* si l'espace vectoriel E_0 est de dimension finie et muni d'un produit scalaire, noté $(\cdot \mid \cdot)$.

Ainsi, si on désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E_0 associée à ce produit scalaire, on fait de E un espace métrique en posant $\mathrm{d}(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\|$ pour tout couple (M, N) de points de E.

[28] C'est la bilinéarité qui demande un jeu d'écritures. En effet, il faut vérifier entre autres que $f^{\mathbf{C}}(\lambda(x + \mathrm{i}y), x' + \mathrm{i}y')$ est égal à $\lambda f^{\mathbf{C}}(x + \mathrm{i}y, x' + \mathrm{i}y')$ lorsque λ est lui-même de la forme $\lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2$.

Il est possible d'étendre le produit scalaire *supra* en un produit scalaire défini sur V tout entier.

Pour ce faire, choisissons une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E_0 et complétons-la en une base de V par un vecteur $e_{n+1} \in E$[29]. Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ la base de V ainsi obtenue.

On remarquera que, si un $M \in V$ s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i$, on a $\lambda_{n+1} = \varphi(M)$ puisque $\varphi(e_1) = \cdots = \varphi(e_n) = 0$ alors que $\varphi(e_{n+1}) = 1$.

Soit alors une ligne $L = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et un $\beta \in \mathbb{R}$. Soit alors la forme bilinéaire symétrique f dont la matrice par rapport à $\mathscr{B}$ est la matrice symétrique

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & {}^tL \\ L & \beta \end{pmatrix}.$$

Si $M = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i \in V$, on a tout de suite

$$f(M, M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i\Big)\lambda_{n+1} + \beta \lambda_{n+1}^2,$$

c'est-à-dire encore

$$f(M, M) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \alpha_i \lambda_{n+1})^2 + \Big(\beta - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\Big)\lambda_{n+1}^2.$$

On en déduit facilement que f est un produit scalaire si, et seulement si, $\beta - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$[30]. Pour la suite, nous supposerons donc L et β choisis pour qu'il en soit ainsi, ce qui est toujours possible.

Résumons notre construction : *il est toujours possible d'étendre, quoique non pas de façon unique, le produit scalaire défini sur la direction E_0 d'un espace affine euclidien E en un produit scalaire défini sur le vectorialisé V de E.*

4.8. Complétion projective complexe d'un espace affine euclidien

L'intérêt des constructions de ce paragraphe est que l'on peut les enchaîner : partant d'un espace affine réel E, on pourra en construire le complexifié $E^{\mathbb{C}}$ puis identifier ce dernier avec une partie du complété projectif $\mathbb{P}(E^{\mathbb{C}})$.

Nous n'aurons pas eu l'occasion de profiter de tous les avantages de cette double construction, mais elle nous a servi implicitement lorsque nous avons

[29] Ce qui est une façon de choisir une « origine » dans E.

[30] Le lecteur savant déduira cela des *conditions de* SYLVESTER portant sur les déterminants mineurs emboîtés de la matrice symétrique *supra*.

défini les *points cycliques* : si E est un plan affine euclidien (réel) défini par un couple (V, φ), où V est un espace vectoriel réel de dimension 3, nous pouvons commencer par étendre à V tout entier le produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ défini sur E_0 seulement, c'est ce qui a été fait dans la section précédente, puis, si l'on appelle f *un* produit scalaire sur V ainsi obtenu [31], complexifier l'espace quadratique (V, f) en un espace quadratique complexe $(V^{\mathbf{C}}, f^{\mathbf{C}})$.

Si une base orthonormale (e_1, e_2) de E_0 a été complétée en une base $\mathscr{B}$ de V au moyen d'un vecteur $e_3 \in E$, une expression de $q^{\mathbf{C}}(M) = f^{\mathbf{C}}(M, M)$, lorsque $M = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i e_i \in V^{\mathbf{C}}$, avec bien sûr des λ_i complexes, est

$$q^{\mathbf{C}}(M) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\alpha_1\lambda_1\lambda_3 + 2\alpha_2\lambda_2\lambda_3 + \beta\lambda_3^2,$$

avec $\lambda_3 = \varphi^{\mathbf{C}}(M)$. Cette expression résulte du fait que la matrice de $f^{\mathbf{C}}$ par rapport à la base $\mathscr{B}$ reste $\mathscr{M}$.

Dès lors, les points cycliques sont les points à l'infini M du complété projectif de $E^{\mathbf{C}}$ et qui vérifient de plus $q^{\mathbf{C}}(u) = 0$ pour tout représentant u de M *modulo* $\mathbf{r}$ [32]. Or, puisque l'on a $\varphi^{\mathbf{C}}(M) = \lambda_3$, les points cycliques sont définis par le système

$$\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 0, \lambda_3 = 0\right).$$

Il y a donc deux points cycliques, I et J, de coordonnées $(1, \mathrm{i}, 0)$ et $(1, -\mathrm{i}, 0)$.

Comme on le voit, cette paire de points ne dépendent pas du choix du triplet de scalaires $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$, une fois effectué le choix de e_3. Les formules de changement de base montrent que cette paire ne dépend pas non plus du choix de e_3. En revanche, ils dépendent à l'ordre près du choix de la base orthonormale de E_0. Plus précisément, remplacer une telle base par une base orthonormale définissant la même orientation de E_0, respectivement définissant l'orientation opposée de E_0, conserve I et J, respectivement les échange [33]. L'essentiel est que l'on puisse donc parler de la paire de points cycliques en ne faisant référence qu'au plan affine euclidien E.

Au **IV-3.2**, nous avons eu besoin des coordonnées barycentriques des points cycliques, relativement à un triangle de référence ABC d'un plan affine

[31] On aura noté qu'il dépend du choix de e_{n+1}, ici e_3 puisque $n = 2$, et des scalaires α_1, α_2 et $\beta > \alpha_1^2 + \alpha_2^2$.

[32] On dit d'un tel vecteur u qu'il est *isotrope* pour la forme quadratique $q^{\mathbf{C}}$. Cela ne dépend pas du choix d'un représentant de la classe de M *modulo* $\mathbf{r}$. Par extension, les directions de ces vecteurs sont dites *isotropes*, et toute droite de direction isotrope est appelée une *droite isotrope*.

[33] *Orienter* E, c'est par définition orienter E_0. Cela étant, orienter E et ne considérer que des bases orthonormales directes (e_1, e_2) de E_0 définit sans ambiguïté chaque point cyclique individuellement.

Supposons un plan affine euclidien E, défini par un couple (V, φ) ; la direction E_0 de E est munie d'un produit scalaire, et nous désignerons par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. Ainsi, si M et N sont deux points de E, la distance MN n'est autre que $\|\overrightarrow{MN}\|$.

Soit à présent un triangle ABC non aplati dans E ; nous lui associons la base (A, B, C) de V, voir au **B-2**, que nous pouvons considérer également comme une *base affine* de E.

Puisque le cercle circonscrit Γ à ABC est une conique circonscrite à ce triangle, il existe une forme quadratique $\mathscr{Q}$, de forme polaire Φ, telle que $\mathscr{Q}(M) = 0$ soit l'équation barycentrique de Γ. Puisque $\mathscr{Q}(A) = \mathscr{Q}(B) = \mathscr{Q}(C) = 0$, nous savons que $\mathscr{Q}$ est de la forme

$$M \longmapsto \mathscr{Q}(M) = pyz + qzx + rxy\,,$$

si (x, y, z) désignent les composantes du vecteur M considéré comme élément de V.

Désignons par $\mathscr{C}$ le cône isotrope de $\mathscr{Q}$, défini par l'équation $\mathscr{Q}(M) = 0$. Puisque $\Gamma = \mathscr{C} \cap E$ et que Γ est un cercle, la restriction $\mathscr{Q}'$ de $\mathscr{Q}$ à E_0 est proportionnelle au produit scalaire de E_0. Comme $\mathscr{Q}$ n'est définie qu'à un scalaire multiplicatif non nul près, nous pouvons supposer que $\mathscr{Q}'$ coïncide avec ce produit scalaire.

Puisque $\overrightarrow{BC} = C - B \in E_0$, nous avons donc $\mathscr{Q}(C - B) = BC^2$, carré de longueur de côté que nous avons noté a^2. Or,

$$a^2 = \mathscr{Q}(C - B) = \mathscr{Q}(C) - 2\Phi(C, B) + \mathscr{Q}(B) = -2\Phi(C, B) = -p$$

De même, on obtient $b^2 = -q$ et $c^2 = -r$. Ainsi, l'équation barycentrique de Γ est bien, au facteur multiplicatif -1 près, $a^2YZ + b^2ZX + c^2XY = 0$.

Déduisons-en à présent les coordonnées barycentriques des points cycliques. Comme au **B-4.8**, nous plongeons le plan E dans le complété projectif $\mathbb{P}(E^{\mathbf{C}})$. Appartenant à la fois à la droite à l'infini et au cercle Γ, les points cycliques de E ont des coordonnées barycentriques satisfaisant le système $\mathscr{S}$ suivant :

$$\begin{cases} a^2YZ + b^2ZX + c^2XY = 0 \\ X + Y + Z = 0\,. \end{cases}$$

Nous pouvons tenter de le résoudre par substitution : nous reportons $Z = -X - Y$ dans la première équation et obtenons la condition nécessaire

$$b^2X^2 + (a^2 + b^2 - c^2)XY + a^2Y^2 = 0\,.$$

Si nous la considérons comme une équation du second degré en X, elle admet pour déterminant le scalaire $\Delta = \underbrace{((a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2)}_{=\delta}Y^2$.

Le terme δ se factorise à souhait :

$$\delta = -(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\,,$$

et la positivité des quatre parenthèses confirme que $\delta < 0$; trouver des coordonnées barycentriques réelles eût été surprenant.

Nous pouvons voir en δ une expression connue : si l'on pose $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, on obtient $\delta = -16p(p-a)(p-b)(p-c)$, c'est-à-dire $\delta = -16S^2$, où S désigne l'aire du triangle ABC, vu la formule de HÉRON.

Pourtant, que l'on laisse l'expression $a^2+b^2-c^2$ telle quelle ou qu'on la remplace par la valeur $2ab\cos\widehat{C}$, ce calcul ne livre pas une formule agréable pour les coordonnées barycentriques des points cycliques. Elles confirment en revanche que, si les coordonnées barycentriques d'un des points cycliques sont (x,y,z), alors d'une part $xyz \neq 0$ et d'autre part celles de l'autre point cycliques sont $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$.

Cette remarque peut nous permettre d'envisager le calcul différemment : en gardant cette notation, on a les égalités $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$ et $a^2\overline{y}\overline{z} + b^2\overline{z}\overline{x} + c^2\overline{x}\overline{y} = 0$, de sorte que le triplet a^2, b^2, c^2 est solution du système linéaire en (λ,μ,ν)

$$\begin{cases} \lambda yz + \mu zx + \nu xy = 0 \\ \lambda\overline{y}\overline{z} + \mu\overline{z}\overline{x} + \nu\overline{x}\overline{y} = 0\,. \end{cases}$$

Le triplet (λ,μ,ν) est donc proportionnel à

$$\big(\overline{x}x(\overline{y}z - \overline{z}y), \overline{y}y(\overline{z}x - \overline{x}z), \overline{z}z(\overline{x}y - \overline{y}x)\big)\,.$$

Or, puisque $x+y+z=0$, on a l'égalité $\overline{y}z - \overline{z}y = \overline{z}x - \overline{x}z = \overline{x}y - \overline{y}x$. Étant solution du système *supra*, le triplet (a^2,b^2,c^2) est aussi proportionnel à $(\overline{x}x, \overline{y}y, \overline{z}z)$. En d'autres termes, si on identifie le plan E avec $\mathbb{C}$, ce que nous avons fait déjà à plusieurs reprises, et que l'on introduise les affixes z_a, z_b et z_c des points A, B et C, alors on a par exemple $a^2 = \overline{(z_c - z_b)} \times (z_c - z_b)$ et l'on obtient les formules

$$\begin{aligned} \overline{x}x &= \overline{(z_c - z_b)} \times (z_c - z_b) \\ \overline{y}y &= \overline{(z_a - z_c)} \times (z_a - z_c) \\ \overline{z}z &= \overline{(z_b - z_a)} \times (z_b - z_a)\,, \end{aligned}$$

ce qui suggère fortement comme coordonnées barycentriques des points cycliques le triplet

$$(x,y,z) = (z_c - z_b, z_a - z_c, z_b - z_a)$$

ainsi que son conjugué. Il ne reste plus qu'à vérifier qu'ils satisfont bien $\mathscr{S}$, ce qui est alors immédiat.

4.10. Coniques affines et coniques projectives

Nous partons d'un plan projectif $\widetilde{V}$, quotient d'un vectoriel V de dimension 3 sur un corps commutatif infini $\mathbb{K}$, c'est-à-dire de l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans la pratique[35].

Si q est une forme quadratique sur V, nous pouvons lui associer son *cône isotrope* C_q, ensemble des vecteurs $x \in V$ ***isotropes*** de q, c'est-à-dire tels que $q(x) = 0$.

Nous remarquons que, si $x \in V$ est un vecteur isotrope de q, alors tout vecteur colinéaire à x est également isotrope. Cela permet de définir le *quotient projectif* de C_q, que nous noterons $\widetilde{C_q}$ ainsi qu'il suit : $\widetilde{C_q}$ est l'ensemble des classes d'équivalence des vecteurs isotropes non nuls de q, la relation d'équivalence étant la relation r définie au B-4.1.

Par construction, $\widetilde{C_q}$ est une partie de $\widetilde{V}$, et elle est vide si, et seulement si, q n'admet que le vecteur nul comme vecteur isotrope. Cela se produit par exemple lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que q est définie positive, ou définie négative. En revanche, cela ne peut se produire lorsque le corps de base est algébriquement clos puisque $\dim(V) > 1$.

Nous définissons alors une *conique projective* comme étant une partie quelconque de $\widetilde{V}$ définie par ce moyen, y compris la partie vide. Par abus de langage nous dirons encore que cette conique admet l'équation $q(x) = 0$ dans $\widetilde{V}$.

Le but de cette section n'est pas de mettre l'accent sur une énième classification des coniques, fussent-elles projectives, mais un retour sur les constructions de complétion et d'extraction portant sur les espaces affines. La même chose vaut à présent pour les coniques.

Nous nous plaçons ici dans le cadre de plans, affines ou projectifs. Rappelons qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X, Y, Z]$ est ***homogène*** s'il existe un entier naturel n (nécessairement unique) tel que, dans $\mathbb{K}[X, Y, Z, T]$, on ait l'égalité

$$P(TX, TY, TZ) = T^n P(X, Y, Z).$$

L'entier n s'appelle alors le *degré d'homogénéité* du polynôme P.

Soit un plan affine E, défini par un couple (V, φ) où $\dim(V) = 3$, et soit une base affine $\mathscr{B} = (A, B, C)$ de E. L'équation barycentrique générale d'une conique $\mathscr{C}$ relativement à $\mathscr{B}$ est de la forme $\Pi(X, Y, Z) = 0$, avec Π polynôme homogène de degré 2 de la forme

$$\Pi(X, Y, Z) = aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2dXZ + 2eYZ + fZ^2,$$

où le sextuplet (a, b, c, d, e, f) n'est pas nul. En dehors de cette annexe, nous

[35] Parce que nous faisons de la Géométrie ! Désormais, on a également compris l'apport des coniques ou des cubiques définies sur des corps finis en matière de cryptographie.

avons surtout traité de coniques *circonscrites*, pour lesquelles les coefficients des termes carrés sont nuls, c'est-à-dire $a = c = f = 0$. Ici, nous ne nous restreindrons pas à ce cas.

Soit maintenant un vecteur $\overrightarrow{u} \neq 0$ dans V, et un scalaire $\lambda \neq 0$; du fait de l'homogénéité de Π, on a $\Pi(\overrightarrow{u}) = 0 \iff \Pi(\lambda\overrightarrow{u}) = 0$. De ce fait, on peut définir le *complété projectif* $\widetilde{\mathscr{C}}$ de la conique (affine) $\mathscr{C}$ comme étant l'ensemble des $M \in \widetilde{V}$ tels que $\Pi(\overrightarrow{u}) = 0$, où $\overrightarrow{u} \neq 0$ est un représentant quelconque de la classe de M, *modulo* $\mathbf{r}$. Puisque Π est une forme quadratique, c'est bien une *conique projective* que l'on obtient par ce moyen.

Bien entendu, après identification de E à une partie de $\widetilde{V}$, il apparaît que $\mathscr{C} = \widetilde{\mathscr{C}} \cap E$. Plus précisément, le complémentaire de $\mathscr{C}$ dans $\widetilde{\mathscr{C}}$ n'est autre que $\widetilde{\mathscr{C}} \cap \mathbb{P}(E_0)$, c'est-à-dire l'ensemble des points de $\widetilde{\mathscr{C}}$ qui sont à l'infini [36], points que l'on appelle les *points à l'infini* de la conique.

L'équation barycentrique de la droite à l'infini est $X + Y + Z = 0$. Dans les chapitres **I** à **IV**, nous avons en particulier classifié les *genres* des coniques au moyen de leurs points à l'infini (sans toutefois distinguer axiomatiquement les notions affines des notions projectives) [37]. Une conique projective réelle est une ellipse, une parabole ou une hyperbole selon qu'elle possède, respectivement, zéro, un ou deux points à l'infini. Dans le cas d'une parabole, il y a même contact de la conique avec la droite à l'infini, le point de contact étant dans la direction de l'axe de celle-ci. Dans le cas d'une hyperbole, les deux points à l'infini dirigent les *asymptotes* de la courbe [38].

Si un plan affine euclidien est rapporté à une base affine, et qu'une conique $\mathscr{C}$ soit définie par une équation barycentrique comme *supra*, nous pouvons plonger ce plan dans un plan projectif *complexe*, puis considérer la conique projective complexe d'équation $\Pi(X, Y, Z) = 0$. La distinction entre *ellipse* et *hyperbole* s'efface alors : une conique peut avoir deux points distincts à l'infini (c'est alors une conique à centre) ou un point double (c'est alors une parabole).

À noter que nous avons distingué les *cercles* du plan euclidien par le fait que leur complété projectif complexe passe par les points cycliques, et les *hyperboles équilatères* du plan euclidien par le fait que leur complété projectif complexe possède les points cycliques comme paire de points conjugués.

---

[36] Vu que E est un *plan* affine, l'hyperplan à l'infini est une *droite* projective. C'est ce que nous avons toujours mentionné dans les chapitres **I** à **IV**.

[37] Nous renvoyons le lecteur à ces chapitres, d'autant plus que la restriction à des coniques circonscrites a grandement simplifié la discussion.

[38] On peut bien entendu définir les *directions asymptotiques* d'une conique, ou plus généralement d'une courbe algébrique définie par une équation barycentrique polynomiale homogène $\Pi(X, Y, Z) = 0$, comme les directions des points à l'infini de la courbe.

Il nous reste à détailler la construction inverse : nous partons d'une conique projective $\mathscr{C}$ d'équation $q(x) = 0$ dans un plan projectif $\widetilde{V}$. Ensuite, nous choisissons une droite projective $\widetilde{D}$, un hyperplan projectif donc. Le complémentaire de $\widetilde{D}$ dans $\widetilde{V}$ est un espace affine E, et $\mathscr{C} \cap E$ est une conique (affine) de E. Ici encore, l'intérêt de la manipulation réside en la latitude de choix de la droite $\widetilde{D}$, que l'on peut placer en fonction de la situation rencontrée. Par exemple, dans le cas d'un plan projectif réel, choisir $\widetilde{D}$ tangente[39] à $\mathscr{C}$ fait de $\mathscr{C} \cap E$ une parabole si $\mathscr{C}$ est une conique propre.

Remarque 1. Au lieu de considérer l'équation barycentrique d'une conique relativement à une base affine, nous aurions pu en considérer une équation cartésienne. Avec les mêmes notations, elle eût été de la forme

$$P(X,Y) = AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0\,.$$

Remontons à V lui-même : puisque $\varphi(A) = \varphi(B) = \varphi(C) = 1$, cette équation montre que $\mathscr{C}$ est l'intersection de E, c'est-à-dire du plan affine d'équation cartésienne $Z = 1$, avec le cône d'équation cartésienne

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DXZ + 2EYZ + FZ^2 = 0\,.$$

Ce que nous venons de faire s'appelle *homogénéiser* le polynôme P : l'utilisation de coordonnées barycentriques nous en avait toujours dispensé. Toutefois, une fois cela fait, la construction de la conique complétée projectivement s'effectue de la même manière.

Remarque 2. Complexifier une conique ne pose pas de problème dû au choix d'une base affine, car un polynôme homogène de degré 2 est une forme quadratique et nous savons donc le complexifier. On peut tout de même définir une *application polynomiale* sur un espace vectoriel réel V et à valeurs dans $\mathbb{R}$ sans se référer à une base, voir **[6]** ou **[14]**, et la complexifier de manière intrinsèque.

Remarque 3. Dans ce qui précède, nous avons considéré une conique projective complétant une conique affine. On peut aussi partir **directement** d'un espace projectif $\widetilde{V}$, quotient projectif d'un espace vectoriel V, et d'une conique $\widetilde{\mathscr{C}}$ définie par une équation $q(\vec{u}) = 0$, où q est une forme quadratique sur V. Dans ces conditions, il n'y a plus de droite à l'infini définie intrinsèquement et la notion de *genre* d'une conique disparaît complètement. On ne peut plus distinguer que les coniques *non dégénérées* et les coniques *dégénérées*.

4.11. À quoi bon

Dans les sections précédentes, nous avons fait en sorte qu'un espace quadratique réel V se complexifie en un espace quadratique complexe, c'est-à-dire

[39] Une fois que la notion de *contact* a été définie de façon raisonnable dans un espace projectif.

que nous avons construit sur $V^{\mathbb{C}}$ une forme quadratique, alors que la possibilité de construire une forme quadratique **hermitienne** n'était pas à négliger.

Or, c'est bien la définition retenue qui présente tous les avantages. En premier lieu, la forme $q^{\mathbb{C}}$ que nous avons construite reste une application *polynomiale* entre les espaces vectoriels **complexes** $V^{\mathbb{C}}$ et $\mathbb{C}$. Il n'en aurait pas été de même d'une forme hermitienne. Dans tout cet ouvrage, ce sont bien les polynômes qui nous ont rendu le plus de services. Au **V-2**, nous avons bien introduit des équations de droites sous la forme non polynomiale $\overline{A}z + A\overline{z} + B = 0$, ou des équations de cercles sous une forme analogue, mais nous n'avions pas abandonné $\mathbb{R}$ comme corps de base : il s'agissait bien de polynômes (en x et y), en dépit des apparences.

En outre, si nous avions cherché à complexifier le produit scalaire, en particulier défini positif, d'un espace vectoriel euclidien au moyen d'un produit scalaire hermitien défini positif, nous n'aurions pas trouvé dans $V^{\mathbb{C}}$ de droites isotropes, et encore moins de points cycliques dans l'espace projectif associé.

Bibliographie

[1] ARNAUDIÈS J.-M., *Équations différentielles* (Paris : Ellipses, 2000).

[2] ARNAUDIÈS J.-M. et BERTIN J., *Groupes, algèbres et géométrie, tome* III (Paris : Ellipses, 2000).

[3] ARNAUDIÈS J.-M. et DELEZOÏDE P., « Nombres (2,3)-constructibles », *Advances in Mathematics*, volume 158 n°2 (New York : Academic Press, 2001).

[4] ARNAUDIÈS J.-M. et FRAYSSE H., *Cours de mathématiques* (Paris : Dunod, 1989).

[5] AUDIN M., *Géométrie* (Paris : EDP Sciences, 2006).

[6] BERGER M., *Géométrie* (Paris : CEDIC–Fernand Nathan, 1977).

[7] BOUTELOUP J., *Applications du calcul matriciel à la théorie des coniques*, REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES, 77e année n°5 (Paris : Vuibert, 1966).

[8] BOUTELOUP J., *Cercles de* TÜCKER, QUADRATURE, volume n°63 (Paris : EDP Sciences, 2007).

[9] BROCARD H. et LEMOYNE T., *Courbes géométriques remarquables* (Paris : Vuibert, 1919).

[10] COMMISSAIRE H. et CAGNAC G., *Cours de mathématiques spéciales, tome* I *— Éléments d'algèbre et de géométrie analytique* (Paris : Masson, 1941).

[11] DIEUDONNÉ J., *La géométrie des groupes classiques* (Berlin : Springer–Verlag, 1963).

[12] FRESNEL J., *Méthodes modernes en géométrie* (Paris : Hermann, 1996).

[13] GABRIEL P., *Matrices, Géométrie, Algèbre linéaire* (Paris : Cassini, 1997).

[14] INGRAO B., *Étude des coniques — Propriétés projectives, affines et métriques* (Paris : Calvage & Mounet, 2009).

[15] LAVILLE G., *Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation* (Paris : Ellipses, 1998).

[16] LEBOSSÉ C. et HÉMERY C., *Géométrie — Classe de mathématiques* (Paris : Fernand Nathan, 1961).

[17] LICOIS J., *La Géométrie élémentaire — Au fil de son histoire dans les programmes français* (Paris : Ellipses, 2005).

[18] MNEIMNÉ R., *Éléments de géométrie* — Actions de groupes (Paris : Cassini, 1997).

[19] MNEIMNÉ R. et TESTARD F, *Introduction à la théorie des groupes de* LIE *classiques* (Paris : Hermann, 1986).

[20] NIEWENGLOWSKI B., *Cours de géométrie analytique, tome* II (Paris : Gauthier-Villars et Cie, 1926).

[21] PERRIN D., *Cours d'algèbre* (Paris : Ellipses, 1996).

[22] PERRIN D., *Géométrie algébrique — Une introduction* (Paris : InterÉditions-CNRS, 1995).

[23] ROUX, D. et TIXIER, M., *Cubiques et configuration de* REYE, QUADRATURE, volume n°46 (Paris : EDP Sciences, 2002).

[24] ROUX, D. et TIXIER, M., *Cubiques et configuration de* REYE, QUADRATURE, volume n°47 (Paris : EDP Sciences, 2003).

[25] ROUX, D. et TIXIER, M., *Cubiques et involutions quadratiques*, QUADRATURE, volume n°65 (Paris : EDP Sciences, 2007).

[26] SALMON G., *A treatise on Conic Sections, 6th ed.* (London : Longmans, Green and Co, 1879).

[27] SALMON G., *A treatise on the Higher Order Curves Intended as a Sequel to Treatise on Conic Sections* (Dublin : Hodges & Smith, 1852).

[28] SAVIOZ J.-C., *Algèbre linéaire — Cours et exercices* (Paris : Vuibert, 2003).

[29] VIENNE L., *Présentation algébrique de la géométrie classique* (Paris : Vuibert, 1997).

Et sur Internet :

[30] CABRI–GÉOMÈTRE, www-cabri.imag.fr/abracadabri

[31] DEMAILLY J.-P., *Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire*, `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/\~demailly/manuscripts/` et sélectionner `geom_elem.pdf`

[32] GIBERT B., `http://perso.orange.fr/bernard.gibert/bibliography.html`

[33] Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement (janvier 2000), `http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/`

[34] KIMBERLING C., `http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`

Notations

Ensembles remarquables

$\mathbb{C}$ ..... Corps des nombres complexes
$\mathrm{H}_2(\mathbb{C})$ ..... Groupe des homographies de la droite complexe
$\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ..... Complété projectif de la droite complexe $\mathbb{C}$
$\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ ..... Complété projectif du plan complexe $\mathbb{C}^2$
$\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ ..... Complété projectif d'un plan affine réel
$\mathbb{P}_3$ ..... Espace projectif réel de dimension 3
$\mathbb{P}(E)$ ..... Complété projectif d'un espace vectoriel
$\mathbf{PO}(\mathbb{U})$ ..... Groupe des homographies stabilisant $\mathbb{U}$
$\mathbb{R}$ ..... Corps des nombres réels
$\mathbb{U}$ ..... Le cercle unité de $\mathbb{C}$

Dans un triangle

$\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ ..... Les angles du triangle
G ..... Le centre de gravité, ou isobarycentre
G_A, G_B, G_C ..... Les milieux des côtés
H ..... L'orthocentre
H_A, H_B, H_C ..... Les pieds des hauteurs
H ..... L'orthocentre
I ..... Le centre du cercle inscrit
I_A, I_B, I_C ..... Les centres des cercles exinscrits
I,J ..... Les points cycliques
K ..... Le point de LEMOINE, voir l'index
L, L' ..... Les points de LUCAS du triangle, voir l'index
Φ ..... Le point de FERMAT–TORRICELLI, voir l'index

Fonctions et applications

$(x \mid y)$ ..... Produit scalaire des vecteurs x et y d'un plan vectoriel euclidien
$[x, y]$ ..... Produit mixte des vecteurs x et y d'un plan vectoriel euclidien orienté
$\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{cotg}\alpha$ ..... La tangente et la cotangente de l'angle α [40]

[40] Notations que nous persistons à préférer à tan et cotan, qui sont de contestables alignements sur des notations importées de l'étranger.

Index

Action simplement transitive, 237, 269, 469
Alternative
  de PONCELET, 384
  de STEINER, 367
Antihomographie, 287, 362
Application affine, 464
Axe
  d'EULER, 30, 391, 393, 444
  orthique, 83, 87, 136
  radical, 81
  radical d'un faisceau, 342

Barycentre, 7, 475
Base affine, 473
Bipoint, 463
Birapport, 69, 238, 261, 269, 271, 276, 277, 281, 282, 288, 294, 295, 309, 357, 382
  Groupe du, 273, 303

CABRI, 37, 107, 110, 114, 169
Caractéristique
  d'un corps, 276
  Polynôme, 27, 29, 192, 194, 278
Centre
  de gravité , 6, 29, 40, 93, 123, 131, 136, 399
  du cercle circonscrit, 41, 43, 117, 144, 145, 171, 182, 391, 438, 443
  radical, 286, 338, 369, 395, 401
Cercle
  d'APOLLONIUS, 249, 267, 268, 283, 342, 387
  d'EULER, 30, 32, 82, 94, 104, 116, 117, 166, 170, 171, 182, 185, 187, 194, 227, 232, 300, 388, 408–410
  de rayon nul, 314
  réel, 314
  sans point réel, 314
Cercle–droite, 313
Cercles orthogonaux, 319
Cévienne (droite), 24, 25, 127, 149
Complété projectif, 479
  de $\mathbb{C}$, 235
Complexe
  Affixe d'un, 221
  Image d'un, 221
Complexifié
  d'un espace affine, 490
  d'un espace quadratique, 491
  d'un espace vectoriel, 489
Cône isotrope, 497
Conique, 51
  Asymptote d'une, 70
  Centre d'une, 59
  circonscrite, 51, 59, 63, 90, 123, 130
  dégénérée, 51
  des neuf points, 168
  équation bifocale, 367
  Genre d'une, 63
  inscrite, 144, 204, 207, 432, 440
  passant par cinq points, 52
  Points conjugués, 65
  Polaire d'un point, 66
  Pôle d'une droite, 66
  projective, 497
  Tangente à une, 63
Conique harmoniquement
  circonscrite, 457
  inscrite, 457
Coniques
  bitangentes, 174
  osculatrices, 174, 191
  surosculatrices, 174, 191
Conservation des barycentres, 476
Construction à la règle et au compas, 106, 107, 117–119, 121, 134, 174, 230, 355
Coordonnées barycentriques, 8, 477
  normalisées, 8, 477

Courbe cycloïdale, 105
Cubique
circulaire, 211, 393
courbe, 18, 210
elliptique, 215
focale, 215
Tangentiel d'un point d'une, 213

Densité algébrique, 96
Diamètre
conjugué, 74
d'une conique, 74
Directions conjuguées, 76
Discriminant, 63, 70, 71, 74, 130, 192, 278, 289, 305–307, 321, 355, 411, 413
Droite
affine, 462
cévienne, 24, 25, 127, 149
d'EULER, voir Axe d'EULER
de NEWTON, 212, 424, 438
de SIMSON, 104
de STEINER, 232
duale, 139, 429
Droite-point à l'infini, 318, 337, 341, 347, 364, 402
Dualité, 139, 429

Ellipse de STEINER, 208
inscrite, 208
Enveloppe (de droites, cercles), 50, 105, 106, 232, 299, 372
Équation barycentrique, 15, 478
Équation formelle, 312
Espace
affine euclidien, 491
affine, 461
projectif, 479

Faisceau de cercles
à points de base, 344
à points de PONCELET, 342
à points-limites, 342
concentriques, 341
tangents, 343
Faisceau orthogonal, 346
Faisceaux de coniques
linéaires, 165
tangentiels, 436
Fonction symétrique, 152, 224, 231, 297, 304
Forme quadratique fondamentale, 314
Foyer singulier, 215
Fraction rationnelle, 248, 263, 275
FRÉGIER
Involution de, 239
Point de, 172, 180, 384

Groupe
affine, 467
de MÖBIUS, 287
des homographies, 238, 482
des similitudes, 326
projectif, 482

Harmonique
Conjugaison, 65
Conjugué, 69
Division, 69
Quadrangle, 282
Sextangle, 285
Hermitienne (Forme, Matrice), 325, 500
Homographie, 235, 236, 289, 362, 482
Homologie harmonique, 35
Homothéties
Homothéties-translations, 28
Hyperbole de KIEPERT, 254
Hyperbole équilatère, 72, 114, 152, 155, 157, 159, 172, 178, 206, 434, 445, 448
Hyperplan à l'infini, 480
Hypocycloïde de STEINER, 104, 232

Idéal homogène, 57
Identité d'EULER, 420
Inverse
isogonal, 141
isotomique, 121

Inversion
harmonique, 34
analytique, 245
géométrique, 245, 377
isogonale, 141, 211
isotomique, 121
Involution quadratique, 201
Isobarycentre, 6, 40
Isotrope
Cône, 290, 317, 392
Droite, 215, 493
Vecteur, 317, 320

Orbite
équiharmonique, 274
harmonique, 274
singulière, 307
Orthocentre, 6, 34, 42, 84, 93, 116, 117, 152, 171, 182, 203, 224, 227, 298, 333, 345, 388, 393, 406, 444
Orthogonaux
Cercles, 319
Orthologie, 251, 258

Paraboloïde elliptique, 317, 385
Plan affine, 462
Point
à distance finie, 480
à l'infini, 480
de FERMAT-TORRICELLI, 251
de FEUERBACH, 197
de GERGONNE, 433
de LEMOINE, 13, 100, 147
de NAPOLÉON, 254
dual, 139, 429
Point constructible, 118
Points cycliques, 211, 223, 493
Points de LUCAS, 146, 208
Polaire triangulaire, 134
Polynôme caractéristique, 27, 29, 192, 194, 278
Polynôme homogène, 15, 497
Degré d'un, 15, 497
Problème de Délos, 119
PTOLÉMÉE
Formule de, 246

Puissance
d'un point par rapport à un cercle, 100, 332, 333, 337, 369, 370, 398, 401, 443, 452
d'une inversion, 245
extérieure, 428

Quadrangle
équiharmonique, 294
harmonique, 282
Quadrilatère orthocentrique, 171
Quadrilatère complet, 446
Quadrique, 317, 328, 345, 349, 393

Rebroussement (Point, Tangente de), 104, 106, 109, 119, 300, 426
Repère affine, 473
Réseau de cercles-droites, 315, 365, 380, 401

Sextangle harmonique, 285, 288, 292
Signature, 5, 54, 55, 85, 293, 315, 320, 321, 323, 328, 346, 361, 364, 401, 411, 430, 431
Sous–espace affine, 462
engendré par une partie, 463
Équations d'un, 474
STEINER
Alternative de, 365
Droite de, 232
Ellipse circonscrite de, 123
Ellipse inscrite de, 170
Hypocycloïde de, 104, 232
Point de, 123
Porisme de, 376
Symédiane, 147
Système de points massiques, 475

Théorème
de BRIANCHON, 429
de CARNOT, 96
de CEVA, 25
de FEUERBACH, 191
de MENELAÜS, 24
de PASCAL, 89, 157, 232, 242, 425
de WITT, 362

Trace d'une matrice, 290, 292, 457
Translation, 467
Triangle
    acutangle, 42, 87
    autopolaire, 133
    autopolaire commun, 188
    Centres isodynamiques, 248, 295, 387
    de référence, 7
    fondamental, 7
    médian, 33
    obtusangle, 87, 452
    plein, 40

Valeur propre, 27, 28, 129, 188, 190, 192, 194, 195, 278, 289, 431
VANDERMONDE
    Déterminant de, 46
Vecteur, 462
    isotrope, 497
Vectorialisé d'un espace affine, 462
Vierergruppe, 309

ZARISKI
    Topologie de, 96

Imprimé en Grande-Bretagne par Cambridge University Press
Dépôt légal mai 2009

Tableau Noir – Calvage & Mounet

La lecture des programmes de mathématiques de nos lycées et collèges, voire de nos universités, pourrait laisser penser que la Géométrie est sur le déclin. Ce livre prouve brillamment qu'il n'en est rien. La « Géométrie des Grecs » est au contraire toujours aussi resplendissante. Si « géomètre » a certes cessé d'être synonyme de « mathématicien », la Géométrie reste plus que jamais la discipline reine des mathématiques, et la chronique royale que nous en donne ici Jean-Denis Eiden montre qu'elle n'est pas près d'abdiquer. Source irremplaçable pour l'intuition scientifique, la Géométrie a su préserver l'héritage façonné par ses maîtres d'œuvre, de l'Antiquité à nos jours, tout en s'enrichissant des apports de l'Algèbre et de l'Analyse. Qui dit géométrie dit bien sûr figures, et le lecteur ne pourra qu'être fasciné par celles dont ces pages sont parsemées. Réalisées avec les outils très puissants que nous offre l'informatique, elles contribuent à montrer combien vaine serait l'idée de réduire la géométrie à de l'algèbre, si raffinée soit-elle. Pour nous emmener à la conquête des droites, des triangles, des cercles, des coniques, l'auteur n'exige de nous que l'équipement minimal. Les concepts indispensables sont introduits au fur et à mesure, sans recherche gratuite de généralité. Les approfondissements ne sont suggérés qu'en seconde lecture, et seulement s'ils permettent de donner à une notion un nouvel éclairage ou d'illustrer un principe général important.

Avec rigueur et clarté, dans une langue impeccable qu'il manie avec un grand talent, Jean-Denis Eiden s'adresse évidemment avant tout aux amoureux de la géométrie, mais aussi à beaucoup de ceux qui ne le seraient pas encore… Son livre sera très utile aux étudiants de Licence, ainsi qu'aux candidats au CAPES ou à l'agrégation, qui y trouveront matière à donner de la chair à des leçons de géométrie, ou à illustrer des leçons d'algèbre avec des applications originales.

Ancien élève de l'ÉNS de Saint-Cloud et agrégé de mathématiques, Jean-Denis Eiden est professeur de Mathématiques Spéciales (MP*) au lycée Fabert à Metz.

9 782916 352084

Calvage & Mounet

http://www.calvage-et-mounet.fr

Prix : 37 €